Technische Universität Dresden • Fakultät Informatik

Mathematische Methoden für Informatiker

Mitschrift zur Vorlesung Sommer Semester 2019

Bachelor of Science (B.Sc.)

Dozent: Prof. Dr. Ulrike Baumann
vorgelegt von

...

Mohamed Abdelshafi
m.abdelshafi@mail.de

Mahmoud Kiki
mahmoud.kiki@Mailbox.tu-dresden.de

...

Tag der Einreichung: 12. Juli 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wir schreiben hier die Vorlesungen von INF-120-1(Mathematische Methoden für Informatiker) mit. wenn Ihr Fragen habt oder Fehlern gefunden Sie können gerne uns eine E-mail schreiben oder Sie können einfach bei github eine Issue (link) erstellen. wir freuen uns wenn Sie mit uns mitschreiben möchten, oder helfen mit der Fehlerbehebung.

Mohamed Abdelshafi
Mahmoud Kiki

Kapitel 1

Folge und Reihen

1.1 Vorlesung 1 (02.04.2019)

Sieh der Zusatz aus der Vorlesung (Sätze , Beweisen)

1.1.1 Folge

1.1 Definition (Folgen)**.**
Ein folge ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \underbrace{\mathbf{M}}_{Menge} : \mathrm{n} \mapsto \underbrace{x_n}_{folgenglied}$$

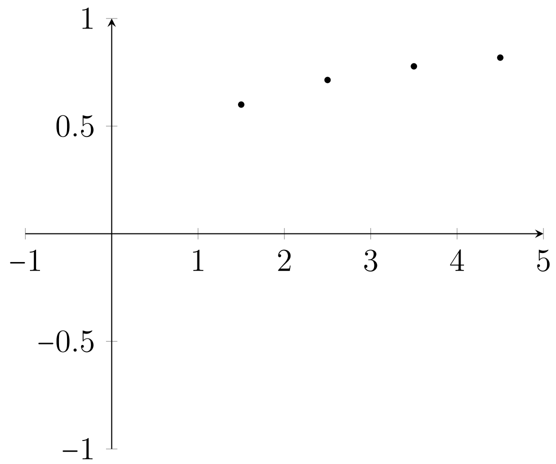
1.2 Bemerkung.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbb{R} \quad \textit{reelewert Folge} \\ \mathbf{M} &= \mathbb{C} \quad \textit{komplexwertig Folge} \\ \mathbf{M} &= \mathbb{R}^n \quad \textit{vertical Folge} \end{aligned}$$

Bezeichnung (x_n) mit $(x_n)=\frac{n}{n+1}$

Aufzählung der folglieder: 0 , $\frac{1}{2}$,$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, . . .

1.3 Bemerkung.
zuwerten wird $\mathbb{N}$ *durch* $\mathbb{N}$ *0,1 . . . erstellt.*



1.4 Beispiel.

1. *Konstante Folge* (x_n) *mit* $\quad x_n = a \in \mathbf{M}, a \ldots$
$$x_n = a \in \mathbf{M}$$
2. *Harmonische Folge* (x_n) *mit* $x_n = \frac{1}{n+1} \qquad n \geq 1$
3. *Geometrische folge* (x_n) *mit* $x_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}, \ldots$
4. *Fibonaccifolge* (x_n) *mit*
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)$$
5. *Fibonacci folgen* (x_n)
$$X_0 = 0$$
$$X_1 = 1$$
$$X_{n+1} = x_n + X_{n-1} \quad (n > 0)$$
6. *conway folge*
$$1, 11, 21, 1211, 111217, 312211 \ldots$$
7. *folge aller Primzahlen:*
$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

1.2 Rechnen mit Folgen

$$(M = \mathbb{R} \quad oder \quad M = \mathbb{C})$$
$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$$
$$K(x_n) := (Kx_n) \in \mathbb{R} \quad oder \quad \in \mathbb{C}$$

1.5 Bemerkung.
Die Folge bildet ein Vektorraum.

1.6 Definition (Beschränktheit)**.**

1. *Eine reellwertige Funktion ist in der Mathematik eine Funktion, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind.*

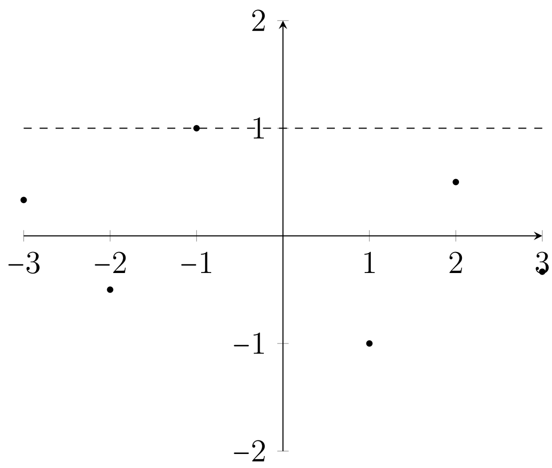
2. *Eine reellwertige heißt beschränkt wenn gilt*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+, \forall r \in \mathbb{N} : \underbrace{|x_n|}_{\textit{Betrag einer reellen oder komplexer Zahl}} \leqq r$$

1.7 Beispiel.

$$(x_n) \quad mit \quad x_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{5}, \ldots$$

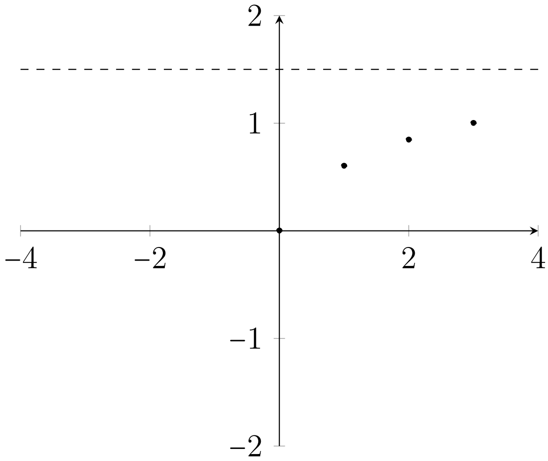


1.8 Bemerkung.
(x_n) *ist beschränkt mit* $r = 1$ *denn* $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leqq 1 \hookleftarrow r$

1.9 Beispiel.

$$(x_n) \; mit \; x_n = (-1)^n \quad \frac{1}{n} + 1 \quad \textit{beschränkt } r = 3/2$$

$$-3/2 \quad \leq x_n \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



1.10 Beispiel.
Standard:

Die folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ *ist beschränkt durch 3*

Zu zeigen: $-3 \leq x_n \leq 3$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k . b^{n.k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n.k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \frac{n(n-1)-(n-k-1))}{k!}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots$$

1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)

1.11 Definition (Monoton)**.**
Die Folge (x_n) *heißt monoton* $\left\{ \textit{wachsend fallend} \right\}$

$$wenn \quad gilt: \forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} x_n & \leq x_n + 1 \\ x_n & \geq X_{n+1} \end{cases}$$

man spricht von Streng monotonie wenn $\leqq$ *durch* $>$ *und* $\geqq$ *durch* $< \dots$

1.12 Bemerkung.

$$x_n \leq X_{n+1} \;\Leftrightarrow x_n - X_{n+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x_n}{X_{n+1}} \leq 1$$

1.13 Beispiel.

$$(x_n) \ mit \quad X_0 := 1 \quad , X_{n+1} := \sqrt{x_n + 6}$$

ist Streng monoton wachsend Beweis mit Vollständiger Induktion

Standard Bsp: $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ *ist streng monoton wachsend*

1.14 Bemerkung.

monoton	*ja*	*nein*
Beschränkkeit	$(\frac{1}{n})$	$(-1)^n$
nein	*(n)*	$(-1)^n$

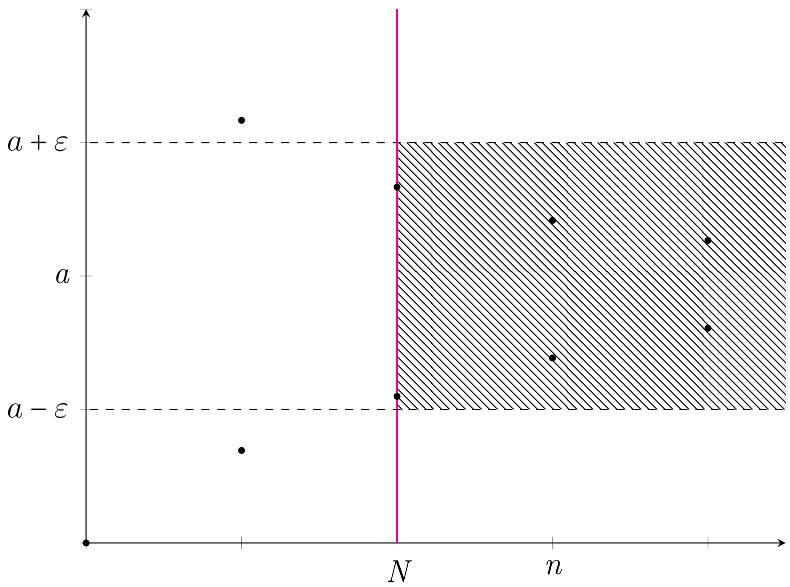
1.15 Definition (Konvergenz,Divergenz)**.**
(x_n) *heißt* ***Konvergenz*** *wenn* (x_n) *ein grenzwert hat.*
(x_n) *heißt* ***Divergenz*** *wenn sie keinen grenzwert hat.*

1.16 Definition (grenzwert)**.**
$a \in \mathbb{R}$ *heißt grenzwert von* (x_n)*, wenn gilt:*

$$\underbrace{\forall \epsilon > 0}_{beliebes\ klein} \qquad \underbrace{\exists \mathbf{N} \in \mathbb{N}}_{beliebes\ klein\ \Rightarrow \underbrace{|x_n - a| < \varepsilon}_{a-\varepsilon \leq x_n \leq a+\varepsilon}} \quad , \forall n \in \mathbb{N} : m \geq \mathbb{N}$$

$$Sei\ \varepsilon > 0; \varepsilon\ fest$$

$$alle\ folgliederx_n\ mit\ n\ \geq \mathbb{N} \curvearrowright$$



1.4 Vorlesung 2 (05.04.2019)

sieh den Zusatz aus der Vorlesung 2 an

ist die folge beschränkt , monoton ?

(x_n) konvergierend : $\iff \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \quad \in N \quad \forall n \in N$
$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

1.17 Satz. *(x_n) konvergierend : $\Rightarrow$ Der Grenzwert ist eindeutig beschränkt.*

1.18 Beweis.
Sei a eine Grenzwert von (x_n) , b eine Grenzwert von (x_n)
d.h sei $\epsilon > 0$,ϵ beliebig , ϵ fest

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a : |x_n - a| < \epsilon \tag{1.18.1}$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b : |x_n - b| < \epsilon \tag{1.18.2}$$

Sei max $\{N_a, N_b\} = N$ dann gilt :

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \tag{1.18.3}$$

und

$$|x_n - b| < \epsilon \Rightarrow |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \tag{1.18.4}$$

Annahme :- $a \neq b$, d.h $|a - b| \neq 0$

$$\begin{gathered} |a - b| = |a + 0 - b| \\ = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \\ also \quad |a - b| < 2\epsilon \end{gathered}$$

wähle Z.B

$$\epsilon = \frac{|a - b|}{3} \quad \text{dann gilt } : |a - b| < \frac{2\ |a - b|}{3}$$

$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3}$ *falls Aussage, Widerspruch also ist die Annahme falsch also gilt* $a = b$

1.19 Beispiel.
x_n *mit* $x_n = \frac{1}{n}$ *(harmonische Folge)*

1.20 Beweis.
Sei $\epsilon > 0, \epsilon belibig, \epsilon fest$ *gesucht :* N *mit* $n \geq N$
hat den Grenzwert 0

$$\Rightarrow |x_n - a| = |\frac{1}{n} = 0| = \frac{1}{n} < \epsilon \tag{1.20.1}$$

wähle N:= $\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$

1.21 Beispiel.
$\epsilon = \frac{1}{100}$ *, gesucht* N *mit* $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ *wähle* $N = 101$

1.22 Schreibweise.
x_n *hat den Grenzwert a Limes* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ x_n *geht gegen a für n gegen Unendlich.*

1.23 Definition (Nullfolge)**.**
x_n *heißt Nullfolge ,wenn* $\lim x_n = 0$ *gilt.*

1.24 Bemerkung.
Es ist leichter, die konvergente einer Folge zu beweisen, als den Grenzwert auszurechnen.

1.25 Beispiel.
$x_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{11-n}{9-n}\right)^9$
Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{-2}{3}$

1.26 Lemma.

$$\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n) \tag{1.26.1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{3}) + \left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \tag{1.26.2}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \tag{1.26.3}$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(\frac{1}{n}-1)}{n(\frac{9}{n}+1)}\right)^9 \tag{1.26.4}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n\to\infty}(\frac{11}{n})}{\lim_{n\to\infty}(\frac{9}{n}+1)}\right)^9 \tag{1.26.5}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{11}{n} - \lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n} + \lim_{n\to\infty} 1}\right)^9 \tag{1.26.6}$$

$$= \left(\frac{\lim_{n\to\infty} 11 \times \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) - 1}{\lim_{n\to\infty} 9 \times \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) + 1}\right)^9 \tag{1.26.7}$$

$$\frac{1}{3} + (-1)^9 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \tag{1.26.8}$$

1.27 Definition (Unendliche Grenzwert)**.**
Eine Folge (x_n) hat den unendliche Grenzwert ∞, wenn gilt :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \in N \quad \forall n \geq N : x_n > r$$

1.28 Schreibweise.
$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

1.29 Bemerkung.
∞ ist keine Grenzwerte und keine reelle Zahl.

1.30 Bemerkung.
Grenzwertsätze gelten nicht für uneigentliche Grenzwerte.

1.31 Bemerkung.
gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *dann schreibt man* $\lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty$

1.32 Beispiel.
x_n *mit* $x_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$, *q fest.*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & |q| = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ ex.nicht, & q \leq -1 \end{cases}$$

1.5 Konvergenzkriterien

(zum Beweis der Existenz eine Grenzwert, nicht zum berechnen von Grenzwert)

(1) x_n konvergent $\Rightarrow (x_n)$ beschränkt.

wenn (x_n) nicht beschränkt $\Rightarrow (x_n)$ nicht konvergent.

(2) Monotonie Kriterium: wenn (x_n) beschränkt ist können wir fragen ob (x_n) konvergent.

(x_n) beschränkt von Monotonie $\Rightarrow (x_n)$ konvergent.

