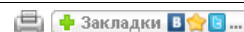


Поиск на AUP.RU

[AUP.RU](#) > [Библиотека](#) > [Книги](#) > [Математические методы](#)

Объявления

Библиотека ▼

Найти

Объявления

[А.И. Орлов](#)[Теория принятия решений](#)

Учебное пособие. - М.: Издательство "Март", 2004.

[Предыдущая](#)[Оглавление](#)[Следующая](#)

### 3. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

#### 3.4.2. Математические методы анализа экспертных оценок

**Современная теория измерений и экспертные оценки.** Как проводить анализ собранных рабочей группой ответов экспертов? Для более углубленного рассмотрения проблем экспертных оценок понадобятся некоторые понятия так называемой *репрезентативной теории измерений* (глава 2.1), служащей основой теории экспертных оценок, прежде всего той ее части, которая связана с анализом заключений экспертов, выраженных в качественном (а не в количественном) виде.

Репрезентативная (т.е. связанная с *представлением* отношений между реальными объектами в виде отношений между числами) теория измерений (в дальнейшем сокращенно РТИ) является одной из составных частей эконометрики [1]. А именно, она входит в состав *статистики объектов нечисловой природы*. Нас РТИ интересует прежде всего в связи с развитием теории и практики экспертного оценивания, в частности, в связи с агрегированием мнений экспертов, построением обобщенных показателей (их называют также рейтингами).

Получаемые от экспертов мнения часто выражены в *порядковой шкале*, т.е. эксперт может сказать (и обосновать), что один тип продукции будет более привлекателен для потребителей. Чем другой, один показатель качества продукции более важен, чем другой, первый технологический объект более опасен, чем второй, и т.д. Но он не в состоянии сказать, *во сколько раз* или *на сколько* более важен, соответственно, более опасен. Поэтому экспертов часто просят дать ранжировку (упорядочение) объектов экспертизы, т.е. расположить их в порядке возрастания (или, точнее, неубывания) интенсивности интересующей организаторов экспертизы характеристики.

Ранг - это номер (объекта экспертизы) в упорядоченном ряду. Формально ранги выражаются числами 1, 2, 3, ..., но весьма важно то, что с этими числами нельзя делать привычные арифметические операции. Например, хотя  $2 + 3 = 5$ , но нельзя утверждать, что для объекта, стоящем на третьем месте в упорядочении (в другой терминологии - ранжировке), интенсивность изучаемой характеристики равна сумме интенсивностей объектов с рангами 1 и 2. Так, один из видов экспертного оценивания - оценки учащихся. Вряд ли кто-либо будет всерьез утверждать, что знания отличника равны сумме знаний двоечника и троечника (хотя  $5 = 2 + 3$ ), хорошист соответствует двум двоечникам ( $2 + 2 = 4$ ), а между отличником и троечником такая же разница, как между хорошистом и двоечником ( $5 - 3 = 2$ ). Поэтому очевидно, что для анализа подобного рода качественных данных необходима не обычная арифметика, а другая теория, дающая базу для разработки, изучения и применения конкретных методов расчета. Эта другая теория и есть РТИ. Основы РТИ рассмотрены в главе 2.1.

Рассмотрим в качестве примера применения результатов теории измерений, связанных со средними величинами в порядковой шкале, один сюжет, связанный с ранжировками и рейтингами.

**Методы средних баллов.** В настоящее время распространены экспертные, маркетинговые, квалиметрические, социологические и иные опросы, в которых опрашиваемых просят выставить баллы объектам, изделиям, технологическим процессам, предприятиям, проектам, заявкам на выполнение научно-исследовательских работ, идеям, проблемам, программам, политикам и т.п. Затем рассчитывают средние баллы и рассматривают их как *интегральные* (т.е. обобщенные, итоговые) оценки, выставленные коллективом опрошенных экспертов. Какими формулами пользоваться для вычисления средних величин? Ведь средних величин существует, как мы знаем, очень много разных видов.

Обычно применяют *среднее арифметическое*. Специалисты по теории измерений уже около 30 лет знают, что *такой способ некорректен*, поскольку баллы обычно измерены в *порядковой шкале* (см. выше). Обоснованным является использование медиан в качестве

средних баллов. Однако полностью *игнорировать средние арифметические нецелесообразно из-за их привычности и распространенности*. Поэтому **представляется рациональным использовать одновременно оба метода - и метод средних арифметических рангов (баллов), и методов медианных рангов**. Такая рекомендация находится в согласии с общенаучной *концепцией устойчивости* [2], рекомендующей применять различные методы для обработки одних и тех же данных с целью выделить выводы, получаемые одновременно при всех методах. Такие выводы, видимо, соответствуют реальной действительности, в то время как заключения, меняющиеся от метода к методу, зависят от субъективизма исследователя, выбирающего метод обработки исходных экспертных оценок.

**Пример сравнения восьми проектов.** Рассмотрим конкретный пример применения только что сформулированного подхода.

По заданию руководства фирмы анализировались восемь проектов, предлагаемых для включения в план стратегического развития фирмы. Они обозначены следующим образом: Д, Л, М-К, Б, Г-Б, Сол, Стеф, К (по фамилиям менеджеров, предложивших их для рассмотрения). Все проекты были направлены 12 экспертам, включенным в экспертную комиссию, организованную по решению Правления фирмы. В приведенной ниже табл. 1 приведены ранги восьми проектов, присвоенные им каждым из 12 экспертов в соответствии с представлением экспертов о целесообразности включения проекта в стратегический план фирмы. При этом эксперт присваивает ранг 1 самому лучшему проекту, который обязательно надо реализовать. Ранг 2 получает от эксперта второй по привлекательности проект, ... , наконец, ранг 8 - наиболее сомнительный проект, который реализовывать стоит лишь в последнюю очередь.

