

Technische Universität Dresden • Fakultät Informatik

Mathematische Methoden für Informatiker

Mitschrift zur Vorlesung Sommer Semester 2019

Bachelor of Science (B.Sc.)

Dozent: Prof. Dr. Ulrike Baumann
vorgelegt von

”...”

MOHAMED ABDELSHAFI
m.abdelshafi@mail.de

MAHMOUD KIKI
mahmoud.kiki@tu-dresden.de

...

Tag der Einreichung: 20. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Folge und Reihen	2
1.1 Vorlesung 1	2
1.1.1 Folge	2
1.2 Rechnen mit Folgen	3
1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)	5
1.4 vorlesung 2	7
1.5 Konvergenzkriterien	10
1.6 Vorlesung 3	11
1.7 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:	13
1.8 Reihen :	14
1.8.1 Rechenregeln für Reihen	15
1.9 Vorlesung 4	16
1.10 Reihen	16
1.11 Allgemeine harmonische Reihe	17
1.12 Expotentiale Reihe	18
1.13 Hauptkriterium	18
1.14 Kriterium für Alternierende Reihe	19
1.15 Quotientenkriterium (QK):	19
1.16 Wurzel Kriterium : WK	20
1.17 Vorlesung 5	21
1.17.1 Rechenregln für Funktionen (GWS anwenden)	26
1.18 Vorlesung 6	27
1.18.1 Ergebnis	27
1.19 Vorlesung 7	30
1.19.1 tafelwerk	30
1.19.2 Tangente Gleichung	31
1.20 Berechnen an $f'(x)$ Ableitungsregeln:-	31
1.20.1 Linearität:-	31
1.20.2 Produktregel:-	31
1.20.3 kettenregel:-	32
1.20.4 Quotientenregeln:-	32
1.20.5 Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} zu f	32
1.21 Vorlesung 8	34
1.22 Vorlesung 9	37
1.22.1 Taylor-Polynom $P_n(x)$ von $f(x)$	37
1.22.2 Taylor-Formel:	38

1.22.3 Näherungsformel für e^x	39
1.22.4 Rechnen mit Potenzreihen:	39
1.23 Vorlesung 10	41
1.24 Spezielle Ableitungen	41
1.25 Spezielle Grenzwerte	42
1.25.1 Regeln von Bernoulli l'Hospital -	42
List of Theorems	44
List of Theorems	45

Einleitung

Wir schreiben hier die Vorlesungen von INF-120-1(Mathematische Methoden für Informatiker) mit. wenn Ihr Fragen habt oder Fehlern gefunden Sie können gerne uns eine E-mail schreiben oder Sie können einfach bei github eine [Issue \(link\)](#) erstellen. wir freuen uns wenn Sie mit uns mitschreiben möchten, oder helfen mit der Fehlerbehebung.

Mohamed Abdelshafi
Mahmoud Kiki

Kapitel 1

Folge und Reihen

1.1 Vorlesung 1

1.1.1 Folge

1.1 Definition (Folgen).

Ein folge ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \underbrace{\mathbf{M}}_{\text{Menge}} : n \mapsto \underbrace{x_n}_{\text{folgenreit}}$$

1.2 Bemerkung.

$\mathbf{M} = \mathbb{R}$ reellewert Folge

$\mathbf{M} = \mathbb{C}$ komplexwertig Folge

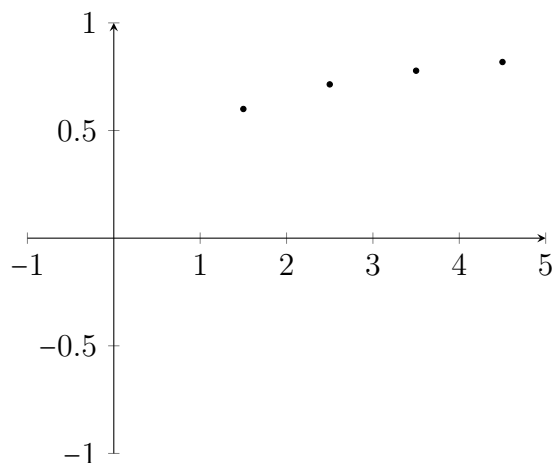
$\mathbf{M} = \mathbb{R}^n$ vektorwertig Folge

Bezeichnung (x_n) mit $(x_n) = \frac{n}{n+1}$

Aufzählung der folgenreit: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

1.3 Bemerkung.

zuwerten wird \mathbb{N} durch $\mathbb{N} \setminus 0, 1, \dots$ erstellt.



1.4 Beispiel.

1. *Konstante Folge* (x_n) mit $x_n = a \in \mathbf{M}, a \dots$

$$x_n = a \in \mathbf{M}$$

2. *Harmonische Folge* (x_n) mit $x_n = \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1$

3. *Geometrische folge* (x_n) mit $x_n = q^n, q \in \mathbb{R}, \dots$

4. *Fibonaccifolge* (x_n) mit

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

5. *Fibonacci folgen* (x_n)

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = 1$$

$$X_{n+1} = x_n + X_{n-1} \quad (n > 0)$$

6. *conway folge*

$$1, 11, 21, 1211, 111217, 312211 \dots$$

7. *folge aller Primzahlen:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

1.2 Rechnen mit Folgen

$$(M = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad M = \mathbb{C})$$

$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$$

$$K(x_n) := (Kx_n) \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \in \mathbb{C}$$

1.5 Bemerkung.

Die Folge bildet ein Vektorraum.

1.6 Definition (Beschränktheit).

1. Eine reellwertige Funktion ist in der Mathematik eine Funktion, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind.
2. Eine reellwertige heißt beschränkt wenn gilt

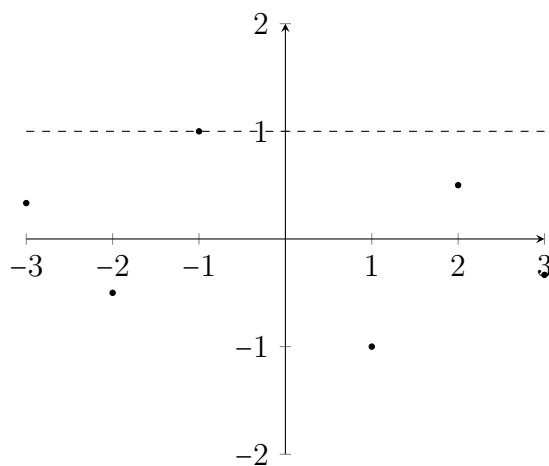
$$\exists r \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{|x_n|}_{\text{Betrag einer reellen oder komplexer Zahl}} \leq r$$

Betrag einer reellen oder komplexer Zahl

1.7 Beispiel.

$$(x_n) \quad \text{mit} \quad x_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{5}, \dots$$



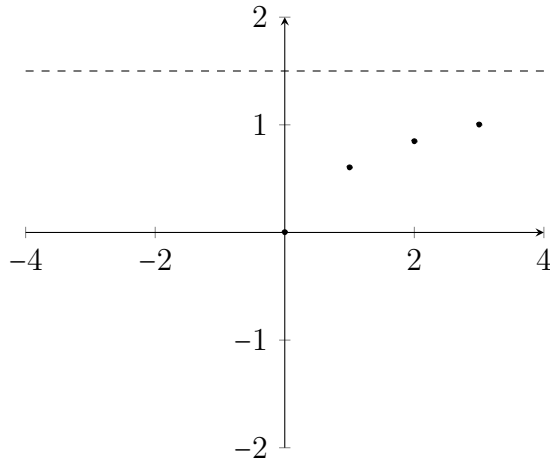
1.8 Bemerkung.

(x_n) ist beschränkt mit $r = 1$ denn $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leq 1 \leftrightarrow r$

1.9 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } x_n = (-1)^n \frac{1}{n} + 1 \quad \text{beschränkt } r = 3/2$$

$$-3/2 \leq x_n \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



1.10 Beispiel.

Standard:

Die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt durch 3

Zu zeigen: $-3 \leq x_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)

1.11 Definition (Monoton).

Die Folge (x_n) heißt monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$

$$\text{wenn gilt: } \forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} x_n \leq x_{n+1} \\ x_n \geq x_{n+1} \end{cases}$$

man spricht von Streng monotonie wenn \leq durch $>$ und \geq durch $<$...

