

Technische Universität Dresden • Fakultät Informatik

# Mathematische Methoden für Informatiker

Mitschrift zur Vorlesung Sommer Semester 2019

*Bachelor of Science (B.Sc.)*

Dozent: Prof. Dr. Ulrike Baumann  
vorgelegt von

”...”

ABDELSHAFI MOHAMED  
m.abdelshafi@mail.de

MAHMOUD KIKI  
mahmoud.kiki@tu-dresden.de

...

Tag der Einreichung: 15. April 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Folge und Reihen</b>	<b>2</b>
1.1 Folgen . . . . .	2
1.2 Rechnen mit Folgen . . . . .	3
1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk) . . . . .	5
1.4 Konvergenzkriterien . . . . .	10
1.5 Grenzwerte rekursive definierte Folgen: . . . . .	12
1.6 Reihen : . . . . .	13
<b>List of Theorems</b>	<b>14</b>

# Einleitung

# Kapitel 1

## Folge und Reihen

### 1.1 Folgen

**1.1 Definition** (Folgen).

*Ein Folge ist eine Abbildung*

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \underbrace{\mathbf{M}}_{\text{Menge}} : n \mapsto \underbrace{X_n}_{\text{Folglied}}$$

**1.2 Bemerkung.**

$\mathbf{M} = \mathbb{R}$  reellewertige Folge

$\mathbf{M} = \mathbb{C}$  komplexwertige Folge

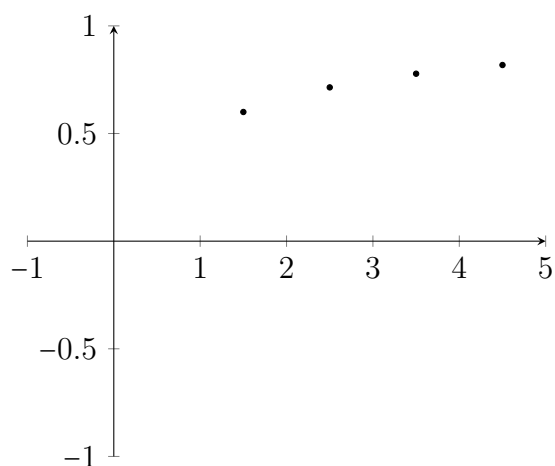
$\mathbf{M} = \mathbb{R}^n$  vektorielle Folge

**Bezeichnung**  $(X_n)$  mit  $X_n = \frac{n}{n+1}$

Aufzählung der Folgenglieder:  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

**1.3 Bemerkung.**

zuwerten wird  $\mathbb{N}$  durch  $0, 1, \dots$  erstellt.



## 1.4 Beispiel.

1. *Konstante Folge*  $(X_n)$  mit  $X_n = a \in \mathbf{M}, a \dots$

$$X_n = a \in \mathbf{M}$$

2. *Harmonische Folge*  $(X_n)$  mit  $X_n = \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1$

3. *Geometrische folge*  $(X_n)$  mit  $X_n = q^n, q \in \mathbb{R}, \dots$

4. *Fibonaccifolge*  $(X_n)$  mit

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

5. *Fibonacci folgen*  $(X_n)$

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = 1$$

$$X_n + 1 = X_n + X_{n-1} \quad (n > 0)$$

6. *conway folge*

$$1, 11, 21, 1211, 111217, 312211 \dots$$

7. *folge aller Primzahlen:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

## 1.2 Rechnen mit Folgen

$$(M = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad M = \mathbb{C})$$

$$(X_n) + (y_n) := (X_n + y_n)$$

$$K(X_n) := (K X_n) \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \in \mathbb{C}$$

## 1.5 Bemerkung.

*Die Folge bildet ein Vektorraum.*

## 1.6 Definition.

1. Eine reellwertige Funktion ist in der Mathematik eine Funktion, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind.
2. Eine reellwertige heißt beschränkt wenn gilt

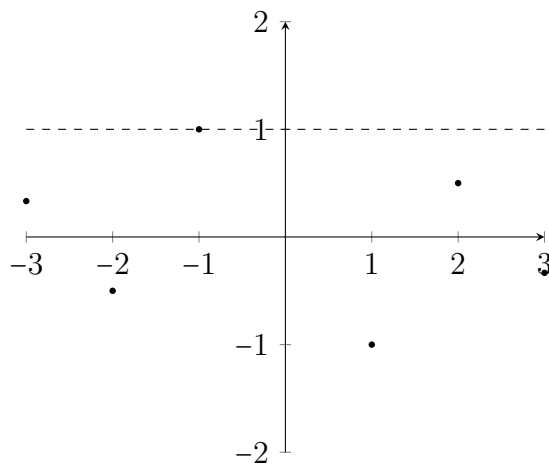
$$\exists r \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{|X_n|}_{\text{Betrag einer reellen oder komplexer Zahl}} \leq r$$