Таблица 1.

Ранги 8 проектов по степени привлекательности  
для включения в план стратегического развития фирмы

| № эксперта | Д | Л | М-К | Б   | Г-Б | Сол | Стеф | К |
|------------|---|---|-----|-----|-----|-----|------|---|
| 1          | 5 | 3 | 1   | 2   | 8   | 4   | 6    | 7 |
| 2          | 5 | 4 | 3   | 1   | 8   | 2   | 6    | 7 |
| 3          | 1 | 7 | 5   | 4   | 8   | 2   | 3    | 6 |
| 4          | 6 | 4 | 2,5 | 2,5 | 8   | 1   | 7    | 5 |
| 5          | 8 | 2 | 4   | 6   | 3   | 5   | 1    | 7 |
| 6          | 5 | 6 | 4   | 3   | 2   | 1   | 7    | 8 |
| 7          | 6 | 1 | 2   | 3   | 5   | 4   | 8    | 7 |
| 8          | 5 | 1 | 3   | 2   | 7   | 4   | 6    | 8 |
| 9          | 6 | 1 | 3   | 2   | 5   | 4   | 7    | 8 |
| 10         | 5 | 3 | 2   | 1   | 8   | 4   | 6    | 7 |
| 11         | 7 | 1 | 3   | 2   | 6   | 4   | 5    | 8 |
| 12         | 1 | 6 | 5   | 3   | 8   | 4   | 2    | 7 |

*Примечание.* Эксперт № 4 считает, что проекты М-К и Б равноценны, но уступают лишь одному проекту - проекту Сол. Поэтому проекты М-К и Б должны были бы стоять на втором и третьем местах и получить баллы 2 и 3. Поскольку они равноценны, то получают средний балл  $(2+3)/2 = 5/2 = 2,5$ .

Анализируя результаты работы экспертов (т.е. упомянутую таблицу), члены аналитической подразделения Рабочей группы, анализировавшие ответы экспертов по заданию Правления фирмы, были вынуждены констатировать, что полного согласия между экспертами нет, а потому данные, приведенные в таблице, следует подвергнуть более тщательному математическому анализу.

**Метод средних арифметических рангов.** Сначала для получения группового мнения экспертов был применен метод средних арифметических рангов. Для этого прежде всего была подсчитана сумма рангов, присвоенных проектам (см. табл. 1). Затем эта сумма была разделена на число экспертов, в результате рассчитан средний арифметический ранг (именно эта операция дала название методу). По средним рангам строится итоговая ранжировка (в другой терминологии - упорядочение), исходя из принципа - чем меньше средний ранг, тем лучше проект. Наименьший средний ранг, равный 2,625, у проекта Б, - следовательно, в итоговой ранжировке он получает ранг 1. Следующая по величине сумма, равная 3,125, у проекта М-К, - и он получает итоговый ранг 2. Проекты Л и Сол имеют одинаковые суммы (равные 3,25), значит, с точки зрения экспертов они равноценны (при рассматриваемом способе сведения вместе мнений экспертов), а потому они должны бы стоять на 3 и 4 местах и получают средний балл  $(3+4)/2 = 3,5$ . Дальнейшие результаты приведены в табл. 2 ниже.

Итак, ранжировка по суммам рангов (или, что то же самое, по средним арифметическим рангам) имеет вид:

$$Б < М-К < \{Л, Сол\} < Д < Стеф < Г-Б < К. (1)$$

Здесь запись типа "А<Б" означает, что проект А предшествует проекту Б (т.е. проект А лучше проекта Б). Поскольку проекты Л и Сол получили одинаковую сумму баллов, то по рассматриваемому методу они эквивалентны, а потому объединены в группу (в фигурных скобках). В терминологии математической статистики ранжировка (1) имеет одну связь.

**Метод медиан рангов.** Значит, наука сказала свое слово, итог расчетов - ранжировка (1), и на ее основе предстоит принимать решение? Так был поставлен вопрос при обсуждении полученных результатов на заседании Правления фирмы. Но тут наиболее знакомый с современной эконометрикой член Правления вспомнил то, о чем шла речь выше. Он вспомнил, что ответы экспертов измерены в порядковой шкале, а потому для них неправомерно проводить усреднение методом средних арифметических. Надо использовать метод медиан.

Что это значит? Надо взять ответы экспертов, соответствующие одному из проектов, например, проекту Д. Это ранги 5, 5, 1, 6, 8, 5, 6, 5, 6, 5, 7, 1. Затем их надо расположить в порядке неубывания (проще было бы сказать - «в порядке возрастания», но поскольку некоторые ответы совпадают, то приходится использовать непривычный термин «неубывание»). Получим последовательность: 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8. На центральных местах - шестом и седьмом - стоят 5 и 5. Следовательно, медиана равна 5.

Таблица 2.

Результаты расчетов по методу средних арифметических  
и методу медиан для данных, приведенных в таблице 1.

|   | Д  | Л    | М-К   | Б     | Г-Б   | Сол  | Стеф  | К     |
|---|----|------|-------|-------|-------|------|-------|-------|
| Сумма рангов                              | 60 | 39   | 37,5  | 31,5  | 76    | 39   | 64    | 85    |
| Среднее арифметическое рангов             | 5  | 3,25 | 3,125 | 2,625 | 6,333 | 3,25 | 5,333 | 7,083 |
| Итоговый ранг по среднему арифметическому | 5  | 3,5  | 2     | 1     | 7     | 3,5  | 6     | 8     |
| Медианы рангов                            | 5  | 3    | 3     | 2,25  | 7,5   | 4    | 6     | 7     |
| Итоговый ранг по медианам                 | 5  | 2,5  | 2,5   | 1     | 8     | 4    | 6     | 7     |

Медианы совокупностей из 12 рангов, соответствующих определенным проектам, приведены в предпоследней строке табл.2. (При этом медианы вычислены по обычным

правилам статистики - как среднее арифметическое центральных членов вариационного ряда.) Итоговое упорядочение комиссии экспертов по методу медиан приведено в последней строке таблицы. Ранжировка (т.е. упорядочение - итоговое мнение комиссии экспертов) по медианам имеет вид:

$$Б < \{М-К, Л\} < Сол < Д < Стеф < К < Г-Б . (2)$$

Поскольку проекты Л и М-К имеют одинаковые медианы баллов, то по рассматриваемому методу ранжирования они эквивалентны, а потому объединены в группу (кластер), т.е. с точки зрения математической статистики ранжировка (4) имеет одну связь.