1.12 Bemerkung.

$$x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n - x_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1$$

1.13 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } X_0 := 1, X_{n+1} := \sqrt{x_n + 6}$$

ist Streng monoton wachsend Beweis mit Vollständiger Induktion

Standard Bsp: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist streng monoton wachsend

1.14 Bemerkung.

<i>monoton</i>	<i>ja</i>	<i>nein</i>
<i>Beschränktheit</i>	$\left(\frac{1}{n}\right)$	$(-1)^n$
<i>nein</i>	(n)	$(-1)^n$

1.15 Definition (Konvergenz, Divergenz).

(x_n) heißt **Konvergenz** wenn (x_n) ein Grenzwert hat.

(x_n) heißt **Divergenz** wenn sie keinen Grenzwert hat.

1.16 Definition (Grenzwert).

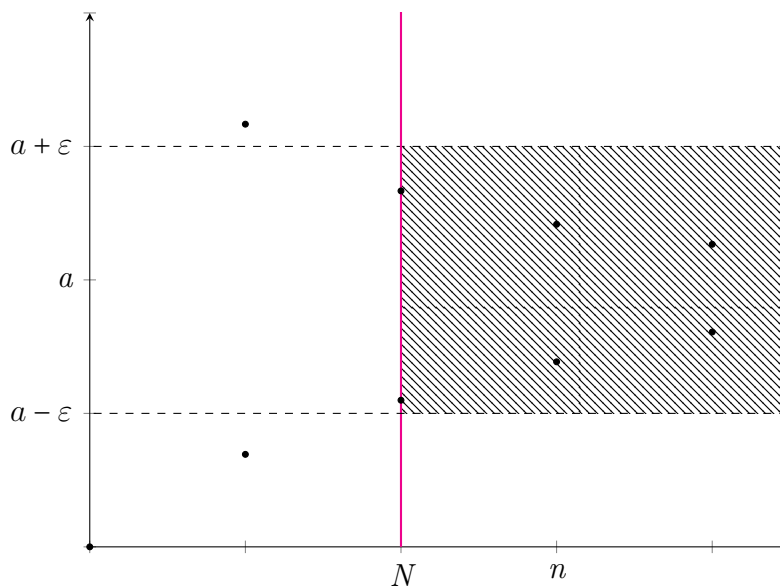
$a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von (x_n) , wenn gilt:

$$\underbrace{\forall \epsilon > 0}_{\text{beliebiges klein}} \quad \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}}_{\text{beliebiges klein}} \quad , \forall n \in \mathbb{N} : m \geq N$$

$$\underbrace{\Rightarrow |x_n - a| < \epsilon}_{a - \epsilon \leq x_n \leq a + \epsilon}$$

Sei $\epsilon > 0; \epsilon$ fest

alle Folgenglieder x_n mit $n \geq N \leadsto$



1.4 vorlesung 2

ist die folge beschränkt , monoton ?

(x_n) konvergierend : $\iff \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

1.17 Satz. (x_n) konvergierend : \Rightarrow Der Grenzwert ist eindeutig beschränkt.

1.18 Beweis.

Sei a eine Grenzwert von (x_n) , b eine Grenzwert von (x_n)
d.h sei $\epsilon > 0, \epsilon$ beliebig , ϵ fest

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a : |x_n - a| < \epsilon \quad (1.18.1)$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b : |x_n - b| < \epsilon \quad (1.18.2)$$

Sei $\max \{N_a, N_b\} = N$ dann gilt :

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \quad (1.18.3)$$

und

$$|x_n - b| < \epsilon \Rightarrow |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \quad (1.18.4)$$

Annahme :- $a \neq b$, d.h $|a - b| \neq 0$

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a + 0 - b| \\ &= |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \\ \text{also } |a - b| &< 2\epsilon \end{aligned}$$

wähle Z.B

$$\epsilon = \frac{|a - b|}{3} \quad \text{dann gilt : } |a - b| < \frac{2 |a - b|}{3}$$

$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3}$ falls Aussage, Widerspruch also ist die Annahme falsch also gilt $a = b$

1.19 Beispiel.

x_n mit $x_n = \frac{1}{n}$ (harmonische Folge)

1.20 Beweis.

Sei $\epsilon > 0$, ϵ beliebig, ϵ fest gesucht : N mit $n \geq N$
hat den Grenzwert 0

$$\Rightarrow |x_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \quad (1.20.1)$$

wähle $N := \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$

1.21 Beispiel.

$\epsilon = \frac{1}{100}$, gesucht N mit $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ wähle $N = 101$

1.22 Schreibweise.

x_n hat den Grenzwert a Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ x_n geht gegen a für n gegen Unendlich.

1.23 Definition (Nullfolge).

x_n heißt Nullfolge ,wenn $\lim x_n = 0$ gilt.

1.24 Bemerkung.

Es ist leichter, die konvergente einer Folge zu beweisen, als den Grenzwert auszurechnen.

1.25 Beispiel.

$$x_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{11-n}{9-n} \right)^9$$

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{-2}{3}$

1.26 Lemma.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) \quad (1.26.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{11-n}{9+n} \right)^9 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11-n}{9+n} \right)^9 \quad (1.26.2)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11-n}{9+n} \right)^9 \quad (1.26.3)$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(\frac{1}{n} - 1)}{n(\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.26.4)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{11}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.26.5)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \right)^9 \quad (1.26.6)$$

$$= \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 11 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 9 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}) + 1} \right)^9 \quad (1.26.7)$$

$$\frac{1}{3} + (-1)^9 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \quad (1.26.8)$$

1.27 Definition (Unendliche Grenzwert).

Eine Folge (x_n) hat den unendliche Grenzwert ∞ , wenn gilt :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : x_n > r$$

1.28 Schreibweise.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

1.29 Bemerkung.

∞ ist keine Grenzwerte und keine reelle Zahl.

1.30 Bemerkung.

Grenzwertsätze gelten nicht für uneigentliche Grenzwerte.

1.31 Bemerkung.

gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dann schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} -x_n = -\infty$

1.32 Beispiel.

x_n mit $x_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$, q fest.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & |q| = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{ex.nicht,} & q \leq -1 \end{cases}$$

1.5 Konvergenzkriterien

(zum Beweis der Existenz eines Grenzwerts, nicht zum Berechnen von Grenzwerten)

(1) x_n konvergent $\Rightarrow (x_n)$ beschränkt.

wenn (x_n) nicht beschränkt $\Rightarrow (x_n)$ nicht konvergent.

(2) Monotoniekriterium: wenn (x_n) beschränkt ist können wir fragen ob (x_n) konvergent.

(x_n) beschränkt von Monotonie $\Rightarrow (x_n)$ konvergent.

1.33 Beispiel.

$\left((-1)^n \times \frac{1}{n}\right)$ konvergent (Nullfolge) diese Folge ist beschränkt aber nicht Monoton

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

existiert. Diese ist beschränkt und monoton.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

existiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

1.6 Vorlesung 3

1.34 Beispiel.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11+n}{9-n} \quad ? \quad x_n = \frac{11+n}{9-n} = \frac{n \frac{11}{n} + 1}{n \frac{9}{n} - 1} \quad (1.34.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11}{n} + 1 \right) = 1 \quad (1.34.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{n} - 1 \right) = -1 \quad (1.34.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \frac{1}{-1} = -1 \quad (1.34.4)$$

1.35 Lemma (Quetschlemma). *Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a$ und es gelte $x_n \leq z_n \leq y_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$*

Dann gilt für die Folge (z_n) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = a$

1.36 Beispiel.

Ist die Folge $(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent ?

$$-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \left(\frac{1}{n} \right) \leq 1 \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{n} \right) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

1.37 Beispiel.

$$x_n \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{n-1!} \quad (1.37.1)$$

denn $x_n = 0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq y_n$, gesucht! $\underbrace{y_n}_{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0}$ für hinreichend großes n .

