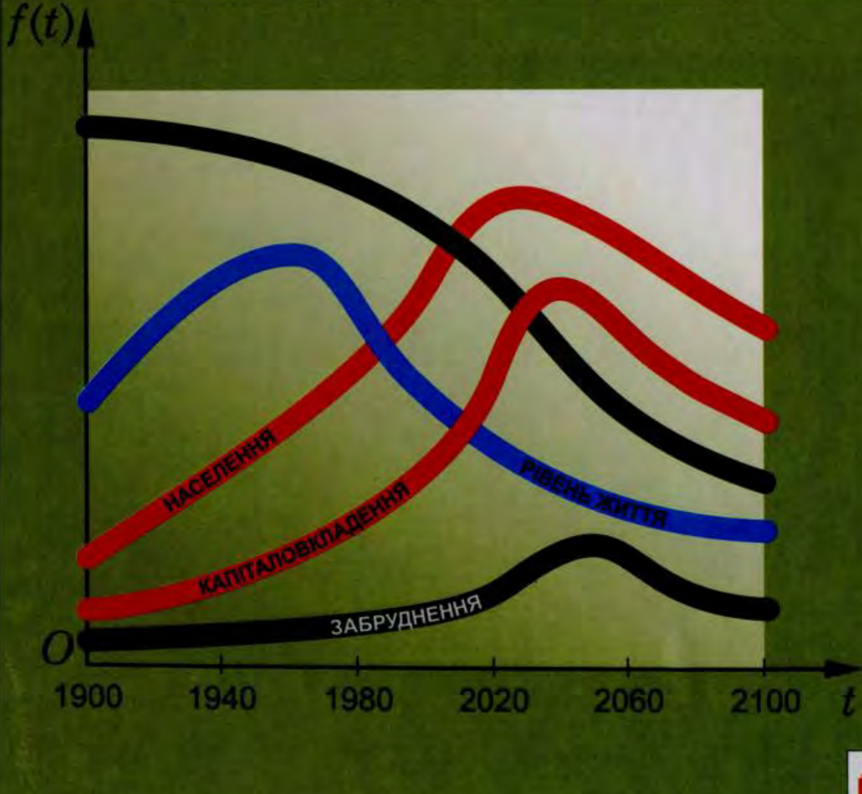
І.М. Ляшенко, М.В. Коробова, А.М. Столяр

Основи математичного моделювання

економічних, екологічних та соціальних процесів



І.М. Ляшенко,
М.В. Коробова,
А.М. Столяр

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник
з напряму «Прикладна математика»
для студентів вищих навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

ББК 22.18
УДК 330.101.541 (075.8)
Л99

Рецензенти:
О.О. Бакаєв
академік НАН України (Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій і систем НАН України та МОН України);
М.В. Михалевич
доктор фізико-математичних наук, професор
(Українська академія зовнішньої торгівлі);
О.Ф. Волошин
доктор технічних наук, професор
(Київський національний університет ім. Т. Шевченка)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист від 13.10.2005 р. № 14/18.2-2208)

Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М.

Л99 Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч. пос. — Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006. — 304 с.

ISBN 966-692-824-8

У пропонованому посібнику викладено засадничі принципи та найпоширеніші методи математичного моделювання соціально-економічних та екологічних процесів. Зокрема, описано класичні аналітичні моделі мікро- та макроекономіки, екології та еколого-економічної взаємодії згідно з концепцією сталого розвитку, наведено їхні теоретичні обґрунтування й аналіз.

Для студентів і викладачів з напряму «Прикладна математика» вищих навчальних закладів, а також спеціалістів з економіки та екології, які передбачають або уже займаються математичним моделюванням.

In the following textbook fundamental principles and the most extended methods of mathematical modelling of social and economic processes is given. Besides, classical analytical models of micro- and macroeconomics, ecology and ecology economical interaction according to conception of permanent development is described, examples of their theoretical basing and analysis is proposed.

For students and teachers of higher educational institutions, dealing with "Applied mathematics", and also for specialists of economics and ecology, who is going to work or work at mathematical modelling.

ББК 22.18
УДК 330.101.541 (075.8)

ISBN 966-692-824-8

ПЕРЕДМОВА

Книга, яку ви взяли до рук, є першим в Україні навчальним посібником для вивчення однойменного нормативного курсу навчально-освітнього рівня «бакалавр» з напрямку «Прикладна математика». Автори посібника — професор, доцент і асистент кафедри математичних методів еколого-економічних досліджень Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Вони протягом тривалого часу читають лекції та проводять практичні заняття з цього курсу, а один з них очолює комісію Міністерства освіти та науки України з розробки нормативних документів навчально-освітніх рівнів «бакалавр» та «магістр» із вказаного напрямку.

На сьогодні математичне моделювання — це потужний засіб для дослідження у багатьох науках. Сучасні досягнення у фізиці, хімії, біології, економіці стали можливими са́ме завдяки широкому використанню математичного апарату та інформатики. І йдеться тут не стільки про елементарне застосування математики для встановлення кількісних співвідношень між окремими елементами досліджуваних явищ (типовим прикладом є побудова для потреб практики регресійних рівнянь за даними спостережень методом «чорного ящика»), скільки про таке математичне моделювання явищ, при якому описуються фундаментальні закони конкретної науки, а експериментують з гіпотезами для з'ясування глибинної суті явищ. Кінцевою метою такого моделювання є одержання нових якісних знань у даній галузі. Їх також можна застосовувати для потреб практики, зокрема — для прогнозування динаміки конкретних явищ.

На сучасному етапі розвитку людства актуальним є перехід на сталий розвиток, коли збалансовуються потреби людини й можливості природи, узгоджується розгляд проблем стану довкілля і соціально-економічного розвитку. З огляду на це взаємодію людського суспільства та природного середовища на будь-якому рівні потрібно розглядати у межах єдиної економіко-еколого-соціальної системи, що об'єднує взаємопов'язані соціальні, економічні та природні процеси. Тому виникає потреба у математичному моделюванні таких систем.

Са́ме з таких міркувань курс «Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів» був внесений до переліку нормативних курсів навчально-освітнього рівня «бакалавр» з напрямку «Прикладна математика». Цей курс дає змогу студентам, які оволоділи відповідною математичною технікою, ознайомитися із сучасними засобами для математичного моделювання у таких математично мало формалізованих наукових галузях, як економіка, екологія та соціологія.

На жаль, у цей посібник не ввійшли основи теорії біфуркацій і катастроф та їхнє застосування для дослідження соціально-економічних процесів, оскільки на сьогодні це не передбачено чинною програмою.

Пропонований посібник складається з трьох частин, виділених лише за логічним принципом, а тому нерівних за обсягом. Це, власне, свідчить і про нерівномірний розвиток математичного моделювання в економіці, екології та соціології. Частини поділено на розділи, а розділи — на підрозділи. Нумерація теорем та рисунків окрема й наскрізна в кожному розділі, а нумерація формул — лише у підрозділах. Через це посилання інколи мають таку форму: формула (3) з підрозділу 6.2. Літературу подано в алфавітному порядку і наведено у кінці посібника.

ЧАСТИНА І

МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО – ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Основна відмінність виробничо-економічних систем від фізичних полягає в тому, що в економічних процесах беруть участь люди. На відміну від технічних систем (наприклад, літака) у виробничому комплексі людина — це не лише суб'єкт, а й об'єкт керування.

Головна особливість керованих систем з участю людини полягає в тому, що процеси, які відбуваються в них, взаємодіють із соціальними. Отже, при застосуванні математики для аналізу та синтезу економічних систем необхідно вивчати також взаємодії великих груп людей, які беруть участь в роботі системи, оскільки вони суттєво впливають на всі процеси у ній. Модель керованої системи з участю людей (а са́ме до цього класу належать економічні системи) має охоплювати моделі технологічних процесів, а також процесів діяльності та взаємодії груп людей.

Вимоги до математичних моделей виробничо-економічних систем ставляться такі:

1. *Системність у підході до вивчення та моделювання.* В економічній системі відбувається перебіг різноманітних процесів (технологічні, економічні, демографічні, соціальні), які тісно взаємопов'язані і тому мають бути описані в сукупності. Проте часто доводиться виділяти для вивчення фрагменти системи: у такому разі опис її частини має спиратися на опис її як цілого. Тільки тоді можна оцінити втрати, що виникають при ізоляції частини для детального вивчення.
2. *Забезпечення зворотного зв'язку.* Дії людей, що впливають на перебіг процесів, залежать від стану самих цих процесів. Отже, виробничі відносини визначають структуру зворотних зв'язків, які діють у соціально-економічній системі. Зворотні зв'язки, що називаються *економічними механізмами*, суттєво впливають на процеси системи.

3. *Передбачення впливу держави на параметри економічних механізмів регулювання* з метою застосування до змін у системі. Опис процесів та економічних механізмів їхнього регулювання утворює математичну модель системи керування.

4. *Соціально-економічна система має бути сукупністю багатьох підсистем*, що керуються численними економічними суб'єктами. При цьому спостерігаються агреговані економічні показники, які є результатами діяльності великих груп об'єктів. Тому математичний опис економіки (на рівні галузі, регіону, держави) має містити макропоказники, які є результатом агрегування (усереднення) початкового мікроопису, тобто сукупності моделей багатьох процесів та поведінки людей, що беруть у них участь, а також взаємодії між ними. Тоді залежності між макропоказниками можуть бути зрозуміло інтерпретовані.

5. *Порівняння результатів математичного аналізу моделей соціально-економічних систем з якісними особливостями розвитку їхнього типу*, який вивчається.

Виконання всіх перерахованих вимог у повному обсязі практично неможливе, оскільки поки що не з'ясовано на змістовому рівні всі важливі закономірності, які керують поведінкою великих груп людей. Отже, не може бути побудована й адекватна математична теорія. Дуже складним завданням є також побудова макроопису економічної системи та її мікроопису.

Яким же чином обійти вказані перешкоди та побудувати ефективну економіко-математичну модель? Результативним є застосування такого простого методологічного прийому: *закони природознавства не можуть порушуватися в економічних процесах*. Неможливо виробити продукцію без відповідних затрат виробничих ресурсів, неможливо поставити замовнику більше продукції, ніж її було вироблено і т. ін. Ці закономірності, які описують взаємодію людей з природою у процесі виробництва і становлять основу моделювання виробничо-технологічного рівня економічних відносин, можна спробувати розглянути окремо, не беручи до уваги взаємодію людей між собою, а також окремо від виробництва, яке виникає у зв'язку з цим (виробничі відносини).

Використання добре розроблених принципів моделювання неживої природи (законів збереження та ін.) дає змогу будувати моделі виробничо-технологічного рівня порівняно просто. Незамкненість моделей цього рівня, тобто наявність у них зовнішніх впливів на перебіг виробничих процесів, не є перешкодою і тоді, коли розглядається проблема щодо вибору найбільш раціонального варіанта виробничого процесу. Са́ме в цьому напрямку досягнуто найбільших успіхів у практиці планування та управління.

З огляду на сказане вище можна виділити два рівні економіко-математичних моделей: 1) *виробничо-технологічний*; 2) *соціально-економічний.*

Виробничо-технологічний рівень довільної системи (дільниці, цеху, підприємства, галузі, економічного району, народного господарства загалом) моделюється на основі матеріальних закономірностей виробництва та розподілу і споживання матеріальних благ. Тому при побудові економіко-математичної моделі передусім необхідно сформулювати перелік матеріальних благ, які фігурують у ній.

Економічна система, яка моделюється, уявляється у вигляді певної кількості «елементарних» економічних одиниць, кожна з яких виконує свої функції, пов'язані з виробництвом, зберіганням, розподілом або споживанням матеріальних благ.

Економіко-математична модель виробничо-технологічного рівня економічної системи охоплює описи: 1) потоків матеріальних благ та трудових ресурсів між елементарними трудовими одиницями; 2) закономірностей перетворення ресурсів і продуктів у цих елементарних одиницях.

1. Потоки матеріальних благ між економічними одиницями мають задовольняти фізичні закони збереження речовини, які виражаються у вигляді балансових співвідношень, що формулюються так: сумарне споживання довільного продукту в системі не перевищує суми його початкових запасів, виробництва в системі та зовнішніх поставок. Аналогічно будуються баланси трудових ресурсів. Крім законів збереження, до опису потоків між елементарними виробничими одиницями системи входять також різні обмеження на величини цих пото-

ків. Такі обмеження можуть мати як технологічний (обмеження пропускної спроможності транспортної мережі), так і соціальний характер (вимога повної зайнятості трудових ресурсів).

2. Після описання потоків між елементарними одиницями необхідно сформулювати у математичній формі закономірності перетворення ресурсів та продуктів у цих одиницях. Співвідношення, які описують закономірності випуску нових продуктів в елементарних виробничих одиницях, прийнято називати **виробничими функціями (ВФ)**. Як правило ними є так звані функції випуску, що мають вигляд:

$$F\colon\ (x, a) \to \boldsymbol{R}_{+}^{n},$$

де $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — вектор виробничих ресурсів, що використовуються; $a = (a_1, \ldots, a_p)$ — вектор параметрів моделі.

Побудова виробничих функцій та оцінювання їхніх параметрів — одне з центральних питань при побудові економіко-математичних моделей, призначених для прийняття рішень при плануванні та управлінні виробництвом.

Можна виділити два основних напрямки досліджень у галузі побудови виробничих функцій. Перший з них полягає в аналізі структури виробничої одиниці та побудові її математичної моделі, яка і має слугувати основою для формулювання виробничої функції. Другий напрямок полягає в аналізі реакції виробничої одиниці на зовнішні впливи, зокрема на зміни структури та кількості виробничих ресурсів.

1. Побудова виробничих функцій на основі структурних моделей

У дослідженнях за цим напрямком «елементарну» виробничу одиницю, яка вивчається, розбивають на певну кількість ще «більш елементарних» виробничих одиниць, пов'язаних балансовими співвідношеннями. Тоді для побудови моделі «елементарної» виробничої одиниці необхідно побудувати виробничі функції для «більш елементарних» виробничих одиниць. Тому для цих останніх будують свої структурні моделі, в яких їхні виробничі одиниці, розбиваються на ще «елементарніші». І так далі, поки не вдасться дійти до найпростіших актів виробничого процесу, про які можна робити висновки на основі конкретних технологічних параметрів устаткування. Ці суто технологічні параметри визначаються в процесі конструювання обладнання та його безпосередньої експлуатації і слугують основою для системи нормативів, що регламентують витрати ресурсів, продуктивність обладнання та ін. Са́ме ці нормативи є інформаційною основою у побудові виробничих функцій для окремих видів обладнання.

На основі виробничих функцій для таких «найелементарніших» виробничих одиниць можна побудувати виробничі функції для більш складних об'єктів і, зрештою, виробничі функції підприємства, галузі, народного господарства загалом.

Проте нормативи, встановлені на основі технологічних даних та експериментального використання обладнання, характеризують лише його граничні можливості. Тому відповідні ВФ будуть описувати ідеальне виробництво. В дійсності ж продуктивність та витрати можуть суттєво відрізнятися від нормативних.

Розробка адекватних математичних моделей соціально-економічних процесів та використання структурних моделей виробничих одиниць — основний шлях до побудови цілком обґрунтованих виробничих функцій, які адекватно відображають реальність. Але оскільки соціально-економічні процеси вивчені ще далеко не повною мірою і не побудовані відповідні їм математичні моделі, то на сьогодні найбільшого поширення набули функції іншого типу, які спираються на функціональні моделі виробничих одиниць.

2. Побудова виробничих функцій на основі функціональних моделей

Основна ідея цього методу, який часто називається ще «методом чорного ящика», полягає у тому, щоб замість намагання описати складну внутрішню структуру об'єкта дослідження, варто побудувати відносно просту функцію, що пов'язує реакцію об'єкта на зовнішні впливи з величинами цих впливів. Параметри функції добирають так, щоб вона апроксимувала результати конкретних спостережень за даним об'єктом.

При такій побудові виробничих функцій «чорним ящиком» є виробнича одиниця, що вивчається, зовнішніми впливами — витрати ресурсів, а реакцією — вироблена продукція.

Нехай, наприклад, виробнича одиниця випускає єдиний продукт q і зафіксовано N спостережень за витратами ресурсів та відповідними значеннями виробництва продукції. Запишемо функцію випуску у такому вигляді:

$$q = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i x_i ,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — невизначені параметри.

Ці параметри мають бути оцінені на основі N спостережень, тобто N значень кожного з ресурсів $x_i^{(j)}$, а також N значень випуску продукції $q^{(j)}$, $j = 1, \ldots, N$. А вибрати їх треба так, щоб досягалася найкраща відповідність між величинами $q^{(j)}$ та значеннями $q_j(a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^{(j)}$.

При оцінюванні параметрів кількість спостережень має бути значно більшою за кількість параметрів. Тому, як правило, при довільних значеннях параметрів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ числа $q^{(j)}$ та q_j не можуть збігатися відразу для всіх $j = 1, \ldots, N$. Звичайно, найпоширенішим методом для оцінювання параметрів є метод найменших квадратів.

Головним недоліком методу «чорного ящика» є неявне припущення про збереження у виробничій функції тих тенденцій, які спостерігалися в минулому, оскільки параметри функції будуються на основі апроксимації минулих спостережень.

Недоліки методу «чорного ящика» і слабкий розвиток структурного методу іноді намагаються компенсувати на основі такого синтезу обох методів: «елементарну» виробничу одиницю розбивають на «більш елементарні», які досліджують за допомогою функціональних моделей, а потім на їхній основі будують ВФ «елементарної» одиниці в цілому.

Отже, для моделювання виробничо-технологічного рівня економічних систем існують два доволі ефективних методи: застосування законів збереження у формі балансових співвідношень та апарату виробничих функцій. Значно більші труднощі виникають при спробі описати соціально-економічний рівень економічних систем.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ СПОЖИВАННЯ

При написанні цього розділу використовувались джерела [6] та [7].

Споживачі — один з основних учасників будь-якої економічної системи. Ми будемо вивчати математичні моделі поведінки *одиничного споживача*, в ролі якого може виступати окремий індивід, сім'я або домашнє господарство, що мають спільний споживчий бюджет та разом формують систему переваг відносно наявних споживчих благ.

Сучасний математичний аналіз споживання в математичній економіці виник на базі економічних поглядів описово-інструментальної економіки, що відомі як **теорія граничної (маргінальної) корисності**. Ця теорія виникла у 70-х рр. XIX ст. і була обтяжена низкою неадекватних дійсності ідей про можливість точної кількісної (кардинальної) вимірності корисності та занадто великими акцентами на маргінальних поняттях. Звільнившись у математичній економіці від подібного баласту, класична ідея корисності перетворилася на сучасну теорію споживчих переваг.

1.1. Простір товарів та відношення переваг

Надалі **товар** будемо розуміти як споживче благо або послугу, що надійшла в продаж у певний час у певному місці. **Споживачем** будемо вважати групу індивідів, які спільно розділяють свій дохід на закупівлю товарів. Головна проблема раціонального ведення господарства споживачем полягає у вирішенні питання про те, яку кількість наявних товарів він має придбати за певний період часу при заданих цінах і відомому споживчому доході. Математичні моделі подібної поведінки та наслідки їхнього аналізу утворюють **теорію особистого споживання**.

Вважається, що існує скінченна кількість наявних товарів, які мають властивість довільної подільності і тому в принципі можливо купити будь-яку кількість кожного з них. Вибір споживача можна охарактеризувати набором товарів $x = (x_1, \ldots, x_n)$, де x_i — кількість i-го товару, придбана споживачем. Тоді всі можливі набори товарів — це точки векторного простору товарів X, що є підмножиною n-вимірного простору $\boldsymbol{R}^n$. При цьому додатність компоненти x_i товарної партії $x = (x_i)_1^n$ означає, що споживач одержав x_i одиниць i-го товару в своє користування, а від'ємність такої компоненти — що він віддав відповідну кількість товару.

Вибір споживачем деякого набору товарів залежить не тільки від його потреб, а частково і від його смаків. Він характеризується суб'єктивним **відношенням переваги**, що позначається через $\succeq$ і є парним порівнянням можливих партій товарів. Тобто, якщо $x \succeq y$, де $x, y \in X$, то це означає, що споживач надає перевагу набору товарів x перед набором y ($x \succ y$) або ж не вбачає між ними різниці ($x \sim y$). У першому випадку кажуть, що x **строго переважає** (тоді $x \succeq y$, але відношення $y \succeq x$ не виконується), а в другому випадку відношення $\sim$ називається **відношенням байдужості,** тобто $x \sim y$ означає, що одночасно $x \succeq y$ та $y \succeq x$.

У математичній теорії споживання вважається, що відношення переваги задовольняє низку аксіом, які фіксують природні властивості вибору споживача та забезпечують можливість дедуктивного розвитку повноцінної теорії.

А1. *Відношення переваги* $\succeq$ *є* ***повним квазіпорядком*** *у просторі товарів.*

А2. *Відношення переваги* $\succeq$ *неперервне, тобто множина* $\{(x, y) \in X \times X: x \succeq y\}$ *є відкритою в декартовому добутку* $X \times X$.

Аксіома ***А1*** означає, що $\succeq$ є бінарним відношенням у просторі X, яке має такі властивості:

а) відношення $\succeq$ є *рефлексивним*;

б) відношення $\succeq$ є *транзитивним*;

в) для будь-якої пари наборів x та y з X або $x \succeq y$, або $y \succeq x$.

Властивості а) – в) є природними і не потребують особливих коментарів. Неперервність переваг ***А2*** означає, що коли споживач надає перевагу набору x^0 перед набором y^0, то він буде надавати перевагу набору x перед набором y, якщо x та y достатньо близькі відповідно до x^0 та y^0.

Пара $(X, \succeq)$, тобто простір товарів з відношенням переваги певного споживача, називається **полем переваг** цього споживача.

Теорема 1. I. *Відношення строгої переваги має такі властивості:*

1) *для жодного $x \in X$ не виконується $x \succ x$;*
2) *якщо $x \succeq y$, $y \succeq z$ для $x, y, z \in X$ і при цьому або $x \succ y$, або $y \succ z$, то $x \succ z$;*
3) *для довільних $x, y \in X$ або $x \succ y$, або $y \succeq x$.*

II. *Відношення байдужості ~ є відношенням еквівалентності на просторі товарів X, тобто воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.*

Доведення. 1) З $x \succ x$ випливало б, що відношення $x \succeq x$ не справджується, а це суперечить аксіомі ***A1***.

2) Якщо б не виконувалося $x \succ z$, то $z \succeq x$; внаслідок ***A1*** з $y \succeq z$, $z \succeq x$ випливає $y \succeq x$, а з $z \succeq x$, $x \succeq y$ випливає $z \succeq y$, і, отже, неможливо, щоб $x \succ y$ або $y \succ z$, а це суперечить строгій перевазі між x та y або між y та z. Теорему доведено.

Згідно з властивостями відношення еквівалентності ~, простір товарів споживача розбивається на класи еквівалентності, які попарно не перетинаються, а кожен із цих класів I_x складається з усіх наборів товарів y, які є байдужими заданому набору x з цього класу.

Такі класи еквівалентності називаються **класами байдужості** споживача, а їхня сукупність утворює **фактор-простір** $(X / \sim)$ простору X відносно відношення байдужості. З геометричної точки зору в практично можливих випадках у зв'язному просторі товарів X класи байдужості при $n = 2$ утворюють криві байдужості, при $n = 3$ — поверхні байдужості, а при $n > 3$ — гіперповерхні байдужості.

Теорема 2. *Неперервність відношення переваги $\succeq$ еквівалентна такій властивості* **BI**: *а) множина $\{y: a \succ y\}$ відкрита в X при кожному $a \in X$; б) множина $\{x: x \succ b\}$ відкрита в X при кожному $b \in X$. Зі свого боку* **BI** *і, отже, неперервність $\succeq$ еквівалентні властивості* **BII**: *а) множина $\{x: x \succeq a\}$ замкнена при кожному $a \in X$; б) множина $\{y: b \succeq y\}$ замкнена при кожному $b \in X$.*

Теорему 2 наводимо без доведення.

Множина $P_x = \{y \in X: y \succeq x\}$ при $x \in X$ називається **переважною множиною відносно набору** x, а множина $NP_x = \{y \in X: x \succeq y\}$ — **непереважною множиною відносно набору** x. Згідно з аксіомою ***А2*** і теоремою 2, це — замкнені множини простору товарів X, що містять всі свої граничні точки для довільного $x \in X$. При цьому спільні для обох множин граничні точки утворюють клас байдужості $I_x = P_x \cap NP_x$.

Нехай $(X, \succeq)$ — поле переваг, а C — підмножина X. Елемент x множини C називається **найбільш (найменш) переважним** у C, якщо $x \succeq y$ ($y \succeq x$) для всіх $y \in C$.

Теорема 3. *Якщо відношення $\succeq$ за умов попереднього означення неперервне і множина C є компактною, то C містить хоча б один найбільш (найменш) переважний елемент, а множина $M(C)$ ($m(C)$) всіх найбільш (найменш) переважних елементів у C є компактною.*

Теорему 3 наводимо без доведення.

Оскільки довільний простір товарів X, доступних споживачеві, може і не мати найбільш переважного для нього елемента, то доцільно дати таке *означення*.

Для поля переваг $(X, \succeq)$ найбільш переважний елемент x в X називається **точкою насичення**. Якщо ж X не має точки насичення, то маємо **ненасиченість.**

Нехай множина X поля переваг $(X, \succeq)$ є опуклою. **(І)** Поле $(X, \succeq)$ називається **опуклим,** якщо з $x \succeq y$ для $x, y \in X$ випливає, що $\alpha x + \beta y \succeq y$ для $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. **(ІІ)** Поле $(X, \succeq)$ називається **підсилено опуклим**, якщо з $x \succ y$ для $x, y \in X$ випливає, що $\alpha x + \beta y \succ y$ для $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. **(ІІІ)** Поле $(X, \succeq)$ називається **строго опуклим,** якщо з $x \succeq y$ для двох різних $x, y \in X$ випливає, що $\alpha x + \beta y \succ y$ для $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Припущення про опуклість в економіці є традиційними. Вони відображають певні економічні закономірності, а також відіграють важливу технічну роль в економіко-математичних моделях та їхньому аналізі.

Теорема 4. *Різні поняття опуклості поля переваг пов'язані такими співвідношеннями: з* **(III)** *випливає* **(I)**; *з* **(III)** *випливає* **(II)**; *якщо відношення* $\succeq$ *неперервне, то з* **(II)** *випливає* **(I)**.

Доведення. Наведемо доведення останнього твердження теореми. Нехай $x \succeq y$ для $x, y \in X$ та $[x, y] = \{z = \alpha x + (1 - \alpha)y: \alpha \in [0, 1]\}$ — відрізок з кінцями x та y. Твердження буде доведено, якщо буде встановлено, що $[x, y] \cap \{w: y \succ w\} = \varnothing$. Множина $\{w: y \succ w\}$ відкрита в X через неперервність відношення $\succeq$. Тому якщо вказаний вище переріз непорожній, то він містить відрізок і принаймні дві різні точки a і b. Оскільки $x, y \notin \{w: y \succ w\}$, то ці точки a і b відрізняються від x та y. Будемо вважати, що точки вибрано таким чином, що:

$$a = \lambda y + \mu b, \qquad \lambda, \mu > 0, \qquad \lambda + \mu = 1, \tag{1}$$

$$b = \sigma x + \theta a, \qquad \sigma, \theta > 0, \qquad \sigma + \theta = 1. \tag{2}$$

Тоді з умов $y \succ b$ та (1), згідно з **(II)**, випливає $a \succ b$. З іншого боку, з $x \succeq y \succ a$ на основі твердження **1**, 2) теореми 1 випливає $x \succ a$. Разом з (2) це означає, що $b \succ a$. Отже, ми отримали суперечність: $a \succ b$ і $b \succ a$, яка показує, що $[x, y] \subset \{w: y \succ w\}$. Твердження доведено.