#### **Сравнение ранжировок по методу средних арифметических и методу медиан.**

Сравнение ранжировок (1) и (2) показывает их близость (похожесть). Можно принять, что проекты М-К, Л, Сол упорядочены как  $М-К < Л < Сол$ , но из-за погрешностей экспертных оценок в одном методе признаны равноценными проекты Л и Сол (ранжировка (1)), а в другом - проекты М-К и Л (ранжировка (2)). Существенным является только расхождение, касающееся упорядочения проектов К и Г-Б: в ранжировке (3)  $Г-Б < К$ , а в ранжировке (4), наоборот,  $К < Г-Б$ . Однако эти проекты - наименее привлекательные из восьми рассматриваемых, и при выборе наиболее привлекательных проектов для дальнейшего обсуждения и использования на указанное расхождение можно не обращать внимания.

Рассмотренный пример демонстрирует сходство и различие ранжировок, полученных по методу средних арифметических рангов и по методу медиан, а также пользу от их совместного применения.

**Метод согласования кластеризованных ранжировок.** Проблема состоит в выделении общего нестрогого порядка из набора кластеризованных ранжировок (на статистическом языке - ранжировок со связями). Этот набор может отражать мнения нескольких экспертов или быть получен при обработке мнений экспертов различными методами. *Предлагается метод согласования кластеризованных ранжировок, позволяющий «загнуть» противоречия внутрь специальным образом построенных кластеров (групп), в то время как упорядочение кластеров соответствует одновременно всем исходным упорядочениям.*

В различных прикладных областях возникает необходимость анализа нескольких кластеризованных ранжировок объектов. К таким областям относятся прежде всего экология, инженерный бизнес, менеджмент, экономика, социология, прогнозирование, научные и технические исследования и т.д., особенно те их разделы, что связаны с экспертными оценками (см., например, [1,3]). В качестве объектов могут выступать образцы продукции, технологии, математические модели, проекты, кандидаты на должность и др. Кластеризованные ранжировки могут быть получены как с помощью экспертов, так и объективным путем, например, при сопоставлении математических моделей с экспериментальными данными с помощью того или иного критерия качества. Описанный ниже метод был разработан в связи с проблемами химической безопасности биосферы и экологического страхования [3].

В настоящем пункте рассматривается **метод построения кластеризованной ранжировки, согласованной (в раскрытом ниже смысле) со всеми рассматриваемыми кластеризованными ранжировками. При этом противоречия между отдельными исходными ранжировками оказываются заключенными внутри кластеров согласованной ранжировки. В результате упорядоченность кластеров отражает общее мнение экспертов, точнее, то общее, что содержится в исходных ранжировках.**

В кластеры заключены объекты, по поводу которых некоторые из исходных ранжировок *противоречат* друг другу. Для их упорядочения необходимо провести новые исследования. Эти исследования могут быть как формально-математическими (например, вычисление медианы Кемени (о ней – ниже), упорядочения по средним рангам или по медианам и т.п.), так и требовать привлечения новой информации из соответствующей прикладной области, возможно, проведения дополнительных научных или прикладных работ.

*Введем необходимые понятия, затем сформулируем алгоритм согласования кластеризованных ранжировок в общем виде и рассмотрим его свойства.*

Пусть имеется конечное число объектов, которые мы для простоты изложения будем изображать натуральными числами  $1, 2, 3, \dots, k$  и называть их совокупность «носителем». *Под кластеризованной ранжировкой, определенной на заданном носителе, понимаем следующую математическую конструкцию.* Пусть объекты разбиты на группы, которые будем называть кластерами. В кластере может быть и один элемент. Входящие в один кластер объекты будем заключать в фигурные скобки. Например, объекты  $1, 2, 3, \dots, 10$  могут быть разбиты на 7 кластеров:  $\{1\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{5, 6, 7\}$ ,  $\{8\}$ ,  $\{9\}$ ,  $\{10\}$ . В этом разбиении один кластер  $\{5, 6, 7\}$  содержит три элемента, другой -  $\{2, 3\}$  - два, остальные

пять - по одному элементу. Кластеры не имеют общих элементов, а объединение их (как множеств) есть все рассматриваемое множество объектов (весь носитель).

*Вторая составляющая кластеризованной ранжировки - это строгий линейный порядок между кластерами.* Задано, какой из них первый, какой второй, и т.д. Будем изображать упорядоченность с помощью знака  $<$ . При этом кластеры, состоящие из одного элемента, будем для простоты изображать без фигурных скобок. Тогда кластеризованную ранжировку на основе введенных выше кластеров можно изобразить так:

$$A = [1 < \{2,3\} < 4 < \{5,6,7\} < 8 < 9 < 10].$$

Конкретные кластеризованные ранжировки будем заключать в квадратные скобки. Если для простоты речи термин "кластер" применять только к кластеру не менее чем из 2-х элементов, то можно сказать, что в кластеризованную ранжировку  $A$  входят два кластера  $\{2,3\}$  и  $\{5,6,7\}$  и 5 отдельных элементов.