1.33 Beispiel.
$\left((-1)^n \times \frac{1}{n}\right)$ *konvergent (Nullfolge) diese Folge ist beschränkt aber nicht Monoton*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

existiert. Diese ist beschränkt und monoton.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

existiert.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n}) = e^a$$

1.6 Vorlesung 3 (12.04.2019)

1.34 Beispiel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11+n}{9-n} \quad ? \quad x_n = \frac{11+n}{9-n} = \frac{n}{n}\frac{\frac{11}{n}+1}{\frac{9}{n}-1} \tag{1.34.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{11}{n}+1\right) = 1 \tag{1.34.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{n}-1\right) = -1 \tag{1.34.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = \frac{1}{-1} = -1 \tag{1.34.4}$$

1.35 Lemma (Quetschlemma). *Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n) = a$ und es gelte $x_n \leq z_n \leq y_n$ für fast alle"$n \in \mathbb{N}$*

Dann gilt für die Folge (Z_n) $\lim_{n\to\infty}(z_n) = a$

1.36 Beispiel.
Ist die Folge $(-1)^n\frac{1}{n})$ konvergent ?

$$-\frac{1}{n} \leq (-1)^n(\frac{1}{n}) \leq 1\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -(\frac{1}{n}) = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n\frac{1}{n} = 0$$

1.37 Beispiel.

$$x_n \leq= \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \frac{a^{a-1}}{n-1!} \tag{1.37.1}$$

denn $x_n = 0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq y_n$ *, gesucht!* $\underbrace{y_n}_{\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0}$ *für hinreichend großes n.*

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{(n-1)} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} \\ y_n &= (\frac{1}{2})^{n-k} \times \frac{a^k}{k!} \quad k \textit{ ist fest} \end{aligned} \tag{1.37.2}$$

Es gilt $\frac{a^n}{n!} \leq y_n$ *für hinreichend großes n und* $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{n-k} \times \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{Konst} \\ &= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{n} \times \underbrace{\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{-k}}_{\in\mathbb{R}} \times \underbrace{\lim_{n\to\infty} (\frac{a^k}{k!})}_{\in\mathbb{R}} \\ &= 0.(\frac{1}{2})^{-k} \times \frac{a^k}{k!} = 0 \end{aligned} \tag{1.37.3}$$

1.7 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:

man kann oft durch lösen Fixpunktgleichung"berechnen.
$x_0 \quad , x_{n+1} = ln(x_n)$
Folge, Falls (x_n) hinreichend ist, was gelten

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{n-2} = \dots = 4$$

1.38 Beispiel.

$$(x_n) \quad x_0 = \frac{7}{5} \quad , \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

Ü (x_n) *ist monoton fallend , beschränkt , konvergent .*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + 2) = \frac{1}{3}(\lim_{n\to\infty} (x_n))^2 + 2)$$

Fixpunktgleichung

$a = \frac{1}{3}(a^2 + 2)$, gesucht = a

$$3a = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Lösung: $a_1 = 2$ (keine Lösung), $a_2 = 1$

1.39 Beispiel.
(x_n) *mit* $(x_0) = c \in \mathbb{R}, c$ *fest* $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$
(1) (x_n) *beschränkt* ✓
(2) (x_n) *Monoton* ✓
Also (x_n) *konvergent*
Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. *Dann* $\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}_{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n) + \frac{c}{x_n} = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{c}) = a$

$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \Leftrightarrow a = \sqrt{c}$

1.40 Bemerkung.
Der Nachweis der konvergent der rekursiv definierte Folge darf nicht weggelassen werden, denn Z.B $x_0 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2$ *2 , 4 ,16 ,256 , ... divergent gegen +* ∞

Annahme: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}_{a} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n^2}_{a^2} \Rightarrow a \in \{0, 1\}$

1.8 Reihen :

1.41 Definition (Unendliche Reihen)**.**
Sei (a_n) *eine reellefolge (komplexwertig) Folge*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_a, a_1, \ldots, a_n,$$

n-k heißt Partialsumme. (S_n) *heißt unendliche Reihe.*
schriebweise : $(S_n)^{\infty} = bsw\ (S_n)$

$$\left(\sum_{l=0}^{n} a_l\right)$$

bzw

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right)$$

1.42 Bemerkung.
Reihen sind spezielle Folgen , alle konvergent oder divergent.

1.43 Definition (wert der Reihe)**.**
Für eine konvergente Reihen wird der Grenzwert auch wert der Reihe genannt.

1.44 Schreibweise.
: $\lim_{n\to\infty} S_n =$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

bzw

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1.45 Beispiel.
Teleskopreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \textit{in Grenzwert der Reihe ist}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{-1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3})(-\frac{1}{4})+) \cdots + (\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1$$

1.46 Beispiel.
geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *ist für*

$$|q| < 1$$

konvergent . wert der Reihe für $|q| < 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ *für* $|q| < 1$ *konvergent , werte der Reihe für*

$$|q| < 1 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \dots$$

$$\begin{aligned} S_n &= q^0 + q^1 + \cdots + q^n | * q \\ -qS_n &= q^1 + q^2 + \cdots + q^{n+1} \\ (1-q)S_n &= q^0 - q^{n+1} \\ S_n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}(1-q)^{n+1} \\ \Rightarrow lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{1}{1-q} \times \lim_{n\to\infty}((1-q)^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1-q}(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}) = \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

1.8.1 Rechnenregeln für Reihen

konvergent Reihe kann man addieren oder subtrahieren mit einem Skalar multiplizieren wie endliche Summen. *ABER:* *das gilt im Allgemein nicht für das Multiplizieren*

1.9 Vorlesung 4 (16.04.2019)

1.10 Reihen

hrefhttps://tu-dresden.de/mn/math/algebra/das-institut/beschaeftigte/antje-noack/ressourcen/dateien/v120-1/MathMethInf04Z.pdf?lang=enSieh der Zusatz

1.47 Beispiel.
Zur geometrischen Reihen
gesucht : A

$$2A = 1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 + \cdots + (\frac{1}{k})^2 + \ldots$$

$$= (\frac{1}{4})^0 + (\frac{1}{4})^1 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2^2})^3 + (\frac{1}{2^2})^k + \ldots$$

$$9 = \frac{1}{4} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 2A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

1.48 Beispiel.

$$\begin{aligned} 0,4\overline{3} = \frac{3}{4} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \ldots \\ \frac{4}{10} + \frac{3}{100}(\frac{1}{10})^0 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots \\ = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\ = \frac{4}{10} + \frac{1}{30} = \frac{12+1}{30} = \frac{13}{30} \end{aligned} \tag{1.48.1}$$

wenn $0,4\overline{3}$ *erlaubt wäre, dann,*

$$\frac{4}{10} + \frac{9}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

1.49 Beispiel.

$$\sum_{R=1}^{\infty}\frac{1}{K} \textit{ ist divergent ,denn } \lim_{\infty}\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{k} \textit{ ex. nicht}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{n}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\frac{1}{10}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{n}$$

$$1+\frac{1}{2}+\qquad\frac{1}{2}+\qquad\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\to\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$$

1.11 Allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \quad (\infty \quad \text{fest,} \quad \textit{mit} \quad \alpha\in\mathbb{R}) \qquad \text{falls} \quad \alpha\ge 1\to\text{konvergent}$$

$$\text{falls} \quad \alpha\le 1\to\text{Divergent}$$

1.50 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \qquad \textit{ist konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \qquad \textit{ist Divergent}$$

1.51 Beweis (Monotoniekriterium).
mit Monotoniekriterium für Folge

$$\textit{Reihe ist konvergent}\begin{cases}(1) & \sum_{K=1}^{n}\frac{1}{k^2} \quad \textit{ist monoton wachsend.}\\ (2) & \sum_{K=1}^{n}\frac{1}{k^2} \textit{ ist beschränkt.}\end{cases}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{8^2}$$

$$<1+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{2.\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{4^2}}_{4.\frac{1}{4^2}}+$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.1+\underbrace{\frac{1}{4}}_{(\frac{1}{2})^2}+\underbrace{\frac{1}{8}}_{(\frac{1}{2})^3}=1+\frac{1}{4}+\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{2}-1}$$

1.12 Expotentiale Reihe

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n =: e \quad \text{ist konvergent}$$

Konvergentkreterium für Reihen

für Folge

Kreterien für absolute konvergenz

Hauptkriterium

konvergent Reihen

1.13 Hauptkriterium

⋆ konvergent die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dann ist (a_k) Nullfolge.

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \underbrace{nullkonvergent}_{divergend}$$

oder

$$\lim_{k\to-\infty} a_k \quad ex.null$$

1.52 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{4k^2-1} \quad divergend, \quad aber \quad \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad divergend \quad und \ \frac{1}{k} \ Null\,folge$$

1.53 Beweis.

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_k \quad (konvergent) \Rightarrow \underbrace{(a_k) \quad Nullfolge}_{\lim_{k\to\infty} a_k = 0}$$

$$s_n = \sum_{K=0}^{n} a_k \quad , \quad s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \quad , \quad s_{n+1} = s_n + s_{n+1}$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

1.14 Kriterium für Alternierende Reihe

1.54 Beweis (Alternierende Reihe).

$$\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}\textit{ist konvergent}$$

$$\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

wobei (a_k) *einer Streng monoton fallend Nullfolge mit* $a_k \geqq 0$
$\Rightarrow$ *Die Reihe ist konvergent.*

$$Also \sum_{K=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} \quad \textit{ist konvergent.}$$

1.55 Definition (absolute Reihe).

$$\textit{Eine Reihe} \sum_{K=0}^{\infty} a_k \quad \textit{heißt absolute konvergent wenn} \sum_{K=0}^{\infty} |a_k| \textit{konvergent ist.}$$

1.56 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} \textit{ ist konvergent , aber nicht absolote konvergent}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2} \textit{ ist kovergend und } \textbf{absolute} \textit{ konvergent}$$

1.57 Satz.

$$\textit{Reihe} \sum_{K=0}^{\infty} a_k \quad \textit{absolut konvergent} \quad \Rightarrow \quad \textit{Reihe} \sum_{K=0}^{\infty} a_k \quad \textit{ist Konvergent}$$

1.58 Bemerkung.
absolute konvergente Reihe kann man multiplizieren wie endliche summen. (aber konvergente Reihen nicht !)

1.15 Quotienkriterium (QK):

Für absolute Konvergenz , wenn gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \quad \text{ist absolut konvergent} \\ > 1 \Rightarrow \quad \text{ist divergent)} \\ = 1 \Rightarrow \quad \text{Kriterium ist nicht anwendbar} \end{cases}$$

1.16 Wurzel Kriterium : WK

Die Reihe $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$ ist **absolute** konvergent genau wenn $\Leftrightarrow$:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} a_k & \text{ist absolut konvergent} \\ > 1 \Rightarrow & \text{ist divergent} \\ = 1 \Rightarrow & \text{Kriterium ist nicht anwendbar} \end{cases}$$

1.59 Beispiel (QK)**.**

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

$$d.h \quad < 1 \Rightarrow \quad \textit{Die Reihe ist absoulte Konvergent.}$$

1.60 Beispiel (WK)**.**

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k!}\right|}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{1}}{\sqrt[k]{k!}} =$$

$$\frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!}} = 0 < 1$$

Die Reihe is absolut konvergent.

1.17 Vorlesung 5 (26.04.2019)

Zusammenfassung :
Folgen / Reihen / Konvergenz ? / Grenzwert ?
Neu : Funktionen
Approximation von Funktionen
Potenzreihen
Taylorreihen
fourierreihen
Näherungsweise Berechnung

1.61 Definition.
Ein Punkt $x_0 \in V$ *heißt ein* ***Häufungspunkt von*** D *, falls es eine Folge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gibt mit:*

$$\forall n : x_n \in D \text{ , } x_n \neq x_0 \text{ und } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

1.62 Definition.
$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *heißt reelle Funktion in einer reellen veränderlichen*

1.63 Bemerkung (Definitionsbereich)**.**
Bild von f

$$f(D) = \{f(x) \quad | \quad x \in D\}$$

Graph von f

$$Graph(f) = \{(x \quad | \quad f(x)) \quad | \quad x \in D\}$$

1.17.1 Stetigkeit von Funktionen an einer Stelle a

1.64 Definition.
Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$
Sei x_n *ist eine* ***Folge*** f *heißt in a stetig , wenn gilt :*
$\forall (x_n) : x_n \in D$ *und* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$ *für alle Folgen* (x_n)
Die Folgenglieder sollen in Definitionsbereich liegen (Die in Definitionsbereich liegen können und den Grenzwert a haben)

* Ich weiß , dass $f(x_n)$ existiert ($f(x_n) \quad ex.$)
Folge $f(x_n) ex.$, soll einen Grenzwert besitzen.✓
$f(\lim_{n \to \infty} x_n)$✓✓

1.65 Bemerkung.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

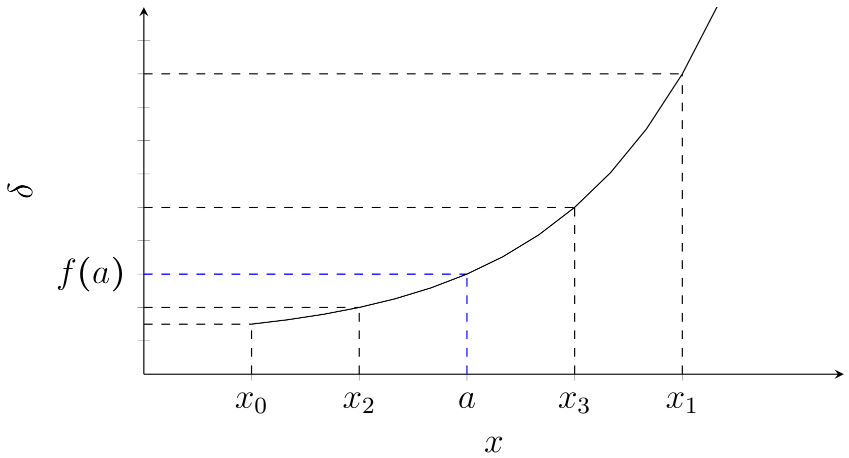
★ *Grenzwertbildung und Funktion Wertberechnung sind bei stetig Funktion in der Reihenfolge vertauschbar !*

1.66 Berechnung.

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

d.h *für jede Folge* x_n *, die gegen a konvergiert , konvergiert die Folge der Funktionierte gegen* $f(a)$.

1.67 Bemerkung.
f stetig in a $\Leftrightarrow$
1) $f(a)$ *und*
2) $lim_{x\to a} f(x)$ *ex. und*
3) Grenzwert = Funktionswert $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$



1.68 Beispiel.
1)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

Ist $f(x)$ *stetig in* $a = 1$ *?*

a) $f(1)$ *ex ? nein , d.h f ist in* $a = 1$ *nicht stetig*

b)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \quad ?$$

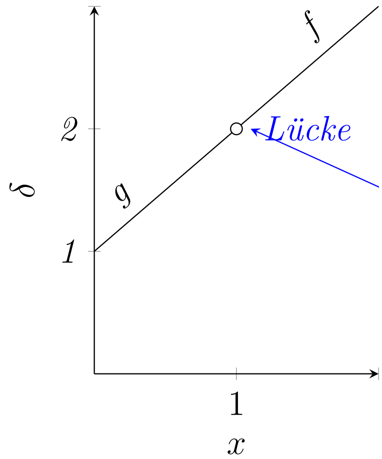
Sei (x_n) *eine beliebige Folge und* $x_n \in D(f)$ *und* $\lim_{x\to\infty}(x_n) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{n\to\infty}(x_n + 1) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} 1 = 1 + 1 = 2$$

d.h Grenzwert ex. (und es ist 2).

1.17.2 Verhalten bei Definitionslücken

Bei der Annäherung der Argument von links $(x < x_0)$ *bzw. von rechts* $(x > x_0)$ *an eine Definitionslücke* x_0 *sind folgende Fälle von besonderem Interesse:*
(1) ***hebbare Lücke bei*** $x_0 = 1$



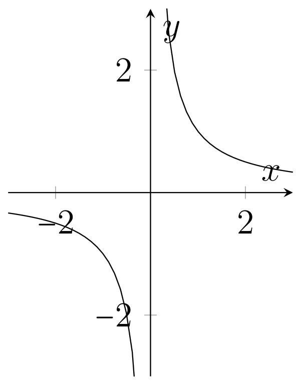
Es gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = a$$

Dann hat der Graph von f *an der Stelle* x_0 *lediglich ein Loch, das sich durch die Festsetzung* $f(x_0) = a$ *schließen lässt. Die Stelle* x_0 *heißt dann eine* ***herbbare Lücke*** *bzw. Man sagt ,* f *hat an der stelle 1 eine Lücke.*

(2)

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad a = 0$$



(i) betrachte ? $\lim_{x \to 0^-} f(x)$: d.h wir betrachten alle Folgen (x_n)

$$X_n \in D, X_n \leq 0 \lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$$

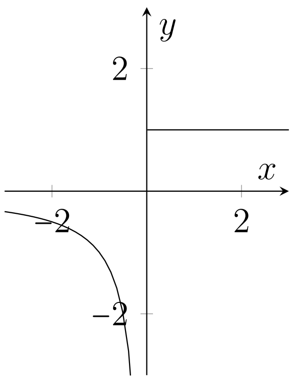
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to-\infty} x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to-\infty} x_n} = -\infty$$

$$\text{d.h} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \text{ex .nicht}$$

(ii) Betrachte $\lim\limits_{n\to+0} f(x_n)$, ex .nicht

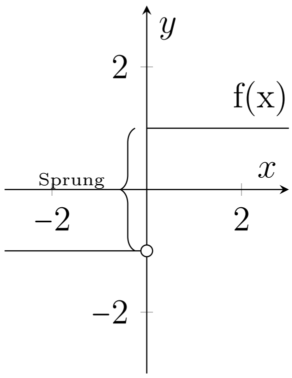
(3)



$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{array} \right\} a = 0 \quad , \quad f(0) = 1 \quad \text{ex.}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{ex. nicht}$$

