ÍNDICE

1. Tabela de Transformada de Laplace

Função	L[f]

2. Lista 2 – Função de transferência

2.1. Ex1

Suponha um sistema representado pela seguinte função de transferência:

$$F(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9(s+2)}{s^2+10s+9}$$

Se a entrada for $R(s) = \frac{1}{s}$ Determine:

a. A resposta temporal do sistema.
b. Identifique as partes transitória e estacionária da resposta e determine os polos e zeros.
c. Este sistema é estável? Por quê?

Solução:

A

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{9(s+2)}{(s-1)(s-9)} = \frac{9(s+2)}{s(s-1)(s-9)} \Rightarrow \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+9}$$

$$A = \frac{9(s+2)}{(s+1)(s+9)}|_{s=0} \rightarrow A = 2$$

$$B = \frac{9(s+2)}{s(s+9)}|_{s=-1} \rightarrow B = -1{,}125$$

$$C = \frac{9(s+2)}{s(s+1)}|_{s=-9} \rightarrow C = -0{,}875$$

$$G(s) = 2 - 1{,}125e^{-t} - 0{,}875e^{-9t}$$

B

$$G(s) = [2] + [-1{,}125e^{t} - 0{,}875e^{9t}]$$

$$G(s) = [r_{estacionaria}] + [r_{transitória}]$$

Polos: 1 e 9
Zeros: não há zeros

C

Sim, pois os polos são complexos conjugados.

2.2. Ex 2

Um sistema linear e invariante no tempo é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{4dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{3du(t)}{dt} + 2u(t)$$

Sabendo-se que $y(t)$ é a saída e $u(t)$ a entrada, obtenha:

a. A função de transferência que represente este sistema.
b. Determine os polos e zeros deste sistema.
c. A resposta temporal deste sistema para uma entrada degrau unitário.

Solução:

A:

Função de Transferencia

Aplicando Laplace:

$$s^2 \cdot Y(s) + 4s \cdot Y(s) + 3Y(s) = 3s \cdot U(s) + 2U(s)$$

$$Y(s)[s^2 + 4s + 3] = U(s)[3s + 2] \rightarrow \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{s^2 + 4s + 3}{3s + 2}$$

B

Polos: $3s + 2 = 0 \rightarrow s = -\frac{2}{3}$

Zeros: $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow s_1 = -1; s_2 = -3$

C

Resposta temporal

$$F.T = \frac{s^2 + 4s + 3}{3s + 2} \rightarrow \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 4s + 3}{3s + 2} \rightarrow \frac{A}{s} + \frac{B}{3s + 2}$$

$$A = \frac{s^2 + 4s + 3}{3s + 2}\Big|_{s=0} \rightarrow A = 1{,}5$$

$$B = \frac{s^2 + 4s + 3}{s}\Big|_{s=-\frac{2}{3}} \rightarrow B = -1{,}2$$

2.3. Ex 3

Dado um sistema representrado pela equação diferencial $\frac{s^2 y(t)}{st^2} + 9\,\frac{dy(y)}{st} + 14 \cdot y(t) = 2 \cdot u(t)$, determine:

a. A função de transfrência do sistema, sabendo-se que y(t) é a saída e u(t) a entrada.
b. Represente este sistema em forma de bloco

3. Lista 2

3.1. Ex 1

Determine a função de transferência do sistema de primeira ordem cuja resposta a um degrau de amplitude 2, está indicada na figura abaixo. Calcule e identifique no gráfico a constante de tempo, o tempo de assentamento, o tempo de subida e localiza o polo do sistema no plano “s”

Solução

$$F(s) = \frac{k \cdot a}{s + a}$$
$$saída: y(t) = 5$$
$$entrada: x(t) = 2$$
$$k = \frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow k = \frac{5}{2} \rightarrow k = 2{,}5$$
$$a = \frac{1}{1{,}5} \rightarrow 0{,}667$$
$$\tau = \frac{1}{a} \rightarrow \tau = 1{,}5$$
$$F(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1{,}5}{s + 1{,}5} \therefore polo\ do\ sistema: s = -1{,}5$$
$$T_s = \frac{4}{a} \rightarrow T_s = \frac{4}{1{,}5} \rightarrow T_s = 2{,}66$$
$$T_r = \frac{2{,}2}{a} \rightarrow T_r = \frac{2{,}2}{1{,}5} \rightarrow T_r = 1{,}46$$

3.2. Ex 2

Seja um sistema de aquecimento térmico representado por $\frac{T(s)}{Q(s)} = \frac{1}{Cs+(Z+R)}$, onde $T(s)$ é a diferença de temperatura devido ao processo térmico e a entrada $Q(s)$ é a vazão do vluxo térmico do elemento aquecedor.

