

Technische Universität Dresden • Fakultät Informatik

# Mathematische Methoden für Informatiker

Mitschrift zur Vorlesung Sommer Semester 2019

*Bachelor of Science (B.Sc.)*

Dozent: Prof. Dr. Ulrike Baumann  
vorgelegt von

”...”

ABDELSHAFI MOHAMED  
m.abdelshafi@mail.de

MAHMOUD KIKI  
mahmoud.kiki@tu-dresden.de

...

Tag der Einreichung: 27. April 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Folge und Reihen</b>	<b>2</b>
1.1 Vorlesung 1 . . . . .	2
1.1.1 Folge . . . . .	2
1.2 Rechnen mit Folgen . . . . .	3
1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk) . . . . .	5
1.4 vorlesung 2 . . . . .	7
1.5 Konvergenzkriterien . . . . .	10
1.6 Vorlesung 3 . . . . .	11
1.7 Grenzwerte rekursive definierte Folgen: . . . . .	13
1.8 Reihen : . . . . .	14
1.8.1 Rechnen für Reihen . . . . .	15
1.9 Vorlesung 4 . . . . .	16
1.10 Reihen . . . . .	16
1.11 Allgemeine harmonische Reihe . . . . .	17
1.12 Expotentiale Reihe . . . . .	18
1.13 Hauptkriterium . . . . .	18
1.14 Kriterium für Alternierende Reihe . . . . .	19
1.15 Quotientenkriterium (QK): . . . . .	19
1.16 Wurzelkriterium : WK . . . . .	19
1.17 Vorlesung 5 . . . . .	21
1.17.1 Rechenregeln für Funktionen (GWS anwenden) . . . . .	25
<b>List of Theorems</b>	<b>26</b>
<b>List of Theorems</b>	<b>27</b>

# Einleitung

Wir schreiben hier die vorlesungen von INF-120-1( Mathematische Methoden für Informatiker) mit. wenn Ihr Fragen habt oder Fehlern gefunden Sie können gerne uns eine E-mail schreiben oder Sie können einfach bei github eine [Issue \(link\)](#) erstellen. wir freuen uns wenn Sie mit uns mitschreiben möchten, oder helfen mit der Fehlerbehebung.

Abdelshafi Mohamed  
Mahmoud Kiki

# Kapitel 1

## Folge und Reihen

### 1.1 Vorlesung 1

#### 1.1.1 Folge

**1.1 Definition** (Folgen).

*Ein folge ist eine Abbildung*

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \underbrace{\mathbf{M}}_{\text{Menge}} : n \mapsto \underbrace{x_n}_{\text{folgenreitglied}}$$

**1.2 Bemerkung.**

$\mathbf{M} = \mathbb{R}$  reellewert Folge

$\mathbf{M} = \mathbb{C}$  komplexwertig Folge

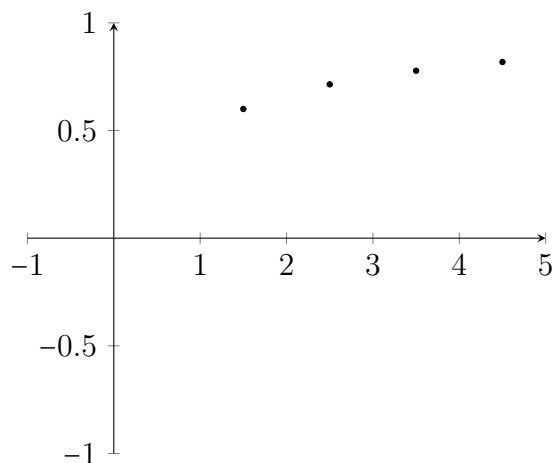
$\mathbf{M} = \mathbb{R}^n$  vektorwertig Folge

**Bezeichnung**  $(x_n)$  mit  $(x_n) = \frac{n}{n+1}$

Aufzählung der folgenreitglieder:  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

**1.3 Bemerkung.**

zuwerten wird  $\mathbb{N}$  durch  $\mathbb{N} \setminus 0, 1, \dots$  erstellt.