Теорема 5. *Якщо* $(X, \succeq)$ *— опукле поле переваг і* C *— опукла підмножина в* X, *то* $M(C)$ *є опуклою підмножиною в* C. *При цьому якщо поле* $(X, \succeq)$ *строго опукле, то в* M *існує не більше, ніж один найбільш переважний елемент. Зокрема, в* X *існує не більше, ніж одна точка насичення.*

Теорему 5 наводимо без доведення.

При застосуванні полів переваг споживачів $(X, \succeq)$ найчастіше доводиться мати справу із ситуацією, коли полем товарів X є невід'ємний ортант $\boldsymbol{R}_+^n$ простору $\boldsymbol{R}^n$, а вибір споживача лімітований заданим *обмеженим бюджетом*. До бюджетних факторів належать ціни p_i на товари виду i, $i = 1, \ldots, n$, а також рівень споживчого доходу I. Якщо ввести до розгляду вектор цін $p = (p_i)_1^n$, то споживач при виборі набору товарів x повинен враховувати бюджетне обмеження виду:

$$px = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \leq I. \quad (3)$$

Надалі будемо вважати, що вектор цін p — це вектор-рядок, а вектор x — вектор-колонка.

Таким чином, *допустимі набори товарів* (в інших термінологіях *партії товарів* чи *споживчі меню*) у просторі товарів $\boldsymbol{R}_+^n$ задовольняють обмеження (3) та утворюють *споживчий комплекс*:

$$S_n = \{x \in \boldsymbol{R}_+^n : px \leq I\}, \quad (4)$$

що є замкненою обмеженою опуклою множиною в $\boldsymbol{R}^n$ (опуклим компактом в $\boldsymbol{R}^n$).

1.2. Порядкові функції корисності

Нехай $(X, \succeq)$ — деяке поле переваг ($X \subset \boldsymbol{R}_+^n$) з відношенням переваги, яке задовольняє аксіому ***A1***.

Числова функція $U: X \to \boldsymbol{R}$, визначена на X, називається **індикатором переваги** $\succeq$, або **функцією корисності**, яка зображає відношення переваги $\succeq$, якщо для всіх $x, y \in X$ виконується умова:

$$U(x) \geq U(y) \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad x \succeq y. \quad (1)$$

Таким чином, функція корисності дає нам числове втілення порядкової структури поля переваг. Наведемо деякі властивості функції корисності.

Якщо функція корисності U зображає квазіпорядок переваги $\succeq$, то множина рівнів функції U є класами байдужості для $\succeq$. Таким чином,

$$U(x) = U(y) \Rightarrow x \sim y, \qquad x, y \in X. \quad (2)$$

***Теорема* 6.** **(I)** *Якщо $U(x)$, $x \in X$, є функцією корисності для поля переваг $(X, \succeq)$ і $f: U(X) \to \boldsymbol{R}$ — строго зростаючою функцією, то суперпозиція $f \circ U = f(U)$ теж є функцією корисності, яка зображає поле переваг $(X, \succeq)$.*

(II) *Якщо $U(x)$ та $V(x)$, $x \in X$, — дві функції корисності, то існує така строго зростаюча дійсна функція f, яка визначена на $U(X)$, що $V(x) = f \circ U(x) = f(U(x))$, $x \in X$.*

Теорему 6 наводимо без доведення (його пропонується здійснити читачеві).

З теореми 6 випливає, що коли для якогось поля переваг існує хоча б одна функція корисності, то існує і безліч функцій корисності, які отримуються одна з одної за допомогою строго монотонно зростаючих перетворень: з точністю до будь-яких подібних перетворень функція корисності для заданого поля переваг єдина.

Одним з основних результатів теорії споживання та сучасної теорії корисності, який враховується при прийнятті рішень, є така теорема, що належить Жерару Дебре.

***Теорема* 7 (*Дебре*).** *Якщо множина X поля переваг $(X, \succeq)$ є зв'язною, а відношення переваги $\succeq$ — неперервним (тобто задовольняє аксіому **А2** або еквівалентні їй вимоги), то існує функція корисності $U(x)$, $x \in X$, яка зображає $(X, \succeq)$.*

Доведення теореми 7 доволі громіздке, тому обмежимося лише тим, що сформулюємо припущення (постулат), яке завжди справджується в практично важливих випадках.

(П) Існує така неперервна крива g: $(0, \infty) \to \boldsymbol{R}_+^n$, яка перетинає кожний клас байдужості відношення переваги рівно в одній точці.

Крім цього, варто зауважити, що доведення теореми 7 спирається на подану нижче лему, яка показує, що за умови припущення **(П)** точки кривої $g(t)$ можна впорядкувати за перевагою, тобто за зростанням або спаданням.

***Лема* 1.** *За умови припущення* **(П)** *істинним є принаймні одне з таких тверджень:*

$$з \ \ t < t' \quad випливає \quad g(t) \succ g(t') \quad для\ всіх\ t,\ t', \tag{3}$$

$$з \ \ t < t' \quad випливає \quad g(t') \succ g(t) \quad для\ всіх\ t,\ t'. \tag{4}$$

Лему 1 наводимо без доведення.

З точки зору геометрії лінійного простору $\boldsymbol{R}^n$, невід'ємний ортант $\boldsymbol{R}_+^n$ є замкненим опуклим конусом в $\boldsymbol{R}^n$, тобто, це така замкнена множина, що для будь-яких векторів x, y з цієї множини лінійна комбінація $\alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \geq 0$, теж належить $\boldsymbol{R}_+^n$. Цей конус породжує в $\boldsymbol{R}^n$ та в її підмножині X квазіпорядок $\geq$, при якому $x \geq y$, якщо $(x - y) \in \boldsymbol{R}_+^n$.

Зазвичай вважається, що відношення переваги $\succeq$ задовольняє таку **умову монотонності** (*A3*): якщо $x \geq y$ ($x > y$), то $x \succeq y$ ($x \succ y$).

Властивість ***A3*** означає, що споживач буде надавати перевагу більшій кількості товарів: якщо $z > 0$, то $x + z \succ x$ для всіх x при $x + z, x \in X$.

Очевидно, що перевага $\succeq$ є монотонною тоді і лише тоді, коли функція корисності, яка зображає поле переваг $(X, \succeq)$, є монотонною: якщо $x \geq y$ ($x > y$), то $U(x) \geq U(y)$ ($U(x) > U(y)$). При цьому якщо функція корисності є диференційованою, то існує похідна

$$MU(x) = \frac{dU(x)}{dx} = \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\right)_1^n = (MU_i(x))_1^n,$$

що називається **граничною корисністю** (при цьому $MU_i(x) = \dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ називається ***і*-ою граничною корисністю**). З поданої вище властивості монотонності, яка еквівалентна умові монотонності ***A3***, випливає, що вектор граничної корисності є додатним: $MU(x) > 0$, $x \in X$.

Зрозуміло, що у випадку, коли $X = \boldsymbol{R}_+^n$, властивість монотонності ***A3*** можна назвати **ненасичуваністю** споживача.

Наведемо ще одну властивість функцій корисності.

Відношення переваги $\succeq$ в $(X, \succeq)$ є опуклим тоді і лише тоді, коли функція корисності, яка зображає $(X, \succeq)$, є квазіввігнутою, тобто для довільного $\alpha \in \boldsymbol{R}$ множина

$$S_\alpha = \{x \in \boldsymbol{R}^n \colon U(x) \geq \alpha\} \qquad (5)$$

є опуклою. Відношення переваги $\succeq$ є строго опуклим тоді і лише тоді, коли відповідна функція корисності U є строго квазіввінутою, тобто для довільного $\lambda \in (0, 1)$ і довільного $x \in X$:

$$U(y) \geq U(x) \text{ і } x \neq y, \;\Rightarrow\; U(\lambda x + (1 - \lambda)y) > U(x). \qquad (6)$$

Однак, квазіввігнуті функції порівняно незручні для використання: вони утворюють клас, який є занадто великим для того, щоб успішно застосовувати низку добре розроблених методів. Значно зручніше працювати з ввігнутими та строго ввігнутими функціями, які визначаються відповідно умовами: для довільних $x, y \in \boldsymbol{R}_+^n$ виконується:

$$U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y), \quad \lambda \in [0, 1];$$
$$U(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Неважко переконатися, що кожна ввігнута (строго ввігнута) функція є квазіввігнутою (строго квазіввігнутою).

У подальшому розгляді, за винятком окремо обумовлених випадків, будемо вважати, що функція корисності споживача $U(x)$ є строго ввігнутою (умова ***А4***) і навіть припускатимемо, що виконується сильніша умова (***А5***): функція корисності $U(x)$ є двічі неперервно диференційованою, а її **матриця Гессе**

$$\ddot{U}(x) = \frac{d^2U(x)}{dx^2} = \left(\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_1^n$$

— від'ємно визначеною. Введемо таке позначення: якщо квадратна матриця A є від'ємно визначеною, то будемо писати $A<<0$. Отже, $\ddot{U}(x) << 0, x \in \boldsymbol{R}_+^n$.

Зауважимо, що з (***А5***) випливає умова (***А4***), а також той факт, що діагональні елементи матриці Гессе є від'ємними:

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i^2} < 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Умова (7) виражає відомий в описово-інструментальній економіці *перший закон Госсена*, згідно з яким гранична корисність будь-якого товару зменшується зі збільшенням споживання цього товару.

Наведемо декілька прикладів найбільш поширених у застосуванні функцій корисності (ФК), які задовольняють вказані вище умови.

Приклад 1. *Квадратична ФК.* Функція має вигляд:

$$U(x) = ax + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Bx,$$

де матриця B є від'ємно визначеною, а вектор $(a + x^{\mathrm{T}}B)$ — додатним, тобто всі компоненти даного вектора є додатними: $a + x^{\mathrm{T}}B > 0$.

Приклад 2. *Мультиплікативна ФК.* Функція має вигляд:

$$U(x) = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

де $a > 0$, $\alpha_i \in (0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$.

Приклад 3. *Логарифмічна ФК (ФК Бернуллі).* Це функція має вигляд:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \log_b(x_i - \bar{x}_i), \qquad b > 1,$$

де параметри a_i та $\bar{x}_i$ задовольняють умови: $a_i > 0$, $x_i > \bar{x}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Приклад 4. *ФК зі сталою еластичністю.* Ця функція має вигляд:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 - b_i}(x_i - \bar{x}_i)^{1-b_i},$$

за умови, що параметри a_i, b_i та $\bar{x}_i$ підпорядковуються обмеженням: $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $x_i > \bar{x}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

1.3. Раціональна поведінка споживача

Кожна людина в процесі прийняття індивідуального рішення стосовно витрачання свого доходу керується власними бажаннями, смаками та уподобаннями. Ресурси споживача, як і будь-якого іншого економічного агента, є обмеженими щодо його бажань. І хоча ми не можемо передбачити, на що конкретно споживач вирішить витратити свій дохід, проте можемо сформулювати основні принципи, які визначають те чи те рішення споживача, а також умови, за яких забезпечується максимізація його корисності.

В аналізі поведінки споживача візьмемо за основу припущення про його *суверенітет*, яке означає, що він приймає рішення самостійно. Теорія вибору споживача дає змогу відповісти на запитання про те, як люди здійснюють свій вибір і як впливають на нього ціни товарів, дохід та структура потреб. В основі цієї теорії лежить *гіпотеза раціональної поведінки споживача*, яка означає, що споживач:

- знає, чого він хоче;
- може порівнювати доступні йому набори товарів;
- вибирає той набір товарів, якому він надає найбільшу перевагу.

Крива байдужості — це лінія рівної корисності, всі точки якої характеризують набори товарів, що забезпечують споживачеві один і той самий рівень корисності (рис. 1).

Карта кривих байдужості є множиною усіх можливих рівнів корисності для певного споживача.

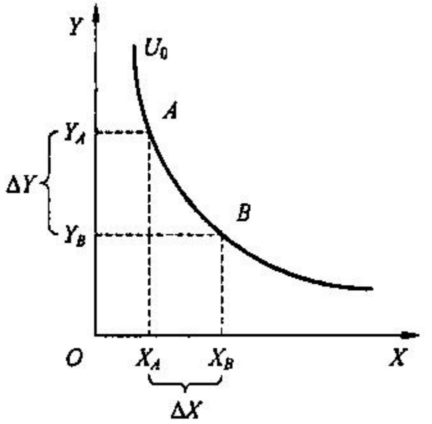


Рис. 1. Крива байдужості

Як видно з рис. 1, криві байдужості є опуклими в бік початку координат. Цей факт можна обґрунтувати такими міркуваннями. Припустимо, що споживач робить свій вибір на користь набору (X_A, Y_A), якому відповідає точка A, що забезпечує йому рівень корисності U_0. Якщо споживач вибирає набір (X_B, Y_B), то він «перебуває» у точці B цієї кривої байдужості U_0. При цьому в обох точках споживач одержує однакову корисність. Але, рухаючись від A до B, він збільшує споживання товару X на величину $\Delta X = X_B - X_A$ і одночасно зменшує споживання товару Y на величину $(-\Delta Y) = Y_B - Y_A$. Отже, для того, щоб спожити більшу кількість одного блага в наборі, споживач мусить відмовитись від певної кількості іншого блага. Це означає, що споживач замінює ΔY одиниць блага Y на ΔX одиниць блага X.

Кількість блага Y, від якої споживач готовий відмовитися в обмін на додаткову одиницю блага X при незмінному загальному рівні корисності, називається **граничною нормою заміщення** благ (товарів). Гранична норма заміщення може бути визначена за формулою:

$$MRS_{XY} = \frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0}\left(-\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right),$$

або:

$$MRS_{XY} = -\frac{\Delta Y}{\Delta X}. \qquad (1)$$

Як видно з рис. 1, гранична норма заміщення зменшується при русі праворуч уздовж кривої байдужості. Зменшення граничної норми заміщення означає, що під час зменшення запасу товару Y і збільшення запасу товару X споживач готовий відмовлятися від дедалі меншої кількості блага Y для отримання додаткової одиниці блага X. Тому для неповних замінників крива байдужості є *опуклою до початку координат*.

Гранична норма заміщення може тлумачитися як співвідношення граничної корисності товарів. Припустимо, що споживач відмовляється від ΔY одиниць блага Y. Якщо корисність кожної одиниці блага Y дорівнює MU_Y, то це означає, що він відмовляється від обсягу корисності $(-\Delta Y \cdot MU_Y)$. Одночасно споживач отримає додатково ΔX одиниць блага X і, відповідно, додаткову корисність в обсязі $\Delta X \cdot MU_X$. Оскільки споживач залишається на тій самій кривій байдужості, то корисність обох наборів для нього є незмінною:

$$-\Delta Y \cdot MU_Y = \Delta X \cdot MU_X,$$

або:

$$-\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{MU_X}{MU_Y}. \qquad (2)$$

З формул (1) та (2) отримаємо, що

$$MRS_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y}.$$

Взагалі ж криві байдужості мають такі *властивості*:

1) криві байдужості мають від'ємний нахил, тому що для збереження корисності зменшення кількості одного товару в наборі має компенсуватися збільшенням кількості іншого товару;
2) криві байдужості не перетинаються;
3) криві байдужості, які лежать далі від початку координат, характеризують набори товарів, що мають вищий рівень корисності;
4) уздовж кривої байдужості гранична норма заміщення зменшується.

1.4. Неокласична задача споживання

Неокласична задача споживання пов'язана з раціональним вибором набору благ та послуг споживачем при заданій функції корисності та визначеному бюджетному обмеженні.

Якщо функція корисності $U(x)$, $x \in \boldsymbol{R}_{+}^{n}$, є двічі неперервно диференційованою та строго опуклою, а бюджетне обмеження має вигляд: $px \le I$, де p — вектор-рядок цін, а I — дохід (капітал) споживача, що може бути використаний на придбання товарів, то *раціональна поведінка споживача* визначається такою задачею опуклого математичного програмування:

$$\begin{cases} U(x) \to max, \\ px \le I, \\ x \in \boldsymbol{R}_{n}^{+}, \end{cases} \qquad (1)$$

— або в розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} &U(x_1, ..., x_n) \to max, \\ &p_1 x_1 + ... + p_n x_n \le I, \\ &x_i \ge 0,\ i = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Оскільки припустима множина векторів для даної задачі є компактною й опуклою, то вона має єдиний розв'язок x^*. Необхідні і достатні умови оптимальності розв'язку x^* задачі (1) визначаються теоремою Куна–Таккера.

Розглянемо для задачі (1) функцію Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = U(x) + \lambda(I - (p, x)), \qquad (3)$$

де λ — множник Лагранжа. Випишемо необхідні умови оптимальності розв'язку x^* та множника λ^*:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} = MU(x^*) - \lambda^* p^T \le 0,$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = I - (p, x^*) \ge 0;$$

$$\left(\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x}\right)^T x^* = (MU(x^*))^T - \lambda^* p)x^* = 0, \tag{4}$$

$$\lambda^* \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = \lambda^*(I - (p, x^*)) = 0,$$

$$x^* \ge 0, \qquad \lambda^* \ge 0.$$

З наведених умов оптимальності (4) випливає, що виконуються такі співвідношення:

$$MU_i(x^*) \le \lambda^* p_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

і при цьому

$$MU_i(x^*) = \lambda^* p_i \ \text{ при } x_i^* > 0, \quad MU_i(x^*) < \lambda^* p_i \ \text{ при } x_i^* = 0. \tag{5}$$

Таким чином, для всіх закуплених товарів, коли $x_i^* > 0$, маємо, що відношення часткових граничних корисностей до відповідних цін є сталим:

$$\frac{MU_i(x^*)}{p_i} = \lambda^*, \qquad i = 1, 2, ..., n, \qquad x_i^* > 0. \tag{6}$$

Звідси, вважаючи, що деякі товари були куплені, маємо, що оптимальне значення множника Лагранжа є додатним: $\lambda^* > 0$, і, отже, з четвертої умови в (4) при оптимальному споживанні весь дохід I повинен бути витрачений: $I = px^*$, тобто розв'язок задачі лежить на граничній гіперплощині симплексу допустимих значень споживчих наборів.

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що споживач закуповує всі види товарів (в іншому разі можна зменшити розмірність простору товарів, вилучивши з розгляду ті з них, які не купуються). Тоді умови оптимальності (4) набувають вигляду системи рівнянь:

$$MU_i(x^*) - \lambda^* p_i = 0, \ i = 1, 2, ..., n, \quad I - px^* = 0,$$

— або в розгорнутому покоординатному вигляді:

$$MU_i(x_1^*, \ldots, x_n^*) - \lambda^* p_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = 0. \tag{7}$$

Отже, **рівновага споживача** відповідає такій комбінації придбаних товарів, при якій максимізується корисність при заданому бюджетному обмеженні.

Оптимальний множник Лагранжа λ^*, який згідно з (6) дорівнює загальному відношенню часткових маргінальних корисностей для оптимального споживання до відповідних цін, можна інтерпретувати на основі загальної теорії гладких задач математичного програмування як **граничну корисність додаткового доходу**:

$$\lambda^* = \frac{\partial U(x^*(p, I))}{\partial I}. \tag{8}$$

У формулі (8) позначення $x^*(p, I)$ вказує, що оптимальний розв'язок задачі (1) залежить від параметрів задачі p та I. Величину (8) теж часто називають **граничною корисністю грошей** споживача.

Система рівнянь (7) складається з $(n + 1)$-го рівняння і виражає необхідні і достатні умови оптимальності задачі (1).

Справді, достатні умови оптимальності другого порядку для задачі (1) формулюються в термінах облямованої цінами матриці Гессе даної задачі:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & \ddot{U}(x^*) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Згідно з цими умовами останні n головних мінорів цієї матриці повинні змінювати знак і одночасно визначник цієї матриці не повинен дорівнювати нулю; це виконується, оскільки матриця $\ddot{U}(x^*)$ є від'ємно визначеною.

Наведемо геометричну інтерпретацію задачі (1) про раціональну поведінку споживача. Але спочатку подамо означення.

Бюджетна лінія — це геометричне місце точок, які характеризують усі такі набори товарів x, на придбання яких за цінами p споживач повністю витрачає свій дохід I.

Розглянемо випадок двох товарів: $n = 2$. Тоді оптимальне споживання задовольняє систему рівнянь:

$$\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - \lambda^* p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - \lambda^* p_2 = 0, \tag{10}$$

$$I - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* = 0.$$

Розв'язок лежить на бюджетній лінії, що описується третім рівнянням з (10), і є точкою її дотику до кривої байдужості (множини точок нечутливості):

$$U(x_1, x_2) = U(x_1^*,\ x_2^*) = const. \tag{11}$$

При цьому нахил (кутовий коефіцієнт) бюджетної лінії дорівнює $(-p_1/p_2)$, а нахил кривої байдужості dx_2/dx_1 можна знайти з рівняння:

$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0, \tag{12}$$

що є наслідком рівняння кривої байдужості (11). З (12) маємо:

$$dx_2/dx_1 \Big|_{\text{на лінії байдужості}} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

Отже, цей вираз визначає кутовий коефіцієнт дотичної в точці $x^* = (x_1^*,\ x_2^*)$ до лінії байдужості. А оскільки в точці дотику, яка є оптимальним розв'язком задачі споживача, нахили рівні, то

$$-\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*) / \partial x_1}{\partial U(x_1^*, x_2^*) / \partial x_2} = -\frac{p_1}{p_2},$$

і, таким чином,

$$\frac{1}{p_1} \frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2} \frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}.$$

Останню умову можна отримати з рівнянь (10), вилучивши множник Лагранжа. Тому бюджетна лінія є *дотичною* до лінії байдужості в точці x^* (рис. 2).

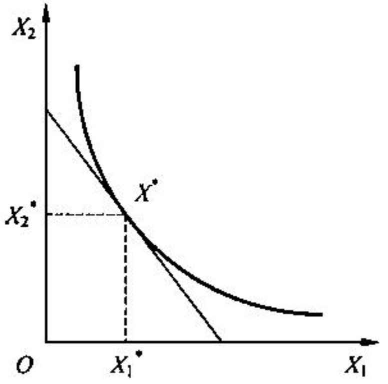


Рис. 2. Рівновага споживача

Отже, споживач, який максимізує свою корисність, купуватиме два види товару таким чином, щоб їхні граничні корисності у розрахунку на грошову одиницю ціни були рівні. Цей підхід називається **еквімаржинальним принципом**. Суть даного принципу полягає в тому, що в точці оптимуму додаткова грошова одиниця (додатковий дохід споживача) приносить споживачеві однакову корисність, незалежно від того, на який товар ця одиниця витрачається.

Таким чином, споживач буде купувати товар до того часу, поки гранична корисність цього товару (для певного споживача у певний момент часу) не стане дорівнювати його ринковій ціні.

Рівновага споживача, при якій він придбає обидва товари, називається **внутрішньою**. Все ж може трапитися, що споживач буде максимізувати свою корисність, зупинившись на придбанні лише одного товару. Така рівновага називається **кутовою**. Рівновага буде досягатися в точці, яка відповідає максимально можливій кількості такого товару, яку може придбати споживач залежно від його бюджету (рис. 2).

Винятково кутовою рівновага споживача буде і тоді, коли один з товарів є **антиблагом**, тобто таким, що має від'ємне значення корисності для споживача. У цьому випадку змінюється сам характер кривої байдужості: замість спадної вона стане зростаючою, адже споживач ніколи добровільно не придбає антиблаго. Зауважимо, що практично кожен товар може перетворитися на антиблаго, коли він доступний у такій кількості, що повністю задовольняє потреби споживача. Точка, в якій споживач перестає розглядати додаткове споживання як таке, що приносить йому корисність, і називається **точкою насичення**.

Теорія споживчого вибору має широке практичне застосування. Найпоширенішою сферою її використання є маркетингові дослідження. Прогнозування поведінки споживача і розуміння механізму вибору ним того чи іншого набору товарів дають змогу будувати ефективнішу стратегію фірми та ухвалювати більш обґрунтовані економічні рішення.

1.5. Функції попиту та граничної вартості грошей

Якщо ціни на товари p та дохід I змінюються відповідно у деякій області P ортанта $\boldsymbol{R}_+^n$ та на проміжку $[I_1, I_2] \in \boldsymbol{R}_+$, то споживач має справу із сім'єю задач:

$$U(x) \to max, \qquad px \le I, \qquad (p, I) \in P \times [I_1, I_2]. \qquad (1)$$

При тих самих припущеннях стосовно функції корисності U, що й раніше, кожна із задач (1) має єдиний розв'язок відносно вектора споживання $x^*(p, I)$ з відповідним оптимальним множником $\lambda^*(p, I)$.

Функції $\xi(p, I) = x^*(p, I)$ та $\Lambda(p, I) = \lambda^*(p, I)$ за умови $(p, I) \in P \times [I_1, I_2] = D$ називаються відповідно **функцією попиту** та функцією **граничної вартості грошей** споживача.

Формально ці функції можна розглядати як розв'язки сім'ї систем рівнянь виду (7):

$$\varphi(\lambda^*, x^*, p, I) = I - (p, x^*) = 0,$$

$$\psi(\lambda^*, x^*, p, I) = \frac{\partial U(x^*)}{\partial x} - \lambda^* p^T = 0, \qquad (p, I) \in D \qquad (2)$$

(неявні функції аргументів p, I). Тоді функції $\xi = x^*(p, I)$ та $\Lambda = \lambda^*(p, I)$ існують, оскільки відповідна матриця Якобі J дорівнює матриці Гессе H, облямованій цінами:

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} & \frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} & \frac{\partial\psi}{\partial x}\end{pmatrix}=H=\begin{pmatrix}0 & -p\\ -p^T & \ddot{U}(x^*)\end{pmatrix},$$

і, отже, має визначник $|J|$, який не дорівнює нулеві через те, що $\ddot{U}(x^*)<0$. Таким чином, всі $(n+1)$-не рівняння системи (2) мають єдиний розв'язок $\xi(p, I)$, $\Lambda(p, I)$, який, відповідно до теореми про неявні функції, має неперервні перші часткові похідні у деякому малому околі розв'язків системи (2).

Однією з найважливіших властивостей функції попиту $\xi(p, I)$ є її однорідність нульового степеня відносно всіх цін та доходу. Це означає, що значення попиту ξ є інваріантними відносно пропорційних змін цін та доходу:

$$\xi(\alpha p, \alpha I)=\xi(p, I) \text{ при всіх } \alpha>0. \qquad (3)$$

Така властивість відразу ж випливає із самої постановки задачі (1) про оптимальне споживання, оскільки пропорційна зміна всіх цін та доходу не змінює допустиму множину цієї задачі та її цільову функцію.

Внаслідок однорідності попит на будь-який вид товару залежить лише від відношення цін, які називаються **відносними цінами**, та від відношення грошового доходу до деякої ціни, що називається **реальним доходом** споживача. Взявши певний i-ий товар за одиницю виміру та позначаючи коефіцієнт пропорційності $\alpha=1/p_i$, можна подати функцію попиту у вигляді:

$$\xi_i=\xi_i(p_1/p_i, \ldots, 1, \ldots, p_n/p_i, I/p_i). \qquad (4)$$

Цей вираз показує залежність попиту від відносних цін та реального доходу. Трапляються випадки, коли за α доцільно брати $1/i$, тобто $1/\sum_{i=1}^{n} p_i$.

