

Technische Universität Dresden • Fakultät Informatik

Mathematische Methoden für Informatiker

Mitschrift zur Vorlesung Sommer Semester 2019

Bachelor of Science (B.Sc.)

Dozent: Prof. Dr. Ulrike Baumann
vorgelegt von

”...”

ABDELSHAFI MOHAMED
m.abdelshafi@mail.de

MAHMOUD KIKI
mahmoud.kiki@tu-dresden.de

...

Tag der Einreichung: 19. April 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Folge und Reihen	2
1.1 Folgen	2
1.2 Rechnen mit Folgen	3
1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)	5
1.4 Konvergenzkriterien	10
1.5 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:	12
1.6 Reihen :	13
1.6.1 Schreibweise	13
1.7 Rechenregeln für Regeln:	14
1.8 Reihen	15
1.9 Allgemeine harmonische Reihe	15
1.10 Exponentialreihe	16
1.11 Kriterium für Alternierende Reihe	17
1.12 Quotientenkriterium	17
1.13 Wurzelkriterium	17
List of Theorems	19
List of Theorems	20

Einleitung

Wir schreiben hier die vorlesungen von INF-120-1(Mathematische Methoden für Informatiker) mit. wenn Ihr Fragen habt oder Fehlern gefunden Sie können gerne uns eine E-mail schreiben oder Sie können einfach bei github eine [Issue \(link\)](#) erstellen. wir freuen uns wenn Sie mit uns mitschreiben möchten, oder helfen mit der Fehlerbehebung.

Abdelshafi Mohamed
Mahmoud Kiki

Kapitel 1

Folge und Reihen

1.1 Folgen

1.1 Definition (Folgen).

Ein Folge ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \underbrace{\mathbf{M}}_{\text{Menge}} : n \mapsto \underbrace{x_n}_{\text{Folglied}}$$

1.2 Bemerkung.

$\mathbf{M} = \mathbb{R}$ reellewertige Folge

$\mathbf{M} = \mathbb{C}$ komplexwertige Folge

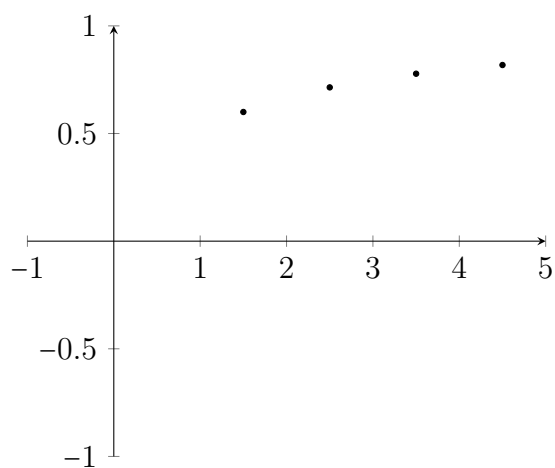
$\mathbf{M} = \mathbb{R}^n$ vektorielle Folge

Bezeichnung (x_n) mit $(x_n) = \frac{n}{n+1}$

Aufzählung der Folgenglieder: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

1.3 Bemerkung.

zuwerten wird \mathbb{N} durch $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ erstellt.



1.4 Beispiel. 1. *Konstante Folge* (x_n) mit $x_n = a \in \mathbf{M}, a \dots$

$$x_n = a \in \mathbf{M}$$

2. *Harmonische Folge* (x_n) mit $x_n = \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1$

3. *Geometrische folge* (x_n) mit $x_n = q^n, q \in \mathbb{R}, \dots$

4. *Fibonaccifolge* (x_n) mit

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

5. *Fibonacci folgen* (x_n)

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = 1$$

$$x_n + 1 = x_n + x_{n-1} \quad (n > 0)$$

6. *conway folge*

$$1, 11, 21, 1211, 111217, 312211 \dots$$

7. *folge aller Primzahlen:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

1.2 Rechnen mit Folgen

$$(M = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad M = \mathbb{C})$$

$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$$

$$K(x_n) := (Kx_n) \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \in \mathbb{C}$$

1.5 Bemerkung.

Die Folge bildet ein Vektorraum.