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{(n-1)} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} \\ y_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \frac{a^k}{k!} \quad k \text{ ist fest} \end{aligned} \quad (1.37.2)$$

Es gilt $\frac{a^n}{n!} \leq y_n$ für hinreichend großes n und $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{\text{Konst}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^k}{k!}\right)}_{\in \mathbb{R}} \\ &= 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \times \frac{a^k}{k!} = 0 \end{aligned} \quad (1.37.3)$$

1.7 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:

man kann oft durch lösen Fixpunktgleichung" berechnen.

$$x_0, x_{n+1} = \ln(x_n)$$

Folge, Falls (x_n) hinreichend ist, was gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-2} = \dots = 4$$

1.38 Beispiel.

$$(x_n) \quad x_0 = \frac{7}{5}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

$\ddot{U}(x_n)$ ist monoton fallend, beschränkt, konvergent.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 2) = \frac{1}{3}(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n))^2 + 2)$$

Fixpunktgleichung

$$a = \frac{1}{3}(a^2 + 2), \text{ gesucht } = a$$

$$3a = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Lösung: $a_1 = 2$ (keine Lösung), $a_2 = 1$

1.39 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } (x_0) = c \in \mathbb{R}, c \text{ fest } x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$$

(1) (x_n) beschränkt ✓

(2) (x_n) Monoton ✓

Also (x_n) konvergent

$$\text{Sei } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \text{ Dann } \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n) + \frac{c}{x_n} = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{c}) = a$$

$$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \Leftrightarrow a = \sqrt{c}$$

1.40 Bemerkung.

Der Nachweis der konvergent der rekursiv definierte Folge darf nicht weggelassen werden, denn Z.B $x_0 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2$ $2, 4, 16, 256, \dots$ divergent gegen $+\infty$

$$\text{Annahme: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}_a = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2}_{a^2} \Rightarrow a \in \{0, 1\}$$

1.8 Reihen :

1.41 Definition (Unendliche Reihen).

Sei (a_n) eine reellefolge (komplexwertig) Folge

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0, a_1, \dots, a_n,$$

n -k heißt Partialsumme. (S_n) heißt unendliche Reihe.
schreibweise : $(S_n)^\infty = \text{bsw } (S_n)$

$$\left(\sum_{l=0}^n a_l \right)$$

bzw

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l \right)$$

1.42 Bemerkung.

Reihen sind spezielle Folgen , alle konvergent oder divergent.

1.43 Definition (wert der Reihe).

Für eine konvergente Reihen wird der Grenzwert auch wert der Reihe genannt.

1.44 Schreibweise.

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

bzw

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1.45 Beispiel.

Teleskopreihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ in Grenzwert der Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{-1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

1.46 Beispiel.

geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist für

$$|q| < 1$$

konvergent. Wert der Reihe für $|q| < 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ konvergent, Werte der Reihe für

$$|q| < 1: \sum_{k=0}^n q^k = \dots$$

$$\begin{aligned} S_n &= q^0 + q^1 + \dots + q^n \\ -qS_n &= q^1 + q^2 + \dots + q^{n+1} \\ (1-q)S_n &= q^0 - q^{n+1} \\ S_n &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} (1 - q^{n+1}) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{1}{1 - q} \times \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 - q)^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1 - q} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}) = \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

1.8.1 Rechenregeln für Reihen

konvergente Reihe kann man addieren oder subtrahieren mit einem Skalar multiplizieren wie endliche Summen. ABER: das gilt im Allgemeinen nicht für das Multiplizieren

1.9 Vorlesung 4

1.10 Reihen

1.47 Beispiel.

Zur geometrischen Reihen

gesucht : A

$$2A = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^k + \dots$$

$$9 = \frac{1}{4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 2A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

1.48 Beispiel.

$$\begin{aligned} 0,4\bar{3} &= \frac{3}{4} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \dots \\ \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \left(\frac{1}{10}\right)^0 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots \\ &= \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{1}{30} = \frac{12+1}{30} = \frac{13}{30} \end{aligned} \tag{1.48.1}$$

wenn $0,4\bar{3}$ erlaubt wäre, dann,

$$\frac{4}{10} + \frac{9}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

1.49 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \text{ ist divergent, denn } \lim_{\infty} \sum_{K=1}^n \frac{1}{k} \text{ ex. nicht}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{10} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

1.11 Allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad (\infty \text{ fest, mit } \alpha \in \mathbb{R}) \quad \begin{array}{l} \text{falls } \alpha \geq 1 \rightarrow \text{konvergent} \\ \text{falls } \alpha \leq 1 \rightarrow \text{Divergent} \end{array}$$

1.50 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{ist konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ist Divergent}$$

1.51 Beweis (Monotoniekriterium). mit Monotoniekriterium für Folge

$$\text{Reihe ist konvergent} \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \sum_{K=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ ist monoton wachsend.} \\ (2) \quad \sum_{K=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ ist beschränkt.} \end{array} \right.$$

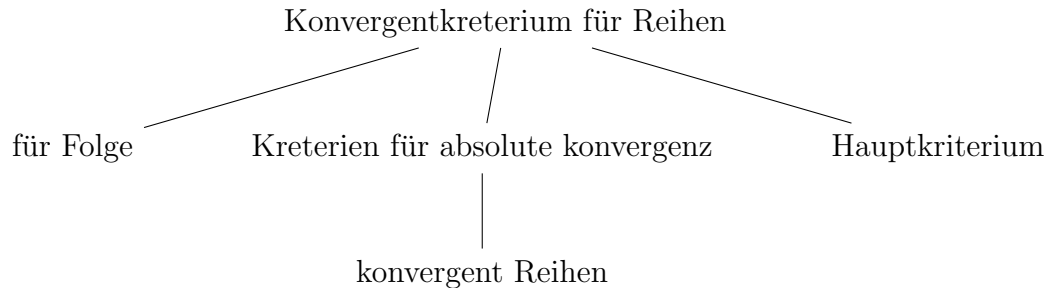
$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2}$$

$$< 1 + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}}_{2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^2}}_{4 \cdot \frac{1}{4^2}} +$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \underbrace{\frac{1}{4}}_{(\frac{1}{2})^2} + \underbrace{\frac{1}{8}}_{(\frac{1}{2})^3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{1}{2} - 1}$$

1.12 Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \quad \text{ist konvergent}$$



1.13 Hauptkriterium

★ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dann ist (a_k) Nullfolge.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \underbrace{\text{nullkonvergent}}_{\text{divergent}}$$

oder

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k \quad \text{ex.null}$$

1.52 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 + 1}{4k^2 - 1} \quad \text{divergent, aber} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divergent und} \quad \frac{1}{k} \quad \text{Nullfolge}$$

1.53 Beweis.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (\text{konvergent}) \Rightarrow \underbrace{(a_k) \quad \text{Nullfolge}}_{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0}$$

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad , \quad s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \quad , \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s - s = 0$$

1.14 Kriterium für Alternierende Reihe

1.54 Beweis (Alternierende Reihe).

$$\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ ist konvergent}$$
$$\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

wobei (a_k) einer Streng monoton fallend Nullfolge mit $a_k \geq 0$
 \Rightarrow Die Reihe ist konvergent.

$$\text{Also } \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ ist konvergent.}$$

1.55 Definition (absolute Reihe).

Eine Reihe $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$ heißt absolute konvergent wenn $\sum_{K=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

1.56 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ ist konvergent, aber nicht absolute konvergent}$$
$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \text{ ist konvergent und } \textbf{absolute} \text{ konvergent}$$

1.57 Satz.

$$\text{Reihe } \sum_{K=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \Rightarrow \text{Reihe } \sum_{K=0}^{\infty} a_k \text{ ist Konvergent}$$

1.58 Bemerkung.

absolute konvergente Reihe kann man multiplizieren wie endliche summen. (aber konvergente Reihen nicht !)

1.15 Quotienkriterium (QK):

Für absolute Konvergenz, wenn gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \text{ ist absolut konvergent} \\ > 1 \Rightarrow \text{ ist divergent) } \\ = 1 \Rightarrow \text{ Kriterium ist nicht anwendbar} \end{cases}$$

1.16 Wurzel Kriterium : WK

Die Reihe $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$ ist **absolute** konvergent genau wenn \Leftrightarrow :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent} \\ > 1 \Rightarrow \text{ist divergent} \\ = 1 \Rightarrow \text{Kriterium ist nicht anwendbar} \end{cases}$$

1.59 Beispiel (QK).

$$\begin{aligned} & \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 \end{aligned}$$

d.h. $< 1 \Rightarrow$ Die Reihe ist absolute Konvergent.

