Technische Universität Dresden • Fakultät Informatik

Mathematische Methoden für Informatiker

Mitschrift zur Vorlesung Sommer Semester 2019

Bachelor of Science (B.Sc.)

Dozent: Prof. Dr. Ulrike Baumann
vorgelegt von
"..."

Mohamed Abdelshafi
m.abdelshafi@mail.de

Mahmoud Kiki
mahmoud.kiki@tu-dresden.de

...

Tag der Einreichung: 28. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wir schreiben hier die Vorlesungen von INF-120-1(Mathematische Methoden für Informatiker) mit. wenn Ihr Fragen habt oder Fehlern gefunden Sie können gerne uns eine E-mail schreiben oder Sie können einfach bei github eine Issue (link) erstellen. wir freuen uns wenn Sie mit uns mitschreiben möchten, oder helfen mit der Fehlerbehebung.

Mohamed Abdelshafi
Mahmoud Kiki

Kapitel 1

Folge und Reihen

1.1 Vorlesung 1

1.1.1 Folge

1.1 Definition (Folgen)**.**
Ein folge ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \underbrace{\mathbf{M}}_{Menge} : \mathrm{n} \mapsto \underbrace{x_n}_{folgenglied}$$

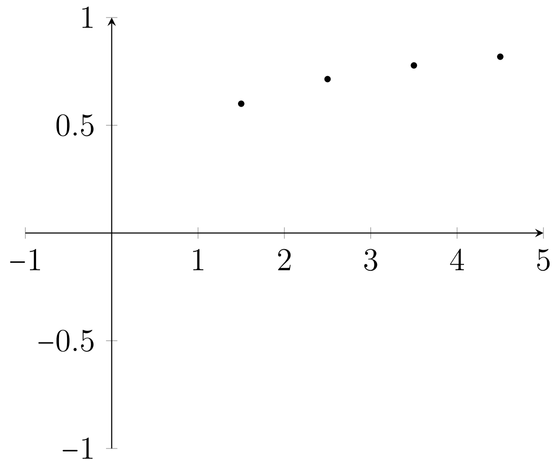
1.2 Bemerkung.

$$\mathbf{M} = \mathbb{R} \quad \textit{reelewert Folge}$$
$$\mathbf{M} = \mathbb{C} \quad \textit{komplexwertig Folge}$$
$$\mathbf{M} = \mathbb{R}^n \quad \textit{vertical Folge}$$

Bezeichnung (x_n) mit $(x_n) = \frac{n}{n+1}$

Aufzählung der folglieder: 0 , $\frac{1}{2}$,$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\ldots$

1.3 Bemerkung.
zuwerten wird $\mathbb{N}$ *durch* $\mathbb{N}$ *0,1* $\ldots$ *erstellt.*



1.4 Beispiel.

1. *Konstante Folge* (x_n) *mit* $\quad x_n = a \in \mathbf{M}, a \dots$

$$x_n = a \in \mathbf{M}$$

2. *Harmonische Folge* (x_n) *mit* $x_n = \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1$

3. *Geometrische folge* (x_n) *mit* $x_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}, \dots$

4. *Fibonaccifolge* (x_n) *mit*

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)$$

5. *Fibonacci folgen* (x_n)

$$X_0 = 0$$
$$X_1 = 1$$
$$X_{n+1} = x_n + X_{n-1} \quad (n > 0)$$

6. *conway folge*

$$1, 11, 21, 1211, 111217, 312211 \dots$$

7. *folge aller Primzahlen:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

1.2 Rechnen mit Folgen

$$(M = \mathbb{R} \quad oder \quad M = \mathbb{C})$$
$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$$
$$K(x_n) := (Kx_n) \in \mathbb{R} \quad oder \quad \in \mathbb{C}$$

1.5 Bemerkung.
Die Folge bildet ein Vektorraum.

1.6 Definition (Beschränktheit).

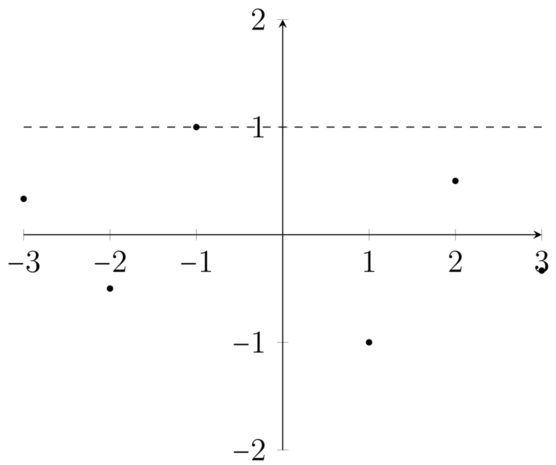
1. *Eine reellwertige Funktion ist in der Mathematik eine Funktion, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind.*
2. *Eine reellwertige heißt beschränkt wenn gilt*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+, \forall r \in \mathbb{N} : \underbrace{|x_n|}_{\text{Betrag einer reellen oder komplexer Zahl}} \leqq r$$

1.7 Beispiel.

$$(x_n) \quad mit \quad x_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{5}, \ldots$$

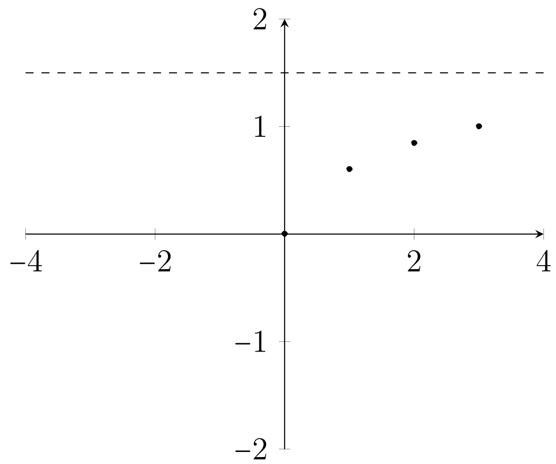


1.8 Bemerkung.
(x_n) *ist beschränkt mit* $r = 1$ *denn* $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leqq 1 \hookleftarrow r$

1.9 Beispiel.

$$(x_n) \ mit \ x_n = (-1)^n \quad \frac{1}{n} + 1 \quad bechränkt \ r = 3/2$$

$$-3/2 \quad \leq x_n \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



1.10 Beispiel.
Standard:

Die folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ *ist beschränkt durch 3*

Zu zeigen: $\quad -3 \leq x_n \leq 3$ *für alle* $\quad n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k . b^{n.k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n.k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \frac{n(n-1)-(n-k-1))}{k!}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots$$

1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)

1.11 Definition (Monoton)**.**
Die Folge (x_n) *heißt monoton* $\left\{wachsend \ fallend\right\}$

$$wenn \quad gilt: \forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} x_n & \leq x_n + 1 \\ x_n & \geq X_{n+1} \end{cases}$$

man spricht von Streng monotonie wenn $\leqq$ *durch* $>$ *und* $\geqq$ *durch* $<$ *...*

1.12 Bemerkung.

$$x_n \leq X_{n+1} \ \Leftrightarrow x_n - X_{n+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x_n}{X_{n+1}} \leq 1$$

1.13 Beispiel.

$$(x_n)\ mit \quad X_0 := 1 \quad , X_{n+1} := \sqrt{x_n + 6}$$

ist Streng monoton wachsend Beweis mit Vollständiger Induktion

Standard Bsp: $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ *ist streng monoton wachsend*

1.14 Bemerkung.

monoton	*ja*	*nein*
Beschränkkeit	$(\frac{1}{n})$	$(-1)^n$
nein	(n)	$(-1)^n$

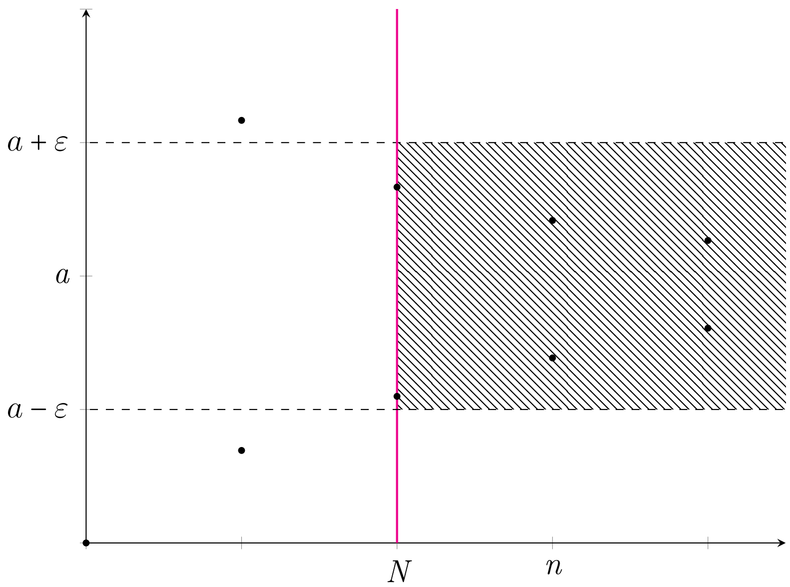
1.15 Definition (Konvergenz,Divergenz)**.**
(x_n) *heißt* ***Konvergenz*** *wenn* (x_n) *ein grenzwert hat.*
(x_n) *heißt* ***Divergenz*** *wenn sie keinen grenzwert hat.*

1.16 Definition (grenzwert)**.**
$a \in \mathbb{R}$ *heißt grenzwert von* (x_n)*, wenn gilt:*

$$\underbrace{\forall \epsilon > 0}_{beliebes\ klein} \qquad \underbrace{\exists \mathbf{N} \in \mathbb{N}}_{beliebes\ klein\ \Rightarrow \underbrace{|x_n - a| < \varepsilon}_{a-\varepsilon \le x_n \le a+\varepsilon}} \quad , \forall n \in \mathbb{N} : m \geq \mathbb{N}$$

$$Sei\ \varepsilon > 0; \varepsilon\ fest$$

$$alle\ folgliederx_n\ mit\ n\ \geq \mathbb{N} \curvearrowright$$



1.4 vorlesung 2

ist die folge beschränkt , monoton ?