## 1.4 Beispiel.

1. *Konstante Folge*  $(x_n)$  mit  $x_n = a \in \mathbf{M}, a \dots$

$$x_n = a \in \mathbf{M}$$

2. *Harmonische Folge*  $(x_n)$  mit  $x_n = \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1$

3. *Geometrische folge*  $(x_n)$  mit  $x_n = q^n, q \in \mathbb{R}, \dots$

4. *Fibonaccifolge*  $(x_n)$  mit

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

5. *Fibonacci folgen*  $(x_n)$

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = 1$$

$$X_{n+1} = x_n + X_{n-1} \quad (n > 0)$$

6. *conway folge*

$$1, 11, 21, 1211, 111217, 312211 \dots$$

7. *folge aller Primzahlen:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

## 1.2 Rechnen mit Folgen

$$(M = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad M = \mathbb{C})$$

$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$$

$$K(x_n) := (Kx_n) \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \in \mathbb{C}$$

## 1.5 Bemerkung.

*Die Folge bildet ein Vektorraum.*

### 1.6 Definition (Beschränktheit).

1. Eine reellwertige Funktion ist in der Mathematik eine Funktion, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind.
2. Eine reellwertige heißt beschränkt wenn gilt

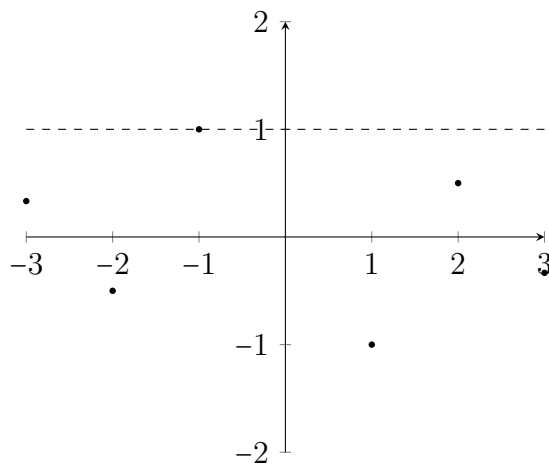
$$\exists r \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{|x_n|}_{\text{Betrag einer reellen oder komplexer Zahl}} \leq r$$

Betrag einer reellen oder komplexer Zahl

### 1.7 Beispiel.

$$(x_n) \quad \text{mit} \quad x_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{5}, \dots$$



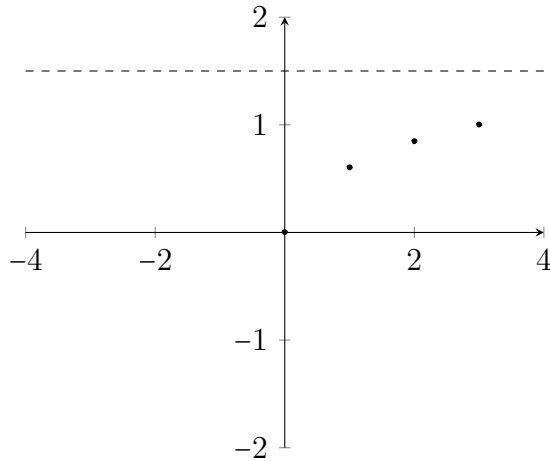
### 1.8 Bemerkung.

$(x_n)$  ist beschränkt mit  $r = 1$  denn  $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leq 1 \leftrightarrow r$

### 1.9 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } x_n = (-1)^n \frac{1}{n} + 1 \quad \text{beschränkt } r = 3/2$$

$$-3/2 \leq x_n \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



### 1.10 Beispiel.

Standard:

Die Folge  $\left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n=1}^{\infty}$  ist beschränkt durch 3

Zu zeigen:  $-3 \leq x_n \leq 3$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

## 1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)

### 1.11 Definition (Monoton).

Die Folge  $(x_n)$  heißt monoton  $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$

$$\text{wenn gilt: } \forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} x_n \leq x_{n+1} \\ x_n \geq x_{n+1} \end{cases}$$

man spricht von Streng monotonie wenn  $\leq$  durch  $>$  und  $\geq$  durch  $<$  ...

### 1.12 Bemerkung.

$$x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n - x_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1$$

### 1.13 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } X_0 := 1, X_{n+1} := \sqrt{x_n + 6}$$

ist Streng monoton wachsend Beweis mit Vollständiger Induktion

**Standard Bsp:**  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ist streng monoton wachsend

### 1.14 Bemerkung.

<i>monoton</i>	<i>ja</i>	<i>nein</i>
<i>Beschränktheit</i>	$\left(\frac{1}{n}\right)$	$(-1)^n$
<i>nein</i>	$(n)$	$(-1)^n$

### 1.15 Definition (Konvergenz, Divergenz).

$(x_n)$  heißt **Konvergenz** wenn  $(x_n)$  ein Grenzwert hat.