1.60 Beispiel (WK).

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k!} \right|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{1}}{\sqrt[k]{k!}} = \\ & \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!}} = 0 < 1 \end{aligned}$$

Die Reihe is absolut konvergent.

1.17 Vorlesung 5

Zusammenfassung :

Folgen / Reihen / Konvergenz ? / Grenzwert ?

Neu : Funktionen

Approximation von Funktionen

Potenzreihen

Taylorreihen

fourierreihen

Näherungsweise Berechnung

1.61 Definition.

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion in einer reellen veränderlichen

1.62 Bemerkung (Definitionsbereich).

Bild von f

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

Graph von f

$$\text{Graph}(f) = \{(x \mid f(x)) \mid x \in D\}$$

1.63 Definition.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$

f heißt in a stetig, wenn gilt :

$\forall (X_n) : X_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ für alle Folgen (x_n)

Die Folgenglieder sollen in Definitionsbereich liegen (Die in Definitionsbereich liegen können und den Grenzwert a haben)

* Ich weiß, dass $f(x_n)$ existiert ($f(x_n)$ ex.)

Folge $f(x_n)$ ex., soll einen Grenzwert besitzen. ✓

$f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ ✓✓

1.64 Bemerkung.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

★ Grenzwertbildung und Funktion Wertberechnung sind bei stetig Funktion in der Reihenfolge vertauschbar !

1.65 Berechnung.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

d.h für jede Folge x_n , die gegen a konvergiert, konvergiert die Folge der Funktionswerte gegen $f(a)$.

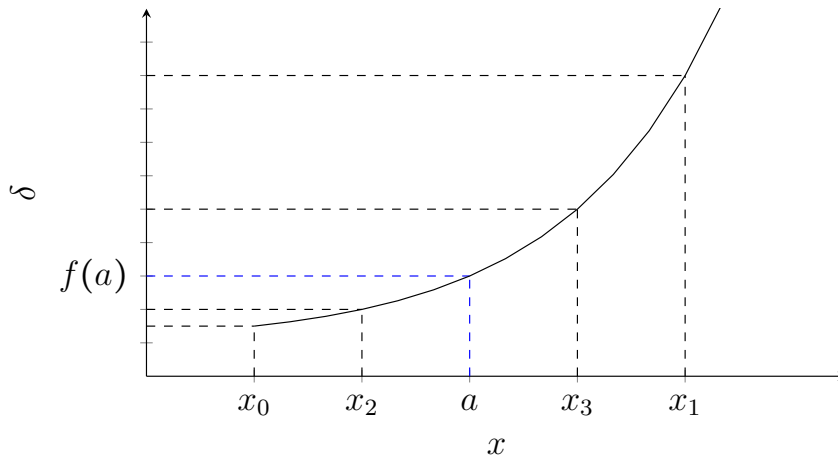
1.66 Bemerkung.

f stetig in $a \Leftrightarrow$

1) $f(a)$ und

2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ex. und

3) Grenzwert = Funktionswert $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**1.67 Beispiel.**

1)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)}$$

Ist $f(x)$ stetig in $a = 1$?

a) $f(1)$ ex ? nein , d.h f ist in $a = 1$ nicht stetig

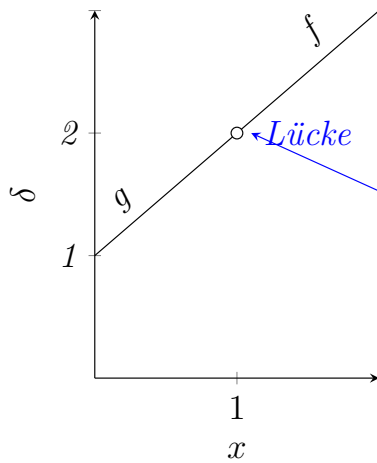
b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = ?$$

Sei (x_n) eine beliebige Folge und $x_n \in D(f)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{(x_n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 + 1 = 2$$

d.h Grenzwert ex. (und es ist 2).

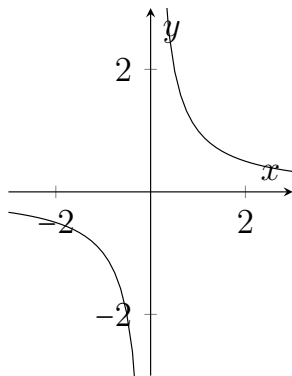


Man sagt, f hat an der Stelle 1 eine Lücke.

1.68 Beispiel.

(2)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 0$$



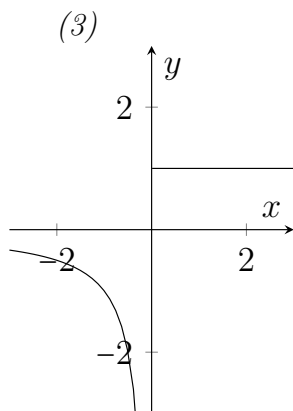
(i) betrachte $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$: d.h. wir betrachten alle Folgen (x_n)

$$X_n \in D, X_n \leq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n} = -\infty \end{aligned}$$

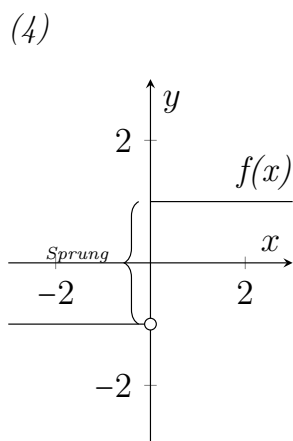
$$\text{d.h. } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ ex. nicht}$$

(ii) Betrachte $\lim_{n \rightarrow +0} f(x_n)$, ex. nicht



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases} \quad a = 0 \quad , \quad f(0) = 1 \quad ex.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad ex. \text{ nicht}$$



$$f(x) = \underbrace{\operatorname{sgn}(x)}_{\text{sprung}} = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\neq \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 & ex. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 & ex. \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad ex. \text{ nicht}, \quad 0 \text{ hei\u00dft Sprungstelle}$$

1.69 Definition.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$ hei\u00dft **stetig**, wenn f f\u00fcr alle $a \in D$ **stetig**

1.70 Beispiel.

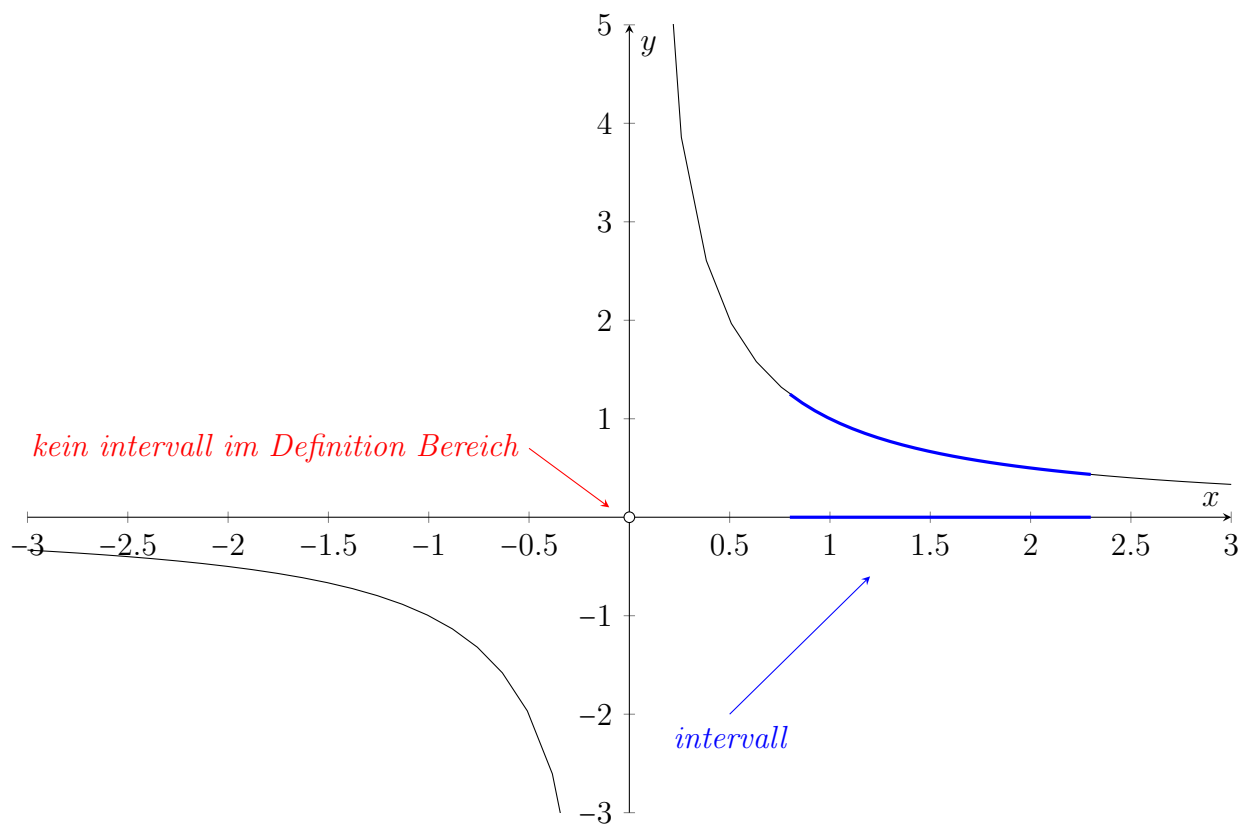
elementare Funktionen und deren Verfügungen sind stetig auf dem gesamten Definitionsbereich.