(x_n) konvergierend : $\iff \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \quad \in N \quad \forall n \in N$
$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

1.17 Satz. (x_n) *konvergierend :* $\Rightarrow$ *Der Grenzwert ist eindeutig beschränkt.*

1.18 Beweis.
Sei a eine Grenzwert von (x_n) *, b eine Grenzwert von* (x_n)
d.h sei $\epsilon > 0$,ϵ *beliebig ,* ϵ *fest*

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a : |x_n - a| < \epsilon \tag{1.18.1}$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b : |x_n - b| < \epsilon \tag{1.18.2}$$

Sei max $\{N_a, N_b\} = N$ *dann gilt :*

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \tag{1.18.3}$$

und

$$|x_n - b| < \epsilon \Rightarrow |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \tag{1.18.4}$$

Annahme :- a $\neq$ *b , d.h* $|a - b| \neq 0$

$$\begin{gathered} |a - b| = |a + 0 - b| \\ = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \\ also \quad |a - b| < 2\epsilon \end{gathered}$$

wähle Z.B

$$\epsilon = \frac{|a - b|}{3} \quad dann\ gilt\ : |a - b| < \frac{2\ |a - b|}{3}$$

$\Rightarrow 1 < \dfrac{2}{3}$ *falls Aussage, Widerspruch also ist die Annahme falsch also gilt* $a = b$

1.19 Beispiel.
x_n mit $x_n = \frac{1}{n}$ (harmonische Folge)

1.20 Beweis.
Sei $\epsilon > 0, \epsilon belibig, \epsilon fest$ gesucht : N mit $n \geq N$
hat den Grenzwert 0

$$\Rightarrow |x_n - a| = |\frac{1}{n} = 0| = \frac{1}{n} < \epsilon \tag{1.20.1}$$

wähle N:= $\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$

1.21 Beispiel.
$\epsilon = \frac{1}{100}$ *, gesucht N mit $n \geq N$* $\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ *wähle* $N = 101$

1.22 Schreibweise.
x_n hat den Grenzwert a Limes $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ x_n geht gegen a für n gegen Unendlich.

1.23 Definition (Nullfolge)**.**
x_n heißt Nullfolge ,wenn $\lim x_n = 0$ gilt.

1.24 Bemerkung.
Es ist leichter, die konvergente einer Folge zu beweisen, als den Grenzwert auszurechnen.

1.25 Beispiel.
$x_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{11 - n}{9 - n}\right)^9$
Behauptung: $\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{-2}{3}$

1.26 Lemma.

$$\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n) \tag{1.26.1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \tag{1.26.2}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \tag{1.26.3}$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(\frac{1}{n}-1)}{n(\frac{9}{n}+1)}\right)^9 \tag{1.26.4}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n\to\infty}(\frac{11}{n})}{\lim_{n\to\infty}(\frac{9}{n}+1)}\right)^9 \tag{1.26.5}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{11}{n} - \lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n} + \lim_{n\to\infty} 1}\right)^9 \tag{1.26.6}$$

$$= \left(\frac{\lim_{n\to\infty} 11 \times \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) - 1}{\lim_{n\to\infty} 9 \times \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) + 1}\right)^9 \tag{1.26.7}$$

$$\frac{1}{3} + (-1)^9 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \tag{1.26.8}$$

1.27 Definition (Unendliche Grenzwert)**.**
Eine Folge (x_n) *hat den unendliche Grenzwert* ∞*, wenn gilt :*

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \in N \quad \forall n \geq N : x_n > r$$

1.28 Schreibweise.
$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

1.29 Bemerkung.
∞ *ist keine Grenzwerte und keine reelle Zahl.*

1.30 Bemerkung.
Grenzwertsätze gelten nicht für uneigentliche Grenzwerte.

1.31 Bemerkung.
gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *dann schreibt man* $\lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty$

1.32 Beispiel.
x_n *mit* $x_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$, q *fest.*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & |q| = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ ex.nicht, & q \leq -1 \end{cases}$$

1.5 Konvergenzkriterien

(zum Beweis der Existenz eine Grenzwert, nicht zum berechnen von Grenzwert)

(1) x_n konvergent $\Rightarrow$ (x_n) beschränkt.

wenn (x_n) nicht beschränkt $\Rightarrow$ (x_n) nicht konvergent.

(2) Monotonie Kriterium: wenn (x_n) beschränkt ist können wir fragen ob (x_n) konvergent.

(x_n) beschränkt von Monotonie $\Rightarrow$ (x_n) konvergent.

1.33 Beispiel.
$\left((-1)^n \times \frac{1}{n}\right)$ *konvergent (Nullfolge) diese Folge ist beschränkt aber nicht Monoton*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

existiert. Diese ist beschränkt und monoton.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

existiert.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n}) = e^a$$

1.6 Vorlesung 3

1.34 Beispiel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11+n}{9-n} \quad ? \quad x_n = \frac{11+n}{9-n} = \frac{n}{n}\frac{\frac{11}{n}+1}{\frac{9}{n}-1} \tag{1.34.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{11}{n}+1\right) = 1 \tag{1.34.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{n}-1\right) = -1 \tag{1.34.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = \frac{1}{-1} = -1 \tag{1.34.4}$$

1.35 Lemma (Quetschlemma). *Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n) = a$ und es gelte $x_n \le z_n \le y_n$ für fast alle"$n \in \mathbb{N}$*

Dann gilt für die Folge (Z_n) $\lim_{n\to\infty}(z_n) = a$

1.36 Beispiel.
Ist die Folge $(-1)^n\frac{1}{n})$ konvergent ?

$$-\frac{1}{n} \le (-1)^n(\frac{1}{n}) \le 1\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -(\frac{1}{n}) = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n\frac{1}{n} = 0$$

1.37 Beispiel.

$$x_n \leq= \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \frac{a^{a-1}}{n-1!} \tag{1.37.1}$$

denn $x_n = 0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq y_n$ *, gesucht!* $\underbrace{y_n}_{\lim_{n\to\infty} y_n = 0}$ *für hinreichend großes n.*

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\leq \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{a}{(n-1)} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\
&\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\
&\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} \\
y_n &= (\frac{1}{2})^{n-k} \times \frac{a^k}{k!} \quad k \textit{ ist fest}
\end{aligned} \tag{1.37.2}$$

Es gilt $\frac{a^n}{n!} \leq y_n$ *für hinreichend großes n und* $\lim_{n\to\infty} (y_n)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{n-k} \times \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{Konst} \\
&= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n \times \underbrace{\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{-k}}_{\in\mathbb{R}} \times \underbrace{\lim_{n\to\infty} (\frac{a^k}{k!})}_{\in\mathbb{R}} \\
&= 0.(\frac{1}{2})^{-k} \times \frac{a^k}{k!} = 0
\end{aligned} \tag{1.37.3}$$

1.7 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:

man kann oft durch lösen Fixpunktgleichung"berechnen.
$x_0 \quad , x_{n+1} = ln(x_n)$
Folge, Falls (x_n) hinreichend ist, was gelten

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{n-2} = \cdots = 4$$

1.38 Beispiel.

$$(x_n) \quad x_0 = \frac{7}{5} \quad , \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

Ü (x_n) ist monoton fallend , beschränkt , konvergent .

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + 2) = \frac{1}{3}(\lim_{n\to\infty} (x_n))^2 + 2)$$

Fixpunktgleichung

$a = \frac{1}{3}(a^2 + 2)$, gesucht = a

$$3a = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Lösung: $a_1 = 2$ (keine Lösung), $a_2 = 1$

1.39 Beispiel.
(x_n) mit $(x_0) = c \in \mathbb{R}, c$ fest $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$
(1) (x_n) beschränkt ✓
(2) (x_n) Monoton ✓
Also (x_n) konvergent
Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann $\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}_{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n) + \frac{c}{x_n} = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{c}) = a$
$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \Leftrightarrow a = \sqrt{c}$

1.40 Bemerkung.
Der Nachweis der konvergent der rekursiv definierte Folge darf nicht weggelassen werden, denn Z.B $x_0 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2$ 2 , 4 ,16 ,256 , ... divergent gegen + ∞

Annahme: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}_{a} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n^2}_{a^2} \Rightarrow a \in \{0, 1\}$

1.8 Reihen :

1.41 Definition (Unendliche Reihen).
Sei (a_n) eine reellefolge (komplexwertig) Folge

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_a, a_1, \dots, a_n,$$

n-k heißt Partialsumme. (S_n) heißt unendliche Reihe.
schriebweise : $(S_n)^\infty$ = bsw (S_n)

$$\left(\sum_{l=0}^{n} a_l\right)$$

bzw

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right)$$

1.42 Bemerkung.
Reihen sind spezielle Folgen , alle konvergent oder divergent.

1.43 Definition (wert der Reihe).
Für eine konvergente Reihen wird der Grenzwert auch wert der Reihe genannt.

1.44 Schreibweise.
: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ =

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

bzw

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1.45 Beispiel.
Teleskopreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \textit{in Grenzwert der Reihe ist}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{-1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3})(-\frac{1}{4}) +) \dots + (\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1$$

