Technische Universität Dresden • Fakultät Informatik

Mathematische Methoden für Informatiker

Mitschrift zur Vorlesung Sommer Semester 2019

Bachelor of Science (B.Sc.)

Dozent: Prof. Dr. Ulrike Baumann
vorgelegt von
"..."

Abdelshafi Mohamed
m.abdelshafi@mail.de

Mahmoud kiki
mahmoud.kiki@tu-dresden.de

...

Tag der Einreichung: 15. April 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Kapitel 1

Folge und Reihen

1.1 Folgen

1.1 Definition (Folgen).
Ein folge ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \underbrace{\mathbf{M}}_{Menge} : \text{n} \mapsto \underbrace{X_n}_{folgenglied}$$

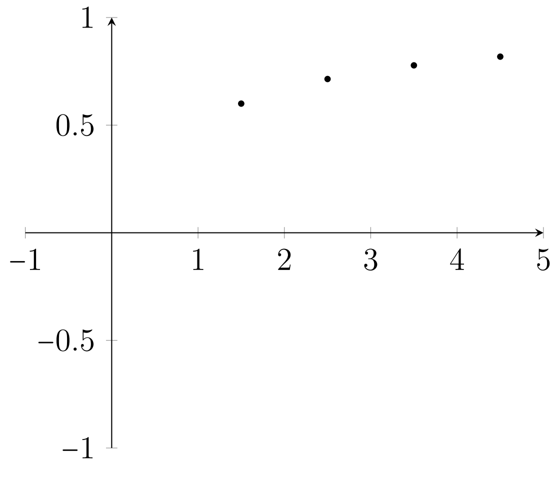
1.2 Bemerkung.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \mathbb{R} \quad & \textit{reelewert Folge} \\ \mathbf{M} = \mathbb{C} \quad & \textit{komplexwertig Folge} \\ \mathbf{M} = \mathbb{R}^n \quad & \textit{vertical Folge} \end{aligned}$$

Bezeichnung (X_n) mit $(X_n) = \frac{n}{n+1}$

Aufzählung der folglieder: 0 , $\frac{1}{2}$,$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ...

1.3 Bemerkung.
zuwerten wird $\mathbb{N}$ *durch* $\mathbb{N}$ *0,1 ... erstellt.*



1.4 Beispiel.

1. *Konstante Folge* (X_n) *mit* $\quad X_n = a \in \mathbf{M}, a \ldots$

$$X_n = a \in \mathbf{M}$$

2. *Harmonische Folge* (X_n) *mit* $X_n = \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1$

3. *Geometrische folge* (X_n) *mit* $X_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}, \ldots$

4. *Fibonaccifolge* (X_n) *mit*

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)$$

5. *Fibonacci folgen* (X_n)

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_1 &= 1 \\ X_n + 1 &= X_n + X_{n-1} \quad (n > 0) \end{aligned}$$

6. *conway folge*

$$1, 11, 21, 1211, 111217, 312211 \ldots$$

7. *folge aller Primzahlen:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

1.2 Rechnen mit Folgen

$$\begin{aligned} (M = \mathbb{R} \quad &oder \quad M = \mathbb{C}) \\ (X_n) + (y_n) &:= (X_n + y_n) \\ K(X_n) &:= (KX_n) \in \mathbb{R} \quad oder \quad \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

1.5 Bemerkung.
Die Folge bildet ein Vektorraum.

1.6 Definition.

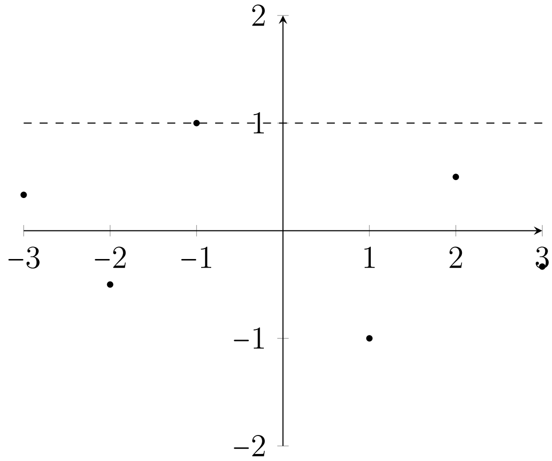
1. *Eine reellwertige Funktion ist in der Mathematik eine Funktion, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind.*
2. *Eine reellwertige heißt beschränkt wenn gilt*

$$\exists r \in \mathbb{R}_{+}, \forall r \in \mathbb{N} : \underbrace{|X_n|}_{\textit{Betrag einer reellen oder komplexer Zahl}} \leqq r$$

1.7 Beispiel.

$$(X_n) \quad mit \quad X_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{5}, \ldots$$

