

Technische Universität Dresden • Fakultät Informatik

# Mathematische Methoden für Informatiker

Mitschrift zur Vorlesung Sommer Semester 2019

*Bachelor of Science (B.Sc.)*

Dozent: Prof. Dr. Ulrike Baumann  
vorgelegt von

”...”

MOHAMED ABDELSHAFI  
m.abdelshafi@mail.de

MAHMOUD KIKI  
mahmoud.kiki@Mailbox.tu-dresden.de

...

Tag der Einreichung: 3. Juni 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Folge und Reihen</b>	<b>2</b>
1.1 Vorlesung 1	2
1.1.1 Folge	2
1.2 Rechnen mit Folgen	3
1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)	5
1.4 vorlesung 2	7
1.5 Konvergenzkriterien	10
1.6 Vorlesung 3	11
1.7 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:	13
1.8 Reihen :	14
1.8.1 Rechenregeln für Reihen	15
1.9 Vorlesung 4	16
1.10 Reihen	16
1.11 Allgemeine harmonische Reihe	17
1.12 Expotentiale Reihe	18
1.13 Hauptkriterium	18
1.14 Kriterium für Alternierende Reihe	19
1.15 Quotientenkriterium (QK):	19
1.16 Wurzel Kriterium : WK	20
1.17 Vorlesung 5	21
1.17.1 Rechenregln für Funktionen (GWS anwenden)	26
1.18 Vorlesung 6	27
1.18.1 Ergebnis	27
1.19 Vorlesung 7	30
1.19.1 tafelwerk	30
1.19.2 Tangente Gleichung	31
1.20 Berechnen an $f'(x)$ Ableitungsregeln:-	31
1.20.1 Linearität:-	31
1.20.2 Produktregel:-	31
1.20.3 kettenregel:-	32
1.20.4 Quotientenregeln:-	32
1.20.5 Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}$ zu $f$	32
1.21 Vorlesung 8	34
1.22 Vorlesung 9	37
1.22.1 Taylor-Polynom $P_n(x)$ von $f(x)$	37
1.22.2 Taylor-Formel:	38

1.22.3	Näherungsformel für $e^x$ . . . . .	39
1.22.4	Rechnen mit Potenzreihen: . . . . .	39
1.23	Vorlesung 10 . . . . .	41
1.24	Spezielle Ableitungen . . . . .	41
1.25	Spezielle Grenzwerte . . . . .	42
1.25.1	Regeln von Bernoulli l'Hospital - . . . . .	42
1.26	Integral . . . . .	44
1.26.1	Lebague-Integral . . . . .	44
1.27	Vorlesung 11 . . . . .	45
1.27.1	Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	46
1.27.2	Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung . . . . .	46
1.27.3	Schreibweise . . . . .	47
1.27.4	2. Hauptsätze der Differenzial- und Integralrechnung . . . . .	48
1.27.5	Integrationsregeln entstehen aus Ableitungsregeln . . . . .	49
1.28	Vorlesung 12 . . . . .	50
1.28.1	Kettenregel $\leadsto$ Integration durch <b>Substitution</b> . . . . .	50
1.28.2	Produktregel $\leadsto$ <b>Partielle Integration</b> . . . . .	51
1.28.3	Koeffizienten Regel . . . . .	52
	<b>List of Theorems</b> . . . . .	<b>56</b>
	<b>List of Theorems</b> . . . . .	<b>57</b>

# Einleitung

Wir schreiben hier die Vorlesungen von INF-120-1( Mathematische Methoden für Informatiker) mit. wenn Ihr Fragen habt oder Fehlern gefunden Sie können gerne uns eine E-mail schreiben oder Sie können einfach bei github eine [Issue \(link\)](#) erstellen. wir freuen uns wenn Sie mit uns mitschreiben möchten, oder helfen mit der Fehlerbehebung.

Mohamed Abdelshafi  
Mahmoud Kiki

# Kapitel 1

## Folge und Reihen

### 1.1 Vorlesung 1

#### 1.1.1 Folge

**1.1 Definition** (Folgen).

*Ein folge ist eine Abbildung*

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \underbrace{\mathbf{M}}_{\text{Menge}} : n \mapsto \underbrace{x_n}_{\text{folgenreit}}$$

**1.2 Bemerkung.**

$\mathbf{M} = \mathbb{R}$  reellewert Folge

$\mathbf{M} = \mathbb{C}$  komplexwertig Folge

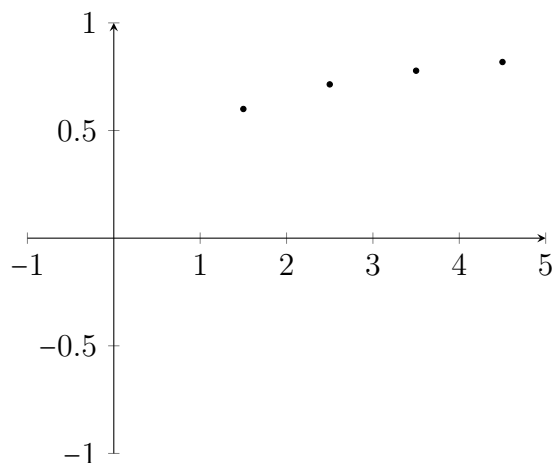
$\mathbf{M} = \mathbb{R}^n$  vektorwertig Folge

**Bezeichnung**  $(x_n)$  mit  $(x_n) = \frac{n}{n+1}$

Aufzählung der folgenreit:  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

**1.3 Bemerkung.**

zuwerten wird  $\mathbb{N}$  durch  $\mathbb{N} \setminus 0, 1, \dots$  erstellt.



## 1.4 Beispiel.

1. *Konstante Folge*  $(x_n)$  mit  $x_n = a \in \mathbf{M}, a \dots$

$$x_n = a \in \mathbf{M}$$

2. *Harmonische Folge*  $(x_n)$  mit  $x_n = \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1$

3. *Geometrische folge*  $(x_n)$  mit  $x_n = q^n, q \in \mathbb{R}, \dots$

4. *Fibonaccifolge*  $(x_n)$  mit

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

5. *Fibonacci folgen*  $(x_n)$

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = 1$$

$$X_{n+1} = x_n + X_{n-1} \quad (n > 0)$$

6. *conway folge*

$$1, 11, 21, 1211, 111217, 312211 \dots$$

7. *folge aller Primzahlen:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

## 1.2 Rechnen mit Folgen

$$(M = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad M = \mathbb{C})$$

$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$$

$$K(x_n) := (Kx_n) \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \in \mathbb{C}$$

## 1.5 Bemerkung.

*Die Folge bildet ein Vektorraum.*

### 1.6 Definition (Beschränktheit).

1. Eine reellwertige Funktion ist in der Mathematik eine Funktion, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind.
2. Eine reellwertige heißt beschränkt wenn gilt

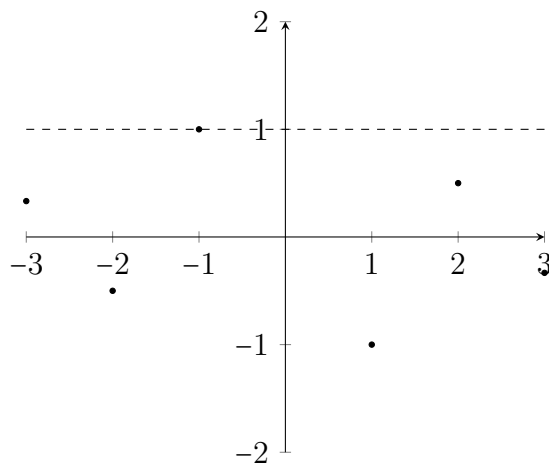
$$\exists r \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{|x_n|}_{\text{Betrag einer reellen oder komplexer Zahl}} \leq r$$

*Betrag einer reellen oder komplexer Zahl*

### 1.7 Beispiel.

$$(x_n) \quad \text{mit} \quad x_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{5}, \dots$$



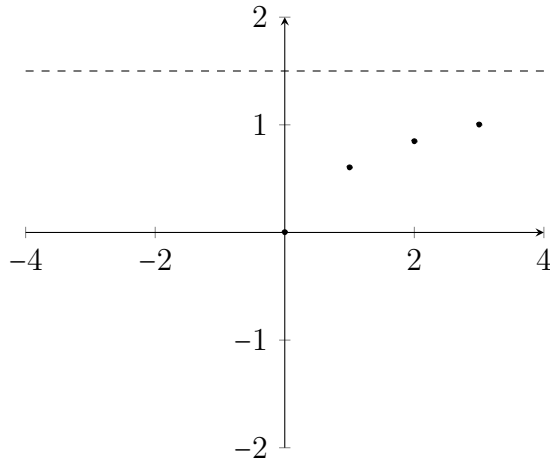
### 1.8 Bemerkung.

$(x_n)$  ist beschränkt mit  $r = 1$  denn  $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leq 1 \leftrightarrow r$

### 1.9 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } x_n = (-1)^n \frac{1}{n} + 1 \quad \text{beschränkt } r = 3/2$$

$$-3/2 \leq x_n \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



### 1.10 Beispiel.

Standard:

Die Folge  $\left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n=1}^{\infty}$  ist beschränkt durch 3

Zu zeigen:  $-3 \leq x_n \leq 3$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

## 1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)

### 1.11 Definition (Monoton).

Die Folge  $(x_n)$  heißt monoton  $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$

$$\text{wenn gilt: } \forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} x_n \leq x_{n+1} \\ x_n \geq x_{n+1} \end{cases}$$

man spricht von Streng monotonie wenn  $\leq$  durch  $>$  und  $\geq$  durch  $<$  ...

### 1.12 Bemerkung.

$$x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n - x_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1$$



### 1.13 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } X_0 := 1, X_{n+1} := \sqrt{x_n + 6}$$

ist Streng monoton wachsend Beweis mit Vollständiger Induktion

**Standard Bsp:**  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ist streng monoton wachsend

### 1.14 Bemerkung.

<i>monoton</i>	<i>ja</i>	<i>nein</i>
<i>Beschränktheit</i>	$\left(\frac{1}{n}\right)$	$(-1)^n$
<i>nein</i>	$(n)$	$(-1)^n$

### 1.15 Definition (Konvergenz, Divergenz).

$(x_n)$  heißt **Konvergenz** wenn  $(x_n)$  ein Grenzwert hat.

$(x_n)$  heißt **Divergenz** wenn sie keinen Grenzwert hat.