1.46 Beispiel.
geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *ist für*

$$|q| < 1$$

konvergent . wert der Reihe für $|q| < 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ *für* $|q| < 1$ *konvergent , werte der Reihe für*

$$|q| < 1 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \dots$$

$$\begin{aligned} S_n &= q^0 + q^1 + \cdots + q^n | * q \\ -qS_n &= q^1 + q^2 + \cdots + q^{n+1} \\ (1-q)S_n &= q^0 - q^{n+1} \\ S_n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}(1-q)^{n+1} \\ \Rightarrow lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{1}{1-q} \times \lim_{n\to\infty}((1-q)^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1-q}(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}) = \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

1.8.1 Rechnenregeln für Reihen

konvergent Reihe kann man addieren oder subtrahieren mit einem Skalar multiplizieren wie endliche Summen. *ABER:* *das gilt im Allgemein nicht für das Multiplizieren*

1.9 Vorlesung 4

1.10 Reihen

1.47 Beispiel.
Zur geometrischen Reihen
gesucht : A

$$2A = 1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 + \cdots + (\frac{1}{k})^2 + ...$$

$$= (\frac{1}{4})^0 + (\frac{1}{4})^1 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2^2})^3 + (\frac{1}{2^2})^k + \ldots$$

$$9 = \frac{1}{4} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 2A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

1.48 Beispiel.

$$\begin{aligned} 0,4\overline{3} = \frac{3}{4} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \ldots \\ \frac{4}{10} + \frac{3}{100}(\frac{1}{10})^0 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots \\ = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\ = \frac{4}{10} + \frac{1}{30} = \frac{12+1}{30} = \frac{13}{30} \end{aligned} \tag{1.48.1}$$

wenn $0,4\overline{3}$ *erlaubt wäre, dann,*

$$\frac{4}{10} + \frac{9}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

1.49 Beispiel.

$$\sum_{R=1}^{\infty} \frac{1}{K} \textit{ ist divergent ,denn } \lim_{\infty} \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{k} \textit{ ex. nicht}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\frac{1}{10}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$1+\frac{1}{2}+\qquad\frac{1}{2}+\qquad\qquad\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \to \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

1.11 Allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad (\infty \quad \text{fest,} \quad \textit{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R}) \qquad \text{falls} \quad \alpha \geq 1 \to \text{konvergent}$$

$$\text{falls} \quad \alpha \leq 1 \to \text{Divergent}$$

1.50 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \textit{ist konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \qquad \textit{ist Divergent}$$

1.51 Beweis (Monotoniekriterium).
mit Monotoniekriterium für Folge

$$\textit{Reihe ist konvergent} \begin{cases} (1) & \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \textit{ist monoton wachsend.} \\ (2) & \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{k^2} \textit{ ist beschränkt.} \end{cases}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}$$

$$<1+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{2.\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^2}}_{4.\frac{1}{4^2}}+$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.1+\underbrace{\frac{1}{4}}_{(\frac{1}{2})^2}+\underbrace{\frac{1}{8}}_{(\frac{1}{2})^3}=1+\frac{1}{4}+\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{2}-1}$$

1.12 Expotentiale Reihe

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n =: e \quad \text{ist konvergent}$$

Konvergentkreterium für Reihen

für Folge — Kreterien für absolute konvergenz — Hauptkriterium

konvergent Reihen

1.13 Hauptkriterium

$\star$ konvergent die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dann ist (a_k) Nullfolge.

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \underbrace{nullkonvergent}_{divergend}$$

oder

$$\lim_{k\to-\infty} a_k \quad ex.null$$

1.52 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{4k^2-1} \quad divergend, \quad aber \quad \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad divergend \quad und\ \frac{1}{k}\ Null\,folge$$

1.53 Beweis.

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_k \quad (konvergent) \Rightarrow \underbrace{(a_k) \quad Nullfolge}_{\lim_{k\to\infty} a_k = 0}$$

$$s_n = \sum_{K=0}^{n} a_k \quad , \quad s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \quad , \quad s_{n+1} = s_n + s_{n+1}$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

1.14 Kriterium für Alternierende Reihe

1.54 Beweis (Alternierende Reihe).

$$\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} \textit{ist konvergent}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

wobei (a_k) *einer Streng monoton fallend Nullfolge mit* $a_k \geqq 0$
$\Rightarrow$ *Die Reihe ist konvergent.*

$$Also \sum_{K=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} \quad \textit{ist konvergent.}$$

1.55 Definition (absolute Reihe).

$$\textit{Eine Reihe} \sum_{K=0}^{\infty} a_k \quad \textit{heißt absolute konvergent wenn} \sum_{K=0}^{\infty}|a_k| \textit{konvergent ist.}$$

1.56 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} \ \textit{ist konvergent , aber nicht absolote konvergent}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2} \ \textit{ist kovergend und } \textbf{absolute} \textit{ konvergent}$$

1.57 Satz.

$$\textit{Reihe} \sum_{K=0}^{\infty} a_k \quad \textit{absolut konvergent} \quad \Rightarrow \quad \textit{Reihe} \sum_{K=0}^{\infty} a_k \quad \textit{ist Konvergent}$$

1.58 Bemerkung.
absolute konvergente Reihe kann man multiplizieren wie endliche summen. (aber konvergente Reihen nicht !)

1.15 Quotienkriterium (QK):

Für absolute Konvergenz , wenn gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} & \text{ist absolut konvergent} \\ > 1 \Rightarrow & \text{ist divergent)} \\ = 1 \Rightarrow & \text{Kriterium ist nicht anwendbar} \end{cases}$$

1.16 Wurzel Kriterium : WK

Die Reihe $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$ ist **absolute** konvergent genau wenn $\Leftrightarrow$:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} a_k & \text{ist absolut konvergent} \\ > 1 \Rightarrow & \text{ist divergent} \\ = 1 \Rightarrow & \text{Kriterium ist nicht anwendbar} \end{cases}$$

1.59 Beispiel (QK)**.**

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

$$d.h \quad < 1 \Rightarrow \quad \textit{Die Reihe ist absoulte Konvergent.}$$

1.60 Beispiel (WK)**.**

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k!}\right|}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{1}}{\sqrt[k]{k!}} =$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!}} = 0 < 1$$

Die Reihe is absolut konvergent.

1.17 Vorlesung 5

Zusammenfassung :
Folgen / Reihen / Konvergenz ? / Grenzwert ?
Neu : Funktionen
Approximation von Funktionen
Potenzreihen
Taylorreihen
fourierreihen
Näherungsweise Berechnung

1.61 Definition.
$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion in einer reellen veränderlichen

1.62 Bemerkung (Definitionsbereich)**.**
Bild von f

$$f(D) = \{f(x) \quad | \quad x \in D\}$$

Graph von f

$$Graph(f) = \{(x \quad | \quad f(x)) \quad | \quad x \in D\}$$

1.63 Definition.
Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$
f heißt in a stetig , wenn gilt :
$\forall (X_n) : X_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ für alle Folgen (x_n)
Die Folgenglieder sollen in Definitionsbereich liegen (Die in Definitionsbereich liegen können und den Grenzwert a haben)

* Ich weiß , dass $f(x_n)$ existiert $(f(x_n) \quad ex.)$
Folge $f(x_n)ex.$, soll einen Grenzwert besitzen.✓
$f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$✓✓

1.64 Bemerkung.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

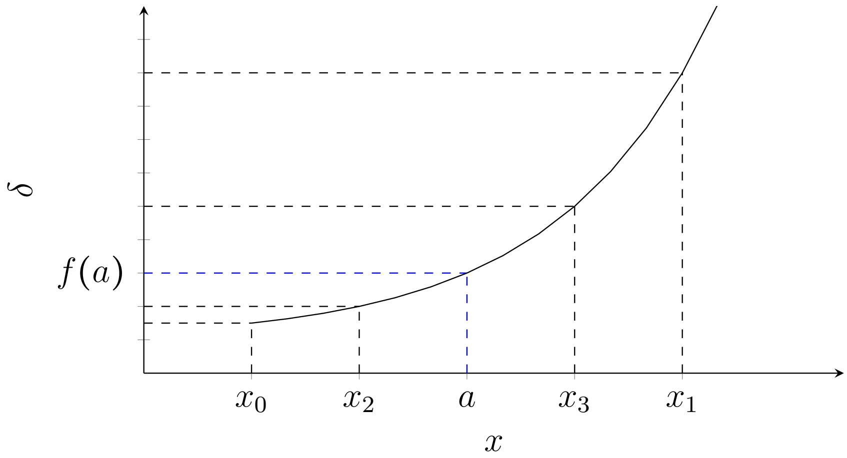
★ *Grenzwertbildung und Funktion Wertberechnung sind bei stetig Funktion in der Reihenfolge vertauschbar !*

1.65 Berechnung.

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

d.h *für jede Folge x_n , die gegen a konvergiert , konvergiert die Folge der Funktionierte gegen $f(a)$.*

1.66 Bemerkung.
f stetig in a $\Leftrightarrow$
1) $f(a)$ und
2) $lim_{x\to a} f(x)$ ex. und
3) Grenzwert = Funktionswert $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$



1.67 Beispiel.
1)

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

Ist $f(x)$ stetig in $a = 1$?

a) $f(1)$ ex ? nein , d.h f ist in $a = 1$ nicht stetig

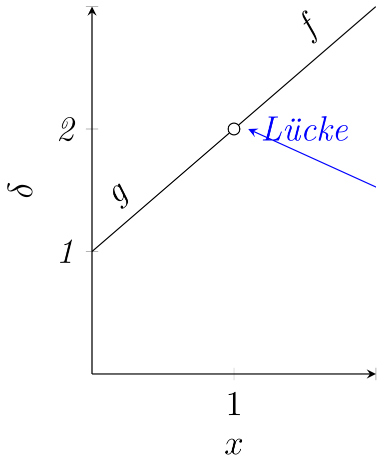
b)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \quad ?$$

Sei (x_n) eine beliebige Folge und $x_n \in D(f)$ und $\lim_{x\to\infty}(x_n) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{n\to\infty} (x_n + 1) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} 1 = 1 + 1 = 2$$

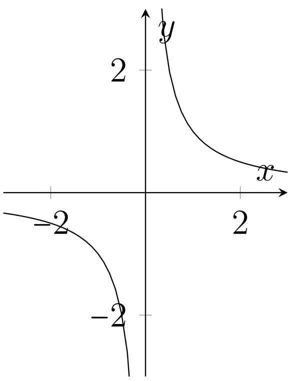
d.h Grenzwert ex. (und es ist 2).



