Technische Universität Dresden • Fakultät Informatik

Mathematische Methoden für Informatiker

Mitschrift zur Vorlesung Sommer Semester 2019

***Bachelor of Science* (*B.Sc.*)**

Dozent: Prof. Dr. Ulrike Baumann
vorgelegt von
"..."
Abdelshafi Mohamed
m.abdelshafi@mail.de
Mahmoud Kiki
mahmoud.kiki@tu-dresden.de
...

Tag der Einreichung: 27. April 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wir schreiben hier die vorlesungen von INF-120-1(Mathematische Methoden für Informatiker) mit. wenn Ihr Fragen habt oder Fehlern gefunden Sie können gerne uns eine E-mail schreiben oder Sie können einfach bei github eine Issue (link) erstellen. wir freuen uns wenn Sie mit uns mitschreiben möchten, oder helfen mit der Fehlerbehebung.

Abdelshafi Mohamed
Mahmoud Kiki

Kapitel 1

Folge und Reihen

1.1 Vorlesung 1

1.1.1 Folge

1.1 Definition (Folgen)**.**
Ein folge ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \underbrace{\mathbf{M}}_{Menge} : \text{n} \mapsto \underbrace{x_n}_{folgenglied}$$

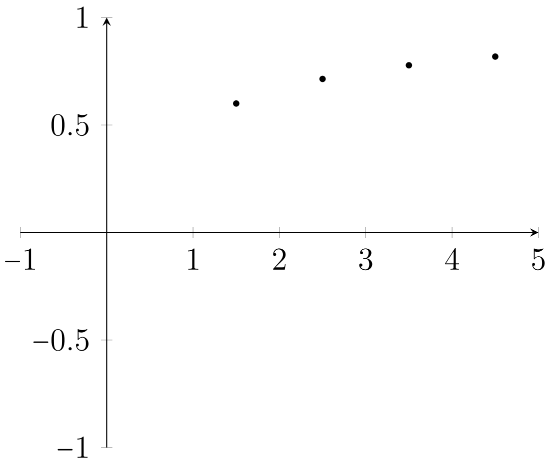
1.2 Bemerkung.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbb{R} \quad \textit{reelewert Folge} \\ \mathbf{M} &= \mathbb{C} \quad \textit{komplexwertig Folge} \\ \mathbf{M} &= \mathbb{R}^n \quad \textit{vertical Folge} \end{aligned}$$

Bezeichnung (x_n) mit $(x_n)=\frac{n}{n+1}$

Aufzählung der folglieder: 0 , $\frac{1}{2}$,$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, . . .

1.3 Bemerkung.
zuwerten wird $\mathbb{N}$ *durch* $\mathbb{N}$ *0,1 . . . erstellt.*



1.4 Beispiel.

1. *Konstante Folge* (x_n) *mit* $\quad x_n = a \in \mathbf{M}, a \ldots$

$$x_n = a \in \mathbf{M}$$

2. *Harmonische Folge* (x_n) *mit* $x_n = \frac{1}{n+1} \quad n \geq 1$

3. *Geometrische folge* (x_n) *mit* $x_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}, \ldots$

4. *Fibonaccifolge* (x_n) *mit*

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)$$

5. *Fibonacci folgen* (x_n)

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_1 &= 1 \\ X_{n+1} &= x_n + X_{n-1} \quad (n > 0) \end{aligned}$$

6. *conway folge*

$$1, 11, 21, 1211, 111217, 312211 \ldots$$

7. *folge aller Primzahlen:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

1.2 Rechnen mit Folgen

$$\begin{aligned} (M = \mathbb{R} \quad &oder \quad M = \mathbb{C}) \\ (x_n) + (y_n) &:= (x_n + y_n) \\ K(x_n) &:= (Kx_n) \in \mathbb{R} \quad oder \quad \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

1.5 Bemerkung.
Die Folge bildet ein Vektorraum.

1.6 Definition (Beschränktheit)**.**

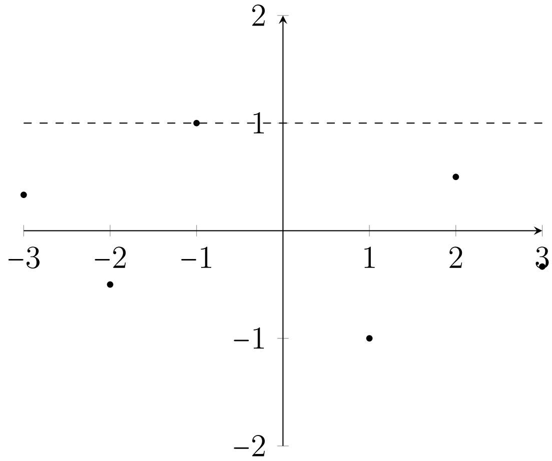
1. *Eine reellwertige Funktion ist in der Mathematik eine Funktion, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind.*
2. *Eine reellwertige heißt beschränkt wenn gilt*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+, \forall r \in \mathbb{N} : \underbrace{|x_n|}_{\textit{Betrag einer reellen oder komplexer Zahl}} \leqq r$$