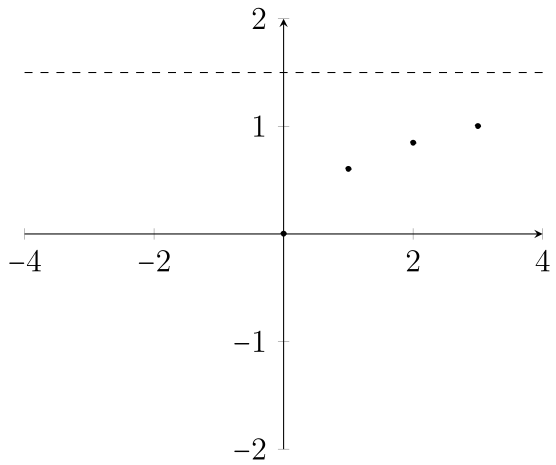


1.8 Bemerkung.
(X_n) *ist beschränkt mit* $r = 1$ *denn* $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leqq 1 \hookleftarrow r$

1.9 Beispiel.

$$(X_n) \ mit \ X_n = (-1)^n \quad \frac{1}{n} + 1 \quad bechränkt \ r = 3/2$$

$$-3/2 \quad \leq X_n \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



1.10 Beispiel.
Standard:

$$\text{Die folge } \left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty} \text{ ist beschränkt durch 3}$$

$$\text{Zu zeigen:} \quad -3 \leq X_n \leq 3 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k . b^{n.k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n.k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \frac{n(n-1)-(n-k-1))}{k!}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots$$

1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)

1.11 Definition.
Die Folge (X_n) *heißt monoton* $\left\{\textit{wachsend fallend}\right\}$

$$\text{wenn} \quad \text{gilt}: \forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} X_n & \leq X_n + 1 \\ X_n & \geq X_n + 1 \end{cases}$$

man spricht von Streng monotonie wenn $\leqq$ *durch* $>$ *und* $\geqq$ *durch* $< \dots$

1.12 Bemerkung.

$$X_n \leq X_{n+1} \Leftrightarrow X_n - X_{n+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{X_n}{X_{n+1}} \leq 1$$

1.13 Beispiel.

$$(X_n) \text{ mit } X_0 \quad := 1, X_{n+1} \quad := \sqrt{X_n + 6}$$

ist Streng monoton wachsend Beweis mit Vollständiger Induktion

Standard Bsp: $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ *ist streng monoton wachsend*

1.14 Bemerkung.

monoton	*ja*	*nein*
Beschränkkeit	$(\frac{1}{n})$	$(-1)^n$
nein	(n)	$(-1)^n$

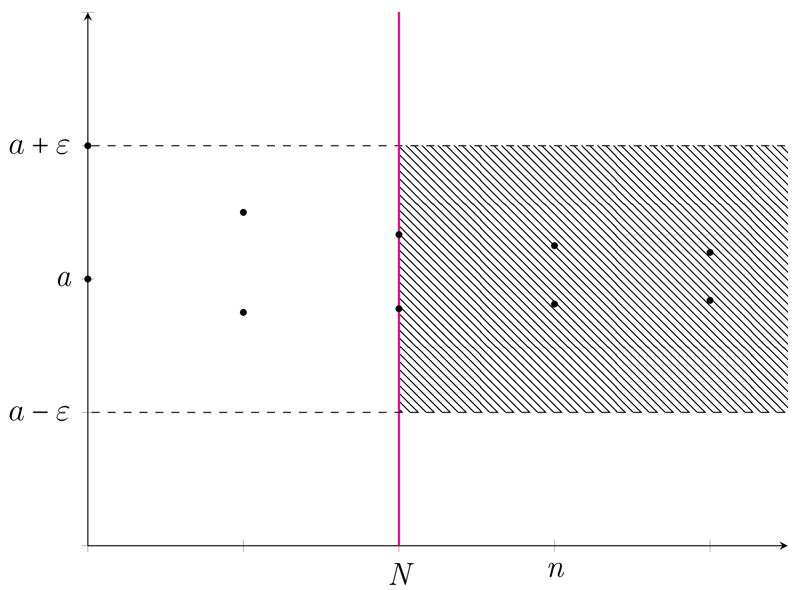
1.15 Definition.
(X_n) *heißt* ***Konvergenz*** *wenn* (X_n) *ein grenzwert hat.*
(X_n) *heißt* ***Divergenz*** *wenn sie keinen grenzwert hat.*

1.16 Definition (grenzwert)**.**
$a \in \mathbb{R}$ heißt grenzwert von (X_n), wenn gilt:

$$\underbrace{\forall \epsilon > 0}_{\textit{beliebes klein}} \qquad \underbrace{\exists \mathbf{N} \in \mathbb{N}}_{\textit{beliebes klein} \Rightarrow \underbrace{|X_n - a| < \varepsilon}_{a-\varepsilon \leq X_n \leq a+\varepsilon}} \qquad , \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \mathbb{N}$$

$$\textit{Sei } \varepsilon > 0; \varepsilon \textit{ fest}$$

$$\textit{alle folglieder} X_n \textit{ mit } n \; \geq \mathbb{N} \rightsquigarrow$$



ist die folge beschränkt , monoton ?

