MODELAGEM MATEMÁTICA E MÉTODO GRÁFICO[1]

Fev/2017 – Disciplina de Pesquisa Operacional –versão2

INTRODUÇÃO

O Desenvolvimento da Pesquisa Operacional

Durante a Segunda Guerra Mundial, um grupo de cientistas foi convocado na Inglaterra para estudar problemas de estratégia e de tática associados com a defesa do país. O objetivo era decidir sobre a utilização mais eficaz de recursos militares limitados. A convocação deste grupo marcou a primeira atividade formal de pesquisa operacional. Os resultados positivos conseguidos pela equipe de pesquisa operacional inglesa motivaram os Estados Unidos a iniciarem atividades semelhantes. Apesar de ser creditada à Inglaterra a origem da Pesquisa Operacional, sua propagação deve-se principalmente à equipe de cientistas liderada por George B. Dantzig, dos Estados Unidos, convocada durante a Segunda Guerra Mundial. Ao resultado deste esforço de pesquisa, concluído em 1947, deu-se o nome de Método Simplex.

Com o fim da guerra, a utilização de técnicas de pesquisa operacional atraiu o interesse de diversas outras áreas. A natureza dos problemas encontrados é bastante abrangente e complexa, exigindo, portanto, uma abordagem que permita reconhecer os múltiplos aspectos envolvidos.

Uma característica importante da pesquisa operacional e que facilita o processo de análise e de decisão é a utilização de modelos. Eles permitem a experimentação da solução proposta. Isto significa que uma decisão pode ser mais bem avaliada e testada antes de ser efetivamente implementada. A economia obtida e a experiência adquirida pela experimentação justificam a utilização da Pesquisa Operacional. Com o aumento da velocidade de processamento e quantidade de memória dos computadores atuais, houve um grande progresso na Pesquisa Operacional. Este progresso é devido também à larga utilização de microcomputadores, que se tornaram unidades isoladas dentro de empresas. Isso faz com que os modelos desenvolvidos pelos profissionais de Pesquisa Operacional sejam mais rápidos e versáteis, além de serem também interativos, possibilitando a participação do usuário ao longo do processo de cálculo.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Utilizando Pesquisa Operacional para resolver problemas

A seguir é apresentado um esquema para o processo de resolução de problemas na operação de um sistema, que pode ser uma fábrica, um serviço ou mesmo um sistema de transporte público, por exemplo. Tudo começa pela identificação de um problema real, ou seja, algo a ser melhorado. A visão do analista em relação ao problema real é limitada,

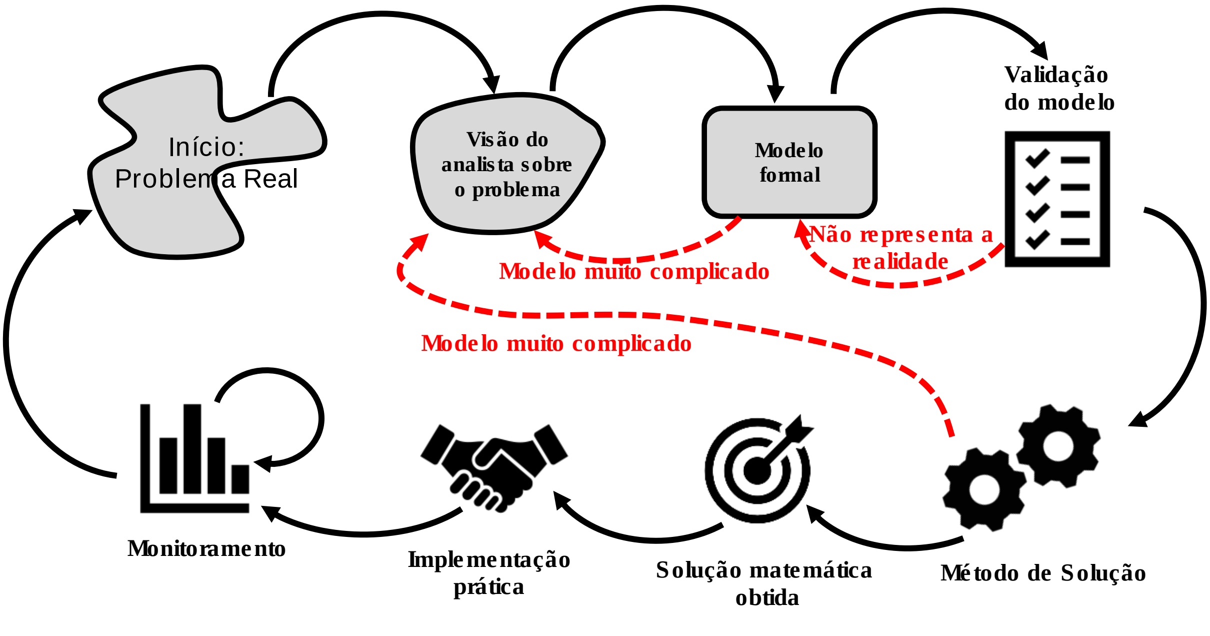
---

[1] Material originalmente preparado pelo prof. Ivo Costa Alves para a disciplina de introdução à engenharia na Universidade São Judas Tadeu. O material foi posteriormente adaptado e expandido pelo prof. Evandro José (prof.evandrojs@gmail.com).

pois ele é muitas vezes incapaz de perceber corretamente a realidade. A visão do analista também é propositalmente simplificada, de forma que detalhes desnecessários ao estudo em questão sejam deixados de lado, pois quanto mais complexo o problema, mais difícil será resolvê-lo. A partir do entendimento do problema, o analista tentará escrever um **modelo formal**, caso contrário, o problema não pode ser entendido por computadores nem pode ser resolvido por técnicas matemáticas.

Um modelo é uma **representação** de um sistema real, que pode já existir ou ser um projeto. No primeiro caso, o modelo pretende reproduzir o funcionamento do sistema real, de modo a melhorar alguma medida de desempenho (exs.: maior produtividade, menor tempo, menor custo e assim por diante). No segundo caso, o modelo é utilizado para definir a estrutura ideal do sistema, funcionando como uma metodologia de projeto. **Modelos matemáticos** são frequentemente utilizados em Pesquisa Operacional por serem estes bastante precisos. No entanto, modelos lógicos também podem ser utilizados, os quais são tratados com o uso de simuladores.

A confiabilidade da solução obtida através do modelo depende da sua **validação**. A validação do modelo é a confirmação de que ele realmente representa o sistema real. A validação é realizada comparando-se os resultados fornecidos pelo modelo com os resultados esperados, a partir da realidade estudada.