1.7 Beispiel.

$$(x_n) \quad mit \quad x_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$$

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{5}, \dots$$

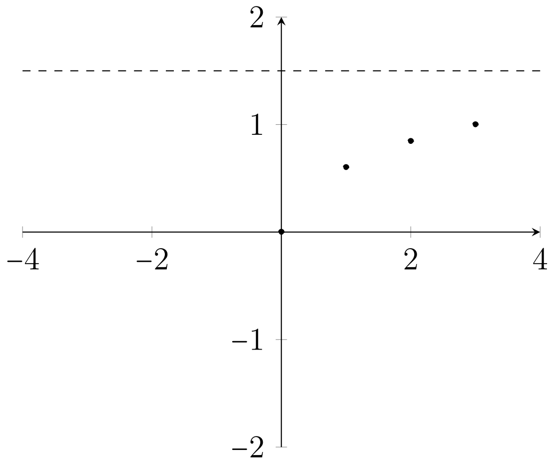


1.8 Bemerkung.
(x_n) *ist beschränkt mit* $r = 1$ *denn* $|(-1)^n \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n}| \leqq 1 \hookleftarrow r$

1.9 Beispiel.

$$(x_n) \text{ mit } x_n = (-1)^n \quad \frac{1}{n} + 1 \quad \textit{bechränkt } r = 3/2$$

$$-3/2 \quad \leq x_n \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



1.10 Beispiel.
Standard:

Die folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ *ist beschränkt durch 3*

Zu zeigen: $\quad -3 \leq x_n \leq 3 \quad$ *für alle* $\quad n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k . b^{n.k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n.k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)} = \frac{n(n-1)-(n-k-1))}{k!}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots$$

1.3 geometrische Summen Formel (Tafelwerk)

1.11 Definition (Monoton)**.**
Die Folge (x_n) *heißt monoton* $\left\{\textit{wachsend fallend}\right\}$

$$\textit{wenn} \quad \textit{gilt}: \forall n \in \mathbb{N}: \begin{cases} x_n & \leq x_n + 1 \\ x_n & \geq X_{n+1} \end{cases}$$

man spricht von Streng monotonie wenn $\leqq$ *durch* $>$ *und* $\geqq$ *durch* $< \dots$

1.12 Bemerkung.

$$x_n \leq X_{n+1} \;\Leftrightarrow x_n - X_{n+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x_n}{X_{n+1}} \leq 1$$

1.13 Beispiel.

$$(x_n) \text{ } mit \quad X_0 := 1 \quad , X_{n+1} := \sqrt{x_n + 6}$$

ist Streng monoton wachsend Beweis mit Vollständiger Induktion

Standard Bsp: $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ *ist streng monoton wachsend*

1.14 Bemerkung.

monoton	ja	nein
Beschränkkeit	$(\frac{1}{n})$	$(-1)^n$
nein	(n)	$(-1)^n$

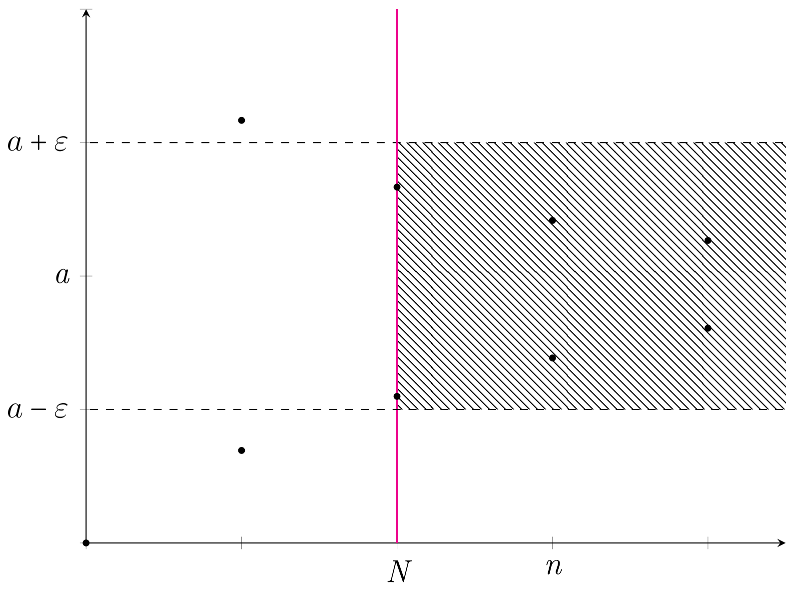
1.15 Definition (Konvergenz,Divergenz)**.**
(x_n) *heißt* ***Konvergenz*** *wenn* (x_n) *ein grenzwert hat.*
(x_n) *heißt* ***Divergenz*** *wenn sie keinen grenzwert hat.*

