Licence MIASHS, Année 2019/2020

Stage "Application des chaînes de Markov en imagerie". Petites questions, petits exercices...

L'algorithme de Metropolis pour le modèle d'Ising.

1. On sélectionne un site au hasard (loi uniforme).
2. On inverse le spin de ce site.
3. Si l'énergie de la nouvelle configuration est inférieure, c'est-à-dire si $\Delta U < 0$, on accepte le changement.
4. Si l'énergie de la nouvelle configuration est supérieure, c'est-à-dire si $\Delta U \geq 0$, on accepte le changement avec probabilité $\exp(-\Delta U)$ (et on ne change pas le spin avec probabilité $1-\exp(-\Delta U)$).

Exercice 1. Vérifier que pour l'algorithme de Gibbs et celui de Metropolis, la **probabilité invariante** de la chaîne de Markov simulée est bien la mesure de Gibbs correspondante.

Exercice 2.
1. Pour un tout petit nombre de sites, calculer les énergies de toutes les configurations du modèle d'Ising.
2. Que se passe-t-il si on simule un processus de la façon suivante ;

1. On sélectionne un site au hasard (loi uniforme).
2. On inverse le spin de ce site.
3. On accepte le changement si et seulement si l'énergie de la nouvelle configuration est inférieure, c'est à dire si et seulement si $\Delta U < 0$.

Simuler une loi de Bernoulli X de paramètre p. Rien de plus simple, il suffit de générer une loi uniforme sur $Z \sim]0,1[$. Si $Z \leq p$, alors on pose $X = 1$, et sinon on pose $X = 0$.

Exercice 3. Réécrire l'algorithme de Gibbs pour le modèle d'Ising.