Man sagt , f hat an der stelle 1 eine Lücke.

1.68 Beispiel.
(2)

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad a = 0$$



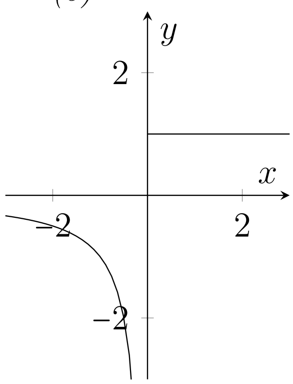
(i) betrachte ? $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ *: d.h wir betrachten alle Folgen* (x_n)

$$X_n \in D, X_n \leq 0 \lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to-\infty} x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to-\infty} x_n} = -\infty$$

$$d.h \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) ex\ .nicht$$

(ii) Betrachte $\lim\limits_{n\to+0} f(x_n)$ *, ex .nicht*

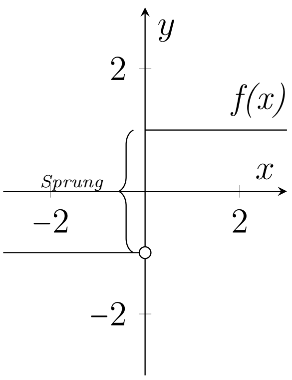
(3)



$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{array} \right\} a = 0 \quad , \quad f(0) = 1 \quad ex.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \quad ex.\ nicht$$

(4)



1.69 Definition (sgn(x)).
Die Vorzeichenfunktion oder ***Signumfunktion*** *(von lateinisch signum ,Zeichen') ist in der Mathematik eine Funktion, die einer reellen oder komplexen Zahl ihr Vorzeichen zuordnet.*
Die reelle Signumfunktion bildet von der Menge der reellen Zahlen in die Menge {-1,0,1} ab und wird in der Regel wie folgt definiert:

$$f(x) = \underbrace{sgn(x)}_{sprung} = \left\{ \begin{array}{ll} +1, & x \geq 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\neq \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad ex. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad ex. \end{array} \right\} \lim_{x \to 0} f(x) \quad ex.\ nicht\ ,\ O\ heißt\ Sprungstelle$$

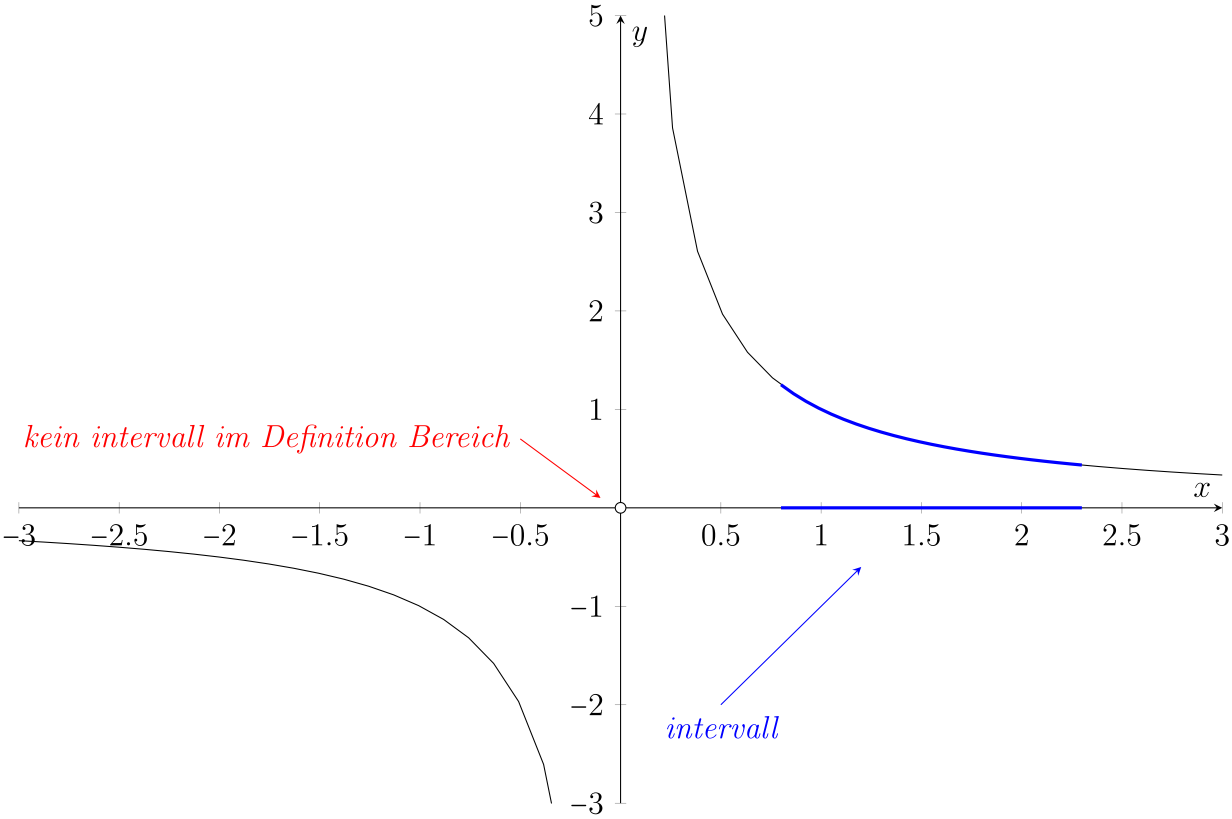
1.70 Definition.

$$f :\rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R} \quad \textit{heißt } \boldsymbol{stetig}\textit{, wenn } f \textit{ für alle } a \in D \quad \boldsymbol{stetig}$$

1.71 Beispiel.
elementare Funktionen und deren Verfügungen sind stetig auf dem gesamten Definitionsbereich.
Z.B
Polynomfunktion , rationale Funktionen, Winkelfunktionen , Potenzfunktionen , Wurzelfunktionen , Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktion.

1.72 Beispiel.

$$f : D \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{x} = x^{-1} \textit{ist stetig auf dem gesamten Defintionsbereich } D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$



1.73 Beweis.
Sei $a \in D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *(d.h* $a \neq 0$*)*

$$f(a) = \frac{1}{a} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \tag{2}$$

$$\textit{Sei} \quad x_n \quad \textit{eine beliebige Folge und} \quad x_n \in \underbrace{D}_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

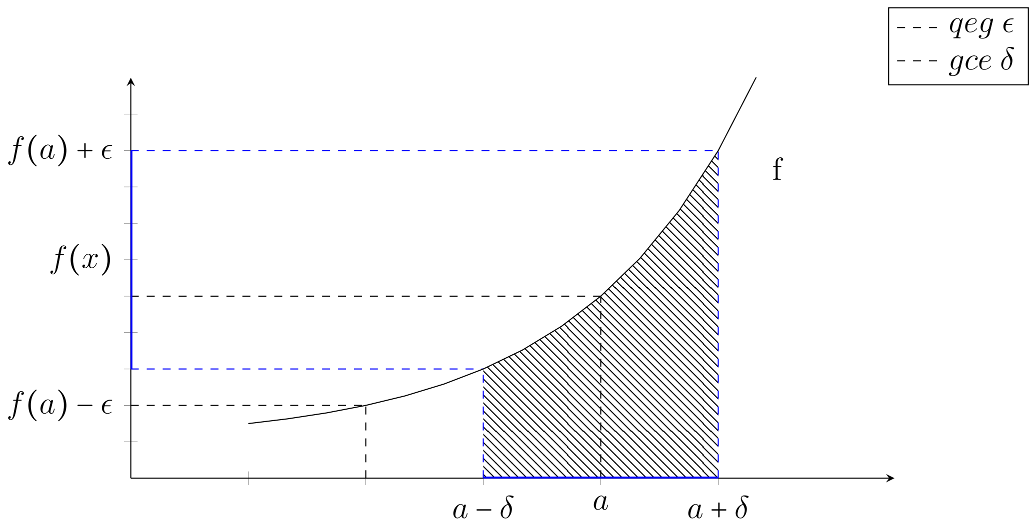
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_1} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_2} \\ &= \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \quad \textit{ex.}\end{aligned}$$

1.17.1 Rechnenregln für Funktionen (GWS anwenden)

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\infty} g(x), \text{ wo bei } g(x) \neq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} (f(n) \pm g(n)) = \lim_{n\to\infty} f(n) \pm \lim_{n\to\infty} g(n)$$

1.74 Satz.

$$f : D \Rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R} \textit{ ist in } a \in D \textit{ Stetig } \Leftrightarrow \forall_\epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{1.74.1}$$