У загальному випадку, коли не робиться припущення про строгу опуклість функції корисності споживача U, розв'язок задачі (1) буде неоднозначним. Тобто тоді існуватиме ціла множина наборів товарів, які є однаково переважними для споживача і найбільш бажаними для нього при заданих цінах та бюджетному обмеженні.

Щоб змоделювати поведінку споживача, потрібно розмежовуватися дією двох ефектів, які спостерігаються при зміні цін на один з товарів. **Ефект доходу** — це лише ті зміни у споживанні, які спричинені зміною реального доходу споживача під впливом руху цін. Варто зазначити, що зростання доходу по-різному впливає на споживання нормальних та неякісних товарів. **Ефект заміщення** — це лише ті зміни у споживанні товару, які є результатом зміни цін цього товару відносно цін на інші товари. Цей ефект спрацьовує однаково і щодо нормальних, і щодо неякісних товарів. Обидва зазначені ефекти діють одночасно. Тому реальна спрямованість зміни споживання буде їхньою рівнодійною.

1.6. Основне рівняння теорії споживання

Завданнями порівняльної статики споживання є вивчення *чутливості розв'язку* задачі раціональної поведінки споживача до змін параметрів p та I, тобто дослідження поведінки функції попиту і граничної вартості грошей при зміні цін та доходу.

За означенням функцій попиту $\xi(p, I)$ та граничної вартості грошей $\Lambda(p, I)$, вони є розв'язками такої системи рівнянь:

$$\begin{gathered} I - p\xi(p, I) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x}(\xi(p, I)) - \Lambda(p, I)p^T = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Основні показники порівняльної статики споживання можна отримати шляхом диференціювання тотожностей (1) за параметрами p та I.

Для розгляду впливу зміни доходу I на оптимальну поведінку споживача при незмінних цінах продиференціюємо (1) за I. Тоді отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{gathered} 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \xi_i}{\partial I} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial I} - \frac{\partial \Lambda}{\partial I} p_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{2}$$

відносно часткових похідних $\frac{\partial \xi_i}{\partial I}$, $i = 1, \ldots, n$, та $\frac{\partial \Lambda}{\partial I}$, що характеризують міру чутливості функцій ξ та Λ відносно зміни доходу I. Вважається, що ці величини є невідомими в системі (2). Тоді систему (2) розглядають як систему, з якої можна визначити ці невідомі. Використовуючи векторно-матричні позначення, запишемо рівняння (2) у вигляді:

$$-p \cdot \frac{\partial \xi}{\partial I} = -1, \quad -\frac{\partial \Lambda}{\partial I} \cdot p^T + \ddot{U} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial I} = 0, \tag{3}$$

$$\text{де } \frac{\partial \xi}{\partial I} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial I}\right)^T_{i=1,n}.$$

Рівняння (3), з іншого боку, можна записати у вигляді одного векторного рівняння:

$$H \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Lambda}{\partial I} & \frac{\partial \xi}{\partial I} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & \ddot{U} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Lambda}{\partial I} & \frac{\partial \xi}{\partial I} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для розгляду питань, що пов'язані із впливом зміни однієї ціни p_i при незмінних інших цінах та доході, продиференціюємо рівняння (1) за p_i. Тоді одержимо таку систему рівнянь відносно $\partial \xi_k / \partial p_i$, $k = 1, \ldots, n$, та $\partial \Lambda / \partial p_i$:

$$\xi_i + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} - p_j \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} - \Lambda \cdot \delta_{ij} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера. Якщо ввести матричну похідну $\frac{\partial \xi}{\partial p} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)^n_{i,j=1}$ та векторну похідну $\frac{\partial \Lambda}{\partial p} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p_i}\right)_{i=1,n}$ — векторрядок, то рівняння (5) для значень $i = 1, \ldots, n$ можна записати у вигляді векторних рівнянь:

$$-p \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p} = \xi^T, \qquad -p^T \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial p} + \ddot{U} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p} = \Lambda \cdot E_n, \tag{6}$$

де E_n — одинична матриця n-го порядку.

З іншого боку, систему рівнянь (6) можна переписати у вигляді одного матрично-векторного рівняння:

$$H\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial p}\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -p\\ -p^T & \ddot{U}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial p}\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi^T\\ \Lambda E_n\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Наступним питанням порівняльної статики споживання є дослідження впливу **компенсованої зміни ціни,** при якій дохід компенсується таким чином, щоб корисність залишалася незмінною.

Оскільки повні диференціали функцій U та I мають вигляд:

$$dU=\frac{dU}{dx}dx=MU(x)dx=\lambda pdx,\quad dI=d(p,x)=p(dx)+(dp)x, \tag{8}$$

то для того, аби корисність залишалася незмінною (тобто, щоб виконувалась рівність $dU=0$), необхідно, щоб $pdx=0$, а це буде виконуватися, коли $dI=(dp)x$. Зокрема, якщо ціна p_i зростає до значення p_i+dp_i, то додатковий дохід $dI=(dp_i)x_i$ забезпечує незмінну корисність. Диференціюючи рівняння (1) за p_i, коли $dI=(dp_i)x_i$, отримаємо:

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\xi_j}{\partial p_i}p_j=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2U}{\partial x_j\partial x_k}\cdot\frac{\partial\xi_k}{\partial p_i}-p_j\frac{\partial\Lambda}{\partial p_i}-\Lambda\cdot\delta_{ij}=0,\quad j=1,\ldots,n. \tag{9}$$

Рівняння (9) для індексів $i=1,\ldots,n$ можна у векторній формі записати у вигляді системи:

$$-p\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)_{comp}=0,\quad p^T\cdot\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial p}\right)_{comp}+\ddot{U}\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)_{comp}=\Lambda\cdot E_n, \tag{10}$$

де $\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial p}\right)_{comp}$ та $\left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial p}\right)_{comp}$ визначаються співвідношеннями:

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)_{comp}=\left(\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp}\right)_{i,j=1}^{n},\qquad\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial p}\right)_{comp}=\left(\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial p_i}\right)_{comp}\right)_{i=1,n}$$

— за умови компенсованих змін цін, коли дохід компенсується таким чином, що корисність залишається незмінною.

Систему рівнянь (10) можна записати ще у вигляді одного векторно-матричного рівняння:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & \ddot{U} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial \Lambda}{\partial p}\right)_{comp} \\ \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda E_n \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Таким чином, отримано три векторно-матричних рівняння (4), (7) та (11) для похідних $\partial\Lambda/\partial I$, $\partial\Lambda/\partial p$, $(\partial\Lambda/\partial p)_{comp}$, $\partial\xi/\partial I$, $\partial\xi/\partial p$, $(\partial\xi/\partial p)_{comp}$. Їх можна подати у вигляді одного векторно-матричного рівняння:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & \ddot{U} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial\Lambda/\partial I & \partial\Lambda/\partial p & (\partial\Lambda/\partial p)_{comp} \\ \partial\xi/\partial I & \partial\xi/\partial p & (\partial\xi/\partial p)_{comp} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & \xi^T & 0 \\ 0 & \Lambda E_n & \Lambda E_n \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Рівняння (12) називається **основним векторно-матричним рівнянням теорії споживання**.

Оскільки оточена цінами матриця Гессе є невиродженою, то рівняння (12) можна розв'язати відносно показників (похідних) порівняльної статики. Відповідний розв'язок має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \partial\Lambda/\partial I & \partial\Lambda/\partial p & (\partial\Lambda/\partial p)_{comp} \\ \partial\xi/\partial I & \partial\xi/\partial p & (\partial\xi/\partial p)_{comp} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & \ddot{U} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \xi^T & 0 \\ 0 & \Lambda E_n & \Lambda E_n \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Матрицю H^{-1} можна обчислити за правилом обернення блочних матриць, оскільки матриця Гессе $\ddot{U}$ є від'ємно визначеною і, отже, невиродженою. При цьому

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & \mu p \ddot{U}^{-1} \\ \mu \ddot{U}^{-1} p^T & \ddot{U}^{-1} + \mu \ddot{U}^{-1} p^T p \ddot{U}^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

де $\mu = -(p\ddot{U}^{-1}p^T)^{-1} > 0$. Враховуючи рівняння (13) та вираз (14), отримаємо:

$$\mu = -\frac{\partial \Lambda}{\partial I} = -\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{\partial U(\xi)}{\partial I}\right) = -\frac{\partial^2 U(\xi)}{\partial I^2}, \tag{15}$$

тобто скаляр μ можна трактувати як **коефіцієнт зменшення граничної вартості грошей**.

Користуючись явним виразом для матриці H^{-1} і підставляючи його в рівність (13), отримаємо явний вигляд показників порівняльної статики споживання:

$$\frac{\partial \xi}{\partial I} = -\mu\ddot{U}^{-1}p^T, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial p} = \mu\ddot{U}^{-1}p^T\xi^T + \mu\ddot{U}^{-1}p^Tp\ddot{U}^{-1}\Lambda + \ddot{U}^{-1}\Lambda,$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp} = \mu\ddot{U}^{-1}p^Tp\ddot{U}^{-1}\Lambda + \ddot{U}^{-1}\Lambda; \ \frac{\partial \Lambda}{\partial I} = -\mu, \ \frac{\partial \Lambda}{\partial p} = \mu\xi^T + \mu\Lambda p\ddot{U}^{-1},$$

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p}\right)_{comp} = \mu\Lambda p\ddot{U}^{-1}. \tag{16}$$

1.7. Рівняння Слуцького та класифікація товарів

Важливим інструментом для дослідження в неокласичній теорії споживання є **рівняння Слуцького**. Це рівняння в матричній формі має вигляд:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp} - \frac{\partial \xi}{\partial I}\xi^T. \tag{1}$$

Воно описує загальний ефект від впливу зміни цін на функції попиту через вплив компенсованої зміни цін на попит і вплив зміни доходу на попит. Рівняння (1) є безпосереднім наслідком з виразів для перших трьох показників порівняльної статики споживання (16) з попереднього підрозділу.

Записуючи рівняння Слуцького (1) поелементно для кожного товару та кожної ціни, матимемо систему скалярних рівнянь, еквівалентну матричному рівнянню:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial I}\right)\xi_j, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Матриця

$$C = \left(\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp}\right)_{i,j=1}^{n} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp} \tag{3}$$

називається **матрицею Слуцького** та характеризує ефекти замін одних товарів іншими при зміні цін. Член $(\partial\xi_i/\partial I)\xi_j$ рівняння (2) характеризує вплив зміни доходу на попит на i-ий товар відносно змін ціни на j-ий товар.

З третьої рівності в (16) з підрозділу 1.6 випливає, що матриця Слуцького C (**матриця впливу заміни**) є симетричною та від'ємно напіввизначеною:

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp} = \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial p_i}\right)_{comp}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$(\alpha p)\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp}(\alpha p)^T = 0,$$

$$z^T\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp} z \le 0 \text{ для будь-якого вектора } z = (z_i)_1^n.$$

Враховуючи симетричність матриці C, з рівняння Слуцького (2) маємо таку умову симетричності:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} + \frac{\partial \xi_i}{\partial I}\xi_j = \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \xi_j}{\partial I}\xi_i, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

З від'ємної напіввизначеності матриці C випливає, що частинні значення впливу заміни від'ємні:

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Це означає, що *компенсоване зростання ціни товару завжди призводить до зменшення попиту на цей товар*. Рівняння ж Слуцького вимагає, щоб виконувалася рівність:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial I}\right)\xi_i. \tag{6}$$

Тому вираз у лівій частині (6), який характеризує загальний ефект, також є від'ємним у тому випадку, коли другий доданок у правій частині є достатньо малим та від'ємним:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} < 0, \quad \text{коли} \quad \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial I}\right)\xi_i < \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0. \tag{7}$$

За якісною поведінкою похідних $\partial \xi_i/\partial p_j$, $\partial \xi_i/\partial I$ та $(\partial \xi_i/\partial p_j)_{comp}$ визначається класифікація товарів за попитом, що відіграє неабияку роль в економічних дослідженнях.

Нагадаємо, що ефекти доходу та заміщення діють одночасно. Тому реальна спрямованість зміни споживання буде рівнодійною цих ефектів. Якщо йтиметься про якісний товар, то щодо нього обидва ефекти діють в одному напрямку. В цьому випадку прогнозування зміни споживання залежно від зміни ціни на товар дещо простіше. Що ж до впливу зміни ціни на споживання неякісних товарів, то спрямованості впливу ефектів доходу та заміщення протилежні. Залежно від того, який ефект спрацьовує сильніше, динаміка цін та динаміка споживання матимуть однакову або протилежну спрямованість.

Якщо ефект заміщення має більший вплив, то зі зростанням ціни споживання i-го товару зменшується, а при її зниженні — збільшується. Однак може скластися ситуація, коли переважає ефект доходу, тоді при зростанні ціни зростає і споживання, а при її зменшенні споживання теж зменшується. Проте така ситуація трапляється доволі рідко.

Неякісний товар, для якого ефект доходу переважає над ефектом заміщення, називається **Гіффеновим товаром**. Товар Гіффена має одночасно відповідати таким вимогам:

- бути неякісним в уявленні споживача;
- бути значною часткою його витрат.

Отже, означимо різні товари таким чином. Товар i називається **нормальним**, якщо $\partial\xi_i/\partial p_i < 0$. Товар i називається **товаром Гіффена**, якщо $\partial\xi_i/\partial p_i > 0$. Тобто при збільшенні ціни попит на нормальний товар зменшується, а на товар Гіффена — збільшується. Товар i називається **цінним**, якщо $\partial\xi_i/\partial I > 0$. Товар i називається **малоцінним**, якщо $\partial\xi_i/\partial I < 0$. Отже, при збільшенні доходу попит на цінний товар збільшується, а на малоцінний — зменшується. Зі співвідношень (6), зокрема, випливає, що товари Гіффена повинні бути малоцінними. Для малоцінних товарів при збільшенні доходу відбувається падіння попиту і заміна їх ціннішими. Тому при некомпенсованій зміні ціни може спостерігатися **парадокс Гіффена**, коли зі зростанням ціни на товар зростає і попит на нього. Для економічно неблагополучних країн, або для категорій споживачів з низькими доходами, характерним є явище, коли зростання цін на малоцінні товари (картопля, хліб, маргарин тощо) викликає збільшення попиту на них за рахунок відмови від закупівлі більш цінних товарів (масло, м'ясо тощо). Парадокс Гіффена, на перший погляд, здається винятком із закону попиту. Проте детальніше дослідження доводить, що са́ме взаємодія ефектів заміщення та доходу спричиняє такий розвиток подій.

Існує ще декілька винятків із закону попиту, коли з підвищенням цін спостерігається збільшення закупівлі того чи іншого товару. Зокрема, окремі споживачі можуть ототожнювати зростання цін з підвищенням якості продукції і збільшувати її закупівлю. Крім цього, в умовах нестабільності економічної ситуації зростання цін може сприйматися і як передвісник інфляційного стрибка.

Поєднавши обидві наведені класифікації товарів за реакцією попиту на зміни ціни та доходів, можна отримати загальну сумісну класифікацію. Її вміщено у поданій нижче таблиці.

Таблиця

Вплив зміни часткової ціни	Вплив зміни доходу	Цінні товари ($\partial\xi_i/\partial I > 0$)	Малоцінні товари ($\partial\xi_i/\partial I < 0$)
Нормальні товари ($\partial\xi_i/\partial p_i > 0$)		Нормальні цінні товари. *Приклад:* масло, м'ясо	Нормальні малоцінні товари. *Приклад*: хліб, маргарин у благополучній ситуації
Товари Гіффена ($\partial\xi_i/\partial p_i > 0$)		———	Товари Гіффена (малоцінні). *Приклад*: хліб, картопля, маргарин у неблагополучній ситуації

За характером взаємозалежності попиту на пари товарів такі пари поділяються на пари взаємозамінних та взаємодоповняльних товарів, тобто супутніх товарів та субститутів.

Товари i та j є **взаємозамінними (взаємодоповняльними)**, якщо компенсоване зростання ціни на один з них призводить до збільшення (зменшення) попиту на інший:

$$\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0 \qquad \left(\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0\right). \tag{8}$$

За результатами (16) з підрозділу 1.6 маємо:

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)_{comp} = \mu \ddot{U}^{-1} p^T p \ddot{U}^{-1}\Lambda + \ddot{U}^{-1}\Lambda. \tag{9}$$

Врахувавши, що $\mu = -(p\ddot{U}^{-1}p^T)^{-1}$ і помноживши рівність (9) зліва на вектор цін p, отримаємо співвідношення $p(\partial\xi/\partial p)_{comp} = 0$ або в розгорнутому вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\partial\xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Оскільки всі ціни додатні, то для виконання умови (10) необхідно, аби хоча б один елемент кожного стовпця матриці Слуцького, що характеризує вплив заміни, мав відмінний від інших знак. Але ж елементи на головній діагоналі цієї матриці є від'ємними (згідно з

(5)). Тому принаймні один елемент у кожному стовпцеві матриці Слуцького є додатним. Таким чином, отримано таке твердження.

Теорема 8. *При виконанні основних аксіом споживання та гладкості функції корисності споживача, для будь-якого товару i існує товар j, $j \neq i$, для якого $(\partial\xi_i/\partial p_j)_{comp} > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Інакше кажучи, кожному товару відповідає хоча б один такий товар, який утворює з ним взаємозамінну пару. Зокрема, у випадку двох товарів вони обов'язково мають бути взаємозамінні.*

1.8. Еластичність попиту в умовах агрегації

Для характеристики чутливості зміни попиту на зміни ціни та доходу використовуються коефіцієнти еластичності. Для гладкої функції $f(x)$ **коефіцієнт еластичності** $e(x)$ в точці x визначається так:

$$e(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x). \qquad (1)$$

Коли функція f залежить від багатьох змінних $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, то застосовують часткові **коефіцієнти еластичності** $e_i(x)$, для яких

$$e_i(x) = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}. \qquad (2)$$

Маємо, що еластичність попиту ξ_i за цінами p_j та доходом I характеризується відповідно так:

$$\frac{p_j}{\xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}; \qquad \frac{I}{\xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial I}. \qquad (3)$$

Важливою задачею є знаходження основних співвідношень між еластичностями (3) та співвідношення між пов'язаними з ними частинними похідними (так звані *умови агрегації*).

Перш за все, встановимо рівності:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} + \left(\frac{I}{\xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial I} \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (4)$$

Для цього зауважимо, що з рівняння Слуцького (1) з підрозділу 1.7 та зі співвідношення (10) після множення (1) зліва на вектор p можна одержати таку векторну рівність:

$$p\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)+\left(\frac{\partial\xi}{\partial I}\right)^T I=0. \tag{5}$$

В розгорнутій формі вона набуває вигляду залежностей:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\frac{\partial\xi_j}{\partial p_i}+\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial I}\right)\cdot I=0, \qquad j=1,\ldots,n. \tag{6}$$

(Зауважимо також, що ці залежності можна вивести з однорідності нульового степеня функції попиту, використовуючи теорему Ейлера про однорідні функції). Співвідношення (4) тепер легко отримати діленням кожної із залежностей (6) на ξ_j.

Таким чином встановлено, що для кожного товару *сума всіх еластичностей повинна бути нульовою, тобто сума всіх еластичностей за цінами дорівнює від'ємній еластичності за доходом*.

Перейдемо тепер до виведення умов агрегації. З цією метою візьмемо перший та третій вирази для похідних $(\partial\xi/\partial I)$, $(\partial\xi/\partial p)_{comp}$ з (16) з підрозділу 1.6 та помножимо їх зліва на вектор p, враховуючи, що $\mu=-(p\ddot{U}^{-1}p^T)^{-1}$. Тоді одержимо такі співвідношення:

$$p\left(\frac{\partial\xi}{\partial I}\right)=1, \qquad p\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)_{comp}=0. \tag{7}$$

Перше з них називають **умовою агрегації Енгеля**.

Співвідношення (7) можна записати і в розгорнутому вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\frac{\partial\xi_i}{\partial I}=1,\ \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial p_j}\right)=0, \quad j=1,\ldots,n. \tag{8}$$

Теорема 9*. Всі товари зі споживчого кошика одночасно не можуть бути малоцінними.*

Доведення цієї теореми випливає з першої умови агрегації (8), відповідно до якої зважена з додатними коефіцієнтами p_i сума похідних $\partial\xi_i/\partial I$ є додатною. Отже, одночасно ці похідні не можуть бути від'ємними, а також існує деяке j з множини $j = 1, \ldots, n$, для якого $\partial\xi_j/\partial I > 0$. Теорему 9 доведено.

Поєднуючи співвідношення (7) з рівнянням Слуцького шляхом множення останнього на вектор p зліва, отримаємо **умову агрегації Курно**:

$$p\frac{\partial\xi}{\partial p} + \xi^T = 0, \tag{9}$$

яку в координатній формі можна записати у такому вигляді:

$$\xi_j = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial\xi_j}{\partial p_i}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Таким чином, доведено ще одне твердження.

***Теорема* 10.** *Величина попиту на товар j дорівнює від'ємно зваженій сумі змін значень попиту відносно ціни товару i, в якій вагами є ціни товарів.*

1.9. Приклад задачі з розв'язанням до розділу 1

Задача. Для функції корисності зі сталою еластичністю при $n = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, $\overline{x_1} = 20$, $\overline{x_2} = 5$ знайти:

1) функції попиту на відповідні товари та граничну корисність грошей;
2) еластичності функцій попиту за доходом та цінами;
3) компенсовану заміну ціни.

Розв'язання. 1) Спочатку побудуємо необхідну функцію корисності. Загальний вигляд функції корисності зі сталою еластичністю такий: $U(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}(x_i - \bar{x}_i)^{1-b_i}$. В даному випадку маємо функцію $U(x) = 6(x_1 - 20)^{\frac{1}{2}} + 16(x_2 - 5)^{\frac{1}{2}}$.

Тепер записуємо задачу споживача:

$$U(x) \to max; \quad px \le I; \quad x \ge 0.$$

Отже, маємо таку задачу:

$$6(x_1-20)^{\frac{1}{2}}+16(x_2-5)^{\frac{1}{2}} \to max,$$
$$p_1x_1+p_2x_2 \le I,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Виписуємо функцію Лагранжа L для цієї задачі:

$$L(x, \lambda)=6(x_1-20)^{\frac{1}{2}}+16(x_2-5)^{\frac{1}{2}}+\lambda(I-p_1x_1-p_2x_2),$$

де λ — множник Лагранжа, а також необхідні умови оптимальності розв'язку (x^*, λ^*):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=3(x_1-20)^{-\frac{1}{2}}-\lambda p_1=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=8(x_2-5)^{-\frac{1}{2}}-\lambda p_2=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=I-p_1x_1-p_2x_2=0.$$

Розв'язавши останню систему рівнянь, знаходимо функції попиту на відповідні товари x_1^*, x_2^* та граничну корисність грошей λ^*:

$$x_1^*=\frac{9p_2I+1280p_1^2-45p_2^2}{p_1(9p_2+64p_1)}; \qquad x_2^*=\frac{64p_1I+45p_2^2-1280p_1^2}{p_2(9p_2+64p_1)};$$
$$\lambda^*=\sqrt{\frac{64p_1+9p_2}{p_1p_2(I-20p_1-5p_2)}}.$$

2) Спочатку знайдемо еластичності функцій попиту за доходом:

$$e_1^I=\frac{\partial x_1^*}{\partial I}\cdot\frac{I}{x_1^*}=\frac{9p_2I}{9p_2I+1280p_1^2-45p_2^2};$$
$$e_2^I=\frac{\partial x_2^*}{\partial I}\cdot\frac{I}{x_2^*}=\frac{64p_1I}{64p_1I+45p_2^2-1280p_1^2},$$

а потім — за відповідними цінами:

$$e_1^{p_1} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1^*} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{2560 p_1^2}{9p_2 I + 1280 p_1^2 - 180 p_2^2} - \frac{64 p_1}{9p_2 + 64 p_1} - 1\right);$$

$$e_1^{p_2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_1^*} = \frac{9p_2}{p_1}\left(\frac{I - 10 p_2}{9p_2 I + 1280 p_1^2 - 45 p_2^2} - \frac{1}{9p_2 + 64 p_1}\right);$$

$$e_2^{p_1} = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_2^*} = \frac{64 p_1}{p_2}\left(\frac{I - 40 p_1}{64 p_1 I + 45 p_2^2 - 1280 p_1^2} - \frac{1}{9p_2 + 64 p_1}\right);$$

$$e_2^{p_2} = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_2^*} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{90 p_2^2}{64 p_1 I + 45 p_2^2 - 1280 p_2^2} - \frac{9 p_2}{9p_2 + 64 p_1} - 1\right).$$

3) Елементи матриці Слуцького n-го порядку (матриці впливу заміни) знаходяться з таких співвідношень:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_j^*, \qquad i,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Знаходимо:

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{comp} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1^*}{\partial I} x_1^* = \frac{1152 p_2 (20 p_1 + 5 p_2 - I)}{p_1 (64 p_1 + 9 p_2)^2};$$

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}\right)_{comp} = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} + \frac{\partial x_2^*}{\partial I} x_2^* = \frac{1152 p_1 (20 p_1 + 5 p_2 - I)}{p_2 (64 p_1 + 9 p_2)^2};$$

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}\right)_{comp} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} + \frac{\partial x_1^*}{\partial I} x_2^* = \frac{1152 (I - 20 p_1 - 5 p_2)}{(64 p_1 + 9 p_2)^2}.$$

Оскільки матриця Слуцького є симетричною, то

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{comp} = \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}\right)_{comp} = \frac{1152 (I - 20 p_1 - 5 p_2)}{(64 p_1 + 9 p_2)^2}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Нехай функція корисності споживача має вигляд: $U(x_1, x_2) = \frac{1}{3} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}$. Відповідні ціни: $p_1 = 3$ гр. од.; $p_2 = 2$ гр. од., а дохід $I = 200$ гр. од. Якщо ціни на товари зростуть на 50%, то наскільки потрібно змінити дохід, щоб корисність залишилася на попередньому рівні?

2. Споживач витрачає 130 грн. на придбання двох товарів. Маргінальна корисність першого товару дорівнює $30 - 2 \cdot x_1$ (x_1 — кількість цього виду товару), а маргінальна корисність другого — $19 - 3 \cdot x_2$. Яку кількість товару першого та другого видів придбає раціональний споживач, якщо ціни на товари такі: $p_1 = 20$, $p_2 = 10$. Визначити функцію корисності та корисність товарів у точці споживчої рівноваги. Побудувати криву байдужості в точці рівноваги.

3. Розглянемо модель поведінки споживача за Хіксом. Функція корисності споживача має вигляд: $U(x_1, x_2, x_3) = 4 x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{5}} x_3^{\frac{1}{2}}$. Споживач, купуючи три види товару, прагне досягти такого рівня корисності, який би був не меншим за певний заданий рівень U_0. При цьому витрати споживача на придбання цих товарів мають бути мінімальними. Знайти функції споживчого попиту на дані товари.

4. Щоб урахувати в теорії споживання грошовий капітал, потрібно припустити, що функція корисності залежить не тільки від набору товарів, а й від цінності грошового капіталу та всіх цін, оскільки характер попиту на гроші залежить від цін. Таким чином, вважатимемо, що $U = U(x, p_0, K, p)$, x — набір товарів, K – грошовий капітал, p_0 — ціна грошей, p — вектор цін на товари. Звичайно, вважається, що функція корисності U однорідна нульового степеня відносно всіх $(n + 1)$ цін. Бюджетне обмеження споживача має вигляд: $px = I + r(W - p_0 K)$, де r — норма процента на негрошові активи, а W — багатство.