Z.B

Polynomfunktion , rationale Funktionen, Winkelfunktionen , Potenzfunktionen , Wurzelfunktionen , Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktion.

1.71 Beispiel.

$f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$ ist stetig auf dem gesamten Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



1.72 Beweis.

Sei $a \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (d.h. $a \neq 0$)

$$f(a) = \frac{1}{a} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad (2)$$

Sei x_n eine beliebige Folge und $x_n \in \underbrace{D}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \quad \text{ex.}$$

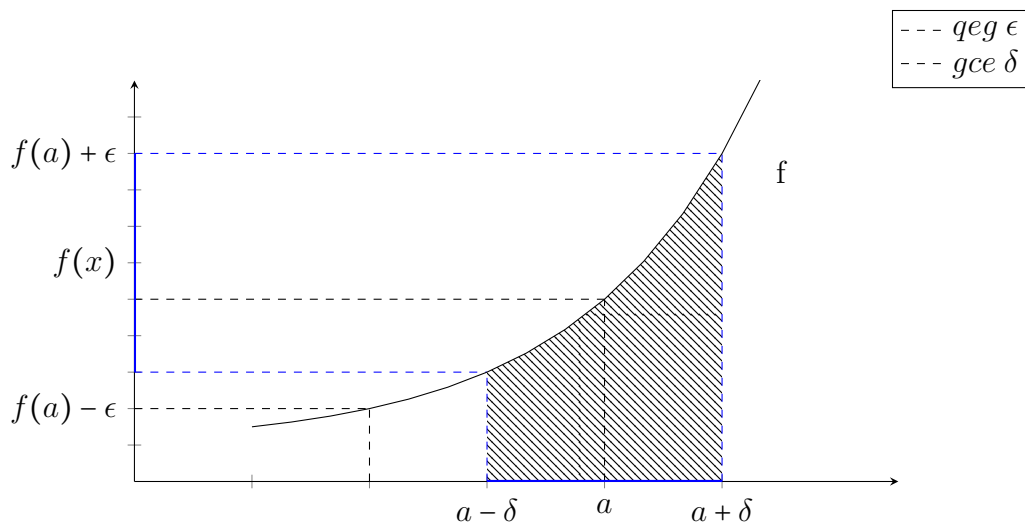
1.17.1 Rechenregeln für Funktionen (GWS anwenden)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x), \text{ wo } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) \pm g(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$$

1.73 Satz.

$$f : D \Rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R} \text{ ist in } a \in D \text{ stetig} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad (1.73.1)$$



1.18 Vorlesung 6

$$|x - a| < \delta$$

$$|x - a| = \begin{cases} x - a, & x - a \geq 0 \\ -(x - a), & x - a < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - a, & x \geq a \\ a - x, & x < a \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq a : x - a < \delta \Rightarrow x < a + \delta \\ x < a : a - x < \delta \Rightarrow a - \delta < x \end{cases} \Rightarrow$$
(1.73.2)

$$\begin{cases} a \leq x < a + \delta \\ a + \delta < x < a \end{cases} \quad (1.73.3)$$

1.18.1 Ergebnis

$$|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$$

$$\Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ offenes Intervall}$$

$$|x - a| < \delta$$

x liegt in der δ -Umgebung von a

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \text{ liegt in der } \epsilon\text{-Umgebung von } f(a)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \quad \epsilon > 0$$

$$I\left(\frac{1}{e}\right) = I(e^{-1}) = 1 \cdot k \quad \text{rell} \quad I(e^{-n}) = I(\underbrace{e^{-1} \dots e^{-1}}_n) = I(e^{-1}) + \dots + I(e^{-1}) = k \cdot n \quad (1.73.4)$$

$$\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} : I(e^{-\frac{n}{m}}) = k \cdot \frac{n}{m}, \text{ denn} \quad (1.73.5)$$

$$kn = I(e^{-n}) = I(e^{-\frac{n}{m} \cdot m}) = I(\underbrace{e^{-\frac{n}{m}} \dots e^{-\frac{n}{m}}}_m) + \dots + I(e^{-\frac{n}{m}}) = I(e^{-\frac{n}{m}}) + \dots + I(e^{-\frac{n}{m}})$$
(1.73.6)

$$r \in \mathbb{R}_+ : I(e^{-r}) = ? \quad (1.73.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{q_n}_{\in \mathbb{Q}_+} = r$$

$$I(e^{-r}) = I(e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n)}) = I(e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{q}{n})}) \stackrel{e \text{ stetig}}{\stackrel{!}{=}} I(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-q_n}) \stackrel{I \text{ stetig}}{\stackrel{!}{=}} \lim_{n \rightarrow \infty} I(e^{-\frac{q}{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} k \cdot q_n = k \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} q_n}_r = k \cdot r$$

$$I\left(\frac{1}{e}\right) = I(e^{-1}) = \frac{1}{k} \text{rell}$$

$$I(p) = I(e^{\ln p}) = \underbrace{k}_{>0} (-\ln p) = \underbrace{-k}_{<0} \ln p$$

1.74 Beispiel.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \quad (\text{rational}) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (\text{irrational}) \end{cases}$$

stetig für welche a ?

1. Fall : a rational

2. Fall : a irrational

a rational: a fest

sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$, beliebig $\exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |D(x) - D(a)| < \frac{1}{2}$ Sei δ beliebig, $\delta \neq 0$, x irrational, fest

$|x - a| < \delta \Rightarrow |0 - 1| = |1 - 1| = 0 < \frac{1}{2}$, Widerspruch

$\Rightarrow D$ ist nicht stetig, für jede $a \in \mathbb{R}$

Sei $\delta > 0$, beliebig, x rational, fest $|x - a| < \delta \Rightarrow \underbrace{|D(x) - D(a)|}_1 < \frac{1}{2} = \varepsilon \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$

Widerspruch

$\Rightarrow D$ ist nicht stetig für jede $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1.75 Satz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, stetig f besetzt in $[a, b]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum

1.76 Bemerkung.

Beide (unklar!) Veränderungen sind wichtig

1.77 Bemerkung (a,k).

$= x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b$

1.78 Satz (ZWS). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\frac{x_m}{x_M}$ eine globale Minimale stelle eine globale Maximale stelle

Sei $\hat{y} \in [f(x_m), f(x_M)]$: Dann ex. $\hat{x} \in [a, b]$ mit $\hat{y} = f(\hat{x})$

1.79 Bemerkung.

Jeder Zwischenwert wird als Funktionswert angenommen

1.80 Satz (Nullstellen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \cdot f(b) < 0$ Dann beliebig f in $[a, b]$ eine Nullstelle x_0 , d.h. $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$