1.18 Vorlesung 6

$$|x-a| < \delta$$

$$|x-a| = \begin{cases} x-a, \ x-a \geq 0 \\ -(x-a), \ x-a < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-a, x \geq \\ a-x, x < a \end{cases} \begin{cases} x \leq a : x-a < \delta \Rightarrow x < a+\delta \\ x < a : a-x < \delta \Rightarrow a-\delta < x \end{cases} \Rightarrow \tag{1.74.2}$$

$$\begin{cases} a \leq x < a+\delta \\ a+\delta < x < a \end{cases} \tag{1.74.3}$$

1.18.1 Ergebnis

$|x-a| < \delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$
$\Leftrightarrow x \in (a-\delta, a+d)$ offenes intervall
$|x-a| < \delta$

x liegt in der δ-Umgebung von a

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \text{ liegt in der } \epsilon\text{-umgebung con} f(a)$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) \ \epsilon > o$$

$$I(\frac{1}{e}) = I(e^-1) = 1.k \quad \text{rell} I(e^{-n}) = I(\underbrace{e^{-1}\dots e^{-1}}_{n}) = I(e^{-1}) + \dots + I(e^{-1}) = k.n \tag{1.74.4}$$

$$\frac{n}{m} \in Q : I(e^{-\frac{n}{n}}) = k.\frac{n}{m}, \text{ denn} \tag{1.74.5}$$

$$kn = I(e^{-n}) = I(e^{-\frac{n}{m}.m}) = \underbrace{I(e^{-\frac{n}{m}}\dots e^{-\frac{n}{m}})}_{m} + \dots + I(e^{-\frac{n}{m}}) = I(e-\frac{n}{m}) + \dots + I(e^{-\frac{n}{m}}) \tag{1.74.6}$$

$$r \in \mathbb{R}_+ : I(e^{-r}) = ? \tag{1.74.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{q_n}_{\in\mathbb{Q}_+} = r$$

$$I(e^{-r}) = I(e^{-\lim\limits_{n\to\infty}(q_n)}) = I(e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{q}{n})}) \overset{\overset{e\ stetig}{\downarrow}}{=} I(\lim_{n\to\infty} e^{-q_n}) \overset{\overset{I\ stetig}{\downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} I(e^{-\frac{q}{n}}) = \lim_{n\to\infty} k.q_n = \overbrace{k.\underbrace{\lim_{n\to\infty} q_n}_{r}}^{k.r}$$

$$I(\frac{1}{e}) = I(e^{-1}) = \frac{1}{k}\text{rell}$$
$$I(p) = I(e^{\ln p}) = \underbrace{k}_{>0}(-\ln p) = \underbrace{-k}_{<0}\ln p$$

1.75 Beispiel.
$$D(x)=\begin{cases}1, x \in \mathbb{Q} & (rational)\\ 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} & (irrational)\end{cases}$$

steteig für welche a?
1. Fall : a rational
2. Fall : a irrational

a rational: a fest
sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *, beliebig* $\exists\delta > 0 \forall x \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow |D(x) - D(a)| < \frac{1}{2}$ *Sei* δ *beliebig,* δ *¿ 0, x irrational , fest*
$|x-a| < d \Rightarrow |0-1| = |11 = 1 < \frac{1}{2}$*, widerspruch*
$\Rightarrow D$ *ist nicht stetig, für jede* $a \in \mathbb{R}$
Sei $\delta > 0$ *, beliebig, x rational , fest* $|x-a| < \delta \Rightarrow |\underbrace{D(x)}_{1} - \underbrace{D(a)}_{0}| < \frac{1}{2} = \varepsilon \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$
Widerspruch
$\Rightarrow D$ *ist nicht stetig für jede* $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

1.76 Satz. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, stetig f besetzt in [a,b] ein globale Maximum und ein golbales Minimum*

1.77 Bemerkung.
Beide (unklar!)veränderung sind wichtig

1.78 Bemerkung (a,k)**.**
$= x \in \mathbb{R}$ — $a \le x \le b$

1.79 Satz (ZWS)**.** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig ,* $\frac{x_m}{x_M}$ *eine globale Minimale stelle eine golbale Maximalestalle*
Sei $\hat{y} \in [\, f(x_m), f(x_M) :$ *Dann ex.* $\hat{x} \in$ *[a,b] mit* $\hat{y} = f(\ \hat{x}$

1.80 Bemerkung.
Jeder zwischenwert wird als Funktionswert angenommen

1.81 Satz (Nullstellen)**.** *Sei f :[a,b]* $\to \mathbb{R}$ *stetig,* $f(a).f(b) < 0$ *Dann beliebig f in [a,] eine Nullstell* x_0 *, d.h.* $\exists x_0 \in$ *[a,b] :* $f(x_0) = 0$

Beweis. $f(a) < 0, f(x) > 0$ (analog für $f(a) > 0, f(b) < 0$)

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = \begin{cases}0, \frac{a_1+b_1}{2} \text{ ist die gesamte Nullstelle}\\ < 0\,, a_2 = \frac{a1+a2}{2}, b2 = b1\\ > 0\,, a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}\end{cases}$$

$$\text{usw. } \frac{a_2+b_2}{2} \text{berechnen}$$

$$f(..)\begin{cases}= 0\\ < 0\\ > 0\end{cases}$$

Betrachte (a_n)

Stetigmax   beschränkt $\Rightarrow konvergent$

sei $\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{ex.} =: c$

sei $\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{ex.} =: c$

$a \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1 \leqq b$ ex. $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a-b|}{2^{n-1}} \\ &= |a-b| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= |a-b|.0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c$$

Betrachte (b_n)

Stetigmax   beschränkt $\Rightarrow konvergent$

Falls keine Nullstelle beim bilden von a_n, b_n gefunden wurden

$$\left.\begin{aligned} f(c) &= f(\lim_{n\to\infty} a_n) \overset{\substack{fstetig\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geqq 0 \\ &= \\ f(c) &= f(\lim_{n\to\infty} b_n) \overset{\substack{fstetig\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leqq 0 \end{aligned}\right\} f(c) = 0 \qquad \square$$

1.19 Vorlesung 7

$$f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \notin D$$
$$\underbrace{\lim_{x\to a}}_{x\neq a} f(x) = r \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall (x_n) \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ und } x_n \in D$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = r$$

1.82 Beispiel.

GWS nicht anwendbar $\lim_{x\to 0} \overbrace{x \sin x}^{f(x)} = \lim_{x\to 0} x. \quad \lim_{x\to 0} \sin x = 0.0 = 0$

1.83 Bemerkung.
GWS nicht anwendbar $\underbrace{\lim_{x\to 0}(x \ \sin \tfrac{1}{x}}_{f(x)} \underbrace{\lim_{x\to 0}}_{0}, \lim_{x\to 0} \sin \tfrac{1}{x}$

1.84 Definition.
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$
$x_0 \in (a,b) \Leftrightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $a < s_0 < b(\Leftrightarrow (skizzenotcomplate))$
f *ist in* x_0 *differenzierbar :* $\Leftrightarrow f'(x_0) := \underbrace{\lim_{x\to f(x)}}_{f\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existiert* $(f'(x_0) \in \mathbb{R})$
Falls der Grenzwert ex., nennt man $f'(x_0)$ *die erste Ableitung von* f *in* x_0.
Existiert $f'(x_0)$ *für alle* $x_0 \in (a,b)$ *, dann nennt man* $f' : (a,b) \to \mathbb{R} \longmapsto f'(x_0)$ *die erste Ableitung von* f.

1.85 Beispiel.
$f(x) = \frac{1}{x}$ *auf* $(0,r)$ $r \in \mathbb{R}_{>0}$ *,r fest und* $x_0 \in (0,)r$, *ges:* $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \underbrace{\lim_{x\to x_0}}_{x\neq x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \underbrace{\lim_{x\to x_0}}_{x\neq x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x.x_0}}{x - x_0} = \underbrace{\lim_{x\to x_0}}_{x\neq x_0} \frac{(x_0 - x)}{x - x_0(x - x_0)} = \underbrace{\lim_{x\to x_0}}_{x\neq x_0} \underbrace{(-\frac{1}{x_0})}_{konst.} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x_0} \underbrace{\lim_{x\to x_0}}_{x\neq x_0} \frac{1}{x}$$
$$\overset{\frac{1}{x}\, stetig F.}{\overset{\downarrow}{=}} -\frac{1}{x}.\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

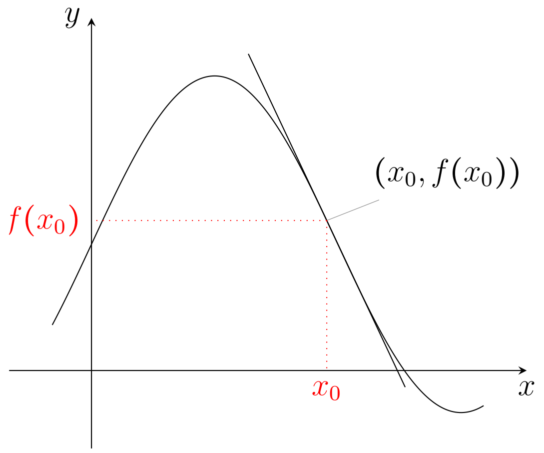
$$f' : (0,r) \to \mathbb{R} : x \longmapsto -\frac{1}{x^2} \textit{in die erste Abbildung von } f(x) = \frac{1}{x}$$

1.19.1 tafelwerk

f	f'
x^n	nx^{n-1}
$\downarrow n = -1$	$\downarrow$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

1.86 Satz. *f in x_0 differenzierbar $\Rightarrow$ f in x_0 stetig*

Beweis. Sei f in x_0 d.b $\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ex. ... □



Die Linie repräsentiert die Tangente ((T)) an den Grenzwert von $f(x_0)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$

$$(x) = \frac{t(x)-t(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

1.19.2 Tangente Gleichung

$$T : t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1.87 Bemerkung.
$f(x)$ gibt die Ableitung der Tangente an den Grenzwert der Funktion f im Punkt $x_0, f(x_0)$ an.