а) Знайти умови оптимального споживання x та K при мультиплікативній функції корисності та даному бюджетному обмеженні.

б) Знайти функції попиту для товарів і грошей при $n = 1$.

5. Можна розглядати *проблему вибору між заробітком та вільним часом* (дозвіллям) з точки зору теорії споживання. Тоді відповідна проблема постає у вигляді такої задачі: $U(x, l) \to max$, $xp = I + wh$, $l + h = q$, де x позначає набір товарів, l — дозвілля (наприклад, у годинах, при цьому $\partial U/\partial l > 0$), h — робочий час, w — рівень заробітної плати, I — нетрудовий дохід та q — загальний наявний час. Параметри задачі: p, I, w та q; корисність U максимізується за обома аргументами x та l. Нехай $U(x, l)$ є функцію корисності з постійною еластичністю заміщення ($n = 1$, $b_i = 1/2$). Знайти функції попиту на товари x та дозвілля l. Чи є дозвілля малоцінним товаром?

6. Оптимальний рівень корисності непрямо залежить від цін p та доходу I, оскільки $U^* = U(x^*) = U^*(p, I)$, де $x^* = x^*(p, I)$ — функція попиту. Функція $U^*(p, I)$ називається *непрямою функцією корисності*. Користуючись *принципом вилучення податків виду рівності «жертв»*, який вимагає, щоб $U^*(p, I) - U^*(p, I - T(I)) = const$ для всіх I, де $T(I)$ — частина доходу, що береться як податок на дохід I, знайти залежність податків від доходу для функції корисності з постійною еластичністю при $n = 2$; $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$. Показати, що розміри податку будуть зростати з підвищенням доходу.

7. Товар j називається *валовим замінювачем* товару i, якщо $\frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} > 0$, $i \neq j$. Кажуть, що функція попиту $\xi(p, I)$ має *властивість валової замінності*, якщо зі зростанням ціни на будь-який товар попит на всі інші товари не спадає, тобто $\frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} \geq 0$, $i \neq j$. У випадку, коли $\frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} > 0$, $i \neq j$, кажуть про *сильну валову замінність*. Показати, що функція попиту $\xi(p, I)$, яка визначається як розв'язок задачі раціональної поведінки споживача з функцією корисності $U(x) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i^{\gamma_i}$ при $\nu_i > 0$, $0 < \gamma_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $x = (x_i)_{i = 1, n}$, має властивість сильної валової замінності.

РОЗДІЛ 2. ТЕОРІЯ ВИРОБНИЦТВА

При написанні цього розділу використовувались джерела [6] та [7].

У центрі розгляду теорії поведінки виробника знаходиться **підприємство** або **фірма**, як деяка організація, що здійснює витрати економічних факторів, таких як земля, праця, капітал, природні ресурси тощо, для виготовлення продукції та послуг, які вона продає споживачам або іншим фірмам (підприємствам). **Виробництво** — це процес використання праці та капіталу разом з природними ресурсами і матеріалами для створення потрібних продуктів та надання послуг.

Важливими припущеннями (постулатами) стосовно фірми в теорії виробництва є:

- *раціональність її поведінки* (фірма максимізує власну вигоду, тобто *прибуток*, і здатна шукати та знаходити шляхи для досягнення цієї мети);
- *суверенітет* у прийнятті рішень стосовно своєї діяльності.

Задача раціонального ведення господарства, з якою стикається підприємство в умовах ринкової або змішаної економіки, полягає у визначенні кількості продукції та розрахунку витрат виробничих факторів, необхідних для її випуску, з урахуванням технологічних зв'язків між цими факторами, а також цін на витрати та на готову продукцію з метою максимізації власних прибутків.

З огляду на можливості фірми змінювати обсяги використання ресурсів у процесі виробництва, визначаються короткостроковий та довгостроковий періоди. **Короткостроковий період** — це період у виробничій діяльності фірми, протягом якого вона може змінити обсяги використання лише деяких з ресурсів, що забезпечують випуск її продукції. **Довгостроковий період** — це період у діяльності фірми, який є достатнім для зміни обсягів використання всіх без винятку факторів виробництва, потрібних фірмі для випуску її продукції.

2.1. Простір витрат та виробничі функції

Спочатку для спрощення вважатимемо, що фірма випускає лише один вид продукції, використовуючи для цього m виробничих факторів, або виробничих витрат. Таке підприємство називається **однопродуктовим**. *Багатопродуктове підприємство*, яке виробляє декілька видів продукції, розглянемо далі.

Загальні виробничі витрати фірми за певний період часу можна охарактеризувати за допомогою m-вимірного вектора витрат $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$, в якому x_i відображає кількість витрат i-го виробничого фактора. Припускаючи, що всі витрати можуть неперервно змінюватися, простір витрат $\boldsymbol{X}$, який складається з усіх можливих векторів витрат, можна вважати невід'ємним ортантом $\boldsymbol{R}_+^m$ m-вимірного простору $\boldsymbol{R}^m$.

Здатність виробництва продукувати товари при відповідних витратах факторів виробництва визначається передусім технологією, яка при цьому використовується. **Технологія** — це практичне застосування знань про способи виробництва продуктів та послуг. Вона матеріалізується у:

- зразках обладнання;
- методах виробництва;
- організації праці;
- підвищенні загальноосвітнього та професійного рівнів підготовки працівників.

У реальному житті технологія постійно вдосконалюється, що веде до змін у виробничому процесі. Але для спрощення моделі поведінки виробника будемо вважати, що технологічні зміни не відбуваються. Якщо технологія залишається незмінною, то можна обґрунтовано припустити, що існує стійка залежність між певною кількістю ресурсів, які використовуються у виробничому процесі, і тим максимальним обсягом товару, який може бути вироблений за даних умов. Отже, за виробничою технологією фірми кожній точці x простору витрат $\boldsymbol{X}$ відповідає єдиний максимальний випуск продукції q при використанні цих витрат. Технологічний зв'язок між випуском продукції q, що вимірюється в певних одиницях, та виробничими витратами x характеризується **виробничою функцією** F, яка ставить у відповідність кожному вектору витрат x максимальну кількість випуску продукції $q = F(x) \equiv F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Отже, за означенням, F відображає $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{R}_+$.

При використанні виробничих функцій вважається, що вони повинні задовольняти певні умови (аксіоми), які відображають основні економічні закономірності виробництва.

Аксіома А1 відсутності рога достатку стверджує, що для нульового вектора витрат $\mathbf{0} \in \boldsymbol{R}_+^m$ відповідний випуск $F(\mathbf{0})$ продукції є нульовим: $F(\mathbf{0}) = 0$.

Іноді ця аксіома застосовується у підсиленому варіанті. А саме: вважається, що простір витрат не є надлишковим, тобто до нього входять тільки необхідні для випуску даної продукції види витрат. Тоді для векторів витрат, які належать до межі $\partial\boldsymbol{X} = \{x \in \boldsymbol{R}_+^m$: існує хоча б одна така координата x_i, що $x_i = 0\}$, виконується рівність: $F(x) = 0$, $x \in \partial\boldsymbol{X}$. Це означає, що, не витрачаючи необхідних у комплекті для випуску даної продукції виробничих факторів $i = 1, \ldots, m$, неможливо забезпечити її випуск (у кількості, більшій від нуля).

Аксіома А2 монотонності стверджує, що існує підмножина E простору витрат $\boldsymbol{X}$, яка називається **економічною областю**, в якій збільшення будь-якого виду витрат не веде до зменшення випуску продукції, тобто з того, що $x^1, x^2 \in E$ і при цьому $x^1 \geq x^2$, випливає, що $F(x^1) \geq F(x^2)$.

Аксіома А3 ввігнутості стверджує, що існує **особлива область** D, яка є опуклою підмножиною економічної області E, $D \subset E$, для якої звуження виробничої функції $F(x)$, $x \in D$, є ввігнутою (опуклою вгору) функцією. Ця аксіома відображає економічний **закон спадної віддачі (спадної дохідності)**, який означає, що коли поступово витрати економічного фактора одного виду додаються до встановлених обсягів інших витрат факторів, то врешті-решт досягається особлива область, де приріст продуктивності спадає.

При моделюванні виробництва у межах неокласичного підходу зазвичай вважається, що виробнича функція F є двічі неперервно диференційованою за сукупністю своїх аргументів, що дає змогу використовувати маржиналістський (граничний) аналіз. Тоді

$$\frac{dF(x)}{dx} = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\right)_1^m \quad (1)$$

інтерпретується як **граничний продукт** $MP(x)$, а частинні похідні

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = MP_i(x), \qquad i = 1, \ldots, m, \quad (2)$$

називаються **граничними продуктами факторів** або **частковими граничними продуктами**. Мовою граничних продуктів (1) і (2) аксіома монотонності ***A2*** означає, що в економічній області $E \subset X$:

$$MP(x) \equiv \left(MP_i(x)\right)_1^m \geq 0, \quad (3)$$

і, отже, $E = \{x \in X, MP(x) \geq 0\}$.

Аксіома ввігнутості *A3* підсилюється до вимоги *A3.1* від'ємної визначеності матриці Гессе для виробничої функції $\ddot{F}(x)$:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} \equiv \ddot{F}(x) = \left(\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^m, \quad (4)$$

$x^T \ddot{F}(x) x < 0$ для всіх x з особливої області D. Це забезпечує строгу ввігнутість виробничої функції F та опуклість в D **виробничих множин**:

$$D_q = \{x \in D: F(x) \geq q\},\ q > 0. \quad (5)$$

Таким чином, враховуючи аксіому ***A3.1***:

$$D = \{x \in E: x^T \ddot{F}(x) x < 0\}.$$

З (4) випливає **закон спадної віддачі**:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}(MP_i(x)) < 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \quad (6)$$

Ізокванта — це крива, яка показує всі можливі комбінації ресурсів, що дають змогу отримати певний фіксований обсяг продукції q_0:

$$IQ(q^0) = \{x \in X: F(x) = q^0\}.$$

Ізокванти подібні до кривих байдужості. **Карта ізоквант** — це низка ізоквант, що відображає максимальний випуск продукції будь-якого набору факторів виробництва. У просторі двох виробничих факторів ізокванти мають вигляд увігнутих до початку координат кривих.

За допомогою виробничої функції можна побудувати **криві продукції**, які наочно ілюструють стадії виробництва та закон спадної дохідності. Якщо $\bar{x}(x_i)$ — вектор витрат, в якому зафіксовані всі компоненти, крім i-ої, то *крива продукції для витрат* i-го типу P_i, *крива середнього* i-го *продукту* AP_i та *крива* i-го *граничного продукту* MP_i визначаються відповідно рівностями:

$$P_i(x_i) = F(\bar{x}(x_i)), \qquad AP_i = \frac{F(\bar{x}(x_i))}{x_i} = \frac{P_i(x_i)}{x_i},$$

$$MP_i(x_i) = \frac{dP_i(x_i)}{dx_i} = \frac{\partial F(\bar{x}(x_i))}{\partial x_i}, \;\; x_i \geq 0.$$

Перша рівність відображає залежність випуску від витрат i-го виду при незмінних інших витратах (це так званий **сукупний продукт** i-го фактора). Друга рівність характеризує випуск продукції, виробленої в розрахунку на одиницю витрат i-го виду (**продуктивність** i-го фактора), третя — додатковий дохід, отриманий при використанні додаткової кількості витрат i-го виду.

За поведінкою кривих продукції розрізняють *чотири стадії виробництва та критичні точки виробництва* (рис. 1). **Перша критична точка** $\bar{x}_i$ — це точка, де $P_i(x_i)$ має точку перегину (коли $MP_i(x_i)$ досягає максимуму). В **другій критичній точці** $\hat{x}_i$ промінь, проведений з початку координат в системі координат (x_i, q), дотикається до кривої $P_i(x_i)$, а $AP_i(x_i)$ досягає максимуму і дорівнює $MP_i(\hat{x}_i)$. У **третій критичній точці** $\tilde{x}_i$ $P_i(x_i)$ досягає максимуму $(MP_i(\tilde{x}_i) = 0)$. *Закон спадної дохідності* геометрично виражається в тому, що $MP_i(x_i)$ спадає після першої критичної точки $\bar{x}_i$.

Перша стадія виробництва починається в точці $x_i = 0$ і продовжується до точки $\bar{x}_i$. На цій стадії граничний, середній та сукупний продукти зростають, причому граничний продукт перевищує середній:

$$MP_i(x_i) > AP_i(x_i), \qquad 0 < x_i < \bar{x}_i.$$

Друга стадія виробництва починається в точці $x_i = \bar{x}_i$ і продовжується до точки $\hat{x}_i$. Тут зростають сукупний та середній продукти, граничний продукт спадає, але все ще перевищує середній:

$$MP_i(x_i) > AP_i(x_i), \qquad \bar{x}_i < x_i < \hat{x}_i.$$

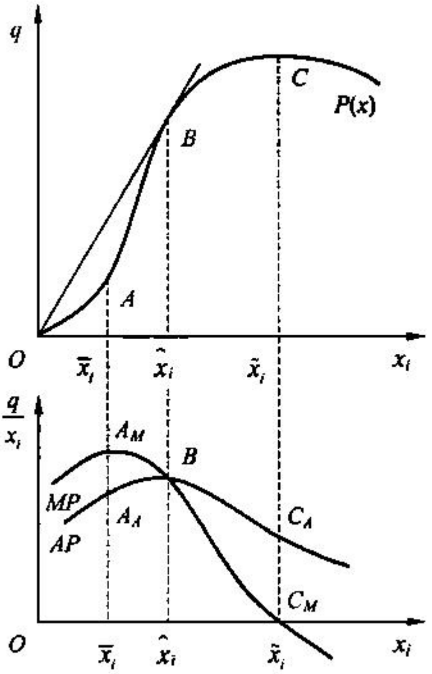


Рис. 1. Критичні точки виробництва

Третя стадія виробництва знаходиться між другою та третьою критичними точками, де зростає лише сукупний продукт, а середній та граничний — спадають, причому середній продукт перевищує граничний, а останній є додатним:

$$AP_i(x_i) > MP_i(x_i) > 0, \quad \hat{x}_i < x_i < \tilde{x}_i.$$

Четверта стадія виробництва розміщена після третьої критичної точки. На цій стадії спадають усі показники, а граничний продукт є від'ємним:

$$MP_i(x_i) < 0, \quad x_i > \tilde{x}_i.$$

Зауважимо, що іноді виділяють лише *3 стадії виробництва*, об'єднуючи першу та другу стадії.

2.2. Еластичність випуску та можливості заміщення

Якщо відбувається пропорційна зміна всіх витрат, то кажуть про *зміну масштабів виробництва*. З цим фактом пов'язана класифікація технологічних процесів виробництва.

Припустимо, що у певній точці простору витрат $\boldsymbol{X}$ всі витрати збільшуються з масштабом α, $\alpha > 1$, набуваючи значення $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_m)$. Виробництво характеризується **сталим доходом**

від розширення масштабу, якщо випуск продукції зростає в тій самій пропорції, що й витрати:

$$F(\alpha x) = \alpha F(x), \qquad \alpha > 1. \tag{1}$$

Виробництво характеризується **зростаючим (спадним) доходом від розширення масштабу**, якщо його виробнича функція зростає більшою (меншою) мірою, ніж усі витрати:

$$F(\alpha x) > \alpha F(x), \qquad (F(\alpha x) < \alpha F(x)), \qquad \alpha > 1. \tag{2}$$

Зрозуміло, в різних точках простору витрат $\boldsymbol{X}$ функція може поводитися по-різному. Локальним показником вимірювання доходу від розширення масштабу виробництва, визначеним у певній точці x простору витрат, є **еластичність виробництва** (інакше **сумарна еластичність виробництва**):

$$\varepsilon(x) = \lim_{б \to 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \cdot \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \lim_{б \to 1} \frac{\partial \ln F(\alpha x)}{\partial \ln \alpha}, \tag{3}$$

тобто еластичність випуску відносно параметра масштабу α. З означення (3) та співвідношень (1), (2) випливає, що у випадку сталого (зростаючого чи спадного) доходу від розширення масштабу виробництва еластичність $\varepsilon(x)$ дорівнює (більша чи менша) одиниці. Враховуючи, що

$$\frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial(\alpha x_i)} x_i,$$

маємо:

$$\varepsilon(x) = \lim_{б \to 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \cdot \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \lim_{б \to 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial(\alpha x_i)} x_i =$$

$$= \frac{1}{F(x)} (MP(x))^{\mathrm{T}} x, \tag{4}$$

тобто

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^{m} MP_i(x) x_i. \tag{5}$$

Визначимо **еластичність $\varepsilon_i(x)$ випуску відносно зміни витрат i-го виду (еластичність випуску за фактором i)** як

$$\varepsilon_i(x) = \frac{x_i}{F(x)} \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{F(x)} MP_i(x). \tag{6}$$

Тоді рівність (5) набуває вигляду:

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(x), \tag{7}$$

тобто еластичність випуску в довільній точці є сумою еластичностей випуску за всіма факторами у цій точці.

Приклад. Нехай виробнича функція F є однорідною степеня k, тобто для всіх x: $F(\alpha x) = \alpha^k F(x)$. Тоді за теоремою Ейлера про однорідні функції, виконується рівність:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} x_i = k F(x).$$

Звідси:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} x_i = k.$$

Таким чином, сумарна еластичність однорідних виробничих функцій не залежить від комбінації витрат і при $k > 1$ маємо зростаючу, при $k < 1$ — спадну, а при $k = 1$ — сталу ефективність від розширення масштабу виробництва.

Можливості заміщення характеризують технологічний процес виробництва, а отже, і функцію F з боку різних комбінацій витрат факторів, що породжують однакові умови випуску. Зокрема, для визначення можливостей заміщення одного фактора виробництва іншим у процесі їхнього використання можна застосовувати аналіз ізоквант. **Гранична норма технологічного заміщення** j-го ресурсу i-им ($MRTS_{ij}$) визначається обсягом j-го ресурсу, який може замінити кожна одиниця i-го ресурсу, не викликаючи при цьому зміни обсягів виробництва: $MRTS_{ij} = -\Delta x_j / \Delta x_i$.

Форма ізоквант (опукла до початку координат) показує, що гранична норма технологічного заміщення зменшується при просуванні вниз уздовж ізокванти. Це, очевидно, пов'язано з властивістю факторів виробництва доповнювати один одного.

Проте хоча спадна гранична віддача характерна для абсолютної більшості виробничих процесів, існує низка винятків, де ця залежність є дещо іншою. Наприклад, тоді, коли фактори виробництва можуть використовуватися лише у певній пропорції (рис. 2).

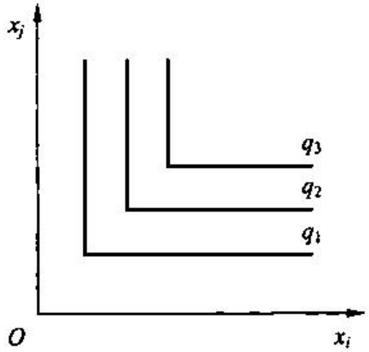


Рис. 2. Жорстка технологія виробництва

Локальною характеристикою заміщення між витратами x_i та x_j, $i \neq j$, коли всі інші витрати залишаються незмінними в точці x з D, є так звана **еластичність заміщення** $\sigma_{ij}(x)$ між витратами i та j, яка визначається рівністю:

$$\sigma_{ij}(x) = -\frac{d\ln(x_i / x_j)}{d\ln(MP_i(x)/MP_j(x))},$$

$$i, j, = 1, \ldots, m, \quad i \neq j. \qquad (8)$$

Функція $\sigma_{ij}(x)$ виражає процентну зміну співвідношення витрат, поділену на процентну зміну співвідношення їхніх граничних продуктів. При цьому знак мінус у рівності (8) забезпечує виконання нерівності $\sigma_{ij} \geq 0$ в особливій області D. Геометрично еластичності заміщення характеризують кривизну ізоквант.

Диференціювання вздовж ізокванти дає співвідношення:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} dx_i \equiv \sum_{i=1}^{m} MP_i(x) dx_i \equiv MP(x)^{\mathrm{T}}(dx) = 0. \qquad (9)$$

Якщо всі витрати є фіксованими, крім витрат факторів i та j, $i \neq j$, то з (9) маємо: $MP_i(x)dx_i + MP_j(x)dx_j = 0$. Звідси кривизни dx_i/dx_j на ізокванті мають вигляд:

$$\left.\frac{dx_i}{dx_j}\right|_{ізокванта} = -\frac{MP_j(x)}{MP_i(x)}.$$

Таким чином, з рівності (8) випливає, що

$$\frac{1}{\sigma_{ij}(x)} = \frac{d\ln(-(dx_i / dx_j)_{ізокванта})}{d\ln(x_i / x_j)}.$$

Зауважимо, що ізокванти називають також **виробничими гіперповерхнями байдужості.**

2.3. Основні типи виробничих функцій

Наведемо приклади найбільш поширених видів виробничих функцій (ВФ). Зауважимо, що подібні функції широко використовуються і в макроекономічному моделюванні, але в просторах агрегованих (збільшених) витрат. Агреговані витрати застосовують і в мікроекономіці. Наприклад, часто застосовують лише два види витрат: обсяг виробничого капіталу (основних фондів) K та обсяг праці L, які вимірюються: для K — у грошовому або натуральному виразі, а для L — у кількості робітників, людино-годин, людино-днів та ін.

З метою спрощення записів наведемо приклади ВФ для двовимірного простору витрат.

1. *Лінійна ВФ*:

$$q = F(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2,$$

де коефіцієнти $a_i > 0$ мають зміст граничного продукту i-го виду витрат.

2. *ВФ моделі «витрати-випуск» Леонтьєва* (*ВФ Леонтьєва*):

$$q = F(x_1, x_2) = min\left(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right),$$

де параметр $c_i > 0$ є обсягом витрати i-го виду, необхідної для випуску одиниці продукції. Отже, для цієї функції одночасно

$$x_i \geq c_iq = c_iF(x_1, x_2), \quad i = 1, 2.$$

3. *ВФ аналізу способів виробничої діяльності*:

$$q = F(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{p}\alpha_k y_k,$$

де змінні y_k задовольняють умови:

$$\sum_{k=1}^{p}\alpha_{ik} y_k \leq x_i, \quad i = 1, 2.$$

Параметр p характеризує кількість способів виробничої діяльності, змінна y_k показує рівень інтенсивності використання способу k, а параметр α_k характеризує випуск продукції при одиничній інтенсивності способу k.

4. *ВФ Кобба – Дугласа*:

$$q = F(x_1, x_2) = b_0 x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2},$$

де коефіцієнт $b_0 > 0$ є масштабним множником, $b_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

5. *ВФ зі сталою еластичністю заміщення* (*CES*):

$$q = F(x_1, x_2) = e_0(e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta})^{-\frac{h}{\beta}},$$

де коефіцієнт $e_0 > 0$ є масштабним множником, а $e_i \geq 0$, $i = 1, 2$ — параметрами розподілу; параметр $h > 0$ характеризує степінь однорідності, а $\beta \geq -1$ є параметром заміщення. Частинним випадком цієї ВФ є *ВФ Солоу*:

$$q = F(x_1, x_2) = e_0(e x_1^{-\beta} + (1 - e) x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}},$$

де $e \in [0, 1]$.

Вкажемо на такі факти стосовно *ВФ* 1 – 5. ВФ аналізу виробничої діяльності узагальнює функцію Леонтьєва на випадок, коли існують p елементарних процесів, кожен з яких може відбуватися при будь-якій невід'ємній «інтенсивності». Випуск при одиничній інтенсивності та витрати, що припадають на одиницю інтенсивності, є фіксованими, а загальний випуск і загальні витрати визначаються шляхом простого підсумовування випуску та витрат відповідно для кожної активності при вибраних інтенсивностях.

ВФ *CES* можна розглядати і як певне узагальнення виробничих функцій Леонтьєва, Кобба–Дугласа та лінійної функції.

2.4. Виробництво і вартість. Мінімізація вартості

Для визначення зв'язку між обсягом виробництва продукції та вартістю її виробництва попередньо проаналізуємо зв'язок між обсягами затрат виробничих факторів x та вартістю виробництва. Такий зв'язок у довготривалому періоді характеризується **функцією сукупної вартості виробництва**, яка відображає сумарну вартість усіх використаних факторів виробництва і має вигляд:

$$TC = c(x) = (w, x) = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i, \qquad (1)$$

де TC — сукупна вартість виробництва, $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$, w_i — ціна i-го виробничого фактора, причому ціни факторів виробництва розглядаються як незмінні, незалежно від обсягів використання ресурсів. Якщо, наприклад, $m = 2$, а TC зафіксувати на певному рівні TC_0, то в системі координат (x_i, x_j) можна зобразити пряму, всі точки якої відповідатимуть різним варіантам сполучень факторів виробництва однакової вартості TC_0. Така пряма сталих видатків має назву **ізокости**, або *лінії незмінної вартості* (рис. 3). Нахил ізокости дорівнює, очевидно, $-w_j/w_i$ і визначає *норму заміщення* фактора x_i однією додатковою одиницею фактора x_j за умов незмінної сукупної вартості. Ізокоста є аналогом лінії бюджетного обмеження.

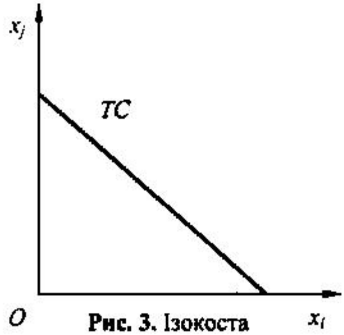


Рис. 3. Ізокоста

Через те, що однакові обсяги випуску продукції можуть забезпечуватися використанням різних комбінацій обсягів виробничих факторів з різною вартістю, виникає питання вибору сполучення факторів мінімальної вартості. **Мінімізація вартості** — це процес досягнення фірмою таких обсягів використання ресурсів, коли вартість набору ресурсів, необхідних для забезпечення певного обсягу випуску продукції, буде найменшою порівняно з вартістю усіх інших наборів ресурсів, що забезпечують той самий обсяг випуску.

Аналітично ця проблема мінімізації приводить до задачі умовної мінімізації:

$$c(x) \to min,$$
$$F(x) = q_0, \qquad x \geq 0. \tag{2}$$

Як відомо, задача (2) розв'язується за допомогою методу множників Лагранжа.

Геометрично задача (2) може бути розв'язана таким чином: якщо сумістити на графіку ізокванту, що відповідає бажаному обсягу випуску q_0, з картою ізокост, то мінімальній вартості виробництва відповідатиме точка дотику ізокванти та однієї з ізокост (рис. 4).

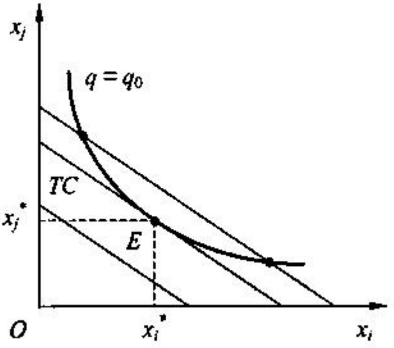


Рис. 4. Мінімізація вартості

Аналітичний і геометричний розв'язки задачі (2) визначають умову мінімізації вартості, яка має вигляд:

$$\frac{MP_i}{MP_j} = \frac{w_i}{w_j}. \qquad (3)$$

Умова (3) відома під назвою **еквімаржинального принципу**, або **принципу рівності граничних величин**.