1.6 Definition.

1. Eine reellwertige Funktion ist in der Mathematik eine Funktion, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind.
2. Eine reellwertige heißt beschränkt wenn gilt

$$\exists r \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{|x_n|}_{\text{Betrag einer reellen oder komplexer Zahl}} \leq r$$

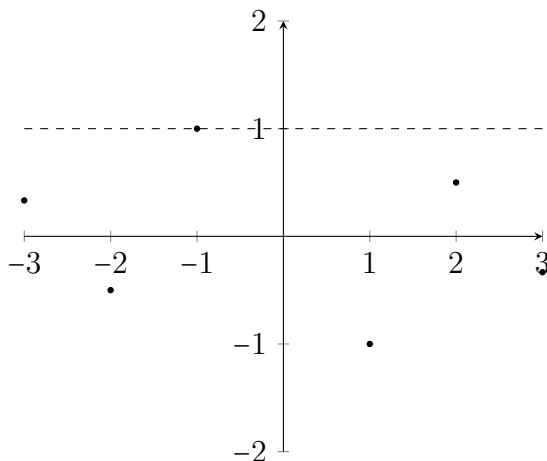
Betrag einer reellen oder komplexer Zahl

1.7 Beispiel.

$$(x_n) \quad \text{mit} \quad x_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$
$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{5}, \dots$$

1.8 Bemerkung.

(X_n) ist beschränkt mit $r = 1$ denn $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leq 1$



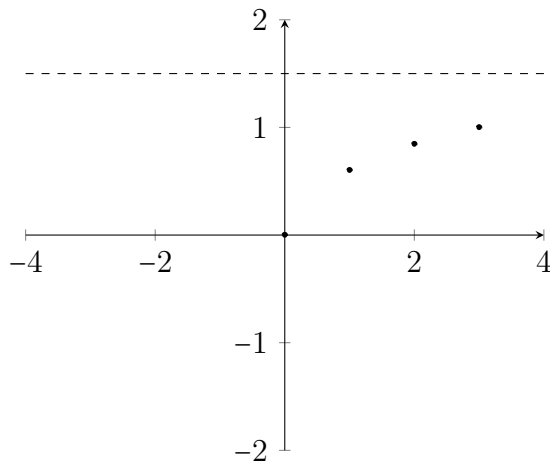
1.9 Bemerkung.

(x_n) ist beschränkt mit $r = 1$ denn $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leq 1 \leftrightarrow r$

1.10 Beispiel.

$$(x_n) \quad \text{mit} \quad x_n = (-1)^n \frac{1}{n} + 1 \quad \text{beschränkt } r = 3/2$$

$$-3/2 \leq x_n \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



1.11 Beispiel.

Standard:

Die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt durch 3

Zu zeigen: $-3 \leq x_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)

1.12 Definition.

Die Folge (x_n) heißt monoton $\{ \text{wachsend fallend} \}$

$$\text{wenn gilt: } \forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} x_n \leq x_{n+1} \\ x_n \geq x_{n+1} \end{cases}$$

man spricht von Streng monotonie wenn \leq durch $>$ und \geq durch $<$...

1.13 Bemerkung.

$$x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n - x_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1$$

1.14 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } x_0 := 1, x_{n+1} := \sqrt{x_n + 6}$$

ist Streng monoton wachsend Beweis mit Vollständiger Induktion

Standard Bsp: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist streng monoton wachsend

1.15 Bemerkung.

monoton	ja	nein
Beschränktheit	$\left(\frac{1}{n}\right)$	$(-1)^n$
nein	(n)	$(-1)^n$

1.16 Definition.

(x_n) heißt **Konvergenz** wenn (x_n) ein Grenzwert hat.

(x_n) heißt **Divergenz** wenn sie keinen Grenzwert hat.