### 1.16 Definition (Grenzwert).

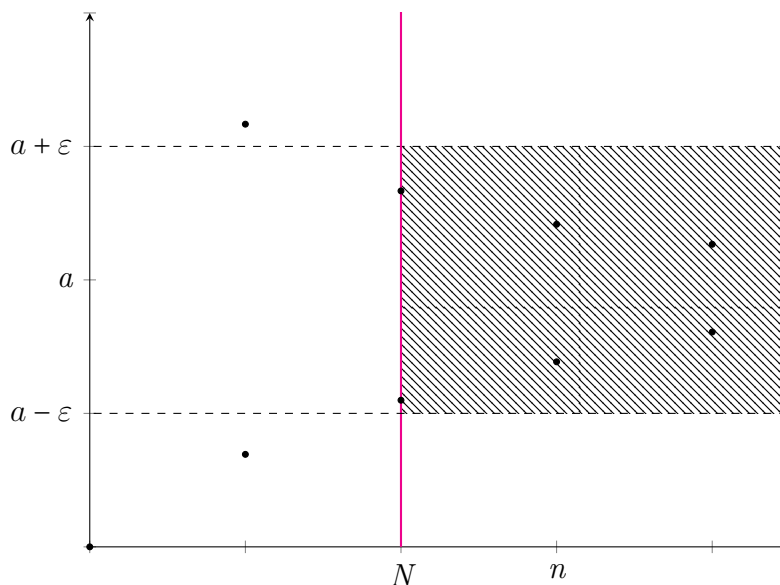
$a \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert von  $(x_n)$ , wenn gilt:

$$\underbrace{\forall \epsilon > 0}_{\text{beliebiges klein}} \quad \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}}_{\text{beliebiges klein}} \quad , \forall n \in \mathbb{N} : m \geq N$$

$$\underbrace{\Rightarrow |x_n - a| < \epsilon}_{a - \epsilon \leq x_n \leq a + \epsilon}$$

Sei  $\epsilon > 0; \epsilon$  fest

alle Folgenglieder  $x_n$  mit  $n \geq N \leadsto$



## 1.4 vorlesung 2

ist die folge beschränkt , monoton ?

$(x_n)$  konvergierend :  $\iff \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 $n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

**1.17 Satz.**  $(x_n)$  konvergierend :  $\Rightarrow$  Der Grenzwert ist eindeutig beschränkt.

**1.18 Beweis.**

Sei  $a$  ein Grenzwert von  $(x_n)$  ,  $b$  ein Grenzwert von  $(x_n)$   
d.h sei  $\epsilon > 0, \epsilon$  beliebig ,  $\epsilon$  fest

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a : |x_n - a| < \epsilon \quad (1.18.1)$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b : |x_n - b| < \epsilon \quad (1.18.2)$$

Sei  $\max \{N_a, N_b\} = N$  dann gilt :

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \quad (1.18.3)$$

und

$$|x_n - b| < \epsilon \Rightarrow |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \quad (1.18.4)$$

Annahme :-  $a \neq b$  , d.h  $|a - b| \neq 0$

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a + 0 - b| \\ &= |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \\ \text{also } |a - b| &< 2\epsilon \end{aligned}$$

wähle z.B

$$\epsilon = \frac{|a - b|}{3} \quad \text{dann gilt : } |a - b| < \frac{2}{3} |a - b|$$

$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3}$  falls Aussage, Widerspruch also ist die Annahme falsch also gilt  $a = b$

**1.19 Beispiel.**

$x_n$  mit  $x_n = \frac{1}{n}$  (harmonische Folge)

**1.20 Beweis.**

Sei  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon$  beliebig,  $\epsilon$  fest gesucht :  $N$  mit  $n \geq N$   
hat den Grenzwert 0

$$\Rightarrow |x_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \quad (1.20.1)$$

wähle  $N := \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$

**1.21 Beispiel.**

$\epsilon = \frac{1}{100}$  , gesucht  $N$  mit  $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$  wähle  $N = 101$

**1.22 Schreibweise.**

$x_n$  hat den Grenzwert  $a$  Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$   $x_n$  geht gegen  $a$  für  $n$  gegen Unendlich.

**1.23 Definition** (Nullfolge).

$x_n$  heißt Nullfolge ,wenn  $\lim x_n = 0$  gilt.

**1.24 Bemerkung.**

Es ist leichter, die konvergente einer Folge zu beweisen, als den Grenzwert auszurechnen.

**1.25 Beispiel.**

$$x_n = \frac{1}{3} + \left( \frac{11-n}{9-n} \right)^9$$

Behauptung:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{-2}{3}$

**1.26 Lemma.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) \quad (1.26.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{11-n}{9+n} \right)^9 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{11-n}{9+n} \right)^9 \quad (1.26.2)$$

$$= \frac{1}{3} + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11-n}{9+n} \right)^9 \quad (1.26.3)$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(\frac{1}{n} - 1)}{n(\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.26.4)$$

$$= \frac{1}{3} + \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{11}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.26.5)$$

$$= \frac{1}{3} + \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \right)^9 \quad (1.26.6)$$

$$= \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 11 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 9 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) + 1} \right)^9 \quad (1.26.7)$$

$$\frac{1}{3} + (-1)^9 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \quad (1.26.8)$$

**1.27 Definition** (Unendliche Grenzwert).

Eine Folge  $(x_n)$  hat den unendliche Grenzwert  $\infty$ , wenn gilt :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : x_n > r$$

**1.28 Schreibweise.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

**1.29 Bemerkung.**

$\infty$  ist keine Grenzwerte und keine reelle Zahl.

**1.30 Bemerkung.**

Grenzwertsätze gelten nicht für uneigentliche Grenzwerte.

**1.31 Bemerkung.**

*gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  dann schreibt man  $\lim_{n \rightarrow \infty} -x_n = -\infty$*

**1.32 Beispiel.**

*$x_n$  mit  $x_n = q^n$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q$  fest.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & |q| = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{ex.nicht,} & q \leq -1 \end{cases}$$

**1.5 Konvergenzkriterien**

(zum Beweis der Existenz eines Grenzwerts, nicht zum Berechnen von Grenzwerten)

(1)  $x_n$  konvergent  $\Rightarrow (x_n)$  beschränkt.

wenn  $(x_n)$  nicht beschränkt  $\Rightarrow (x_n)$  nicht konvergent.

(2) Monotoniekriterium: wenn  $(x_n)$  beschränkt ist können wir fragen ob  $(x_n)$  konvergent.

$(x_n)$  beschränkt von Monotonie  $\Rightarrow (x_n)$  konvergent.

**1.33 Beispiel.**

*$\left((-1)^n \times \frac{1}{n}\right)$  konvergent (Nullfolge) diese Folge ist beschränkt aber nicht Monoton*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

*existiert. Diese ist beschränkt und monoton.*

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

*existiert.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) = e^a$$

## 1.6 Vorlesung 3

### 1.34 Beispiel.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11+n}{9-n} \quad ? \quad x_n = \frac{11+n}{9-n} = \frac{n \frac{11}{n} + 1}{n \frac{9}{n} - 1} \quad (1.34.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{11}{n} + 1 \right) = 1 \quad (1.34.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{9}{n} - 1 \right) = -1 \quad (1.34.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \frac{1}{-1} = -1 \quad (1.34.4)$$

**1.35 Lemma** (Quetschlemma). *Seien  $(x_n), (y_n)$  Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a$  und es gelte  $x_n \leq z_n \leq y_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$*

*Dann gilt für die Folge  $(z_n)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = a$*

### 1.36 Beispiel.

*Ist die Folge  $(-1)^n \frac{1}{n}$  konvergent ?*

$$-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \left( \frac{1}{n} \right) \leq 1 \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\left( \frac{1}{n} \right) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

### 1.37 Beispiel.

$$x_n \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{n-1!} \quad (1.37.1)$$

denn  $x_n = 0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq y_n$  , gesucht!  $\underbrace{y_n}_{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0}$  für hinreichend großes  $n$ .

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{(n-1)} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} \\ y_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \frac{a^k}{k!} \quad k \text{ ist fest} \end{aligned} \quad (1.37.2)$$

Es gilt  $\frac{a^n}{n!} \leq y_n$  für hinreichend großes  $n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{\text{Konst}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^k}{k!}\right)}_{\in \mathbb{R}} \\ &= 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \times \frac{a^k}{k!} = 0 \end{aligned} \quad (1.37.3)$$

## 1.7 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:

man kann oft durch lösen Fixpunktgleichung" berechnen.

$$x_0, x_{n+1} = \ln(x_n)$$

Folge, Falls  $(x_n)$  hinreichend ist, was gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-2} = \dots = 4$$

### 1.38 Beispiel.

$$(x_n) \quad x_0 = \frac{7}{5}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

$\ddot{U}(x_n)$  ist monoton fallend, beschränkt, konvergent.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 2) = \frac{1}{3}(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n))^2 + 2)$$

### Fixpunktgleichung

$$a = \frac{1}{3}(a^2 + 2), \text{ gesucht } = a$$

$$3a = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Lösung:  $a_1 = 2$  (keine Lösung),  $a_2 = 1$

### 1.39 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } (x_0) = c \in \mathbb{R}, c \text{ fest } x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$$

(1)  $(x_n)$  beschränkt ✓

(2)  $(x_n)$  Monoton ✓

Also  $(x_n)$  konvergent

$$\text{Sei } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \text{ Dann } \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n) + \frac{c}{x_n} = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{c}) = a$$

$$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \Leftrightarrow a = \sqrt{c}$$

### 1.40 Bemerkung.

Der Nachweis der konvergent der rekursiv definierte Folge darf nicht weggelassen werden, denn Z.B  $x_0 = 2$ ,  $x_{n+1} = x_n^2$   $2, 4, 16, 256, \dots$  divergent gegen  $+\infty$

$$\text{Annahme: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}_a = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2}_{a^2} \Rightarrow a \in \{0, 1\}$$



## 1.8 Reihen :

### 1.41 Definition (Unendliche Reihen).

Sei  $(a_n)$  eine reellefolge (komplexwertig) Folge

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0, a_1, \dots, a_n,$$

$n$ -k heißt Partialsumme.  $(S_n)$  heißt unendliche Reihe.

schreibweise :  $(S_n)^\infty = \text{bsw } (S_n)$

$$\left( \sum_{l=0}^n a_l \right)$$

bzw

$$\left( \sum_{l=0}^{\infty} a_l \right)$$

### 1.42 Bemerkung.

Reihen sind spezielle Folgen , alle konvergent oder divergent.

### 1.43 Definition (wert der Reihe).

Für eine konvergente Reihen wird der Grenzwert auch wert der Reihe genannt.