(4) **Sprungstelle**



Es gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = a$$

und

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = b$$

mit $a \neq b$ Dann hat der Graph von f an der stelle x_0 eine **Sprungstelle**

1.69 Definition (sgn(x))**.**
*Die Vorzeichenfunktion oder **Signumfunktion** (von lateinisch signum ‚Zeichen') ist in der Mathematik eine Funktion, die einer reellen oder komplexen Zahl ihr Vorzeichen zuordnet.*
Die reelle Signumfunktion bildet von der Menge der reellen Zahlen in die Menge {-1,0,1} ab und wird in der Regel wie folgt definiert:

$$f(x) = \underbrace{sgn(x)}_{sprung} = \left\{ \begin{array}{ll} +1, & x \geq 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\neq \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{ex.} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{ex.} \end{array} \right\} \lim_{x \to 0} f(x) \quad \text{ex. nicht , O heißt Sprungstelle}$$

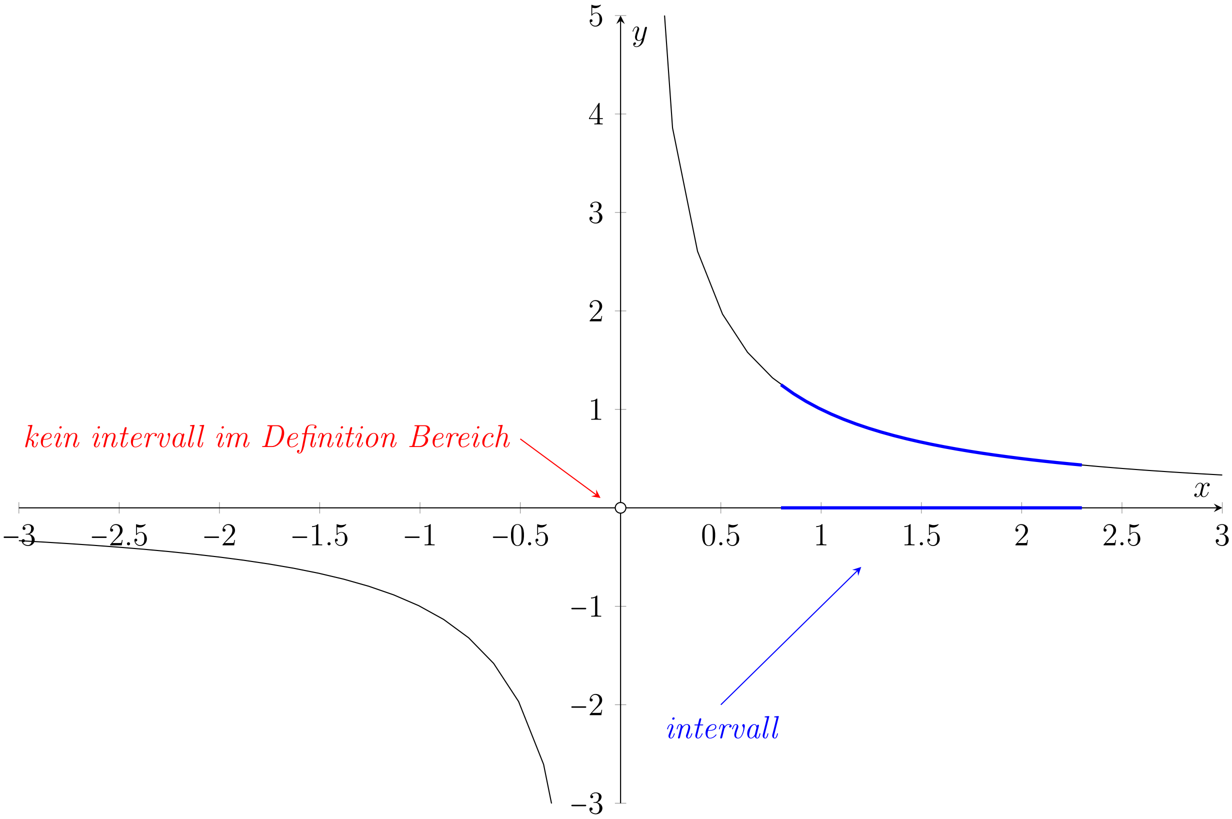
1.70 Definition.

$$f :\to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R} \quad \textit{heißt } \boldsymbol{stetig}\textit{ , wenn } f \textit{ für alle } a \in D \quad \boldsymbol{stetig}$$

1.71 Beispiel.
elementare Funktionen und deren Verfügungen sind stetig auf dem gesamten Definitionsbereich.
Z.B
Polynomfunktion , rationale Funktionen, Winkelfunktionen , Potenzfunktionen , Wurzelfunktionen , Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktion.

1.72 Beispiel.

$$f : D \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{x} = x^{-1} \textit{ist stetig auf dem gesamten Defintionsbereich } D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$



1.73 Beweis.
Sei $a \in D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *(d.h* $a \neq 0$*)*

$$f(a) = \frac{1}{a} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \tag{2}$$

$$\textit{Sei} \quad x_n \quad \textit{eine beliebige Folge und} \quad x_n \in \underbrace{D}_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

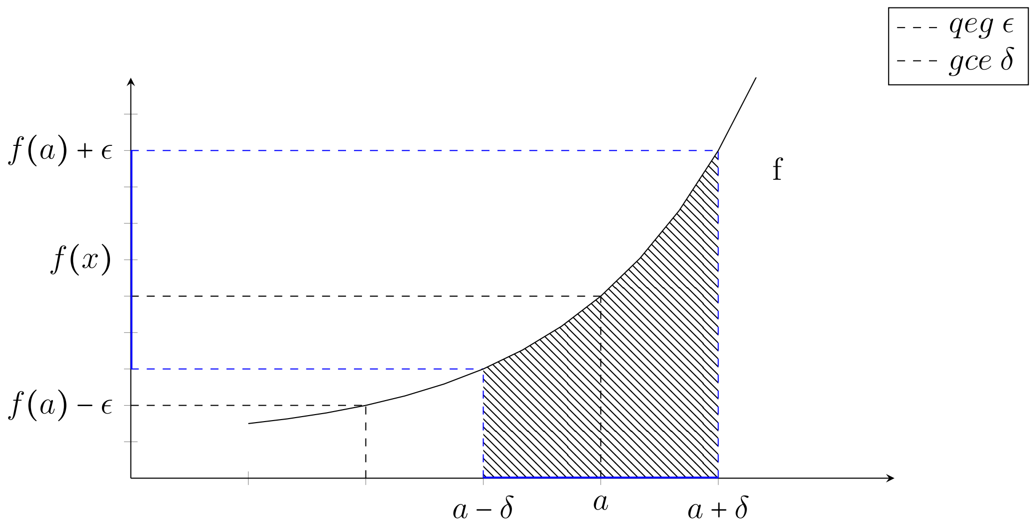
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_1} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_2} \\ &= \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \quad \textit{ex.} \end{aligned}$$

1.17.3 Rechnenregln für Funktionen (GWS anwenden)

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\infty} g(x), \text{ wo bei } g(x) \neq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} (f(n) \pm g(n)) = \lim_{n\to\infty} f(n) \pm \lim_{n\to\infty} g(n)$$

1.74 Satz.

$$f : D \Rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R} \textit{ ist in } a \in D \textit{ Stetig } \Leftrightarrow \forall_\epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{1.74.1}$$



1.18 Vorlesung 6 (30.04.2019)

Sieh der Zusatz (Nachrichtenquelle , Informationsmaß I)

$$|x-a|<\delta$$

$$|x-a| = \begin{cases} x-a,\ x-a \geq 0 \\ -(x-a),\ x-a<0 \end{cases} = \begin{cases} x-a, x \geq \\ a-x, x<a \end{cases} \begin{cases} x \leq a : x-a<\delta \Rightarrow x<a+\delta \\ x<a : a-x<\delta \Rightarrow a-\delta<x \end{cases} \Rightarrow \tag{1.74.2}$$

$$\begin{cases} a \leq x < a+\delta \\ a+\delta < x < a \end{cases} \tag{1.74.3}$$

1.18.1 Ergebnis

$|x-a|<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$
$\Leftrightarrow x \in (a-\delta, a+d)$ offenes Intervall
$|x-a|<\delta$

x liegt in der δ-Umgebung von a

$$|f(x)-f(a)|<\epsilon \Leftrightarrow f(x) \text{ liegt in der } \epsilon\text{-umgebung con} f(a)$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)\ \epsilon>o$$

$$I(\frac{1}{e}) = I(e^-1) = 1.k \quad \text{rell} I(e^{-n}) = I(\underbrace{e^{-1}\dots e^{-1}}_{n}) = I(e^{-1})+\dots+I(e^{-1}) = k.n \tag{1.74.4}$$

$$\frac{n}{m} \in Q : I(e^{-\frac{n}{n}}) = k.\frac{n}{m}, \text{ denn} \tag{1.74.5}$$

$$kn = I(e^{-n}) = I(e^{-\frac{n}{m}.m}) = \underbrace{I(e^{-\frac{n}{m}}\dots e^{-\frac{n}{m}})}_{m}+\dots+I(e^{-\frac{n}{m}}) = I(e-\frac{n}{m})+\dots+I(e^{-\frac{n}{m}}) \tag{1.74.6}$$

$$r \in \mathbb{R}_+ : I(e^{-r}) = ? \tag{1.74.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{q_n}_{\in\mathbb{Q}_+} = r$$

$$I(e^{-r}) = I(e^{-\lim\limits_{n\to\infty}(q_n)}) = I(e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{q}{n})}) \overset{e\ stetig}{\overset{\downarrow}{=}} I(\lim_{n\to\infty} e^{-q_n}) \overset{I\ stetig}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{n\to\infty} I(e^{-\frac{q}{n}}) = \lim_{n\to\infty} k.q_n = \overbrace{k.\underbrace{\lim_{n\to\infty} q_n}_{r}}^{k.r}$$

$$I(\frac{1}{e}) = I(e^{-1}) = \frac{1}{k}\text{rell}$$
$$I(p) = I(e^{\ln p}) = \underbrace{k}_{>0}(-\ln p) = \underbrace{-k}_{<0}\ln p$$

1.75 Beispiel.
$D(x)= \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} & (rational) \\ 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} & (irrational) \end{cases}$

stetig für welche a?
1. Fall : a rational
2. Fall : a irrational

a rational: a fest
sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *, beliebig* $\exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |D(x) - D(a)| < \frac{1}{2}$ *Sei* δ *beliebig,* δ *¿ 0, x irrational , fest*
$|x - a| < d \Rightarrow |0 - 1| = |11 = 1 < \frac{1}{2}$, *Widerspruch*
$\Rightarrow$ *D ist nicht stetig, für jede* $a \in \mathbb{R}$
Sei $\delta > 0$ *, beliebig, x rational , fest* $|x - a| < \delta \Rightarrow |\underbrace{D(x)}_{1} - \underbrace{D(a)}_{0}| < \frac{1}{2} = \varepsilon \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$
Widerspruch
$\Rightarrow$ *D ist nicht stetig für jede* $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

1.76 Satz. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *stetig f besetzt in [a,b] ein globale Maximum und ein globales Minimum*

1.77 Bemerkung.
Beide (unklar!)Veränderung sind wichtig

1.78 Bemerkung (a,k)**.**
$= x \in \mathbb{R}$ — $a \leq x \leq b$

1.18.2 Zwischenwertsatz

1.79 Satz (ZWS)**.** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig ,* $\frac{x_m}{x_M}$ *eine globale Minimale stelle eine globale Maximalastelle*
Sei $\hat{y} \in [f(x_m), f(x_M) :$ *Dann existiert* $\hat{x} \in$ *[a,b] mit* $\hat{y} = f(\hat{x})$

1.80 Bemerkung.
Jeder Zwischenwert wird als Funktionswert angenommen

1.81 Satz (Nullstellen)**.** *Sei f :[a,b]* $\to \mathbb{R}$ *stetig,* $f(a) \times f(b) < 0$ *Dann beliebig f in [a,b] eine Nullstelle* x_0 *, d.h.* $\exists x_0 \in$ *[a,b] :* $f(x_0) = 0$

Beweis. $f(a) < 0$ und $f(x) > 0$ (analog für $f(a) > 0, f(b) < 0$)

$(\frac{a_1+b_1}{2}) = \begin{cases} 0, \frac{a_1+b_1}{2} \text{ ist die gesamte Nullstelle} \\ < 0\,, a_2 = \frac{a1+a2}{2}, b2 = b1 \\ > 0\,, a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \end{cases}$

$$\text{usw. } \frac{a_2 + b_2}{2} \text{berechnen}$$

$$f(..) \begin{cases} = 0 \\ < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Betrachte (a_n)

Stetigmax — beschränkt $\Rightarrow konvergent$

sei $\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n =: c}_{ex.}$

sei $\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n =: c}_{ex.}$

$a \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1 \leqq b$ ex. $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a-b|}{2^{n-1}} \\ &= |a-b| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= |a-b|.0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c$$

Betrachte (b_n)

Stetigmax — beschränkt $\Rightarrow konvergent$

Falls keine Nullstelle beim bilden von a_n, b_n gefunden wurden

$$\left.\begin{aligned} f(c) &= f(\lim_{n\to\infty} a_n) \overset{\substack{fstetig \\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geqq 0 \\ &= \\ f(c) &= f(\lim_{n\to\infty} b_n) \overset{\substack{fstetig \\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leqq 0 \end{aligned}\right\} f(c) = 0 \qquad \square$$

1.19 Vorlesung 7 (03.05.2019)

1.19.1 Wiederholung:Grenzwert von Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \notin D$$
$$\underbrace{\lim_{x\to a}}_{x\neq a} f(x) = r \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall (x_n) \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ und } x_n \in D$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = r$$

1.82 Beispiel.

GWS nicht anwendbar $\lim_{x\to 0} \overbrace{x \sin x}^{f(x)} = \lim_{x\to 0} x. \quad \lim_{x\to 0} \sin x = 0.0 = 0$

1.83 Bemerkung.
GWS nicht anwendbar $\underbrace{\lim_{x\to 0}(x \ \sin\frac{1}{x}}_{f(x)} \underbrace{\lim_{x\to 0}}_{0})$, $\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x})$

1.84 Definition.
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$
$x_0 \in (a,b) \Leftrightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $a < s_0 < b$
f *ist in* x_0 *differenzierbar* $:\Leftrightarrow$

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ \textbf{\textit{existiert}} \ (f'(x_0) \in \mathbb{R})$$

Falls der Grenzwert existiert , nennt man $f'(x_0)$ *die erste Ableitung von* f *in* x_0*. Existiert* $f'(x_0)$ *für alle* $x_0 \in (a,b)$ *, dann nennt man* $f' : (a,b) \to \mathbb{R} \longmapsto f'(x_0)$ *die erste Ableitung von* f*.*

1.85 Beispiel.
$f(x) = \frac{1}{x}$ *auf* $(0,r)$ $r \in \mathbb{R}_{>0}$ *,*r *fest und* $x_0 \in (0,r)$*, ges:* $f'(x_0)$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) f'(x_0) &= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) \frac{\frac{x_0 - x}{x - x_0}}{x x_0} \\
&= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) \frac{(x_0 - x)}{(x x_0)(x - x_0)} \\
&= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) \underbrace{(-\frac{1}{x_0})}_{konst.} \frac{1}{x} \\
&= -\frac{1}{x_0} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) \frac{1}{x} \\
\overset{\frac{1}{x}\, stetig F.}{\overset{\downarrow}{=}} \quad & -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

$$f' : (0,r) \to \mathbb{R} : x \longmapsto -\frac{1}{x^2} \textit{in die erste Ableitung von } f(x) = \frac{1}{x}$$

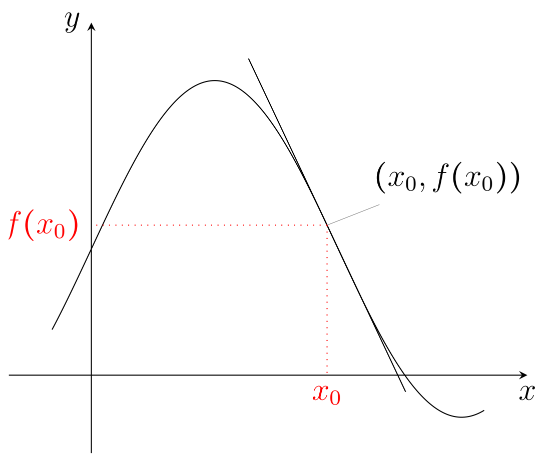
1.19.2 Ableitung einer Funktion

Tafelwerk

f	f'
x^n	nx^{n-1}
$\downarrow n = -1$	$\downarrow$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

1.86 Satz (Differenzeierbarkit)**.** *Es sei I ein offenes Intervall und $x_0 \in I$ Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt an der stelle x_0* ***differenzierbar*** *$\Leftrightarrow$ f in x_0 stetig ist*

Beweis. Sei f in x_0 differenzierbar $\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ex. ..usw.
Link : **Sieh Zusatz aus der Vorlesung 7 (03.05) Seite 2** □



Die Linie repräsentiert die Tangente (T) an den Grenzwert von $f(x_0)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$

$$(x) = \frac{t(x) - t(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1.19.3 Tangente Gleichung

$$T : t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1.87 Bemerkung.
$f(x)$ gibt die Ableitung der Tangente an den Grenzwert der Funktion f im Punkt $x_0, f(x_0)$ an.