$(x_n)$  heißt **Divergenz** wenn sie keinen Grenzwert hat.

### 1.16 Definition (Grenzwert).

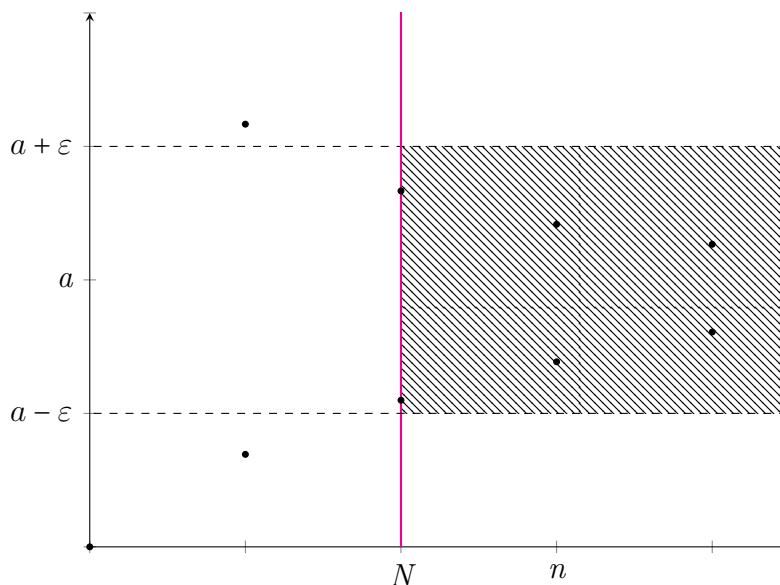
$a \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert von  $(x_n)$ , wenn gilt:

$$\underbrace{\forall \epsilon > 0}_{\text{beliebiges klein}} \quad \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}}_{\text{beliebiges klein}} \quad , \forall n \in \mathbb{N} : m \geq N$$

$$\underbrace{\Rightarrow |x_n - a| < \epsilon}_{a - \epsilon \leq x_n \leq a + \epsilon}$$

Sei  $\epsilon > 0; \epsilon$  fest

alle Folgenglieder  $x_n$  mit  $n \geq N \leadsto$





## 1.4 vorlesung 2

ist die folge beschränkt , monoton ?

$(x_n)$  konvergierend :  $\iff \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 $n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

**1.17 Satz.**  $(x_n)$  konvergierend :  $\Rightarrow$  Der Grenzwert ist eindeutig beschränkt.

**1.18 Beweis.**

Sei  $a$  ein Grenzwert von  $(x_n)$  ,  $b$  ein Grenzwert von  $(x_n)$   
d.h sei  $\epsilon > 0, \epsilon$  beliebig ,  $\epsilon$  fest

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a : |x_n - a| < \epsilon \quad (1.18.1)$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b : |x_n - b| < \epsilon \quad (1.18.2)$$

Sei  $\max \{N_a, N_b\} = N$  dann gilt :

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \quad (1.18.3)$$

und

$$|x_n - b| < \epsilon \Rightarrow |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \quad (1.18.4)$$

Annahme :-  $a \neq b$  , d.h  $|a - b| \neq 0$

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a + 0 - b| \\ &= |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \\ \text{also } |a - b| &< 2\epsilon \end{aligned}$$

wähle z.B

$$\epsilon = \frac{|a - b|}{3} \quad \text{dann gilt : } |a - b| < \frac{2}{3} |a - b|$$

$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3}$  falls Aussage, Widerspruch also ist die Annahme falsch also gilt  $a = b$

**1.19 Beispiel.**

$x_n$  mit  $x_n = \frac{1}{n}$  (harmonische Folge)

**1.20 Beweis.**

Sei  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon$  beliebig,  $\epsilon$  fest gesucht :  $N$  mit  $n \geq N$   
hat den Grenzwert 0

$$\Rightarrow |x_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \quad (1.20.1)$$

wähle  $N := \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$

**1.21 Beispiel.**

$\epsilon = \frac{1}{100}$  , gesucht  $N$  mit  $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$  wähle  $N = 101$

**1.22 Schreibweise.**

$x_n$  hat den Grenzwert  $a$  Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$   $x_n$  geht gegen  $a$  für  $n$  gegen Unendlich.