Beweis. $f(a) < 0, f(b) > 0$ (analog für $f(a) > 0, f(b) < 0$)

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{a_1+b_1}{2} \text{ ist die gesamte Nullstelle} \\ < 0, & a_2 = \frac{a_1+a_2}{2}, b_2 = b_1 \\ > 0, & a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \end{cases}$$

usw. $\frac{a_2+b_2}{2}$ berechnen

$$f(\cdot) \begin{cases} = 0 \\ < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Betrachte (a_n)

Stetigmax

sei $\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: c}_{ex.}$

sei $\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: c}_{ex.}$

$a \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$ ex. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

beschränkt $\Rightarrow konvergent$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a - b|}{2^{n-1}} \\
 &= |a - b| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
 &= |a - b| \cdot 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

Betrachte (b_n)

Stetigmax

beschränkt $\Rightarrow konvergent$

Falls keine Nullstelle beim bilden von a_n, b_n gefunden wurden

$$\left. \begin{aligned}
 f(c) &= f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \stackrel{fstetig}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq 0 \\
 &= \\
 f(c) &= f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) \stackrel{fstetig}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \leq 0
 \end{aligned} \right\} f(c) = 0$$

□

1.19 Vorlesung 7

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \notin D$$

$$\underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = r \in \mathbb{R}}_{x \neq a} \Leftrightarrow \forall (x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ und } x_n \in D$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = r$$

1.81 Beispiel.

$$GWS \text{ nicht anwendbar } \lim_{x \rightarrow 0} \overbrace{x \sin x}^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.0 = 0$$

1.82 Bemerkung.

$$GWS \text{ nicht anwendbar } \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(x \sin \frac{1}{x})}_{f(x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

1.83 Definition.

Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$

$x_0 \in (a, b) \Leftrightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ und $a < x_0 < b$ (\Leftrightarrow (skizzenotcomplate))

f ist in x_0 differenzierbar : $\Leftrightarrow f'(x_0) := \lim_{\substack{x \rightarrow f(x) \\ f \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert ($f'(x_0) \in \mathbb{R}$)

Falls der Grenzwert ex., nennt man $f'(x_0)$ die erste Ableitung von f in x_0 .

Existiert $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in (a, b)$, dann nennt man $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mapsto f'(x_0)$ die erste Ableitung von f .

1.84 Beispiel.

$f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, r)$ $r \in \mathbb{R}_{>0}$, r fest und $x_0 \in (0, r)$, ges: $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{(x_0 - x)}{x - x_0(x - x_0)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \underbrace{\left(-\frac{1}{x_0}\right)}_{\text{konst.}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{1}{x} \text{ stetig F.}} = -\frac{1}{x_0} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x}$$

$$\stackrel{\frac{1}{x} \text{ stetig F.}}{\downarrow} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$f': (0, r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ in die erste Abbildung von $f(x) = \frac{1}{x}$

1.19.1 tafelwerk

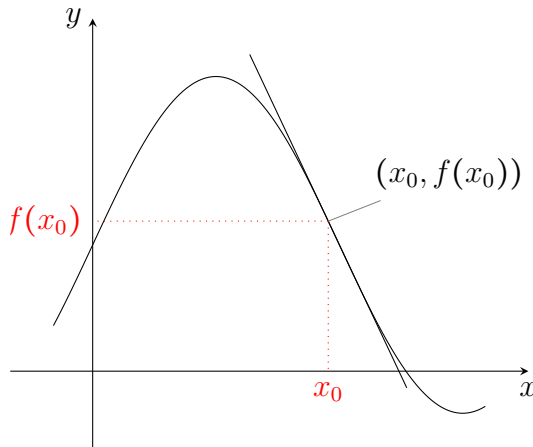
f f'

x^n nx^{n-1}
 $\downarrow n = -1$ \downarrow

$\frac{1}{x}$ $-\frac{1}{x^2}$

1.85 Satz. f in x_0 differenzierbar $\Rightarrow f$ in x_0 stetig

Beweis. Sei f in x_0 d.b $\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ex. ... □



Die Linie repräsentiert die Tangente ((T)) an den Grenzwert von $f(x_0)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1.19.2 Tangente Gleichung

$$T: t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1.86 Bemerkung.

$f'(x_0)$ gibt die Ableitung der Tangente an den Grenzwert der Funktion f im Punkt $x_0, f(x_0)$ an.

1.20 Berechnen an $f'(x)$ Ableitungsregeln:-

1.20.1 Linearität:-

Sei $\underbrace{f(x) \text{ und } g(x)}_{h'(x)}$ gegeben sind, dann wie sieht die Ableitung von $h'(x)$?

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\underbrace{r f(x)}_{h(x)}' = \underbrace{r}_{\in \mathbb{R}} f'(x)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

1.20.2 Produktregel:-

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

1.20.3 kettenregel:-

$$\underbrace{(f \circ g)'(x)}_{f(g(x))'} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

1.20.4 Quotientenregeln:-

In Tafelwerk :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Herleitung :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

1.87 Bemerkung (Tafelwerk).

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

1.88 Beispiel.

$$\begin{aligned} (\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{1}{(\cos(x))^2} \\ &= 1 + (\tan(x))^2 \end{aligned}$$

1.20.5 Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} zu f

1.89 Definition.

Ist $y = f(x)$ eine umkehrbare differenzierbare Funktion, dann ist die Umkehrfunktion $x = g(y)$ differenzierbar und es gilt: $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ oder $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ für $f'(x) \neq 0$.

Überlicherweise verräucht man die Variablen x, y und schreibt $y = g(x)$ und $y' = g'(x)$.

1.90 Beispiel.

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

Beweis. Der Beweis ist einfach. Man geht wieder von der Definition der Ableitung aus:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Nutzt man die Potenzregeln $e^{x+h} = e^x \cdot e^h$ so ergibt sich :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

und weil $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ dann Also $f'(e^x) = e^x$

□

1.91 Bemerkung.

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{identisch}$$

$$e^{\ln(x)} = x \quad | \text{Abb}$$

$$e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = 1$$

$$\Rightarrow \ln(x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

1.92 Beispiel.

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f^{-1}(x) = \ln x$$

$$(f^{-1}(x))' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

1.93 Beispiel.

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + (\tan(x))^2$$

$$f^{-1}(x) = \arctan(x) = x \quad | \text{Abl.}$$

$$\Rightarrow 1 + \underbrace{(\tan(\arctan(x)))^2}_x (\arctan(x))' = 1 \Rightarrow (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

1.21 Vorlesung 8

1.94 Definition.

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ heißt Potenzreihe Dabei gilt $a_0, a_1 \dots \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$, x ist eine reelle veränderlich x_0 heißt Mittelpunkt der Potenzreihe.

1.95 Bemerkung.

$(f_k(x))_{k=0}^{\infty}$ mit $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$. Folge von Funktionen $f_k(x)$

$$k = 0, f_0(x) = a_0(x - x_0)^0 = a_0 \times 1 = a_0$$

$$k = 1, f_1(x) = a_1(x - x_0)^1$$

$$k = 2, f_2(x) = a_2(x - x_0)^2$$

$(\sum_{k=0}^n f_k(x))_{n=0}^{\infty}$ Folge von Partielle Summen, Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

$$f_0(x)$$

$$f_0(x) + f_1(x)$$

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)$$

1.96 Bemerkung.

wir fragen nicht nach der Konvergenz dieser Folge sondern für welche x ist diese Folge konvergent

1.97 Beispiel.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k} (x - 0)^k$$

für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergent ?