1.20 Berechnen an $f'(x)$ Ableitungsregeln:-

Sieh die Zusatz Zu den Ableitungsregeln

1.20.1 Linearität:-

Sei $\underbrace{f(x) \text{ und } f(g)}_{h'(x)}$ gegeben sind , dann wie sieht die Ableitung von $h'(x)$?

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$\underbrace{rf(x)'}_{h(x)} = \underbrace{r}_{\in\mathbb{R}} f'(x)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

1.20.2 Produktregel:-

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

1.20.3 kettenregel:-

$$\underbrace{(f \circ g)'(x)}_{f(g(x))'} = f'(g(x)).g'(x)$$

1.20.4 Quotientenregeln:-

In Tafelwerk :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Herleitung :

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

1.88 Bemerkung (Tafelwerk).

$$(sin(x))' = cos(x)$$
$$(cos(x))' = -sin(x)$$

1.89 Beispiel.

$$\begin{aligned}(tan(x))' &= \left(\frac{sin(x)}{cos(x)}\right)' \\ &= \frac{cos(x)cos(x) - sin(x)(-sin(x))}{(cos(x))^2} \\ &= \frac{(cos(x))^2 + (sin(x))^2}{(cos(x))^2} \\ &= \frac{1}{(cos(x))^2} \\ &= 1 + (tan(x))^2\end{aligned}$$

1.20.5 Ableitung der Umkehrfunktion f^-1 zu f

1.90 Definition.
Ist $y = f(x)$ eine umkehrbare differenzierbare Funktion, dann ist die Umkehrfunktion $x = g(y)$ differenzierbar und es gilt: $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ oder $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ für $f'(x) \neq 0$. Überlicherweise verraucht man die Variablen x, y and schreibt $y = g(x)$ und $y' = g'(x)$.

1.91 Beispiel.
$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$

Beweis. Der Beweis ist einfach. Man geht wider von der Definition der Ableitung aus:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Nutzt man die Potenzregln $e^{x+h} = e^x.e^h$ so ergibt sich :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^x.e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

und weil $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ dann Also $f'(e^x) = e^x$ □

1.92 Bemerkung.

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = &\quad identisch \\ e^{ln(x)} = x &\quad |Abb \\ e^{ln(x)}.(ln(x))' = 1 & \\ \Rightarrow ln(x)' = \frac{1}{e^{lnx}} = \frac{1}{x} & \end{aligned}$$

1.93 Beispiel.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f^{-1}(x) &= lnx \\ (f^{-1}(x))' = (lnx) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

1.94 Beispiel.

$$\begin{gathered} f(x) = tan(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + (tan(x))^2 \\ f^{-1}(x) = arctan(x) = x| \quad Abl. \\ \Rightarrow 1 + (\underbrace{tan(arctanx)}_{x})^2 (arctanx)' = 1 \Rightarrow (arctanx)' = \frac{1}{1+x^2} \end{gathered}$$

1.21 Vorlesung 8 (10.05.2019)

1.95 Definition (Potenzreihen).
Eine Reihe $\sum_{K=0}^{\infty} a_k(x-X_0)^k$ *heißt Potenzreihe Dabei gilt* $a_0, a_1 \dots \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$, x *ist eine reelle veränderlich* x_0 *heißt Mittelpunkt der Potenzreihe.*

1.96 Bemerkung.
$(f_k(x))_{k=0}^{\infty}$ *mit* $f_k(x) = a_k(x-x_0)^k$. *Folge von Funktionen* $f_k(x)$

$$\begin{aligned}
&k = 0, f_0(x) = a_0(x-x_0)^0 = a_0 \times 1 = a_0 \\
&k = 1, f_1(x) = a_1(x-x_0)^1 \\
&k = 2, f_2(x) = a_2(x-x_0)^2
\end{aligned}$$

$\left(\sum_{K=0}^{n} f_n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ *Folge von Partielle Summen , Reihe* $\sum_{K=0}^{\infty} f_k(x)$

$$\begin{gathered}
f_0(x) \\
f_0(x) + f_1(x) \\
f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)
\end{gathered}$$

1.97 Bemerkung.
wir fragen nicht nach der Konvergenz dieser Folge sondern für welche x *ist diese Folge konvergent*

1.98 Beispiel.

$$\sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k}(x-0)^k$$

für welche $x \in \mathbb{R}$ *konvergent ?*
Wurzelkriterium für absolute konvergent :

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\textit{die potentzreihe}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{2}{3} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} |x| \\
&= \frac{2}{3}|x| . \frac{1}{1} = \frac{2}{3}|x| < 1 \\
\textit{PR abs. konv.} \quad &\Leftrightarrow |x| < \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Wurzelkriterium:

$$\frac{2}{3}|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \textit{PR div}$$

$x = \frac{-3}{2}$ *einsetzen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k} \left(\frac{-3}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ \textit{div}$$

$x = \frac{3}{2}$ *einsetzen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{-2}{3}\Big)^k \frac{1}{k} \Big(\frac{3}{2}\Big)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ kon.}$$

1.99 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{-2}{3})^k \frac{1}{k} (x-7)^k \text{ ist für } x \in (7 - \frac{3}{2}, 7 + \frac{3}{2}) \text{ abs konvergent}$$

1.100 Definition (Konvergenz von Potenzreihen).
Es Sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

eine Potenzreihe dann existiert eine Zahl $r \in \mathbb{R} \geq 0$ *oder* $x = \infty$ *, so dass die Potenzreihe für alle x mit* $|x - x_0| \leq r$ *oder* $x \in \mathbb{R}$ *absolut konvergent ist. Dieser (r) heißt* ***Konvergenzradius*** *der Potenzreihe mit den Eigenschaften :*

$$|x - x_0| < r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \; \textbf{\textit{absolut Konvergent}}$$

$$|x - x_0| > r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \; \textbf{\textit{divergent}}$$

1.101 Bemerkung.
Der konvergenzradius r ist unabhängig von Mittelpunkt X_0

1.102 Bemerkung.
Jede Potenzreihe ist für $x = x_0$ *abs . konvergent , denn* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$
$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = 0$
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *eine Reihe mit konvergenzradius r Dann kann eine Funktion f definiert als :*

$$f : (x_0 - r \quad , \quad x_0 + r) \to \mathbb{R} : \underbrace{x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k}_{\text{Grenzwert der PR}}$$

1.103 Bemerkung.
wegen der abs Konvergenz ist diese Funktion f - Stetig auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ *bsw.* $\mathbb{R}$
- beliebig oft differenzierbar.

1.104 Bemerkung.
Analog kann man die potenzierte über $\mathbb{C}$ *definieren. Z.B*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (z \in \mathbb{C})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z - 0)^k$$

ist für $z \in \mathbb{C}$ abs. konvergent. Quotienten Kriterium :

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{z^k+1}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{z^{k+1\times k!}}{z^k(k+1)!}\right| = \lim\frac{|z|}{k+1} = \underbrace{|z|\times\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}}_{0} < 0$$

$$exp : \mathbb{C}\to\mathbb{C}, Z \longmapsto \underbrace{\textstyle\sum_{k=0^\infty}\frac{z^k}{k!}}_{\underbrace{exp(z)}_{e^z}}$$

$Z = exp(i\varphi) = e^{i\varphi}$.

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\varphi)^k}{k!} = \frac{(i\varphi)^0}{0!}+\frac{(i\varphi)^1}{1!}+\frac{(i\varphi)^2}{2!}+\frac{(i\varphi)^3}{3!}+\frac{(i\varphi)^4}{4!}+\frac{(i\varphi)^5}{5!} \\ &= 1+i\frac{\varphi^1}{1!}-\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{\varphi^3}{3!}-\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^5}{5!}\dots \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}}_{cos(\varphi)} + i\times\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{sin(\varphi)} \end{aligned}$$

1. **Approximation stetiger Funktionen** $f(x)$ durch **Taylorpolynom** $p_n(x)$:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0)^1$$

= $t(x)$ Tangente an den Graph von $f(x)$ in Punkt $(x_0, f(x_0) = p_1(x)$

lineare Approximation $(n = 1)$ Linearisierung
fehlende Skizze !!!

1.105 Bemerkung.

$$f(x_0) = p_1(x_0)$$
$$f'(x_0) = p_1'(x_0)$$

2. **Approximation von f(x)** durch Taylor-Polynome $p_n(x)$ von Grad ≤ n in der Umgebung x_0

$$\underbrace{f(x) \approx p_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3\dots\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{p_n(x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}$$

$$f(x_0) = f^0(x_0) = \frac{f^0(x_0)}{0!}$$

1.106 Bemerkung.
sieh den Zusatz an (Das Taylor-Polynom eines Polynoms $p(x)$ stimmt mit $p(x)$ uberein).
Taylor-Polynom $P_n(x)$ von Polynomfunktionen $f(x)$ von Grad n stimmen mit $f(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x} \approx \dots \text{ an der stelle } x_0 = 0 \\
f'(x) &= ((1+x)^{-1})' = \frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2} \\
f''(x) &= 1 \times 2 \frac{1}{(1+x)^3} = 1 \times 2(1+x)^{-3} \\
f'''(x) &= 1 \times 2 \times 3 \frac{1}{(1+x)^4} = 1 \times 2 \times 3(1+x)^{-4} \text{ usw.} \\
f^k(x) &= (-1)^k.k! \frac{1}{1+x}^k \text{ beweis durch vollst. Induktion} \\
f^k(0) &= (-1)^k k! \\
p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \\
f(x) &= \frac{1}{1+x} = \underbrace{(-1)^0 x^0}_{1} - x^1 + x^2 - x^3 \dots
\end{aligned}
$$

$\{-x^n, n \text{ ungerade }\}$
$\{x^n, n \text{ gerade }\}$

1.22 Vorlesung 9 (14.05.2019)

1.107 Definition (Taylorscher Satz).
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^n - Funktion , $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in]a, b[$.
Dann gibt es genau ein Polynom $T_n(x; x_0)$ höchstens n-ten Grades mit Approximationsgüte

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o((x - x_0)^n),$$

*das so genannte **Taylor Polynom n-ten Gerades** zum Entwicklungspunkt x_0*

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^(k)(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

*Ist f eine $C^{(n+1)}$- Funktion, so gilt für den Fehler die so genannte **Restgliedformel nach Lagrange***

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^(k)(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0), \quad a \le x \le b$$

1.108 Beispiel.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$ gesucht

1.22.1 Taylor-Polynom $P_n(x)$ von $f(x)$

Aufgeben mit Lösungen

$$\begin{array}{rrr} f(x) = x^2 - 1 & f(0) = 1 & f(1) = 0 \\ f'(x) = 2x & f'(0) = 0 & f'(1) = 2 \\ f''(x) = 2 & f''(0) = 2 & f''(1) = 2 \\ f'''(x) = 0 & f'''(0) = 0 & f'''(1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \underbrace{f(0) + f'(0)(x - 0)}_{t(x)\text{ lineare Approximation}} + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x - 0)^3 + \dots \\ &= -1 + 0x + \frac{2}{2!}x^2 + 0 = -1 + x^2 = f(x) \end{aligned}$$

Das Polynom ist bei der Entwicklung zu einem Taylor-Polynom zum selben Polynom zurückgekommen

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(1) + f'(1)(x - 1) + \dots \\ &= 0 + 2(x - 1) + \frac{2}{2!}(x - 1)^2 + 0 \\ &= 2x - 2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \end{aligned}$$

1.109 Beispiel.
gegeben : $f(x) = \frac{e^x}{cos(x)}$ *gesucht :* $p_2(x)$ *für* $x_0 = 0$
Methode des Impliziten Differenzieren

$$f(x)cos(x) + f(x)(-sin(x)) = e^x \quad | \quad abl.$$
$$f'(x)cos(x) + f(x)(-sin(x)) = e^x \quad | \quad abl.$$
$$f''(x)cos(x) + f'(x)(-sin(x)) + f' - (x)(-sin(x)) + f(x)(-cos(x)) = e^x$$
$$f(0)cos(0) = e^0 \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(0) \times 1 + f(0) \times 0 = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(0) \times 1 + f(0) \times (-1) = 1 \Rightarrow f''(0) = 2$$
$$p_2(x) = 1 + 1x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + x + x^2$$
$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

1.110 Beispiel.
$f^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$
Induktionsanfang

$$f^0(x) = f(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^0 \frac{0!}{(x+1)^{0+1}} = 1\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} w.A$$

Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung
Es gelte $f^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$ *für* $k \in \mathbb{N}$
Induktionsbehauptung *: Dann gilt*

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k+1)} \frac{(k+1)!}{(x+1)^{(k+2)}}$$

Induktionsbeweis
$(\ldots\ldots)$

$$\begin{aligned} f^{(f+1)}(x) = (f^x(x))' &= \Big((-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{(k+1)}}\Big)' \\ &= (-1)^k k!(x+1)^{-(k+1)} \\ &= (-1)^k k!(-(k+1)(x+1))^{-(k+^2)} \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)!\frac{1}{(x+1)^{t+2}} \Rightarrow \text{ Ind Beh . ist dann bewiesen.} \end{aligned}$$

Die behauptung gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

1.111 Beispiel.
$f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$p_1(x) = 1 - x$$
$$p_2(x) = 1 - x + x^2$$
$$p_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3$$

1.112 Bemerkung.
Bei : $p_2(x)$ *wird der Fehler für große werte von* x *größer der Fehler bei* $p_1(x), p_2(x)$

1.22.2 Taylor-Formel:

$$F(x) = p_n(x) + \underbrace{R_n(x,x_0)}_{\text{=n-tes Restglied}} \quad R_n(x,x_0)\text{Fehler bei der Approximation.}$$

1.113 Satz. *Darstellung von $R_n(x,x_0)$ nach Lagrange Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ und stetig differenzierbar Funktion und $x_0 \in (a,b)$ Dann gilt : $f(x) = p_n(x) + R_n(x_1,x_0)$ und $\forall x \in (a,b) \exists z \in \mathbb{R}$ zwischen x und x_0 :*

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)})$$

1.114 Beispiel.
$f(x) = e^x$, $x = 0$

$$f^k(x) = e^x$$
$$f^k(0) = 1 \Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^k(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
$$f(x) = p_n(x) + R_n(x,0) \text{ und } R_n(x,0) = \frac{e^z}{(n+1)!}y^{n+1} \quad z \in (x,0)$$
$$\text{wir betrachten } f(x) = e^x \text{ für } |x| \le 1$$
$$\left|R_n(x,0)\right| = |\frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}| \le \frac{e^1}{(n+1)!} \le 10^{-2} \text{ für } n = 5$$

1.22.3 Näherungsformel für e^x

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \text{ für } x \le 1$$

1.22.4 Taylor Entwicklung der Exponentialfunktion:

wegen $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ erhält man die folgende Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion $exp(x) = e^x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$
$$R_n(x) = \frac{e^k}{n+1}x^{n+1}, \quad k = rx, \quad 0 < r < 1$$

Man erkennt dass für jedes (feste) $x \in \mathbb{R}$ gilt :

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

und damit:

$$exp(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1.115 Definition.
Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar und $x_0\in(a,b)$
Die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
heißt ***Taylor Reihe*** *von f an der stelle x_0*

1.116 Bemerkung.
(1) Nicht für jede Funktion $f(x)$ ist dir ***Taylor-Reihe konvergent***
(2) Ist die Taylor-Reihe konvergent , dann muss der Grenzwert .... die Funktion f sein.
(3) Ist die Taylor-reihe konvergent gegen f , d.h
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
, heißt die Funktion f ***reell analytisch***

1.117 Beispiel.
$$f(x)=\frac{1}{x+1}\ \textit{mit } x\in(-1,1)\ \textit{ist reell analytisch}$$
Taylor-reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ hat konvergenzradius 1(...) und Mittelpunkt 0

1.118 Satz. *Sei $|x|\le 1$ Dann gilt: $f(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ ist die Taylor-reihe Darstellung von $f(x)$*

1.22.5 Rechnen mit Potenzreihen:

Sieh der Zusatz (Rechnen mit Potenzreihen)
Es Sei
$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k := a(x), b(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k$$
mit konvergenzradius r_1 für $a(x)$, r_2 für b(x) sei r := min $\{r_1\ ,\ r_2\ \}$
Dann gilt :

$$a(x)\pm b(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(x-x_0)^k \text{ für } x\in(x_0-r,x_0+r)$$
$$C\times a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c.a_k(x-x_0)^k \text{ für } x\in(x_0-r,x_0+r)c\in\mathbb{R}$$
$$a(x).b(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_0b_k+a_1b_{k-1}+\dot{+}\cdots+a_kb_0)(x-x_0)^k$$

$\frac{1}{b(x)}$ für $b(x)\ne 0$ kann mit der Methode unbestimmten Koeffizienten.