Як видно з рис. 4, в точці E збігаються нахили ізокванти та ізокости, тобто збігаються норми заміщення факторів за вартістю та технологією. Інакше кажучи, для мінімізації вартості при заданому рівні виробництва фірмі потрібно використовувати таку комбінацію ресурсів, при якій граничні продуктивності ресурсів пропорційні до їхніх цін.

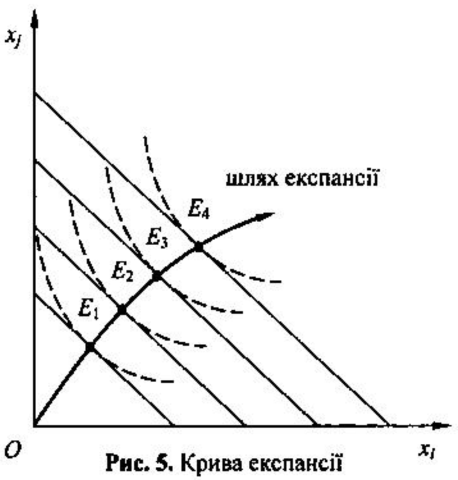


Рис. 5. Крива експансії

Так само, як і вище, для кожного іншого бажаного обсягу випуску можна знайти точку мінімальної вартості в системі координат (x_i, x_j). Поєднання таких точок для різних обсягів випуску утворює криву, відому під назвою **шлях** (рис. 5), або **крива експансії (розвитку)**.

За допомогою кривої експансії можна побудувати функцію вартості виробництва:

$$TC = c(q), \qquad (4)$$

яка встановлює зв'язок між обсягом випуску q та мінімально можливою вартістю виробництва цього обсягу.

2.4.1. *Вартість у короткостроковому періоді*

У короткостроковому періоді лише частина факторів є змінними. Тому функція вартості виробництва (4) для короткострокового періоду має вигляд:

$$TC = c(q) = FC + VC(q), \tag{5}$$

де FC — фіксована вартість, що не залежить від обсягу випуску, а $VC(q)$ — змінна вартість. На відміну від (4), функція вартості (5) відтворює зв'язок між обсягом випуску q та мінімально можливою змінною (а не сукупною) вартістю виробництва при певному фіксованому рівні FC. Типові криві сукупної, змінної та фіксованої вартостей зображено на рис. 6 (а).

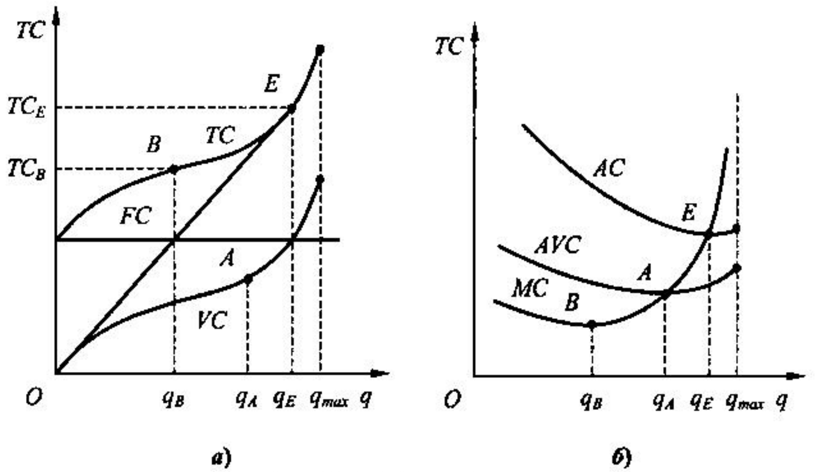


Рис. 6. Криві вартостей

Вартість виробництва аналізується також з використанням середніх і граничних показників.

Середня сукупна вартість (AC) — це вартість виробництва одиниці продукції:

$$AC = \frac{TC(q)}{q}.$$

Відповідно визначаються показники **середньої змінної вартості** (AVC) та **середньої фіксованої вартості** (AFC):

$$AVC = \frac{VC}{q}, \qquad AFC = \frac{FC}{q}.$$

Гранична вартість (MC) визначається як величина зміни загальної вартості внаслідок зміни обсягу випуску на одиницю:

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta q}.$$

Для неперервної та диференційованої функції вартості (5) граничну вартість можна визначити як похідну:

$$MC = \frac{dc(q)}{dq} = \frac{dVC(q)}{dq}.$$

На рис. 6 (б) показано співвідношення між кривими середньої та граничної вартостей. Мінімальне значення MC досягається в точці B при $q = q_B$, мінімальне значення AVC — в точці A при $q = q_A$, а мінімальне значення AC — в точці E при $q = q_E$.

Залежно від значень показників вартості, відповідно до збільшення обсягу випуску q визначаються чотири стадії виробництва. На **І стадії**, тобто при $q < q_B$, MC, AC та AVC спадають. На **ІІ стадії**, при $q_B < q < q_A$, AC та AVC спадають, а MC вже зростає. На **ІІІ стадії**, при $q_A < q < q_E$, AC ще спадає, а AVC вже починає зростати. На **IV стадії**, тобто при q в діапазоні від q_E до максимально можливого обсягу випуску в короткостроковому періоді q_{max}, всі показники зростають. Можна, зокрема, довести, що крива граничної вартості MC перетинає криві середніх вартостей AC та AVC у точках їхніх мінімумів (відповідно E та A). Обсяг q_E можна вважати *ефективним у короткостроковому періоді* з огляду на мінімальний рівень вартості виробництва одиниці продукції.

2.4.2. Вартість у довгостроковому періоді

У довгостроковому періоді можуть змінюватися обсяги використання всіх факторів, тому в складі сукупної вартості неможливо вирізнити фіксовану і змінну вартості. Функцію (і криву) загальної вартості для цього періоду можна побудувати, якщо скористатися кривою експансії (див. рис. 5). Для цього потрібно визначити вартість різних наборів факторів TC, що відповідають точкам на кривій експансії, та поставити їм у відповідність обсяги випуску. Таким чином, отримаємо сукупність пар (q, TC), тобто залежність $TC = c(q)$ між обсягами q та *довгостроковою вартістю* цих обсягів $LRC = TC$. **Довгострокова середня вартість** ($LRAC$) визначається як вартість виробництва одиниці продукції у довгостроковому періоді:

$$LRAC = \frac{LRC}{q}. \tag{6}$$

Розглянемо процес побудови кривої довгострокової середньої вартості $LRAC$. При переході від короткострокового до довгострокового періоду фірма може змінювати рівень FC. Якщо фірма буде розглядати декілька варіантів розвитку з відповідними різними рівнями FC, то для кожного варіанту можна визначити сукупну вартість виробництва та середню вартість. Відповідні криві середньої вартості показано на рис. 7. Цей рисунок допомагає визначити, який з варіантів розвитку слід вибрати для досягнення того з можливих обсягів випуску q, при якому середня вартість AC буде мінімальною. Якщо знайти значну кількість варіантів розвитку з дуже малим кроком зміни FC, то тоді можна буде вважати, що *нижня обвідна лінія* на рис. 7 і буде довгостроковою кривою $LRAC$, яка дасть змогу для кожного обсягу випуску q вказати варіант розвитку з мінімальною середньою вартістю.

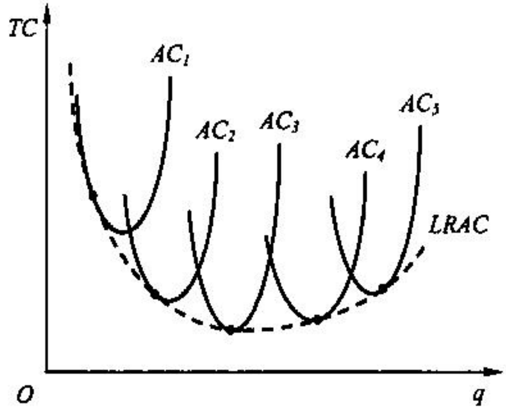


Рис. 7. Довгострокова середня вартість

Довгострокова гранична вартість ($LRMC$) визначається аналогічно до показника MC — як вартість виробництва однієї додаткової одиниці q:

$$LRMC = \frac{\Delta LRC}{\Delta q}. \tag{7}$$

Крива *LRMC* закономірно проходить через точку мінімуму кривої *LRAC*.

Типовий вигляд кривої *LRAC* (рис. 8) має спадний відрізок при зростанні випуску до $q = q_A$, незмінний — при змінах випуску від q_A до q_B і висхідний — при $q > q_B$. **Економія на масштабі** одержується, якщо при збільшенні випуску вартість виробництва одиниці продукції у довгостроковому періоді зменшується. Якщо ж при збільшенні випуску в довгостроковому періоді вартість виробництва одиниці продукції зростає, то виникають **витрати на масштабі**. Варто наголосити, що такі витрати та економію розглядають лише в довгостроковому періоді та за умови незмінних цін факторів. На відміну від ефектів масштабу, які розглядалися при *незмінних пропорціях* використання факторів, економія та витрати на масштабі аналізуються в умовах *змінних пропорцій* факторів для дослідження економічної ефективності використання ресурсів у вартісних показниках. Зокрема, можна стверджувати, що наявність позитивного ефекту масштабу означає й економію на масштабі, тоді як зворотне твердження в загальному випадку не є правильним.

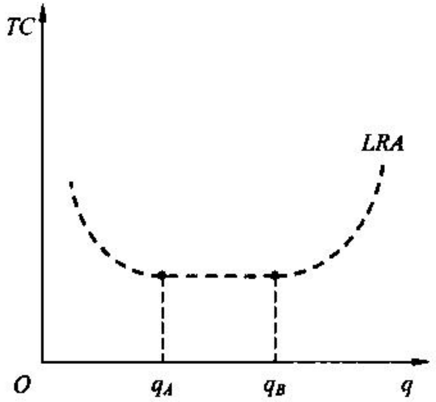


Рис. 8 Типовий вигляд кривої *LRAC*

2.5. Моделі поведінки фірми

Математичне моделювання виробництва має враховувати як внутрішні умови економічних процесів, так і зовнішні умови, які зумовлюються довкіллям підприємства — середовищем прямої дії та середовищем непрямої дії. Це веде до складного комплексу моделей діяльності підприємства при заданих умовах, за тих чи тих припущень. Значну роль тут відіграє увага до раціоналізації поведінки підприємства, а саме: об'єктивний бік оптимізації процесів виробництва, оптимальний розподіл коштів та використання різних факторів виробництва.

Найбільш поширеними є моделі рівноваги фірми, що будуються на таких припущеннях:

1) технологічні умови виробництва описуються виробничою функцією $q = F(x)$, яка має певний набір властивостей;
2) враховується можливість фірми впливати на ціну своєї продукції та на ціни факторів виробництва. При цьому виникають різні моделі, пов'язані як з умовами досконалої конкуренції, так і з різними проявами недосконалої конкуренції;
3) враховується наявність ресурсних обмежень. При цьому розрізняють *короткострокові моделі поведінки фірми*, коли діють ресурсні обмеження, та *довгострокові моделі*, коли такі обмеження практично не беруться до уваги;
4) метою діяльності фірми є забезпечення максимальних прибутків або мінімізація збитків.

При побудові конкретних моделей поведінки фірми можуть вводитися також різноманітні додаткові припущення, наприклад, пов'язані з урахуванням фактора часу (і не тільки граничних, а й середніх його величин), технологією виробництва тощо.

Виробники товарів та послуг пропонують свої товари на ринках відповідної продукції, де вони взаємодіють з іншими виробниками аналогічної продукції та зі споживачами. Умови взаємодії учасників та ціноутворення на ринках залежать від *ринкової структури*, яка визначається певним набором характеристик. Пізніше будуть проаналізовані основні типи ринкових структур — повна конкуренція та повна монополія, олігополія та монополістична конкуренція, монопсонія та монопсонічна конкуренція. Зараз охарактеризуємо повну конкуренцію.

Повна, або **досконала, конкуренція** — це такий тип ринкової структури, при якому:

1) частка кожного постачальника і споживача в загальному обсязі ринкової продукції є незначною, ніхто не домінує на ринку;
2) продукція однорідна;
3) учасники можуть вільно входити на ринок та виходити з нього;

4) ні постачальники, ні споживачі не взаємодіють один з одним, (їхня поведінка не є стратегічною);
5) всі учасники цілком проінформовані для визначення своєї поведінки на ринку.

Порушення будь-якої з цих умов призводить до *ринку з неповною конкуренцією.*

Звичайно, умови 1) – 5) змальовують певну ідеальну модель. Серед існуючих ринків до умов повної конкуренції наближаються, наприклад, окремі ринки сільськогосподарської продукції.

Фірми, які діють на конкурентному ринку, — це **конкурентні фірми**. Вони виробляють однорідну або близьку за споживчими якостями продукцію, а їхні інтереси перетинаються на ринку в боротьбі за споживача та при визначенні ринкової ціни з метою максимізації прибутку.

2.5.1. Попит, виручка і прибуток конкурентної фірми

Рівноважна ціна та обсяг продукції на повністю конкурентному ринку, що перебуває у стані рівноваги, встановилася внаслідок взаємодії тисяч конкуруючих учасників як з боку попиту, так і з боку пропозиції (рис. 9). Особливістю такого ринку є те, що жодна

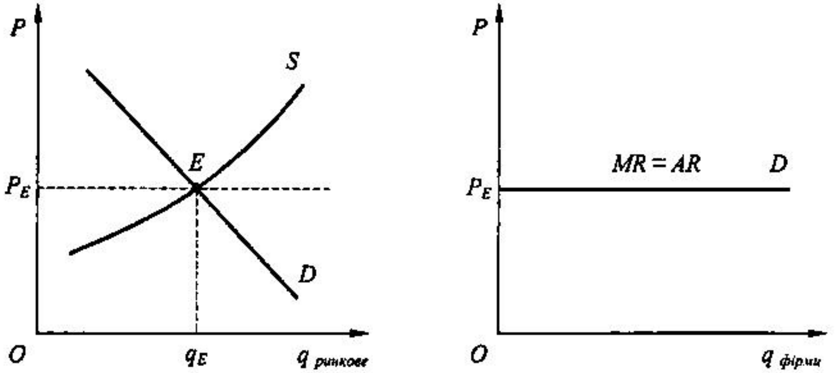


Рис. 9. Ринкова рівновага

окрема фірма не може відхилитися від рівноважної ціни. Це дуже добре видно, коли йдеться про спробу підвищити ціну. Адже на ринку присутні багато продавців абсолютно ідентичної продукції, яка є однаково доступною покупцям, і вони не будуть платити більше за те, що можна купити дешевше. Далі переконуємося, що й знизити ціну, порівняно з рівноважною, на конкурентному ринку теж неможливо, оскільки виробництво при нижчій ціні реалізації буде збитковим для виробника. Окремий виробник не може вплинути на рівноважну ринкову ціну і зміною обсягу своєї пропозиції, оскільки його частка є дуже малою в галузевому обсязі пропозиції.

Отже, конкурентна фірма будь-який обсяг свого випуску може продати лише за ціною ринкової рівноваги P_E. Інакше кажучи, ціна попиту на продукцію окремої конкурентної фірми є сталою для різних обсягів q. Отже, попит на продукцію конкурентної фірми є абсолютно еластичним, а відповідна крива попиту є горизонтальною лінією, що відповідає ціні P_E (рис. 9). Сáме з горизонтальною кривою попиту на свою продукцію (яка має назву *специфічної кривої попиту*) стикається кожна фірма на повністю конкурентному ринку. Сáме через це фірма на такому ринку називається **ціноодержувачем**, адже вона зовсім не впливає на ринкову ціну, а одержує її як встановлену ринком.

Фірма в результаті продажу своєї продукції на ринку отримує певну *виручку*. Розглянемо показники виручки, які використовуються в економічному аналізі.

Сукупна виручка (дохід) — це сума грошей, яку отримає фірма після продажу своєї продукції на ринку:

$$R = R(q) = Pq. \tag{1}$$

Ще раз наголосимо, що ціна в цьому випадку є сталою, а отже, $R(q)$ є лінійною функцією від обсягу q.

Середня виручка — виручка від реалізації одиниці продукції:

$$AR = R(q)/q = P. \tag{2}$$

Гранична виручка — це зміна загальної виручки внаслідок продажу додаткової одиниці продукції:

$$MR = \Delta R(q)/\Delta q, \tag{3}$$

або:

$$MR = dR(q)/dq = P. \tag{4}$$

Як бачимо, $AR = MR = P$, тобто лінія попиту на рис. 9 є одночасно лінією ринкової ціни, середньої та граничної виручки.

Прибуток π будь-якої фірми утворюється як різниця між доходом від продажу продукції та її вартістю для виробника:

$$\pi = R - TC.$$

Надалі прибуток будемо розглядати в значенні економічного прибутку.

2.5.2. Максимізація прибутку фірми

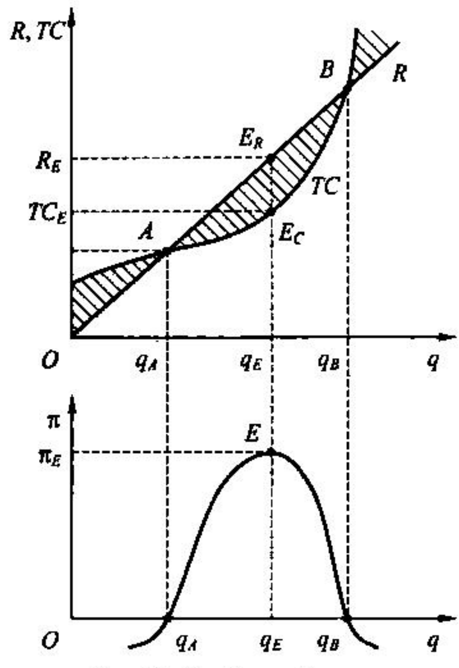


Рис. 10. Прибуток фірми

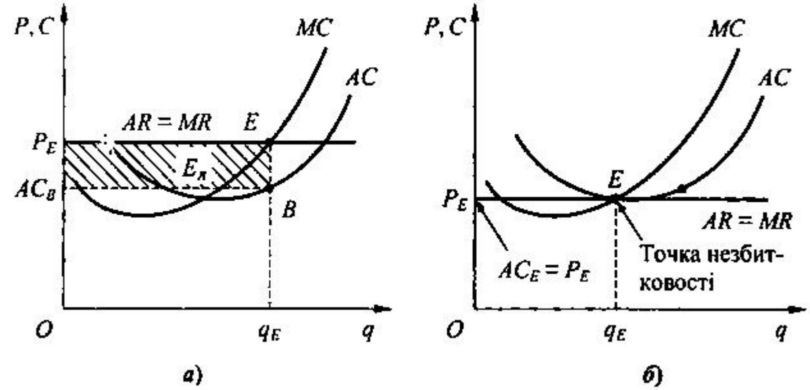
Задача максимізації прибутку може бути розв'язана в аналітичному та графічному вигляді. Якщо маємо графічну форму — криві лінії R та TC (рис. 10, вгорі), то прибуток для будь-якого значення q графічно визначається як різниця вертикальних координат цих кривих. У підсумку матимемо криву прибутку (рис. 10, внизу). При малих обсягах випуску (до q_A) фірма матиме збитки, а при обсягах випуску в діапазоні від q_A до q_B — прибутки. Максимальний прибуток досягається при $q = q_E$, а при обсягах випуску, які перевищують q_B, фірма знову матиме збитки.

Аналітичний пошук максимального прибутку полягає, очевидно, в максимізації функції $\pi(q) = R(q) - TC(q)$, тобто

$$M\pi = \frac{d\pi}{dq} = \frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq} = MR - MC = 0 \text{ при } q = q_E,$$

де $M\pi$ — **граничний прибуток.** Якщо виконуються і відповідні достатні умови екстремуму, то за обсягу випуску q_E матимемо максимальний прибуток π_E. Отже, умова максимізації прибутку має вигляд: $MR = MC$. Це називається **правилом граничного прибутку**.

Графічний розв'язок задачі максимізації прибутку з використанням граничних величин показано на рис. 11а. Сукупна виручка $R = P_E \cdot q_E$ графічно визначається площею відповідного прямокутника. При обсязі q_E середня вартість дорівнюватиме AC_B. Отже, сукупна вартість графічно визначається як $TC = TC(q_E) = AC_B \cdot q_E$. Тоді прибуток визначиться як різниця площ відповідних прямокутників і чисельно дорівнює площі прямокутника AC_BP_EEB.



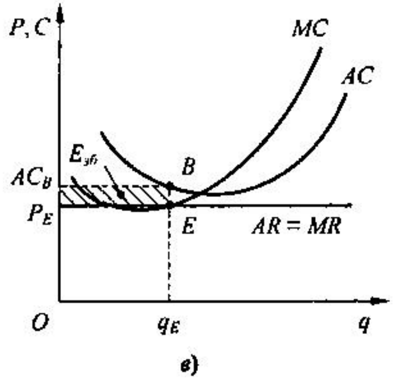


Рис. 11. Максимізація прибутку

Рис. 11а відповідає випадку, коли фірма має додатковий економічний прибуток ($P_E > AC_B$). На рис. 11б економічний прибуток дорівнює нулеві ($P_E = AC_B$), тобто фірма може забезпечити собі лише нормальний прибуток, а в ситуації на рис. 11в задача максимізації прибутку фактично перетворюється на задачу мінімізації збитків через високий рівень середньої вартості ($P_E < AC_B$).

Умова незбитковості фірми досягається, якщо

$$P = min\ AC. \qquad (5)$$

Ця умова виконується для випадку, зображеного на рис. 11б, у точці E мінімуму кривої AC, тобто в **точці незбитковості**, й означає можливість отримувати лише нормальний прибуток.

У короткостроковому періоді фірма може залишатися в галузі навіть за наявності певних збитків, оскільки у випадку миттєвого припинення діяльності вона втрачає вартість фіксованих факторів FC, а припиняє витрачати кошти лише на придбання змінних факторів (VC). Тому фірма може залишатися в галузі за наявності збитків, які не перевищують FC, аж доти, доки вона не зможе змінити обсягу FC:

$$\text{Втрати} = TC - R = FC + VC(q) - Pq \leq FC;$$
$$VC(q) \leq Pq \quad \text{або} \quad P \geq AVC.$$

Умова закриття фірми в короткостроковому періоді означає, що виручка не може компенсувати навіть фіксовану вартість FC, тобто фірмі варто вийти з галузі за цін $P < min\ AVC$. Точка B дотику кривої AVC до лінії $P_0 = MR_0$ на рис. 12, для якої виконується умова $P = min\ AVC$, має назву **точки закриття**.

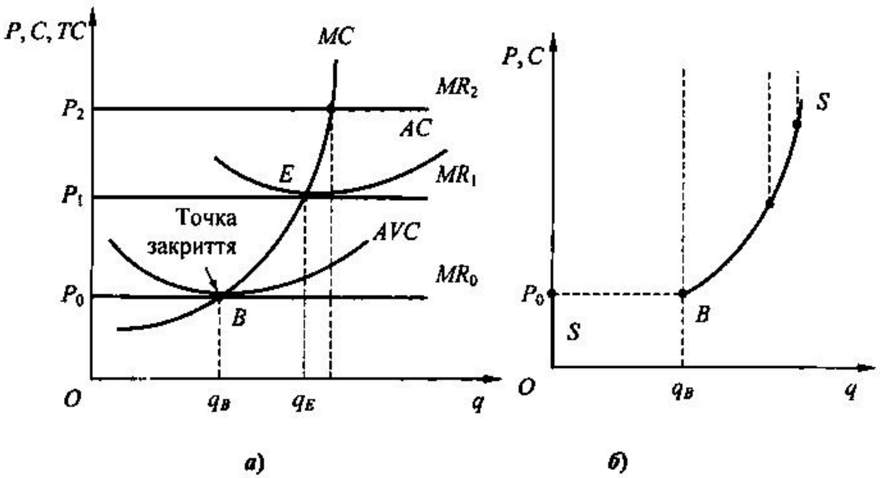


Рис. 12. Точка закриття фірми

2.5.3. Короткострокова рівновага і пропозиція фірми. Надлишок виробника

У короткостроковому періоді ми вважаємо, що фірма може випускати певний обсяг продукції і повинна лише визначити, чи слід його змінювати з метою максимізації прибутку. Фірма приймає рішення про збільшення випуску, якщо вона буде мати від цього зиск. Коли йдеться про збільшення випуску продукції на одиницю, то гранична виручка (MR) має бути не меншою за граничну вартість (MC). Отже, мінімальна ціна, за якої фірма погодиться пропонувати додаткову одиницю продукції, що забезпечує їй лише нульовий економічний прибуток (тобто нормальний прибуток), визначається умовою:

$$P = MC.$$

Це *умова ефективного обсягу випуску*.

Якщо взяти до уваги ще й умову закриття, то матимемо умови:

$$P \geq MC, \qquad P \geq AVC,$$

за якими фірма може, виходячи з вартості виробництва, і бажає, виходячи з мотивації прагнення до прибутку, пропонувати додаткову продукцію.

Індивідуальна короткострокова пропозиція *S* — це графічна форма функції пропозиції $q_S = S(P)$; кожна точка цієї кривої показує ціну та обсяг блага, яку продавці бажають і можуть запропонувати за цією ціною за інших незмінних умов. У короткостроковому періоді крива пропозиції утворюється як *частина кривої MC*, що розташована не нижче за точку перетину з кривою AVC (див. рис. 12). За цінами $P < min\,AVC$ обсяг пропозиції дорівнюватиме нулю, тому формально до кривої пропозиції слід відносити і вертикальний відрізок OP_0. Відповідні зміни в пропозиції відбуваються під дією тих чинників, які вже відомі з теми про пропозицію продукції.

Якщо для кожної з N фірм, які входять до галузі, визначити свою криву пропозиції, то можна *побудувати криву ринкової (галузевої) короткострокової пропозиції*. Вона утворюється як горизонтальна сума індивідуальних кривих пропозиції окремих фірм. Для цього слід для кожного рівня ціни P визначити відповідні обсяги випуску кожної з N фірм галузі ($q_1(P_1)$; $q_2(P_2)$; ..., $q_N(P_N)$); їхня сума і визначатиме обсяг ринкової пропозиції.

Отже, кожна конкурентна фірма з метою максимізації прибутку повинна лише визначити обсяг випуску q_E, тому що ціна вважається визначеною на конкурентному ринку. Для заданої ціни P потрібно знайти такий випуск q, який відповідає *правилу граничного випуску* та умовам щодо вартості виробництва. В такому разі фірма перебуватиме в стані **короткострокової конкурентної рівноваги**.

Ринкова короткострокова конкурентна рівновага характеризується такими ціною та обсягом, при яких на ринку відсутні тенденції до їхньої зміни. Кожна фірма у такому стані виробляє обсяг продукції, який дає їй змогу максимізувати прибуток.

Якщо проаналізувати прибутковість конкурентної фірми для різних обсягів випуску за умови незмінної ринкової ціни P_E, то побачимо, що умова $P = MC$ виконується лише для останньої одиниці оптимального обсягу випуску q_E, продаж якої не дає економічного прибутку. Для кожної з попередніх одиниць випуску $P - MC > 0$, — оскільки ціна кожної одиниці однакова, а гранична вартість виробництва буде меншою. Отже, від продажу кожної одиниці виникає чиста вигода ($P - MC$), тобто надлишок. Якщо скласти всі такі різниці для кожної одиниці випуску від першої до останньої (q_E), то отримаємо сукупну чисту вигоду фірми, або **надлишок виробника**. Геометричне тлумачення цього надлишку зображено на рис. 13.