Введенная описанным образом кластеризованная ранжировка является бинарным отношением на носителе - множестве  $\{1,2,3,\dots,10\}$ . Его структура такова. Задано отношение эквивалентности с 7-ю классами эквивалентности, а именно,  $\{2,3\}$ ,  $\{5,6,7\}$ , а 5 классов остальные состоят из оставшихся 5 отдельных элементов. Затем введен строгий линейный порядок между классами эквивалентности.

Введенный математический объект известен в литературе как "*ранжировка со связями*" (М. Холлендер, Д. Вулф), "*упорядочение*" (Дж. Кемени, Дж. Снелл), "*квазисерия*" (Б.Г.Миркин), "*совершенный квазипорядок*" (Ю.А.Шрейдер [4, с.127, 130]). Учитывая разноту в терминологии, было признано полезным ввести собственный термин "*кластеризованная ранжировка*", поскольку в нем явным образом названы основные элементы изучаемого математического объекта - кластеры, рассматриваемые на этапе согласования ранжировок как классы эквивалентности, и ранжировка - строгий совершенный порядок между ними (в терминологии Ю.А.Шрейдера [4, гл.IV]).

Следующее важное понятие - *противоречивость*. Оно определяется для четверки - две кластеризованные ранжировки на одном и том же носителе и два различных объекта - элементы того же носителя. При этом два элемента из одного кластера будем связывать символом равенства  $=$ , как эквивалентные.

Пусть  $A$  и  $B$  - две кластеризованные ранжировки. *Пару объектов  $(a,b)$  назовем «противоречивой» относительно кластеризованных ранжировок  $A$  и  $B$ , если эти два элемента по-разному упорядочены в  $A$  и  $B$ , т.е.  $a < b$  в  $A$  и  $a > b$  в  $B$  (первый вариант противоречивости) либо  $a > b$  в  $A$  и  $a < b$  в  $B$  (второй вариант противоречивости).* Отметим, что в соответствии с этим определением пара объектов  $(a,b)$ , эквивалентная хотя бы в одной кластеризованной ранжировке, не может быть противоречивой: эквивалентность  $a = b$  не образует "противоречия" ни с  $a < b$ , ни с  $a > b$ . Это свойство оказывается полезным при выделении противоречивых пар.

В качестве примера рассмотрим, кроме  $A$ , еще две кластеризованные ранжировки

$$B = [1,2\} < \{3,4,5\} < 6 < 7 < 9 < \{8,10\}],$$

$$C = [3 < \{1,4\} < 2 < 6 < \{5,7,8\} < \{9,10\}].$$

*Совокупность противоречивых пар объектов для двух кластеризованных ранжировок  $A$  и  $B$  назовем «ядром противоречий» и обозначим  $S(A,B)$ .* Для рассмотренных выше в качестве примеров трех кластеризованных ранжировок  $A$ ,  $B$  и  $C$ , определенных на одном и том же носителе  $\{1,2,3,\dots,10\}$ , имеем

$$S(A,B) = [(8,9)], S(A,C) = [(1,3), (2,4)],$$

$$S(B,C) = [(1,3), (2,3), (2,4), (5,6), (8,9)].$$

Как при ручном, так и при программном нахождении ядра можно в поисках противоречивых пар просматривать пары  $(1,2)$ ,  $(1,3)$ ,  $(1,4)$ , ...,  $(1,k)$ , затем  $(2,3)$ ,  $(2,4)$ , ...,  $(2,k)$ , потом  $(3,4)$ , ...,  $(3,k)$ , и т.д., вплоть до последней пары  $(k-1,k)$ .

Пользуясь понятиями дискретной математики, «ядро противоречий» можно изобразить *графом* с вершинами в точках носителя. При этом *противоречивые пары задают ребра этого графа*. Граф для  $S(A,B)$  имеет только одно ребро (одна связная компонента более чем из одной точки), для  $S(A,C)$  - 2 ребра (две связные компоненты более чем из одной точки), для  $S(B,C)$  - 5 ребер (три связные компоненты более чем из одной точки, а именно,  $\{1,2,3,4\}$ ,  $\{5,6\}$  и  $\{8,9\}$ ).

Каждую кластеризованную ранжировку, как и любое бинарное отношение, можно задать матрицей  $\|x(a,b)\|$  из 0 и 1 порядка  $k \times k$ . При этом  $x(a,b) = 1$  тогда и только тогда, когда  $a < b$  либо  $a = b$ . В первом случае  $x(b,a) = 0$ , а во втором  $x(b,a) = 1$ . При этом хотя бы одно из чисел  $x(a,b)$  и  $x(b,a)$  равно 1. Из определения противоречивости пары  $(a,b)$  вытекает, что для нахождения всех таких пар достаточно поэлементно перемножить две матрицы

$\|x(a,b)\|$  и  $\|y(a,b)\|$ , соответствующие двум кластеризованным ранжировкам, и отобразить те и только те пары, для которых  $x(a,b)y(a,b) = x(b,a)y(b,a) = 0$ .

Предлагаемый алгоритм согласования некоторого числа (двух или более) кластеризованных ранжировок состоит из трех этапов. На первом *выделяются противоречивые пары* объектов во всех парах кластеризованных ранжировок. На втором формируются кластеры итоговой кластеризованной ранжировки (т.е. классы эквивалентности - *связные компоненты графов*, соответствующих объединению попарных ядер противоречий). На третьем этапе эти *кластеры (классы эквивалентности) упорядочиваются*. Для установления порядка между кластерами произвольно выбирается один объект из первого кластера и второй - из второго, порядок между кластерами устанавливается такой же, какой имеет быть между выбранными объектами в любой из рассматриваемых кластеризованных ранжировок. (Если в одной из исходных кластеризованных ранжировок имеет быть равенство, а в другой – неравенство, то при построении итоговой кластеризованной ранжировки используется неравенство.)