*Betrag einer reellen oder komplexer Zahl*

## 1.7 Beispiel.

$$(X_n) \quad \text{mit} \quad X_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{5}, \dots$$



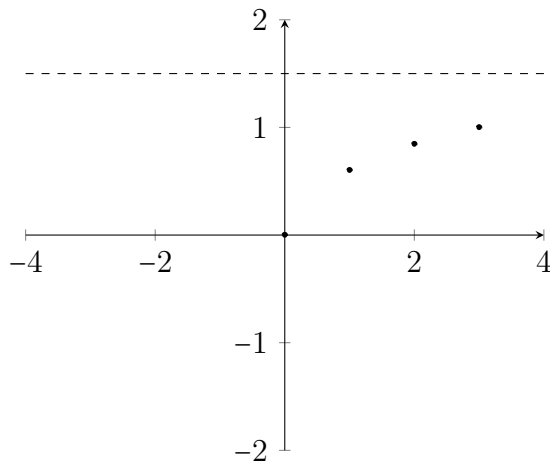
## 1.8 Bemerkung.

$(X_n)$  ist beschränkt mit  $r = 1$  denn  $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leq 1 \leftrightarrow r$

## 1.9 Beispiel.

$$(X_n) \quad \text{mit} \quad X_n = (-1)^n \frac{1}{n} + 1 \quad \text{beschränkt} \quad r = 3/2$$

$$-3/2 \leq X_n \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



### 1.10 Beispiel.

Standard:

Die Folge  $\left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n=1}^{\infty}$  ist beschränkt durch 3

Zu zeigen:  $-3 \leq X_n \leq 3$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

## 1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)

### 1.11 Definition.

Die Folge  $(X_n)$  heißt monoton  $\{ \text{wachsend fallend} \}$

$$\text{wenn gilt: } \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} X_n \leq X_{n+1} \\ X_n \geq X_{n+1} \end{cases}$$

man spricht von Streng monotonie wenn  $\leq$  durch  $>$  und  $\geq$  durch  $<$  ...

### 1.12 Bemerkung.

$$X_n \leq X_{n+1} \Leftrightarrow X_n - X_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{X_n}{X_{n+1}} \leq 1$$

### 1.13 Beispiel.

$$(X_n) \text{ mit } X_0 := 1, X_{n+1} := \sqrt{X_n + 6}$$

ist Streng monoton wachsend Beweis mit Vollständiger Induktion

Standard Bsp:  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ist streng monoton wachsend

1.14 Bemerkung.

monoton	ja	nein
Beschränktheit	$\left(\frac{1}{n}\right)$	$(-1)^n$
nein	$(n)$	$(-1)^n$

1.15 Definition.

$(X_n)$  heißt **Konvergenz** wenn  $(X_n)$  ein Grenzwert hat.

$(X_n)$  heißt **Divergenz** wenn sie keinen Grenzwert hat.

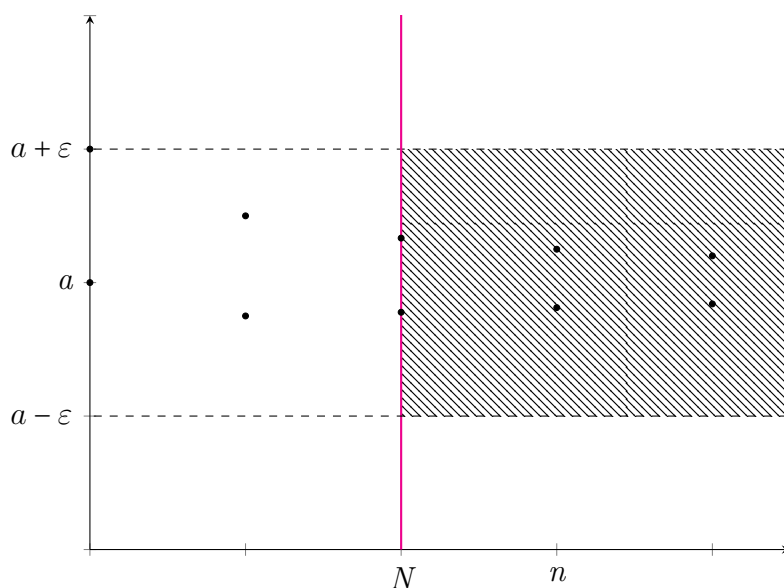
1.16 Definition (Grenzwert).