Wurzelkriterium für absolute konvergent :

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\text{die potenzreihe}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} |x|$$

$$= \frac{2}{3} |x| \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3} |x| < 1$$

$$PR \text{ abs. konv.} \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{2}$$

Wurzelkriterium:

$$\frac{2}{3} |x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{3}{2} \Leftrightarrow PR \text{ div}$$

$x = \frac{-3}{2}$ einsetzen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k} \left(\frac{-3}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ div}$$

$x = \frac{3}{2}$ einsetzen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ kon.}$$

1.98 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \frac{1}{k} (x-7)^k \text{ ist für } x \in \left(7 - \frac{3}{2}, 7 + \frac{3}{2}\right) \text{ abs konvergent}$$

1.99 Definition.

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine P.R. dann ex. ein $r \in \mathbb{R} \geq 0$ oder $x = \infty$, so dass die P.R für alle x mit $|x - x_0| \leq r$ oder $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent ist. Dieser (r) heißt **Konvergenzradius** der PR

1.100 Bemerkung.

Der konvergenzradius r ist unabhängig von Mittelpunkt X_0

1.101 Bemerkung.

Jede PR ist für $x = x_0$ abs. konvergent, denn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = 0$
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Reihe mit konvergenzradius r Dann kann eine Funktion f definieren

$$f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k}_{\text{Grenzwert der PR}}$$

1.102 Bemerkung.

wegen der abs Konvergenz ist diese Funktion f - Stetig auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ bsw. \mathbb{R} - beliebig oft differenzierbar.

1.103 Bemerkung.

Analog kann man PR über \mathbb{C} definieren. Z.B $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ($z \in \mathbb{C}$) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z - 0)^k$ ist für abs. konvergent. Quotienten Kriterium :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{k+1} \times k!}{z^k (k+1)!} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|z|}{k+1} = |z| \times \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1}}_0 < 0$$

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, Z \mapsto \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}_{\underbrace{\exp(z)}_{e^z}}$$

$$Z = \exp(i\varphi) = e^{i\varphi}.$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \frac{(i\varphi)^0}{0!} + \frac{(i\varphi)^1}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} \\ &= 1 + i \frac{\varphi^1}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^5}{5!} \dots \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(\varphi)} + i \times \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(\varphi)} \end{aligned}$$

Approximation stetiger Funktionen $f(x)$ durch **Taylorpolynom** $p_n(x)$:
(1)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)^1$$

= $t(x)$ Tangente an den Graph von $f(x)$ in Punkt $(x_0, f(x_0) = p_1(x))$
lineare Approximation ($n = 1$) Linearisierung
fehlende Skizze !!!

1.104 Bemerkung.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= p_1(x_0) \\ f'(x_0) &= p_1'(x_0) \end{aligned}$$

(2)

Approximation von $f(x)$ durch Taylor-Polynome $p_n(x)$ von Grad $\leq n$ in der Umgebung von x_0

$$\underbrace{f(x) \approx p_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{p_n(x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}$$

$$f(x_0) = f^0(x_0) = \frac{f^0(x_0)}{0!}$$

1.105 Bemerkung.

Taylor-Polynom $P_n(x)$ von Polynomfunktionen $f(x)$ von Grad n stimmen mit $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \approx \dots \text{ an der Stelle } x_0 = 0$$

$$f'(x) = ((1+x)^{-1})' = \frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = 1 \times 2 \frac{1}{(1+x)^3} = 1 \times 2(1+x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 1 \times 2 \times 3 \frac{1}{(1+x)^4} = 1 \times 2 \times 3(1+x)^{-4} \text{ usw.}$$

$$f^k(x) = (-1)^k \cdot k! \frac{1}{1+x} \quad \text{beweis durch vollst. Induktion}$$

$$f^k(0) = (-1)^k k!$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(0)}{k!} (x-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \underbrace{(-1)^0 x^0}_{1} - x^1 + x^2 - x^3 \dots$$

$$\{-x^n, n \text{ ungerade} \}$$

$$\{x^n, n \text{ gerade} \}$$

1.22 Vorlesung 9

1.106 Beispiel.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$ gesucht

1.22.1 Taylor-Polynom $P_n(x)$ von $f(x)$

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^2 - 1 & f(0) = 1 & f(1) = 0 \\ f'(x) = 2x & f'(0) = 0 & f'(1) = 2 \\ f''(x) = 2 & f''(0) = 2 & f''(1) = 2 \\ f'''(x) = 0 & f'''(0) = 0 & f'''(1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \underbrace{f(0) + f'(0)(x-0)}_{t(x) \text{ lineare Approximation}} + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots \\ &= -1 + 0x + \frac{2}{2!}x^2 + 0 = -1 + x^2 = f(x) \end{aligned}$$

Das Polynom ist bei der Entwicklung zu einem Taylor-Polynom zum selben Polynom zurückgekommen

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \dots \\ &= 0 + 2(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + 0 \\ &= 2x - 2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \end{aligned}$$

1.107 Beispiel.

gegeben : $f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$ gesucht : $p_2(x)$ für $x_0 = 0$

Methode des Impliziten Differenzieren

$$\begin{aligned} f(x)\cos(x) + f(x)(-\sin(x)) &= e^x \quad | \quad \text{abl.} \\ f'(x)\cos(x) + f(x)(-\sin(x)) &= e^x \quad | \quad \text{abl.} \\ f''(x)\cos(x) + f'(x)(-\sin(x)) + f'(x)(-\sin(x)) + f(x)(-\cos(x)) &= e^x \\ f(0)\cos(0) &= e^0 \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(0) \times 1 + f(0) \times 0 &= 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(0) \times 1 + f(0) \times (-1) &= 1 \Rightarrow f''(0) = 2 \\ p_2(x) &= 1 + 1x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + x + x^2 \\ f(x) &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

1.108 Beispiel.

$$f^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$$

Induktionsanfang

$$f^0(x) = f(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^0 \frac{0!}{(x+1)^{0+1}} = 1 \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ w.A.}$$

Induktionsschritt**Induktionsvoraussetzung**

Es gelte $f^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$ für $k \in \mathbb{N}$

Induktionsbehauptung : Dann gilt

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k+1)} \frac{(k+1)!}{(x+1)^{(k+2)}}$$

Induktionsbeweis

(.....)

$$\begin{aligned} f^{(f+1)}(x) &= (f^x(x))' = \left((-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{(k+1)}} \right)' \\ &= (-1)^k k! (x+1)^{-(k+1)} \\ &= (-1)^k k! (-(k+1)(x+1))^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! \frac{1}{(x+1)^{k+2}} \Rightarrow \text{Ind Beh. ist dann bewiesen.} \end{aligned}$$

Die behauptung gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

1.109 Beispiel.

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$p_1(x) = 1 - x$$

$$p_2(x) = 1 - x + x^2$$

$$p_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3$$

1.110 Bemerkung.

Bei : $p_2(x)$ wird der Fehler für große werte von x größer der Fehler bei $p_1(x), p_2(x)$

1.22.2 Taylor-Formel:

$$F(x) = p_n(x) + \underbrace{R_n(x, x_0)}_{=n\text{-tes Restglied}} \quad R_n(x, x_0) \text{ Fehler bei der Approximation.}$$

1.111 Satz. Darstellung von $R_n(x, x_0)$ nach Lagrange Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ und stetig differenzierbar Funktion und $x_0 \in (a, b)$ Dann gilt : $f(x) = p_n(x) + R_n(x, x_0)$ und $\forall x \in (a, b) \exists z \in \mathbb{R}$ zwischen x und x_0 :

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}$$

1.112 Beispiel.

$$f(x) = e^x, \quad x = 0$$

$$f^k(x) = e^x$$

$$f^k(0) = 1 \Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^k(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x, 0) \text{ und } R_n(x, 0) = \frac{e^z}{(n+1)!} y^{n+1} \quad z \in (x, 0)$$

$$\text{wir betrachten } f(x) = e^x \text{ f\"ur } |x| \leq 1$$

$$|R_n(x, 0)| = \left| \frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^1}{(n+1)!} \leq 10^{-2} \text{ f\"ur } n = 5$$

1.22.3 Näherungsformel fur e^x

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \text{ f\"ur } x \leq 1$$

1.113 Definition.

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ heißt **Taylor Reihe** von f an der Stelle x_0

1.114 Bemerkung.

(1) Nicht fur jede Funktion $f(x)$ ist die **Taylor-Reihe konvergent**

(2) Ist die Taylor-Reihe konvergent, dann muss der Grenzwert die Funktion f sein.