Se o modelo for considerado válido, ele será submetido a um **método de solução**, que emprega técnicas matemáticas e/ou computacionais. De acordo com seus respectivos métodos de solução, os modelos costumam ser separados em determinísticos e estocásticos. Os modelos determinísticos assumem que os dados que definem o problema são conhecidos com exatidão. Exemplos desse tipo de modelos são a PL (Programação Linear) e a PNL (Programação Não Linear). Por sua vez, os modelos estocásticos permitem uma abordagem probabilística. São exemplos desse tipo de modelo aqueles associados à teoria das filas e os modelos de simulação discreta. Este material se restringe à PL (Programação Linear), bastante utilizada na otimização de operações. Uma característica presente em quase todas as técnicas de programação matemática é que a solução ótima do problema não pode ser obtida em um único passo, devendo ser obtida iterativamente. É escolhida uma solução inicial (que geralmente não é a solução ótima).

Um algoritmo é especificado para determinar, a partir desta, uma nova solução, que geralmente é superior à anterior. Este passo é repetido até que a solução ótima seja alcançada (supondo que ela existe).

Uma vez obtida a solução do modelo, ela precisará ser implantada. Isso requer um planejamento adequado, caso contrário, a melhoria pode acabar trazendo transtornos. Mudanças costumam encontrar resistência, já que elas desafiam a zona de conforto das pessoas envolvidas. Uma boa estratégia para a implantação é "dividir para conquistar": através da qual se altera uma coisa de cada vez. Além disso, a implantação da solução precisa ser monitorada, de uma forma que se possa quantificar os benefícios das mudanças. Uma mudança brusca na rotina da empresa sem o devido monitoramento tenderá a trazer problemas.

Uma vez que as mudanças surtam efeitos e que as melhorias sejam perceptíveis, é possível aperfeiçoar ainda mais o processo ou produto, sofisticando-se as análises e reiniciando um ciclo de otimização. A seguir, discute-se a estrutura de um modelo matemático em Pesquisa Operacional.

Estrutura de Modelos Matemáticos

Em um modelo matemático, são incluídos três conjuntos principais de elementos: (1) variáveis de decisão e parâmetros: **variáveis de decisão** são as incógnitas a serem determinadas pela solução do modelo. **Parâmetros** são valores fixos no problema. (2) **restrições**: de modo a levar em conta as limitações físicas do sistema, o modelo deve incluir restrições que limitam as variáveis de decisão a seus valores possíveis (ou viáveis); (3) **função objetivo (FO)**: é uma função matemática que define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão.

Em modelos lineares, tanto a FO quanto as restrições devem ser baseadas exclusivamente em relações lineares. As variáveis de decisão podem ser **contínuas**, **discretas** ou **binárias**. As variáveis contínuas podem assumir valores fracionários (ex.: $x = 2{,}85$). As variáveis discretas podem assuir somente valores inteiros e as variáveis binárias só podem valer 0 ou 1.

EXEMPLO 1: A seguir é apresentado um exemplo de modelo matemático:

------------------------EXEMPLO1-----------------------------

$\boldsymbol{Vari}\text{á}\boldsymbol{veis\ de\ decis}\text{ão}: x1\ e\ x2$

$$\max Z = 2.x_1 + x_2$$

$s.a$:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$5.x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

---FIM-----------

Roteiro para elaboração de um modelo matemático:

Passo 1: Estudar o enunciado e escrever as fórmulas que descrevem o problema. Anotar tudo em conjunto com as unidades. Extrair os dados, converter as unidades para um sistema comum e montar tabelas de dados, se necessário.

Passo 2: Escolher as variáveis de decisão. Elas representam o que pode ser alterado no problema.

Passo 3: O que se deseja melhorar? É uma maximização ou minimização? Como pode ser escrita uma FO?

Passo 4: Quais são os fatores que restringem o desempenho do problema? Ex.: limite de horas; número máximo de máquinas; falta de capital para investimento, etc. Escrever uma restrição para cada fator limitante.

Passo 5: As variáveis podem ser negativas e contínuas, ou devem ser inteiras, binárias e positivas? Especificar com cuidado o tipo de cada variável.

Passo 6: É possível simplificar o modelo? Equações podem ser reescritas para diminuir o número de variáveis ou de restrições?

Passo 7: O modelo matemático representa a realidade? Ele pode ser resolvido por algum método de otimização? Se está tudo OK, FIM; senão, voltar ao Passo1.

Para melhor ilustrar ao conjunto acima, considere o seguinte exemplo:

EXEMPLO 2: Em um conjunto de obras em fase de implantação, uma empreiteira pode escolher entre dois tipos de tapumes: T1 e T2, ambos com 2,2m de altura. Enquanto o material referente a T1 custa R$ 35/m^2, T2 exige R$ 55/m^2. Para a instalação dos tapumes, o tipo T1 exige que um operário trabalhe por 0,8h até completar 1m^2. Já T2 requer apenas 0,5h/m^2, para cada trabalhador. Considerando-se um turno de 8 horas e 4 dias úteis, e que os diferentes tapumes possam ser combinados em uma mesma obra, qual será a forma mais econômica de se atingir uma produção de 600 m^2, com o emprego de 12 carpinteiros?

SOLUÇÃO: Seguiremos os 7 passos para estruturar o modelo.

Passo 1:

O custo do material pode ser assim descrito:

$$Custo[R\$] = quantidade[\cancel{m^2}] \times custo\ unitário\ [\frac{R\$}{\cancel{m^2}}]$$

A quantidade de horas-homem disponíveis (THh):

$$THh = 4[\cancel{dias}] \times 8 \left[\frac{horas}{\cancel{dia}}\right] \times 12[homens] = 384[H.h]$$

E a produção:

$$Produção[m^2] = Produtividade \left[\frac{m^2}{\cancel{H.h}}\right] \times Trabalho\ realizado[\cancel{H.h}]$$

$$Produção[m^2] \geq 600[m^2]$$

Dessa forma, já é possível descrever todas as relações envolvidas no problema, bem como suas fórmulas. Segue o passo2.

Passo 2:

A decisão envolvida no problema corresponde às quantidades a serem produzidas para T_1 e para T_2, em m^2.

Passo 3:

A decisão mais econômica para este problema será a decisão de mínimo custo, ou seja, será um problema de minimização:

$$\min Z = 35 \times T_1 + 55 \times T_2$$

$$\left[\frac{R\$}{m^2}\right] \times [m^2] = [R\$]$$

Passo 4:

Os fatores limitantes são a produção mínima:

$$T_1 + T_2 \geq 600$$

E o limite de horas-homem para a conclusão da obra:

$$0{,}8. T_1 + 0{,}5. T_2 \leq 384$$

Passo 5:

As variáveis de decisão, T_1 e T_2, são contínuas, mas não podem assumir valores negativos:

$$T_1, T_2 \geq 0$$

Passo 6:

O modelo não pode ser simplificado.