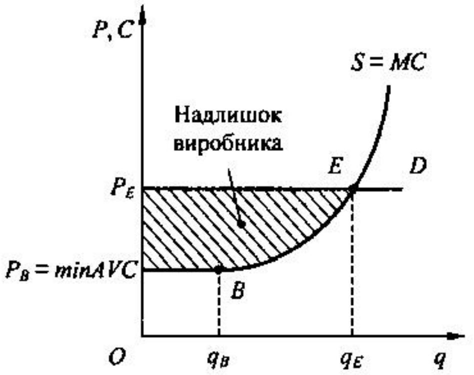


Рис. 13. Надлишок виробника

Якщо підсумувати надлишки всіх фірм на ринку певної продукції, то отримаємо надлишок виробників (PS), або **чисту вигоду виробників**. Геометрично він обчислюється аналогічно до надлишку окремого виробника — із заміною кривої MC на криву ринкової пропозиції S.

2.5.4. Довгострокова рівновага і пропозиція галузі

В довгостроковому періоді (як і в короткостроковому) кожна конкурентна фірма, максимізуючи прибуток, не може впливати на ринкову ціну; вона в змозі вибирати лише обсяг випуску, тобто варіювати середньою вартістю виробництва.

Якщо в перспективі фірма прогнозує отримати економічний прибуток, то такий само прогноз може зробити і будь-яка інша фірма, навіть якщо вона не працює в даній галузі (адже інформація за даних умов є цілком доступною). Тому потенційний прибуток буде сприйматися іншими фірмами як сигнал щодо доцільності входження нових фірм до галузі, а це призведе до збільшення галузевої пропозиції. Наслідком збільшення пропозиції буде поступове зменшення ринкової рівноважної ціни і скорочення економічного прибутку аж до нуля. Тому в перспективі фірмам у конкурентній галузі слід сподіватися на такий рівень ринкових цін, який забезпечує лише незбитковість виробництва (тобто нормальний прибуток). Але цей вид прибутку можна отримати лише за мінімізації вартості виробництва, коли довгострокова середня вартість *LRAC* буде мінімальною.

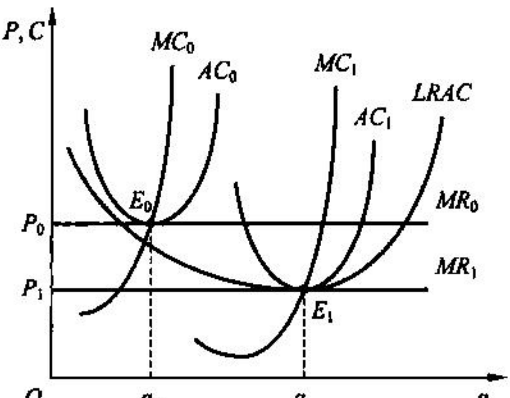


Рис. 14. Довгострокова конкурентна рівновага

Фактично для довгострокового періоду фірма повинна проаналізувати різні варіанти свого розвитку (наприклад, як на рис. 14);

для кожного визначити стан рівноваги (E_0 та E_1), тобто оптимальний обсяг випуску (відповідно q_0 та q_1), і вибрати серед них варіант з найменшою середньою вартістю AC та відповідний обсяг q. Зауважимо, що знайдений в такий спосіб обсяг q відповідає і мінімальному рівню довгострокової середньої вартості $LRAC$. Так визначається умова **довгострокової конкурентної рівноваги**:

$$P = min\ LRAC = LRMC. \quad (6)$$

Стан довгострокової рівноваги визначає обсяг випуску, який забезпечує фірмі нормальний прибуток на перспективу. Зазначимо, що умова (6) визначає для *довгострокового періоду умову незбитковості та умову закриття* одночасно.

У випадку змін у стані короткострокової рівноваги ринкова ціна може впасти, що в перспективі означатиме збитки для фірм, які працюють на рівні мінімальної вартості виробництва. Через цю обставину деякі з фірм почнуть виходити з галузі, ринкова пропозиція зменшиться, і відповідна ціна почне зростати, а збитки фірм, які залишились у галузі, зменшуватимуться аж до нуля. Отже, за рахунок роботи такого конкурентного механізму в довгостроковому періоді буде існувати тенденція до руху в бік стану довгострокової рівноваги з нульовим економічним прибутком для фірм-учасниць.

Завдяки дії механізму конкуренції виникає **парадокс прибутку**, а саме: можливість отримати економічний прибуток в конкурентній галузі є причиною його зникнення в довгостроковому періоді (пояснення вищенаведеними міркуваннями).

Конкурентний ринок вважається ефективним у довгостроковому періоді тому, що, згідно з умовою (6), фірми зацікавлені вибирати обсяг виробництва з мінімальними затратами рідкісних ресурсів, що відповідає інтересам суспільства.

Ринкова довгострокова крива пропозиції має суттєві відмінності порівняно з короткостроковим періодом: вона утворюється як сукупність станів довгострокової рівноваги галузі, що виникають за рахунок різних рівнів значень нецінових чинників попиту і пропозиції.

1. Збільшення попиту на рідкісні ресурси призводить до зростання ціни на ресурси, тобто до збільшення довгострокової вартості

виробництва (попередня тема). Внаслідок цього крива *LRAC* зсувається вгору, *min LRAC* теж зростає, тобто нова довгострокова галузева рівновага досягається в точці E_1 (рис. 15а); нова рівноважна ціна P_1 порівняно з короткостроковою ціною P_S падає, але не до попереднього рівня P_0.

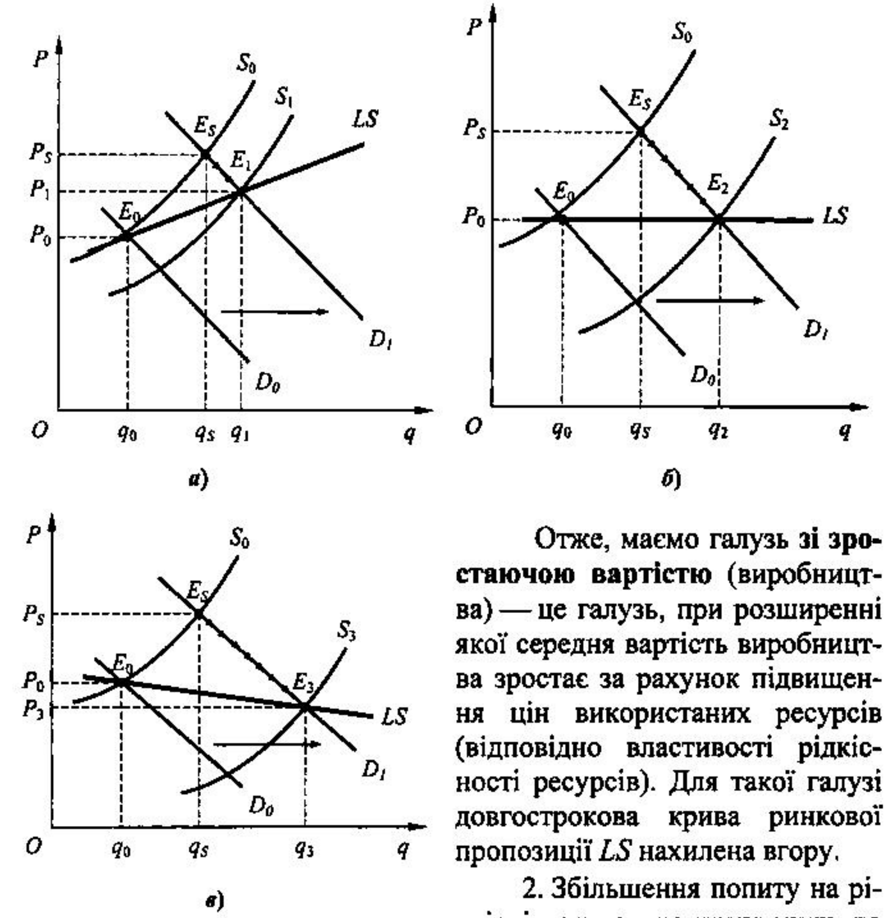


Рис. 15. Довгострокова крива пропозиції

Отже, маємо галузь **зі зростаючою вартістю** (виробництва) — це галузь, при розширенні якої середня вартість виробництва зростає за рахунок підвищення цін використаних ресурсів (відповідно властивості рідкісності ресурсів). Для такої галузі довгострокова крива ринкової пропозиції *LS* нахилена вгору.

2. Збільшення попиту на рідкісні ресурси не призводить до зміни цін на ресурси, тобто довгострокова вартість виробництва не змінюється. Тоді нова довго-

строкова галузева рівновага досягається в точці E_2 (рис. 15б); ціна P спадає порівняно з короткостроковою ціною P_S і досягає рівня ціни попередньої довгострокової рівноваги P_0. Отже, маємо галузь із **незмінною вартістю** (виробництва) — це галузь, при розширенні якої середня вартість виробництва не змінюється через сталість цін на фактори виробництва. Для такої галузі крива довгострокової ринкової пропозиції LS є горизонталлю.

3. Збільшення попиту на рідкісні ресурси призводить до зменшення цін на ресурси, тобто до зменшення довгострокової вартості виробництва. Така ситуація трапляється нечасто, якщо порівнювати її з попередніми випадками, і може бути пов'язана з технологічними особливостями: або виробництва деяких з проміжних продуктів, які використовуються як ресурс у виробництві кінцевої продукції, або виробництва самої кінцевої продукції. Внаслідок цього крива $LRAC$ зсувається вниз, $\min LRAC$ також спадає, тобто нова довгострокова галузева рівновага досягається в точці E_3 (рис. 15в); нова рівноважна ціна P_3 є нижчою порівняно з короткостроковою ціною P_S і з попередньою довгостроковою ціною P_0.

Таким чином, виникає галузь зі **спадною вартістю** (виробництва) — це галузь, при розширенні якої середня вартість виробництва зменшується за рахунок зниження цін використаних ресурсів. Для такої галузі довгострокова крива ринкової пропозиції LS нахилена вниз. Галузі зі спадною вартістю виробництва, як правило, породжують *природні монополії*.

Різний характер довгострокових кривих пропозицій призводить до різних довгострокових наслідків державного регулювання конкурентних ринків, залежно від типу галузі.

2.6. Неокласична теорія однопродуктової фірми

Неокласична теорія поведінки однопродуктової фірми за певний (відносно невеликий) період часу полягає в максимізації її прибутку при заданій виробничій функції, заданій ціні випуску продукції та цінах факторів виробництва $w = (w_i)_{i=\overline{1,m}}$ (це, звичайно ж, трактується як умови досконалої конкуренції). Інакше кажучи, фірма може регулювати свій попит на кількість факторів $x = (x_i)_{i = 1, m}$, а також пропозицію продукції $q = F(x)$.

За цих умов дохід фірми та її загальні витрати задаються виразами: $R = p \cdot q = p \cdot F(x)$, $C = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i = (w, x)$, і, отже, прибуток фірми $\pi(x)$ має вигляд: $\pi(x) = p \cdot F(x) - (w, x)$.

Розв'язуючи довгострокову задачу відносно можливості придбання ресурсів, як це вважається в неокласичній теорії, фірма може використовувати будь-який вектор з простору витрат. Тому така задача фірми має вигляд:

$$\pi(x) = p \cdot F(x) - (w, x) \to max, \quad x \in \boldsymbol{R}_+^m. \tag{1}$$

Ця задача є задачею опуклого програмування, де єдине обмеження — це умова невід'ємності вектора витрат x (тобто вектора змінних). Розв'язок задачі, очевидно, залежатиме від $(m + 1)$-го параметра: p та $w_1, \ldots, w_m$.

На відміну від довгострокової задачі, де всі витрати можна довільно варіювати, при короткостроковій задачі (відносно можливості придбання ресурсів) з'являються обмеження на вибір витрат ресурсів, наприклад, через знижені ліміти, через певні договірні зобов'язання тощо. В короткостроковій задачі фірма повинна вибирати вектор витрат x із заданої множини простору витрат, і тому до задачі (1) тут додаються ще обмеження вигляду:

$$g(x) \le b,$$

в яких функція g: $\boldsymbol{R}_+^m \to \boldsymbol{R}_+^m$; або у координатній формі:

$$g_i(x_1, \ldots, x_m) \le b_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Нерівності (2) виражають обмеження на витрати ресурсів для певного короткострокового періоду.

Для неокласичної теорії характерним є припущення про двічі неперервно диференційованість виробничої функції, що задовольняє аксіоми, про які йшлося раніше. Інакше кажучи, граничний продукт є невід'ємним:

$$MP(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \right)_1^m \ge 0, \qquad x \in E,$$

а матриця Гессе

$$\ddot{F}(x) = \left(\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_1^m, \; x \in D,$$

від'ємно визначена.

При цих припущеннях для випадку довгостроковості необхідними умовами першого порядку оптимізації прибутку фірми в задачі (1) є такі умови:

$$\frac{d\pi(x)}{dx} = p\frac{dF(x)}{dx} - w^T \le 0,$$

$$x^T\frac{d\pi(x)}{dx} = x^T\left(p\frac{dF(x)}{dx} - w^T\right) = 0, \quad x \ge 0. \tag{3}$$

Таким чином, для всіх факторів виробництва

$$pMP_i(x) = p\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \le w_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4}$$

та

$$pMP_i(x) = p\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = w_i, \quad \text{коли } x_i > 0,$$

$$pMP_i(x) = p\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} < w_i, \quad \text{коли } x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

де $pMP_i(x)$ є вартістю i-го граничного продукту в точці x, тобто вартістю додаткового випуску, що одержується при використанні витрат i-го виду.

Якщо виходити з того, що всі фактори виробництва дійсно були використані, тобто вектор x — додатний ($x > 0$), то *оптимальні умови першого порядку* матимуть вигляд:

$$p\frac{dF(x^*)}{dx} = pMP(x^*) = w^T, \tag{5}$$

тобто вартість граничних продуктів дорівнюватиме платі за витрати одиниці факторів виробництва. Звідси

$$\frac{MP_1(x^*)}{w_1} = \frac{MP_2(x^*)}{w_2} = \ldots = \frac{MP_m(x^*)}{w_m} = \frac{1}{p}. \tag{6}$$

Це — **закон оптимального виробництва**.

Точка x^* з особливої області D простору витрат, де функція $\ddot{F}(x)$ — від'ємно визначена, що задовольняє рівняння (5), є єдиним розв'язком задачі фірми для довгострокового періоду, оскільки вона задовольняє необхідні умови оптимальності першого порядку, а також достатні умови оптимальності другого порядку, які виконуються автоматично.

Розглянемо ситуацію, коли ціна p на продукцію фірми може змінюватися у деякому проміжку $P = [p_1, p_2]$, а вектор цін на фактори виробництва може змінюватися у деякій області W в $\boldsymbol{R}_+^m$. Тоді фірма матиме справу із сім'єю задач:

$$\pi(x) = p \cdot F(x) - (w, x) \to max, \quad x \in \boldsymbol{R}_+^m, \quad (p, w) \in P \times W, \qquad (7)$$

з умовами оптимальності, які мають вигляд системи рівнянь:

$$\psi_i(x^*) = p\frac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} - w_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \qquad (8)$$

Формально систему рівнянь (8) можна розв'язати відносно вектора оптимальних витрат факторів x^*, якщо матриця Якобі $I = \left(\dfrac{\partial \psi_i(x^*)}{\partial x_j}\right)_1^m$ функції ψ_i є невиродженою. Якщо $x^* \in D$, то $I(x^*) = p\ddot{F}(x)$, $p \in P$, і внаслідок від'ємної визначеності матриці $\ddot{F}(x)$ оптимальні рівні витрат факторів x_i^* справді можуть бути виражені як функції $(m + 1)$-го аргументу $p, w_1, \ldots, w_m$:

$$x_i^* = \xi_i(p, w_1, \ldots, w_m), \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad (9)$$

або $x^* = \xi(p, w)$.

Такі функції $\xi(p, w)$ мають назву **функцій попиту на витрати** (факторів виробництва) для фірми. Вони виражають оптимальні набори витрат як функції від цін продукції та виробничих факторів.

Функції попиту на ресурси $\xi(p, w)$ є однорідними нульового степеня, оскільки збільшення (зменшення) цін p та w в $\alpha > 0$ разів у (7) відповідним чином змінює і функцію $\pi(x)$. Це не змінює розв'язку екстремальної задачі, адже максимізація $\alpha\pi(x)$ еквівалентна максимізації $\pi(x)$ за умови $x \in R_+^m$. Отже, маємо:

$$\xi(\alpha p, \alpha w) = \xi(p, w) \quad \text{для всіх } \alpha > 0. \qquad (10)$$

Підставляючи функції попиту $\xi(p, w)$ у виробничу функцію F, отримаємо обсяг випуску продукції як функцію цін продукції та факторів виробництва:

$$q^* = F(x^*) = F(\xi(p, w)) \equiv Q(p, w). \qquad (11)$$

Функція Q, що визначається рівністю (11), називається **функцією пропозиції випуску**. Оскільки функція $\xi(p, w)$ є однорідною нульового степеня, то для функції пропозиції випуску $Q(p, w)$ справджується така властивість:

$$Q(\alpha p, \alpha w) = Q(p, w) \quad \text{для всіх } \alpha > 0. \qquad (12)$$

Таким чином, пропорційні зміни в цінах продукції та факторів виробництва не впливають на витрати факторів та випуск продукції.

Зауважимо, що подібний підхід застосовується також і для задачі в короткостроковому періоді, але з урахуванням обмежень на зразок (2).

2.7. Фірма в умовах монополії та монопсонії

Раніше ми виходили з припущення про *досконалу конкуренцію*. На практиці така ситуація трапляється не надто часто, тобто найчастіше спостерігається *недосконала конкуренція*. До найпростіших (з огляду на можливості аналізу) різновидів недосконалої конкуренції належать *монополія* та *монопсонія*.

Монополія — це тип ринкової структури, коли лише одна фірма пропонує весь ринковий обсяг блага, для якого не існує близьких замінників. Практично монополією звуться ринки, де монополіст виробляє, наприклад, 80% галузевого обсягу, а решту 20% постачають дрібні виробники. Також може послаблюватися умова щодо відсутності замінників.

Узагалі фірма володіє певною **монополістичною владою**, якщо вона здатна чинити вплив на ціну продукції. Чистий монополіст має абсолютну ринкову владу, його здатність впливати на ціну обмежується лише попитом споживачів. Тому фірма-монополіст є

ціноутворювачем, на відміну від конкурентної фірми, яка є *ціноодержувачем*.

Конкурентний механізм не спрацьовує на монополістичному ринку через наявність вхідних бар'єрів, що блокують входження до монополізованої галузі за допомогою чинників, які створюють несприятливі умови для фірм-новачків порівняно з фірмою, яка вже працює в галузі. Такими чинниками може бути *абсолютна перевага у вартості продукції*, *економія на масштабі*, необхідність великого початкового капіталу, диференціація продукції, високі транспортні витрати тощо.

Бар'єри може створювати також державна влада у вигляді патентів, ліцензій, авторських прав, привілеїв на здійснення певної діяльності лише однією фірмою. Ринки, які закриті для входження конкурентів юридичними бар'єрами, називаються **закритими монополіями**. Монополія, яка існує за рахунок економії на масштабі, називається **природною монополією**.

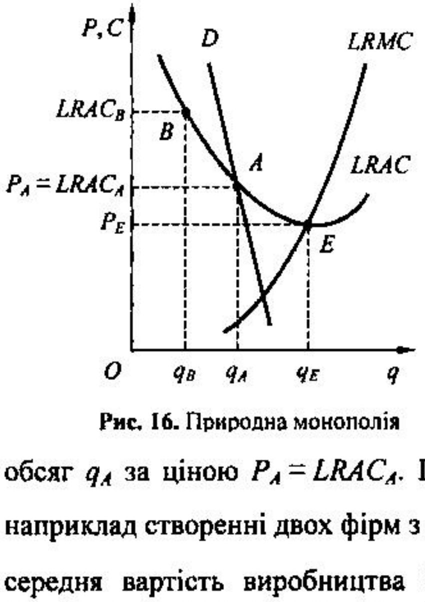


Рис. 16. Природна монополія

Зосередження виробництва всього ринкового обсягу блага в одній фірмі у випадку природної монополії є економічно ефективнішим, ніж на кількох підприємствах. Для природної монополії типовим є те, що мінімально ефективний обсяг виробництва q_E (точка E на рис. 16) є більшим, ніж обсяг попиту за ціною $P_E = \min LRAC$. У такій ситуації природна монополія може без збитків для себе виробляти лише обсяг q_A за ціною $P_A = LRAC_A$. При спробі демонополізації галузі, наприклад створенні двох фірм з обсягом випуску в кожній $q_B = \dfrac{q_A}{2}$, середня вартість виробництва і беззбиткова ціна сягнуть рівня $P_B = LRAC_B > LRAC_A$, тобто суспільство буде витрачати більше рідкісних ресурсів на виробництво того самого обсягу q_A, а ціна зросте.

Тому природні монополії переважно підтримуються державною владою.

Фірма-монополіст має змогу впливати на ціну продукції шляхом варіювання обсягів випуску своєї продукції, для якої криву попиту можна записати як функцію виду $p = p(q)$. Ця функція характеризує ціну, яку фірма може призначити за різних умов пропозиції продукції. Фірма-монополіст може дотримуватися різних політик. Одна політика полягає у збільшенні виробництва та пропозиції продукції разом з деяким зниженням ціни на неї, а протилежна — у підвищенні ціни продукції разом зі зменшенням її випуску та пропозиції. Третя політика може зводитися до якогось поєднання перших двох. Дотримання будь-якої з цих політик означає для функції $p = p(q)$, виконання умови:

$$\frac{dp}{dq} < 0. \tag{1}$$

Валовий дохід R фірми-монополіста є функцією від випуску q виду $R(q) = p(q)q$, а граничний дохід MR — характеристикою зміни валового доходу від зміни випуску продукції:

$$MR(q) = \frac{dR(q)}{dq} = p(q) + \frac{dp(q)}{dq}q. \tag{2}$$

Враховуючи характерну для монополіста умову (1), маємо, що у випадку монополії граничний дохід є меншим за ціну: $MR(q) < p(q)$.

Аналітичний зв'язок між ціновою еластичністю попиту, ціною попиту та граничним доходом можна встановити, якщо використати співвідношення (2), а також визначенням цінової еластичності попиту:

$$E_D = \frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}, \quad \text{тобто} \quad \frac{dp}{dq} = \frac{p}{qE_D}.$$

Враховуючи останнє співвідношення, з (2) матимемо:

$$MR = p + q\frac{p}{qE_D} = p(1 + \frac{1}{E_D}). \tag{3}$$

Такий зв'язок дає змогу монополістові визначати наслідки підвищення чи зниження ціни продукції і, відповідно, зміни обсягів випуску щодо обсягів виручки. Очевидно, що монополістові буде невигідно виробляти продукцію в обсягах, які відповідають нееластичному попиту.

Монопсонія — це можливість чинити вплив на ціни факторів виробництва (отже, це — монополія на ринку виробничих факторів, тобто монопольне володіння всім обсягом пропозиції окремого ресурсу). *Монопсоніст* може вплинути на ціну факторів виробництва, користуючись тим, що він здійснює закупівлю факторів у доволі значних розмірах, — шляхом варіювання обсягів закупівлі тих чи інших видів факторів. Таким чином, для монопсоніста ціни на фактори є функціями від попиту на ці фактори: $w_i = w_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Ці функції характеризують плату фірми за витрати при різних рівнях попиту на них. Взагалі фірма може закуповувати більшу кількість певного фактора виробництва, запропонувавши вищу плату за нього, або ж вплинути на зменшення ціни на фактор, скоротивши попит на нього. Отже, для монопсоніста є характерним таке співвідношення:

$$\frac{dw_i}{dx_i} > 0. \qquad (4)$$

Оскільки вартість витрат i-го виду можна записати у вигляді $C_i(x_i) = w_i(x_i)x_i$, а гранична вартість витрат i-го виду відображає зміни у вартості цих витрат:

$$MC_i(x_i) = \frac{dC_i(x_i)}{dx_i} = w_i + \frac{dw_i}{dx_i}x_i, \qquad (5)$$

то внаслідок властивості (4) у випадку монопсонії гранична вартість витрат перевищує оплату за них: $MC_i(x_i) > w_i$.

Враховуючи сказане вище, можна сформулювати задачу фірми, яка випускає значну кількість продукції даного типу, займаючи значний сегмент ринку подібної продукції і водночас використовуючи доволі значну кількість необхідних для подібного виробництва виробничих факторів. Для такої фірми, що діє в умовах недосконалої конкуренції, задача оптимальної поведінки полягає у максимізації прибутку шляхом варіювання випуску q та витрат факторів $x_1, \ldots, x_m$ за умови їхньої взаємозалежності через виробничу функцію:

$$\pi(q, x) = p(q) \cdot q - \sum_{i=1}^{m} w_i(x_i)x_i \to max, \quad q = F(x_1, \ldots, x_m). \qquad (6)$$

Вводячи до розгляду функцію Лагранжа L для задачі (6) з множником Лагранжа λ:

$$L(q, x_1, \ldots, x_m, \lambda) = p(q)\cdot q - \sum_{i=1}^{m} w_i(x_i)x_i + \lambda(F(x_1, \ldots, x_m) - q),$$

можна записати необхідні умови оптимальності першого порядку для цієї задачі у вигляді рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = p(q) + \frac{dp(q)}{dq}q - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\left(w_i(x_i) + \frac{dw_i}{dx_i}x_i\right) + \lambda\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = F(x_1, \ldots, x_m) - q = 0.$$

Таким чином, необхідні умови оптимальності матимуть вигляд:

$$\lambda = p + \frac{dp}{dq}q = MR(q), \tag{7}$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial x_i} = w_i + \frac{dw_i}{dx_i}x_i = MC_i(x_i), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

$$F(x_1, \ldots, x_m) = q. \tag{9}$$

Поєднуючи умови (7) та (8), маємо співвідношення:

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial x_i} = MR(q)\cdot MP_i(x) = w_i + \frac{dw_i}{dx_i}x_i = MC_i(x_i), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Отже, для визначення m видів витрат та випуску для фірми в умовах описаної недосконалої конкуренції маємо $(m + 1)$-у умову:

$$MR(q^*)\cdot MP_i(x_1^*, \ldots, x_m^*) = MC_i(x_i^*), \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$q^* = F(x_1^*, \ldots, x_m^*),$$

в яких граничний дохід MR та граничні видатки MC_i визначаються рівностями (2) та (5).

Враховуючи, що для всіх i, $i = 1, \ldots, m$, виконується:

$$\frac{MC_i(x_i^*)}{MP_i(x_1^*,\ldots, x_m^*)} = \frac{\partial C_i / \partial x_i}{\partial F / \partial x_i} = \frac{\partial C / \partial x_i}{\partial q / \partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial q} = MC(q),$$

можемо переписати *умови оптимальності для фірми в ситуації недосконалої конкуренції* у вигляді:

$$MR(q^*) = MC(q^*), \qquad F(q^*) = q^*. \tag{10}$$

Отже, для монополіста після знаходження оптимального обсягу q^* в результаті розв'язування рівнянь (10), потрібно визначити оптимальну ціну p^*. Для цього слід скористатися оберненою функцією попиту, з якої матимемо:

$$p^* = p(q^*), \tag{11}$$

тобто визначену ціну та обсяг (p^*, q^*), які максимізують прибуток монополіста π^*.