1.23 Vorlesung 10 17.05.2019

1.24 Spezielle Ableitungen

1.24.1 Einleitung

Für viele Funktionen kann die Ableitung nicht mit Hilfe einfacher Ableitungsregel bestimmt werden. Daher befindet sich an dieser Stelle den wichtigsten Funktionen und ihren Ableitungen

$$f(x) = x^x \quad x > 0$$

$$ln(f(x)) = \underbrace{lnx^x}_{x\,lnx} \Rightarrow \frac{1}{p(x)} f'(x) = 1 \times ln\ x + \underbrace{x\ \frac{1}{x}}_{1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{x^x}_{f(x)} (ln\ x + 1) \text{ logarithmisches Differenzieren}$$

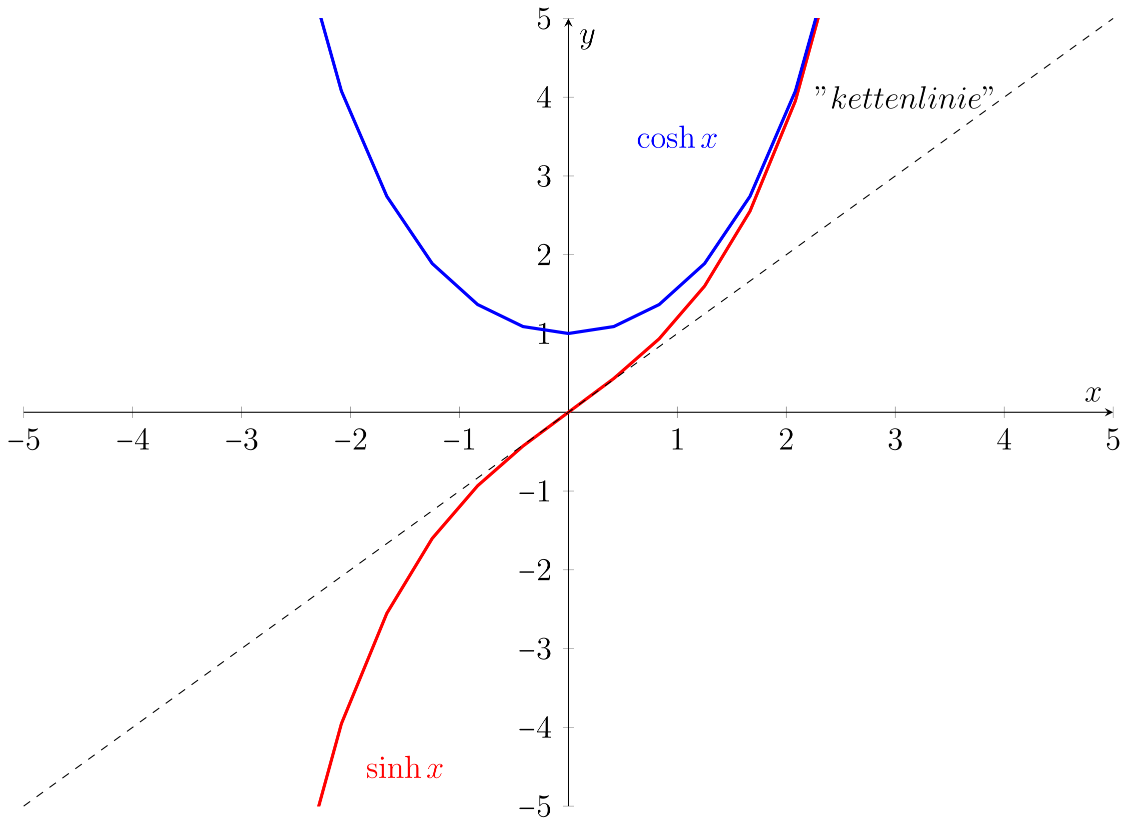
$$f(x) = x^x = e^{lnx^x} = e^{x\ lnx} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{e^{x\ lnx}}_{x^x} (x\ lnx)' = x^x(lnx + 1)$$

$$(\sinh x)' = \cos hx$$

$$(\cosh x)' = -\sin hx$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ Kosinus Hyperbolicus}$$

$$\sinh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



1.24.2 Taylor - Entwicklung der Kosinus hyperbolicus

gesucht: **Taylor-Reihe Entwicklung** für $\cosh x$

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ e^{-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \cosh x &= \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots) \\ &+(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

1.25 Spezielle Grenzwerte

1.25.1 Regeln von Bernoulli l'Hospital -

Einleitung
Bei den Regeln von de l'Hospital handelt es sich um nützliche Methoden zur Berechnung so genannten **ünbestimmten Ausdrücken"** der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$. Gemeint sind hiermit Grenzwerte der Form $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ wobei $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ oder aber $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$konvergieren.
Die Existenz dieser Grenzwerte und ihr Wert hängt davon ab, wie schnell Zähler und Nenner gegen Null bzw. gegen ∞ konvergieren. Die Regel von de l'Hospital besagt in etwa, dass es hierzu genügt, den Quotienten der Ableitungen von f und g zu untersuchen.

1.119 Beispiel.
Seien $f(x)$, $g(x)$ reelle , zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf (a, b) und $f(x_0) = g(x_0) = 0$
gesucht:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(z_f)(x - x_0)^2}{g(x_0) + g'(x_0) + (x - x_0) + \frac{1}{2}g''(z_g)(x - x_0)^2} \\
&= \frac{x - x_0}{x - x_0}.\frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(z_f)(x - x_0)}{g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(z_g)(x - x_0)} \\
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} &= 1.\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(z_f).0}{g'(x_0) + \ldots .0} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad \textit{falls dieser existiert}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \textit{falls der Grenzwert existiert}$$

1.120 Bemerkung.
Seien f , g : $]a$, $b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar , sei $x_0 \in\ ]a$, $b[$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$ Dann Folgt:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der rechts stehende Grenzwert existiert.

1.121 Beispiel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(sinx)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{cosx}{1} = cos(0) = 1$$

1.122 Beispiel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - sin(x) + cos(x) - 2}{x^3.cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - cos(x) - sin(x)}{3x^2cos(x) - x^3(-sin(x))}\dots\dots = \frac{1}{3}$$

1.123 Bemerkung.
Diese Methode kann man durch anwenden für $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. *und für* $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to x_0\ \pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0\ \pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \textit{falls der Grenzwert existiert.}$$

falls der Grenzwert existiert.

1.124 Bemerkung.
Man kann durch geeignetes Umformen auch Grenzwerte vom Typ $0.\infty$ *berechnen , sowie* $0^0, 1^0, 1^0$

1.125 Beispiel.
$\lim\limits_{x\to 0+} x\ lnx =$
1. Mögl. $\lim\limits_{x\to 0+} \dots = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x}{\frac{1}{lnx}}$

2.Mögl. $\lim\limits_{x\to 0+} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{(lnx)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1.x^2}{x.1}(-1) = \lim\limits_{x\to 0+}(-x) = 0$

1.126 Beispiel.
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} e\ lnx^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{xlnx} = e^{\lim\limits_{x\to 0} xlnx} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{lnx}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{lnx}lnx} = \lim\limits_{x\to 0} e^1 = e$

1.127 Beispiel.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\\ &= e\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \dots = e^1 = e\end{aligned}$$

(Nebenrechnung) NR $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

$$\textit{also auch } \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = e$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \overbrace{\longrightarrow}^{x=1} e^1 = e = \sum_{K=0}^{\infty}\frac{1^k}{k!} = \sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

1.26 Integral

1.26.1 Riemann Integral

Riemannsches Integral (Wikipedia)

$$f(x) > 0 \text{ auf } [a,b]$$

$$\underline{S_p} = \sum_{K=1}^{\infty} f_k(x_k - x_{k-n}) \text{ und } f_k = \min\{f(x)| \in [x_{k-1}, x_K]\}$$

$$\overline{S_p} = \sum_{K=1}^{\infty} f_k(x_k - x_{k-n}) und \overline{f_k} = \max\ldots$$

$$\underbrace{\lim_{\|p\|\to 0} \underline{S_p}}_{(1)ex.} \underbrace{=}_{(3)} \lim_{\|p\|\to 0} \overline{S_p} = \underbrace{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{Integral von f(x) auf [a,b]}$$

1.128 Beispiel.
$D(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad auf[0,1]$ *~~s~~kizze fehlt!*

1.129 Bemerkung.
In jeder reelle Intervall liegen rationale und irrationale Zahlen

$$\text{Riemann}: \lim \underline{S_p} \overset{ex. irrationale Zahl im Int.}{\overset{\downarrow}{=}} \lim \sum (x_k - x_{k-1}) = \lim 0 = 0$$

$$\neq \lim \overline{S_p} = \lim \sum (x_k - x_{k-1})) > 0$$

Das Riemann - Integral von D(x) ex. nicht

1.26.2 Lebesgue-Integral

mehr über Lebesgue (wikipedia)

1.130 Definition (Treppenfunktion)**.**
Eine Funktion

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

*heißt eine **Treppenfunktion** , wenn es Zahlen* $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *mit*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots t_n = b$$

gibt und Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *sodass*

$$f(x) = c_i \text{ für alle } x \in (t_{i-1}, t_i)$$

und alle $i = 1, \ldots, n$ *gilt. Dabei sind die Funktionswerte* $f(t_i)$ *an den „Stützstellen" beliebig, aber reell.*

1.131 Bemerkung (Verwendung von Treppenfunktion).
Treppenfunktionen benutzt man auch zur Approximation von Integralen. Das Integral einer Treppenfunktion wird durch

$$\phi(x) \text{ treppenfunktion } \int_a^b \phi(x) = \sum_{K=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})(\phi_k(x))$$

Folge von Treppenfunktion auf $[a,b]\backslash M$
M *:= Nullmenge* ***z.B*** $\phi \int_a^b D(x)\mathrm{d}x = 0$

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} \phi_k(x)}_{ex.} = f(x)$$

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} \int_a^b \phi(x)}_{ex.} = \underbrace{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{\text{Lebague-Integral}}$$

1.27 Vorlesung 11 (24.05.2019)

1.132 Bemerkung.
Aussage $A(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x \in \{a,b\}$
Aussage $A(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ ohne M bzw. $x \in \{a,b\}$ ohne $\underbrace{M}_{Nullmenge}$

kurz: $A(x)$ gilt für $\underbrace{\textit{fast alle}}_{\textit{fast überall}}$ *$x \in \mathbb{R}$ bzw. $x \in \{a,b\}$*

1.133 Definition (Nullmenge)**.**
*Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Nullmenge**, wenn gilt :*
für alle $\epsilon > 0$ existiert Intervalle $]_1,]_2, \dots \subseteq \mathbb{R}$ sodass :
1)

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = J_1 \cup J_2 \cup \dots$$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \leq \epsilon$ wobei $|J_k|$ die Lage des Intervalls J_k bezeichnet.

1.134 Bemerkung.
ab zählbar viele Intervalle endlich viele ab zählbar unendlich viele

1.135 Beispiel (1)**.**
Die Menge $M = \{x_1, x_2, x_3\}, |M| = 3$ Die Behauptung : M ist eine Nullmenge .

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und fest wähle $J_k = [x_k - \frac{\epsilon}{6}, x_k + \frac{\epsilon}{6}]$ Dann gilt : $|\exists_k| = \frac{\epsilon}{3}$ $x_k \in J_k$ und (1) , (2). □

1.136 Bemerkung.
Endliche Mengen sind Nullmenge.

1.137 Bemerkung.
Abzählbar endliche Mengen sind Nullmengen.

Beweis. Sei $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig und fest.

[Dann :fehlende Skizze !!!] □

Gesamtlänge berechnen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} &= \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \epsilon\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) \\ &= \epsilon(2-1) = \epsilon\end{aligned}$$

Intervalle $J_k = [x_k - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}](k = 1, 2, \dots)$ erfüllen (1)und (2).

1.138 Bemerkung.
*Es gilt überabzählbar Mengen , die Nullmenge sind **Z.B** die [**Cantor-Menge**].*

Abbildung 1.1: cantor-Menge
die nicht gelöchte punkte bilden die Cantor-Menge

1.139 Definition (Cantor-Menge)**.**
Unter der Cantor-Menge versteht man in der Mathematik eine bestimmte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen.
Schnitte von Intervallen
Die Cantormenge lässt sich mittels folgender Iteration konstruieren: Man beginnt mit dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ *der reellen Zahlen von 0 bis 1.*

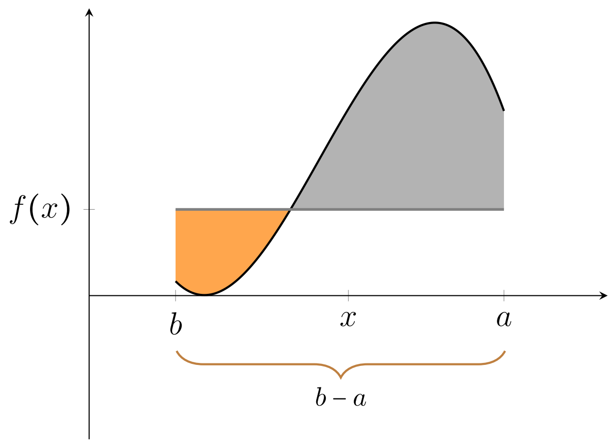
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

1.140 Definition.

$$\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$$

1.27.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a,b]$ stetige Funktion dann existiert ein $z \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(z)\times(a-b)$



1.27.2 Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein stetige Funktion , und sei $\widetilde{F} : [a,b] \to \mathbb{R}$. $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ Dann ist $\widetilde{F}$ auf (a,b) differenzierbar und es gilt $\widetilde{F'}$ für alle $x \in (a,b)$

Beweis. Sei $x_0 \in (a,b)$ beliebig und fest

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x - x_0}
\end{aligned}$$

laut **Mittelwertsatz** existiert $z \in (x_0, x)$ mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}'(x_0) &= \lim_{z\to x_0} \frac{f(z)(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{z\to x_0} f(z) \underbrace{=}_{\text{f ist stetig}} f(x_0)
\end{aligned}$$

□

1.141 Bemerkung.
$\widetilde{F}$ ist eine spezielle Stammfunktion.

1.142 Definition (Stammfunktion)**.**
*eine Funktion heißt **Stammfunktion** zu $f(x)$ im Intervall (a,b) , wenn gilt :*

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (a,b)$$

1.143 Bemerkung.

$$\begin{aligned}
F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) &\Rightarrow F_2'(x) - F_1'(x) = 0 \\
&\Rightarrow (F_2(x) - F_1(x))' = 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \}f_2(x) - f_1(x) = cconst \\
&\Rightarrow F_2(x) = F_1(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

1.144 Definition.
*Die Mengen aller Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$ heißt **unbestimmtes Integral**.*