Корректность подобного упорядочивания, т.е. его независимость от выбора той или иной пары объектов, вытекает из соответствующих теорем, доказанных в статье [3].

Два объекта из разных кластеров согласующей кластеризованной ранжировки могут оказаться эквивалентными в одной из исходных кластеризованных ранжировок (т.е. находиться в одном кластере). В таком случае надо рассмотреть упорядоченность этих объектов в какой-либо другой из исходных кластеризованных ранжировок. Если же во всех исходных кластеризованных ранжировках два рассматриваемых объекта находились в одном кластере, то естественно считать (и это является уточнением к этапу 3 алгоритма), что они находятся в одном кластере и в согласующей кластеризованной ранжировке.

Результат согласования кластеризованных ранжировок  $A, B, C, \dots$  обозначим  $f(A, B, C, \dots)$ . Тогда

$$f(A, B) = [1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < \{8, 9\} < 10],$$

$$f(A, C) = [\{1, 3\} < \{2, 4\} < 6 < \{5, 7\} < 8 < 9 < 10],$$

$$f(B, C) = [\{1, 2, 3, 4\} < \{5, 6\} < 7 < \{8, 9\} < 10],$$

$$f(A, B, C) = f(B, C) = [\{1, 2, 3, 4\} < \{5, 6\} < 7 < \{8, 9\} < 10].$$

Итак, в случае  $f(A, B)$  дополнительного изучения с целью упорядочения требуют только объекты 8 и 9. В случае  $f(A, C)$  кластер  $\{5, 7\}$  появился не потому, что относительно объектов 5 и 7 имеется противоречие, а потому, что в обеих исходных ранжировках эти объекты не различаются. В случае  $f(B, C)$  четыре объекта 1, 2, 3, 4 объединились в один кластер, т.е. кластеризованные ранжировки оказались настолько противоречивыми, что процедура согласования не позволила провести достаточно полную декомпозицию задачи нахождения итогового мнения экспертов.

Рассмотрим некоторые свойства алгоритмов согласования.

1. Пусть  $D = f(A, B, C, \dots)$ . Если  $a < b$  в согласующей кластеризованной ранжировке  $D$ , то  $a < b$  или  $a = b$  в каждой из исходных ранжировок  $A, B, C, \dots$ , причем хотя бы в одной из них справедливо строгое неравенство.

2. Построение согласующих кластеризованных ранжировок может осуществляться поэтапно. В частности,  $f(A, B, C) = f(f(A, B), f(A, C), f(B, C))$ . Ясно, что *ядро противоречий для набора кластеризованных ранжировок является объединением таких ядер для всех пар рассматриваемых ранжировок*.

3. Построение согласующих кластеризованных ранжировок нацелено на выделение общего упорядочения в исходных кластеризованных ранжировках. Однако при этом некоторые общие свойства исходных кластеризованных ранжировок могут теряться. Так, при согласовании ранжировок  $B$  и  $C$ , рассмотренных выше, противоречия в упорядочении элементов 1 и 2 не было - в ранжировке  $B$  эти объекты входили в один кластер, т.е.  $1 = 2$ , в то время как  $1 < 2$  в кластеризованной ранжировке  $C$ . Значит, при их отдельном рассмотрении можно принять упорядочение  $1 < 2$ . Однако в  $f(B, C)$  они попали в один кластер, т.е. возможность их упорядочения исчезла. Это связано с поведением объекта 3, который "перескочил" в  $C$  на первое место и "увлек с собой в противоречие" пару (1, 2), образовав противоречивые пары и с 1, и с 2. Другими словами, связная компонента графа, соответствующего ядру противоречий, сама по себе не всегда является полным графом. Недостающие ребра при этом соответствуют парам типа (1, 2), которые сами по себе не являются противоречивыми, но "увлекаются в противоречие" другими парами.

4. Необходимость согласования кластеризованных ранжировок возникает, в частности, при разработке методики применения экспертных оценок в задачах экологического страхования и химической безопасности биосферы. Как уже говорилось, популярным

является метод упорядочения по средним рангам, в котором итоговая ранжировка строится на основе средних арифметических рангов, выставленных отдельными экспертами [1,5]. Однако из теории измерений известно (см. главу 2.1), что более обоснованным является использование не средних арифметических, а медиан. Вместе с тем метод средних рангов весьма известен и широко применяется, так что просто отбросить его нецелесообразно. Поэтому было принято решение об одновременном применении обоих методов. Реализация этого решения потребовала разработки методики согласования двух указанных кластеризованных ранжировок.

5. Область применения рассматриваемого метода не ограничивается экспертными оценками. Он может быть использован, например, для сравнения качества математических моделей процесса испарения жидкости. Имелись данные экспериментов и результаты расчетов по 8 математическим моделям. Сравнить модели можно по различным критериям качества. Например, по сумме модулей относительных отклонений расчетных и экспериментальных значений. Можно действовать и по другому: в каждой экспериментальной точке упорядочить модели по качеству, а потом получать единые оценки методами средних рангов и медиан. Использовались и иные методы. Затем применялись методы согласования полученных различными способами кластеризованных ранжировок. В результате оказалось возможным упорядочить модели по качеству и использовать это упорядочение при разработке банка математических моделей, используемого в задачах химической безопасности биосферы.

6. Рассматриваемый метод согласования кластеризованных ранжировок построен в соответствии с *методологией теории устойчивости* [2], согласно которой результат обработки данных, инвариантный относительно метода обработки, соответствует реальности, а результат расчетов, зависящий от метода обработки, отражает субъективизм исследователя, а не объективные соотношения.