**1.23 Definition** (Nullfolge).

$x_n$  heißt Nullfolge ,wenn  $\lim x_n = 0$  gilt.

**1.24 Bemerkung.**

Es ist leichter, die konvergente einer Folge zu beweisen, als den Grenzwert auszurechnen.

**1.25 Beispiel.**

$$x_n = \frac{1}{3} + \left( \frac{11-n}{9-n} \right)^9$$

Behauptung:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{-2}{3}$

**1.26 Lemma.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) \quad (1.26.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{11-n}{9+n} \right)^9 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{11-n}{9+n} \right)^9 \quad (1.26.2)$$

$$= \frac{1}{3} + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11-n}{9+n} \right)^9 \quad (1.26.3)$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(\frac{1}{n} - 1)}{n(\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.26.4)$$

$$= \frac{1}{3} + \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{11}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.26.5)$$

$$= \frac{1}{3} + \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \right)^9 \quad (1.26.6)$$

$$= \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 11 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 9 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) + 1} \right)^9 \quad (1.26.7)$$

$$\frac{1}{3} + (-1)^9 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \quad (1.26.8)$$

**1.27 Definition** (Unendliche Grenzwert).

Eine Folge  $(x_n)$  hat den unendliche Grenzwert  $\infty$ , wenn gilt :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : x_n > r$$

**1.28 Schreibweise.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

**1.29 Bemerkung.**

$\infty$  ist keine Grenzwerte und keine reelle Zahl.

**1.30 Bemerkung.**

Grenzwertsätze gelten nicht für uneigentliche Grenzwerte.

**1.31 Bemerkung.**

*gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  dann schreibt man  $\lim_{n \rightarrow \infty} -x_n = -\infty$*

**1.32 Beispiel.**

*$x_n$  mit  $x_n = q^n$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q$  fest.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & |q| = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{ex.nicht,} & q \leq -1 \end{cases}$$

**1.5 Konvergenzkriterien**

(zum Beweis der Existenz eines Grenzwerts, nicht zum Berechnen von Grenzwerten)

(1)  $x_n$  konvergent  $\Rightarrow (x_n)$  beschränkt.

wenn  $(x_n)$  nicht beschränkt  $\Rightarrow (x_n)$  nicht konvergent.

(2) Monotoniekriterium: wenn  $(x_n)$  beschränkt ist können wir fragen ob  $(x_n)$  konvergent.

$(x_n)$  beschränkt von Monotonie  $\Rightarrow (x_n)$  konvergent.

**1.33 Beispiel.**

*$\left((-1)^n \times \frac{1}{n}\right)$  konvergent (Nullfolge) diese Folge ist beschränkt aber nicht Monoton*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

*existiert. Diese ist beschränkt und monoton.*

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

*existiert.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) = e^a$$

## 1.6 Vorlesung 3

### 1.34 Beispiel.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11+n}{9-n} \quad ? \quad x_n = \frac{11+1}{9-n} = \frac{n \frac{11}{n} + 1}{n \frac{9}{n} - 1} \quad (1.34.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{11}{n} + 1 \right) = 1 \quad (1.34.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{9}{n} + 1 \right) = -1 \quad (1.34.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \frac{1}{-1} = -1 \quad (1.34.4)$$

**1.35 Lemma.** Seien  $(x_n) = (y_n)$  Folgen auf  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a$  und es gelte  $x_n \leq z_n \leq y_n$  für fest alle  $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt für die Folge  $(z_n)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = a$

### 1.36 Beispiel.

Ist die Folge  $(-1)^n \frac{1}{n}$  konvergent ?

$$-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \left( \frac{1}{n} \right) \leq 1 \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\left( \frac{1}{n} \right) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

### 1.37 Beispiel.

$$x_n \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{n-1!} \quad (1.37.1)$$

denn  $x_n = 0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq y_n$  , gesucht!  $\underbrace{y_n}_{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0}$  für hinreichend großes  $n$ .