1.16 Definition (grenzwert)**.**
$a \in \mathbb{R}$ *heißt grenzwert von* (x_n)*, wenn gilt:*

$$\underbrace{\forall \epsilon > 0}_{beliebes\ klein} \qquad \underbrace{\exists \mathbf{N} \in \mathbb{N}}_{beliebes\ klein\ \Rightarrow \underbrace{|x_n - a| < \varepsilon}_{a-\varepsilon \le x_n \le a+\varepsilon}} \qquad , \forall n \in \mathbb{N} : m \geq \mathbb{N}$$

$$Sei\ \varepsilon > 0; \varepsilon\ fest$$

$$alle\ folgliederx_n\ mit\ n\ \geq \mathbb{N} \curvearrowright$$



1.4 vorlesung 2

ist die folge beschränkt , monoton ?

(x_n) konvergierend : $\iff \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \quad \in N \quad \forall n \in N$
$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

1.17 Satz. (x_n) *konvergierend :* $\Rightarrow$ *Der Grenzwert ist eindeutig beschränkt.*

1.18 Beweis.
Sei a eine Grenzwert von (x_n) *, b eine Grenzwert von* (x_n)
d.h sei $\epsilon > 0$,ϵ *beliebig ,* ϵ *fest*

$$\exists N_a \quad \forall n \geq N_a : |x_n - a| < \epsilon \tag{1.18.1}$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b : |x_n - b| < \epsilon \tag{1.18.2}$$

Sei max $\{N_a, N_b\} = N$ *dann gilt :*

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \tag{1.18.3}$$

und

$$|x_n - b| < \epsilon \Rightarrow |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \tag{1.18.4}$$

Annahme :- a $\neq$ *b , d.h* $|a - b| \neq 0$

$$\begin{gathered} |a - b| = |a + 0 - b| \\ = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2\epsilon \\ also \quad |a - b| < 2\epsilon \end{gathered}$$

wähle Z.B

$$\epsilon = \frac{|a - b|}{3} \quad dann\ gilt\ : |a - b| < \frac{2\ |a - b|}{3}$$

$\Rightarrow 1 < \dfrac{2}{3}$ *falls Aussage, Widerspruch also ist die Annahme falsch also gilt* $a = b$

1.19 Beispiel.
x_n mit $x_n = \frac{1}{n}$ (harmonische Folge)

1.20 Beweis.
Sei $\epsilon > 0, \epsilon belibig, \epsilon fest$ gesucht : N mit $n \geq N$
hat den Grenzwert 0

$$\Rightarrow |x_n - a| = |\frac{1}{n} = 0| = \frac{1}{n} < \epsilon \tag{1.20.1}$$

wähle N:= $\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$

1.21 Beispiel.
$\epsilon = \frac{1}{100}$ *, gesucht N mit $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ wähle* $N = 101$

1.22 Schreibweise.
x_n hat den Grenzwert a Limes $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ x_n geht gegen a für n gegen Unendlich.

1.23 Definition (Nullfolge)**.**
x_n heißt Nullfolge ,wenn $\lim x_n = 0$ gilt.

1.24 Bemerkung.
Es ist leichter, die konvergente einer Folge zu beweisen, als den Grenzwert auszurechnen.

1.25 Beispiel.
$x_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{11-n}{9-n}\right)^9$
Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{-2}{3}$

1.26 Lemma.

$$\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n) \tag{1.26.1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{3}) + \left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \tag{1.26.2}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{11-n}{9+n}\right)^9 \tag{1.26.3}$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(\frac{1}{n}-1)}{n(\frac{9}{n}+1)}\right)^9 \tag{1.26.4}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n\to\infty}(\frac{11}{n})}{\lim_{n\to\infty}(\frac{9}{n}+1)}\right)^9 \tag{1.26.5}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{11}{n} - \lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n} + \lim_{n\to\infty} 1}\right)^9 \tag{1.26.6}$$

$$= \left(\frac{\lim_{n\to\infty} 11 \times \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) - 1}{\lim_{n\to\infty} 9 \times \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) + 1}\right)^9 \tag{1.26.7}$$

$$\frac{1}{3} + (-1)^9 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} \tag{1.26.8}$$

1.27 Definition (Unendliche Grenzwert)**.**
Eine Folge (x_n) hat den unendliche Grenzwert ∞, wenn gilt :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \in N \quad \forall n \geq N : x_n > r$$

1.28 Schreibweise.
$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

1.29 Bemerkung.
∞ *ist keine Grenzwerte und keine reelle Zahl.*

1.30 Bemerkung.
Grenzwertsätze gelten nicht für uneigentliche Grenzwerte.

1.31 Bemerkung.
gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *dann schreibt man* $\lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty$

1.32 Beispiel.
x_n *mit* $x_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$, *q fest.*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & |q| = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ ex.nicht, & q \leq -1 \end{cases}$$

1.5 Konvergenzkriterien

(zum Beweis der Existenz eine Grenzwert, nicht zum berechnen von Grenzwert)

(1) x_n konvergent $\Rightarrow$ (x_n) beschränkt.

wenn (x_n) nicht beschränkt $\Rightarrow$ (x_n) nicht konvergent.