### 1.44 Schreibweise.

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

bzw

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

### 1.45 Beispiel.

Teleskopreihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$  in Grenzwert der Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{-1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1$$

### 1.46 Beispiel.

geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  ist für

$$|q| < 1$$

konvergent. Wert der Reihe für  $|q| < 1$   $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$  für  $|q| < 1$  konvergent, Werte der Reihe für

$$|q| < 1: \sum_{k=0}^n q^k = \dots$$

$$\begin{aligned} S_n &= q^0 + q^1 + \dots + q^n \\ -qS_n &= q^1 + q^2 + \dots + q^{n+1} \\ (1-q)S_n &= q^0 - q^{n+1} \\ S_n &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} (1 - q)^{n+1} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{1}{1 - q} \times \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 - q)^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1 - q} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}) = \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

### 1.8.1 Rechenregeln für Reihen

konvergente Reihe kann man addieren oder subtrahieren mit einem Skalar multiplizieren wie endliche Summen. ABER: das gilt im Allgemeinen nicht für das Multiplizieren

## 1.9 Vorlesung 4

### 1.10 Reihen

#### 1.47 Beispiel.

*Zur geometrischen Reihen*

*gesucht : A*

$$2A = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^k + \dots$$

$$9 = \frac{1}{4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 2A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

#### 1.48 Beispiel.

$$\begin{aligned} 0,4\overline{3} &= \frac{3}{4} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \dots \\ \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \left(\frac{1}{10}\right)^0 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots \\ &= \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{1}{30} = \frac{12+1}{30} = \frac{13}{30} \end{aligned} \tag{1.48.1}$$

*wenn  $0,4\overline{3}$  erlaubt wäre, dann,*

$$\frac{4}{10} + \frac{9}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

### 1.49 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \text{ ist divergent, denn } \lim_{\infty} \sum_{K=1}^n \frac{1}{k} \text{ ex. nicht}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{10} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

## 1.11 Allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad (\infty \text{ fest, mit } \alpha \in \mathbb{R}) \quad \begin{array}{l} \text{falls } \alpha \geq 1 \rightarrow \text{konvergent} \\ \text{falls } \alpha \leq 1 \rightarrow \text{Divergent} \end{array}$$

### 1.50 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{ist konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ist Divergent}$$

### 1.51 Beweis (Monotoniekriterium). mit Monotoniekriterium für Folge

$$\text{Reihe ist konvergent} \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \sum_{K=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ ist monoton wachsend.} \\ (2) \quad \sum_{K=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ ist beschränkt.} \end{array} \right.$$

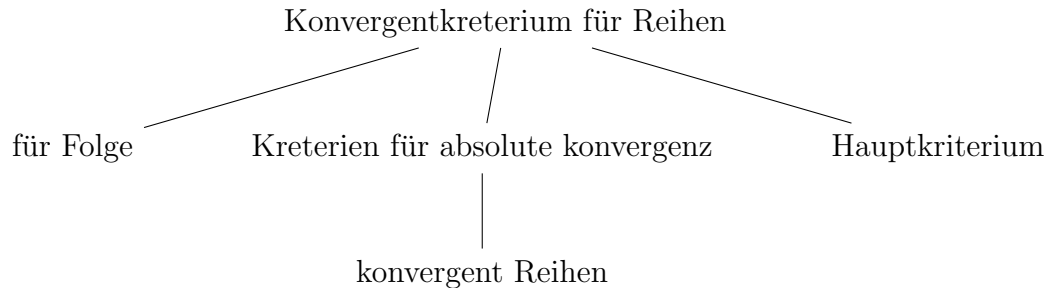
$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2}$$

$$< 1 + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}}_{2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^2}}_{4 \cdot \frac{1}{4^2}} +$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \underbrace{\frac{1}{4}}_{(\frac{1}{2})^2} + \underbrace{\frac{1}{8}}_{(\frac{1}{2})^3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{1}{2} - 1}$$

## 1.12 Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \quad \text{ist konvergent}$$



## 1.13 Hauptkriterium

★ konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  dann ist  $(a_k)$  Nullfolge.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \underbrace{\text{nullkonvergent}}_{\text{divergent}}$$

oder

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k \quad \text{ex.null}$$

### 1.52 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 + 1}{4k^2 - 1} \quad \text{divergent,} \quad \text{aber} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divergent} \quad \text{und} \quad \frac{1}{k} \quad \text{Nullfolge}$$

### 1.53 Beweis.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (\text{konvergent}) \Rightarrow \underbrace{(a_k) \quad \text{Nullfolge}}_{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0}$$

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad , \quad s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \quad , \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s - s = 0$$

## 1.14 Kriterium für Alternierende Reihe

1.54 Beweis (Alternierende Reihe).

$$\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ ist konvergent}$$
$$\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

wobei  $(a_k)$  einer Streng monoton fallend Nullfolge mit  $a_k \geq 0$   
 $\Rightarrow$  Die Reihe ist konvergent.

$$\text{Also } \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ ist konvergent.}$$

1.55 Definition (absolute Reihe).

Eine Reihe  $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$  heißt absolute konvergent wenn  $\sum_{K=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent ist.

1.56 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ ist konvergent, aber nicht absolute konvergent}$$
$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \text{ ist konvergent und } \mathbf{absolute} \text{ konvergent}$$

1.57 Satz.

$$\text{Reihe } \sum_{K=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \Rightarrow \text{Reihe } \sum_{K=0}^{\infty} a_k \text{ ist Konvergent}$$

1.58 Bemerkung.

absolute konvergente Reihe kann man multiplizieren wie endliche summen. (aber konvergente Reihen nicht !)

## 1.15 Quotienkriterium (QK):

Für absolute Konvergenz, wenn gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \text{ ist absolut konvergent} \\ > 1 \Rightarrow \text{ ist divergent) } \\ = 1 \Rightarrow \text{ Kriterium ist nicht anwendbar} \end{cases}$$

## 1.16 Wurzel Kriterium : WK

Die Reihe  $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$  ist **absolute** konvergent genau wenn  $\Leftrightarrow$  :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent} \\ > 1 \Rightarrow \text{ist divergent} \\ = 1 \Rightarrow \text{Kriterium ist nicht anwendbar} \end{cases}$$

1.59 Beispiel (QK).

$$\begin{aligned} & \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 \end{aligned}$$

d.h.  $< 1 \Rightarrow$  Die Reihe ist absolute Konvergent.

1.60 Beispiel (WK).

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k!} \right|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{1}}{\sqrt[k]{k!}} = \\ & \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!}} = 0 < 1 \end{aligned}$$

Die Reihe ist absolut konvergent.

## 1.17 Vorlesung 5

Zusammenfassung :

Folgen / Reihen / Konvergenz ? / Grenzwert ?

Neu : Funktionen

Approximation von Funktionen

Potenzreihen

Taylorreihen

fourierreihen

Näherungsweise Berechnung

### 1.61 Definition.

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt reelle Funktion in einer reellen veränderlichen

### 1.62 Bemerkung (Definitionsbereich).

Bild von  $f$

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

Graph von  $f$

$$\text{Graph}(f) = \{(x \mid f(x)) \mid x \in D\}$$

### 1.63 Definition.

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$

$f$  heißt in  $a$  stetig, wenn gilt :

$\forall (X_n) : X_n \in D$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  für alle Folgen  $(x_n)$

Die Folgenglieder sollen in Definitionsbereich liegen (Die in Definitionsbereich liegen können und den Grenzwert  $a$  haben)

\* Ich weiß, dass  $f(x_n)$  existiert ( $f(x_n) \text{ ex.}$ )

Folge  $f(x_n) \text{ ex.}$ , soll einen Grenzwert besitzen. ✓

$f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$  ✓✓

### 1.64 Bemerkung.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

★ Grenzwertbildung und Funktion Wertberechnung sind bei stetig Funktion in der Reihenfolge vertauschbar !

### 1.65 Berechnung.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

**d.h** für jede Folge  $x_n$ , die gegen  $a$  konvergiert, konvergiert die Folge der Funktionierte gegen  $f(a)$ .



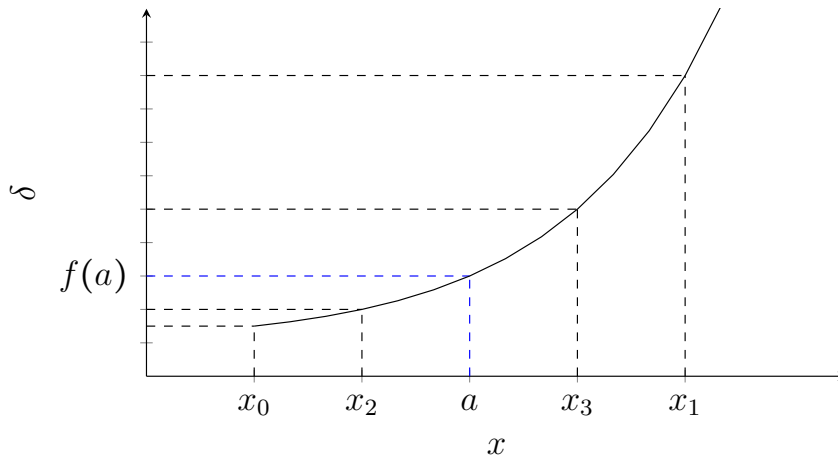
**1.66 Bemerkung.**

$f$  stetig in  $a \Leftrightarrow$

1)  $f(a)$  und

2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ex. und

3) Grenzwert = Funktionswert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**1.67 Beispiel.**

1)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)}$$

Ist  $f(x)$  stetig in  $a = 1$  ?

a)  $f(1)$  ex ? nein , d.h  $f$  ist in  $a = 1$  nicht stetig

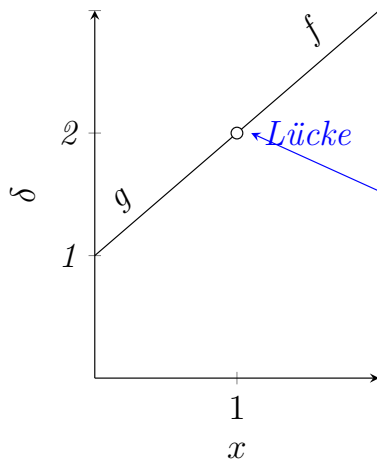
b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = ?$$

Sei  $(x_n)$  eine beliebige Folge und  $x_n \in D(f)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{(x_n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 + 1 = 2$$

d.h Grenzwert ex. (und es ist 2 ).

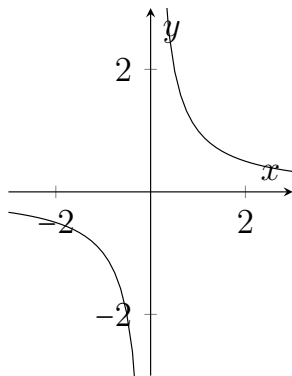


Man sagt,  $f$  hat an der Stelle 1 eine Lücke.

### 1.68 Beispiel.

(2)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 0$$



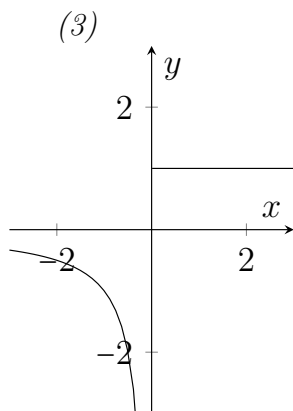
(i) betrachte  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ : d.h. wir betrachten alle Folgen  $(x_n)$

$$X_n \in D, X_n \leq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n} = -\infty \end{aligned}$$

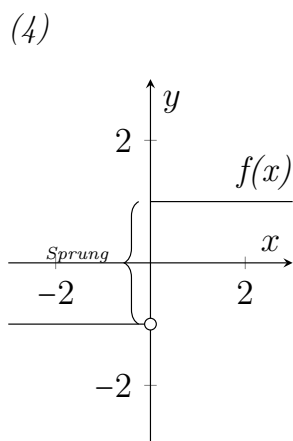
$$\text{d.h. } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ ex. nicht}$$

(ii) Betrachte  $\lim_{n \rightarrow +0} f(x_n)$ , ex. nicht



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases} \quad a = 0 \quad , \quad f(0) = 1 \quad ex.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad ex. \text{ nicht}$$



### 1.69 Definition (sgn(x)).

Die Vorzeichenfunktion oder **Signumfunktion** (von lateinisch *signum* ‚Zeichen‘) ist in der Mathematik eine Funktion, die einer reellen oder komplexen Zahl ihr Vorzeichen zuordnet.