Sabendo-se os parâmetros do sistema são C, Z, R, determine:

a. A reposta do sistema ao sinal $Q(s) = \frac{2}{s}$
b. O que pode ser feito com os parâmetros do sistema para aumentar a velocidade de resposta.
c. Esboçar, a forma de onda da diferença de temperatura

Solução

$$\frac{T(s)}{Q(s)} = \frac{1}{Cs + (Z + R)}$$
A: $$T(s) = Q(s) \cdot \frac{1}{Cs + (Z + R)} \rightarrow T(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{Cs + (Z + R)} \rightarrow T(s) = \frac{2}{s\big(Cs + (Z + R)\big)}$$

4. Lista 3

4.1. Exemplo 1

ENADE 2014- Suponha duas balanças para realização da pesagem de caminhões devidamente colocadas em uma rodovia e regidas pelo mesmo modelo matemático definido por

$$\frac{indicação\ da\ balança}{peso\ do\ caminhão} = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

No momento da pesagem, o caminhão desloca-se por uma pequena inclinação e acomoda-se para que a medição seja realizada. Um caminhão, passando por estas balanças, foi liberado na 1ª balança e multado na 2ª balança. A empresa, para anular a multa sofrida, solicitou a análise de um perito que concluiu o seguinte:

i) Na primeira balança o peso foi adquirido 3 segundos após a entrada do caminhão.
ii) Na segunda balança o peso foi adquirido 1,2 segundos após a entrada do caminhão.

Considerando que não houve variação de carga no caminhão durante o percurso e desprezando o consumo de combustível e qualquer outra perda, faça o seguinte:

a) Demonstre em qual instante de tempo a medida das balanças é adequada.
b) Apresente seu parecer no caso sobre as medidas realizadas.

Solução:

$$\frac{indicação\ da\ balança}{peso\ do\ caminhão} = \frac{16}{S^2 + 4S + 16} \rightarrow F(s) = \frac{k\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2} \therefore \omega_n^2 = 16 \rightarrow \omega_n = 4\,rad/s$$

$$2\xi\omega_n = 4 \rightarrow \xi = 0{,}5 \therefore O\ sistema\ é\ sub\ amortecido$$

Item A

Deve-se medir o peso do caminhão após o tempo de acomodação.

O t_{ac} do sistema é:

$$t_{ac} = \frac{4}{\alpha} = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

$$2\xi\omega_n = 4 \rightarrow \xi\omega_n = 2 \therefore t_{ac} = \frac{4}{2} \therefore 2\ segundos$$

A pesagem deve ser adquirida somente após 2 segundos.

Item B

A balança 2 mediu erroneamente antes do t_{ac} $\therefore$ Balança 1 mediu corretamente

4.2. Exemplo 2

A figura 2 representa a saída de um sistema para uma entrada degrau. Obtenha a função de transferência deste sistema, indicando todos os valores extraídos do gráfico.

