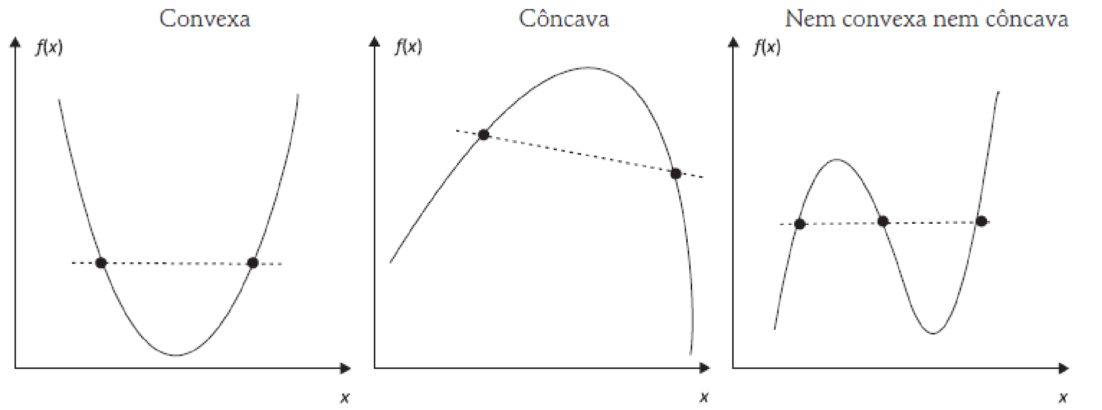
CONVEXIDADE E OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES IRRESTRITAS COM 1 E 2 VARIÁVEIS

1) A questão da convexidade

Esta é uma questão central na área de otimização não linear, observando-se as seguintes relações conforme Belfiore e Fávero (2013):



As seguintes propriedades são válidas para funções convexas e côncavas:
- Se $f(x)$ é convexa, então todo mínimo local será sempre o mínimo global
- Se $f(x)$ é côncava, então todo máximo local será sempre o máximo global
- Se $f(x)$ é convexa, então $-f(x)$ é côncava (e vice-versa)
- Funções lineares são tanto convexas quanto côncavas
- Se $f(x)$ é convexa, então $g(x) = 1/f(x)$ é côncava, $\forall x \;|\; f(x) < 0$
- Se $f(x)$ é côncava, então $g(x) = 1/f(x)$ é convexa, $\forall x \;|\; f(x) > 0$
- Se $f(x)$ é estritamente convexa, então possui no máximo um ponto de mínimo
- Se $f(x)$ é estritamente côncava, então possui somente um ponto de máximo

Figura 1 – Funções côncava, convexa e nem côncava nem convexa.

Para funções de uma só variável, o teste de convexidade pode ser feito pela análise do sinal da derivada de segunda ordem, conforme Belfiore e Fávero (2013):

Caso 1

Se $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} \geq 0$ para $\forall x \in S$, $f(x)$ é uma função convexa em S.

Caso 2

Se $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$ para $\forall x \in S$, $f(x)$ é uma função estritamente convexa em S.

Caso 3

Se $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} \leq 0$ para $\forall x \in S$, $f(x)$ é uma função côncava em S.

Caso 4

Se $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} < 0$ para $\forall x \in S$, $f(x)$ é uma função estritamente côncava em S.

EXEMPLO A: Analise a convexidade da função $f(x) = 3x^3 + 2x$

Solução: $\frac{d^2y}{dx^2} = 18x$. Logo, a função não é nem côncava e nem convexa.

EXEMPLO B: Analise a convexidade da função $f(x) = 3x^2 + 8x$

Solução: $\frac{d^2y}{dx^2} = 6$. Logo, a função é convexa.

Para 2 ou mais variáveis a matriz de *Hess* precisa ser utilizada para testar a convexidade. Embora estes casos não sejam abordados na disciplina, o aluno interessado pode complementar os estudos com essa leitura: (BELFIORE e FÁVERO, 2013, p. 430-433). Ainda, o texto de (LIEBERMAN e HILLIER, 2013) pode ser consultado para o mesmo fim.

ÓTIMOS ABSOLUTOS E RELATIVOS

Em um intervalo fechado, um ótimo absoluto corresponde ao ponto de melhor valor da função no intervalo. Já um ótimo relativo é o melhor valor para uma vizinhança. Estas notas de aula são uma boa referência para complementar o assunto: (MENEZES, s.d.) LINK