1.17 Definition (Grenzwert).

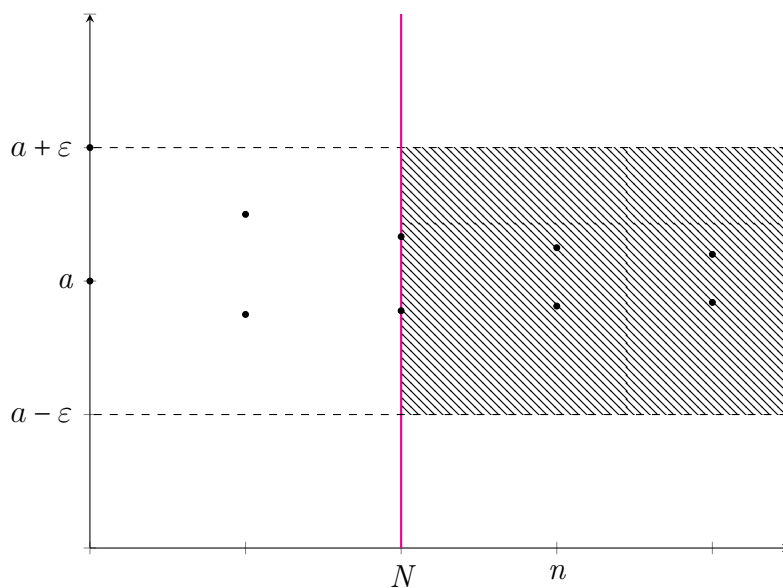
$a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von (x_n) , wenn gilt:

$$\underbrace{\forall \epsilon > 0}_{\text{beliebes klein}} \quad \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}}_{\text{beliebes klein}} \quad , \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N$$

$$\underbrace{\Rightarrow |x_n - a| < \epsilon}_{a - \epsilon \leq x_n \leq a + \epsilon}$$

Sei $\epsilon > 0; \epsilon$ fest

alle Folgenglieder x_n mit $n \geq N$



ist die Folge beschränkt, monoton?

(x_n) konvergent: $\iff \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

1.18 Satz. (X_n) konvergent: \Rightarrow Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei a ein Grenzwert von (X_n) , b ein Grenzwert von (X_n)
d.h. sei $\epsilon > 0, \epsilon$ beliebig, ϵ fest

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a : |X_n - a| < \epsilon \quad (1.18.1)$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b : |X_n - b| < \epsilon \quad (1.18.2)$$

Sei $\max N_a, N_b = N$ dann gilt :

$$n \geq N \Rightarrow |X_n - a| < \epsilon \quad (1.18.3)$$

und

$$|X_n - b| < \epsilon \Rightarrow |X_n - a| + |X_n - b| < 2\epsilon \quad (1.18.4)$$

Annahme :- $a \neq b$, d.h. $|a - b| \neq 0$

$$|a - b| = |a + 0 - b| = |(a - X_n) + (X_n - b)| \leq |X_n - a| + |X_n - b| < 2\epsilon$$

also $|a - b| < 2\epsilon$

1.19 Beispiel.

$$\epsilon = \frac{|a - b|}{\epsilon} \quad \text{dann gilt : } |a - b| < 2 \frac{|a - b|}{3}$$

$\Rightarrow 1 < \frac{2}{3}$ falls Aussage, Widerspruch also ist die Annahme falsch also gilt $a = b$

□

1.20 Beispiel.

X_n mit $X_n = \frac{1}{n}$ (harmonische Folge)

Beweis. Sei $\epsilon > 0, \epsilon$ beliebig, ϵ fest gesucht : N mit $n \geq N$

$$\Rightarrow |X_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \quad (1.20.1)$$

wähle $N := \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$

□

1.21 Beispiel.

$\epsilon = \frac{1}{100}$, gesucht N mit $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ wähle $N = 101$

Schreibweise: X_n hat den Grenzwert a Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ X_n geht gegen a für n gegen Unendlich.

1.22 Definition.

X_n heißt Nullfolge, wenn $\lim X_n = 0$ gilt.

1.23 Bemerkung.

Es ist leichter, die Konvergenz einer Folge zu beweisen, als den Grenzwert auszurechnen.