1.20 Berechnen an $f'(x)$ Ableitungsregeln:-

1.20.1 Linearität:-

Sei $\underbrace{f(x) \text{ und } f(g)}_{h'(x)}$ gegeben sind , dann wie sieht die Ableitung von $h'(x)$?

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$\underbrace{rf(x)'}_{h(x)} = \underbrace{r}_{\in\mathbb{R}} f'(x)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

1.20.2 Produktregel:-

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

1.20.3 kettenregel:-

$$\underbrace{(f \circ g)'(x)}_{f(g(x))'} = f'(g(x)).g'(x)$$

1.20.4 Quotientenregeln:-

In Tafelwerk :

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

Herleitung :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

1.88 Bemerkung (Tafelwerk)**.**

$$(sin(x))' = cos(x)$$
$$(cos(x))' = -sin(x)$$

1.89 Beispiel.

$$\begin{aligned}
(tan(x))' &= \left(\frac{sin(x)}{cos(x)}\right)' \\
&= \frac{cos(x)cos(x) - sin(x)(-sin(x))}{(cos(x))^2} \\
&= \frac{(cos(x))^2 + (sin(x))^2}{(cos(x))^2} \\
&= \frac{1}{(cos(x))^2} \\
&= 1 + (tan(x))^2
\end{aligned}$$

1.20.5 Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-}1$ zu f

1.90 Definition.
Ist $y = f(x)$ eine umkehrbare differenzierbare Funktion, dann ist die Umkehrfunktion $x = g(y)$ differenzierbar und es gilt: $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y)}$ oder $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ für $f'(x) \neq 0$. Überlicherweise verraucht man die Variablen x, y and schreibt $y = g(x)$ und $y' = g'(x)$.

1.91 Beispiel.
$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$

Beweis. Der Beweis ist einfach.Man geht wider von der Definition der Ableitung aus:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Nutzt man die Potenzregln $e^{x+h} = e^x.e^h$ so ergibt sich :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^x.e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

und weil $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ dann Also $f'(e^x) = e^x$ □

1.92 Bemerkung.

$$\begin{aligned} f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = &\quad identisch \\ e^{ln(x)} = x &\quad |Abb \\ e^{ln(x)}.(ln(x))' = 1 & \\ \Rightarrow ln(x)' = \frac{1}{e^{lnx}} = \frac{1}{x} & \end{aligned}$$

1.93 Beispiel.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f^{-1}(x) &= lnx \\ (f^{-1}(x))' = (lnx) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

1.94 Beispiel.

$$f(x) = tan(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + (tan(x))^2$$
$$f^{-1}(x) = arctan(x) = x| \quad Abl.$$
$$\Rightarrow 1 + (\underbrace{tan(arctanx)}_{x})^2 (arctanx)' = 1 \Rightarrow (arctanx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

1.21 Vorlesung 8

1.95 Definition.
Eine Reihe $\sum_{K=0}^{\infty} a_k(x - X_0)^k$ *heißt Potenzreihe Dabei gilt* $a_0, a_1 \cdots \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$, *$x$ ist eine reelle veränderlich x_0 heißt Mittelpunkt der Potenzreihe.*

1.96 Bemerkung.
$(f_k(x))_{k=0}^{\infty}$ *mit* $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$. *Folge von Funktionen* $f_k(x)$

$$k = 0, f_0(x) = a_0(x - x_0)^0 = a_0 \times 1 = a_0$$
$$k = 1, f_1(x) = a_1(x - x_0)^1$$
$$k = 2, f_2(x) = a_2(x - x_0)^2$$

$\left(\sum_{K=0}^{n} f_n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ *Folge von Partielle Summen , Reihe* $\sum_{K=0}^{\infty} f_k(x)$

$$f_0(x)$$
$$f_0(x) + f_1(x)$$
$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)$$

1.97 Bemerkung.
wir fragen nicht nach der Konvergenz dieser Folge sondern für welche x ist diese Folge konvergent

1.98 Beispiel.

$$\sum_{K=0}^{\infty} (\frac{-2}{3})^k \frac{1}{k}(x - 0)^k$$

für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergent ?
Wurzelkriterium für absolute konvergent :

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{die\ potentzreihe}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2}{3} \sqrt[k]{\frac{1}{k}|x|}$$
$$= \frac{2}{3}|x|.\frac{1}{1} = \frac{2}{3}|x| < 1$$

$$PR\ abs.\ konv.\ \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{2}$$

Wurzelkriterium:

$$\frac{2}{3}|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{3}{2} \Leftrightarrow PR\ div$$

$x = \frac{-3}{2}$ *einsetzen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{-2}{3}\Big)^k \frac{1}{k} \Big(\frac{-3}{2}\Big)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\ div$$

$x = \frac{3}{2}$ *einsetzen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{-2}{3}\Big)^k \frac{1}{k} \Big(\frac{3}{2}\Big)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}\ kon.$$

1.99 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{-2}{3})^k\frac{1}{k}(x-7)^k \textit{ ist für } x \in (7-\frac{3}{2}, 7+\frac{3}{2}) \textit{ abs konvergent}$$

1.100 Definition.
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *eine P.R . dann ex. ein* $r \in \mathbb{R} \geq 0$ *oder* $x = \infty$ *, so dass die P.R für alle* x *mit* $|x-x_0| \leq r$ *oder* $x \in \mathbb{R}$ *absolut konvergent ist. Dieser (r) heißt* ***Konvergenzradius*** *der PR*

1.101 Bemerkung.
Der konvergenzradius r ist unabhängig von Mittelpunkt X_0

1.102 Bemerkung.
Jede PR ist für $x = x_0$ *abs . konvergent , denn* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = 0$
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *eine Reihe mit konvergenzradius r Dann kann eine Funktion f definieren*

$$f:(x_0-r \quad , \quad x_0+r) \to \mathbb{R} : x \longmapsto \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k}_{\textit{Grenzwert der PR}}$$

1.103 Bemerkung.
wegen der abs Konvergenz ist diese Funktion f - Stetig auf (x_0-r, x_0+r) *bsw.* $\mathbb{R}$
- beliebig oft differenzierbar.

1.104 Bemerkung.
Analog kann man PR über $\mathbb{C}$ *definieren. Z.B* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}(z \in \mathbb{C})$ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z-0)^k$ *ist für ..... abs. konvergent. Quotienten Kriterium :*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{z^k+1}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{z^{k+1\times k!}}{z^k(k+1)!}\right| = \lim\frac{|z|}{k+1} = \underbrace{|z| \times \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}}_{0} < 0$$

$$exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, Z \longmapsto \underbrace{\underbrace{\textstyle\sum_{k=0\infty}\frac{z^k}{k!}}_{exp(z)}}_{e^z}$$

$Z = exp(i\varphi) = e^{i\varphi}$.

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^k}{k!} = \frac{(i\varphi)^0}{0!} + \frac{(i\varphi)^1}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} \\
&= 1 + i\frac{\varphi^1}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^5}{5!}\dots \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}}_{cos(\varphi)} + i \times \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{sin(\varphi)}
\end{aligned}$$

1. **Approximation** stetiger Funktionen $f(x)$ durch **Taylorpolynom** $p_n(x)$:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)^1$$

$= t(x)$ Tangente an den Graph von $f(x)$ in Punkt $(x_0, f(x_0) = p_1(x)$
lineare Approximation $(n = 1)$ Linearisierung
fehlende Skizze !!!

1.105 Bemerkung.

$$f(x_0) = p_1(x_0)$$
$$f'(x_0) = p_1'(x_0)$$

2. Approximation von f(x) durch Taylor-Polynome $p_n(x)$ von Grad $\leq$ n in der Umgebung com x_0

$$\underbrace{f(x) \approx p_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \dots \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{p_n(x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}$$
$$f(x_0) = f^0(x_0) = \frac{f^0(x_0)}{0!}$$

1.106 Bemerkung.
Taylor-Polynom $P_n(x)$ von Polynomfunktionen $f(x)$ von Grad n stimmen mit $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \approx \dots \text{ an der stelle } x_0 = 0$$
$$f'(x) = ((1+x)^{-1})' = \frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2}$$
$$f''(x) = 1 \times 2 \frac{1}{(1+x)^3} = 1 \times 2(1+x)^{-3}$$
$$f'''(x) = 1 \times 2 \times 3 \frac{1}{(1+x)^4} = 1 \times 2 \times 3(1+x)^{-4} \text{ usw.}$$
$$f^k(x) = (-1)^k.k! \frac{1}{1+x}^k \text{ beweis durch vollst. Induktion}$$
$$f^k(0) = (-1)^k k!$$
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$
$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \underbrace{(-1)^0 x^0}_{1} - x^1 + x^2 - x^3 \dots$$

$\{-x^n, n \text{ ungerade } \}$
$\{x^n, n \text{ gerade } \}$

1.22 Vorlesung 9

1.107 Beispiel.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$ gesucht

1.22.1 Taylor-Polynom $P_n(x)$ von $f(x)$

$$\begin{array}{ccc} f(x) = x^2 - 1 & f(0) = 1 & f(1) = 0 \\ f'(x) = 2x & f'(0) = 0 & f'(1) = 2 \\ f''(x) = 2 & f''(0) = 2 & f''(1) = 2 \\ f'''(x) = 0 & f'''(0) = 0 & f'''(1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \underbrace{f(0) + f'(0)(x-0)}_{t(x) \text{ lineare Approximation}} + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \ldots \\ &= -1 + 0x + \frac{2}{2!}x^2 + 0 = -1 + x^2 = f(x) \end{aligned}$$