1.145 Bemerkung (unbestimmtes Integral)**.**
*Das unbestimmte Integral ist **kein** Integral.*

1.27.3 Schreibweise

$$\int f(x)dx = \{F(x)|F'(x) = f(x)\}$$

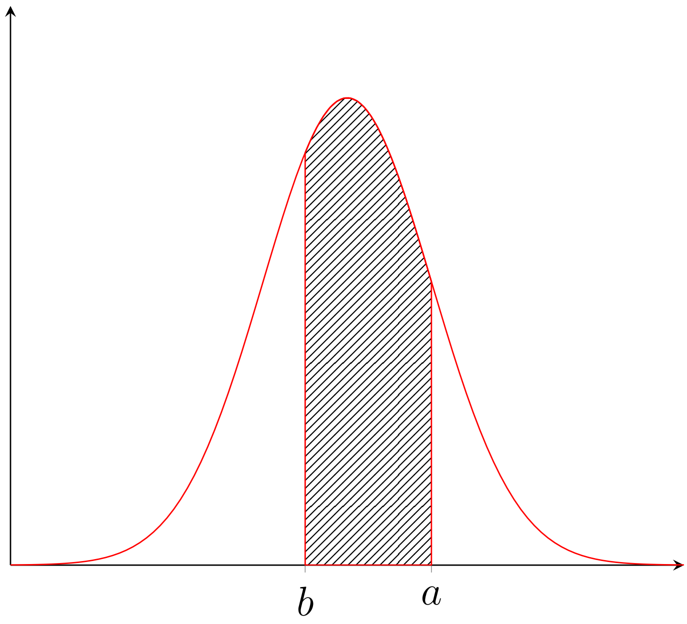
bzw

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ falls } F'(x) = f(x)$$

1.27.4 2. Hauptsatze der Differenzial- und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und f stetig
Sei $F(x)$ eine Stammfunktion zu f , Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



Beweis.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{:=f(t)dt} =_1 \underbrace{\int_a^b f(t)dt}_{\widetilde{F}(b)} - \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{\widetilde{F}(a)}$$

$$\textbf{Note!}\ \widetilde{F}(x) = F(x) + c \quad : c \in \mathbb{R}$$

$$= (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

□

1.146 Bemerkung.

$$f \underbrace{\longrightarrow}_{ableiten} f'$$

$$f' \underbrace{\longrightarrow}_{integrieren} f$$

$$\int f'(x)dx = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

1.147 Beispiel.

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan(x) + x, \quad c \in \mathbb{R}$$

1.27.5 Integrationsregeln entstehen aus Ableitungsregeln

1. $$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) \Rightarrow \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

2. $$\int K \times f(x)dx = K \int f(x)dx$$

3. $$\left(\frac{1}{a} \times F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a} \times F'(ax+b) \times a = F'(ax+b)$$

4. $$\int F'(ax+b)dx = \frac{1}{a} \times F(ax+b) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

1.28 Vorlesung 12 (28.05.2019)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(ln|f(x)|)' = \begin{cases} (lnf(x))', f(x) > 0 \\ (lnf(x))', f(x) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{f(x)}f'(x), f(x) > 0 \\ \frac{1}{-f(x)} - f'(x), f(x) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{f'(x)}{f(x)} \end{cases}$$

1.148 Beispiel.

$$\int \frac{2x+2+1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$$
$$= \underbrace{ln(x^2+2x+5)}_{keine\ reelle\ Nullstell} + \quad ?$$

1.28.1 Kettenregel $\rightsquigarrow$ Integration durch Substitution

$$(f(g(x)))' - f'(g(x))g'(x) \rightsquigarrow$$
$$\int f'(g(x)) \times g'(x)dx = f((g(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Die Ableitung der zu Substituierende Funktion $g(x)$ steht als **Faktor** im Integration

$$\int f(g(x)) \times g(x)dx$$

man vereinfache $g(x)$ durch : $z := g(x)$

$$\frac{dz}{dx} = g'(x) \Rightarrow dz = g'(x)dx \Rightarrow$$
$$\int f(g(x)) \times g'(x)dx = \int f(z)dz = f(z) + c = f(g(x)) + c$$

1.149 Beispiel.
Sub : $z = sinx$

$$\int e^{sinx}cosdx = \int e^z dz$$
$$\frac{dz}{dx} = cosx \Rightarrow dz = cosdx$$
$$e^z + c = e^{sinx} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

probe

$$(e^{sinx} + c)' = (e^{sinx})' = c' = e^{sinx}cosx + 0$$

1.150 Beispiel.
Sub : z = lnx

$$\int \frac{dx}{x(1+(lnx)^2)}$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dz = \frac{1}{x}dx$$
$$= \int \frac{dz}{1+z^2} = arctan(z) + c = arctan(lnx) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Regel:

$$\int f(ax+b)dx$$

Sub : $z = ax + b$, $\frac{dz}{dx} = a$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a}\int af(ax+b)dx \\ &= \frac{1}{a}\int f(z)dz = \frac{1}{a}F(z) + c \\ &= \frac{1}{a}F(ax+b) + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.28.2 Produktregel $\rightsquigarrow$ Partielle Integration

$$(u(x) \times v(x))' = u'(x)v(x) + u(x) \times v'(x)$$
$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow$$
$$\int (uv)'dx = \int u'vdx + \int uv'dx$$

d.h

$$\int u'vdx = uv - \int uv'dx$$
$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

1.151 Beispiel.

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{cosx}_{v'}dx$$

Sub:
$u := x \Rightarrow u' = 1$
$v' := cosx \Rightarrow v = sinx$

$$\begin{aligned} &= xsinx - \int 1 \times sinxdx \\ &= xsinx - (-cosx) + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= xsinx + cosx + c \end{aligned}$$

1.152 Beispiel.

$$\int \underbrace{sinx}_{u}\underbrace{cosx}_{v'}\, dx$$

Sub:
$u := sinx \Rightarrow u' = cosx$
$v' := cosx \Rightarrow v = sinx$

$$= sinx \times sinx - \int cosx \times sinxdx$$

Diese Partielle Integration führt auf das Ausgangs integral zurück

$$2\int \ldots \cdots = (sinx)^2 + \tilde{c}, \quad c \in \mathbb{R} | : 2$$
$$\Rightarrow \int sinx \times cosxdx = \frac{1}{2}(sinx)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}\frac{\tilde{c}}{2} = c$$

1.153 Beispiel.

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+2}dx$$
$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} | \text{ gesucht } A \text{ und } B$$
$$2x+1 = \underbrace{A(x+2) + B(x-2)}_{(A+B)x+(2A-B)}$$

1.28.3 Koeffizienten Regel

? = A + B LGs A = 1
1 = 2 A - B lösen B = 1

1.154 Beispiel.

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^3}dx$$
$$= \int \frac{A}{x+1}dx + \int \frac{B}{(x+1)^2}dx + \int \frac{C}{(x+1)^3}dx$$

Gesucht : A , B , C mit

$$\frac{x+2}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} | (x+1)^3$$
$$= x+2 = A(x+1)^2 * B(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

$$\text{Koeffizienten} \cdots \Rightarrow A = 0, B = 1, C = 1$$

$$= \int \frac{0}{x+1}dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$= -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + c$$

1.155 Beispiel.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+2x+5}dx$$

$$= \int \frac{Ax}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{B}{x^2+2x+5}dx$$

$$\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+5} \quad |(x^2+2x+5)$$

$$\Rightarrow 1 = Ax + B$$

A = 0
B = 1

$$= \int \frac{1}{x^2+2+5}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$$

$$= \int \frac{1}{4(\frac{x+1}{2})^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{(x+1)}{2}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{4}arctan\left(\frac{(x+1)}{2}\right)\frac{1}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{2}arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

1.29 Vorlesung 13 (31.05.2019)

1.156 Definition (L-periodial).
$f(x)$ heißt L-periodiel $(L > 0)$, wenn gilt : $\forall \in \mathbf{R} : f(x+L) = f(x)$

1.157 Bemerkung.
Es genügt ,2π-perodiele Funktionen zu betrachten, denn

$$f(x) \text{ L-perodial } \Rightarrow g(x) = f(x.\frac{L}{2\pi}) ist 2\pi\text{-perodiel, denn}$$

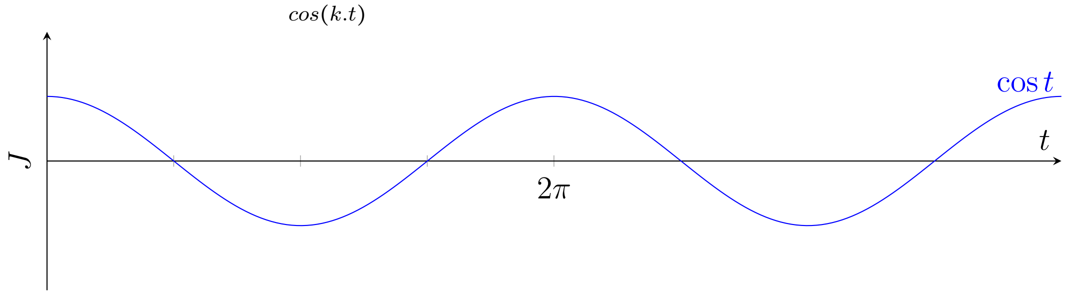
$$g(x+2\pi) = f((x+2\pi).\frac{L}{2\pi}) = f(x.\frac{L}{2\pi} + L) = f(x\frac{L}{2\pi}) = g(x)$$

$$f(x) 2\pi - periodiel \Rightarrow g(x) = f(x\frac{2\pi}{L}) \text{ ist L-Perodial}$$

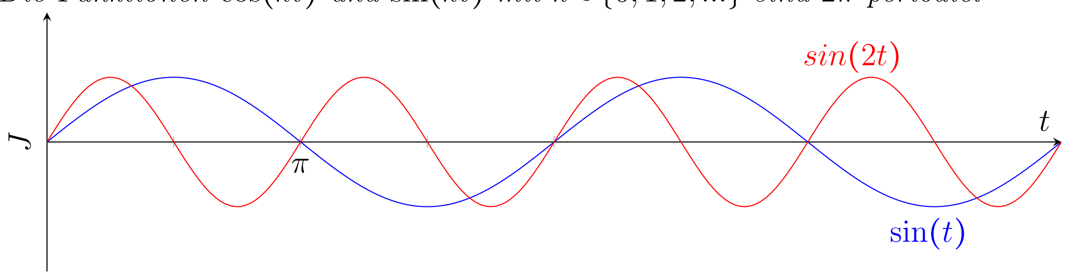
$$wir\ betrachten\ nur\ noch\ 2\pi - periodiele\ funktionen$$

1.158 Beispiel.

$\cos t$ *ist 2π-perodiel* $\underbrace{\cos(t\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{k}})}_{cos(k.t)}$ *ist* $\overset{kleinste\ Periodenlänge}{\overset{\downarrow}{\frac{2\pi}{k}}}-$ *perodiel und auch 2π-perodiel*



1.159 Bemerkung.
Die Funktionen $\cos(kt)$ *und* $\sin(kt)$ *mit* $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ *sind 2π-periodiel*



1.160 Bemerkung.

$\underbrace{\frac{a_0}{2}.1 + \sum_{k=1}^{n}(a_k.cos(k.t) + b_k.\sin(k.t))}_{Trigonomisches\ Polynom\ der\ Ordnung\ n falls a_n \neq 0\ oder\ b_n \neq 0}$ *a_k, b_k heißen FOURIER-koeffizienten*

FOURIER-Theorie

kontinuierlich — Diskret

Fourier-Reihen — DFT — FFT

FOURIER-Synthese
gg: a_k, b_k
ges: Trigonometrisches Polynom
Fourier-Analyse
geg: $f(t)$
ges: a_k, b_k so dass $f(t)$ (!unklar *udsinqieu**** durch ein Trigonometrisches Polynom und deren koff. betrachten werden kann)

1.161 Bemerkung.
$C[0,2\pi,]$ ist der R-VR der auf $[0,2\pi]$ stetigen Funktionen

$$f,g \in C[0,2\pi] \qquad f \neq g : t \to f(t)+g(t)$$
$$rf : t \to rf(t)(!fehlt)$$
$$\underbrace{span(\{1,\cos t,\cos(2t),\dots,\sin t,\sin(2t),\dots\})}_{w} \text{ ist ein UVR von } C[0,2\pi]$$

gegeben:

$$f(x) \in C[0,2\pi], 2\pi \quad periodisch$$

gesucht:

$$f(x) Bestapproximation\ von\ f(x)\ durch\ ein\ Element\ aus\ W.$$

$\hat{f}(x)$ ist eine Orthogonal-Projektion von $f(x)$ in W. Dazu braucht man eine Orthogonal-Basis von W
z.z Die Elemente { 1 , cos(t) , cos(2t), ... , sin(t) , sin(2t), ... } sind paarweise orthogonal.

Behauptung

Die Vektoren aus der oben erwähnten Mengen sind paarweise orthogonal bezüglich des Skalarprodukt. Seien f , g stetige Funktionen aus $C[0,2\pi]$

$$\Rightarrow f \circ g := \int_0^{2\pi} f(t) \times g(t) dt$$

Es gilt beispielsweise := $cos(kt) \circ cos(ft)$

$$= \int_0^{2\pi} cos(kt) \times cos(ft) dt = \dots$$

1.162 Bemerkung.
Sei $e^{i(x+y)} = e^{ix} \times e^{iy}$

$$cos(x+y) + i \times sin(x+y) = (cosx + i \times sinx)(cosy + i \times siny)$$
$$= (cosx \times cosy - sinx \times siny) + i(\dots)$$

1.29.1 Additionstheoreme

$$cos(x+y) = cosx \times cosy - sinx \times siny$$
$$cos(x \pm y) = cosx \times cosy \pm sinx \times sin \pm y$$
$$cosx \times cosy = \frac{1}{2}(cos(x+y)) + cos(x-y)$$

es geht weiter mit Beispiel

1.163 Beispiel.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(cos(k+l)t + cos(k-l)t)dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{sin(k+l)t}{k+l} + \frac{sin(k-l)t}{k-l}\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}(0+0-0+0) = 0 \end{aligned}$$

Die suche nach $\hat{f}$

$$\hat{f}(t) = \frac{f(t)\times 1}{1\times}1 + \underbrace{\frac{f(t)cos(t)}{cos(t)\times cos(t)}cost}_{a_1} + \dots$$
$$+ \underbrace{\frac{f(t)cos(2t)}{cos(2t)\times cos(2t)}}_{a_2} + \dots$$
$$+ \underbrace{\frac{f(t)\times sin(t)}{sin(t)\times sin(t)}sin(t)}_{b_1} + \underbrace{\frac{f(t)\times sin(2t)}{sin(2t)\times sin(2t)}sin(2t)}_{b_2} + \dots$$

1.29.2 Berechnung der Fourier-Koeffizienten : a_k, b_k

$$\Rightarrow a_k = \frac{f(t)\times cos(kt)}{cos(kt)\times cos(kt)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(kt)dt \quad k \geq 0$$

1.164 Bemerkung.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}(cos(kt))^2dt \ \ Add\ Theorem\ cos2x &= (cos(x))^2 - (sin(x))^2 \\ &= (cos(x))^2 - (1 - cos(x))^2 \\ &= 2(cos(x))^2 - 1 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + cos(2kt))dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[t + \frac{sin(2kt)}{2k}\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}[2\pi - 0 - 0 + 0] = \pi \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(t) \times sin(kt)dt \quad k \geq 1$$

Berechnung von $\hat{f}(t)$ ***wenn*** $k = 0$

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) = \frac{f(t) \times 1}{1 \times 1} \times 1 &= \frac{1}{\int_1^{2\pi} 1dt} \times \int_0^{2\pi} f(t) \underbrace{cos(d.t)}_{1} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(ot)dt\end{aligned}$$

1.165 Bemerkung.

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n}^{k=1} a_k cos(kt) + b_k sin(kt)$$

heißt ***Fourier Approximation*** *von f(x)*

1.166 Satz. *Sei* $f(x) \in C[0, 2\pi]$ *Dann existiert eine Fourier Reihe von* $f(x)$

1.167 Beispiel (von Sägezahnfunktion)**.**

$$\begin{aligned}a_1 = 1 \times f(t) &= 2\Big(\frac{sin(t)}{1} - \frac{sin(2t)}{2} + \frac{sin(3t)}{2} - \dots + \dots\Big) \\ t = \frac{\pi}{2} \times f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} &= 2 \times \Big(\frac{sin(\frac{\pi}{2})}{1} - \frac{sin(2\frac{\pi}{2})}{2} + \frac{sin(3\frac{\pi}{2})}{3} - \dots + \dots\Big) \\ &= 2 \times \left(1 - 0 - \frac{-1}{3} + 0 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k-1} \\ \frac{\pi}{2} &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}\end{aligned}$$

1.30 Vorlesung 14 (07.06.2019)

Differenzialgleichung (Dgl)

gewöhnlich — partielle

gesucht : $\underbrace{y(x)}_{Funktion}$ — gesucht : $y(x_1\ \ x_2 \dots x_n)$

1.168 Definition.
*$y'(x) = f(x, g(x))$ heißt gewöhnliche Differenzialgleichung erste Ordnung **in explizite Form** $y : \underbrace{I}_{Intervall\ I\ \in\mathbb{R}(\subseteq\mathbb{C})}$ heißt lösung , wenn sich beim Einsetzen von $y(x)$ und dem Ableitung der Funktion in der Differenzialgleichung eine wahre Aussage gibt.*

1.169 Beispiel.
*$y' = x - y^2$ auffüllbar $y'(x) = x(y(x))^2$ $x > 0$ **gesucht :** $y(x)$ bei Lösungen dieser DGL sind. $y_1 = \frac{-2}{x^2}$ auf $(0, \infty)$, $y_2(x)\frac{2}{2-x^2}$ auf $(0, \sqrt{2})$, $y_3(x) = \frac{2}{2-x^2}$ auf $(\sqrt{2}, \infty)$*

1. $\underbrace{(L.S)}_{linkeSeite}$ $y' = (-2)(-2)\frac{1}{x^3}$, $\underbrace{R.S}_{rightSeite}$ $x\frac{-2}{x^2} \times \frac{-2}{x^2}$, $L.S = R.S$

2. L.S $y_2' = 2(\frac{1}{2-x^2}) = 2(-2)\frac{1}{(2-x^2)^2 \times (-2x)}$, R.S $x(\frac{2}{2-x^2})^2$ . . . Selbst Studium
ende Ergebnis soll L.S = R.S

3. **grafische Lösung von** $y' = f(x, y)$, $\exists_m Punkt(x, y)$ ist eine Anstieg
Anstieg der Tangente an den Graphen einer Lösungen , $y(x)$ im Punkt (x, y).