**Основные математические задачи анализа экспертных оценок.** Ясно, что при анализе мнений экспертов можно применять самые разнообразные статистические методы, описывать их - значит описывать практически всю прикладную статистику. Тем не менее можно выделить основные широко используемые в настоящее время методы математической обработки экспертных оценок - это проверка согласованности мнений экспертов (или классификация экспертов, если нет согласованности) и усреднение мнений экспертов внутри согласованной группы.

Поскольку ответы экспертов во многих процедурах экспертного опроса - не числа, а такие объекты нечисловой природы, как градации качественных признаков, ранжировки, разбиения, результаты парных сравнений, нечеткие предпочтения и т.д., то для их анализа оказываются полезными методы статистики объектов нечисловой природы.

**Почему ответы экспертов часто носят нечисловой характер?** Наиболее общий ответ состоит в том, что люди не мыслят числами. В мышлении человека используются образы, слова, но не числа. Поэтому требовать от эксперта ответ в форме чисел - значит насиловать его разум. Даже в экономике предприниматели, принимая решения, лишь частично опираются на численные расчеты. Это видно из условного (т.е. определяемого произвольно принятыми соглашениями, обычно оформленными в виде инструкций) характера балансовой прибыли, амортизационных отчислений и других экономических показателей. Поэтому фраза типа «фирма стремится к максимизации прибыли» не может иметь строго определенного смысла. Достаточно спросить: «Максимизация прибыли - за какой период?» И сразу станет ясно, что степень оптимальности принимаемых решений зависит от горизонта планирования (на экономико-математическом уровне этот сюжет рассмотрен в монографии [2]).

Эксперт может сравнить два объекта, сказать, какой из двух лучше (метод парных сравнений), дать им оценки типа "хороший", "приемлемый", "плохой", упорядочить несколько объектов по привлекательности, но обычно не может ответить, во сколько раз или на сколько один объект лучше другого. Другими словами, ответы эксперта обычно измерены в порядковой шкале, или являются ранжировками, результатами парных сравнений и другими объектами нечисловой природы, но не числами. *Распространенное заблуждение состоит в том, что ответы экспертов стараются рассматривать как числа, занимаются "оцифровкой" их мнений, приписывая этим мнениям численные значения - баллы, которые потом обрабатывают с помощью методов прикладной статистики как результаты обычных физико-технических измерений.* В случае произвольности "оцифровки" выводы, полученные в результате обработки данных, могут не иметь отношения к реальности. В связи с "оцифровкой" уместно вспомнить классическую притчу о человеке, который ищет потерянные ключи под фонарем, хотя потерял их в кустах. На вопрос, почему он так делает, отвечает: "Под фонарем светлее". Это, конечно, верно. Но, к сожалению, весьма малы шансы найти потерянные ключи под фонарем. Так и с "оцифровкой" нечисловых данных. Она дает возможность имитации научной деятельности, но не возможность найти истину.

**Проверка согласованности мнений экспертов и классификация экспертных мнений.** Ясно, что мнения разных экспертов различаются. Важно понять, насколько велико это различие. Если мало - усреднение мнений экспертов позволит выделить то общее, что

есть у всех экспертов, отбросив случайные отклонения в ту или иную сторону. Если велико - усреднение является чисто формальной процедурой. Так, если представить себе, что ответы экспертов равномерно покрывают поверхность бублика, то формальное усреднение укажет на центр дырки от бублика, а такого мнения не придерживается ни один эксперт. Из сказанного ясна важность проблемы проверки согласованности мнений экспертов.

Разработан ряд методов такой проверки. Статистические методы проверки согласованности зависят от математической природы ответов экспертов. Соответствующие статистические теории весьма трудны, если эти ответы - ранжировки или разбиения, и достаточно просты, если ответы - результаты независимых парных сравнений. Отсюда вытекает рекомендация по организации экспертного опроса: не старайтесь сразу получить от эксперта ранжировку или разбиение, ему трудно это сделать, да и имеющиеся математические методы не позволяют далеко продвинуться в анализе подобных данных. Например, рекомендуют проверять согласованность ранжировок с помощью коэффициента ранговой корреляции Кендалла-Смита. Но давайте вспомним, какая статистическая модель при этом используется. Проверяется нулевая гипотеза, согласно которой ранжировки независимы и равномерно распределены на множестве всех ранжировок. Если эта гипотеза принимается, то конечно, ни о какой согласованности мнений экспертов говорить нельзя. А если отклоняется? Тоже нельзя. Например, может быть два (или больше) центра, около которых группируются ответы экспертов. Нулевая гипотеза отклоняется. Но разве можно говорить о согласованности?

Эксперту гораздо легче на каждом шагу сравнивать только два объекта. Пусть он занимается парными сравнениями. *Непараметрическая теория парных сравнений (теория льюсианов)* [1] позволяет решать более сложные задачи, чем статистика ранжировок или разбиений. В частности, вместо гипотезы равномерного распределения можно рассматривать гипотезу однородности, т.е. вместо совпадения всех распределений с одним фиксированным (равномерным) можно проверять лишь совпадение распределений мнений экспертов между собой, что естественно трактовать как согласованность их мнений. Таким образом, удастся избавиться от неестественного предположения равномерности.

При отсутствии согласованности экспертов естественно разбить их на группы сходных по мнению. Это можно сделать различными методами статистики объектов нечисловой природы, относящимися к кластер-анализу, предварительно введя метрику в пространство мнений экспертов. Идея американского математика Джона Кемени об аксиоматическом введении метрик (см. ниже) нашла многочисленных продолжателей. Однако методы кластер-анализа обычно являются эвристическими. В частности, невозможно с позиций статистической теории обосновать "законность" объединения двух кластеров в один. Имеется важное исключение - для независимых парных сравнений (люсианов) разработаны методы, позволяющие проверять возможность объединения кластеров как статистическую гипотезу. Это - еще один аргумент за то, чтобы рассматривать теорию льюсианов как ядро математических методов экспертных оценок [1].