Die reelle Signumfunktion bildet von der Menge der reellen Zahlen in die Menge  $\{-1, 0, 1\}$  ab und wird in der Regel wie folgt definiert:

$$f(x) = \underbrace{\operatorname{sgn}(x)}_{\text{sprung}} = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\neq \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 & ex. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 & ex. \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad ex. \text{ nicht}, \quad 0 \text{ hei\ss} \text{t Sprungstelle}$$

### 1.70 Definition.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$  heißt **stetig**, wenn  $f$  für alle  $a \in D$  **stetig**

### 1.71 Beispiel.

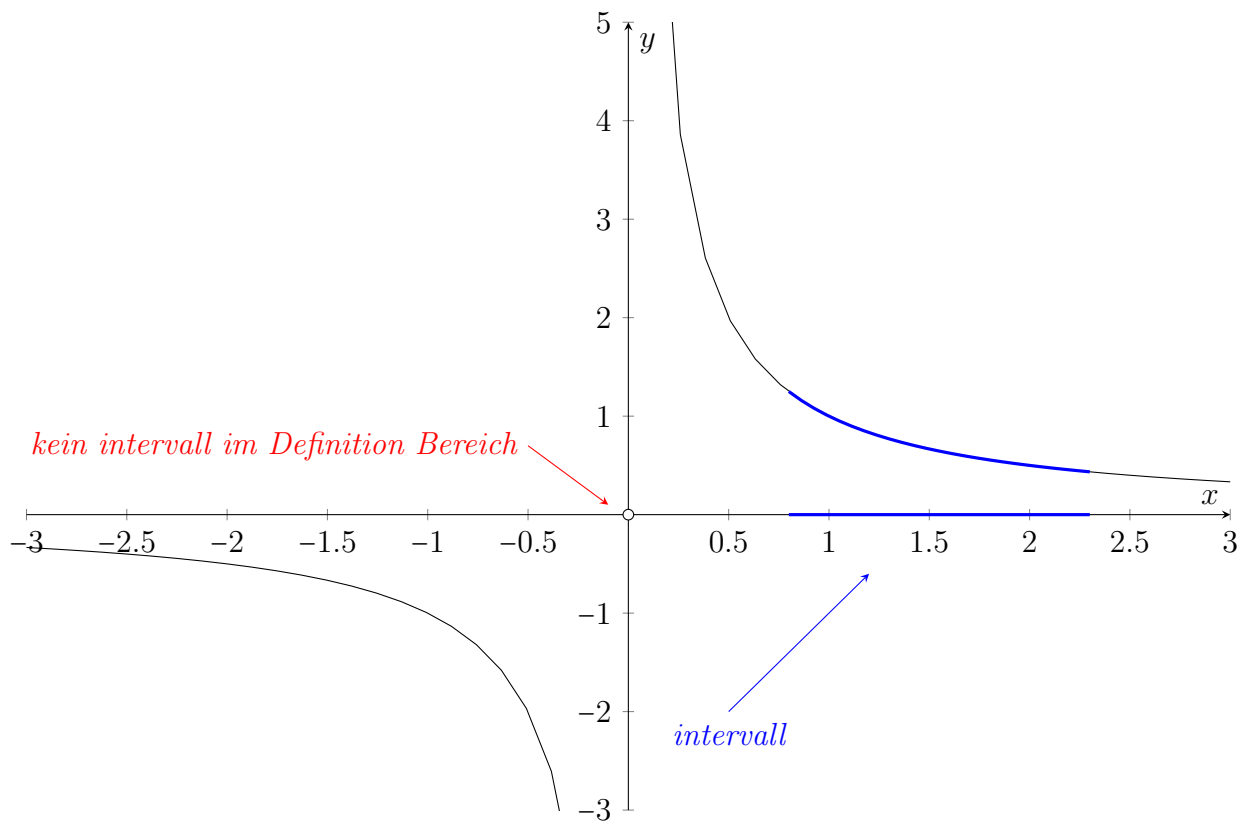
elementare Funktionen und deren Verfügungen sind stetig auf dem gesamten Definitionsbereich.

#### **Z.B**

Polynomfunktion, rationale Funktionen, Winkelfunktionen, Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktion.

### 1.72 Beispiel.

$f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} = x^{-1}$  ist stetig auf dem gesamten Definitionsbereich  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



### 1.73 Beweis.

Sei  $a \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (d.h.  $a \neq 0$ )

$$f(a) = \frac{1}{a} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad (2)$$

Sei  $x_n$  eine beliebige Folge und  $x_n \in \underbrace{D}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \\ &= \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \quad \text{ex.} \end{aligned}$$

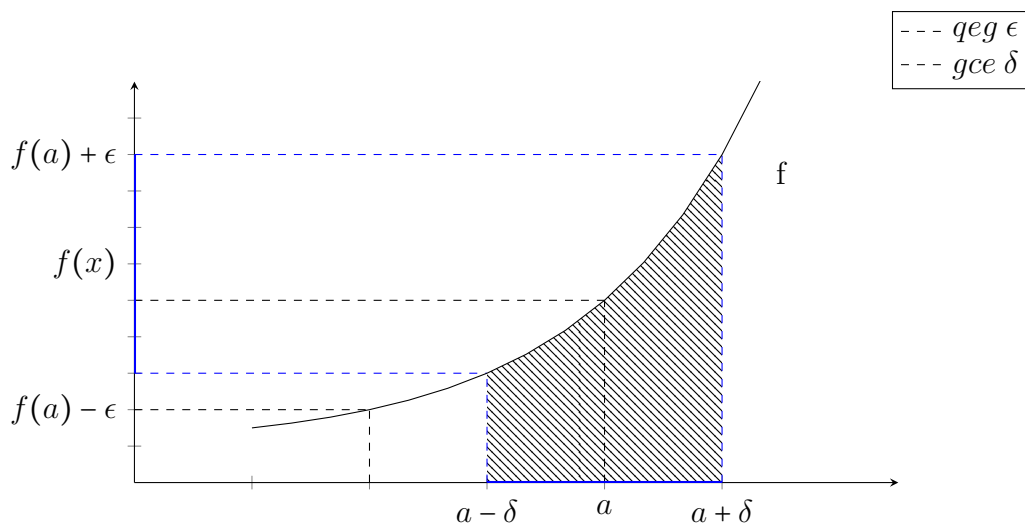
### 1.17.1 Rechenregeln für Funktionen (GWS anwenden)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x), \text{ wo bei } g(x) \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) \pm g(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$$

### 1.74 Satz.

$$f : D \Rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R} \text{ ist in } a \in D \text{ stetig} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad (1.74.1)$$



## 1.18 Vorlesung 6

$$|x - a| < \delta$$

$$|x - a| = \begin{cases} x - a, & x - a \geq 0 \\ -(x - a), & x - a < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - a, & x \geq a \\ a - x, & x < a \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq a : x - a < \delta \Rightarrow x < a + \delta \\ x < a : a - x < \delta \Rightarrow a - \delta < x \end{cases} \Rightarrow$$
(1.74.2)

$$\begin{cases} a \leq x < a + \delta \\ a + \delta < x < a \end{cases} \quad (1.74.3)$$

### 1.18.1 Ergebnis

$$|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$$

$$\Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ offenes Intervall}$$

$$|x - a| < \delta$$

x liegt in der  $\delta$ -Umgebung von a

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \text{ liegt in der } \epsilon\text{-Umgebung von } f(a)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \quad \epsilon > 0$$

$$I\left(\frac{1}{e}\right) = I(e^{-1}) = 1 \cdot k \quad \text{rell} \quad I(e^{-n}) = I(\underbrace{e^{-1} \dots e^{-1}}_n) = I(e^{-1}) + \dots + I(e^{-1}) = k \cdot n \quad (1.74.4)$$

$$\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} : I(e^{-\frac{n}{m}}) = k \cdot \frac{n}{m}, \text{ denn} \quad (1.74.5)$$

$$kn = I(e^{-n}) = I(e^{-\frac{n}{m} \cdot m}) = I(\underbrace{e^{-\frac{n}{m}} \dots e^{-\frac{n}{m}}}_m) + \dots + I(e^{-\frac{n}{m}}) = I(e^{-\frac{n}{m}}) + \dots + I(e^{-\frac{n}{m}})$$
(1.74.6)

$$r \in \mathbb{R}_+ : I(e^{-r}) = ? \quad (1.74.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{q_n}_{\in \mathbb{Q}_+} = r$$

$$I(e^{-r}) = I(e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n)}) = I(e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{q}{n})}) \stackrel{e \text{ stetig}}{\stackrel{!}{=}} I(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-q_n}) \stackrel{I \text{ stetig}}{\stackrel{!}{=}} \lim_{n \rightarrow \infty} I(e^{-\frac{q}{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot q_n = k \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} q_n}_r = k \cdot r$$

$$I\left(\frac{1}{e}\right) = I(e^{-1}) = \frac{1}{k} \text{rell}$$

$$I(p) = I(e^{\ln p}) = \underbrace{k}_{>0} (-\ln p) = \underbrace{-k}_{<0} \ln p$$

### 1.75 Beispiel.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \quad (\text{rational}) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (\text{irrational}) \end{cases}$$

stetig für welche  $a$ ?

1. Fall :  $a$  rational

2. Fall :  $a$  irrational

$a$  rational:  $a$  fest

sei  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , beliebig  $\exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |D(x) - D(a)| < \frac{1}{2}$  Sei  $\delta$  beliebig,  $\delta \neq 0$ ,  $x$  irrational, fest

$|x - a| < \delta \Rightarrow |0 - 1| = |1 - 1| = 0 < \frac{1}{2}$ , Widerspruch

$\Rightarrow D$  ist nicht stetig, für jede  $a \in \mathbb{R}$

Sei  $\delta > 0$ , beliebig,  $x$  rational, fest  $|x - a| < \delta \Rightarrow \underbrace{|D(x) - D(a)|}_1 < \frac{1}{2} = \varepsilon \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$

Widerspruch

$\Rightarrow D$  ist nicht stetig für jede  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

**1.76 Satz.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , stetig  $f$  besetzt in  $[a, b]$  ein globales Maximum und ein globales Minimum

### 1.77 Bemerkung.

Beide (unklar!) Veränderungen sind wichtig

### 1.78 Bemerkung (a,k).

$= x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b$

**1.79 Satz (ZWS).** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\frac{x_m}{x_M}$  eine globale Minimale stelle eine globale Maximale stelle

Sei  $\hat{y} \in [f(x_m), f(x_M)]$ : Dann ex.  $\hat{x} \in [a, b]$  mit  $\hat{y} = f(\hat{x})$

### 1.80 Bemerkung.

Jeder Zwischenwert wird als Funktionswert angenommen

**1.81 Satz (Nullstellen).** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a) \cdot f(b) < 0$  Dann beliebig  $f$  in  $[a, b]$  eine Nullstelle  $x_0$ , d.h.  $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$

Beweis.  $f(a) < 0, f(b) > 0$  (analog für  $f(a) > 0, f(b) < 0$ )

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{a_1+b_1}{2} \text{ ist die gesamte Nullstelle} \\ < 0, & a_2 = \frac{a_1+a_2}{2}, b_2 = b_1 \\ > 0, & a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \end{cases}$$

usw.  $\frac{a_2+b_2}{2}$  berechnen

$$f(\cdot) \begin{cases} = 0 \\ < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Betrachte  $(a_n)$

Stetigmax

sei  $\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: c}_{ex.}$

sei  $\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: c}_{ex.}$

$a \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$  ex.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

beschränkt  $\Rightarrow konvergent$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a - b|}{2^{n-1}} \\
 &= |a - b| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
 &= |a - b| \cdot 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

Betrachte  $(b_n)$

Stetigmax

beschränkt  $\Rightarrow konvergent$

Falls keine Nullstelle beim bilden von  $a_n, b_n$  gefunden wurden

$$\left. \begin{aligned}
 f(c) &= f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \stackrel{fstetig}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq 0 \\
 &= \\
 f(c) &= f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) \stackrel{fstetig}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \leq 0
 \end{aligned} \right\} f(c) = 0$$

□



## 1.19 Vorlesung 7

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \notin D$$

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \in \mathbb{R}}_{x \neq a} \Leftrightarrow \forall (x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ und } x_n \in D$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = r$$

### 1.82 Beispiel.

$$\text{GWS nicht anwendbar } \lim_{x \rightarrow 0} \overbrace{x \sin x}^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.0 = 0$$

### 1.83 Bemerkung.

$$\text{GWS nicht anwendbar } \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}_{f(x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

### 1.84 Definition.

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$

$x_0 \in (a, b) \Leftrightarrow x_0 \in \mathbb{R}$  und  $a < x_0 < b$  ( $\Leftrightarrow$  (skizzenotcomplete))

$f$  ist in  $x_0$  differenzierbar :  $\Leftrightarrow f'(x_0) := \lim_{\substack{x \rightarrow f(x) \\ f \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert ( $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ )

Falls der Grenzwert ex., nennt man  $f'(x_0)$  die erste Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .

