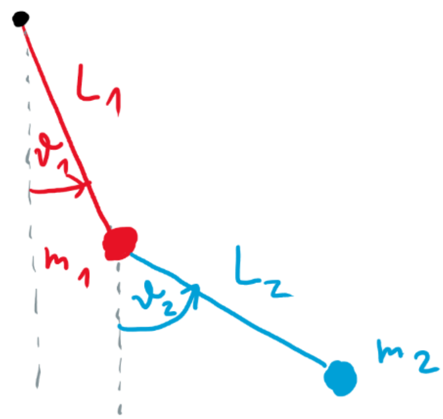
1 Dvojité kyvadlo



1.1 Energie

Kinetická a potenciální energie pro dvojité kyvadlo parametrizované dle obrázku se dají vyjádřit následovně:

$$T = \frac{1}{2} m L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \Delta\theta, \tag{1}$$

$$V = m g L_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g L_2 (1 - \cos \theta_2), \tag{2}$$

kde $m = m_1 + m_2$ je součet hmotností obou kyvadel, L_1 a L_2 jejich délky, θ_1 a θ_2 jsou úhly vychýlení od svislé polohy, $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ jejich rozdíl, $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ a $\omega_2 = \dot{\theta}_2$ jsou úhlové rychlosti a g je tíhové zrychlení. Při této parametrizaci je celková energie $E = T + V$ nulová, pokud je kyvadlo v klidu ve svislé poloze, a je vždy kladná, pokud se kyvadlo pohybuje.

Hmotnosti závěsů se zanedbávají.

1.2 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice pro dvojité kyvadlo lze zapsat ve tvaru

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-\sin \Delta\theta \left(m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \Delta\theta + m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \right) - g \left(m \sin \theta_1 - m_2 \sin \theta_2 \cos \Delta\theta \right)}{2 L_1 A}, \tag{3a}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{+\sin \Delta\theta \left(m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \Delta\theta + m L_1 \dot{\theta}_1^2 \right) - g \left(m \sin \theta_2 - m \sin \theta_1 \cos \Delta\theta \right)}{2 L_2 A}, \tag{3b}$$

kde $A = m_1 + m_2 \sin^2 \Delta\theta$. Odvození těchto rovnic je celkem složité, využívá se formalizmu Lagrangeových rovnic druhého druhu, který se naučíte až v druhém ročníku v předmětu Teoretická mechanika. Konkrétní postup je popsán například v [1].

Jednoduchý Verletův algoritmus není pro řešení těchto rovnic vhodný, protože soustava není ve tvaru

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}) \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ (pravá strana závisí i na derivacích $\dot{\boldsymbol{\theta}}$). K řešení Vám doporučuji použít Eulerovu metodu 2. řádu nebo Runge-Kuttovu metodu 4. řádu, které jsme probírali na cvičení. Soustavu dvou rovnic druhého řádu (3) převedete na soustavu čtyř rovnic prvního řádu využitím pomocných funkcí $\omega_{1,2} = \dot{\theta}_{1,2}$.

1.3 Zápočet

Pro zápočet naprogramujte:

1. Řešení pohybových rovnic (3). Kontrolou by Vám mělo být, že celková energie E se bude v průběhu času zachovávat.

2. Generování přesných počátečních podmínek. Doporučuji nagenerovat náhodně θ_1 a θ_2 z intervalu $(-\pi, \pi)$ tak, jak již počítáte. Dále využijte toho, že kinetická energie nemůže být záporná. Opakujte tedy generování úhlů do té doby, než $V(\theta_1, \theta_2) < E$. Poté odhadněte interval pro $\omega_1 = \theta_1$ řešením nerovnice

$$T(\omega_1, \omega_2 = 0) \leq E - V(\theta_1, \theta_2) \tag{5}$$

pro ω_1, čímž získáte interval pro ω_1, ze kterého ω_1 nagenerujete náhodně. Nakonec vyřešíte rovnici

$$T(\omega_1, \omega_2) = E - V(\theta_1, \theta_2) \tag{6}$$

pro ω_2.

3. Vykreslení animace pohybu kyvadla.

Poincarého řez programovat nemusíte.

Reference

[1] `https://physicspython.wordpress.com/2019/04/26/double-pendulum-part-2/`