**Нахождение итогового мнения комиссии экспертов.** Пусть мнения комиссии экспертов или какой-то ее части признаны согласованными. Каково же итоговое (среднее, общее) мнение комиссии? Согласно идее Джона Кемени следует найти среднее мнение как решение *оптимизационной задачи*. А именно, надо минимизировать суммарное расстояние от кандидата в средние до мнений экспертов. Найденное таким способом среднее мнение называют "медианой Кемени".

Математическая сложность состоит в том, что мнения экспертов лежат в некотором пространстве объектов нечисловой природы. Общая теория подобного усреднения построена в ряде работ, в частности, показано, что в силу обобщения закона больших чисел среднее мнение при увеличении числа экспертов (чьи мнения независимы и одинаково распределены) приближается к некоторому пределу, который естественно назвать *математическим ожиданием* (случайного элемента, имеющего то же распределение, что и ответы экспертов).

В конкретных пространствах нечисловых мнений экспертов вычисление медианы Кемени может быть достаточно сложным делом. Кроме свойств пространства, велика роль конкретных метрик. Так, в пространстве ранжировок при использовании метрики, связанной с коэффициентом ранговой корреляции Кендалла, необходимо проводить достаточно сложные расчеты, в то время как применение показателя различия на основе коэффициента ранговой корреляции Спирмена приводит к упорядочению по средним рангам.

**Бинарные отношения и расстояние Кемени.** Как известно, бинарное отношение  $A$  на конечном множестве  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$  - это подмножество *декартова квадрата*  $Q^2 = \{(q_m, q_n), m, n = 1, 2, \dots, k\}$ . При этом пара  $(q_m, q_n)$  входит в  $A$  тогда и только тогда, когда между  $q_m$  и  $q_n$  имеется рассматриваемое отношение.



Напомним, что каждую кластеризованную ранжировку, как и любое бинарное отношение, можно задать квадратной матрицей  $\|x(a,b)\|$  из 0 и 1 порядка  $k \times k$ . При этом  $x(a,b) = 1$  тогда и только тогда, когда  $a < b$  либо  $a = b$ . В первом случае  $x(b,a) = 0$ , а во втором  $x(b,a) = 1$ . При этом хотя бы одно из чисел  $x(a,b)$  и  $x(b,a)$  равно 1.

В экспертных методах используют, в частности, такие бинарные отношения, как ранжировки (упорядочения, или разбиения на группы, между которыми имеется строгий порядок), отношения эквивалентности, толерантности (отношения сходства). Как следует из сказанного выше, каждое бинарное отношение  $A$  можно описать матрицей  $\|a(i,j)\|$  из 0 и 1, причем  $a(i,j) = 1$  тогда и только тогда, когда  $qi$  и  $qj$  находятся в отношении  $A$ , и  $a(i,j) = 0$  в противном случае.

**Определение.** Расстоянием Кемени между бинарными отношениями  $A$  и  $B$ , описываемыми матрицами  $\|a(i,j)\|$  и  $\|b(i,j)\|$  соответственно, называется число

$$D(A, B) = \sum |a(i,j) - b(i,j)|,$$

где суммирование производится по всем  $i, j$  от 1 до  $k$ , т.е. расстояние Кемени между бинарными отношениями равно сумме модулей разностей элементов, стоящих на одних и тех же местах в соответствующих им матрицах.

Легко видеть, что расстояние Кемени - это число несовпадающих элементов в матрицах  $\|a(i,j)\|$  и  $\|b(i,j)\|$ .

Расстояние Кемени основано на некоторой системе аксиом. Эта система аксиом и вывод из нее формулы для расстояния Кемени между упорядочениями содержится в книге [6], которая сыграла большую роль в развитии в нашей стране такого научного направления, как анализ нечисловой информации [1, 2]. В дальнейшем под влиянием Кемени были предложены различные системы аксиом для получения расстояний в тех или иных нужных для социально-экономических исследований пространствах, например, в пространствах множеств [2].

**Медиана Кемени и законы больших чисел.** С помощью расстояния Кемени находят итоговое мнение комиссии экспертов. Пусть  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$  - ответы  $p$  экспертов, представленные в виде бинарных отношений. Для их усреднения используют т.н. медиану Кемени

$$\text{Arg min } \sum D(A_i, A),$$

где  $\text{Arg min}$  - то или те значения  $A$ , при которых достигает минимума указанная сумма расстояний Кемени от ответов экспертов до текущей переменной  $A$ , по которой и проводится минимизация. Таким образом,

$$\sum D(A_i, A) = D(A_1, A) + D(A_2, A) + D(A_3, A) + \dots + D(A_p, A).$$

Кроме медианы Кемени, используют **среднее по Кемени**, в котором вместо  $D(A_i, A)$  стоит  $D^2(A_i, A)$ .

Медиана Кемени - частный случай определения эмпирического среднего в пространствах нечисловой природы [1]. Для нее справедлив закон больших чисел, т.е. эмпирическое среднее приближается при росте числа составляющих (т.е.  $p$  - числа слагаемых в сумме), к теоретическому среднему:

$$\text{Arg min } \sum D(A_i, A) \rightarrow \text{Arg min } M D(A_i, A).$$

Здесь  $M$  - символ математического ожидания. Предполагается, что ответы  $p$  экспертов  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$  есть основания рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные элементы (т.е. как случайную выборку) в соответствующем пространстве произвольной природы, например, в пространстве упорядочений или отношений эквивалентности. Систематически эмпирические и теоретические средние и соответствующие различные варианты законов больших чисел изучены в ряде работ (см., например, [1, 2]).