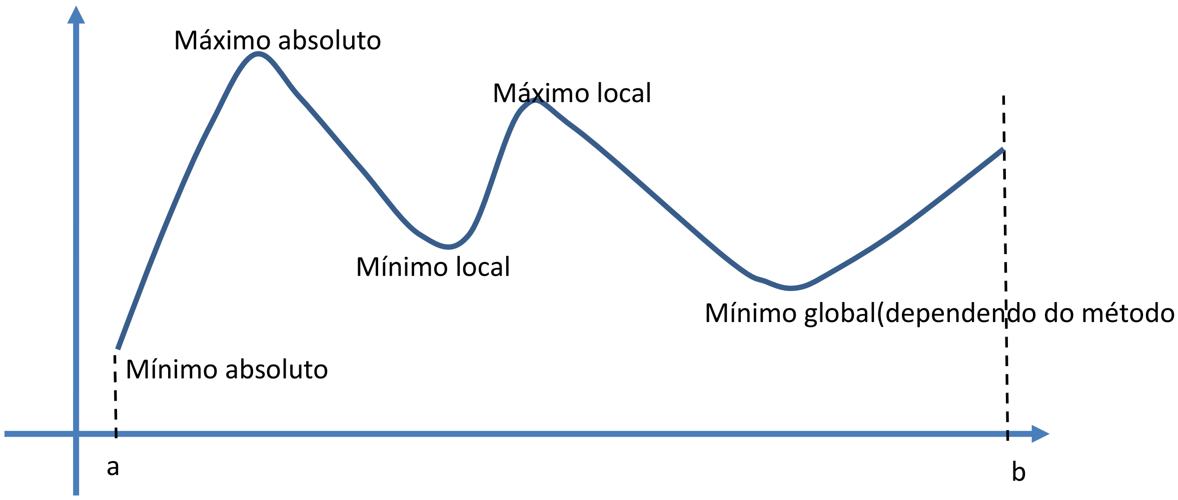


Figura 2 – Ótimo absoluto, local e global de uma f(x) em um intervalo fechado.

FONTE: Elaborado pelo autor

2) Otimização de funções irrestritas de uma variável

Para uma função de uma única variável, para cada ponto crítico, determinar f(x). Caso a função seja estritamente côncava ou convexa, então haverá somente um ponto crítico onde a primeira derivada é nula. O sinal da derivada de segunda ordem dirá se o ótimo é máximo ou se é mínimo.

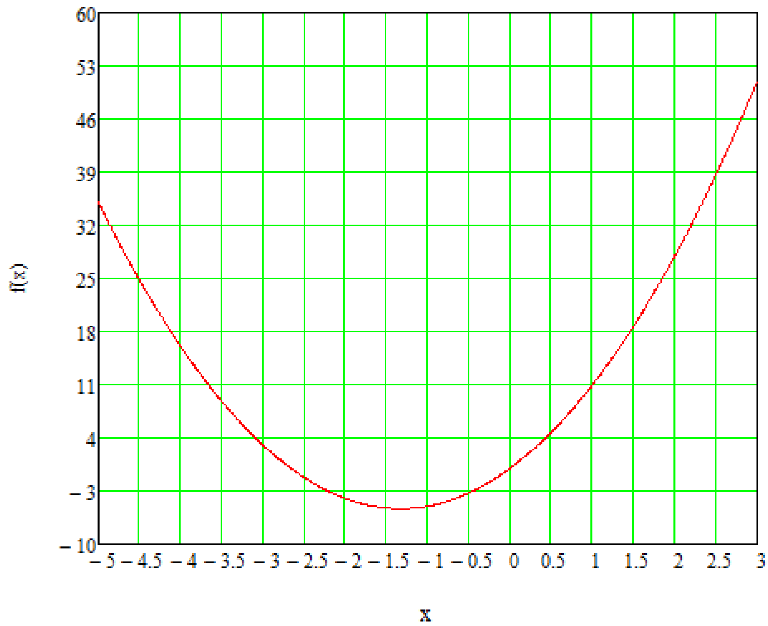
EXEMPLO C: Determine o ponto ótimo da seguinte função: $f(x) = 3x^2 + 8x$

Solução:

$\frac{d^2f}{dx^2} = 6$ Logo é uma função estritamente convexa com somente um ponto de mínimo, no qual $\frac{df}{dx} = 0$

$6x + 8 = 0$

$x = -4/3$



PONTOS CRÍTICOS

O ponto crítico da função é aquele no qual a derivada é nula ou indefinida. Todo extremo relativo é um ponto crítico, mas nem todo ponto crítico é um extremo relativo. (MENEZES, s.d.)

3) Otimização de funções irrestritas duas variáveis (superfícies)

OTIMIZAÇÃO CLASSICA: MÁXIMOS E MINIMOS

Otimização sem restrições

Superfícies: Máximos e Mínimos

Uma função f de duas variáveis possui um mínimo relativo (ou local) no ponto (x_0,y_0) se

$$\forall\ (x,y) \in Viz(x_0,y_0),\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$

Uma função f de duas variáveis possui um máximo relativo (ou local) no ponto (x_0,y_0) se

$$\forall\ (x,y) \in Viz(x_0,y_0),\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

Uma função f de duas variáveis possui um mínimo absoluto (ou global) no ponto (x_0,y_0) se

$$\forall\ (x,y) \in Dom(f),\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$

Uma função f de duas variáveis possui um máximo absoluto (ou global) no ponto (x_0,y_0) se

$$\forall\ (x,y) \in Dom(f),\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

Superfícies: Teorema do Valor Extremo

Se f é uma função contínua em uma região fechada e limitada R, então f possui máximo e mínimo absolutos em R.