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{(n-1)} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} \\ y_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \frac{a^k}{k!} \quad k \text{ ist fest} \end{aligned} \quad (1.37.2)$$

Es gilt  $\frac{a^n}{n!} \leq y_n$  für hinreichend großes  $n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{\text{Konst}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^k}{k!}\right)}_{\in \mathbb{R}} \\ &= 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \times \frac{a^k}{k!} = 0 \end{aligned} \quad (1.37.3)$$

## 1.7 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:

man kann oft durch lösen Fixpunktgleichung" berechnen.

$$x_0, x_{n+1} = \ln(x_n)$$

### 1.38 Beispiel.

$$(x_n) \quad x_0 = \frac{7}{5}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

$(x_n)$  ist monoton fallend, beschränkt, konvergent.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \right)^2 + 2$$

### Fixpunktgleichung

$$a = \frac{1}{3}(a^2 + 2), \text{ gesucht } = a$$

$$3a = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Lösung:  $a_1 = 2$  (keine Lösung),  $a_2 = 1$

### 1.39 Beispiel.

$(x_n)$  mit  $(x_0) = c \in \mathbb{R}, c \text{ fest}$   $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$

(1)  $(x_n)$  beschränkt ✓

(2)  $(x_n)$  Monoton ✓

Also  $(x_n)$  konvergent

Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) = \frac{1}{2}(a + \frac{c}{a}) = a$

$$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \Leftrightarrow a = \sqrt{c}$$

### 1.40 Bemerkung.

Der Nachweis der konvergent der rekursiv definierte Folge darf nicht weggelassen werden, denn Z.B  $x_0 = 2, x_{n+1} = x_n^2$   $2, 4, 16, 256, \dots$  divergent gegen  $+\infty$

$$\text{Annahme: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}_a = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2}_{a^2} \Rightarrow a \in \{0, 1\}$$

## 1.8 Reihen :

### 1.41 Definition (Unendliche Reihen).

Sei  $(a_n)$  eine reellefolge (komplexwertig) Folge

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0, a_1, \dots, a_n,$$

$n$ -k heißt Partialsumme.  $(S_n)$  heißt unendliche Reihe.  
schreibweise :  $(S_n)^\infty = \text{bsw } (S_n)$

$$\left( \sum_{l=0}^n a_l \right)$$

bzw

$$\left( \sum_{l=0}^{\infty} a_l \right)$$

### 1.42 Bemerkung.

Reihen sind spezielle Folgen , alle konvergent oder divergent.

### 1.43 Definition (wert der Reihe).

Für eine konvergente Reihen wird der Grenzwert auch wert der Reihe genannt.

### 1.44 Schreibweise.

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

bzw

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

### 1.45 Beispiel.

Teleskopreihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$  in Grenzwert der Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{-1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$



### 1.46 Beispiel.

geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  ist für

$$|q| < 1$$

konvergent. Wert der Reihe für  $|q| < 1$   $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$  für  $|q| < 1$  konvergent, Werte der Reihe für

$$|q| < 1 : \sum_{k=0}^n q^k = \dots$$

$$\begin{aligned} S_n &= q^0 + q^1 + \dots + q^n \\ -qS_n &= q^1 + q^2 + \dots + q^{n+1} \\ (1-q)S_n &= q^0 - q^{n+1} \\ S_n &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} (1 - q^{n+1}) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{1}{1 - q} \times \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1 - q} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}) = \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

### 1.8.1 Rechnen für Reihen

konvergente Reihe kann man addieren oder subtrahieren mit einem Skalar multiplizieren wie endliche Summen. aber das gilt im Allgemeinen nicht für das Multiplizieren

## 1.9 Vorlesung 4

### 1.10 Reihen

#### 1.47 Beispiel.

*Zur geometrischen Reihen*

*gesucht : A*

$$2A = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^k + \dots$$

$$9 = \frac{1}{4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 2A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

#### 1.48 Beispiel.

$$\begin{aligned} 0,4\bar{3} &= \frac{3}{4} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \dots \\ \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \left(\frac{1}{10}\right)^0 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots \\ &= \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{1}{30} = \frac{12+1}{30} = \frac{13}{30} \end{aligned} \tag{1.48.1}$$

*wenn  $0,4\bar{3}$  erlaubt wäre, dann,*

$$\frac{4}{10} + \frac{9}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

### 1.49 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \text{ ist divergent, denn } \lim_{\infty} \sum_{K=1}^n \frac{1}{k} \text{ ex. nicht}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{10} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