(2) Monotonie Kriterium: wenn (x_n) beschränkt ist können wir fragen ob (x_n) konvergent.

(x_n) beschränkt von Monotonie $\Rightarrow$ (x_n) konvergent.

1.33 Beispiel.
$\left((-1)^n \times \frac{1}{n}\right)$ *konvergent (Nullfolge) diese Folge ist beschränkt aber nicht Monoton*

$$\lim_{n\to\infty} \left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$$

existiert. Diese ist beschränkt und monoton.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

existiert.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n}) = e^a$$

1.6 Vorlesung 3

1.34 Beispiel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11+n}{9-n} \quad ? \quad x_n = \frac{11+1}{9-n} = \frac{n}{n}\frac{\frac{11}{n}+1}{\frac{9}{n}-1} \tag{1.34.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11}{n}+1\right) = 1 \tag{1.34.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{n}+1\right) = -1 \tag{1.34.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \frac{1}{-1} = -1 \tag{1.34.4}$$

1.35 Lemma. *Seien* $(x_n) = (y_n)$ *Folgen auf* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n) = a$ *und es gelte* $x_n \le z_n \le y_n$ *für fest alle "*$n \in \mathbb{N}$

Dann gilt für die Folge (Z_n) $\lim_{n\to\infty}(z_n) = a$

1.36 Beispiel.
Ist die Folge $(-1)^n\frac{1}{n})$ *konvergent ?*

$$-\frac{1}{n} \le (-1)^n(\frac{1}{n}) \le 1\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -(\frac{1}{n}) = -1$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = 0$$

1.37 Beispiel.

$$x_n \leq= \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \times \frac{a^{a-1}}{n-1!} \tag{1.37.1}$$

denn $x_n = 0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq y_n$ *, gesucht!* $\underbrace{y_n}_{\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0}$ *für hinreichend großes n.*

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{(n-1)} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{a^{n-3}}{(n-3)!} \\ y_n &= (\frac{1}{2})^{n-k} \times \frac{a^k}{k!} \quad k \textit{ ist fest} \end{aligned} \tag{1.37.2}$$

Es gilt $\frac{a^n}{n!} \leq y_n$ *für hinreichend großes n und* $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{n-k} \times \underbrace{\frac{a^k}{k!}}_{Konst} \\ &= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n \times \underbrace{\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^{-k}}_{\in\mathbb{R}} \times \underbrace{\lim_{n\to\infty} (\frac{a^k}{k!})}_{\in\mathbb{R}} \\ &= 0.(\frac{1}{2})^{-k} \times \frac{a^k}{k!} = 0 \end{aligned} \tag{1.37.3}$$

1.7 Grenzwerte rekursive definierte Folgen:

man kann oft durch lösen Fixpunktgleichung"berechnen.
$x_0 \quad , x_{n+1} = ln(x_n)$

1.38 Beispiel.

$$(x_n) \quad x_0 = \frac{7}{5} \quad , \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

Ü (x_n) ist monoton fallend , beschränkt , konvergent .

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(x_n^2 + 2) = \frac{1}{3}(\lim_{n\to\infty}(x_n))^2 + 2)$$

Fixpunktgleichung

$a = \frac{1}{3}(a^2 + 2)$, gesucht = a

$$3a = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Lösung: $a_1 = 2$ (keine Lösung), $a_2 = 1$

1.39 Beispiel.
(x_n) mit $(x_0) = c \in \mathbb{R}, c$ fest $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$
(1) (x_n) beschränkt ✓
(2) (x_n) Monoton ✓
Also (x_n) konvergent
Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann $\underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}_{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n) + \frac{c}{x_n} = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{c}) = a$

$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \Leftrightarrow a = \sqrt{c}$

1.40 Bemerkung.
Der Nachweis der konvergent der rekursiv definierte Folge darf nicht weggelassen werden, denn Z.B $x_0 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2$ 2 , 4 ,16 ,256 , ... divergent gegen + ∞

Annahme: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n+1}}_{a} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n^2}_{a^2} \Rightarrow a \in \{0, 1\}$