Passo 7:

FIM da modelagem, culminando em:

------------------EXEMPLO2------------------------------------

$\boldsymbol{Vari}$á$\boldsymbol{veis\ de\ decis}$ã$\boldsymbol{o}$: $T1\ e\ T2\ representando\ as\ quantidades\ de\ cada\ tipo\ de\ tapume, em\ m^2$.

$$\min Z = 35 \times T_1 + 55 \times T_2$$

$s.a$:

$$T_1 + T_2 \geq 600$$

$$0{,}8. T_1 + 0{,}5. T_2 \leq 384$$

$$T_1, T_2 \geq 0$$

---FIM-----------

Se analisarmos o modelo, verificamos que:

A) As variáveis não podem assumir valores negativos;

B) Se as variáveis assumirem (0,0), então a restrição de produção mínima não é obedecida;

C) Se as variáveis assumirem valores muito altos, a restrição de horas-homem será violada.

Então como é possível encontrar-se um solução que atenda às restrições e ainda minimize o valor de Z?

Como se trata de um problema de PL (Programação Linear) com apenas duas variáveis, é possível resolver graficamente.

MÉTODO GRÁFICO DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM PL[2]

Este método exige a utilização de papel milimetrado ou ao menos régua e esquadro.

Roteiro:

Passo 1: Transformar as inequações em equações. Toda inequação do modelo representa o limite entre uma porção viável e uma porção inviável do espaço de solução. Os valores (x,y) sobre a reta representam o sinal de " = " e os valores em cada um dos lados da reta representam os operadores de desigualdade. Logo, cada restrição de desigualdade só pode ser viável em um dos dois lados da reta. Restrições com sinal de igualdade serão atendidas somente por soluções sobre a reta.

Passo 2: Determinar a faixa de variação dos dois eixos. Este passo não possui um algoritmo exato e depende de tentativa e erro até que se obtenha um bom ajuste da região de interesse. Uma regra prática é que devem estar representadas no gráfico as intersecções entre as retas das restrições. Representar a interseção das restrições com os eixos também ajuda.

Passo 3: Representar as retas das restrições e indicar em qual sentido da reta as soluções são viáveis.

Passo 4: Com base nas restrições, delimitar a região viável. Caso não exista região viável para o problema, ele será considerado um **problema inviável**.

Passo 5: Representar a reta da Função Objetivo (FO). Ela será utilizada para determinar a solução ótima. Para tanto, basta arbitrar um valor qualquer para Z, ou então, escolher um ponto qualquer (x,y) que se encontre na região visível do gráfico e calcular Z.

Passo 6: Construir retas imaginárias paralelas à reta da FO. Para cada nova reta, o valor de Z será alterado. Soluções sobre a reta possuem valores idênticos de Z. A solução ótima estará no limite da região viável. Caso a reta Z continue a crescer na direção de uma região que não é limitada por uma inequação, então se trata de um **problema ilimitado**, portanto, sem solução ótima, mas com infinitas soluções viáveis. Caso a reta Z encontre um único ponto no limite da região viável, o problema possui uma **única solução ótima**. Mas caso a reta Z seja paralela a uma restrição limitante, o problema possui **múltiplas soluções ótimas**.

Vamos agora aplicar estes passos na resolução do Exemplo1.

---

[2] Esta página permite a elaboração de gráficos online: http://www.zweigmedia.com/utilities/lpg/index.html?lang=en

Passo1:

-------------------MODELO1 REESCRITO----------------------------

$$\max Z = 2.x_1 + x_2$$

$s.a$:

$x_1 + x_2 = 2$

$5.x_1 + x_2 = 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

---FIM-----------

<u>**Passo2:**</u> Como as variáveis de decisão são restritas em sinal, é necessário representar somente a parte positiva dos dois eixos.

O cruzamento das restrições pode ser avaliado através do sistema:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 = 2 \\ 5.x_1 \; + x_2 = 10 \end{cases} \qquad \qquad (\times -1)$$

$$\begin{cases} -x_1 - \cancel{\quad x_2} = -2 \\ 5.x_1 \; \cancel{+ x_2} = 10 \end{cases}$$

Segue que:

$$4.x_1 \; = 8$$

$$x_1 = 2$$

Substituindo-se, temos:

$$x_1 + \quad x_2 = 2$$

$$2 + \quad x_2 = 2$$

$$x_2 = 0$$

Logo, o cruzamento das retas se dá em (2,0)

Resta agora saber onde as retas R1 e R2 cruzam o eixo vertical:

R1:

$$x_1 + \quad x_2 = 2$$

Se $x_1 = 0, então \;\; x_2 = 2$

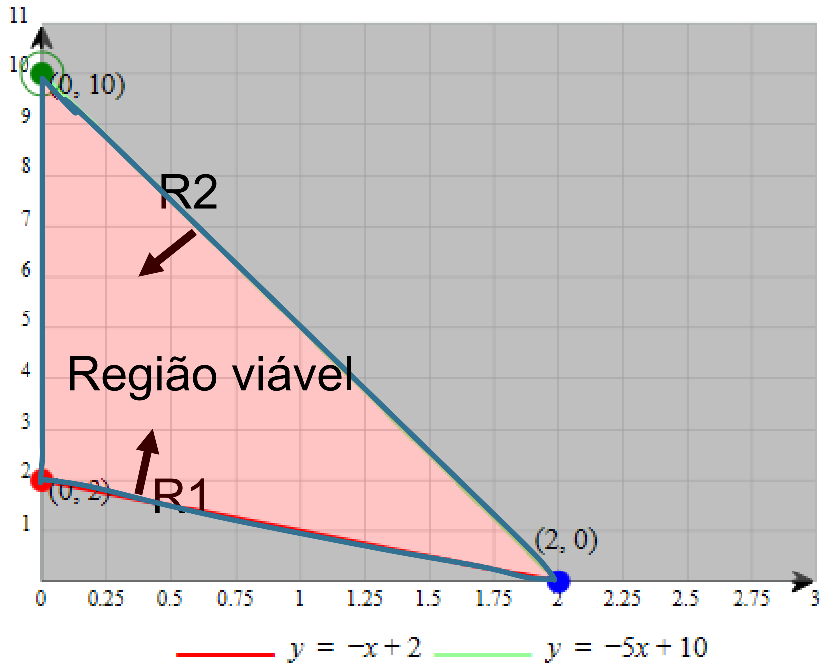
R2:

$$5.x_1 \; + x_2 = 10$$

Se $x_1 = 0, então \;\; x_2 = 10$

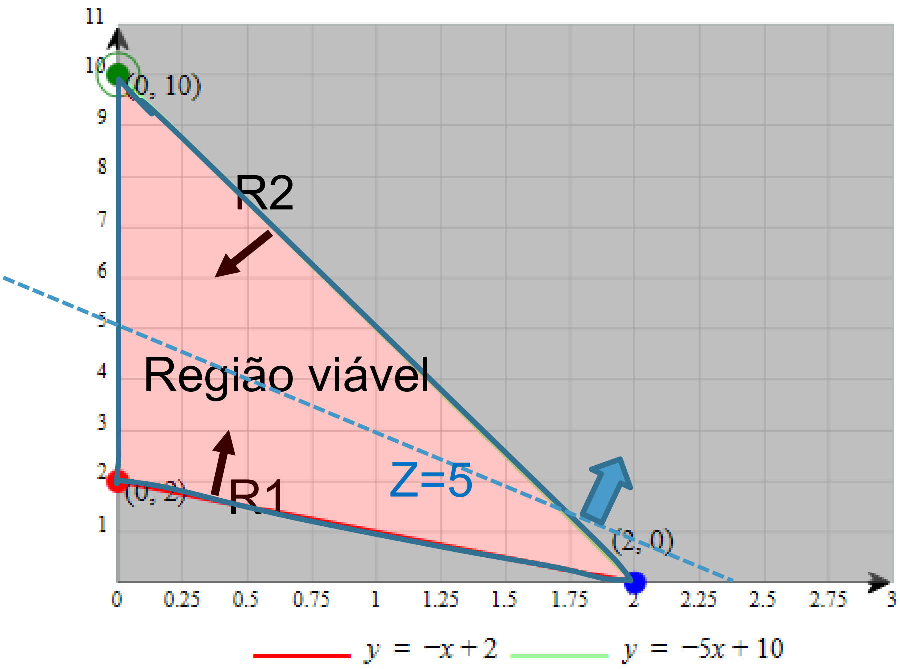
Logo, será necessário representa no eixo x uma variação de 0 a 2 e no eixo y uma variação de 0 a 10.

Passos 3 e 4:

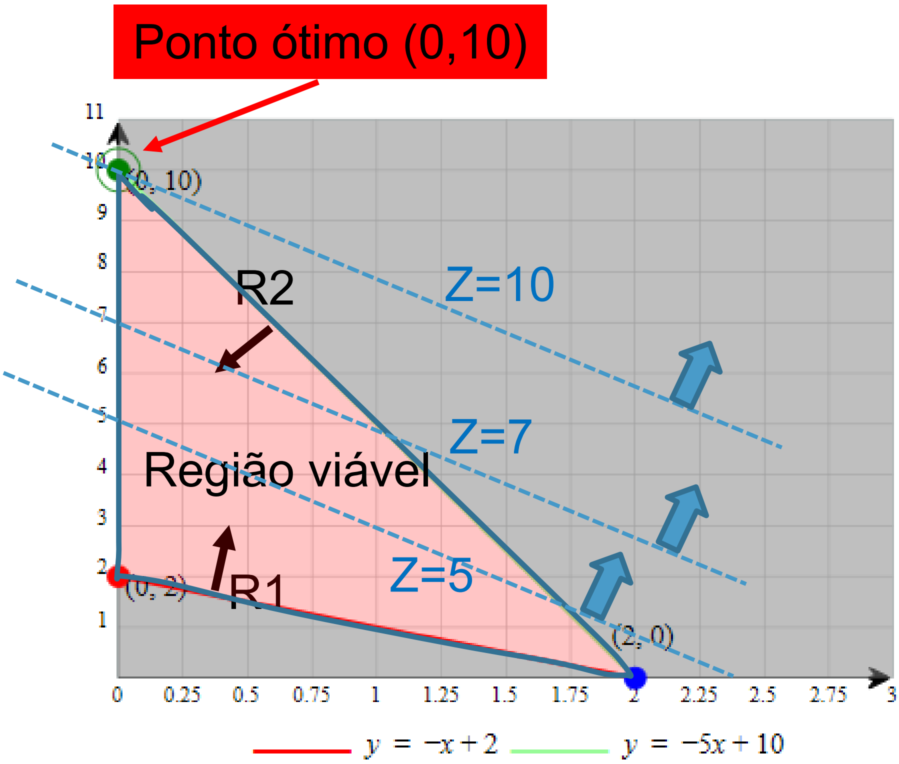


Passos 5:

Para a construção da reta Z, vamos escolher um ponto visível no gráfico, que pode ser o ponto (1,3). Neste ponto, Z=5. Para a construção de uma reta, bastam dois pontos. Se arbitrarmos x=0, então temos um segundo ponto para a reta (0,5). Graficamente, fica:



Passo 6: Como a função Z melhora na direção positiva dos dois eixos, é possível construir retas com soluções melhores, até que se atinja a fronteira da região viável:



Assim, pode-se notar que o problema é viável e possui uma única solução ótima (0,10), como Z=10.

PERGUNTA1: O que aconteceria se a FO fosse alterada para: $\max Z = 5.x_1 + x_2$?

-> Neste caso, todas as soluções que se encontram sob segmento de reta entre os pontos (0,10) e (2,0) seriam ótimas com $Z = 10$.

PERGUNTA2: E o que aconteceria se a FO fosse alterada para: $\min Z = 2.x_1 + x_2$?

-> Neste caso, a solução melhoraria no sentido negativo de ambos os eixos. Logo, o melhor ponto na região viável seria (0,2), como Z=2.

EXEMPLO3:“Uma empresa de comida canina produz dois tipos de rações: Tobi e Rex”. Para a manufatura das rações são utilizados cereais e carne. Sabe-se que:

- ☑ a ração Tobi utiliza 5 kg de cereais e 1 kg de carne, e a ração Rex utiliza 4 kg de carne e 2 kg de cereais;
- ☑ o pacote de ração Tobi custa $ 20 e o pacote de ração Rex custa $ 30;
- ☑ o kg de carne custa $ 4 e o kg de cereais custa $ 1;
- ☑ estão disponíveis por mês 10 000 kg de carne e 30 000 kg de cereais.

Deseja-se saber qual a quantidade de cada ração a produzir de modo a maximizar o lucro. Neste problema, as variáveis de decisão são as quantidades de ração de cada tipo a serem produzidas. Os parâmetros fornecidos são os preços unitários de compra e venda, além das quantidades de carne e cereais utilizadas em cada tipo de ração. As restrições são os limites de carne e cereais e a função objetivo é uma função matemática que determine o lucro em função das variáveis de decisão e que deve ser maximizada.

MODELAGEM DO EXEMPLO3:

Passo1:

A Tabela 1 abaixo apresenta o cálculo do lucro unitário de cada ração.

Tabela 1 – Dados do problema

Cálculo do lucro unitário de cada ração		
	Ração Tobi (x_1)	Ração Rex (x_2)
Custo da carne	1 kg x $4 = $4	4 kg x $4 = $16
Custo dos cereais	5 kg x $1 = $5	2 kg x $1 = $2
Total	$9	$18
Preço	$20	$30
Lucro	$11	$12

Passo 2: Nosso modelo deseja maximizar o lucro (Z) a partir da quantidade de ração Tobi (x_1) e de ração Rex (x_2). Logo as variáveis de decisão representam quantidades em kg.

Passo 3: Cada tipo de ração produzida tem seu próprio coeficiente de lucro de forma que:

$$max: Z = 11.x_1 + 12.x_2$$

Passo 4: Os limites do problema são as quantidades de carne e de cereais que podem ser empregadas.