## 1.11 Allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad (\infty \text{ fest}) \quad \alpha > 1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \leq 1 \rightarrow \text{div}$$

### 1.50 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{ist konvergent}$$

### 1.51 Beweis.

mit Monotoniekriterium für Folge

$$\text{Reihe ist konvergent} \begin{cases} (1) & \sum_{K=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ ist monoton wachsend;} \\ (2) & \sum_{K=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ ist beschränkt.} \end{cases}$$

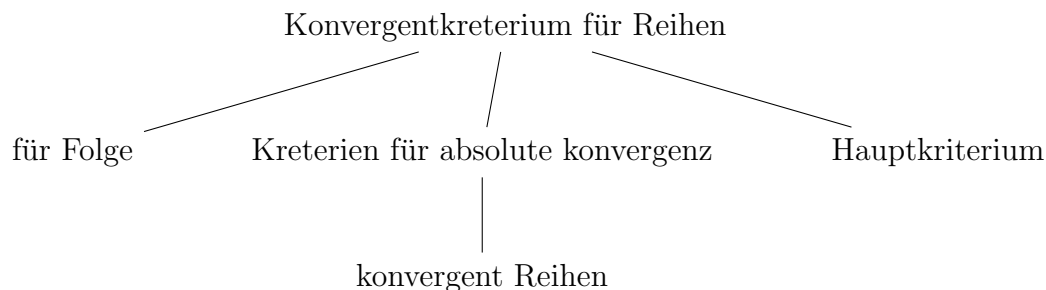
$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2}$$

$$< 1 + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}}_{2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^2}}_{4 \cdot \frac{1}{4^2}} +$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \underbrace{\frac{1}{4}}_{(\frac{1}{2})^2} + \underbrace{\frac{1}{8}}_{(\frac{1}{2})^3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{1}{2} - 1}$$

## 1.12 Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \text{ ist konvergent}$$



## 1.13 Hauptkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow (a_k) \text{ Nullfolge.}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \underbrace{\text{nullkonvergent}}_{\text{divergent}}$$

oder

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k \text{ ex.null}$$

### 1.52 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 + 1}{4k^2 - 1} \text{ divergent, aber } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent und } \frac{1}{k} \text{ Nullfolge}$$

### 1.53 Beweis.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \underbrace{(a_k \text{ Nullfolge})}_{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0}$$

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s - s = 0$$

## 1.14 Kriterium für Alternierende Reihe

### 1.54 Beweis.

Alternierende  $\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  ist konvergent

$$\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

wobei  $(a_k)$  einer Streng monoton fallend Nullfolge mit  $a_k \geq 0$

$\Rightarrow$  Die Reihe ist konvergent. Also  $\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  ist konvergent.

### 1.55 Definition (absolute Reihe).

Reihe  $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$  heißt absolute konvergent wenn  $\sum_{K=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent ist.

### 1.56 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ ist konvergent, aber nicht absolute konvergent}$$

### 1.57 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \text{ ist konvergent und absolute konvergent}$$

**1.58 Satz.** Reihe  $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent  $\Rightarrow$  Reihe  $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$  ist konvergent

### 1.59 Bemerkung.

Absolute konvergente Reihe kann man multiplizieren wie endliche summen d Reihen null

## 1.15 Quotientenkriterium (QK):

für endliche Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

$< 1 \Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} a_k$  in absolut konvergent

$> 1 \Rightarrow$  ist divergent

$= 1$  Kriterium ist nicht anwendbar

## 1.16 Wurzelkriterium : WK

für (absolute) konvergent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$< 1 \Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} a_k$  in (absolute) konvergent

$> 1 \Rightarrow$  divergent

$= 1$  Kriterium ist nicht anwendbar

**1.60 Beispiel (QK).**

$$\begin{aligned} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| d \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \\ &= 0 < 1 \Rightarrow \text{Reihe als konv.} \end{aligned}$$

**1.61 Beispiel (WK).**

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{1}}{\sqrt[k]{k!}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!}} = 0 \\ &< 1 \\ &\Rightarrow \text{Reihe als konv.} \end{aligned}$$

## 1.17 Vorlesung 5

Zusammenfassung :

Folgen / Reihen / Konvergenz ? / Grenzwert ?