1.8 Reihen :

1.41 Definition (Unendliche Reihen)**.**
Sei (a_n) *eine reellefolge (komplexwertig) Folge*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_a, a_1, \ldots, a_n,$$

n-k heißt Partialsumme. (S_n) *heißt unendliche Reihe.*
schriebweise : $(S_n)^\infty = bsw\ (S_n)$

$$\left(\sum_{l=0}^{n} a_l\right)$$

bzw

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right)$$

1.42 Bemerkung.
Reihen sind spezielle Folgen , alle konvergent oder divergent.

1.43 Definition (wert der Reihe)**.**
Für eine konvergente Reihen wird der Grenzwert auch wert der Reihe genannt.

1.44 Schreibweise.
: $\lim_{n\to\infty} S_n =$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

bzw

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1.45 Beispiel.
Teleskopreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \textit{in Grenzwert der Reihe ist}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{-1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3})(-\frac{1}{4})+) \cdots + (\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1$$

1.46 Beispiel.
geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *ist für*

$$|q| < 1$$

konvergent . wert der Reihe für $|q| < 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ *für* $|q| < 1$ *konvergent , werte der Reihe für*

$$|q| < 1 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \ldots$$

$$\begin{aligned} S_n &= q^0 + q^1 + \cdots + q^n | * q \\ -qS_n &= q^1 + q^2 + \cdots + q^{n+1} \\ (1-q)S_n &= q^0 - q^{n+1} \\ S_n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}(1-q)^{n+1} \\ \Rightarrow lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{1}{1-q} \times \lim_{n\to\infty} ((1-q)^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1-q}(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}) = \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

1.8.1 Rechnen für Reihen

konvergent Reihe kann man addieren oder subtrahieren mit einem Skalar multiplizieren wie endliche Summen. aber das gilt im Allgemein nicht für das Multiplizieren

1.9 Vorlesung 4

1.10 Reihen

1.47 Beispiel.
Zur geometrischen Reihen
gesucht : A

$$2A = 1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 + \dots + (\frac{1}{k})^2 + ...$$

$$= (\frac{1}{4})^0 + (\frac{1}{4})^1 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2^2})^3 + (\frac{1}{2^2})^k + \dots$$

$$9 = \frac{1}{4} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 2A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

1.48 Beispiel.

$$\begin{aligned} 0,4\overline{3} = \frac{3}{4} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \dots \\ \frac{4}{10} + \frac{3}{100}(\frac{1}{10})^0 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots \\ = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ = \frac{4}{10} + \frac{1}{30} = \frac{12+1}{30} = \frac{13}{30} \end{aligned} \tag{1.48.1}$$

wenn $0,4\overline{3}$ *erlaubt wäre, dann,*

$$\frac{4}{10} + \frac{9}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5$$

1.49 Beispiel.

$$\sum_{R=1}^{\infty}\frac{1}{K} \text{ ist divergent ,denn } \lim_{\infty}\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ ex. nicht}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\frac{1}{10}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$1+\frac{1}{2}+\qquad\frac{1}{2}+\qquad\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$$

1.11 Allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}\quad(\infty\text{fest})\qquad \alpha>1\to\mathbb{R}$$

$$\alpha\leqq\to dev$$

1.50 Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\qquad \text{ist konvergent}$$

1.51 Beweis.
mit Monotoniekriterium für Folge

$$\text{Reihe ist konvergent}\begin{cases}(1)\quad \sum_{K=1}^{n}\frac{1}{k^2}\quad \text{ist monoton wachsend;}\\(2)\quad \sum_{K=1}^{n}\frac{1}{k^2}\ \text{ist beschränkt.}\end{cases}$$

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}$$

$$<1+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{2.\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^2}}_{4.\frac{1}{4^2}}+$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.1+\underbrace{\frac{1}{4}}_{(\frac{1}{2})^2}+\underbrace{\frac{1}{8}}_{(\frac{1}{2})^3}=1+\frac{1}{4}+\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{2}-1}$$

1.12 Expotentiale Reihe

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n =: e \text{ist konvergent}$$

Konvergentkreterium für Reihen

für Folge

Kreterien für absolute konvergenz

Hauptkriterium

konvergent Reihen

1.13 Hauptkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{konvergent} \Rightarrow (a_k)\text{Nullfolge.}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \underbrace{nullkonvergent}_{divergend}$$

oder

$$\lim_{k\to-\infty} a_k \quad ex.null$$

1.52 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{4k^2-1} \quad divergend, \quad aber \quad \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad divergend \quad und \ \frac{1}{k} \ Null\,folge$$

1.53 Beweis.

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_k konv. \Rightarrow \underbrace{(a_k Null folge)}_{\lim_{k\to\infty} a_k = 0}$$

$$s_n = \sum_{K=0}^{n} a_k, s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \qquad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

1.14 Kriterium für Alternierende Reihe

1.54 Beweis.
Alternierende $\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ *ist konvergent*
$\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^k a_k$
wobei (a_k) *einer Streng monoton fallend Nullfolge mit* $a_k \geqq 0$
$\Rightarrow$ *Die Reihe ist konvergent. Also* $\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ *ist konvergent.*