Restrições: $1.x_1 + 4.x_2 \leq 10.000$ (restrição de carne)

$5.x_1 + 2.x_2 \leq 30.000$ (restrição de cereais)

Passo 5: as quantidades de rações produzidas devem ser positivas

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Passo 6: Simplificações não podem ser aplicadas.

Passo 7: O modelo chegou ao seu fim:

-------------------EXEMPLO3---------------------------

$$max: Z = 11.x_1 + 12.x_2$$

$s.a$:

$$1.x_1 + 4.x_2 \leq 10.000$$

$$5.x_1 + 2.x_2 \leq 30.000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

--FIM-----------

SOLUÇÃO GRÁFICA

Este problema com apenas duas variáveis pode ser resolvido graficamente. Traça- se um gráfico com os seus eixos sendo as duas variáveis x1 e x2. A partir daí, traçam-se as retas referentes às restrições do problema e delimita-se a região viável, conforme as Figuras 1, 2 e 3 a seguir:

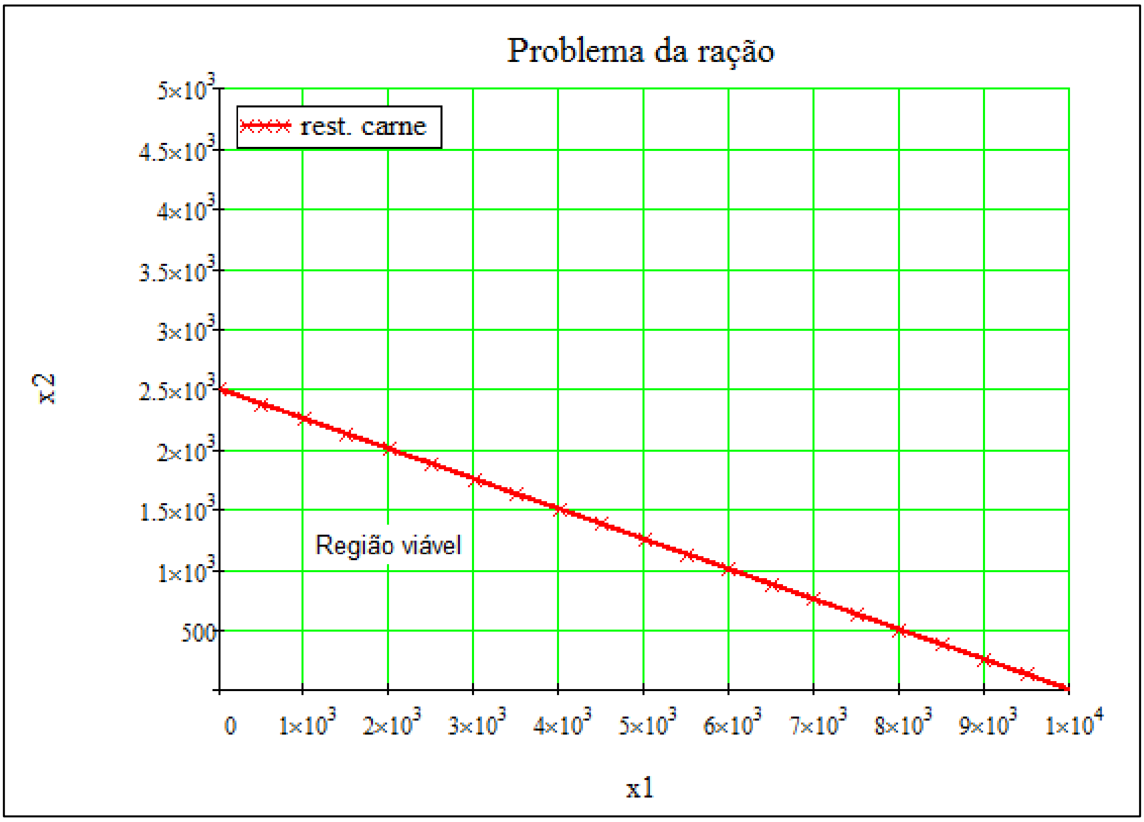


Figura 1: Restrição de carne

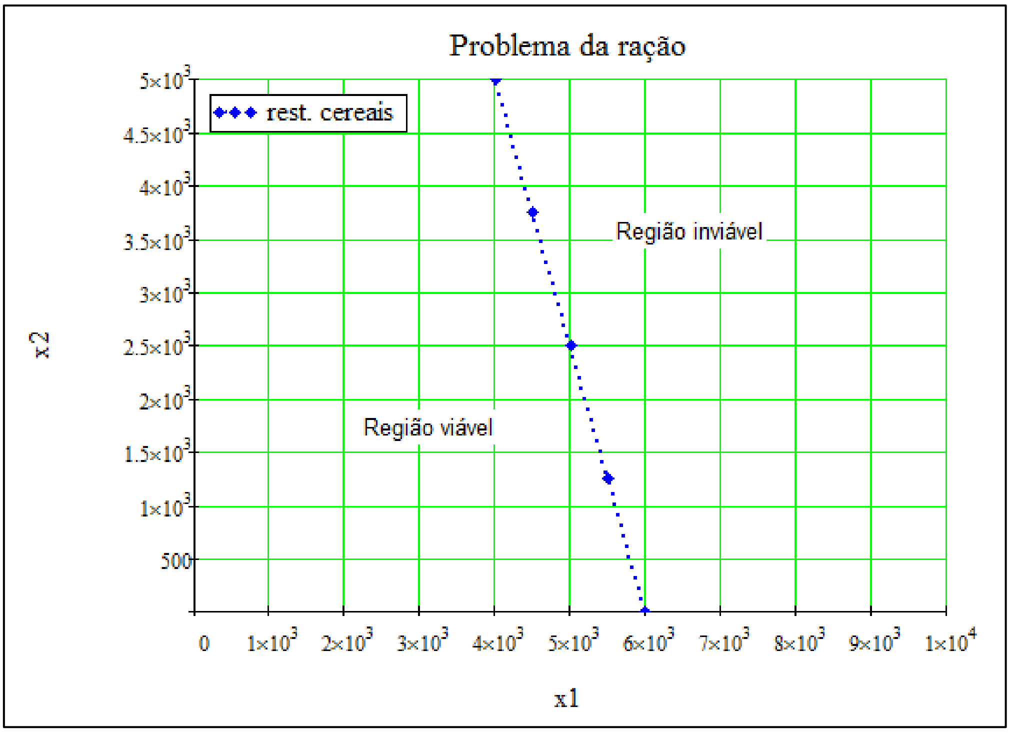


Figura 2: Restrição de cereais

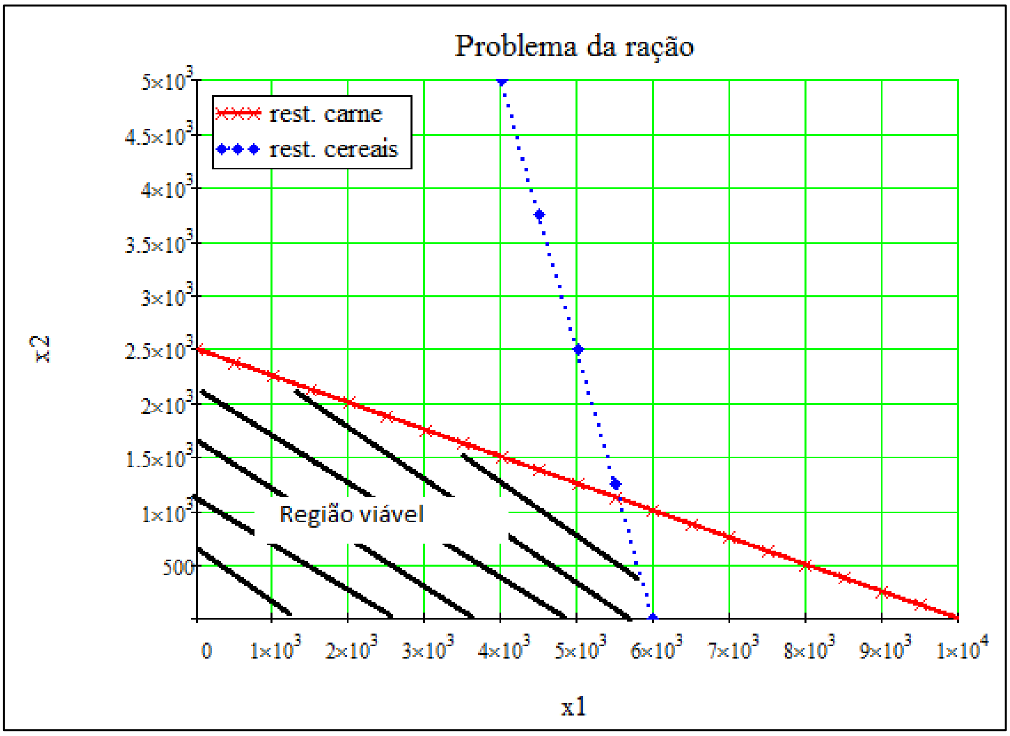


Figura 3: retas de restrições e região viável

Encontrada a região viável, deve-se traçar uma reta com a inclinação da função objetivo. São então traçadas diversas paralelas a ela no sentido de Z crescente (maximização da função), como na Figura 4, abaixo. O ponto ótimo é o ponto onde a reta de maior valor possível corta a região viável (normalmente corta em um vértice, mas pode ser também em um segmento de reta).

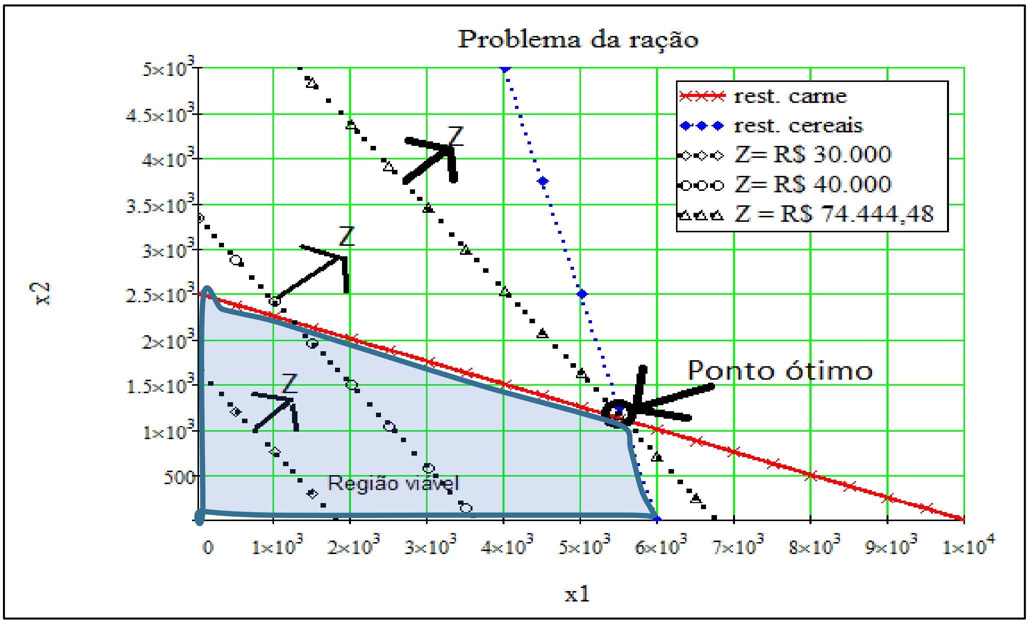


Figura 4: função objetivo (Z) e ponto ótimo

Pelo gráfico é difícil ler as coordenadas do ponto ótimo. Felizmente, tal ponto pode ser encontrado pela resolução de um sistema linear.