1.24 Beispiel.

$$x_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{11-n}{9-n}\right)^9$$

$$\text{Behauptung: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{-2}{3}$$

1.25 Lemma.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) \quad (1.25.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \quad (1.25.2)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11-n}{9+n} \right)^9 \quad (1.25.3)$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(\frac{1}{n} - 1)}{n(\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.25.4)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{11}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{9}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.25.5)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \right)^9 \quad (1.25.6)$$

$$= \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 11 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 9 \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + 1)} \right)^9 \quad (1.25.7)$$

$$\frac{1}{3} + (-1)^9 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \quad (1.25.8)$$

1.26 Definition.

Eine Folge (X_n) hat den unendlichen Grenzwert ∞ , wenn gilt :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : X_n > r$$

$$\text{Schreibweise : } \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$$

1.27 Bemerkung.

∞ ist keine Grenzwerte und keine reelle Zahl.

1.28 Bemerkung.

Grenzwertsätze gelten nicht für uneigentliche Grenzwerte.

1.29 Bemerkung.

gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$ dann schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty$

1.30 Beispiel.

X_n mit $X_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$, q fest.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & |q| = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{ex.nicht,} & q \leq -1 \end{cases}$$

1.4 Konvergenzkriterien

(zum Beweis der Existenz eines Grenzwerts, nicht zum Berechnen von Grenzwerten)

(1) X_n konvergent $\Rightarrow (X_n)$ beschränkt.

wenn (X_n) nicht beschränkt $\Rightarrow (X_n)$ nicht konvergent.

(2) Monotoniekriterium: wenn (X_n) beschränkt ist, können wir fragen, ob (X_n) konvergent ist.

(X_n) beschränkt und Monotonie $\Rightarrow (X_n)$ konvergent.

1.31 Bemerkung.

1.32 Beispiel.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11+n}{9-n} \quad ? \quad X_n = \frac{11+n}{9-n} = \frac{n \frac{11}{n} + 1}{n \frac{9}{n} - 1} \quad (1.32.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11}{n} + 1 \right) = 1 \quad (1.32.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{n} + 1 \right) = -1 \quad (1.32.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n) = \frac{1}{-1} = -1 \quad (1.32.4)$$

1.33 Lemma. Seien $(x_n) = (y_n)$ Folgen auf $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = a$ und es gelte $x_n \leq z_n \leq y_n$ für fest alle $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt für die Folge (z_n) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = a$

1.34 Beispiel.

Ist die Folge $(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent?

$$-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \left(\frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{n} \right) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

1.35 Beispiel.

$$x_n \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{n-1!} \quad (1.35.1)$$

denn $x_n = 0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq y_n$, gesucht! $\underbrace{y_n}_{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0}$ für hinreichend großes n .

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{(n-1)} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} \\ y_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \frac{a^k}{k!} \quad k \text{ ist fest} \end{aligned} \quad (1.35.2)$$

Es gilt $\frac{a^n}{n!} \leq y_n$ für hinreichend großes n und $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{\text{Konst}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^k}{k!}\right)}_{\in \mathbb{R}} \\ &= 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \times \frac{a^k}{k!} = 0 \end{aligned} \quad (1.35.3)$$

1.5 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:

man kann oft durch lösen Fixpunktgleichung" berechnen.

$$x_0, x_n + 1 = \ln(x_n)$$

1.36 Beispiel.

$$(x_n) \quad x_0 = \frac{7}{5}, \quad x_n + 1 = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

$\ddot{U}(x_n)$ ist monoton fallend, beschränkt, konvergent.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1 = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 2) = \frac{1}{3} (\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n))^2 + 2$$

Fixpunktgleichung

$$a = \frac{1}{3}(a^2 + 2), \text{ gesucht } = a$$

$$3a = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Lösung: $a_1 = 2$ (keine Lösung), $a_2 = 1$

1.37 Beispiel.

(x_n) mit $(x_0) = c \in \mathbb{R}, c \text{ fest } x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$