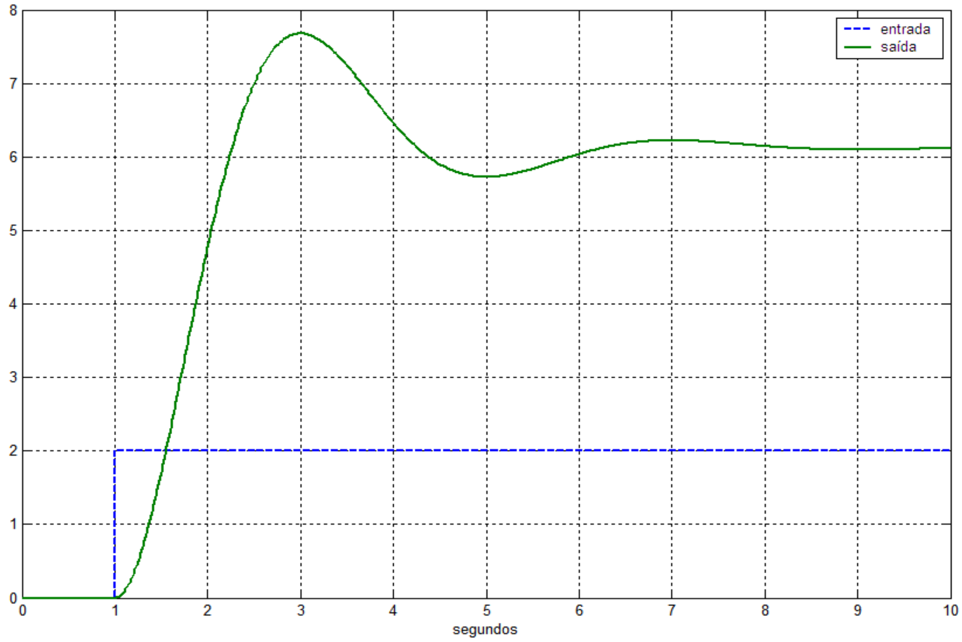


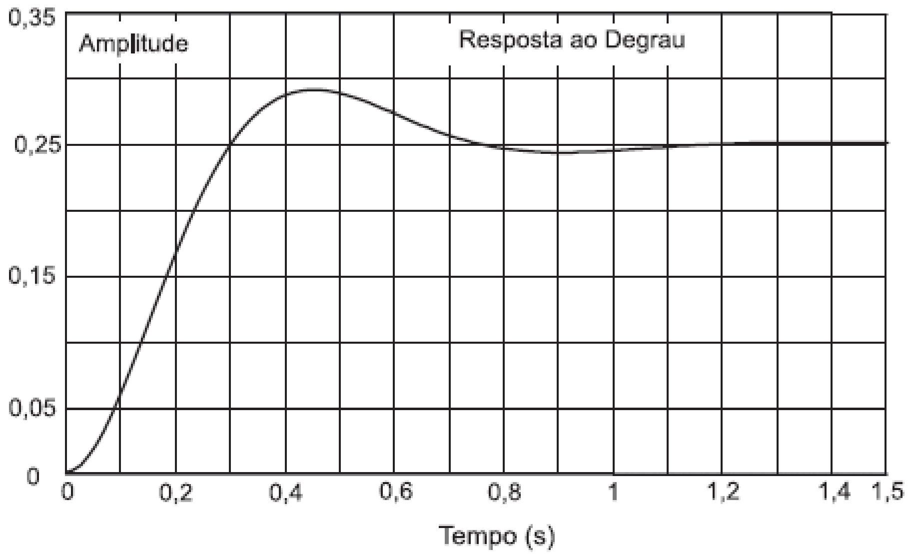
FIGURA 2

Solução:

Equações: $$F(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2}$$ $$k = \frac{valor\ final\ saída}{valor\ da\ entrada}$$ $$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$
Do gráfico: $$t_p = 2(3 - 1\ tempo\ com\ entrada\ nula) \rightarrow 2 = \frac{\pi}{\omega_d} \rightarrow \omega_d = 1{,}57\ rad/s$$
Mas... $$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$
Do gráfico: $$\%SobreSinal = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \cdot 100\% \rightarrow \%SP = \frac{7{,}5 - 6}{6} \cdot 100\% = 25\%$$
Sabe-se que: $$\xi = \frac{-\ln\left(\frac{\%SP}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%SP}{100}\right)}} \rightarrow \xi = \frac{-\ln\left(\frac{25}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{25}{100}\right)}} \rightarrow \xi = 0{,}4$$
Então: $$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow 1{,}57 = \omega_n\sqrt{1-(0{,}4)^2} \rightarrow \omega_n = 1{,}7\ rad/s$$

4.3. Exemplo 3

[*PETROBRAS 2010*] A figura 3 representa a resposta a um degrau unitário de um sistema de 2ª ordem, cuja função de transferência é $G(s) = \dfrac{16}{s^2 + 8s + b}$. Com base nestas informações, calcule os polos deste sistema.