$1.x_1 + 4.x_2 = 10.000$ (equação I)

$5.x_1 + 2.x_2 = 30.000$ (equação II)

Multiplicando a equação (I) por cinco e subtraindo a equação (II):

$5.x_1 + 20.x_2 = 50.000$

$-(5.x_1 + 2.x_2 = 30.000)$

$0 + 18.x_2 = 20.000$ ⇒ Logo ⇒ $x_2 = 1.111,11$

Faz-se a substituição na Eq. II original, temos:

$5.x_1 + 2.x_2 = 30.000$

$5.x_1 + 2.(1.111,11) = 30.000 \Rightarrow 5.x_1 = 30.000 - 2.(1.111,11) \Rightarrow x_1 = 5.555,56$

Lucro maximizado será:

$Z = 11.x_1 + 12.x_2$

Z = 11 x 5.555,56 + 12 x 1.111,11 = $ 74.444,48

Assim, no problema estudado, considerando os custos e os preços (que são os coeficientes do modelo) e as quantidades máximas de ingredientes (restrições do modelo), a melhor decisão é produzir 1.111 pacotes da ração Tobi e 5.555 pacotes da ração Rex.

OBS.: Ao arredondar, verificar se as restrições não são violadas. O arredondamento para números inteiros é obrigatório neste problema, pois não é conveniente representar o pacote de ração de maneira fracionária.

PARTE PRÁTICA

1. Uma empresa fábrica mesas para escritório. Há 2 tipos distintos de mesa: standard e de luxo. Ambos os tipos de mesa são construídas em 2 etapas: montagem e acabamento. O modelo *standard* necessita de 2 horas de montagem e 1 hora de acabamento. O modelo luxo necessita de 1 hora de montagem e 2 horas de acabamento.

Sabe-se que nesta empresa há, diariamente, 104 horas máximas disponíveis para montagem e 76 horas máximas disponíveis para acabamento. Para venda, sabe-se que a mesa *standard* gera $ 200 de lucro ao passo que a mesa luxo gera $ 350 de lucro.