Existiert  $f'(x_0)$  für alle  $x_0 \in (a, b)$ , dann nennt man  $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mapsto f'(x_0)$  die erste Ableitung von  $f$ .

### 1.85 Beispiel.

$f(x) = \frac{1}{x}$  auf  $(0, r)$   $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $r$  fest und  $x_0 \in (0, r)$ , ges:  $f'(x_0)$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{(x_0 - x)}{x - x_0(x - x_0)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \underbrace{\left(-\frac{1}{x_0}\right)}_{\text{konst.}} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x_0} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x} \\ &\stackrel{\frac{1}{x} \text{ stetig F.}}{=} -\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

$f' : (0, r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$  in die erste Ableitung von  $f(x) = \frac{1}{x}$

### 1.19.1 tafelwerk

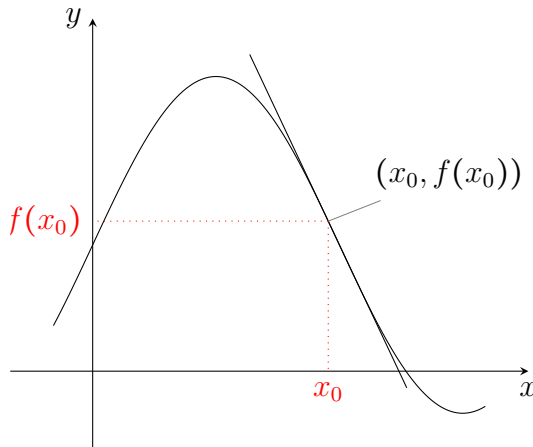
$f$   $f'$

$$\begin{array}{cc} x^n & nx^{n-1} \\ \downarrow n = -1 & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{x} & -\frac{1}{x^2} \end{array}$$

**1.86 Satz.**  $f$  in  $x_0$  differenzierbar  $\Rightarrow f$  in  $x_0$  stetig

*Beweis.* Sei  $f$  in  $x_0$  d.b  $\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ex. ... □



Die Linie repräsentiert die Tangente ((T)) an den Grenzwert von  $f(x_0)$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## 1.19.2 Tangente Gleichung

$$T : t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

**1.87 Bemerkung.**

$f'(x_0)$  gibt die Ableitung der Tangente an den Grenzwert der Funktion  $f$  im Punkt  $x_0, f(x_0)$  an.

## 1.20 Berechnen an $f'(x)$ Ableitungsregeln:-

### 1.20.1 Linearität:-

Sei  $\underbrace{f(x) \text{ und } g(x)}_{h'(x)}$  gegeben sind, dann wie sieht die Ableitung von  $h'(x)$  ?

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\underbrace{r f(x)}_{h(x)}' = \underbrace{r}_{\in \mathbb{R}} f'(x)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

### 1.20.2 Produktregel:-

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

### 1.20.3 kettenregel:-

$$\underbrace{(f \circ g)'(x)}_{f(g(x))'} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

### 1.20.4 Quotientenregeln:-

In Tafelwerk :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Herleitung :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

1.88 Bemerkung (Tafelwerk).

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

1.89 Beispiel.

$$\begin{aligned} (\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{1}{(\cos(x))^2} \\ &= 1 + (\tan(x))^2 \end{aligned}$$

### 1.20.5 Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}$ zu $f$

1.90 Definition.

Ist  $y = f(x)$  eine umkehrbare differenzierbare Funktion, dann ist die Umkehrfunktion  $x = g(y)$  differenzierbar und es gilt:  $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$  oder  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$  für  $f'(x) \neq 0$ .

Überlicherweise verräucht man die Variablen  $x, y$  und schreibt  $y = g(x)$  und  $y' = g'(x)$ .

**1.91 Beispiel.**

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

*Beweis.* Der Beweis ist einfach. Man geht wieder von der Definition der Ableitung aus:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Nutzt man die Potenzregeln  $e^{x+h} = e^x \cdot e^h$  so ergibt sich :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

und weil  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$  dann Also  $f'(e^x) = e^x$

□

**1.92 Bemerkung.**

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{identisch}$$

$$e^{\ln(x)} = x \quad | \text{Abb}$$

$$e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = 1$$

$$\Rightarrow \ln(x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

**1.93 Beispiel.**

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f^{-1}(x) = \ln x$$

$$(f^{-1}(x))' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

**1.94 Beispiel.**

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + (\tan(x))^2$$

$$f^{-1}(x) = \arctan(x) = x \quad | \text{Abl.}$$

$$\Rightarrow 1 + \underbrace{(\tan(\arctan(x)))^2}_x (\arctan(x))' = 1 \Rightarrow (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

## 1.21 Vorlesung 8

### 1.95 Definition.

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  heißt Potenzreihe Dabei gilt  $a_0, a_1 \dots \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x$  ist eine reelle veränderlich  $x_0$  heißt Mittelpunkt der Potenzreihe.

### 1.96 Bemerkung.

$(f_k(x))_{k=0}^{\infty}$  mit  $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$ . Folge von Funktionen  $f_k(x)$

$$k = 0, f_0(x) = a_0(x - x_0)^0 = a_0 \times 1 = a_0$$

$$k = 1, f_1(x) = a_1(x - x_0)^1$$

$$k = 2, f_2(x) = a_2(x - x_0)^2$$

$(\sum_{k=0}^n f_k(x))_{n=0}^{\infty}$  Folge von Partielle Summen, Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

$$f_0(x)$$

$$f_0(x) + f_1(x)$$

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)$$

### 1.97 Bemerkung.

wir fragen nicht nach der Konvergenz dieser Folge sondern für welche  $x$  ist diese Folge konvergent

### 1.98 Beispiel.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k} (x - 0)^k$$

für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergent ?

Wurzelkriterium für absolute konvergent :

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\text{die potenzreihe}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} |x|$$

$$= \frac{2}{3} |x| \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3} |x| < 1$$

$$PR \text{ abs. konv.} \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{2}$$

Wurzelkriterium:

$$\frac{2}{3} |x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{3}{2} \Leftrightarrow PR \text{ div}$$

$x = \frac{-3}{2}$  einsetzen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k} \left(\frac{-3}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ div}$$

$x = \frac{3}{2}$  einsetzen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ kon.}$$

### 1.99 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k} (x-7)^k \text{ ist für } x \in \left(7 - \frac{3}{2}, 7 + \frac{3}{2}\right) \text{ abs konvergent}$$

### 1.100 Definition.

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  eine P.R. dann ex. ein  $r \in \mathbb{R} \geq 0$  oder  $x = \infty$ , so dass die P.R für alle  $x$  mit  $|x - x_0| \leq r$  oder  $x \in \mathbb{R}$  absolut konvergent ist. Dieser ( $r$ ) heißt **Konvergenzradius** der PR

### 1.101 Bemerkung.

Der konvergenzradius  $r$  ist unabhängig von Mittelpunkt  $X_0$

### 1.102 Bemerkung.

Jede PR ist für  $x = x_0$  abs. konvergent, denn  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = 0$   
Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  eine Reihe mit konvergenzradius  $r$  Dann kann eine Funktion  $f$  definieren

$$f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k}_{\text{Grenzwert der PR}}$$

### 1.103 Bemerkung.

wegen der abs Konvergenz ist diese Funktion  $f$  - Stetig auf  $(x_0 - r, x_0 + r)$  bsw.  $\mathbb{R}$  - beliebig oft differenzierbar.

### 1.104 Bemerkung.

Analog kann man PR über  $\mathbb{C}$  definieren. Z.B  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (z \in \mathbb{C})$   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z - 0)^k$  ist für ..... abs. konvergent. Quotienten Kriterium :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{k+1} \times k!}{z^k (k+1)!} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|z|}{k+1} = |z| \times \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1}}_0 < 0$$

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, Z \mapsto \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}_{\underbrace{\exp(z)}_{e^z}}$$

$$Z = \exp(i\varphi) = e^{i\varphi}.$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \frac{(i\varphi)^0}{0!} + \frac{(i\varphi)^1}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} \\ &= 1 + i \frac{\varphi^1}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^5}{5!} \dots \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(\varphi)} + i \times \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(\varphi)} \end{aligned}$$

1. **Approximation** stetiger Funktionen  $f(x)$  durch **Taylorpolynom**  $p_n(x)$  :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)^1$$

=  $t(x)$  Tangente an den Graph von  $f(x)$  in Punkt  $(x_0, f(x_0) = p_1(x))$

lineare Approximation ( $n = 1$ ) Linearisierung

fehlende Skizze !!!