Linearelement (x, y)
Richtungsfeld : Menge aller Linearelement
Isokline : verbinden punkte gleichen Anstieg

1.170 Beispiel.
$y' = x$

1. *Isoklinen bestimmen*

2. *Lösungsklaieren y(x) in das Richtungsfield eintragen*

y'=c =const $\Rightarrow x = c$ z.B.

$$c = 0, c = 1, c = 3, c = -1,$$
$$x = 0, x = 1, x = 2, x = -1$$

y_1, y_2, y_3 sind Bsp. für Lösungen $\underbrace{\textit{Alle lösungen}}_{Allgemeine\ Lösung\ y(x,\ \underset{\substack{\downarrow \\ reeller\ Parameter\ c\in\mathbb{R}}}{C}\ )}$ bilden die lösungskurvenschar

Wählt man ein festes $C \in R$, dann erhält man eine singuläre Lösung. (fehlt Skizze !)

1.171 Beispiel.
$y' = \frac{-x}{y} mity(x)istnichtdieFunktioneny \neq 0$
(fehlt skizze!)

$$y' = c = const - \frac{x}{y} = C \Rightarrow y = -\frac{x}{c} \ z.B.c = 1 \ c = -1$$
$$y = \dots, y = \dots$$

1.172 Definition.
$y^n(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n-1}(x))$ *glo. Dgl. n-te ordn, Lösung* $y(x) : I \to \mathbb{R}$
Allg. Lösung :$y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ *und* $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ *für Konkrete werte für ; erhällt wenn spezielle Lösungen*

1.31 Anfangswert-Aufgabe

(Spezielle Bedieniegung zur Bestimmung der Parameter) $y(x_0) = r_1$
$y'(x_0) = r_1$
$y^{(n-1)}(x_0) = r_{n-1}$

$$\text{n Bedingungen} \begin{cases} y(x_0) = r_1 \\ y'(x_0) = r_1 \\ y^{(n-1)}(x_0) = r_{n-1} \end{cases}$$

Methode:Trennung der ceränderlichen für Dgl.$y' = h(x)g(y(x))$

1.173 Beispiel.

$$y' = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow dy = y.dx| : y(\text{ für } y \neq 0)$$

1. *Fall :*$y \equiv 0$

$$l.s = r.s. \begin{cases} l.s.y' \equiv 0 \\ r.s.y \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow y \equiv 0 \text{ ist eine Lösung.}$$

2. *Fall:*

$$y \equiv 0 \cdots \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\Rightarrow \ln|y| = x + k, k \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow |y| = e^{x+k} = e^x . \underbrace{e^k}_{>0} \Rightarrow y = \pm \underbrace{e^K}_{>0} \Rightarrow .e^k$$
$$\Rightarrow y = C.e^x \text{ und } c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

$y' = y$ *hat die allgemeine Lösung* $y(x) = C.e^x (c \in \mathbb{R})$ $\underbrace{\text{Probe}}_{y'=C.e^x=y}$ *erforderlich !*

1.174 Beispiel.
$y' = \sqrt{y}\ ,y \geq 0$
$\lightning T.d.v.$
$y = \frac{1}{4}(x+c)^2\ \ (c \in \mathbb{R})$

Probe:

$$\left.\begin{array}{l} l.s.\ y' = \frac{1}{4}.2(x+c) \\ r.s.\ \sqrt{y} = \frac{1}{4}(x+c) \end{array}\right\} = \text{ nür für } x+c \geqq 0$$

$$x \geqq -c$$

1.175 Beispiel.
$T(0) = 90$ *Raumtemperatur 20 ges: t bis der* $\underbrace{\text{Kaffee trinkbar}}_{T(t)=40}$

$T(1) = 80$
$T(t) \backsim T - 20\ \underbrace{T'(t) = k(T-26)}_{ges.T(t)}$

$T.d.v{:}\ \frac{dT}{dt} = k(T-20) \overset{T\neq 20}{\Rightarrow} \int kdt \Rightarrow \ln|T-20| = \overset{k\in\mathbb{R}}{kt+k} \Rightarrow |T-20| = e^{kt}.\underbrace{e^k}_{>0}$

$\Rightarrow T - 20 = \pm e^k e^{kt} \Rightarrow T - 20 = C.e^{kt},\ c \in \mathbb{R}\backslash 0$
$T = 20 + Ce^{kt},\ C \in \mathbb{R}$
$T = 20 + Ce^{kt}$

$$\left.\begin{array}{l} T(0) = 90 \Rightarrow 90 = 20 + \overbrace{C.e^0}^{C} \Rightarrow C = 70 \\ T(1) = 80 \Rightarrow 80 = 20 + 70.e^{k.1} \Rightarrow e^k = \frac{60}{70} = \frac{6}{7} \end{array}\right\} T(t) = 20 + 70.(\frac{6}{70})^t \overset{T(t)=40}{\Rightarrow} 40 = 20 + 70.(\frac{6}{70})^t$$

$$\Rightarrow (\frac{6}{70})^t = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$$
$$\Rightarrow \ln(\frac{6}{7})^t = \ln\frac{2}{7}$$
$$\Rightarrow t.\ln\frac{6}{7} = \ln\frac{2}{7}$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln\frac{2}{7}}{\ln\frac{6}{7}} \approx 8,13 \text{ Minuten}$$

1.176 Beispiel.
population wachstum $\rightsquigarrow$ *logistikziele gleichung*
$N(t)$ *größe der population zum Zeitpunkt t*
$N'(t) \simeq N(t) : (\underset{\nwarrow \atop \text{Platz , der frei ist}}{a} - N(t)) \Rightarrow \underset{\text{zu lösen mit TdV}}{N' = \alpha.N(a-N)}$

$\frac{dN}{dt} = \alpha N(a-N) \overset{N>0 \atop a=n>0}{\Rightarrow} \int \frac{dN}{N.(a-N)} = \int \alpha\ dt \Rightarrow \int (\frac{\frac{1}{a}}{N} + \frac{\frac{1}{a}}{a-N})dN = \alpha\ dt \Rightarrow \dots$
$\dots \Rightarrow \frac{N}{a-N} = Ce^{\alpha at}(c \in \mathbb{R}, C > 0)$
$\dots \Rightarrow N(t) = \frac{aCe^{\alpha at}}{1+Ce^{\alpha at}} = \frac{aC}{e^{-\alpha at+C}}$ *logictile gleichung*

1.32 Vorlesung 15 (21.06.2019)

1.177 Beispiel.

$$\begin{aligned} y_1' &= 0 \times y_1 + 8y_2 + 15y_3 + sinx \quad y_i = y_i(x) \\ y_2' &= y_3 + e^x \\ y_3' &= y_1 + 2y_2 - y_3 + lnx \end{aligned}$$

1.178 Definition (Dgl-System)**.**

$\underline{y'} = \overbrace{A}^{Matrix} \underbrace{\underline{y}}_{\text{Vektor der gesuchten Funktion}} + a$ *heißt lineares Differentialgleichung System erste Ortung mit konstanten Koeffizienten, wenn gilt :*

$$\underbrace{\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der gesuchte Funktion}}, \; y' = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} 0_1(x) \\ \vdots \\ 0_n(x) \end{pmatrix}, \; A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

1.179 Bemerkung.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Das Dgl-System heißt homogenen}$$

1.180 Bemerkung.

Die Lösungsmenge von $\underline{y} = A\underline{y}$ *bildet einen* $\underbrace{\textbf{\textit{Vektorraum}}}_{Untervektorraum}$.

1.181 Bemerkung.

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *d.h* $y_i(x) = 0$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *diese Vektor ist eine Lösung.*

2. y_1 ,y_2 *seien Lösungen : Dann ist* y_1 , y_2 *eine Lösung , denn :*

$$\begin{aligned} A(\underline{y_1}, \underline{y_2}) &= A\underline{y_1} + A\underline{y_2} \\ &= \underline{y_1'} + \underline{y_2'} \\ &= (\underline{y_1} + \underline{y_2})' \end{aligned}$$

3. $\underline{y}$ *sei eine Lösung ,* $r \in \mathbb{R}$ *Dann ist auch* ry *eine Lösung denn :*

$$A(r, \underline{y}) = rA\underline{y} = r\underline{y'}(ry)'$$

1.182 Beispiel.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{\textit{Diagonal Matrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= -3y_2 \\ y_3' &= 5y_3 \end{aligned}$$

$$gesucht :- y_1(x), y_2(x), y_3(x)$$

1.183 Bemerkung.
$y' = \underbrace{k}_{\mathbb{R}} \times y$ heißt die allgemeine Lösung. $y = Ce^{kx}$, $(c \in \mathbb{R})$

Probe
Linke Seite: $Ce^{kx}K$ = Rechte Seite: KCe^{kx}
Rechnung

1. Fall $y \equiv 0$ ist eine Lösung.
2. Fall $y \neq 0$

$$\begin{aligned} y' = ky \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= k \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= \int kdx \\ \Rightarrow lin|y| &= kx + \underbrace{k}_{\mathbb{R}} \\ \Rightarrow |y| = e^{kx}e^{k>0} &= y = \underbrace{e^k}_{>0} e^{kx} = ce^{kx} \text{ c } \in \mathbb{R}\backslash 0 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung

$$y = Ce^{kx} \text{ , } (c \in \mathbb{R})$$

Lösung für die obere Beispiel

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x} \\ y_2 &= c_2 e^{-3x} \text{ , } (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R} \\ y_3 &= c_3 e^{5x} \end{aligned}$$

1.184 Bemerkung.
$\underline{y'} = A\underline{y}$ ist sehr leicht lösbar, falls A eine Diagonal Matrix ist.

Idee Substitution verwenden , sodass die Matrix Diagonal bekommt , ohne die Lösungsmenge zu ändern.
gesucht: A

Basis $\{a_1(x_1), \dots a_n(x)\}$ der Lösungsmenge von $y' = Ay$

gesucht : $y_1(x), \dots, y_2(x)$

Substitution:-

$$\left.\begin{matrix} y_1(x) = P_{11}a_1(x) + \dots + p_{1n}a_{1n}(x) \\ y_n(x) = p_{n1}a_n x + \dots + p_{nn}a_n \end{matrix}\right\} \text{Lösung } y = p\underline{a} \text{ mit } p = (p_{ij})_{ij} = 1$$

zu lösen ist $\underline{y'} = Ay$ zur Substitution : $\underline{y} = p\underline{u}$, $\underline{y'} = p \times \underline{u'} \Rightarrow p\underline{u'} = A \times p \times \underline{u'}$

$$\Rightarrow \underline{u'} = \underbrace{p^{-1} \times A \times P}_{matrix} \times \underline{u} \;\; \underline{u'} = Du \text{ (leicht Lösbar)}$$

D : soll eine Diagonalmatrix sein **Ausfließend Rücksubstitution**

$$\underline{y} = P\underline{u}$$

$$\underline{y'} = A\underline{y'} \text{ lösen:}$$

1. Eigenwert von A berechnen.
2. Zu jeden Eigenwert von A eine Basis des Eigenraums ...... Falls möglich:
3. Basis des $\mathbb{R}^n$ ...... , die aus Eigenvektor von A ....
4. Vektor dieser Eigenvektorbasis des $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren einer Matrix P auf.....
5. $p^{-1}AP = D$ ist eine Diagonalmatrix
6. $\underline{u'} = D\underline{u}$ lösen
7. Rücksubstitution $\underline{y} = P\underline{u'}$

1.185 Beispiel.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$mit\ y_1(0) = 1\ ,\ y_2(0) = 6$$

1. Eigenvektor von A

$$\begin{aligned} 0 = det &\begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ 4 & -2-k \end{pmatrix} \\ &= (1-k)(-2-k) - 4 \\ &= k^2 + k - 6 = 0 \\ &\Rightarrow k_1 = -3\ ,\ k_2 = 2 \end{aligned}$$

2. Eigenvektor zu $k_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & 1 \\ 4 & -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $-3 : \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
Eigenvektor zu $k_2 = 2$
Eigenvektor zu $2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ denn $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{vielfaches}$

3. Eigenvektorbasis :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

5. $p^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\underline{u}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\underline{u}$ Lösung a_n : $\underline{u}' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-3x} \\ c_2e^{2x} \end{pmatrix}$

7. $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{-3x} \\ c_2e^{2x} \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

8. $\underline{u} = c_1e^{-3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + c_2e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

1.186 Beispiel.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1) \textit{ Eigenvektor von } A \\ 2) \textit{ Eigenvektor von } A \end{matrix}$$

1. : $k_1 = 1 + 3i$, $k_2 = 1 - 3i$

2. : $v1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$

Allgemein

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{c_i\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}e^{(1+3i)}}_{z_1} + \overbrace{c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}e^{(1-3i)x}}^{z_2} \quad wobei\ (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

Übergang zur reellen Basis

Reelle Lösung :-
Reelle Teil (R_e) :(z_1)
Imaginärteil (I_m) : (z_2)

$$k_1 R_e(z_1) + k_2 I_m(z_2) \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$$

1.33 Vorlesung 16

1.33.1 Mäuse problem

4 Mäuse = 4 Masse punkte gleichschnell, gleich förmige Bewegung zu jedem Punkt bewegt sich m_i auf m_{i+1} zu. Bahnkkurve der Mäuse ? Z.B für m_0

$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ Sei M_0 zu Punkt t m Punkt $p_0(x(t), y(t))$

$\Rightarrow m_1$ ist im Punkt $p_1(-y(t), x(t))$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tangentenrichtung an Bahnkurve (entspricht) Ableitung}}}{Richtungsvektor} \qquad : p_1 - p_0 = \begin{pmatrix} -y(t) - x(t) \\ x(t) - y(t) \end{pmatrix}$$

$Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = C. \begin{pmatrix} -y(t) - x(t) \\ x(t) - y(t) \end{pmatrix}$ wählen C=1

Lösung

ges: sind 2 linear unabh.

lösungen: $Y_1(t), Y_2(t)$.

$\Rightarrow$ allg. Lösung: $Y(t) = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t) \qquad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Eigenwete:

$det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-1-\lambda)^2 + 1 = 0$

$= \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\overset{pq.formel}{\Rightarrow} \lambda_1, 2 = -1 \pm i$

Es existert keine rellen Eigenvektoren.