Qual a combinação ótima fabricação dessas mesas no intuito de maximizar o lucro?

Sugestão:

a. Monte a função objetivo;
b. A partir das variáveis da função objetivo, monte as restrições;
c. Resolva graficamente o problema;
d. Resolver também pelo método algébrico (assumindo que a solução ótima se encontra na intersecção das restrições).

2. Uma empresa de bebidas deseja engarrafar e rotular dois tipos diferentes de cervejas. Para a bebida "Cerveja To Be", 2 minutos são gastas para engarrafar uma remessa e, a rotulagem gasta 1 minuto. Para a bebida "Cerveja Bado", 3 minutos são gastas para engarrafar uma remessa, sendo que são gastos 4 minutos para a rotulagem. Uma remessa de "To Be" gera $10 de lucro ao passo que uma remessa de "Bado" gera $ 20 de lucro. Sabe-se que há restrições tanto na parte de engarrafamento quanto na parte de rotulagem. Há, no máximo, 20 horas diárias para engarrafar os produtos e há, no máximo, 15 horas diárias para rotulagem.

Qual a combinação ótima entre os produtos "To Be" e "Bado" para maximizarmos o lucro?

Sugestão:

a. Monte a função objetivo;
b. A partir das variáveis da função objetivo, monte as restrições;
c. Resolva graficamente o problema;
d. Resolver também pelo método algébrico (assumindo que a solução ótima se encontra na intersecção das restrições).

3. A representação gráfica abaixo (Figura 5) indica a maximização de lucro da empresa "Blocos de Madeira Ltda".

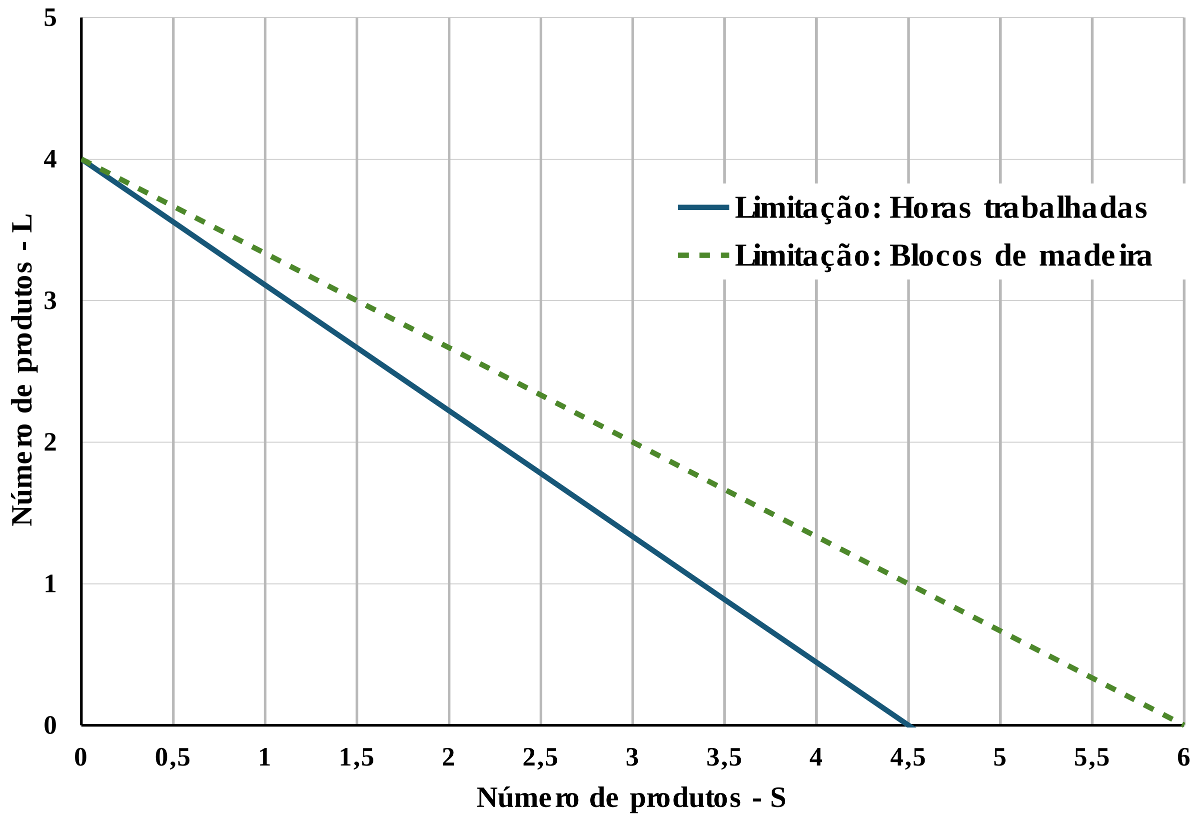


Figura 5: gráfico com as restrições

Pede-se:

a) Monte a função-objetivo, sabendo-se que o lucro máximo é de $600 e que $90,00 é o lucro unitário por venda produto S.

b) Monte as equações e as restrições dos processos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Um gerente de marketing deseja maximizar o número de pessoas expostas às propagandas da companhia:
Fazendo uso de televisão, o gerente sabe que terá acesso a 20 milhões de pessoas por anúncio.
Fazendo uso de revistas, o gerente sabe que terá acesso a 10 milhões de pessoas por anúncio.
Um anúncio televisivo custa $75.000 ao passo que um anúncio em revista custa $40.000.
O gerente tem orçamento de 2.000.000 e deve, obrigatoriamente, fazer 20 anúncios em revista.
Pede-se:

a) Qual o mix de produtos que satisfaz as necessidades do gerente de marketing?
b) Monte a função objetivo
c) Em função das variáveis da função objetivo, monte as restrições
d) Resolva graficamente o problema

2. Considere uma empresa que produz dois produtos X e Y utilizando três equipamentos distintos: um torno (T), uma prensa (P) e uma furadeira (F). Cada máquina conta, respectivamente, com 180, 240 e 600 horas disponíveis, sendo que cada produto é obrigado a passar por todas elas. O produto X passa três horas em T, duas horas em P e seis horas em F. O produto Y passa duas horas em T, quatro horas em P e cinco horas em F. Quanto a empresa deve produzir de X e Y de forma a ter a maximização do lucro?