Законы больших чисел показывают, во-первых, что медиана Кемени обладает *устойчивостью* по отношению к незначительному изменению состава экспертной комиссии; во-вторых, при увеличении числа экспертов она *приближается к некоторому пределу*. Его естественно рассматривать как *истинное мнение* экспертов, от которого каждый из них несколько отклонялся по случайным причинам.

Рассматриваемый здесь закон больших чисел является обобщением известного в статистике "классического" закона больших чисел. Он основан на иной математической базе - теории оптимизации, в то время как "классический" закон больших чисел использует суммирование. Упорядочения и другие бинарные отношения нельзя складывать, поэтому приходится применять иную математику.

Вычисление медианы Кемени - задача целочисленного программирования. В частности, для ее нахождения используется различные алгоритмы дискретной математики, в частности, основанные на методе ветвей и границ. Применяют также алгоритмы, основанные на идее случайного поиска, поскольку для каждого бинарного отношения нетрудно найти множество его соседей.

Рассмотрим пример вычисления медианы Кемени. Пусть дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний для множества бинарных отношений из 9 элементов  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$  (см. табл.3). Найти в этом множестве медиану для множества из 5 элементов  $\{A_2, A_4, A_5, A_8, A_9\}$ .

Таблица 3.

Матрица попарных расстояний

|    |   |    |   |    |    |    |   |    |
|----|---|----|---|----|----|----|---|----|
| 0  | 2 | 13 | 1 | 7  | 4  | 10 | 3 | 11 |
| 2  | 0 | 5  | 6 | 1  | 3  | 2  | 5 | 1  |
| 13 | 5 | 0  | 2 | 2  | 7  | 6  | 5 | 7  |
| 1  | 6 | 2  | 0 | 5  | 4  | 3  | 8 | 8  |
| 7  | 1 | 2  | 5 | 0  | 10 | 1  | 3 | 7  |
| 4  | 3 | 7  | 4 | 10 | 0  | 2  | 1 | 5  |
| 10 | 2 | 6  | 3 | 1  | 2  | 0  | 6 | 3  |
| 3  | 5 | 5  | 8 | 3  | 1  | 6  | 0 | 9  |
| 11 | 1 | 7  | 8 | 7  | 5  | 3  | 9 | 0  |

В соответствии с определением медианы Кемени следует ввести в рассмотрение функцию

$$C(A) = \sum D(A_i, A) = D(A_2, A) + D(A_4, A) + D(A_5, A) + D(A_8, A) + D(A_9, A),$$

рассчитать ее значения для всех  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$  и выбрать наименьшее. Проведем расчеты:

$$\begin{aligned} C(A_1) &= D(A_2, A_1) + D(A_4, A_1) + D(A_5, A_1) + D(A_8, A_1) + D(A_9, A_1) = \\ &= 2 + 1 + 7 + 3 + 11 = 24, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(A_2) &= D(A_2, A_2) + D(A_4, A_2) + D(A_5, A_2) + D(A_8, A_2) + D(A_9, A_2) = \\ &= 0 + 6 + 1 + 5 + 1 = 13, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(A_3) &= D(A_2, A_3) + D(A_4, A_3) + D(A_5, A_3) + D(A_8, A_3) + D(A_9, A_3) = \\ &= 5 + 2 + 2 + 5 + 7 = 21, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(A_4) &= D(A_2, A_4) + D(A_4, A_4) + D(A_5, A_4) + D(A_8, A_4) + D(A_9, A_4) = \\ &= 6 + 0 + 5 + 8 + 8 = 27, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(A_5) &= D(A_2, A_5) + D(A_4, A_5) + D(A_5, A_5) + D(A_8, A_5) + D(A_9, A_5) = \\ &= 1 + 5 + 0 + 3 + 7 = 16, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(A_6) &= D(A_2, A_6) + D(A_4, A_6) + D(A_5, A_6) + D(A_8, A_6) + D(A_9, A_6) = \\ &= 3 + 4 + 10 + 1 + 5 = 23, \end{aligned}$$

$$C(A_7) = D(A_2, A_7) + D(A_4, A_7) + D(A_5, A_7) + D(A_8, A_7) + D(A_9, A_7) =$$

$$= 2 + 3 + 1 + 6 + 3 = 15,$$

$$C(A_8) = D(A_2, A_8) + D(A_4, A_8) + D(A_5, A_8) + D(A_8, A_8) + D(A_9, A_8) =$$

$$= 5 + 8 + 3 + 0 + 9 = 25,$$

$$C(A_9) = D(A_2, A_9) + D(A_4, A_9) + D(A_5, A_9) + D(A_8, A_9) + D(A_9, A_9) =$$

$$= 1 + 8 + 7 + 9 + 0 = 25.$$

Из всех вычисленных сумм наименьшая равна 13, и достигается она при  $A=A_2$ , следовательно, медиана Кемени - это множество  $\{A_2\}$ , состоящее из одного элемента  $A_2$ .

[Предыдущая](#)

[Оглавление](#)

[Следующая](#)

[Найти все материалы по теме «Математические методы анализа экспертных оценок»](#)

[Главная](#) | [Новости](#) | [Бизнес-форум](#) | [Библиотека](#) | [Исследования рынков](#) | [Консалтинговые услуги](#) | [Программы](#)

[Тендеры](#)



[О сайте](#) [Авторам](#) [Размещение рекламы](#) [Вопросы и предложения](#) [Услуги и продукты](#) [Поиск](#)  
Copyright © 1999 - 2018, [AUP.Ru](#)