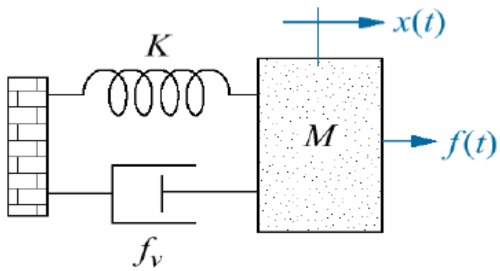
Solução:

Função: $$G(s) = \frac{16}{S^2 + 8S + b}$$
Polos do sistema? Por ser um sinal oscilante os polos do sistema é complexo conjugado Portanto o sistema é sub-amortecido e por isso os polos são complexos conjugados. $$S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$
Do gráfico: $$t_p = 0{,}45$$
Más: $$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \rightarrow 0{,}45 = \frac{\pi}{\omega_d} \rightarrow \omega_d \cong 7\ rad/s$$
Então temos a relação: $$G(s) = \frac{16}{S^2 + 8S + b} = \frac{k\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2} \therefore \xi\omega_n = \alpha \therefore 2\alpha = 8 \rightarrow \alpha = 4$$ $$S_{1,2} = -4 \pm j7$$

4.4. Exemplo 4

Para o sistema mecânico mostrado na figura abaixo, determine a expressão O VALOR DO COEFICIENTE DE ATRITO VISCOSO de maneira que o tempo de acomodação do sistema seja igual a 1,0 segundo.

$DADOS : \mathrm{K} = 2\ \mathrm{N/m};\ \mathrm{M} = 2\mathrm{kg}.$



Solução:

Informações:
F_v : Coeficiente de atrito viscoso (representado por μ)
k : constante da mola
F_v : para $t_{ac} = 1.0$

Dados:

$$k = 2\ N/m$$
$$M = 2\ kg$$

Pela segunda lei de Newton

$$\sum F = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} \rightarrow F(t) - F_v \cdot \frac{dx(t)}{dt} - kx(t) = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt}$$

Aplicando Laplace com c.i = 0

$$F(s) - sF_v \cdot X(s) - kX(s) = s^2mX(s) \rightarrow X(s)[s^2m + sF_v + k] = F(s) \rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2m + sF_v + k} \therefore$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{2s^2 + sF_v + 2} \rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{0{,}5}{s^2 + \frac{sF_v}{2} + 1} \Rightarrow F(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + \xi\omega_n S + \omega_n^2} \therefore \frac{F_v}{2} = \xi\omega_n\ \&\&\ \omega_n = 1$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$t_{ac} = \frac{4}{\alpha} \rightarrow 1 = \frac{4}{\alpha} \rightarrow \alpha = 4$$

$$\xi = \frac{F_v}{2} \rightarrow 2 \cdot 4 = \frac{F_v}{2} \rightarrow F_v = 16$$

5. Lista 5

5.1. Ex 1

Em um sistema de 2ª ordem sem zeros, foi inserida uma entrada degrau de amplitude 5 volts e observada sua saída. A partir do sinal de saída foram obtidos o valor de pico máximo de 6 Volts e o valor em regime estacionário de 4 Volts. Sendo a frequência de oscilação da resposta transitória igual a $2\pi\ rad/s$, calcular:

a. O sobressinal máximo.
b. O tempo de acomodação.
c. A função de transferência do sistema.

Solução:

$$S_{m,n} = -\alpha \pm j\omega_d$$ $$Entrada = \frac{5}{s}$$ $$Saída = 4$$ $$V_{máx\ p} = 6$$ $$\alpha = \xi \cdot \omega_n$$ $$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$
A: Sobressinal máximo $(\%SP)$ Frequência de oscilação ω_d é relacionado com a parte imaginária $$\%SP = \frac{c(t_0)-c(\infty)}{c(\infty)} \cdot 100\% \rightarrow \%SP = \frac{6-4}{4} \cdot 100\% \rightarrow \%SP = 50\%$$
B: t_{ac} $$t_{ac} = \frac{4}{\alpha} \rightarrow t_{ac} = \frac{4}{1{,}28} \rightarrow t_{ac} = 1{,}28s$$ $$\xi = \frac{-\ln\left(\frac{\%50}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%50}{100}\right)}} \rightarrow \xi = \frac{-\ln(0{,}5)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0{,}5)}} \rightarrow \xi = 0{,}2$$ $$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow 2\,\pi = \omega_n\sqrt{1-0{,}2^2} \therefore \omega_n = 6{,}4$$
C: FT $$F(s) = \frac{k\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2} \rightarrow F(s) = \frac{164/5}{S^2 + 2{,}56S + 41} \therefore k = \frac{4}{5} \cdot 41$$