Características das máquinas e processo:

	Máquinas					
PRODUTO	T (h)	P (h)	F (h)	VENDA $	CUSTO $	LUCRO $
X				60	39	
Y				80	60	
Tempo (horas)						

3. Uma empresa do segmento entretenimento doméstico, fabrica 2 tipos de produtos - Alfa e Beta. Para tal feito, a empresa recorre a duas etapas de seu processo produtivo, o processo Injeção plástica e o de pintura/estufa. No processo, a disponibilidade diária nas etapas de injeção e pintura/estufa, são respectivamente, 24 horas e 16 horas. Na representação abaixo, seguem os dados apropriados referentes aos produtos:

- <u>Produto Alfa:</u>

Etapa de Injeção plástica: 5 minutos/peça (Tempo padrão)

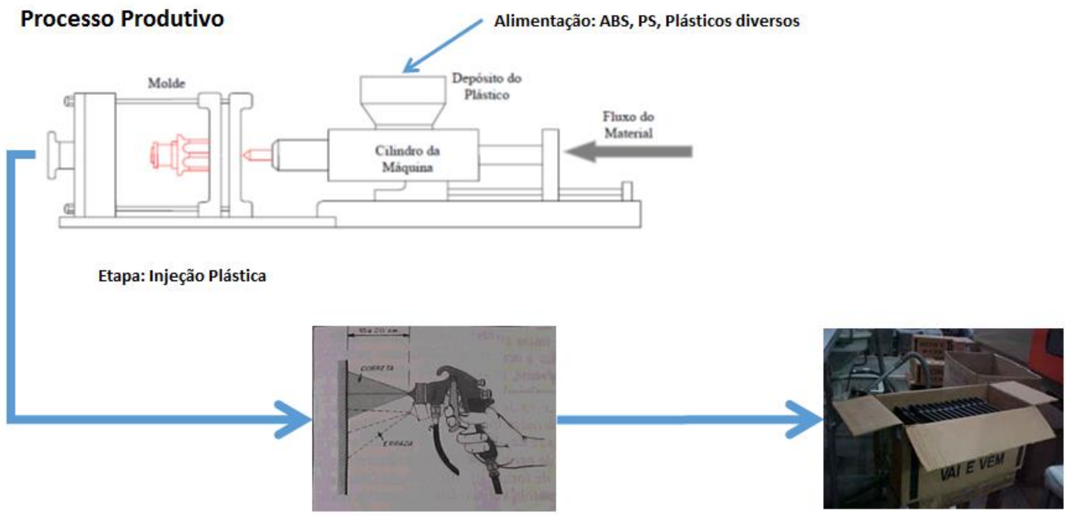
Etapa Pintura - Estufa: 10 minutos/peça (Tempo padrão)

- <u>Produto Beta:</u>

Etapa de Injeção plástica: 9 minutos/peça (Tempo padrão)

Etapa Pintura - Estufa: 4 minutos/peça (Tempo padrão)

- <u>Processo:</u>



Etapa: Pintura e Secagem

- Objetivo: Dada uma empresa com fins lucrativos, como combinar a produção de seus recursos no intuito de maximização de lucros.

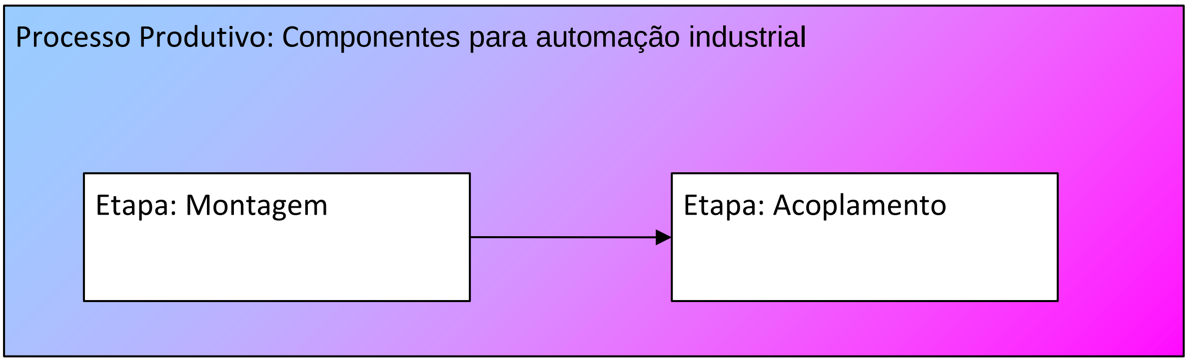
- Lucros: Produto Alfa é R$ 1,20/unidade e o Produto Beta é R$ 0,90/unidades.

Pede-se:

Qual a combinação ótima de produtos para esta organização obter maior de lucro – lucro mensal?

4. Uma empresa de autopeças fabrica engrenagens para automóveis, atualmente em seu processo produtivo tem duas missões: a confecção da engrenagem para modelos esportivos (E_{sport}) e a engrenagem Clássica ($E_{classic}$). Sendo que para a fabricação do produto $E_{classic}$, são demandados 4 minutos na etapa de torneamento e 6 minutos no setor de fresa. No produto E_{sport}, por se tratar de uma peça com um maior grau de detalhes são necessários 10 minutos no torno e 5 minutos na etapa das fresas. O setor de tornos tem uma carga horária de 20 horas por dia e o setor das fresas trabalha 12 horas por dia. Para as vendas, sabe-se que o produto $E_{classic}$ corrobora no lucro de $ 2.500,00 por unidade vendida, ao passo que o produto E_{sport} gera $ 3.950,00 por unidade. Qual a combinação ótima para proporcionar um maior retorno financeiro para a organização (resolução gráfica)?

5. Uma empresa fábrica componentes para automação industrial. Há 2 tipos distintos de componentes: o XST10 e o XST30. Ambos os tipos de produtos são construídos em 2 etapas: montagem e acoplamento. O modelo XST10 necessita de 30 minutos de montagem e 50 minutos de acoplamento. O modelo XST30 necessita de 60 minutos de montagem e 20 minutos de acoplamento. Sabe-se que nesta empresa há, diariamente, 24 horas máximas disponíveis para montagem e 16 horas máximas disponíveis para acoplamento. Para venda, sabe-se que o produto XST10 corrobora no lucro de $ 8.000,00 por unidade vendida, ao passo que o componente XST30 gera $ 12.000,00 por unidade. Qual a combinação ótima de combinação ou mesmo a produção única para proporcionar um maior retorno financeiro para a organização?



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, L. A. Introdução à pesquisa operacional: Métodos e modelos para análise de decisões. 4ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. Pesquisa operacional. 1ª edição. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- BATALHA, Mário Otávio, (org.). Introdução à Engenharia de Produção. 4a. tiragem. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.
- BARBOSA, Geraldo Magela, Utilização da programação linear na otimização de resultados de produção na empresa; Revista Integração, Ano XX, no. 66, pp 49-58, 2016.
- HILLIER, F. S; LIEBERMAN, G. Introdução à pesquisa operacional. 8ª edição. São Paulo: McGraw-Hill, 2010.
- HOLTZAPPLE, M. T. e REECE, W. D.; Introdução à Engenharia; LTC Editora, 2006.
- LACHTERMACHER, Gerson. Pesquisa Operacional na tomada de decisões. 4a Ed. São Paulo: Pearson, 2009.
- LISBOA, E.F.A. Notas de Aulas do Curso de Pesquisa Operacional da Universidade Estácio de Sá.. Disponível em: <http://www.ericolisboa.eng.br>. Acesso em: 02 de maio 2007.