Neu : Funktionen

Approximation von Funktionen

Potenzreihen

Taylorreihen

fourierreihen

Näherungsweise Berechnung

### 1.62 Definition.

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt reelle Funktion in einer reellen veränderlichen

### 1.63 Bemerkung (Definitionsbereich).

Bild von  $f$

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

Graph von  $f$

$$\text{Graph}(f) = \{(x \mid f(x)) \mid x \in D\}$$

### 1.64 Definition.

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$

$f$  heißt in  $a$  stetig, wenn gilt :

$\forall (X_n) : X_n \in D$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  für alle Folgen  $(x_n)$

Die Folgenglieder sollen in Definitionsbereich liegen (Die in Definitionsbereich liegen können und den Grenzwert  $a$  haben)

\* Ich weiß, dass  $f(x_n)$  existiert ( $f(x_n)$  ex.)

Folge  $f(x_n)$  ex., soll einen Grenzwert besitzen. ✓

$f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$  ✓✓

### 1.65 Bemerkung.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

★ Grenzwertbildung und Funktion Wertberechnung sind bei stetig Funktion in der Reihenfolge vertauschbar !

### 1.66 Berechnung.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

**d.h** für jede Folge  $x_n$ , die gegen  $a$  konvergiert, konvergiert die Folge der Funktionswerte gegen  $f(a)$ .

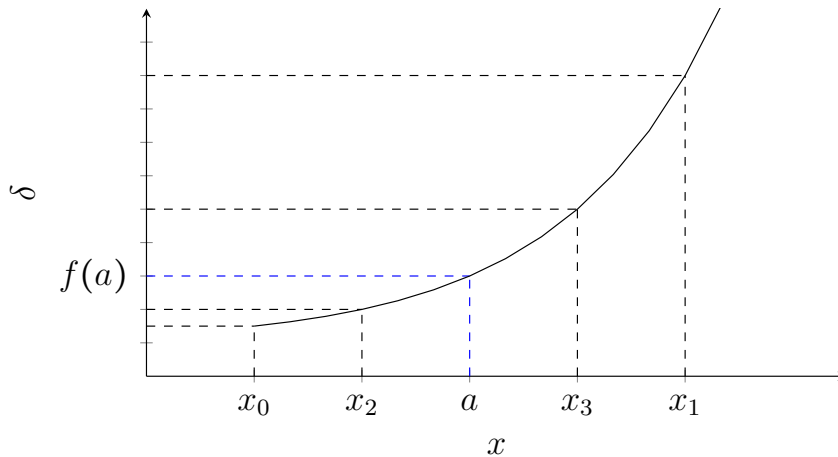
**1.67 Bemerkung.**

$f$  stetig in  $a \Leftrightarrow$

1)  $f(a)$  und

2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ex. und

3) Grenzwert = Funktionswert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**1.68 Beispiel.**

1)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)}$$

Ist  $f(x)$  stetig in  $a = 1$  ?

a)  $f(1)$  ex ? nein , d.h  $f$  ist in  $a = 1$  nicht stetig

b)

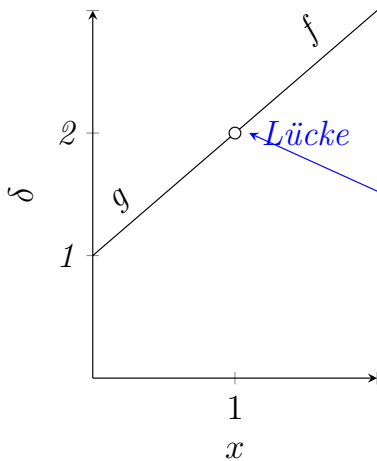
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = ?$$

Sei  $(x_n)$  eine beliebige Folge und  $x_n \in D(f)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{(x_n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 + 1 = 2$$

d.h Grenzwert ex. (und es ist 2 ).



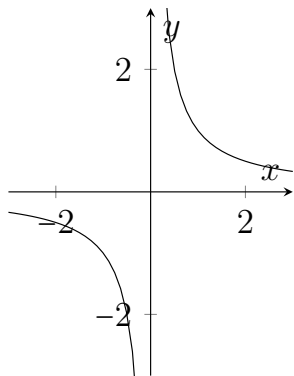


Man sagt,  $f$  hat an der Stelle 1 eine Lücke.