(1) (x_n) beschränkt ✓

(2) (x_n) Monoton ✓

Also (x_n) konvergent

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}) = \frac{1}{2}(a + \frac{c}{a}) = a$

$$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \Leftrightarrow a = \sqrt{c}$$

1.38 Bemerkung.

Der Nachweis der konvergent der rekursiv definierte Folge darf nicht weggelassen werden, denn Z.B $x_0 = 2, x_n + 1 = x_n^2$ $2, 4, 16, 256, \dots$ divergent gegen $+\infty$

$$\text{Annahme: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}_a = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2}_a \Rightarrow a \in \{0, 1\}$$

1.6 Reihen :

1.39 Definition.

Sei (a_n) eine reellefolge (komplexwertig) Folge

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0, a_1, \dots, a_n,$$

heißt n -k heißt partielle Summe. (S_n) heißt unendliche Reihe.
 schreibweise : $(S_n)^\infty = \text{bsw } (S_n)$

$$\left(\sum_{l=0}^n a_l \right)$$

bzw

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l \right)$$

1.40 Bemerkung.

Reihen sind spezielle Folgen , alle konvergent oder divergent.

1.41 Definition.

Für eine konvergente Reihen wird der Grenzwert auch wert der Reihe genannt.

1.6.1 Schreibweise

$$: \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

bzw

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1.42 Beispiel.

Teleskopreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \text{ in Grenzwert der Reihe ist}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \quad (1.42.1)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

1.43 Beispiel.

geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist für $|q| < 1$ konvergent . wert der Reihe für $|q| < 1$: ist für

$$|q| < 1$$

konvergent . wert der Reihe für $|q| < 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

für $|q| < 1$ $|q| < 1$ konvergent , werte der Reihe für

$$|q| < 1 : \sum_{k=0}^n q^k = \dots$$

$$S_n = q^0 + q^1 + \dots + q^n \cdot q$$

$$-qS_n = q^1 + q^2 + \dots + q^{n+1}$$

$$(1-q)S_n = q^0 - q^{n+1} + 1$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} (1 - q)^{n+1} \quad (1.43.1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q} \times \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 - q)^{n+1})$$

$$= \frac{1}{1 - q} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}) = \frac{1}{1 - q} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1})$$

1.7 Rechenregeln für Regeln:

Konvergenten Reihe kann man addieren , subtrahieren, mit einem Skalar multiplizieren wie endlichen Summen

ABER:

Das gilt im Allgemein nicht für das multiplizieren

1.8 Reihen

1.44 Beispiel.

Zur geometrischen Reihen

gesucht : A

$$2A = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^k + \dots$$

$$9 = \frac{1}{4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 2A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

1.45 Beispiel.

$$0,4\overline{3} = \frac{3}{4} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \dots$$

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{100} \left(\frac{1}{10}\right)^0 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{1}{30} = \frac{12+1}{30} = \frac{13}{30} \quad (1.45.1)$$

wenn $0,4\overline{3}$ erlaubt wäre, dann,

$$\frac{4}{10} + \frac{9}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

1.46 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K} \text{ ist divergent, denn } \lim_{\infty} \sum_{K=1}^n \frac{1}{k} \text{ ex. nicht}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{10} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

1.9 Allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad (\infty \text{ fest}) \quad \alpha > 1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \leq \rightarrow \text{div}$$