(X_n) konvergierend : $\iff$ $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \quad \in N \quad \forall n \in N$
$n \geq N \Rightarrow |X_n - a| < \epsilon$

1.17 Satz. *(X_n) konvergierend : $\Rightarrow$ Der Grenzwert ist eindeutig beschränkt.*

Beweis. Sei a eine Grenzwert von (X_n) , b eine Grenzwert von (X_n)
d.h sei $\epsilon > 0$,ϵ beliebig , ϵ fest

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a : |X_n - a| < \epsilon \tag{1.17.1}$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b : |X_n - b| < \epsilon \tag{1.17.2}$$

Sei max $N_a, N_b = N$ dann gilt :

$$n \geq N \Rightarrow |X_n - a| < \epsilon \tag{1.17.3}$$

und

$$|X_n - b| < \epsilon \Rightarrow |X_n - a| + |X_n - b| < 2\epsilon \tag{1.17.4}$$

Annahme :- a $\neq$ b , d.h $|a - b| \neq 0$

$$|a - b| = |a + 0 - b| = |(a - X_n) + (X_n - b)| \leq |X_n - a| + |X_n - b| < 2\epsilon$$

also $|a - b| < 2\epsilon$

1.18 Beispiel.

$$\epsilon = \frac{|a-b|}{\epsilon} \quad \textit{dann gilt } : |a - b| < 2\frac{|a-b|}{3}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3} \quad falls \quad Aussage, Widerspruch \quad also \quad ist \quad die \quad Annahme \quad falsch \quad also \quad gilt \quad a = b$$

□

1.19 Beispiel.
X_n mit $X_n = \frac{1}{n}$ (harmonische Folge)

Beweis. Sei $\epsilon > 0, \epsilon belibig, \epsilon fest$ gesucht : N mit $n \geq$ N

$$\Rightarrow |X_n - a| = |\frac{1}{n} = 0| = \frac{1}{n} < \epsilon \tag{1.19.1}$$

wähle N:= $\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$

□

1.20 Beispiel.
$\epsilon = \frac{1}{100}$ *, gesucht N mit $n \geq N$* $\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ *wähle* $N = 101$

Schreibweise: X_n hat den Grenzwert a Limes $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ X_n geht gegen a für n gegen Unendlich.

1.21 Definition.
X_n heißt Nullfolge ,wenn $\lim X_n = 0$ *gilt.*

1.22 Bemerkung.
Es ist leichter, die konvergente einer Folge zu beweisen, als den Grenzwert auszurechnen.

1.23 Beispiel.
$X_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{11-n}{9-n}\right)^9$

Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{-2}{3}$

1.24 Lemma.

$$\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n) \tag{1.24.1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{3}) + \left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \tag{1.24.2}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \tag{1.24.3}$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(\frac{1}{n}-1)}{n(\frac{9}{n}+1)}\right)^9 \tag{1.24.4}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{11}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{9}{n}+1)}\right)^9 \tag{1.24.5}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{11}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 1}\right)^9 \tag{1.24.6}$$

$$= \left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 11 \times \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-1)}{\lim\limits_{n\to\infty} 9 \times \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+1)}\right)^9 \tag{1.24.7}$$

$$\frac{1}{3} + (-1)^9 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \tag{1.24.8}$$

1.25 Definition.
Eine Folge (X_n) hat den unendliche Grenzwert ∞, wenn gilt :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \in N \quad \forall n \geq N : X_n > r$$

Schreibweise : $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \infty$

1.26 Bemerkung.
∞ ist keine Grenzwerte und keine reelle Zahl.

1.27 Bemerkung.
Grenzwertsätze gelten nicht für uneigentliche Grenzwerte.

1.28 Bemerkung.
gilt $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \infty$ dann schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = -\infty$

1.29 Beispiel.
X_n mit $X_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$, q fest.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & |q| = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ ex.nicht, & q \leq -1 \end{cases}$$

1.4 Konvergenzkriterien

(zum Beweis der Existenz eine Grenzwert, nicht zum berechnen von Grenzwert)

(1) X_n konvergent $\Rightarrow (X_n)$ beschränkt.

wenn (X_n) nicht beschränkt $\Rightarrow (X_n)$ nicht konvergent.