### 1.69 Beispiel.

(2)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 0$$



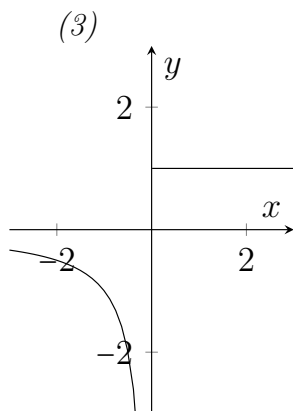
(i) betrachte  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ : d.h. wir betrachten alle Folgen  $(x_n)$

$$X_n \in D, X_n \leq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n} = -\infty \end{aligned}$$

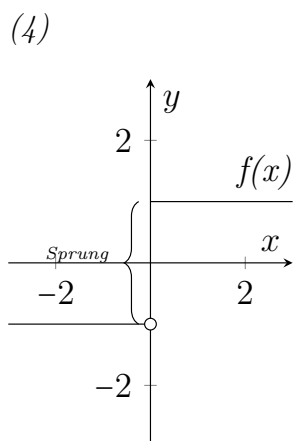
$$\text{d.h. } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ ex. nicht}$$

(ii) Betrachte  $\lim_{n \rightarrow +0} f(x_n)$ , ex. nicht



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases} \quad a = 0 \quad , \quad f(0) = 1 \quad ex.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad ex. \text{ nicht}$$



$$f(x) = \underbrace{\operatorname{sgn}(x)}_{\text{sprung}} = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\neq \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 & ex. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 & ex. \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad ex. \text{ nicht}, \quad 0 \text{ hei\u00dft Sprungstelle}$$

**1.70 Definition.**

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$  hei\u00dft **stetig**, wenn  $f$  f\u00fcr alle  $a \in D$  **stetig**

### 1.71 Beispiel.

elementare Funktionen und deren Verfügungen sind stetig auf dem gesamten Definitionsbereich.

#### **Z.B**

Polynomfunktion , rationale Funktionen, Winkelfunktionen , Potenzfunktionen , Wurzelfunktionen , Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktion.

### 1.72 Beispiel.

$f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$  ist stetig auf dem gesamten Definitionsbereich  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

### 1.73 Beweis.

Sei  $a \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (d.h.  $a \neq 0$ )

$$f(a) = \frac{1}{a} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad (2)$$

Sei  $x_n$  eine beliebige Folge und  $x_n \in \underbrace{D}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \quad \text{ex.}$$

### 1.17.1 Rechenregeln für Funktionen (GWS anwenden)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x), \text{ wo } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) \pm g(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$$

### 1.74 Satz.

$f : D \Rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$  ist in  $a \in D$  stetig  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$   
(1.74.1)

# List of Theorems

1.1	Definition (Folgen)	2
1.6	Definition (Beschränktheit)	4
1.11	Definition (Monoton)	5
1.15	Definition (Konvergenz,Divergenz)	6
1.16	Definition (grenzwert)	6
1.23	Definition (Nullfolge)	8
1.27	Definition (Unendliche Grenzwert)	9
1.41	Definition (Unendliche Reihen)	14
1.43	Definition (wert der Reihe)	14
1.55	Definition (absolute Reihe)	19
1.62	Definition	21
1.64	Definition	21
1.70	Definition	24

# List of Theorems

1.4	Beispiel	3
1.7	Beispiel	4
1.9	Beispiel	5
1.10	Beispiel	5
1.13	Beispiel	6
1.19	Beispiel	8
1.21	Beispiel	8
1.25	Beispiel	8
1.32	Beispiel	10
1.33	Beispiel	10
1.34	Beispiel	11
1.36	Beispiel	11
1.37	Beispiel	12
1.38	Beispiel	13
1.39	Beispiel	13
1.45	Beispiel	14
1.46	Beispiel	15
1.47	Beispiel	16
1.48	Beispiel	16
1.49	Beispiel	17
1.50	Beispiel	17
1.52	Beispiel	18
1.56	Beispiel	19
1.57	Beispiel	19
1.60	Beispiel (QK)	20
1.61	Beispiel (WK)	20
1.68	Beispiel	22
1.69	Beispiel	23
1.71	Beispiel	25
1.72	Beispiel	25