1.47 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{ist konvergent}$$

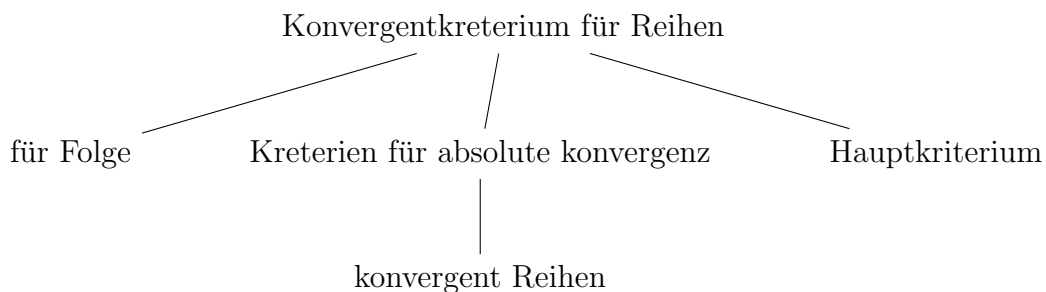
Beweis mit Monotoniekriterium für Folge

$$\text{Reihe ist konvergent} \begin{cases} (1) & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{ist monoton wachsend;} \\ (2) & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{ist beschränkt.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2} \\ &< 1 + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}}_{2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^2}}_{4 \cdot \frac{1}{4^2}} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \underbrace{\frac{1}{4}}_{(\frac{1}{2})^2} + \underbrace{\frac{1}{8}}_{(\frac{1}{2})^3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{1}{2} - 1} \end{aligned}$$

1.10 Exponentiale Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \quad \text{ist konvergent}$$



Hauptkriterium $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\rightarrow (a_k)$ Nullfolge $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \neq 0 \Rightarrow (a_k)$ divergent
divergent $\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k \text{ ex. null}$

1.48 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 + 1}{4k^2 - 1} \quad \text{divergent,} \quad \text{ABER} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divergent und } \frac{1}{k} \quad \text{Nullfolge}$$

1.49 Beispiel.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Rightarrow \underbrace{(a_k \text{ Nullfolge})}_{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0}$$

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s - s = 0$$

1.11 Kriterium für Alternierende Reihe

1.50 Beispiel.

Alternierende $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist konvergent

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

wobei (a_k) eine streng monoton fallende Nullfolge mit $a_k \geq 0$

\Rightarrow Die Reihe ist konvergent. Also $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist konvergent.

1.51 Definition (Reihe).

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

1.52 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \text{ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} \text{ ist konvergent und absolut konvergent}$$

1.53 Satz. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent \Rightarrow Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent

1.54 Bemerkung.

Absolut konvergente Reihe kann man multiplizieren wie endliche Summen d. Reihen
null

1.12 Quotientenkriterium

(QK) für (endliche) d

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

$< 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in absolut d

$> 1 \Rightarrow$ ist divergent

$= 1$ Kriterium ist nicht anwendbar

1.13 Wurzelkriterium

[WK] (WK) für (absolut) d

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$< 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in (absolut) d

$> 1 \Rightarrow$ divergent

$= 1$ Kriterium ist nicht anwendbar

1.55 Beispiel (QK).

$$\begin{aligned} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \\ &= 0 < 1 \Rightarrow \text{Reihe als konv.} \end{aligned}$$

1.56 Beispiel (WK).

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{1}}{\sqrt[k]{k!}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!}} = 0 \\ &< 1 \\ &\Rightarrow \text{Reihe als konv.} \end{aligned}$$

List of Theorems

1.1	Definition (Folgen)	2
1.6	Definition	4
1.12	Definition	5
1.16	Definition	6
1.17	Definition (grenzwert)	6
1.22	Definition	8
1.26	Definition	8
1.39	Definition	13
1.41	Definition	13
1.51	Definition (Reihe)	17

List of Theorems

1.4	Beispiel	3
1.7	Beispiel	4
1.10	Beispiel	4
1.11	Beispiel	5
1.14	Beispiel	5
1.19	Beispiel	7
1.20	Beispiel	7
1.21	Beispiel	7
1.24	Beispiel	8
1.30	Beispiel	9
1.32	Beispiel	10
1.34	Beispiel	10
1.35	Beispiel	11
1.36	Beispiel	12
1.37	Beispiel	12
1.42	Beispiel	13
1.43	Beispiel	14
1.44	Beispiel	15
1.45	Beispiel	15
1.46	Beispiel	15
1.47	Beispiel	16
1.48	Beispiel	16
1.49	Beispiel	16
1.50	Beispiel	17
1.52	Beispiel	17
1.55	Beispiel (QK)	18
1.56	Beispiel (WK)	18