$a \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert von  $(X_n)$ , wenn gilt:

$$\underbrace{\forall \epsilon > 0}_{\text{beliebes klein}} \quad \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}}_{\text{beliebes klein}} \Rightarrow \underbrace{|X_n - a| < \epsilon}_{a - \epsilon \leq X_n \leq a + \epsilon}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N$$

Sei  $\epsilon > 0; \epsilon$  fest

alle Folgenglieder  $X_n$  mit  $n \geq N$



ist die Folge beschränkt, monoton?

$(X_n)$  konvergent:  $\iff \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 $n \geq N \Rightarrow |X_n - a| < \epsilon$

1.17 Satz.  $(X_n)$  konvergent:  $\Rightarrow$  Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.



*Beweis.* Sei  $a$  ein Grenzwert von  $(X_n)$ ,  $b$  ein Grenzwert von  $(X_n)$   
d.h. sei  $\epsilon > 0, \epsilon$  beliebig,  $\epsilon$  fest

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a : |X_n - a| < \epsilon \quad (1.17.1)$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b : |X_n - b| < \epsilon \quad (1.17.2)$$

Sei  $\max N_a, N_b = N$  dann gilt :

$$n \geq N \Rightarrow |X_n - a| < \epsilon \quad (1.17.3)$$

und

$$|X_n - b| < \epsilon \Rightarrow |X_n - a| + |X_n - b| < 2\epsilon \quad (1.17.4)$$

Annahme :-  $a \neq b$ , d.h.  $|a - b| \neq 0$

$$|a - b| = |a + 0 - b| = |(a - X_n) + (X_n - b)| \leq |X_n - a| + |X_n - b| < 2\epsilon$$

also  $|a - b| < 2\epsilon$

### 1.18 Beispiel.

$$\epsilon = \frac{|a - b|}{\epsilon} \quad \text{dann gilt : } |a - b| < 2 \frac{|a - b|}{3}$$

$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3}$  falls Aussage, Widerspruch also ist die Annahme falsch also gilt  $a = b$

□

### 1.19 Beispiel.

$X_n$  mit  $X_n = \frac{1}{n}$  (harmonische Folge)

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0, \epsilon$  beliebig,  $\epsilon$  fest gesucht :  $N$  mit  $n \geq N$

$$\Rightarrow |X_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \quad (1.19.1)$$

wähle  $N := \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$

□

### 1.20 Beispiel.

$\epsilon = \frac{1}{100}$ , gesucht  $N$  mit  $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$  wähle  $N = 101$

Schreibweise:  $X_n$  hat den Grenzwert  $a$  Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$   $X_n$  geht gegen  $a$  für  $n$  gegen Unendlich.

**1.21 Definition.**

$X_n$  heißt Nullfolge, wenn  $\lim X_n = 0$  gilt.

**1.22 Bemerkung.**

Es ist leichter, die Konvergenz einer Folge zu beweisen, als den Grenzwert auszurechnen.

**1.23 Beispiel.**

$$X_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{11-n}{9-n}\right)^9$$

$$\text{Behauptung: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{-2}{3}$$

**1.24 Lemma.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) \quad (1.24.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{11-n}{9-n}\right)^9 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11-n}{9-n}\right)^9 \quad (1.24.2)$$

$$= \frac{1}{3} + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11-n}{9-n} \right)^9 \quad (1.24.3)$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(\frac{1}{n} - 1)}{n(\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.24.4)$$

$$= \frac{1}{3} + \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{11}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.24.5)$$

$$= \frac{1}{3} + \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \right)^9 \quad (1.24.6)$$

$$= \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 11 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 9 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.24.7)$$

$$\frac{1}{3} + (-1)^9 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \quad (1.24.8)$$

**1.25 Definition.**

Eine Folge  $(X_n)$  hat den unendlichen Grenzwert  $\infty$ , wenn gilt :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : X_n > r$$

$$\text{Schreibweise : } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$$

**1.26 Bemerkung.**

$\infty$  ist keine Grenzwerte und keine reelle Zahl.

**1.27 Bemerkung.**

Grenzwertsätze gelten nicht für uneigentliche Grenzwerte.

**1.28 Bemerkung.**

gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$  dann schreibt man  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty$

**1.29 Beispiel.**

$X_n$  mit  $X_n = q^n$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q$  fest.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & |q| = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{ex.nicht,} & q \leq -1 \end{cases}$$

## 1.4 Konvergenzkriterien

(zum Beweis der Existenz eines Grenzwerts, nicht zum Berechnen von Grenzwert)

(1)  $X_n$  konvergent  $\Rightarrow (X_n)$  beschränkt.

wenn  $(X_n)$  nicht beschränkt  $\Rightarrow (X_n)$  nicht konvergent.