### 1.105 Bemerkung.

$$f(x_0) = p_1(x_0)$$

$$f'(x_0) = p_1'(x_0)$$

2. Approximation von  $f(x)$  durch Taylor-Polynome  $p_n(x)$  von Grad  $\leq n$  in der Umgebung von  $x_0$

$$\underbrace{f(x) \approx p_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \dots \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{p_n(x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}$$

$$f(x_0) = f^0(x_0) = \frac{f^0(x_0)}{0!}$$

### 1.106 Bemerkung.

Taylor-Polynom  $P_n(x)$  von Polynomfunktionen  $f(x)$  von Grad  $n$  stimmen mit  $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \approx \dots \text{ an der Stelle } x_0 = 0$$

$$f'(x) = ((1+x)^{-1})' = \frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = 1 \times 2 \frac{1}{(1+x)^3} = 1 \times 2(1+x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 1 \times 2 \times 3 \frac{1}{(1+x)^4} = 1 \times 2 \times 3(1+x)^{-4} \text{ usw.}$$

$$f^k(x) = (-1)^k \cdot k! \frac{1}{1+x} \text{ beweis durch vollst. Induktion}$$

$$f^k(0) = (-1)^k k!$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(0)}{k!} (x-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \underbrace{(-1)^0 x^0}_{1} - x^1 + x^2 - x^3 \dots$$

$$\{-x^n, n \text{ ungerade} \}$$

$$\{x^n, n \text{ gerade} \}$$

## 1.22 Vorlesung 9

### 1.107 Beispiel.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$  gesucht

#### 1.22.1 Taylor-Polynom $P_n(x)$ von $f(x)$

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^2 - 1 & f(0) = 1 & f(1) = 0 \\ f'(x) = 2x & f'(0) = 0 & f'(1) = 2 \\ f''(x) = 2 & f''(0) = 2 & f''(1) = 2 \\ f'''(x) = 0 & f'''(0) = 0 & f'''(1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \underbrace{f(0) + f'(0)(x-0)}_{t(x) \text{ lineare Approximation}} + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots \\ &= -1 + 0x + \frac{2}{2!}x^2 + 0 = -1 + x^2 = f(x) \end{aligned}$$

Das Polynom ist bei der Entwicklung zu einem Taylor-Polynom zum selben Polynom zurückgekommen

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \dots \\ &= 0 + 2(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + 0 \\ &= 2x - 2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \end{aligned}$$

### 1.108 Beispiel.

gegeben :  $f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$  gesucht :  $p_2(x)$  für  $x_0 = 0$

Methode des Impliziten Differenzieren

$$\begin{aligned} f(x)\cos(x) + f(x)(-\sin(x)) &= e^x \quad | \quad \text{abl.} \\ f'(x)\cos(x) + f(x)(-\sin(x)) &= e^x \quad | \quad \text{abl.} \\ f''(x)\cos(x) + f'(x)(-\sin(x)) + f'(x)(-\sin(x)) + f(x)(-\cos(x)) &= e^x \\ f(0)\cos(0) &= e^0 \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(0) \times 1 + f(0) \times 0 &= 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(0) \times 1 + f(0) \times (-1) &= 1 \Rightarrow f''(0) = 2 \\ p_2(x) &= 1 + 1x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + x + x^2 \\ f(x) &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

### 1.109 Beispiel.

$$f^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$$

**Induktionsanfang**

$$f^0(x) = f(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^0 \frac{0!}{(x+1)^{0+1}} = 1 \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ w.A.}$$



**Induktionsschritt****Induktionsvoraussetzung**

Es gelte  $f^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$  für  $k \in \mathbb{N}$

**Induktionsbehauptung** : Dann gilt

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k+1)} \frac{(k+1)!}{(x+1)^{(k+2)}}$$

**Induktionsbeweis**

(.....)

$$\begin{aligned} f^{(f+1)}(x) &= (f^x(x))' = \left( (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{(k+1)}} \right)' \\ &= (-1)^k k! (x+1)^{-(k+1)} \\ &= (-1)^k k! (-(k+1)(x+1))^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! \frac{1}{(x+1)^{k+2}} \Rightarrow \text{Ind Beh. ist dann bewiesen.} \end{aligned}$$

Die behauptung gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$

**1.110 Beispiel.**

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$p_1(x) = 1 - x$$

$$p_2(x) = 1 - x + x^2$$

$$p_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3$$

**1.111 Bemerkung.**

Bei :  $p_2(x)$  wird der Fehler für große werte von  $x$  größer der Fehler bei  $p_1(x), p_2(x)$

**1.22.2 Taylor-Formel:**

$$F(x) = p_n(x) + \underbrace{R_n(x, x_0)}_{=n\text{-tes Restglied}} \quad R_n(x, x_0) \text{ Fehler bei der Approximation.}$$

**1.112 Satz.** Darstellung von  $R_n(x, x_0)$  nach Lagrange Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n+1)$  und stetig differenzierbar Funktion und  $x_0 \in (a, b)$  Dann gilt :  $f(x) = p_n(x) + R_n(x, x_0)$  und  $\forall x \in (a, b) \exists z \in \mathbb{R}$  zwischen  $x$  und  $x_0$  :

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}$$

### 1.113 Beispiel.

$$f(x) = e^x, \quad x = 0$$

$$f^k(x) = e^x$$

$$f^k(0) = 1 \Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^k(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x, 0) \text{ und } R_n(x, 0) = \frac{e^z}{(n+1)!} y^{n+1} \quad z \in (x, 0)$$

$$\text{wir betrachten } f(x) = e^x \text{ f\"ur } |x| \leq 1$$

$$|R_n(x, 0)| = \left| \frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^1}{(n+1)!} \leq 10^{-2} \text{ f\"ur } n = 5$$

### 1.22.3 Näherungsformel fur $e^x$

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \text{ f\"ur } x \leq 1$$

### 1.114 Definition.

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft stetig differenzierbar und  $x_0 \in (a, b)$

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  heißt **Taylor Reihe** von  $f$  an der Stelle  $x_0$

### 1.115 Bemerkung.

(1) Nicht fur jede Funktion  $f(x)$  ist die **Taylor-Reihe konvergent**

(2) Ist die Taylor-Reihe konvergent, dann muss der Grenzwert ..... die Funktion  $f$  sein.

(3) Ist die Taylor-Reihe konvergent gegen  $f$ , d.h.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ , heißt die Funktion  $f$  **reell analytisch**

### 1.116 Beispiel.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ mit } x \in (-1, 1) \text{ ist reell analytisch}$$

Taylor-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$  hat Konvergenzradius 1(...) und Mittelpunkt 0

**1.117 Satz.** Sei  $|x| \leq 1$  Dann gilt:  $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$  ist die Taylor-Reihe Darstellung von  $f(x)$

### 1.22.4 Rechnen mit Potenzreihen:

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k := a(x)$ ,  $b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$  mit Konvergenzradius  $r_1$  fur  $a(x)$ ,  $r_2$  fur  $b(x)$  sei  $r := \min \{r_1, r_2\}$

Dann gilt :

$$a(x) \pm b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) (x - x_0)^k \text{ f\"ur } x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

$$C \times a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k (x - x_0)^k \text{ f\"ur } x \in (x_0 - r, x_0 + r) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$a(x).b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0)(x-x_0)^k$$

$\frac{1}{b(x)}$  für  $b(x) \neq 0$  kann mit der Methode unbestimmten koeffizienten

## 1.23 Vorlesung 10

## 1.24 Spezielle Ableitungen

$$f(x) = x^x \quad x > 0$$

$$\ln(f(x)) = \underbrace{\ln x^x}_{x \ln x} \Rightarrow \frac{1}{p(x)} f'(x) = 1 \times \ln x + x \underbrace{\frac{1}{x}}_1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{x^x}_{f(x)} (\ln x + 1) \text{ logarithmisches Differenzieren}$$

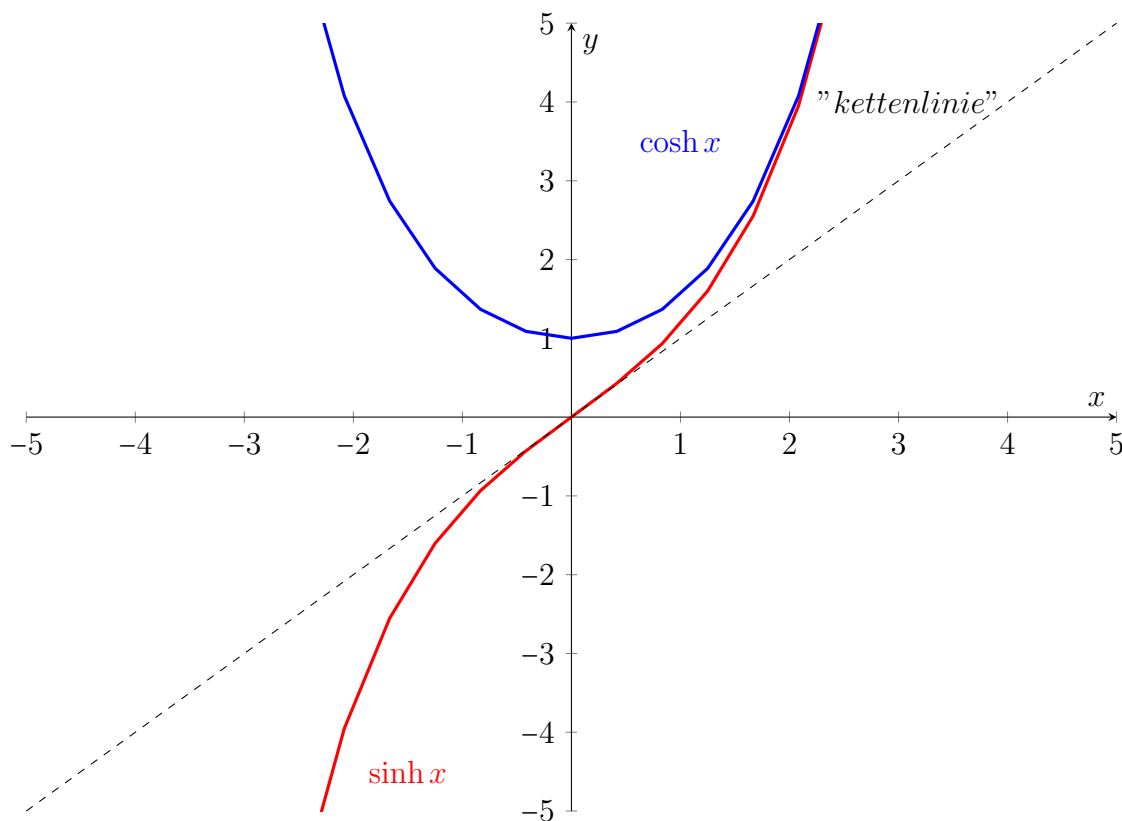
$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{e^{x \ln x}}_{x^x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ Kosinus Hyperbolicus}$$

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



gesucht: **Taylor-Reihe Entwicklung** für  $\cosh x$

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
e^{-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Reihe ist absolut konvergent für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\leadsto \cosh x &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \\
&\quad + \left( 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

## 1.25 Spezielle Grenzwerte

### 1.25.1 Regeln von Bernoulli l'Hospital -

Seien  $f(x)$ ,  $g(x)$  reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf  $(a, b)$  und  $f(x_0) = g(x_0) = 0$

gesucht:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(z_f)(x - x_0)^2}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(z_g)(x - x_0)^2} \\
&= \frac{x - x_0}{x - x_0} \cdot \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(z_f)(x - x_0)}{g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(z_g)(x - x_0)} \\
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(z_f) \cdot 0}{g'(x_0) + \dots \cdot 0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{falls dieser existiert} \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{falls der Grenzwert existiert}
\end{aligned}$$

### 1.118 Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

### 1.119 Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin(x) + \cos(x) - 2}{x^3 \cdot \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{3x^2 \cos(x) - x^3(-\sin(x))} \dots\dots\dots = \frac{1}{3}$$

### 1.120 Bemerkung.

Diese Methode kann man durch anwenden für  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ . und für  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{-\infty}$ ,  $\frac{+\infty}{-\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ falls der Grenzwert existiert.}$$

falls der Grenzwert existiert.