(3) Ist die Taylor-Reihe konvergent gegen f , d.h. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, heißt die Funktion f **reell analytisch**

1.115 Beispiel.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ mit } x \in (-1, 1) \text{ ist reell analytisch}$$

Taylor-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ hat Konvergenzradius 1(...) und Mittelpunkt 0

1.116 Satz. Sei $|x| \leq 1$ Dann gilt: $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ ist die Taylor-Reihe Darstellung von $f(x)$

1.22.4 Rechnen mit Potenzreihen:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k := a(x)$, $b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ mit Konvergenzradius r_1 fur $a(x)$, r_2 fur $b(x)$ sei $r := \min \{r_1, r_2\}$

Dann gilt :

$$a(x) \pm b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) (x - x_0)^k \text{ f\"ur } x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

$$C \times a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k (x - x_0)^k \text{ f\"ur } x \in (x_0 - r, x_0 + r) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$a(x).b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0)(x-x_0)^k$$

$\frac{1}{b(x)}$ für $b(x) \neq 0$ kann mit der Methode unbestimmten koeffizienten

1.23 Vorlesung 10

1.24 Spezielle Ableitungen

$$f(x) = x^x \quad x > 0$$

$$\ln(f(x)) = \underbrace{\ln x^x}_{x \ln x} \Rightarrow \frac{1}{p(x)} f'(x) = 1 \times \ln x + x \underbrace{\frac{1}{x}}_1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{x^x}_{f(x)} (\ln x + 1) \text{ logarithmisches Differenzieren}$$

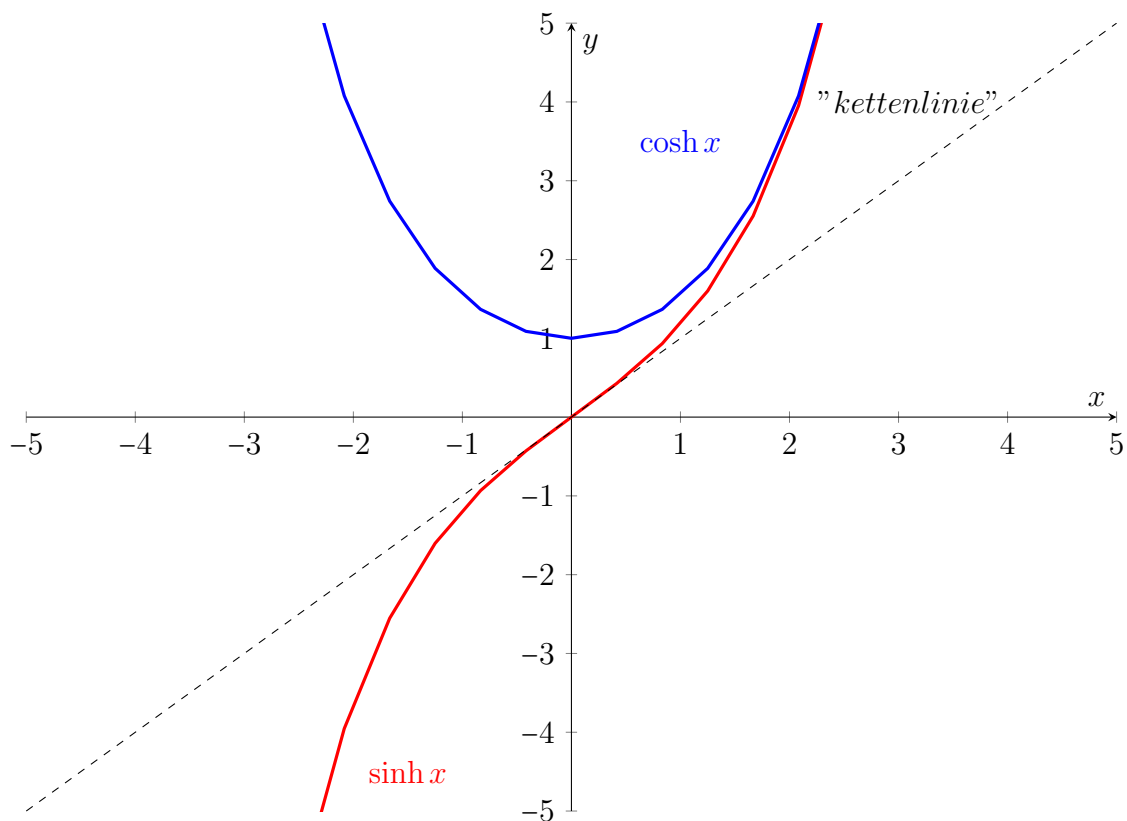
$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{e^{x \ln x}}_{x^x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ Kosinus Hyperbolicus}$$

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



gesucht: **Taylor-Reihe Entwicklung** für $\cosh x$

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
e^{-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Reihe ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\leadsto \cosh x &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \\
&\quad + \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

1.25 Spezielle Grenzwerte

1.25.1 Regeln von Bernoulli l'Hospital -

Seien $f(x)$, $g(x)$ reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf (a, b) und $f(x_0) = g(x_0) = 0$

gesucht:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(z_f)(x - x_0)^2}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(z_g)(x - x_0)^2} \\
&= \frac{x - x_0}{x - x_0} \cdot \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(z_f)(x - x_0)}{g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(z_g)(x - x_0)} \\
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(z_f) \cdot 0}{g'(x_0) + \dots \cdot 0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{falls dieser existiert} \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{falls der Grenzwert existiert}
\end{aligned}$$

1.117 Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

1.118 Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin(x) + \cos(x) - 2}{x^3 \cdot \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{3x^2 \cos(x) - x^3(-\sin(x))} \dots\dots\dots = \frac{1}{3}$$

1.119 Bemerkung.

Diese Methode kann man durch anwenden für $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$. und für $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ falls der Grenzwert existiert.}$$

falls der Grenzwert existiert.

1.120 Bemerkung.

Man kann durch geeignetes Umformen auch Grenzwerte vom Typ $0 \cdot \infty$ berechnen, sowie $0^0, 1^0$

1.121 Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x =$$

1. Mögl. $\lim_{x \rightarrow 0+} \dots = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$

2. Mögl. $\lim_{x \rightarrow 0+} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x \cdot 1} (-1) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$

1.122 Beispiel.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\ln x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^1 = e$$

List of Theorems

1.1	Definition (Folgen)	2
1.6	Definition (Beschränktheit)	4
1.11	Definition (Monoton)	5
1.15	Definition (Konvergenz,Divergenz)	6
1.16	Definition (grenzwert)	6
1.23	Definition (Nullfolge)	8
1.27	Definition (Unendliche Grenzwert)	9
1.41	Definition (Unendliche Reihen)	14
1.43	Definition (wert der Reihe)	14
1.55	Definition (absolute Reihe)	19
1.61	Definition	21
1.63	Definition	21
1.69	Definition	24
1.83	Definition	30
1.89	Definition	32
1.94	Definition	34
1.99	Definition	35
1.113	Definition	39

List of Theorems

1.4	Beispiel	3
1.7	Beispiel	4
1.9	Beispiel	5
1.10	Beispiel	5
1.13	Beispiel	6
1.19	Beispiel	8
1.21	Beispiel	8
1.25	Beispiel	8
1.32	Beispiel	10
1.33	Beispiel	10
1.34	Beispiel	11
1.36	Beispiel	11
1.37	Beispiel	12
1.38	Beispiel	13
1.39	Beispiel	13
1.45	Beispiel	14
1.46	Beispiel	15
1.47	Beispiel	16
1.48	Beispiel	16
1.49	Beispiel	17
1.50	Beispiel	17
1.52	Beispiel	18
1.56	Beispiel	19
1.59	Beispiel (QK)	20
1.60	Beispiel (WK)	20
1.67	Beispiel	22
1.68	Beispiel	23
1.70	Beispiel	25
1.71	Beispiel	25
1.74	Beispiel	28
1.81	Beispiel	30
1.84	Beispiel	30
1.88	Beispiel	32
1.90	Beispiel	33
1.92	Beispiel	33
1.93	Beispiel	33

1.97 Beispiel	34
1.98 Beispiel	35
1.106Beispiel	37
1.107Beispiel	37
1.108Beispiel	37
1.109Beispiel	38
1.112Beispiel	38
1.115Beispiel	39
1.117Beispiel	43
1.118Beispiel	43
1.121Beispiel	43
1.122Beispiel	43