Das Polynom ist bei der Entwicklung zu einem Taylor-Polynom zum selben Polynom zurückgekommen

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \ldots \\ &= 0 + 2(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + 0 \\ &= 2x - 2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \end{aligned}$$

1.108 Beispiel.
gegeben : $f(x) = \frac{e^x}{cos(x)}$ gesucht : $p_2(x)$ für $x_0 = 0$
Methode des Impliziten Differenzieren

$$f(x)cos(x) + f(x)(-sin(x)) = e^x \quad | \quad abl.$$
$$f'(x)cos(x) + f(x)(-sin(x)) = e^x \quad | \quad abl.$$
$$f''(x)cos(x) + f'(x)(-sin(x)) + f' - (x)(-sin(x)) + f(x)(-cos(x)) = e^x$$
$$f(0)cos(0) = e^0 \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(0) \times 1 + f(0) \times 0 = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(0) \times 1 + f(0) \times (-1) = 1 \Rightarrow f''(0) = 2$$
$$p_2(x) = 1 + 1x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + x + x^2$$
$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

1.109 Beispiel.
$f^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$
Induktionsanfang

$$f^0(x) = f(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^0 \frac{0!}{(x+1)^{0+1}} = 1\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} w.A$$

Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung
Es gelte $f^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$ *für* $k \in \mathbb{N}$
Induktionsbehauptung *: Dann gilt*

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k+1)} \frac{(k+1)!}{(x+1)^{(k+2)}}$$

Induktionsbeweis
$(\dots\dots)$

$$\begin{aligned} f^{(f+1)}(x) = (f^x(x))' &= \big((-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{(k+1)}}\big)' \\ &= (-1)^k k!(x+1)^{-(k+1)} \\ &= (-1)^k k!(-(k+1)(x+1))^{-(k+^2)} \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)! \frac{1}{(x+1)^{t+2}} \Rightarrow \textit{ Ind Beh . ist dann bewiesen.} \end{aligned}$$

Die behauptung gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

1.110 Beispiel.
$f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$p_1(x) = 1 - x$$
$$p_2(x) = 1 - x + x^2$$
$$p_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3$$

1.111 Bemerkung.
Bei : $p_2(x)$ *wird der Fehler für große werte von* x *größer der Fehler bei* $p_1(x), p_2(x)$

1.22.2 Taylor-Formel:

$$F(x) = p_n(x) + \underbrace{R_n(x, x_0)}_{\text{=n-tes Restglied}} \quad R_n(x, x_0)\text{Fehler bei der Approximation.}$$

1.112 Satz. *Darstellung von* $R_n(x, x_0)$ *nach Lagrange Sei* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *eine* $(n+1)$ *und stetig differenzierbar Funktion und* $x_0 \in (a, b)$ *Dann gilt :* $f(x) = p_n(x) + R_n(x_1, x_0)$ *und* $\forall x \in (a, b) \exists z \in \mathbb{R}$ *zwischen* x *und* x_0 *:*

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)})$$

1.113 Beispiel.
$f(x) = e^x$, $x = 0$

$$f^k(x) = e^x$$
$$f^k(0) = 1 \Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^k(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
$$f(x) = p_n(x) + R_n(x,0) \ \textit{und} \ R_n(x,0) = \frac{e^z}{(n+1)!} y^{n+1} \quad z \in (x,0)$$
$$\textit{wir betrachten } f(x) = e^x \textit{ für } |x| \le 1$$
$$\left|R_n(x,0)\right| = \left|\frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \le \frac{e^1}{(n+1)!} \le 10^{-2} \textit{ für } n = 5$$

1.22.3 Näherungsformel für e^x

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \textit{ für } x \le 1$$

1.114 Definition.
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$
*Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heißt **Taylor Reihe** von f an der stelle x_0*

1.115 Bemerkung.
*(1) Nicht für jede Funktion $f(x)$ ist dir **Taylor-Reihe konvergent***
(2) Ist die Taylor-Reihe konvergent , dann muss der Grenzwert .... die Funktion f sein.
*(3) Ist die Taylor-reihe konvergent gegen f , d.h $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, heißt die Funktion f **reell analytisch***

1.116 Beispiel.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \textit{mit } x \in (-1,1) \textit{ ist reell analytisch}$$

Taylor-reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ hat konvergenzradius 1(...) und Mittelpunkt 0

1.117 Satz. *Sei $|x| \le 1$ Dann gilt: $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ ist die Taylor-reihe Darstellung von $f(x)$*

1.22.4 Rechnen mit Potenzreihen:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k := a(x), b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$ mit konvergenzradius r_1 für $a(x)$, r_2 für b(x) sei r := min $\{r_1 \ , \ r_2\}$
Dann gilt :

$$a(x) \pm b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x - x_0)^k \text{ für } x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

$$C \times a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c.a_k(x - x_0)^k \text{ für } x \in (x_0 - r, x_0 + r) c \in \mathbb{R}$$

$$a(x).b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dot{+} \cdots + a_k b_0)(x - x_0)^k$$

$\frac{1}{b(x)}$ für $b(x) \neq 0$ kann mit der Methode unbestimmten koeffizienten

1.23 Vorlesung 10

1.24 Spezielle Ableitungen

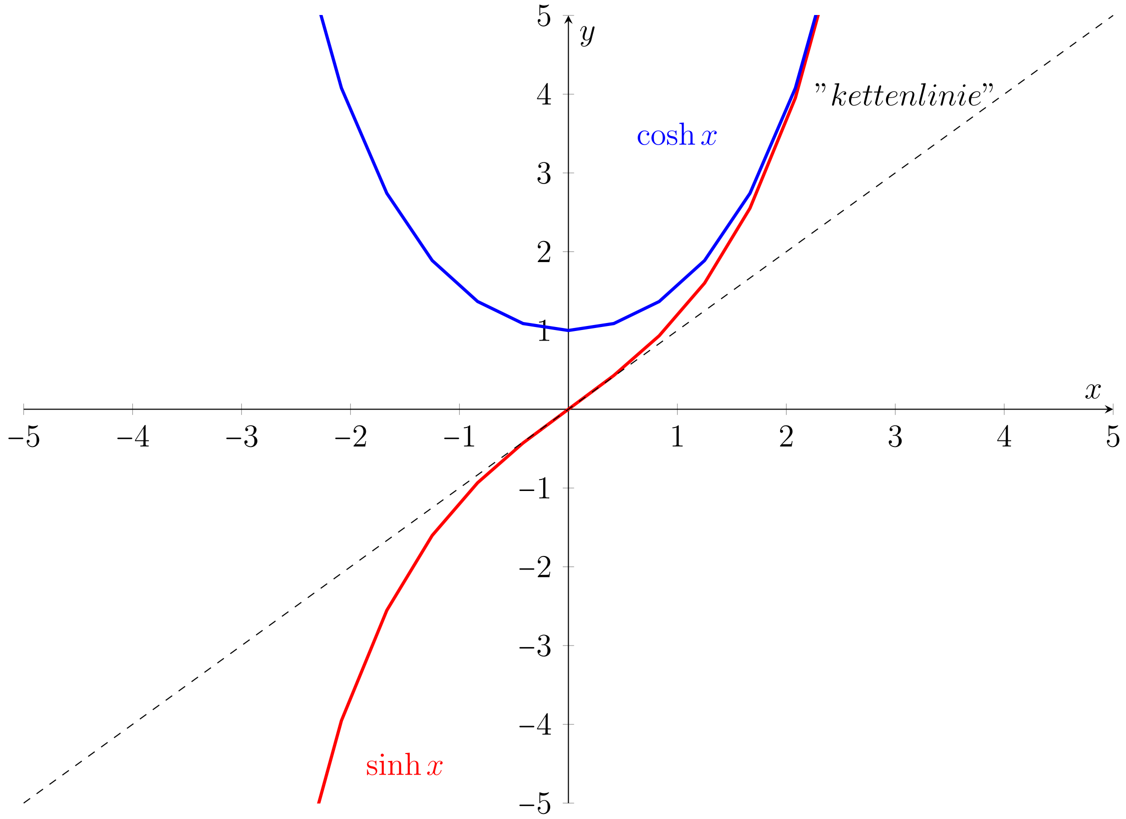
$$f(x) = x^x \quad x > 0$$

$$ln(f(x)) = \underbrace{lnx^x}_{x\,lnx} \Rightarrow \frac{1}{p(x)} f'(x) = 1 \times ln\ x + \underbrace{x\ \frac{1}{x}}_{1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{x^x}_{f(x)}(ln\ x + 1) \text{ logarithmisches Differenzieren}$$

$$f(x) = x^x = e^{lnx^x} = e^{x\ lnx} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{e^{x\ lnx}}_{x^x}(x\ lnx)' = x^x(lnx + 1)$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \sinh x$$
$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ Kosinus Hyperbolicus}$$
$$\sinh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



gesucht: **Taylor-Reihe Entwicklung** für $\cosh x$

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
e^{-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\rightsquigarrow \cosh x &= \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots) \\
&+(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}
$$

1.25 Spezielle Grenzwerte

1.25.1 Regeln von Bernoulli l'Hospital -

Seien $f(x)$, $g(x)$ reelle , zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf (a, b) und $f(x_0) = g(x_0) = 0$
gesucht:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(z_f)(x - x_0)^2}{g(x_0) + g'(x_0) + (x - x_0) + \frac{1}{2} g''(z_g)(x - x_0)^2} \\
&= \frac{x - x_0}{x - x_0} . \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(z_f)(x - x_0)}{g'(x_0) + \frac{1}{2} g''(z_g)(x - x_0)} \\
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= 1. \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(z_f).0}{g'(x_0) + \dots .0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad \text{falls dieser existiert}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{falls der Grenzwert existiert}$$

1.118 Beispiel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(sinx)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{1}=cos(0)=1$$

1.119 Beispiel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-sin(x)+cos(x)-2}{x^3.cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-cos(x)-sin(x)}{3x^2cos(x)-x^3(-sin(x))}\ldots\ldots=\frac{1}{3}$$

1.120 Bemerkung.
Diese Methode kann man durch anwenden für $x\to+\infty$, $x\to-\infty$. *und für* $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to x_0\ \pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0\ \pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\textit{falls der Grenzwert existiert.}$$

falls der Grenzwert existiert.