### 1.121 Bemerkung.

Man kann durch geeignetes Umformen auch Grenzwerte vom Typ  $0 \cdot \infty$  berechnen, sowie  $0^0, 1^0, 1^\infty$

### 1.122 Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x =$$

1. Mögl.  $\lim_{x \rightarrow 0+} \dots = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$

2. Mögl.  $\lim_{x \rightarrow 0+} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x^2}{x \cdot 1} (-1) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$

### 1.123 Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\ln x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^1 = e$$

### 1.124 Beispiel.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(1 + \frac{1}{x})^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} \\ &= e \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \dots = e^1 = e \end{aligned}$$

(Nebenrechnung) NR  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} (1 + \frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

also auch  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{x=1} e^1 = e = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

## 1.26 Integral

$$f(x) > 0 \text{ auf } [a, b]$$

$$\underline{S}_p = \sum_{K=1}^{\infty} f_k(x_k - x_{k-n}) \text{ und } \underline{f}_k = \min\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_K]\}$$

$$\overline{S}_p = \sum_{K=1}^{\infty} f_k(x_k - x_{k-n}) \text{ und } \overline{f}_k = \max \dots$$

$$\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \underbrace{S_p}_{(1) \text{ ex.}} = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \underbrace{\overline{S}_p}_{(3)} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Integral von } f(x) \text{ auf } [a, b]}$$

### 1.125 Beispiel.

$$D(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ auf } [0, 1] \text{ skizze fehlt!}$$

### 1.126 Bemerkung.

In jeder reellen Intervall liegen rationale und irrationale Zahlen

$$\begin{aligned} \text{Riemann : } \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \underline{S}_p &\stackrel{\substack{\text{ex. irrationale Zahl} \\ \downarrow}}{=} \lim \sum (x_k - x_{k-1}) = \lim 0 = 0 \\ &\neq \lim \overline{S}_p = \lim \sum (x_k - x_{k-1}) > 0 \end{aligned}$$

Das Riemann - Integral von D(x) ex. nicht

### 1.26.1 Lebague-Integral

skizze fehlt!

$$\phi(x) \text{ treppenfunktion } \int_a^b \phi(x) = \sum_{K=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}) (\phi_k(x))$$

Folge von Treppenfunktion auf  $[a, b] \setminus M$

$$M := \text{Nullmenge} \quad \mathbf{z.B.} \quad \phi \int_a^b D(x) dx = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\phi_k(x)}_{\text{ex.}} = f(x)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_a^b \phi(x)}_{\text{ex.}} = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Lebague-Integral}}$$

## 1.27 Vorlesung 11

### 1.127 Bemerkung.

Aussage  $A(x)$  gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  bzw.  $x \in \{a, b\}$

Aussage  $A(x)$  gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  ohne  $M$  bzw.  $x \in \{a, b\}$  ohne  $\underbrace{M}_{\text{Nullmenge}}$

kurz:  $A(x)$  gilt für  $\underbrace{\text{fast alle } x \in \mathbb{R}}_{\text{fast überall}}$  bzw.  $x \in \{a, b\}$

### 1.128 Definition (Nullmenge).

Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  heißt **Nullmenge**, wenn gilt :

für alle  $\epsilon > 0$  existiert Intervalle  $]_1, ]_2, \dots \subseteq \mathbb{R}$  sodass :

1)

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = J_1 \cup J_2 \cup \dots$$

2)  $\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \leq \epsilon$  wobei  $|J_k|$  die Lage des Intervalls  $J_k$  bezeichnet.

### 1.129 Bemerkung.

ab zählbar viele Intervalle endlich viele ab zählbar unendlich viele

### 1.130 Beispiel (1).

Die Menge  $M = \{x_1, x_2, x_3\}, |M| = 3$  Die Behauptung :  $M$  ist eine Nullmenge .

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  beliebig und fest wähle  $J_k = [x_k - \frac{\epsilon}{6}, x_k + \frac{\epsilon}{6}]$  Dann gilt :  $|\exists_k| = \frac{\epsilon}{3}$   
 $x_k \in J_k$  und (1) , (2). □

### 1.131 Bemerkung.

Endliche Mengen sind Nullmenge.

### 1.132 Bemerkung.

Abzählbar endliche Mengen sind Nullmengen.

*Beweis.* Sei  $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  und sei  $\epsilon > 0$  beliebig und fest.

[ Dann :fehlende Skizze !!! ]

□

**Gesamtlänge berechnen**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} &= \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \epsilon \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= \epsilon(2 - 1) = \epsilon \end{aligned}$$

Intervalle  $J_k = [x_k - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}](k = 1, 2, \dots)$  erfüllen (1)und (2).

### 1.133 Bemerkung.

Es gilt überabzählbar Mengen , die Nullmenge sind **Z.B** die [Cantor-Menge].





Abbildung 1.1: cantor-Menge  
die nicht gelöchte punkte bilden die Cantor-Menge

### 1.134 Definition (Cantor-Menge).

Unter der Cantor-Menge versteht man in der Mathematik eine bestimmte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen.

#### **Schnitte von Intervallen**

Die Cantormenge lässt sich mittels folgender Iteration konstruieren: Man beginnt mit dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  der reellen Zahlen von 0 bis 1.

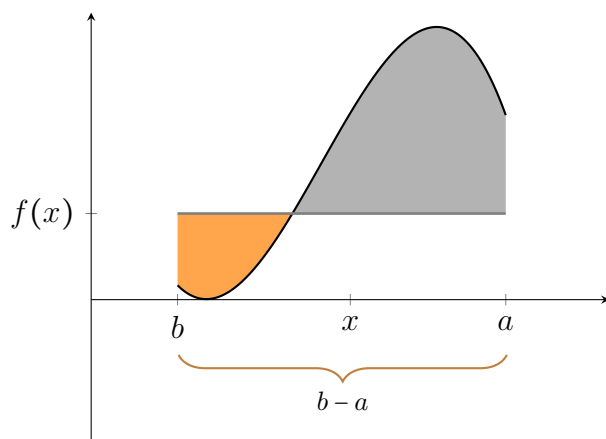
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

### 1.135 Definition.

$$\int_b^c f(x)dx = - \int_c^b f(x)dx$$

## 1.27.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei  $f : [a, b]$  stetige Funktion dann existiert ein  $z \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x)dx = f(z) \times (a-b)$



## 1.27.2 Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, und sei  $\tilde{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ . Dann ist  $\tilde{F}$  auf  $(a, b)$  differenzierbar und es gilt  $\tilde{F}' = f$  für alle  $x \in (a, b)$ .

*Beweis.* Sei  $x_0 \in (a, b)$  beliebig und fest

$$\begin{aligned}
 \widetilde{F}'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0}
 \end{aligned}$$

laut **Mittelwertsatz** existiert  $z \in (x_0, x)$  mit

$$\begin{aligned}
 \widetilde{F}'(x_0) &= \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{f(z)(x - x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{z \rightarrow x_0} f(z) \quad \underbrace{=}_{f \text{ ist stetig}} f(x_0)
 \end{aligned}$$

□

### 1.136 Bemerkung.

$\widetilde{F}$  ist eine spezielle Stammfunktion.

### 1.137 Definition (Stammfunktion).

eine Funktion heißt **Stammfunktion** zu  $f(x)$  im Intervall  $(a, b)$ , wenn gilt :

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (a, b)$$

### 1.138 Bemerkung.

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \Rightarrow F_2'(x) - F_1'(x) = 0$$

$$\Rightarrow (F_2(x) - F_1(x))' = 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \quad \} f_2(x) - f_1(x) = c \text{ const}$$

$$\Rightarrow F_2(x) = F_1(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### 1.139 Definition.

Die Mengen aller Stammfunktion  $F(x)$  zu  $f(x)$  heißt **unbestimmtes Integral**.

### 1.140 Bemerkung (unbestimmtes Integral).

Das unbestimmte Integral ist **kein** Integral.

## 1.27.3 Schreibweise

$$\int f(x) dx = \{F(x) | F'(x) = f(x)\}$$

bzw

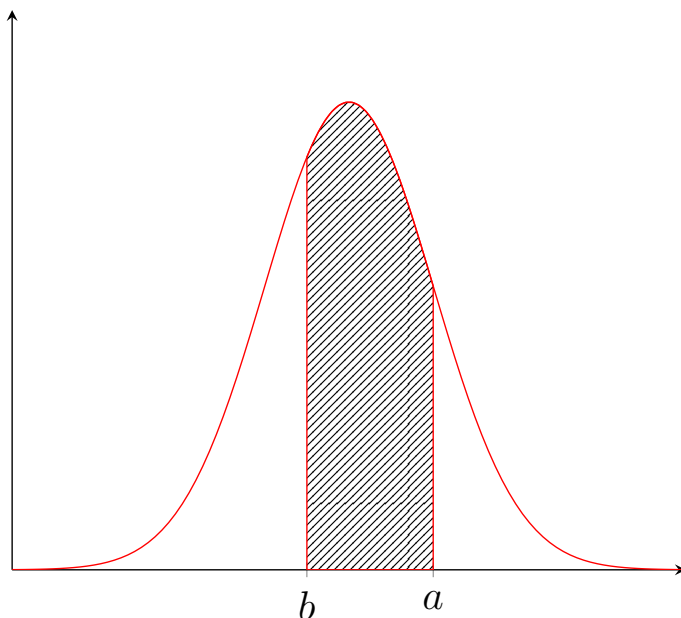
$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ falls } F'(x) = f(x)$$

## 1.27.4 2. Hauptsätze der Differenzial- und Integralrechnung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f$  stetig

Sei  $F(x)$  eine Stammfunktion zu  $f$ , Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



*Beweis.*

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{:=f(t)dt} = \underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\tilde{F}(b)} - \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{\tilde{F}(a)}$$

**Note!**  $\tilde{F}(x) = F(x) + c \quad : c \in \mathbb{R}$   
 $= (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$

□

**1.141 Bemerkung.**

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\text{ableiten}} & f' \\ f' & \xrightarrow{\text{integrieren}} & f \end{array}$$

$$\int f'(x) dx = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

### 1.142 Beispiel.

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### 1.27.5 Integrationsregeln entstehen aus Ableitungsregeln

1.

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) \Rightarrow \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

2.

$$\int K \times f(x) dx = K \int f(x) dx$$

3.

$$\left( \frac{1}{a} \times F(ax+b) \right)' = \frac{1}{a} \times F'(ax+b) \times a = F'(ax+b)$$

4.

$$\int F'(ax+b) dx = \frac{1}{a} \times F(ax+b) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

## 1.28 Vorlesung 12

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(\ln|f(x)|)' = \begin{cases} (\ln f(x))', & f(x) > 0 \\ (\ln f(x))', & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{f(x)} f'(x), & f(x) > 0 \\ \frac{1}{-f(x)} - f'(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{f'(x)}{f(x)} \\ \frac{f'(x)}{f(x)} \end{cases}$$

1.143 Beispiel.

$$\int \frac{2x+2+1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \underbrace{\ln(x^2+2x+5)}_{\text{keine reelle Nullstell}} + ?$$

### 1.28.1 Kettenregel $\leadsto$ Integration durch Substitution

$$(f(g(x)))' - f'(g(x))g'(x) \leadsto$$

$$\int f'(g(x)) \times g'(x) dx = f(g(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Die Ableitung der zu substituierenden Funktion  $g(x)$  steht als **Faktor** im Integration

$$\int f(g(x)) \times g'(x) dx$$

man vereinfache  $g(x)$  durch :  $z := g(x)$

$$\frac{dz}{dx} = g'(x) \Rightarrow dz = g'(x) dx \Rightarrow$$

$$\int f(g(x)) \times g'(x) dx = \int f(z) dz = f(z) + c = f(g(x)) + c$$

1.144 Beispiel.

Sub :  $z = \sin x$

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^z dz$$

$$\frac{dz}{dx} = \cos x \Rightarrow dz = \cos x dx$$

$$e^z + c = e^{\sin x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

*probe*

$$(e^{\sin x} + c)' = (e^{\sin x})' = c' = e^{\sin x} \cos x + 0$$

**1.145 Beispiel.***Sub* :  $z = \ln x$ 

$$\int \frac{dx}{x(1 + (\ln x)^2)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dz = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int \frac{dz}{1 + z^2} = \arctan(z) + c = \arctan(\ln x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