Ціноутворення за формулами (10) та (11) визначає точні умови максимізації прибутку фірми-монополіста. Однак на практиці монополісти користується принципом ціноутворення **«вартість плюс»** — тобто ціна встановлюється на рівні граничної вартості MC плюс певна надбавка ΔC. З урахуванням співвідношень (3) і (10) матимемо:

$$MC = MR = p(1 + \frac{1}{E_D}).$$

А звідси:

$$p = \frac{MC}{1 + \frac{1}{E_D}}, \tag{12}$$

тобто ціна справді встановлюється вищою за рівень MC (оскільки, як відомо, $E_D < 0$; у випадку $E_D = -1$ формула (12) не застосовується). З (12), зокрема, випливає, що чим еластичнішим є попит, тим меншою буде надбавка ΔC.

2.8. Неповна конкуренція. Олігополія та олігопсонія

Більшість реально існуючих галузей організовано як симбіоз повної конкуренції та чистої монополії, що утворює монополістичну конкуренцію та олігополію. Ці типи ринкових структур також належать до *недосконалої конкуренції*.

Монополістична конкуренція — це тип ринкової структури, при якій:

1) на ринку діють багато продавців та покупців, при цьому частка кожного з них в обсягах ринкових продажів не є значною;
2) продукція різних виробників є неоднорідною (диференційованою);
3) вхід на ринок і вихід з нього є вільним;
4) виробники не взаємодіють між собою;
5) існує повна поінформованість щодо ринкових цін, обсягів та попиту споживачів.

Отже, суттєвою відмінністю монополістичної конкуренції від досконалої є *диференціація продукції* (при доволі значній кількості постачальників і майже необмежених можливостях входження в галузь нових фірм). Завдяки диференціації споживачі здатні розрізняти на ринку продукцію різних фірм, і отже, попит на продукцію окремої фірми вже не є абсолютно еластичним, хоч і залишається високоеластичним. Це означає, що фірми мають певну ринкову владу і можуть, хоч і дуже обмежено, варіювати ціни без ризику втратити всіх покупців. Типовими прикладами монополістичної конкуренції є ринки безалкогольних напоїв, виробів побутової хімії та ліків.

Важливим випадком недосконалої конкуренції є **конкуренція серед небагатьох**. Вона визначається як ринкова конкуренція та відповідний механізм, коли на ринку діє невелика кількість фірм. Визначальною властивістю конкуренції серед небагатьох є той факт, що всі конкуруючі фірми можуть тією чи іншою мірою впливати на ціни продукції та виробничих факторів. Тому прибутки кожної фірми залежать від політики всіх інших конкуруючих фірм. Отже, щоб визначити оптимальну політику, націлену на максимізацію прибутку, кожна фірма повинна врахувати не лише свій прямий вплив на ринки товарів та послуг (продукції), а також ресурсів (факторів), а й непрямий вплив — через взаємодію своїх конкурентів. Тому ще однією суттєвою відмінністю такого виду ринкової структури є стратегічна поведінка продавців. Ринкова структура, при якій на ринку продукції пропозиції небагатьох фірм заповнюють весь ринок і декілька з них займають значні частки ринку, називається **олігополією**. Фірма-олігополіст повинна розробляти стратегію своїх дій на ринку з урахуванням потенційних зустрічних дій своїх конкурентів. Схожа ситуація на ринку ресурсів, коли попит на певні ресурси розподілений серед небагатьох фірм, окремі з яких займають значні частки попиту, називається **олігопсонією**.

Для побудови математичних моделей подібних видів недосконалої конкуренції застосовується різноманітний математичний апарат, що відображає різні політики агентів та ситуації на ринках з конкуренцією серед небагатьох. Значну роль при цьому відіграють математичні моделі конфлікту, і, зокрема, моделі теорії стратегічних ігор. В нашому розгляді ми обмежимося класичними результатами для **дуополії** (олігополії з двома конкурентами), пов'язаними з результатами, які ми розглядали раніше.

Отже, перейдемо до формалізації поведінки фірм в умовах дуополії. Нехай дві конкуруючі фірми виробляють однотипну продукцію, використовуючи технологічні процеси, які відображаються їхніми виробничими функціями:

$$q_j = F_j(x_1^j, \ldots, x_m^j), \qquad j = 1, 2, \tag{1}$$

де q_j — випуск j-ої фірми, а $x^j = (x_i^j)_1^m$ — її витрати. Тоді ціни на продукцію визначаються обома рівняннями випуску $p = p(q_1, q_2)$. Наприклад, якщо обидва випуски зростуть, то ціна буде спадати: $\frac{\partial p}{\partial q_1} < 0$, $\frac{\partial p}{\partial q_2} < 0$. Ціна будь-якого виду витрат залежатиме від їхньої закупівлі обома фірмами, тобто $w_i = w_i(x_i^1, x_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Наприклад, якщо фірми збільшують попит на витрати i-го виду, то ціна на них збільшується:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} > 0, \qquad \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Якщо вважати першу фірму оперуючою стороною, дії другої фірми — неконтрольованими факторами для оперуючої сторони, а також визначити як критерії ефективності дії першої фірми її функцію прибутку π_1, то задача першої фірми полягатиме у знаходженні стратегії $(q_1, x_1^1, \dots, x_m^1)$, яка в міру можливості максимізує прибуток

$$\pi_1 = p(q_1, q_2)q_1 - \sum_{i=1}^{m} w_i(x_i^1, x_i^2)x_i^1 \tag{2}$$

за умов (1). Функція Лагранжа L для такої екстремальної задачі має вигляд:

$$L = \pi_1 + \lambda(F_1(x^1) - q_1), \tag{3}$$

де λ — відповідний множник Лагранжа. Тоді умови екстремуму першого порядку матимуть вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = p(q_1, q_2) + q_1\frac{\partial p}{\partial q_1} + q_1\frac{\partial p}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial q_1} - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^1} = -w_i - x_i^1\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} - x_i^1\frac{\partial w_i}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1} + \lambda\frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = F_1(x^1) - q_1 = 0.$$

Виключаючи з рівнянь (4) множник λ, можна отримати $(m+1)$-у умову екстремуму:

$$[p + q_1(\frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{\partial p}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial q_1})]\frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = w_i + x_i^1(\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \tag{5}$$

$$F_1(x^1) = q_1.$$

Екстремальна задача, яка розглядається, є задачею багатокритеріальної оптимізації, оскільки критерій (2) залежить від стратегії $(q_2, x_1^2, \dots, x_m^2)$ другої фірми. Вирази

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1}, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{6}$$

які входять до умов (5), називаються **гаданими варіаціями**, тому що перша фірма повинна при розгляді своєї задачі зробити певні припущення щодо поведінки конкурента та його реакцію на вибрану нею політику, а отже, і на поведінку виразів (6), перший з яких показує зміни у випуску другої фірми відносно змін q_1, а другий — у витратах відносно змін відповідних витрат першої фірми.

Подальший аналіз має залежати від різних припущень щодо поведінки виразів (6), кожне з яких веде до окремого аналізу конкурентної ситуації. Розглянемо деякі з подібних альтернатив для найпростіших випадків, коли товар, який виробляється, є однорідним, граничні видатки — постійними; а функція попиту — лінійною, тобто $p = a - b(q_1 + q_2)$, $a > 0$, $b > 0$; функції видатків мають вигляд: $C_i = cq_i + d$, $c > 0$, $d > 0$, $i = 1, 2$, де c — граничні видатки, а d — фіксовані видатки. Тоді перша фірма має прибуток:

$$\pi_1 = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - cq_1 - d, \tag{7}$$

який вона прагне максимізувати шляхом вибору свого випуску q_1. Умова екстремуму першого порядку для (7) має вигляд:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = (a - b(q_1 + q_2)) - bq_1\left(1 + \frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right) - c = 0. \tag{8}$$

Аналіз **дуополії Курно** базується на припущенні про те, що гадані варіації $\frac{\partial q_2}{\partial q_1}$ та $\frac{\partial q_1}{\partial q_2}$ є нульовими, тобто кожний з дуополістів вважає, що зміни в його випуску продукції не впливають на конкурента. Отже, модель Курно базується на *конкуренції за обсягами*. Тоді **рівновага Курно** — це пара рівнів випуску (q_1, q_2), яка задовольняє умови:

$$\left.\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}\right|_{\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = 0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}\right|_{\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0} = 0. \tag{9}$$

Враховуючи (8), умови (9) набувають вигляду:

$$a - b(q_1 + q_2) - bq_i - c = 0, \; i = 1, 2.$$

Звідси одержується, що *рівновага Курно* задається рівностями:

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{3b}, \quad p = \frac{a + 2c}{3}, \quad q = \frac{2(a - c)}{3b}. \tag{10}$$

Цей результат можна поширити на будь-яку кількість фірм f. Рівновага Курно (10) для цієї ситуації має такий вигляд:

$$q_j = \frac{a-c}{(f+1)b},\ j = 1, 2, \ldots, f,\ \ p = \frac{a+fc}{f+1},\ \ q = \frac{f}{f+1}\cdot\frac{(a-c)}{b}. \quad (11)$$

Якщо кількість фірм f необмежено зростає, то рівновага Курно прямує до рівноваги в умовах досконалої конкуренції: при $f \to \infty$, q_j прямують до нуля, а ціни p прямують до сталої c, яка є граничними видатками.

При повнішому аналізі припускаються ненульові гадані варіації. Прикладом такого аналізу є аналіз **дуополії Стекельберга (Штакельберга),** коли одна або дві фірми вважають, що конкурент буде поводити себе як дуополіст Курно. Нехай перша фірма вважає, що друга фірма буде реагувати відповідно до функції реакції Курно, тобто

$$q_2 = \frac{a-c-bq_1}{2b}. \quad (12)$$

Тоді гадана варіація $\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}$. Тому, використовуючи (8), маємо:

$$a - b(q_1 + q_2) - bq_1 - c + \frac{bq_1}{2} = 0.$$

Звідси реакція першої фірми на (12) буде такою:

$$q_1 = \frac{2(a-c-bq_2)}{3b}.$$

Отже, результати для обох фірм залежать від поведінки одна одної. Якщо друга фірма вибирає реакцію Курно, як вважає перша фірма, то рішенням є **рівновага Стекельберга** для першої фірми:

$$q_1 = \frac{a-c}{2b}, \qquad q_2 = \frac{a-c}{4b}.$$

Таким чином, тут перша фірма має вдвічі більший прибуток, ніж друга. Однак якщо друга фірма не використовує реакції Курно, а діє відповідно до реакції Стекельберга, при якій кожна фірма неправильно вважає, що інша використовує наївне припущення Курно, то маємо **нерівновагу Стекельберга**:

$$q_1 = q_2 = \frac{2(a-c)}{5b},$$

за якої фірми отримують менший прибуток, ніж за рівноваги Курно.

Серед численних інших можливостей розглянемо ще кооперативне рішення обох фірм в дуополії максимізувати загальний прибуток (так зване *утилітарне рішення*). Це призводить до екстремальної задачі виду:

$$\pi(q_1, q_2) = \pi_1(q_1, q_2) + \pi_2(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]\cdot(q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2) - 2d \to max.$$

Розв'язок повинен задовольняти умову:

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1} = \frac{\partial\pi}{\partial q_2} = (a - b(q_1 + q_2)) - b(q_1 + q_2) - c = 0.$$

Звідси:

$$q_1 + q_2 = \frac{a-c}{2b}.$$

Розглянемо приклад конкуренції за цінами, а саме **модель Бертрана.** В основі моделі лежить припущення про те, що кожна з двох фірм при максимізації свого прибутку шляхом регулювання ціни очікує, що суперник залишить свою ціну без змін. Конкурентну боротьбу в цій моделі продемонструємо на прикладі *кривих реагування* (рис. 17). Крива реагування R_1 першої фірми побудована з точок, які для кожної фіксованої ціни p_2^0 суперника визначають ціну першої фірми $p_1^1 = p_1(p_2^0)$, що дає їй змогу максимізувати прибуток. Аналогічно будується крива реагування R_2 для другої фірми — вона дає змогу визначити оптимальну ціну $p_2^1 = p_2(p_1^0)$ другої фірми відповідно до кожної фіксованої ціни p_1^0 конкурента. Ця модель має стійку рівновагу в точці перетину обох кривих реагування E, де обидві фірми встановлюють однакову ціну $p_1 = p_2 = p_E$. Якщо врахувати також вар-

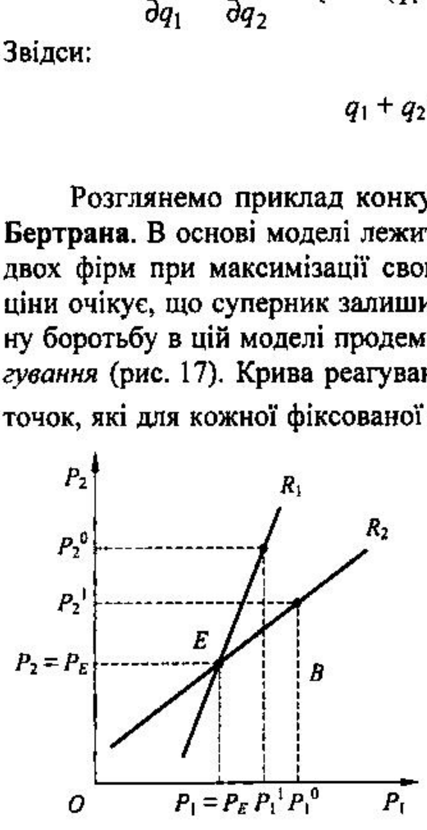


Рис. 17. Криві реагування

тість виробництва (її, власне, модель Бертрана не враховує), то стійка рівновага досягатиметься якраз у стані конкурентної рівноваги, а саму модель можна розглядати як формалізований сценарій певної цінової війни.

Насамкінець зауважимо, що стратегічну поведінку в дуополії найбільш адекватно відображають *моделі теорії ігор*. Нагадаємо, що це теорія індивідуальних раціональних рішень, які приймаються учасниками гри в умовах недостатньої поінформованості щодо результатів цих рішень. Зокрема, часто використовуються моделі *кооперативних ігор*, в яких припускається змова гравців (картель), а також моделі *некооперативних ігор*, якщо змова є неприпустимою.

2.9. Порівняльна статика фірми

Основними проблемами порівняльної статики фірми є дослідження чутливості функції оптимальних витрат (попиту на фактори) та випуску фірми (пропозиції продукції) до змін цінових параметрів задачі оптимальної поведінки фірми.

Підставляючи функцію попиту на витрати $\xi(p, w)$ та функцію пропозиції продукції $Q(p, w)$ у рівняння, які виражають необхідні умови оптимальності:

$$pMP(x^*) = p\frac{dF(x^*)}{dx} = w^T,$$

а також виробничу функцію, матимемо $(m + 1)$-у тотожність:

$$Q(p, w) = F(\xi(p, w)), \qquad p\frac{dF(\xi(p, w))}{dx} = w^T. \qquad (1)$$

Показники чутливості ξ та Q до параметрів p та w можна отримати шляхом диференціювання тотожностей (1) за p та w.

Розглянемо спочатку вплив зміни ціни продукції p. Диференціюючи тотожності (1) за p, маємо $(m + 1)$-е рівняння:

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \xi_i}{\partial p}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} + p\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}\cdot\frac{\partial \xi_i}{\partial p} = 0, \ j = 1, \ldots, m \qquad (2)$$

— відносно похідних $\frac{\partial Q}{\partial p}$ та $\frac{\partial \xi_i}{\partial p}$, $i = 1, \ldots, m$, які можна подати у векторно-матричних позначеннях так:

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{dF}{dx}\right)^T \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p}, \qquad \frac{dF}{dx} + p \cdot \ddot{F} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p} = 0. \tag{3}$$

Похідна $\frac{\partial Q}{\partial p}$ характеризує вплив зміни ціни випуску на його оптимальний обсяг, а $\frac{\partial \xi}{\partial p}$ — вплив зміни ціни продукції на оптимальні витрати $\frac{\partial \xi}{\partial p} = \left(\frac{\partial \xi_i(p, w)}{\partial p}\right)^T_{i=1,n}$ (вектор-стовпчик).

Рівняння (3) можна записати у вигляді одного векторного рівняння:

$$\begin{pmatrix} -1 & \left(\frac{dF}{dx}\right)^T \\ 0 & p\ddot{F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial \xi}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{dF}{dx} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тепер розглянемо вплив зміни в ціні фактора i-го виду на Q та ξ. Диференціюючи (1) за w_i, матимемо систему лінійних рівнянь:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial w_i}, \quad p \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial w_i} = \delta_{ik}, \; i, k = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

де δ_{ik} — символ Кронекера. У векторній формі рівняння (5) можна подати таким чином:

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = \left(\frac{dF}{dx}\right)^T \cdot \frac{\partial \xi}{\partial w}, \quad p \cdot \ddot{F} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial w} = E_m, \tag{6}$$

де $\frac{\partial Q}{\partial w} = \left(\frac{\partial Q}{\partial w_i}\right)^m_1$ (вектор-рядок) характеризує вплив зміни в цінах факторів на продукцію, $\frac{\partial \xi}{\partial w} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial w_j}\right)_{i,j=1}^{m}$ — вплив зміни цін факторів на витрати факторів, а E_m — одинична матриця m-го порядку.

Зауважимо, що рівняння (6) можна записати, вживаючи блочні матриці, у вигляді одного рівняння:

$$\begin{pmatrix} -1 & \left(\frac{dF}{dx}\right)^T \\ 0 & p\ddot{F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_m \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Тепер можна об'єднати рівняння (4) та (7), подавши їх у формі:

$$\begin{pmatrix} -1 & \left(\frac{dF}{dx}\right)^T \\ 0 & p\ddot{F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi}{\partial p} & \frac{\partial \xi}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{dF}{dx} & E_m \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Рівняння (8) називається **основним рівнянням теорії фірми**.

Оскільки в особливій області D матриця $\ddot{F}$ є від'ємно визначеною, і отже, невиродженою, то, застосовуючи правило знаходження обернених до блочних матриць, маємо, що в D існує обернена матриця:

$$\begin{pmatrix} -1 & \left(\frac{dF}{dx}\right)^T \\ 0 & p\ddot{F} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{p}\left(\frac{dF}{dx}\right)^T \ddot{F}^{-1} \\ 0 & \frac{1}{p}\ddot{F}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Тому в D існує розв'язок рівняння (8) відносно показників порівняльної статики фірми:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi}{\partial p} & \frac{\partial \xi}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{p}\left(\frac{dF}{dx}\right)^T \ddot{F}^{-1} \\ 0 & \frac{1}{p}\ddot{F}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{dF}{dx} & E_m \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Використовуючи співвідношення (10), розв'язок рівняння (8) можна записати в явному вигляді:

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{1}{p}\left(\frac{dF}{dx}\right)^T \ddot{F}^{-1}\frac{dF}{dx}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{1}{p}\ddot{F}^{-1}\frac{dF}{dx},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{1}{p}\left(\frac{dF}{dx}\right)^T \ddot{F}^{-1}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial w} = \frac{1}{p}\ddot{F}^{-1}. \qquad (11)$$

Оскільки $\ddot{F}$ є від'ємно визначеною в D, то $\ddot{F}^{-1}$ теж є від'ємно визначеною в D, і, отже, з першої рівності в (11) маємо, що $\frac{\partial Q}{\partial p} > 0$. Таким чином, зростання цін на продукцію завжди призводить до збільшення оптимального рівня випуску продукції, тобто крива пропозиції продукції є зростаючою.

Щодо знаків окремих елементів векторної похідної $\frac{\partial \xi}{\partial p}$ нічого певного сказати не можна, але з того факту, що

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{dF}{dx}\right)^T \frac{\partial \xi}{\partial p} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \xi_i}{\partial p} > 0, \qquad (12)$$

випливає, що в особливій області, в якій всі граничні продукти є невід'ємними, деякі з елементів $\frac{\partial \xi_i}{\partial p}$ мають бути додатними:

$$\text{існує } i \text{ з } i = 1, \ldots, m, \text{ що } \frac{\partial \xi_i}{\partial p} > 0. \qquad (13)$$

Таким чином, зростання ціни на продукцію має призводити до зростання пропозиції продукції і, отже, до підвищення попиту на окремі види ресурсів.

За означенням, витрати i-го виду (виробничі фактори i-го виду) називаються **малоцінними**, якщо $\frac{\partial \xi_i}{\partial p} < 0$, тобто коли обсяг їхнього споживання при підвищенні цін на продукцію зменшується.

З (13) випливає, що всі фактори виробництва одночасно не можуть бути малоцінними. Друга та третя рівності у співвідношеннях (11) показують, що

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = -\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^T \quad \text{або} \quad \frac{\partial Q}{\partial w_i} = -\frac{\partial \xi_i}{\partial p}, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Тому зростання ціни на продукцію призводить до підвищення (спадання) попиту на певні види факторів виробництва тоді і лише тоді, коли збільшення плати за цей вид факторів призводить до скорочення (зростання) оптимального випуску. Зокрема, збільшення плати за малоцінні фактори призводить до зростання випуску. З (14) та (12) маємо, що

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{dF}{dx}\right)^T \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p} = -\left(\frac{dF}{dx}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial w}\right)^T = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial Q}{\partial w_i} > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial Q}{\partial w_i} < 0,$$

і тому в особливій області для деякого i, $i = 1, \ldots, m$: $\frac{\partial Q}{\partial w_i} < 0$, тобто збільшення плати за деякий виробничий ресурс має призвести до зменшення випуску продукції.

З останньої рівності у співвідношеннях (11) випливає, що матриця $\frac{\partial \xi}{\partial w}$ є симетричною та від'ємно визначеною. Зокрема, її елементи на головній діагоналі від'ємні: $\frac{\partial \xi_i}{\partial w_i} < 0$, $i = 1, \ldots, m$. Таким чином, підвищення плати за витрати фактора деякого виду завжди призводить до зменшення попиту на цей фактор. На відміну від теорії споживання, для фірми не можуть існувати «витрати виду Гіффена», оскільки фірма, на відміну від звичайного споживача, не повинна задовольняти бюджетне обмеження. А тому криві попиту на витрати завжди є спадними.

Матриця $\frac{\partial \xi}{\partial w}$ є симетричною: $\frac{\partial \xi_i}{\partial w_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial w_i}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Тому вплив зміни плати на фактори j-го виду на попит фактору i-го виду є однаковим.

За означенням, фактори i-го та j-го видів є **взаємозамінними** (**взаємодоповняльними**), якщо $\frac{\partial \xi_i}{\partial w_j} > 0$ ($\frac{\partial \xi_i}{\partial w_j} < 0$).

2.10. Теорія багатопродуктової фірми

Теорію однопродуктової фірми, яку ми вивчали досі, можна поширити на більш загальний випадок багатопродуктової фірми, яка виробляє будь-яку кількість n видів продукції, $n \geq 1$, використовуючи при цьому m видів витрат.

Якщо позначити через q_i рівень випуску продукції виду i, то загальний випуск продукції q є n-вимірним вектором $q = (q_i)_1^n$. Існує багато підходів до опису технологічних зв'язків між вектором випуску продукції q багатопродуктової фірми та її вектором витрат $x = (x_j)_1^m$, тобто до опису виробничої функції фірми. *Один з цих підходів* визначає виробничу функцію $\boldsymbol{F}$ як векторну функцію в просторі витрат фірми $\boldsymbol{R}_+^m$, значеннями якої є вектор максимально можливого кінцевого випуску при заданому векторі витрат x:

$$\boldsymbol{F}(x) = (F_i(x^i))_1^n = (F_i(x_1^i, \ldots, x_m^i))_1^n = q, \tag{1}$$

де $q_i = F_i(x^i)$, $i = 1, \ldots, n$, — часткові виробничі функції, та

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_j^i, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Якщо позначити як $p = (p_i)_1^n$ вектор-рядок цін на продукцію, де p_i — ціна одиниці продукції i-го виду, то функція доходу R матиме вигляд:

$$R = p \cdot \boldsymbol{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x^i), \tag{3}$$

а функція прибутку фірми — такий вигляд:

$$\pi(x) = p \cdot \boldsymbol{F} - w \cdot x = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x^i) - \sum_{j=1}^{m} w_j x_j, \tag{4}$$

де $w = (w_j)_1^m$ — вектор цін на витрати. Наголосимо, що у моделі багатопродуктової фірми (1) – (4) вважається, що кожний вид продукції фірми є кінцевим і не використовується на виробництво інших видів продукції. У тому випадку, коли це не так (тобто коли частина продукції кожного виду може витрачатися на виготовлення інших видів продукції), потрібно розглядати більш складну модель, в якій унеможливлюється кратний рахунок витрат ресурсів та продукції.

У довгостроковій задачі багатопродуктова фірма з моделлю (1) – (4) вибирає вектор витрат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, де $x^i = (x^i_j)_1^m$ — вектори часткових витрат на i-ту продукцію при максимізації прибутку:

$$\pi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x^i) - \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} x^i_j \right) \to max$$

— за умов $x^1 \geq 0, x^2 \geq 0, \ldots, x^n \geq 0$. Необхідними умовами екстремуму є:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x^i_j} = p_i \frac{\partial F_i(x^i)}{\partial x^i_j} - w_j \leq 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial x^i_j} x^i_j = (p_i \frac{\partial F_i(x^i)}{\partial x^i_j} - w_j) x^i_j = 0,$$

$$x^i_j \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Таким чином, для кожної часткової виробничої функції $F_i(x^i)$, пов'язаної з випуском i-го типу продукції, виконуються неокласичні умови оптимальності.

Іншим, *більш агрегованим* підходом, до опису багатопродуктової фірми при використанні m видів ресурсів є задання функції випуску у вигляді *неявної функції від витрат*:

$$\Phi(q, x) = \Phi(q_1, \ldots, q_n, x_1, \ldots, x_m) = 0. \quad (5)$$

При цьому, аби відобразити загальні закономірності виробництва, зазвичай вважається, що

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \leq 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m. \quad (6)$$

Функція прибутку π визначається тоді таким співвідношенням:

$$\pi(q, x) = p \cdot q - w \cdot x = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{j=1}^{m} w_j x_j. \quad (7)$$

Умови рівноваги фірми з моделлю (5) – (7) визначаються у довгостроковому періоді як розв'язок екстремальної задачі:

$$\pi(q, x) \to max, \quad \Phi(q, x) = 0, \quad q \geq 0, \quad x \geq 0. \quad (8)$$

Використовуючи функцію Лагранжа $L(q, x, \lambda)$ для задачі (8):

$$L(q, x, \lambda) = p \cdot q - w \cdot x + \lambda\Phi(q, x), \tag{9}$$

де λ — множник Лагранжа, можна записати необхідні умови рівноваги у вигляді:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = p^T + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -w^T + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \Phi(q, x) = 0, \qquad \lambda > 0, \tag{10}$$

якщо вважати, що всі види витрат використовуються, а всі види продукції випускаються. Враховуючи, що перших два рівняння в умовах рівноваги (10) є векторними і мають відповідно розмірності n та m, то всього маємо $(n + m + 1)$-е рівняння для визначення невідомих λ, x_1, …, x_m, q_1, …, q_n. У скалярній формі умови рівноваги (10) набувають вигляду:

$$\lambda\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = -p_i, \qquad \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = w_j, \qquad \Phi(q, x) = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

2.11. Приклад задачі з розв'язанням до розділу 2

Задача. Виробнича функція фірми має вигляд: $q = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{6}}$. Постійні витрати фірми дорівнюють FC. Визначити:

1) функцію пропозиції продукції, що виробляє фірма, і функції попиту фірми на ресурси;
2) змінні, загальні та середні витрати фірми;
3) область збитковості та прибутковості фірми;
4) записати рівняння ізокванти та ізокости, що проходять через точку виробничої рівноваги.