(2) Monotoniekriterium: wenn  $(X_n)$  beschränkt ist können wir fragen ob  $(X_n)$  konvergent.

$(X_n)$  beschränkt von Monotonie  $\Rightarrow (X_n)$  konvergent.

### 1.30 Bemerkung.

### 1.31 Beispiel.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11+n}{9-n} \quad ? \quad X_n = \frac{11+n}{9-n} = \frac{n \frac{11}{n} + 1}{n \frac{9}{n} - 1} \quad (1.31.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{11}{n} + 1 \right) = 1 \quad (1.31.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{9}{n} - 1 \right) = -1 \quad (1.31.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n) = \frac{1}{-1} = -1 \quad (1.31.4)$$

**1.32 Lemma.** Seien  $(x_n) = (y_n)$  Folgen auf  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a$  und es gelte  $x_n \leq z_n \leq y_n$  für fest alle  $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt für die Folge  $(z_n)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = a$

### 1.33 Beispiel.

Ist die Folge  $(-1)^n \frac{1}{n}$  konvergent?

$$-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \left( \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

### 1.34 Beispiel.

$$x_n \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{n-1!} \quad (1.34.1)$$

denn  $x_n = 0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq y_n$  , gesucht!  $\underbrace{y_n}_{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0}$  für hinreichend großes  $n$ .

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{(n-1)} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} \\ y_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \frac{a^k}{k!} \quad k \text{ ist fest} \end{aligned} \quad (1.34.2)$$

Es gilt  $\frac{a^n}{n!} \leq y_n$  für hinreichend großes  $n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{\text{Konst}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^k}{k!}\right)}_{\in \mathbb{R}} \\ &= 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \times \frac{a^k}{k!} = 0 \end{aligned} \quad (1.34.3)$$

## 1.5 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:

man kann oft durch lösen Fixpunktgleichung" berechnen.

$$x_0, x_n + 1 = \ln(x_n)$$

### 1.35 Beispiel.

$$(x_n) \quad x_0 = \frac{7}{5}, \quad x_n + 1 = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

$\ddot{U}(x_n)$  ist monoton fallend, beschränkt, konvergent.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1 = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} (\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n))^2 + 2$$

### Fixpunktgleichung

$$a = \frac{1}{3}(a^2 + 2), \text{ gesucht } = a$$

$$3a = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Lösung:  $a_1 = 2$  (keine Lösung),  $a_2 = 1$

### 1.36 Beispiel.

$(x_n)$  mit  $(x_0) = c \in \mathbb{R}, c \text{ fest}$   $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$

(1)  $(x_n)$  beschränkt ✓

(2)  $(x_n)$  Monoton ✓

Also  $(x_n)$  konvergent

Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) = \frac{1}{2}(a + \frac{c}{a}) = a$

$$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \Leftrightarrow a = \sqrt{c}$$

### 1.37 Bemerkung.

Der Nachweis der konvergent der rekursiv definierte Folge darf nicht weggelassen werden, denn Z.B  $x_0 = 2$ ,  $x_n + 1 = x_n^2$   $2, 4, 16, 256, \dots$  divergent gegen  $+\infty$

$$\text{Annahme: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}_a = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2}_a \Rightarrow a \in \{0, 1\}$$

## 1.6 Reihen :

### 1.38 Definition.

Sei  $(a_n)$  eine reellefolge (komplexwertig) Folge

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0, a_1, \dots, a_n,$$

heißt  $n$ -te heißt partielle Summe.  $(S_n)$  heißt unendliche Reihe.  
schreibweise :  $(S_n)^\infty = \text{bsw } (S_n)$

$$\left( \sum_{l=0}^n a_l \right)$$

bzw

$$\left( \sum_{l=0}^{\infty} a_l \right)$$

### 1.39 Bemerkung.

Reihen sind spezielle Folgen , alle konvergent oder divergent.

### 1.40 Definition.

Für eine konvergente Reihen wird der Grenzwert auch wert der Reihe genannt.

Schreibweise :  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

bzw

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

### 1.41 Beispiel.

geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

ist für  $|q| < 1$  konvergent . wert der Reihe für  $|q| < 1$  :

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

für  $|q| < 1$

# List of Theorems

1.1	Definition (Folgen)	2
1.6	Definition	4
1.11	Definition	5
1.15	Definition	6
1.16	Definition (grenzwert)	6
1.21	Definition	8
1.25	Definition	8
1.38	Definition	13
1.40	Definition	13