Trick

Erweiterung des Zahlbereich: $\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C}$

Eigenraum zu $\lambda_1 = -1 + i$:

$\begin{pmatrix} -1-(-1+i) & -1 \\ 1 & -1-c-1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-ix_1 - x_2 = 0$

$x_2 = -ix_1$

$\Rightarrow Eig_A(\lambda_1) = span(\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\})$

für $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ ist

$Eig_A(\lambda_2) = span(\{\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:=\overline{V}}\})$

$\Rightarrow$Allg. komplexe Lösung:

$Y_{\mathbb{C}}(t) = C_1 e^{\overline{\lambda_1}(t)} \overline{V}, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

$Re(e^{\lambda_1 t} V)$ und $Im(e^{\lambda t} V)$

sind l.u reelle Lösungen $e^{\lambda_1 t} V = e^{(-1+i)t}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$

$e^{-t}(\cos t + i\sin t)(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$ $e^{\lambda_1 t}V = e^{-}t(\cos\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + i^2\sin t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\cos t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$

$= \underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}}_{Reelleteil} + \underbrace{ie^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}}_{Imag.teil}$

⇒ Allg. reelle Lösung

$Y(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t \text{ für}\end{pmatrix} = \underbrace{e^{+t}}_{\substack{\to 0\\ \text{für } t\to\infty}} \underbrace{\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}}_{Rotationsmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Spezielle lösung für m_0: Startpunkt $Y_s(0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$Y_s(0) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t \text{ für}\end{pmatrix} = e^{-0}\begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow BahnKurvevonM_0 : Y_s(t)e^{-t}\begin{pmatrix}-\sin t + \cos t\\ \cos t + \sin t\end{pmatrix}$ Lineare Dgl. in n-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten.

1.187 Beispiel.

$y" + 5y' + 6y = 0$ harmon. Oszillator

Allg. n-ter Ordnung

$y^(n) * a_1 y^{(n1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$

im ein System 1. Ordnung umschreiben:

$$\begin{array}{lcl}
y_1' := y' = y_2 & \overset{Ableitung}{\curvearrowright} & y_1' = y' = y_2\\
y_2 := y' & & y_2' = y - y_3\\
\vdots & & \vdots\\
y_n := y^{(n-1)} & & y^{(n)} = -a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - \cdots - a_n y_1\\
\textit{ für Das Beispiel:} & & \\
y_1 := y & \to & y_1' = y_2\\
y_2 := y' & & y_2' = -5y_2 - 6y_1
\end{array}$$

Dgl. System:

$\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix} \begin{array}{l} = (-\lambda(-5-\lambda))\\ = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0\end{array}$

$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2$

Eigenräume:$Eig_a(-3) = span(\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\}) \Rightarrow$ *allg. Lösung:*

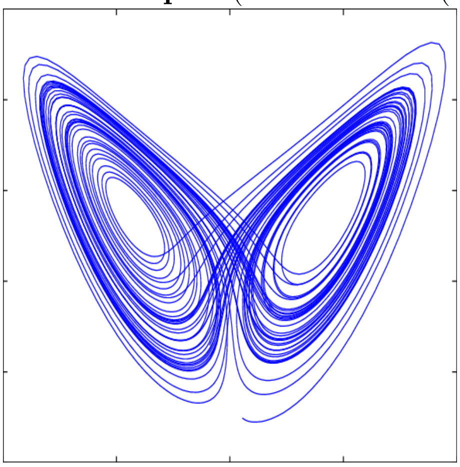
$\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix} = C_1 e^{-3x}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} + C_2 e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Lösung der ursprüngl. Dgl. in 1.Zeile

$y(x) = C_1^{-3x} + C_2 e^{-2x} \quad , c_2, C_2 \in \mathbb{R}$

$x \to \infty$ *Stark gedämpfter Oszillator*
Beobactung für $y" + ay' + by = 0$
EW-Gleichung
$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
1.) Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$
$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2}$
$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 und in \mathbb{R} \frac{a^2}{4} - b > 0$
2.) Fall : $\frac{a^2}{4} - b = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$
Eigenraum gat nur Dim. 1.
$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x.e^{\lambda_1 x}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
(skizze! fehlt!)
3.) Fall: $\frac{a^2}{4} - b < 0$
$\Rightarrow paar Konj. komplexer EW :$
$\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta (\alpha = -\frac{a}{2} < 0)$
allg. Lösung: $y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
Eigentlich ist die welt nicht linear, warum sind linear. system interssant?
$y'(t) = F`(Y_{(t)}) \neq AY$
Ruhelagen? $Y'(t) = 0$ *d.h.* $F(Y) = 0$
sei $y_0(t) = y_0$ *konst. eine Ruhelage Tayloretwicklung (linearisierung)*
$F(y) \approx F(y_0) + F'(y_0)(y - y_0)$
$y(t) - y_0)' \approx F'(y_0)(y_{(t)} - y_0) \qquad (F(y_0) = 0)$

1.188 Beispiel (Wettermodell (Edward Lorenz)).



$x' = -0x + 0y$
$y' = -xy + rx - x$
$z' = xy - by$
Lorenz System Wikipedia

1.34 Vorlesung 17 28.06.2019

1.34.1 Grafische Darstellung

1.189 Definition.
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *Die Abbildung* $f :\to \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots x_n)$ *heißt reellen Funktion in* n *Veränderlichen* $(x_1, x_2, \dots x_n)$

1.190 Bemerkung.
$D(f) = X$? *W(f)? grafische Darstellung ?*

1.191 Beispiel.
$n = 2$, $z = f(x_1, x_2) = f(x, y) = \sqrt{(4 - x^2 + y^2)}$
$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 2^2|\}$
$W(f) = \{r \in \mathbb{R} | 0 \le r \le 2\}$
grafische Darstellung :
1 .weg : ***mittels Höhenlinien***
$\{(x, y) | f(x, y) = c \quad (c \in \mathbb{R}), c \text{ konstant } \}$
2 .weg : ***Darstellung im xyz - Koordinatensystem***

1.192 Beispiel.

$$\sqrt{(4 - x^2 + y^2)} = c, const.$$
$$\Leftrightarrow 4 - (x^2 + y^2) = c^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 - c^2 = \underbrace{\sqrt{(4 - c)^2}}_{r(c)}$$

1.34.2 Grenzwert

1.193 Definition.
Sei $f : X \to \mathbb{R}, c \subseteq \mathbb{R}^n, \underline{x_0} \in X$ *in der Umgebung von* x_0 *definiert.*
a heißt Grenzwert von f *an der stelle* x_0 *wenn gilt :*

$$\forall (x_n) : \underline{x_n} \in X \text{ und } \lim_{n\to\infty} \underline{x_n} = \underline{x_0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\underline{x_n}) \underbrace{=}_{|f(x_n) - a| \overbrace{\to}^{n\to\infty} 0} a$$

$$Norm \quad ||\underline{x_n} - x_0 \overbrace{\to}^{n\to\infty} 0||$$

Schreibweise :

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x_0}} f(\underline{x}) \text{ mit } \underline{x} \in X$$

Grenzwertsätze (GWZ):

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x_0}} (f \pm g)(\underline{x}) = \lim_{\underline{x}\to\underline{x_0}} f(\underline{x}) \pm \lim_{\underline{x}\to\underline{x_0}} g(\underline{x})$$

punktiert : $\varepsilon \underbrace{Umgebung}_{\text{offene Kreisscheibe von} x_0 \text{ mit Radius } \varepsilon}$ von $\underline{x_0}$ (für n = 2)

1.34.3 Stetigkeit

1.194 Definition.
Sei $f : X \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^n, f$ sei in einer Umgebung von x_0 definiert.
f ist stetig in x_0: $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &(1) \quad f(\underline{x_0}) \text{ ex. und} \\ &(2) \quad \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) \text{ ex. und} \\ &(3) \quad \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) \end{aligned}$$

1.195 Beispiel.
$f(x,y) = x^2 - y^2$, (x_0, y_0) beliebig , Behauptung: f ist in (x_0, y_0) stetig

$$\lim f(x,y) = \lim_{\substack{x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0}} (x^2 - y^2) = \lim_{x \to x_0} x^2 - \lim_{y \to y_0} y^2 = (\lim_{x \to x_0} x)^2 - (\lim_{y \to y_0} y)^2 = x_0^2 - y_0^2 \tag{1.195.1}$$

1.196 Beispiel.
$f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ist in $(x_0, y_0) = (0,0)$ nicht stetig , $\underbrace{\text{an allen anderen stellen stetig}}_{\text{wie die obere Beispiel}}$
hat in $(x_0, y_0) = (0,0)$ keinen Grenzwert (das ist z.z)
Falls der Grenzwert existiert , muss für alle Folgen , die gegen (0,0) konvergieren , die Folge der Funktionswerte gegen den Grenzwert konvergieren.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}, 0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}, \lim_{n \to \infty} 0 = (0,0)(\text{ auf der x - Achse}) \tag{1.196.1}$$

$$\lim_{n \to \infty} 0, \frac{1}{n} = (0,0) \text{ auf der y-achse} \tag{1.196.2}$$

$$\text{für (2): } \lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{1}{n})^2 - 0^2}{(\frac{1}{n})^2 + 0^2} = \lim_{n \to \infty} 1$$

$$\text{für (3): } \lim_{n \to \infty} \frac{0^2 - (\frac{1}{n})^2}{0^2 + (\frac{1}{n})^2} = -1$$

Also: Grenzwert existiert nicht !
Aber : Es gilt Funktionen , für die Folge der Funktionswerte für alle Folgen auf der x-Achse bzw. y-Achse gegen den gleichen wert konvergieren, die aber trotzdem keinen Grenzwert haben.

1.197 Beispiel.

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, (x_0, y_0) = (0,0)$$

Behauptung : f(x,y) hat in(0,0) einen Grenzwert.

$$\lim_{x,y \to (0,0)} = \lim_{r \to 0} f(rcos(\varphi), rsin(\varphi))$$

Grenzwertesätze sind nicht anwendbar , daher ***Polarkoordinaten*** *verwenden.*

$$\lim_{r\to 0}\frac{rcos(\varphi)r^2sin^2(\varphi)}{r^2(cos^2(\varphi))+sin^2(\varphi)}=\lim_{r\to 0}\frac{rcos(\varphi)(sin(\varphi))^2}{1}\underbrace{=}_{Quetschlemma}\underline{0} \tag{1.197.1}$$

denn $(-r \leq rcos(\varphi)(sin(\varphi)^2)$

1.34.4 Partielle Ableitung

Richtungsableitung in Richtung der Koordinatenwachsen heißen partielle Ableitung → können mit den bekannten Ableitungsregeln berechnen.

1.198 Beispiel (Satz von Schwarz)**.**

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \overbrace{=}^{y=Const} y2x - e^{xy}y \\
f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{=}_{x=Const} x^2 1 - e^{xy}x \\
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \\
f(x,y) &= x^2y - e^{xy}
\end{aligned}$$

1.35 Vorlesung 18

1.36 (Totale) Differenzeierbarkit für Funktionen in zwei Veränderlichen

$y = f(x_1, \ldots x_n) \rightsquigarrow$ partielle Ableitung

$$f(x_i) = \frac{d\partial}{\partial x_i} \text{ (wo bei } x_j \text{ mit } j \neq i \text{ konstant)}$$

- existiert eine Partielle Ableitung $\Rightarrow f$ ist partielle Differenzeierbar.

Def. $\Rightarrow$ f ist (total) differenzierbar. lineare Approximierbarkeit $\Leftrightarrow f$ ist (total) differenzierbar.

1.199 Definition.
Sei $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq R^n$, $x_0 \in X$: $(x_{01} = (x_0, \ldots, x_{0n}))$ Dann heißt f an der stelle x_0 total Differenzierbar wenn gilt :

1. $\exists a \in \mathbb{R}^{\ltimes}$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \underline{a}(x - x_0) + R(\underline{x}) \quad (x \in X) \text{ mit } \lim_{x \to x_0} \frac{|R_n(\underline{x})|}{\|\underline{x} - x_0\|} = 0$$

$$\text{für } n = 1 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_1)(x - x_0) + R(x)$$

1.200 Bemerkung.
Ist f in x_0 (total) differenzierbar ? dann gilt
$f(\underline{x}) \underbrace{\approx f(x_0) + \underline{a}(x - x_0)^1}_{\text{mittels Aprroximation von } f}$

1.201 Bemerkung.
Ist f in x_0 linear approximierbar , dann kann $\underline{a}$ wie folgt berechnet werden.

$$a = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\underline{x_0}) \\ f_{x_2}(\underline{x_0} \\ \vdots \\ f_{x_n}(\underline{x_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{|x_0} \tag{1.201.1}$$

1.202 Bemerkung.
$\begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}_{x_0}$ *heißt Gradient von f an der Stelle $\underline{x_0}$*

1.203 Bemerkung.
f ist (total) differenzierbar $\Rightarrow$ f ist partiell differenzierbar.
f partiell differenzierbar und hat stetige Ableitung $\Rightarrow$ f (total) differenzierbar. ($\Leftarrow$ nicht ex.)

1.37 Verallgemeinerte Kettenregel

$$z = f(x,y)\ x = x(t)\ y = y(t)$$
$$f(x(t), y(t)) = \varphi(t)$$

1.204 Beispiel.
$z = f(x,y) = x^2y\ ,\ x(t) = t^2\ ,\ y(t) = t$
$\varphi(t) = (t^2)^2 t = t^5$ *Ableitung ?*
$f(x(t)), y(t) = \varphi(t)$ *Ableitung nach t*
$\frac{d\varphi}{dt}(= \varphi') = f_x(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + f_y(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}$

$$\textit{\textbf{Kurz:}}\ f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$$

1.205 Bemerkung.
Für die Gültigkeit der Formel begütigt man stetige Differenzeierbarkit (für f nach x und y , für φ nach t)

1.206 Beispiel.
$f(x,y) = x^2y : x(t) = t^2\ ,\ y(t) = t =$
ableiten nach t

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= 2xy \times 2t + x^2 \times 1 \times 1\\ &= 2t^2 \times t \times 2t + (t^2) \times 1\\ &= 4t^2 + t^4 = st^4\end{aligned}$$

1.38 Taylorentwicklung für $z = f(x,y)$ an der Stelle (x_0, y_0)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \dots\ \ \varphi(1) = f(\underbrace{x_0 + 1(x - x_0)}_{=x}, \underbrace{y_0 + 1(y - y_0)}_{=y})$$

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\overbrace{(x - x_0)}^{h}\, y_0 + t\overbrace{(y - y_0)}^{k})$$

$x(t) = x_0 + th$, $y(t) = y_0 + t \times k$ $\varphi(t)$ ist eine Funktion einer reellen Veränderlichen (t) Taylorentwicklung ist bekannt.

1.38.1 Taylorentwicklung für $\phi(t)$ an der Stelle $t_0 = 0$

$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi(0).t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n + R_n(t)$
für t=1
$f(x,y) = \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \dots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + R_n(1)$
Weitere Scritte t=0

$$\begin{array}{lr} \varphi'(t) & \varphi'(0) \\ \varphi''(t) & \varphi''(0) \\ \varphi'''(t) & \varphi'''(0) \\ \dots & \dots \end{array}$$

$\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ nach ableiten und dabei α die verallgemeinerte kettenregel bemerken

$\varphi'(t) = f_x \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{n} + f_y \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{k}$

$x(t) = x_0 + t.h \ \frac{dx}{dt} = 0 + 1.h = h$

$y(t) = y_0 + t.k \ \frac{dx}{dt} = 0 + 1.k = k$

$\varphi'(t) = f_x.h + f_y k$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) = (\phi'(t)) &= (f_x h + f_y k) \\ &= (f_{xx})h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k \\ &= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}h'.k' + f_{yy}k^2 \end{aligned}$$

$\varphi'''(t) = 1.f_{xxx}h^3 + 3f_{xxy}h^2k + 3.f_{xyy}hk^2 +\cdot\ f_{yyy}k^3$

1.38.2 Lineare Näherungsformel:

für f(x,y) an der Stelle(x_0, y_0)

$$\varphi(0) + \varphi'(0) = \underbrace{f(x_0 + 0(x - x_0), y_0(y - y_0))}_{f(x_0,y_0)} + f_x(x_0, y_0)(\underset{h}{x - x_0}) + f_y(x_0, y_0)(\underset{k}{y - y_0})$$

$$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

:= tangentialebene

1.38.3 Quaratische Nääherungsformel:

tangentialebene$+\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(y - y_0)(x - x_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2)$

1.207 Beispiel.
$f(x, y) = \sin x, \sin y, (x_0, y_0) = (0, 0)$
Gesucht Tangentialebene:
$f_x = \cos x \sin y \ \ f_x(0, 0) = 0$
$f_y = \sin x \cos y \ \ f_y(0, 0) = 0$
$t(x, y) = f_1(x, y)$

$$= \underbrace{f(0, 0)}_{0} + \underbrace{f_x(0, 0)(x - 0)}_{0} + \underbrace{f_y(0, 0)(y - 0)}_{0} = 0$$

List of Theorems

List of Theorems