**Regel:**

$$\int f(ax + b) dx$$

*Sub* :  $z = ax + b$  ,  $\frac{dz}{dx} = a$ 

$$= \frac{1}{a} \int a f(ax + b) dx$$

$$= \frac{1}{a} \int f(z) dz = \frac{1}{a} F(z) + c$$

$$= \frac{1}{a} F(ax + b) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

**1.28.2 Produktregel  $\leadsto$  Partielle Integration**

$$(u(x) \times v(x))' = u'(x)v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow$$

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx$$

**d.h**

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

**1.146 Beispiel.**

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{\cos x}_{v'} dx$$

**Sub:**

$$u := x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' := \cos x \Rightarrow v = \sin x$$

$$= x \sin x - \int 1 \times \sin x dx$$

$$= x \sin x - (-\cos x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

### 1.147 Beispiel.

$$\int \underbrace{\sin x}_u \underbrace{\cos x}_{v'} dx$$

**Sub:**

$$u := \sin x \Rightarrow u' = \cos x$$

$$v' := \cos x \Rightarrow v = \sin x$$

$$= \sin x \times \sin x - \int \cos x \times \sin x dx$$

Diese Partielle Integration führt auf das Ausgangs integral zurück

$$2 \int \dots = (\sin x)^2 + \tilde{c}, \quad c \in \mathbb{R} : 2$$

$$\Rightarrow \int \sin x \times \cos x dx = \frac{1}{2} (\sin x)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \frac{\tilde{c}}{2} = c$$

### 1.148 Beispiel.

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \mid \text{gesucht } A \text{ und } B$$

$$2x+1 = \underbrace{A(x+2) + B(x-1)}_{(A+B)x + (2A-B)}$$

### 1.28.3 Koeffizienten Regel

$$? = A + B \text{ LGS } A = 1$$

$$1 = 2A - B \text{ lösen } B = 1$$

### 1.149 Beispiel.

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^3} dx$$

$$= \int \frac{A}{x+1} dx + \int \frac{B}{(x+1)^2} dx + \int \frac{C}{(x+1)^3} dx$$

Gesucht : A , B , C mit

$$\frac{x+2}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} \mid (x+1)^3$$

$$= x+2 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

$$\begin{aligned}
& \text{Koeffizienten } \dots \Rightarrow A = 0, B = 1, C = 1 \\
& = \int \frac{0}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{1}{(x+1)^3} \\
& = -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c
\end{aligned}$$

**1.150 Beispiel.**

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 5} dx \\
& = \int \frac{Ax}{x^2 + 2x + 5} dx + \int \frac{B}{x^2 + 2x + 5} dx \\
& \frac{1}{x^2 + 2x + 5} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 5} \quad |(x^2 + 2x + 5) \\
& \Rightarrow 1 = Ax + B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= 0 \\
B &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx \\
& = \int \frac{1}{4\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} \\
& = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{(x+1)}{2}\right) \frac{1}{\frac{1}{2}} + c \\
& = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$



## 1.29 Vorlesung 13

**1.151 Definition** (L-periodial).

$f(x)$  heißt  $L$ -periodiel ( $L > 0$ ), wenn gilt :  $\forall \in \mathbf{R} : f(x + L) = f(x)$

**1.152 Bemerkung.**

Es genügt , $2\pi$ -periodiele Funktionen zu betrachten, denn

$f(x)$   $L$ -periodial  $\Rightarrow g(x) = f(x \cdot \frac{L}{2\pi})$  ist  $2\pi$ -periodiel, denn

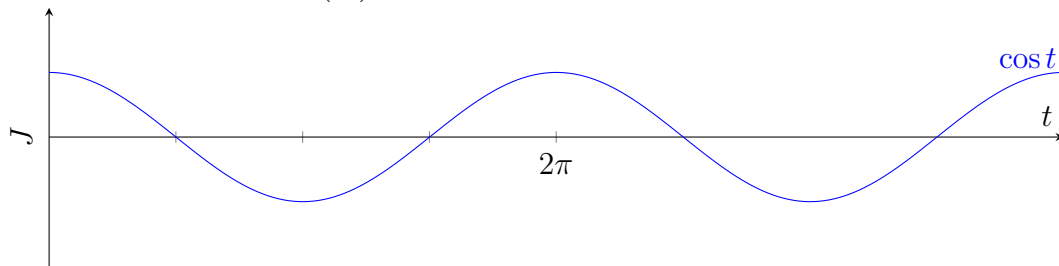
$$g(x + 2\pi) = f((x + 2\pi) \cdot \frac{L}{2\pi}) = f(x \cdot \frac{L}{2\pi} + L) = f(x \cdot \frac{L}{2\pi}) = g(x)$$

$f(x)$   $2\pi$ -periodiel  $\Rightarrow g(x) = f(x \cdot \frac{2\pi}{L})$  ist  $L$ -Periodial

wir betrachten nur noch  $2\pi$ -periodiele funktionen

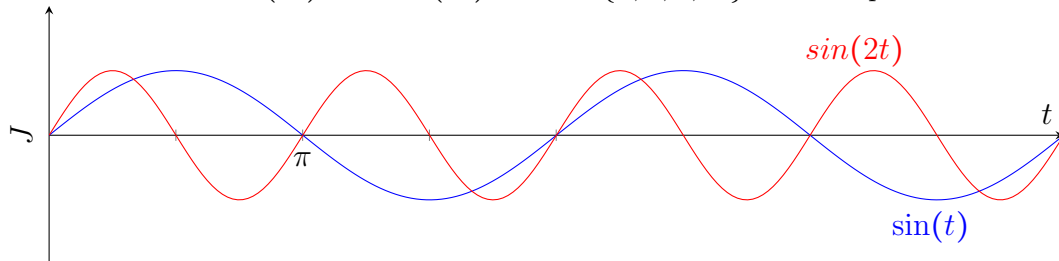
**1.153 Beispiel.**

$\cos t$  ist  $2\pi$ -periodiel  $\underbrace{\cos(t \cdot \frac{2\pi}{k})}_{\cos(k \cdot t)}$  ist  $\overset{\text{kleinste Periodenlänge}}{\downarrow} \frac{2\pi}{k}$ -periodiel und auch  $2\pi$ -periodiel



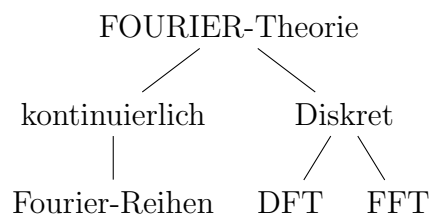
**1.154 Bemerkung.**

Die Funktionen  $\cos(kt)$  und  $\sin(kt)$  mit  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  sind  $2\pi$ -periodiel



**1.155 Bemerkung.**

$\underbrace{\frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(k \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot t))}_{\text{Trigonometrisches Polynom der Ordnung } n \text{ falls } a_n \neq 0 \text{ oder } b_n \neq 0}$   $a_k, b_k$  heißen **FOURIER-koeffizienten**



# FOURIER-Synthese

gg:  $a_k, b_k$

ges: Trigonometrisches Polynom

Fourier-Analyse

geg:  $f(t)$

ges:  $a_k, b_k$  so dass  $f(t)$  (!unklar \*udsinqieu\*\*\*\* durch ein Trigonometrisches Polynom und deren koff. betrachten werden kann)

## 1.156 Bemerkung.

$C[0, 2\pi, ]$  ist der  $R$ -VR der auf  $[0, 2\pi]$  stetigen Funktionen

$$f, g \in C[0, 2\pi] \quad f \neq g : t \rightarrow f(t) + g(t)$$

$$rf : t \rightarrow rf(t) (!fehlt)$$

$$\underbrace{\text{span}(\{1, \cos t, \cos(2t), \dots, \sin t, \sin(2t), \dots\})}_w \text{ ist ein UVR von } C[0, 2\pi]$$

# List of Theorems

1.1	Definition (Folgen)	2
1.6	Definition (Beschränktheit)	4
1.11	Definition (Monoton)	5
1.15	Definition (Konvergenz,Divergenz)	6
1.16	Definition (grenzwert)	6
1.23	Definition (Nullfolge)	8
1.27	Definition (Unendliche Grenzwert)	9
1.41	Definition (Unendliche Reihen)	14
1.43	Definition (wert der Reihe)	14
1.55	Definition (absolute Reihe)	19
1.61	Definition	21
1.63	Definition	21
1.69	Definition ( $\text{sgn}(x)$ )	24
1.70	Definition	25
1.84	Definition	30
1.90	Definition	32
1.95	Definition	34
1.100	Definition	35
1.114	Definition	39
1.128	Definition (Nullmenge)	45
1.134	Definition (Cantor-Menge)	46
1.135	Definition	46
1.137	Definition (Stammfunktion)	47
1.139	Definition	47
1.151	Definition (L-periodial)	54

# List of Theorems

1.4	Beispiel	3
1.7	Beispiel	4
1.9	Beispiel	5
1.10	Beispiel	5
1.13	Beispiel	6
1.19	Beispiel	8
1.21	Beispiel	8
1.25	Beispiel	8
1.32	Beispiel	10
1.33	Beispiel	10
1.34	Beispiel	11
1.36	Beispiel	11
1.37	Beispiel	12
1.38	Beispiel	13
1.39	Beispiel	13
1.45	Beispiel	14
1.46	Beispiel	15
1.47	Beispiel	16
1.48	Beispiel	16
1.49	Beispiel	17
1.50	Beispiel	17
1.52	Beispiel	18
1.56	Beispiel	19
1.59	Beispiel (QK)	20
1.60	Beispiel (WK)	20
1.67	Beispiel	22
1.68	Beispiel	23
1.71	Beispiel	25
1.72	Beispiel	25
1.75	Beispiel	28
1.82	Beispiel	30
1.85	Beispiel	30
1.89	Beispiel	32
1.91	Beispiel	33
1.93	Beispiel	33
1.94	Beispiel	33

1.98 Beispiel . . . . .	34
1.99 Beispiel . . . . .	35
1.107Beispiel . . . . .	37
1.108Beispiel . . . . .	37
1.109Beispiel . . . . .	37
1.110Beispiel . . . . .	38
1.113Beispiel . . . . .	38
1.116Beispiel . . . . .	39
1.118Beispiel . . . . .	43
1.119Beispiel . . . . .	43
1.122Beispiel . . . . .	43
1.123Beispiel . . . . .	43
1.124Beispiel . . . . .	43
1.125Beispiel . . . . .	44
1.130Beispiel (1) . . . . .	45
1.142Beispiel . . . . .	48
1.143Beispiel . . . . .	50
1.144Beispiel . . . . .	50
1.145Beispiel . . . . .	51
1.146Beispiel . . . . .	51
1.147Beispiel . . . . .	52
1.148Beispiel . . . . .	52
1.149Beispiel . . . . .	52
1.150Beispiel . . . . .	53
1.153Beispiel . . . . .	54