1.121 Bemerkung.
Man kann durch geeignetes Umformen auch Grenzwerte vom Typ $0.\infty$ *berechnen , sowie* $0^0,1^0,1^0$

1.122 Beispiel.
$\lim_{x\to 0+} x\ lnx=$
1. Mögl. $\lim_{x\to 0+}\cdots=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\frac{1}{lnx}}$

2.Mögl. $\lim_{x\to 0+}=\lim_{x\to 0+}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{(lnx)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 0+}\frac{1.x^2}{x.1}(-1)=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$

1.123 Beispiel.
$\lim_{x\to 0}x^2=\lim_{x\to 0}e\ lnx^x=\lim_{x\to 0}e^{xlnx}=e^{\lim_{x\to 0}xlnx}=e^0=1$

$\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{lnx}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{lnx}lnx}=\lim_{x\to 0}e^1=e$

1.124 Beispiel.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x&=\lim_{x\to\infty}e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x}\\&=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\\&=e\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})=\cdots=e^1=e\end{aligned}$$

(Nebenrechnung) NR $\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$

also auch $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\overbrace{\longrightarrow}^{x=1}e^1=e=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1^k}{k!}=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

1.26 Integral

$$f(x) > 0 \text{ auf } [a,b]$$

$$\underline{S_p} = \sum_{K=1}^{\infty} f_k(x_k - x_{k-n}) und f_k = \min\{f(x)| \in [x_{k-1}, x_K]\}$$

$$\overline{S_p} = \sum_{K=1}^{\infty} f_k(x_k - x_{k-n}) und \overline{f_k} = \max\ldots$$

$$\underbrace{\lim_{\|p\|\to 0} \underline{S_p}}_{(1)ex.} \underbrace{=}_{(3)} \lim_{\|p\|\to 0} \overline{S_p} = \underbrace{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{Integral von f(x) auf [a,b]}$$

1.125 Beispiel.
$D(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad auf[0,1]$ *skizze fehlt!*

1.126 Bemerkung.
In jeder reelle Intervall liegen rationale und irrationale Zahlen

$$\text{Riemann} : \lim \underline{S_p} \overset{ex. irrationale Zahl im Int.}{\overset{\downarrow}{=}} \lim \sum (x_k - x_{k-1}) = \lim 0 = 0$$

$$\neq \lim \overline{S_p} = \lim \sum (x_k - x_{k-1})) > 0$$

Das Riemann - Integral von D(x) ex. nicht

1.26.1 Lebague-Integral

skizze fehlt!

$$\phi(x) \text{ treppenfunktion } \int_a^b \phi(x) = \sum_{K=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})(\phi_k(x))$$

$$\text{Folge von Treppenfunktion auf } [a,b]\backslash M$$

M := *Nullmenge* **z.B** $\phi \int_a^b D(x)\mathrm{d}x = 0$

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} \phi_k(x)}_{ex.} = f(x)$$

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} \int_a^b \phi(x)}_{ex.} = \underbrace{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{\text{Lebague-Integral}}$$

1.27 Vorlesung 11

1.127 Bemerkung.
Aussage $A(x)$ *gilt für alle* $x \in \mathbb{R}$ *bzw.* $x \in \{a, b\}$
Aussage $A(x)$ *gilt für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ohne* M *bzw.* $x \in \{a, b\}$ *ohne* $\underbrace{M}_{Nullmenge}$

$A(x)$ *gilt für fast alle* $x \in \mathbb{R}$ *bzw.* $x \in \{a, b\}$

1.128 Definition (Nullmenge)**.**
Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ *heißt* ***Nullmenge****, wenn gilt :*
für alle $\epsilon > 0$ *existiert Intervalle* $]_1,]_2, \dots \subseteq \mathbb{R}$ *sodass :*
1)

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = J_1 \cup J_2 \cup \dots$$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \leq \epsilon$ *wobei* $|J_k|$ *die Lage des Intervalls* J_k *bezeichnet.*

1.129 Bemerkung.
ab zählbar viele Intervalle endlich viele ab zählbar unendlich viele

1.130 Beispiel (1)**.**
Die Menge $M = \{x_1, x_2, x_3\}, |M| = 3$ *Die Behauptung : M ist eine Nullmenge .*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und fest wähle $J_k = [x_k - \frac{\epsilon}{6}, x_k + \frac{\epsilon}{6}]$ Dann gilt : $|\exists_k| = \frac{\epsilon}{3}$ $x_k \in J_k$ und (1) , (2). □

1.131 Bemerkung.
Endliche Mengen sin Nullmenge.

1.132 Bemerkung.
Abzählbar endliche Mengen sind Nullmengen.

Beweis. Sei $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig und fest. Dann : fehlende Skizze !!! □

Gesamtlänge berechnen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} &= \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \epsilon\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1\right) \\ &= \epsilon(2 - 1) = \epsilon\end{aligned}$$

Intervalle $J_k = [x_k - \dfrac{\epsilon}{2^{k+1}}, x_k + \dfrac{\epsilon}{2^{k+1}}](k = 1, 2, \dots)$ erfüllen (1)und (2).

1.133 Bemerkung.
Es gilt überabzählbar Mengen , die Nullmenge sind ***Z.B*** *die [****Cantor-Menge****].*

1.134 Definition (Cantor-Menge).
Unter der Cantor-Menge versteht man in der Mathematik eine bestimmte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen.
Schnitte von Intervallen
Die Cantormenge lässt sich mittels folgender Iteration konstruieren: Man beginnt mit dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ *der reellen Zahlen von 0 bis 1.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

1.135 Definition.

$$\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$$

1.27.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a,b]$ stetige Funktion dann existiert ein $z \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(z) \times (a-b)$
fehlende Skizze !!

1.27.2 Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein stetige Funktion , und sei $\widetilde{F} : [a,b] \to \mathbb{R}$. $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ Dann ist $\widetilde{F}$ auf (a,b) differenzierbar und es gilt $\widetilde{F}'$ für alle $x \in (a,b)$

Beweis. Sei $x_0 \in (a,b)$ beliebig und fest

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0}
\end{aligned}$$

laut **Mittelwertsatz** existiert $z \in (x_0, x)$ mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}'(x_0) &= \lim_{z \to x_0} \frac{f(z)(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{z \to x_0} f(z) \underbrace{=}_{\text{f ist stetig}} f(x_0)
\end{aligned}$$

□

1.136 Bemerkung.
$\widetilde{F}$ *ist eine spezielle Stammfunktion.*

1.137 Definition (Stammfunktion).
eine Funktion heißt ***Stammfunktion*** *zu* $f(x)$ *im Intervall* (a,b) *, wenn gilt :*

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (a,b)$$

1.138 Bemerkung.

$$\begin{aligned} F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) &\Rightarrow F_2'(x) - F_1'(x) = 0 \\ &\Rightarrow (F_2(x) - F_1(x))' = 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \big\} f_2(x) - f_1(x) = cconst \\ &\Rightarrow F_2(x) = F_1(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.139 Definition.
Die Mengen aller Stammfunktion $F(x)$ *zu* $f(x)$ *heißt* ***unbestimmtes Integral****.*

1.140 Bemerkung (unbestimmtes Integral).
Das unbestimmte Integral ist ***kein*** *Integral.*

1.27.3 Schreibweise

$$\int f(x)dx = \{F(x) | F'(x) = f(x)\}$$

bzw

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ falls } F'(x) = f(x)$$

1.27.4 Hauptsatze der Differenzial - und Integralrechnung 2

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und f stetig
Sei $F(x)$ eine Stammfunktion zu f , Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beweis.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{:=f(t)dt} =_1 \underbrace{\int_a^b f(t)dt}_{\widetilde{F}(b)} - \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{\widetilde{F}(a)}$$

$$\textbf{Note! } \widetilde{F}(x) = F(x) + c \quad : c \in \mathbb{R}$$

$$= (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

□

1.141 Bemerkung.

$$f \underbrace{\longrightarrow}_{ableiten} f'$$
$$f' \underbrace{\longrightarrow}_{integrieren} f$$
$$\int f'(x)dx = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

1.142 Beispiel.

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan(x) + x, \quad c \in \mathbb{R}$$

1.27.5 Integrationsregeln entstehen aus Ableitungsregeln

1. $$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) \Rightarrow \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

2. $$\int K \times f(x)dx = K \int f(x)dx$$

3. $$\left(\frac{1}{a} \times F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a} \times F'(ax+b) \times a = F'(ax+b)$$

4. $$\int F'(ax+b)dx = \frac{1}{a} \times F(ax+b) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

List of Theorems

List of Theorems