1.55 Definition (absolute Reihe)**.**
Reihe $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$ *heißt absolute konvergent wenn* $\sum_{K=0}^{\infty} |a_k|$ *konvergent ist.*

1.56 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} \textit{ ist konvergent , aber nicht absolote konvergent}$$

1.57 Beispiel.

$$\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2} \textit{ ist kovergend und abslote konvergent}$$

1.58 Satz. *Reihe* $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$ *abslot konvergent* $\Rightarrow$ *Reihe* $\sum_{K=0}^{\infty} a_k$ *ist kovergend*

1.59 Bemerkung.
Absolute konvergente Reihe kann man multiplizieren wie endliche summen d Reihen null

1.15 Quotionkriterium (QK):

für endliche Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}|$$

$< 1 \Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} a_k$ in absolut konvergent
$> 1 \Rightarrow$ ist divergent
$= 1$ Kriterium ist nicht anwendbar

1.16 Wurzel kriterium : WK

für (absolute) konvergent
$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$
$< 1 \Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} a_k$ in (absolute) konvergent
$> 1 \Rightarrow$ divergent
$= 1$ Kriterium ist nicht anwendbar

1.60 Beispiel (QK).

$$\begin{aligned} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lim_{k\to\infty} |d\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}| &= \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k+1} \\ &= 0 < 1 \Rightarrow Reihe \quad als \quad konv. \end{aligned}$$

1.61 Beispiel (WK).

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{1}}{\sqrt[k]{k!}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!}} &= 0 \\ &< 1 \\ \Rightarrow Reihe \quad als \quad konv&. \end{aligned}$$

1.17 Vorlesung 5

Zusammenfassung :
Folgen / Reihen / Konvergenz ? / Grenzwert ?
Neu : Funktionen
Approximation von Funktionen
Potenzreihen
Taylorreihen
fourierreihen
Näherungsweise Berechnung

1.62 Definition.
$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion in einer reellen veränderlichen

1.63 Bemerkung (Definitionsbereich)**.**
Bild von f

$$f(D) = \{f(x) \quad | \quad x \in D\}$$

Graph von f

$$Graph(f) = \{(x \quad | \quad f(x)) \quad | \quad x \in D\}$$

1.64 Definition.
Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$
f heißt in a stetig , wenn gilt :
$\forall (X_n) : X_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ für alle Folgen (x_n)
Die Folgenglieder sollen in Definitionsbereich liegen (Die in Definitionsbereich liegen können und den Grenzwert a haben)

* Ich weiß , dass $f(x_n)$ existiert ($f(x_n) \quad ex.$)
Folge $f(x_n)ex.$, soll einen Grenzwert besitzen.✓
$f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$✓✓

1.65 Bemerkung.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

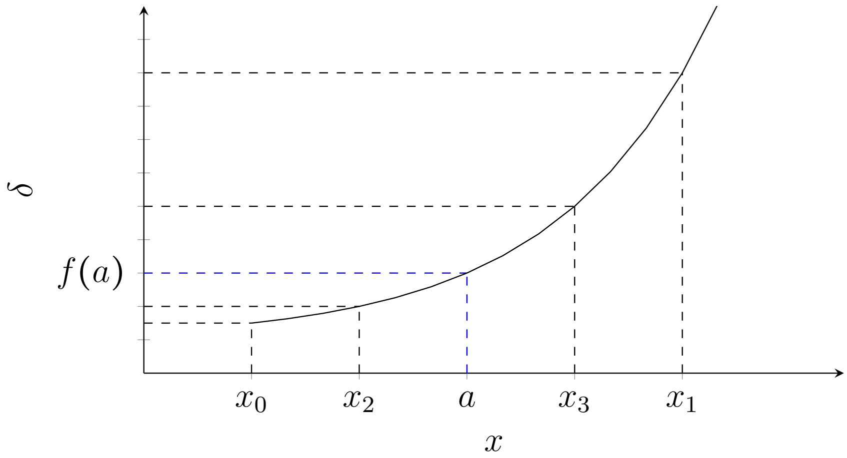
★ *Grenzwertbildung und Funktion Wertberechnung sind bei stetig Funktion in der Reihenfolge vertauschbar !*

1.66 Berechnung.

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

d.h *für jede Folge x_n , die gegen a konvergiert , konvergiert die Folge der Funktionierte gegen $f(a)$.*

1.67 Bemerkung.
f stetig in $a \Leftrightarrow$
1) $f(a)$ und
2) $lim_{x \to a} f(x)$ ex. und
3) Grenzwert = Funktionswert $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



1.68 Beispiel.
1)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

Ist $f(x)$ stetig in $a = 1$?