Observação: Note que se a região não for limitada ou não for fechada ou a função não for contínua, nada se pode afirmar sobre a existência de máximos e mínimos absolutos.

Funções de Duas Variáveis: Determinação de Máximos e Mínimos Relativos

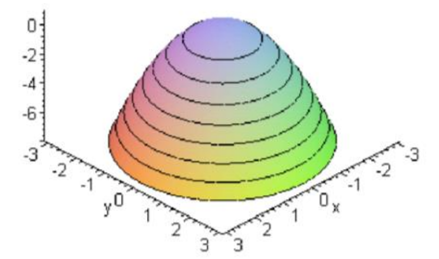
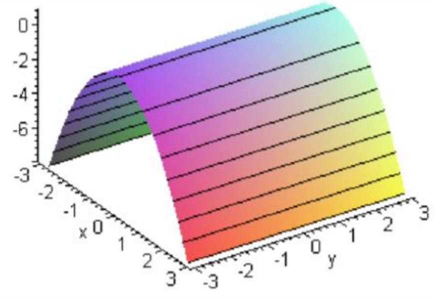
Pontos Críticos

Os pontos críticos de uma função de duas variáveis são os pontos (x_0,y_0) do domínio de f em que:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$; ou
- alguma das derivadas parciais não existe.

Fonte: (MORI, s.d.)

Pontos críticos suaves e isolados são também denominados estacionários. Pontos críticos dispostos continuamente ou não suaves não são considerados estacionários.

Um exemplo de ponto crítico estacionário	Um exemplo de pontos críticos não isolados
	

3.1. <u>Caso 1</u>: Pontos Críticos Estacionários Suaves

Para a determinação dos pontos críticos estacionários suaves de uma função de duas variáveis pode-se usar um procedimento semelhante ao conhecido para funções de uma variável:

<u>Etapa 1</u>: Determinar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

<u>Etapa 2</u>: Determinar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} e \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, o procedimento não se aplica.

<u>Etapa 3</u>: Determinar os pontos críticos estacionários de f, resolvendo $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$

<u>Etapa 4</u>: Para cada ponto crítico (x_0,y_0) encontrado na Etapa 3, calcular

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2$$

Regra de decisão:

- Se $D(x_0, y_0) > 0$, então (x_0,y_0) é ponto de máximo ou de mínimo de f
  - Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, então (x_0,y_0) é ponto de mínimo;
  - Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, então (x_0,y_0) é ponto de máximo;
- Se $D(x_0, y_0) < 0$, então (x_0,y_0) é ponto de sela de f
- Se $D(x_0, y_0) = 0$, então nada se pode afirmar sobre o comportamento de f em (x_0,y_0)

Fonte: (MORI, s.d.)

Exemplo1:
Determinar os pontos extremos da função:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 4y^2 + 6$$

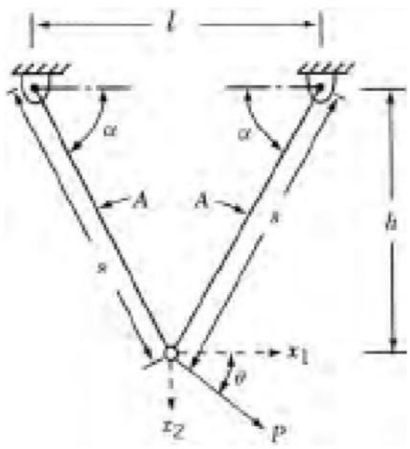
Exemplo2:

A energia potencial de uma treliça de 2 barras mostrada na figura é dada pela seguinte função:

$$f(x,y) = \frac{EA}{S}\left(\frac{l}{2S}\right)^2 x^2 + \frac{EA}{S}\left(\frac{h}{S}\right)^2 y^2 - Px\cos\theta - Py\sin\theta$$

Onde E é o módulo de Young, A a área da seção transversal de cada elemento, l a abertura da treliça, S é o comprimento de cada barra, h é a altura da treliça, θ é o ângulo da carga aplicada, x é o deslocamento horizontal do nó livre e y é o deslocamento vertical do nó livre. Os dados numéricos são:

$$A = 10^{-5} m^2$$
$$E = 207 \times 10^9 Pa$$
$$l = 1{,}5m$$
$$h = 4m$$
$$P = 10000N$$
$$\theta = 30°$$



Fonte: (MORI, s.d.)

Determinar os deslocamentos x e y com base no princípio da minimização da energia potencial.

Bibliografia

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

LIEBERMAN, J.; HILLIER, F. S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. [S.l.]: Mc Graw Hill, 2013.

MENEZES, L. C. **Máximos e Mínimos. Notas de Aulas MAT 013.**. Universidade Federal da Bahia. [S.l.]. s.d.

MORI, F. **Programação Não Linear**. USJT. São Paulo. s.d. (Apostila da disciplina de Pesquisa Operacional).