(2) Monotonie Kriterium: wenn (X_n) beschränkt ist können wir fragen ob (X_n) konvergent.

(X_n) beschränkt von Monotonie $\Rightarrow (X_n)$ konvergent.

1.30 Bemerkung.

1.31 Beispiel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11+1}{9-n} \quad ? \quad X_n = \frac{11+1}{9-n} = \frac{n}{n}\frac{\frac{11}{n}+1}{\frac{9}{n}-1} \tag{1.31.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11}{n}+1\right) = 1 \tag{1.31.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{n}+1\right) = -1 \tag{1.31.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(X_n) = \frac{1}{-1} = -1 \tag{1.31.4}$$

1.32 Lemma. *Seien $(x_n) = (y_n)$ Folgen auf $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n) = a$ und es gelte $x_n \le z_n \le y_n$ für fest alle "$n \in \mathbb{N}$*

Dann gilt für die Folge (Z_n) $\lim_{n\to\infty}(z_n) = a$

1.33 Beispiel.
Ist die Folge $(-1)^n\frac{1}{n})$ konvergent ?

$$-\frac{1}{n} \le (-1)^n(\frac{1}{n}) \le 1\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -(\frac{1}{n}) = -1$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = 0$$

1.34 Beispiel.

$$x_n \leq= \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \frac{a^{a-1}}{n-1!} \tag{1.34.1}$$

denn $x_n = 0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq y_n$ *, gesucht!* $\underbrace{y_n}_{\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0}$ *für hinreichend großes n.*

$$\begin{aligned}
\frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\leq \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{a}{(n-1)} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\
&\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\
&\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} \\
y_n &= (\frac{1}{2})^{n-k} \times \frac{a^k}{k!} \quad k \textit{ ist fest}
\end{aligned} \tag{1.34.2}$$

Es gilt $\frac{a^n}{n!} \leq y_n$ *für hinreichend großes n und* $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{n-k} \times \underbrace{\frac{a^l}{k!}}_{Konst} \\
&= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n \times \underbrace{\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{-k}}_{\in\mathbb{R}} \times \underbrace{\lim_{n\to\infty} (\frac{a^k}{k!})}_{\in\mathbb{R}} \\
&= 0.(\frac{1}{2})^{-k} \times \frac{a^k}{k!} = 0
\end{aligned} \tag{1.34.3}$$

1.5 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:

man kann oft durch lösen Fixpunktgleichung"berechnen.
$x_0 \quad , x_n + 1 = ln(x_n)$

1.35 Beispiel.

$$(x_n) \quad x_0 = \frac{7}{5} \quad , \quad x_n + 1 = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

Ü (x_n) *ist monoton fallend , beschränkt , konvergent .*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_n + 1 = a$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n + 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3}(\lim_{n\to\infty}(x_n))^2 + 2)$$

Fixpunktgleichung

$a = \frac{1}{3}(a^2 + 2)$, gesucht = a

$$3a = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Lösung: $a_1 = 2$ (keine Lösung), $a_2 = 1$

1.36 Beispiel.
(x_n) *mit* $(x_0) = c \in \mathbb{R}, c$ *fest* $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$
(1) (x_n) *beschränkt* ✓
(2) (x_n) *Monoton* ✓
Also (x_n) *konvergent*
Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. *Dann* $\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}_{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n) + \frac{c}{x_n} = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{c}) = a$

$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \Leftrightarrow a = \sqrt{c}$

1.37 Bemerkung.
Der Nachweis der konvergent der rekursiv definierte Folge darf nicht weggelassen werden, denn Z.B $x_0 = 2$, $x_n + 1 = x_n^2$ *2 , 4 ,16 ,256 , ... divergent gegen +* ∞

Annahme: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}_{a} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n^2}_{a} \Rightarrow a \in \{0, 1\}$

1.6 Reihen :

1.38 Definition.
Sei (a_n) *eine reellefolge (komplexwertig) Folge*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_a, a_1, \ldots, a_n,$$

heißt n-k heißt partielle Summe. (S_n) *heißt unendliche Reihe.*
schriebweise : $(S_n)^\infty$ = *bsw* (S_n)

$$\left(\sum_{l=0}^{n} a_l\right)$$

bzw

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right)$$

1.39 Bemerkung.
Reihen sind spezielle Folgen , alle konvergent oder divergent.

1.40 Definition.
Für eine konvergente Reihen wird der Grenzwert auch wert der Reihe genannt.
Schreibweise : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

bzw

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1.41 Beispiel.
geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

ist für $|q| < 1$ *konvergent . wert der Reihe für* $|q| < 1$ *:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

für $|q| < 1$

List of Theorems