a) $\quad$ *$f(1)$ ex ? nein , d.h f ist in $a = 1$ nicht stetig*

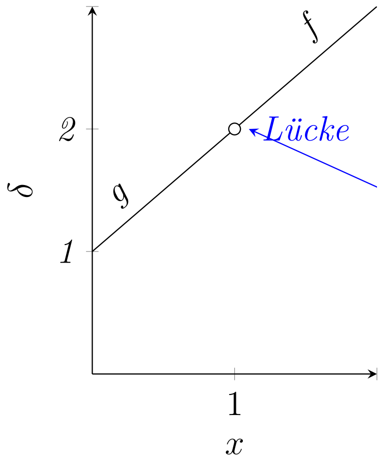
b)

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \quad ?$$

Sei (x_n) eine beliebige Folge und $x_n \in D(f)$ und $\lim_{x \to \infty}(x_n) = 1$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{n \to \infty} (x_n + 1) = \lim_{n \to \infty} x_n + \lim_{n \to \infty} 1 = 1 + 1 = 2$$

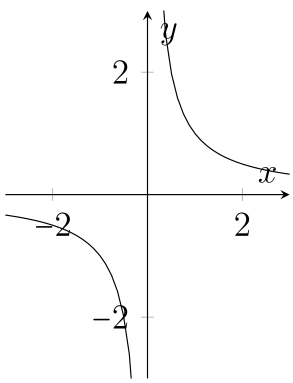
d.h Grenzwert ex. (und es ist 2).



Man sagt , f hat an der stelle 1 eine Lücke.

1.69 Beispiel.
(2)

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad a = 0$$



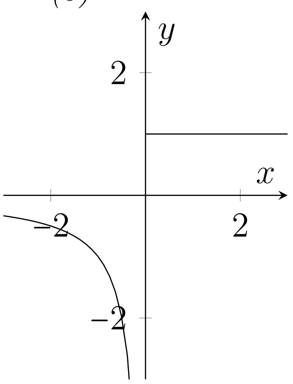
(i) betrachte ? $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$: *d.h wir betrachten alle Folgen* (x_n)

$$X_n \in D, X_n \leq 0 \lim_{n \to \infty} (x_n) = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 1}{\lim\limits_{n \to -\infty} x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to -\infty} x_n} = -\infty$$

$$d.h \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) ex\ .nicht$$

(ii) Betrachte $\lim\limits_{n \to +0} f(x_n)$, *ex .nicht*

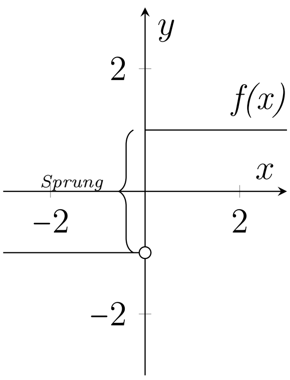
(3)



$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{array} \right\} a = 0 \quad , \quad f(0) = 1 \quad ex.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \quad ex.\ nicht$$

(4)



$$f(x) = \underbrace{sgn(x)}_{sprung} = \left\{ \begin{array}{ll} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\neq \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad ex. \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad ex. \end{array} \right\} \lim_{x \to 0} f(x) \quad ex.\ nicht\ ,\ O\ heißt\ Sprungstelle$$

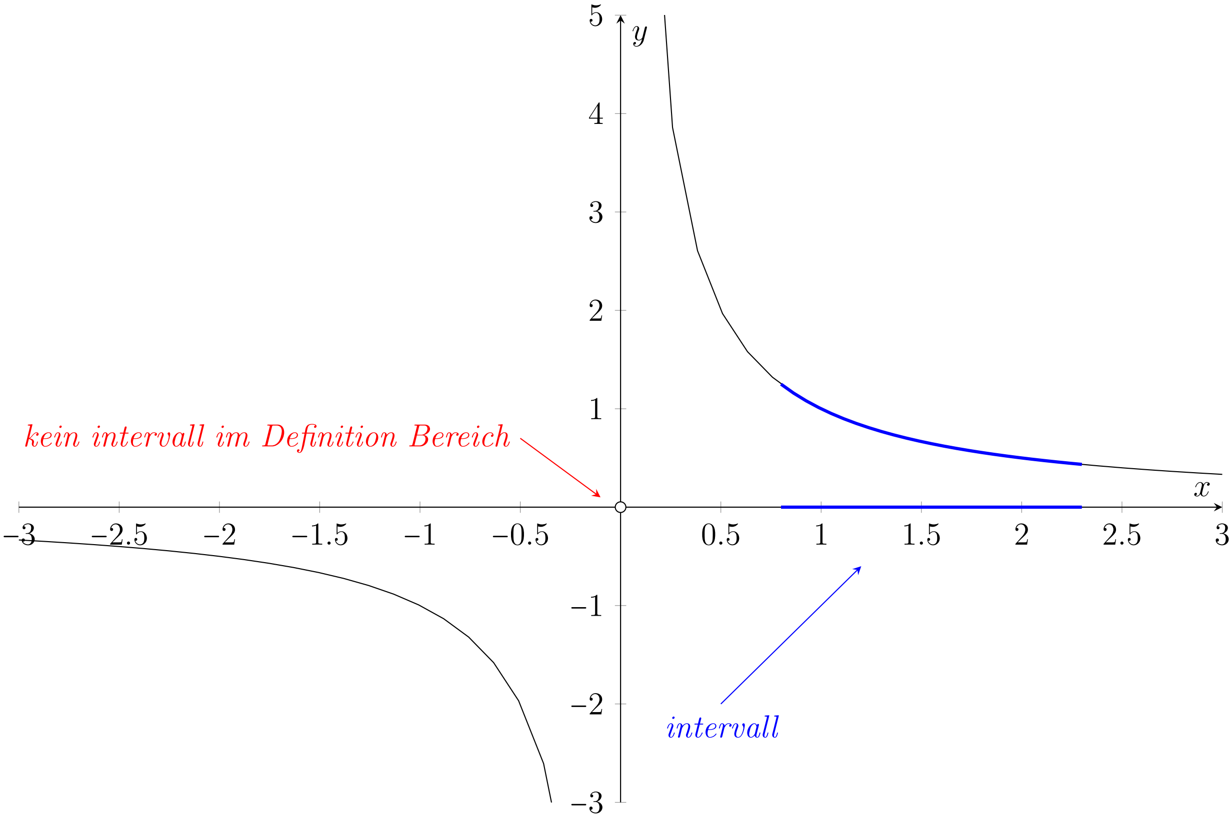
1.70 Definition.

$f :\to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$ *heißt* ***stetig*** *, wenn f für alle* $a \in D$ ***stetig***

1.71 Beispiel.
elementare Funktionen und deren Verfügungen sind stetig auf dem gesamten Definitionsbereich.
Z.B
Polynomfunktion , rationale Funktionen, Winkelfunktionen , Potenzfunktionen , Wurzelfunktionen , Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktion.

1.72 Beispiel.

$$f : D \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{x} = x^{-1} \textit{ist stetig auf dem gesamten Defintionsbereich } D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$



1.73 Beweis.
Sei $a \in D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (d.h $a \neq 0$)

$$f(a) = \frac{1}{a} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \tag{2}$$

$$\textit{Sei} \quad x_n \quad \textit{eine beliebige Folge und} \quad x_n \in \underbrace{D}_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_2} =$$

$$\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \quad \textit{ex.}$$

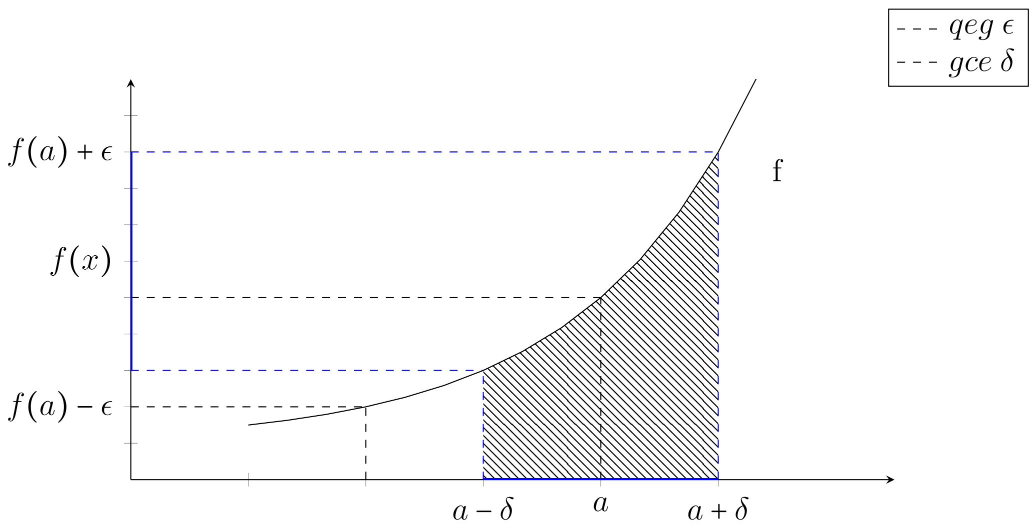
1.17.1 Rechnenregln für Funktionen (GWS anwenden)

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\infty} g(x), \text{wo bei} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (f(n) \pm g(n)) = \lim_{n\to\infty} f(n) \pm \lim_{n\to\infty} g(n)$$

1.74 Satz.

$$f : D \Rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R} \textit{ ist in } a \in D \textit{ Stetig } \Leftrightarrow \forall_\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{1.74.1}$$



List of Theorems

List of Theorems