Розв'язання. 1) Для того, щоб визначити відповідні функції попиту і пропозиції, запишемо основну модель поведінки фірми:

$$\pi(x, q) = pq - w_1x_1 - w_2x_2 - FC \to max; \quad q = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{6}}; \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Визначаємо функцію Лагранжа L даної задачі (сталі витрати FC можна не враховувати): $L(x, q, \lambda) = pq - w_1x_1 - w_2x_2 + \lambda(2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{6}} - q)$, де λ — множник Лагранжа. Тепер випишемо необхідні умови оптимальності:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = p - \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -w_1 + \lambda x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{6}} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -w_2 + \frac{1}{3}\lambda x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{5}{6}} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{6}} - q = 0.$$

З цієї системи визначаємо:

$$p = \lambda; \quad x_1 = \frac{pq}{2w_1}; \quad x_2 = \frac{pq}{6w_2}; \quad q = 2\left(\frac{pq}{2w_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{pq}{6w_2}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

З останнього рівняння визначаємо функцію пропозиції продукції, що виробляє фірма: $q^* = \frac{2}{\sqrt{3}}p^2w_1^{-\frac{3}{2}}w_2^{-\frac{1}{2}}$, а потім з другого та третього рівняння — функції попиту фірми на відповідні ресурси:

$$x_1^* = \frac{1}{\sqrt{3}}p^3w_1^{-\frac{5}{2}}w_2^{-\frac{1}{2}}, \qquad x_2^* = \frac{1}{3\sqrt{3}}p^3w_1^{-\frac{3}{2}}w_2^{-\frac{3}{2}}.$$

2) Змінні витрати фірми на придбання ресурсів $C(q)$:

$$C(q) = w_1x_1 + w_2x_2 = w_1 \cdot \frac{pq}{2w_1} + w_2 \cdot \frac{pq}{6w_2} = \frac{2}{3}pq.$$

Загальні витрати $C_з(q)$ — це сума змінних і постійних затрат:

$$C_з(q) = C(q) = \frac{2}{3}pq + FC.$$

Середні затрати $AC(q)$ на виготовлення одиниці продукції:

$$AC(q) = \frac{C_з(q)}{q} = \frac{2}{3}q + \frac{FC}{q}.$$

3) Прибуток фірми визначається як різниця між доходом $R(q)$ та змінними витратами $C_з(q)$:

$$\pi(q) = R(q) - C_з(q) = pq - \frac{2}{3}pq - FC = \frac{1}{3}pq - FC.$$

Отже, область прибутковості фірми — це область, де її прибуток додатний, тобто $\pi(q) > 0$, або $\frac{1}{3}pq - FC > 0. \Rightarrow q > \frac{3FC}{p}$. Відповідно область збитковості визначається співвідношенням: $q < \frac{3FC}{p}$.

4) Ізокванта — це крива сталого випуску продукції: $q = const$. Оскільки в умові вимагається виписати ізокванту, що проходить через точку виробничої рівноваги, то така ізокванта визначається співвідношенням $q = q^*$, або:

$$2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} p^2 w_1^{-\frac{3}{2}} w_2^{-\frac{1}{2}}.$$

Отже, рівняння шуканої ізокванти має вигляд:

$$x_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} p^{12} w_1^{-9} w_2^{-3} x_1^{-3}.$$

Ізокоста — це крива сталих витрат фірми: $C(q) = const$. Аналогічно рівняння ізокости, що проходить через точку виробничої рівноваги, визначається співвідношенням: $C(q) = C(q^*)$, або:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = \frac{2}{3} pq^* = \frac{4}{3\sqrt{3}} p^2 w_1^{-\frac{3}{2}} w_2^{-\frac{1}{2}}.$$

Рівняння шуканої ізокости має вигляд:

$$x_2 = \frac{4}{3\sqrt{3}} p^2 w_1^{-\frac{3}{2}} w_2^{-\frac{3}{2}} - \frac{w_1}{w_2} x_1.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Для лінійної виробничої функції обчислити еластичності виробництва ε та заміщення σ.

2. Витрати на рекламу можуть збільшити валовий дохід R, але при цьому зменшити загальний прибуток $\pi = R(q, A) - C(q) - A$, де q — випуск продукції, A — витрати на рекламу, при цьому $\dfrac{\partial R}{\partial A} > 0$. Знайти умови оптимальних витрат на рекламу.

3. Показати, що виробнича функція *CES*:

$$F(x_1, x_2) = A(\alpha_1 x_1^{-\beta} + \alpha_2 x_2^{-\beta})^{-\frac{\rho}{\beta}}$$

при $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ прямує до виробничої функції Кобба–Дугласа, якщо $\beta \to 0$.

4. За наведеними даними обчислити ринкову ціну, а також змінні, сукупні та середні витрати фірми і визначити, що повинна робити фірма: збільшити, зменшити випуск продукції чи припинити діяльність? $q = 1\,000$; $R = 5\,000$; $FC = 1\,500$; $AVC = 5{,}5$; $MC = 5$.

5. Попит на ялинкові прикраси є конкурентним. Функція попиту $Q_d = 200 - 10 \cdot P$. Середні витрати типової фабрики з виробництва ялинкових прикрас становлять: $AC_i = 5 + (q_i - 5)^2$. Яка кількість фабрик є характерною для даної галузі в довгостроковій перспективі?

6. Сукупні витрати фірми, яка діє на конкурентному ринку, дорівнюють: $15q^2 + 10q + 60$. Знайти: а) всі види видатків; б) кількість товару, яку в довгостроковому періоді буде виробляти фірма, максимізуючи свій прибуток (q^*); в) функцію пропозиції фірми.

7. Знайти функції попиту на витрати виробництва і функції пропозиції продукції для фірми з двома видами витрат та виробничою функцією Кобба–Дугласа.

8. Нехай $Q = F(K, L)$ — виробнича функція в агрегованому просторі витрат з двох виробничих факторів: L — праці та K — виробничого капіталу (основних виробничих фондів). Якщо F є лінійно-однорідною, то вона залежить лише від капіталоозброєності

$k = \frac{K}{L}$. Введемо функцію $f(k) = F(\frac{K}{L}, 1) = \frac{Q}{L} = y$, де y — середня продуктивність праці. Виразити через f такі показники: а) граничну продуктивність праці ($v = \frac{\partial F}{\partial L}$); б) граничну фондовіддачу ($r = \frac{\partial F}{\partial K}$); в) коефіцієнт еластичності за фондами ($\alpha = \frac{\partial F}{\partial K} / \frac{F}{K}$); г) еластичність за працею ($\beta = \frac{\partial F}{\partial L} / \frac{F}{L}$).

9. Спочатку капіталоозброєність праці дорівнювала 10. Якою вона буде за умови зростання граничної норми технологічної заміни на 10%, якщо еластичність заміни капіталу працею дорівнює 2?

10. На ринку діють дві фірми, які виробляють однотипну продукцію. Нехай витрати кожної з них мають відповідно вигляд: $C_1 = 10 + 2q_1$, $C_2 = q_2^2$. Ринковий попит на дану продукцію визначається рівнянням: $P = \frac{1}{3}(100 - q_1 - q_2)$. Обидві фірми використовують принцип Курно. Знайти параметри рівноваги даного ринку (ринкову ціну продукції та обсяги випуску продукції кожною з фірм).

11. Визначити рівноважні обсяги використання ресурсів, обсяг виробництва продукції та ціну на продукцію фірми, якщо її виробнича функція має вигляд: $q = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$, а $p(q) = a - bq$, $a > 0$, $b > 0$. Про який тип ринкової структури йдеться?

12. Виробнича функція $Q = F(x)$ є супераддитивною, якщо $F(x + y) \geq F(x) + F(y)$, $x, y \in R_+^m$. Довести, що: а) F задає зростаючий інтегральний дохід від розширення масштабів виробництва $F(\alpha x) \geq \alpha F(x)$, але не має просто зростаючого доходу від розширення масштабів виробництва; б) якщо додатково $F(x + y) = F(x) + F(y)$ при $x = cy$, $c = const$, то F має постійний дохід від розширення масштабів виробництва.

РОЗДІЛ 3. МОДЕЛІ РИНКУ ТА ТЕОРІЯ ЗАГАЛЬНОЇ РІВНОВАГИ

При написанні цього розділу використовувались джерела [7] та [9].

На основі математичних моделей споживання та виробництва, які були наведені у попередніх розділах, можна перейти до конструювання математичних моделей ринкової економіки шляхом об'єднання поведінки споживачів та фірм в єдину систему. Такі ринкові економічні агенти, як споживачі, у ролі яких зазвичай розглядаються домашні господарства, та виробничі підприємства, у ролі яких виступають різноманітні фірми, корпорації тощо, взаємодіють на двох типах ринків — ринку продуктів (товарів та послуг, що виробляються та пропонуються фірмами) та ринку факторів виробництва (праці, виробничих ресурсів — грошового капіталу, землі тощо, власниками яких виступають домашні господарства).

Домашні господарства (споживачі) отримують доходи від продажу факторів виробництва на ринку факторів та використовують їх для придбання споживчої продукції на ринку товарів та послуг. Фірми використовують придбані фактори для виробництва продукції. Задачі загальної економічної рівноваги полягають в аналізі взаємодії домашніх господарств та підприємств у термінах цін, обсягів товарів та затрачених ресурсів. При вивченні економічної взаємодії між споживачами та виробниками центральне місце займають опис та дослідження умов, необхідних для існування рівноваги між попитом та пропозицією на обох типах ринків, встановлення обставин, за яких подібна рівновага існує і є єдиною, а також аналіз її стійкості.

3.1. Поняття попиту

Існування індивіда передбачає задоволення його потреб, які постійно виникають і відтворюються. **Потребу** розуміють як відчуття нестачі чого-небудь, що набуло спеціальної форми відповідно до біосоціокультурних особливостей індивіда.

Попит, на відміну від потреби, є не лише бажанням, а й здатністю людей купувати блага. Попит відрізняється від потреби моментом платоспроможності і має передбачає взаємодію з іншими людьми як економічними агентами. Отже, **попит** — це ринковий вираз потреби, який є бажанням і здатністю людей купувати блага.

Попит залежить від багатьох факторів, зокрема: ціни (P), доходів (I), смаків та пріоритетів споживачів (Z), кількості споживачів на ринку (N), цін на інші товари ($P_1, \ldots, P_n$) та очікування зміни цін (E). Залежність попиту від вищезгаданих чинників називають **функцією попиту**:

$$Q_d = f(P, P_1, \ldots, P_n, I, Z, N, E).$$

Розглянемо, яким чином формують попит різні чинники.

3.1.1. Попит і ціна

Для аналізу формування попиту в найпростішій формі припустимо, що дана ціна є однорідною і виражається в грошовій формі. **Величина попиту** — це максимальна кількість блага, яку придбали б покупці за певну ціну.

Взаємозв'язок між ціною і попитом характеризується **законом попиту**, відповідно до якого зі зростанням ціни величина попиту зменшується, а зі зменшенням ціни — збільшується. Цей закон встановлюється в межах ізольованого відношення між ціною та величиною попиту. Поясненням цього феномену можна вважати можливість заміни одного блага іншим, ціна на яке залишилася без змін. Тут варто обумовити, що ми використовуємо принцип інших рівних умов.

Слід зазначити, що будь-які процеси відбуваються в часі, а тому, враховуючи відтворюваність потреби як основи формування попиту, необхідно вести мову про величину попиту за певний проміжок часу. Таким чином, величина попиту є одним з показників потоку.

Залежність попиту від ціни можна виразити трьома способами: графічно, у формі таблиці та алгебраїчно. Розглянемо спочатку графічну форму інтерпретації даної форми залежності. Це графічне зображення називається **кривою попиту** (рис. 1).

Крива попиту слугує своєрідною розмежувальною лінією між множиною допустимих для покупця значень ціни та кількості і тих значень, які лежать поза межами його можливостей. Отже, **крива попиту** — це межа ринкових можливостей покупців, оскільки кожна точка на ній відображає максимальну кількість блага, яку могли б придбати споживачі при заданій ціні, або максимальну ціну, яку могли б заплатити покупці при заданій кількості. Максимальна ціна, яку погодилися б заплатити покупці при заданій кількості, називається **ціною попиту**.

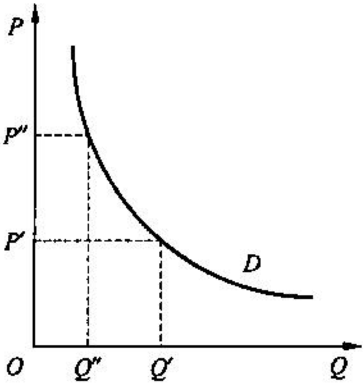


Рис. 1. Крива попиту

Для спрощення будемо керуватися припущенням про лінійну залежність між величиною попиту та ціною. Алгебраїчна форма цієї залежності матиме такий вигляд:

$$Q_d = a - bP,$$

де a і b — коефіцієнти, які відображають значення нецінових факторів попиту. В загальному випадку крива попиту має таку властивість: $\frac{\partial P}{\partial Q} < 0$, $\frac{\partial^2 P}{\partial Q^2} \geq 0$.

Отже, сформулюємо *закон поступового спадання попиту*. Коли ціна товару підвищується за незмінних інших умов, то попит буде на меншу кількість цього товару. Коли ж на ринок надходить більша кількість товару, то за незмінних інших умов він може бути реалізований тільки за нижчою ціною.

Ще раз акцентуємо увагу на різниці між попитом і величиною попиту. **Попит є** *залежністю* між ціною і кількістю економічного блага, тобто функцією. А **величиною попиту** вважають конкретну кількість економічного блага, на яку заявляється попит, тобто *значення* цієї функції.

Якщо змінюються нецінові фактори попиту, то, як правило, змінюється і попит. А це виражається в зміщенні кривої попиту на координатній площині. Зокрема, при зростанні попиту крива зміщується вправо, і навпаки.

3.1.2. Зміна цін на інші товари

Тут варто згадати різницю між взаємозамінними та взаємодоповняльними товарами.

Існують такі правила залежності в зміні кількості блага, на яке заявляється попит, від зміни ціни на інший товар. Якщо ціна на товар-замінник підвищується, то споживач, який прагне зберегти свій добробут, намагатиметься переорієнтувати свій попит на інший товар, який задовольняє аналогічну потребу. Отже, за будь-якої фіксованої ціни даного товару покупець буде намагатися придбати більше блага, ніж до підвищення ціни на товар-замінник. Відповідно, матимемо зворотну ситуацію, якщо ціна на товар-замінник падає.

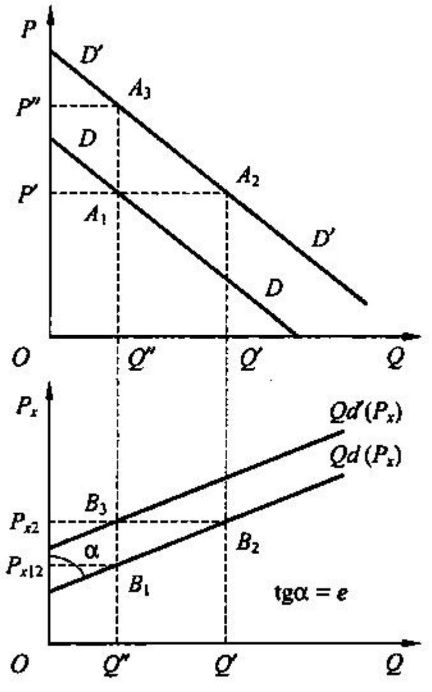


Рис. 2. Зміна попиту

Нехай маємо благо X. Проілюструємо вплив зміни ціни на рішення покупців про придбання блага Q при всіх можливих цінах (рис. 2). Тут P_x — ціна товару-замінника, DD — крива попиту до зміни ціни на товар-замінник ($P_x = P_{x1}$), $D'D'$ — крива попиту на благо Q після зміни ціни на X ($P_x = P_{x2}$).

Враховуючи пряму залежність попиту на благо від ціни на товар-замінник, для ілюстрації можна припустити таку форму рівняння попиту:

$$Q_d = a - bP + eP_x, \text{ де } e > 0.$$

Якщо ціна на доповняльне благо зростає, що зі свого боку зменшує реальну купівельну спроможність споживача, то попит на дане благо теж зменшується, оскільки попередня кількість блага стає непотрібною.

Нагадаємо, що тут йдеться не про абсолютну, а лише про відносну зміну цін. Абсолютна зміна цін (інфляція, дефляція) за своїми наслідками в першому наближенні схожа на зміну доходу.

3.1.3. Зміна доходу і попит

Зростання доходів за інших рівних умов розширює можливості покупця, що призводить до збільшення попиту на благо, оскільки додаткова кількість блага веде до зростання корисності (добробуту) споживача. Така закономірність стосується усіх нормальних благ. Винятком є малоцінні товари та товари нижчої якості, на які зі зростанням доходу попит зменшується, і навпаки. Це пов'язано з переорієнтуванням індивіда на споживання більш якісних товарів у міру зростання добробуту.

Загальний характер залежності попиту від зміни доходу можна виразити так само, як це було зроблено для товарів-замінників:

$$Q_d = a - bP + hI,$$

де I — величина доходу, h — показник чутливості попиту на зростання доходу. Таким чином, для малоцінних товарів після того, як дохід досягає певної величини, $h < 0$.

3.1.4. Вплив кількості покупців на ринку

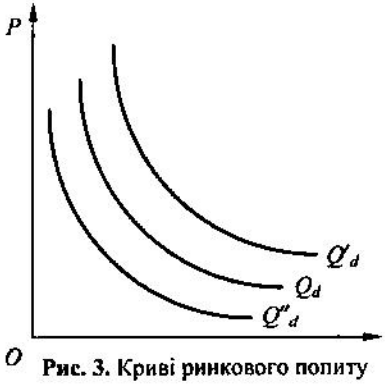


Рис. 3. Криві ринкового попиту

Якщо припустити, що змінюється лише кількість покупців, то зміни ринкового попиту перебуватимуть в прямій залежності відносно напрямку цієї зміни. В загальному випадку графічно це виглядатиме так, як зображено на рис. 3.

Наприклад, нехай спочатку на ринку діяли два покупці, функції індивідуальних попитів яких описувались відповідними рівняннями:

$$Q_1 = 15 - 3P, \quad Q_2 = 14 - 2P.$$

Тоді **крива ринкового попиту** виражалася таким рівнянням: $Q = Q_1 + Q_2 = 29 - 5P$. Графічно це виглядає так, як зображено на рис. 4.

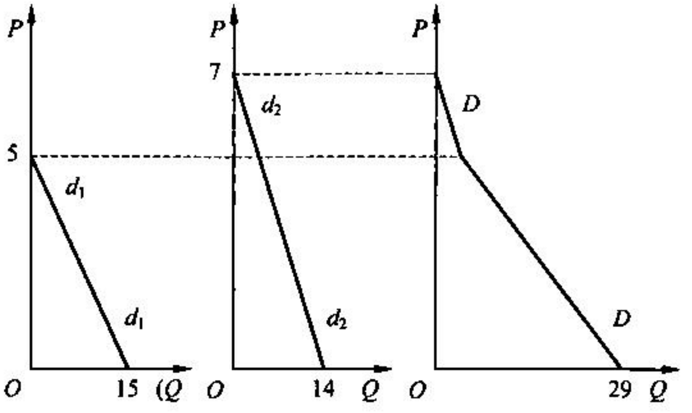


Рис. 4. Формування ринкового попиту

Якщо на ринку з'являється третій покупець з функцією індивідуального попиту виду: $Q_3 = 16 - P$, то крива ринкового попиту зміниться так, як показано на рис. 5. Алгебраїчно функція попиту тоді виражатиметься так:

$$\begin{array}{l|c} Q_d = 45 - 6P, & P \le 5; \\ Q_d = 30 - 3P, & 5 < P \le 7; \\ Q_d = 16 - P, & 7 < P \le 16. \end{array}$$

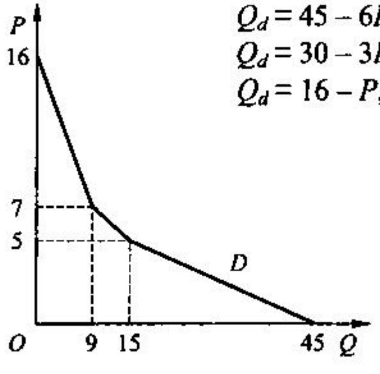


Рис. 5. Крива сукупного попиту

В даному випадку на кривій ринкового попиту утворилися два згини. Вони відповідають тим мінімальним значенням цін, при яких величина індивідуального попиту одного з покупців стає рівною нулеві.

3.1.5. Зміна очікування

Цей фактор пов'язаний з оцінками, які роблять покупці з приводу подальшої зміни ціни і залежно від цих оцінок корегують свої теперішні плани. Наприклад, якщо ціна блага була стабільною, то споживачі могли очікувати, що вона залишиться такою і надалі.

Проте зміна ціни може викликати очікування, пов'язані з її подальшим зростанням або спадом. Якщо очікується зростання ціни, то споживачі будуть намагатися встигнути придбати додаткову кількість товару до того, як він подорожчає. Це означає, що за даної ціни кількість блага, на яку заявляється попит, збільшується. Це відобразиться на зсуві кривої попиту вправо. При очікуванні падіння цін (у тому числі відносно зростання доходу) попит має зменшуватися.

В алгебраїчній формі вплив зміни в очікуваннях відносно ціни даного товару можна подати таким чином:

$$Q_d = a - bP + kP',$$

де P' — очікувана ціна, k — коефіцієнт пропорційності, який показує, наскільки за інших рівних умов має змінитися попит при заданій зміні очікуваної ціни. Проте йдеться не лише про очікувані зміни ціни даного товару, а й про очікувані зміни доходу, цін на взаємопов'язані товари.

3.1.6. Зміна смаків та переваг споживачів

Зміни у смаках та перевагах споживачів, на відміну від усіх перерахованих вище факторів, безпосередньо пов'язані з потребами людини та їхньою динамікою. Вони можуть бути зумовлені її добробутом, модою тощо. Наприклад, якщо певна річ вийшла з моди, то її можна купити за більш низькою ціною, оскільки тепер вона не виступає об'єктом бажання для тих, хто набуває репутації дотримання моди і для кого престиж є супутнім благом. Це спричиняє падіння попиту на дану річ.

На смаки споживачів значний вплив чинить реклама, яка, крім інформування споживачів щодо наявних певних можливостей, ще й переконує їх в необхідності даних речей, а також сама є предметом споживання. Очевидно, що в результаті цього крива попиту зазнає зсуву праворуч.

Тепер можна дати повніше визначення величини попиту. **Величина попиту** — це максимальна кількість блага, яку придбали б покупці за певну ціну і при заданих перевагах, очікуваннях, доході та цінах на інші блага.

3.2. Поняття еластичності

Для аналізу поведінки покупців на ринку і, відповідно, для закономірного формування ринкового попиту дуже важливим є визначення не лише характеру взаємозв'язку між залежною (кількістю) та незалежною (ціною, доходом тощо) змінними, а й інтенсивність реакції залежної змінної у відповідь на зміну незалежної.

Для цього можна було б використовувати відношення зміни попиту до зміни ціни. Проте, не зважаючи на відносну простоту, використання такого показника є проблематичним, оскільки він буде змінюватися залежно від вибору розмірностей. Наприклад, якщо ми будемо вимірювати інтенсивність реакції попиту на автомобілі, виходячи з доларових цін на них, то отримаємо величину більшу, порівняно з тією, де ціна вимірювалася б у гривнях. А тому такий показник важко використовувати для порівняння чутливості попиту за ціною для різних видів благ, навіть якщо вибрати єдиний проміжок часу та валюту. Ось чому перевагу має використання поняття еластичності. Можна користуватися таким визначення цього поняття: **еластичність** — це показник інтенсивності реакції залежної змінної у відповідь на зміну незалежної (доходу, ціни іншого товару тощо).

Якщо ж вести мову про алгебраїчну форму виразу, то **еластичність** — це відношення процентної зміни залежної змінної у відповідь на процентну зміну незалежної. Таким чином, оскільки зараз ми ведемо мову про попит і його залежність від ціни, то **коефіцієнт еластичності попиту за ціною** показує, на скільки відсотків зміниться обсяг попиту, якщо ціна товару зміниться на 1%:

$$E_p = (\%\ \text{зміни обсягу попиту}) : (\%\ \text{зміни ціни}).$$

Нехай, наприклад, при ціні P_1 обсяг попиту був Q_1, а при ціні P_2 він став Q_2. Тоді, за означенням, позначаючи $\Delta Q = Q_2 - Q_1$, $\Delta P = P_2 - P_1$, маємо:

$$E_p = (((Q_2 - Q_1)/Q_1) \cdot 100\%)/(((P_2 - P_1)/P_1) \cdot 100\%) =$$

$$= \frac{\Delta Q}{Q_1} : \frac{\Delta P}{P_1} = \frac{\Delta Q}{Q_1} \cdot \frac{P_1}{\Delta P}.$$

3.2.1. Види еластичності

В теорії розрізняють два види еластичності: точкову і дугову (еластичність на відрізку). *Точкова еластичність* величини попиту за ціною вимірює інтенсивність реакції попиту на нескінченно малу зміну ціни: $\Delta P \to 0$. Тоді загальна формула еластичності трансформується в таку:

$$E_P = \frac{dQ}{dP} / \frac{Q}{P}.$$

Наприклад, якщо функція попиту характеризується лінійною залежністю від ціни, то показник еластичності при $Q_d = a - bP$ дорівнюватиме:

$$E_P = -b : \frac{a - bP}{P} = \frac{-bP}{a - bP}.$$

Звернемо увагу на те, що показник еластичності попиту за ціною має від'ємне значення, і це є відображенням зворотної залежності попиту від ціни. Для спрощення, коли ми абстрагуємося від аномалій попиту і зміни ціни на пов'язані між собою товари, можна розглядати модуль даного показника: $|E_p|$. Зауважимо також, що можлива й інша форма запису формули точкової еластичності:

$$E_P = \frac{d \ln Q}{d \ln P}.$$

Необхідність розрахунків еластичності в кожній точці кривої попиту підтверджується, зокрема, тим, що на одній і тій самій ділянці кривої при застосуванні традиційної методики еластичність буде різною при зростанні і спаді цін. Для прикладу розглянемо таку ситуацію:

$$P_1 = 10 \text{ грн.},\ Q_1 = 200 \text{ шт.},\ \ P_2 = 12 \text{ грн.},\ Q_2 = 150 \text{ шт.}$$

Якщо ціна зросла з 10 грн. до 12 грн., то еластичність попиту буде визначатися так:

$$E_P = ((150 - 200)/200) : ((12 - 10)/10) = -1{,}25.$$

Якщо ціна зменшилася з 12 грн. до 10 грн., то еластичність попиту буде:

$$E_P = ((200 - 150)/150) : ((10 - 12)/12) = -2.$$

Зважаючи на згадані обставини, окрім показника точкової еластичності, застосовується поняття *дугової еластичності*. А саме при оцінюванні даного показника використовується середнє значення величини попиту і ціни:

$$E_p = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} : \frac{\frac{Q_2 + Q_1}{2}}{\frac{P_2 + P_1}{2}} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} : \frac{Q_2 + Q_1}{P_2 + P_1}.$$

Наприклад, для попереднього прикладу дугова еластичність дорівнюватиме: $E_p = -\frac{11}{7}$. Однак використання середніх значень ціни та попиту не дасть точних результатів для практичного застосування, оскільки еластичності на початку кривої та в її кінці суттєво відрізняються одна від одної.

Зауважимо, що формула для обчислення E_p на відрізку є різницевою формою запису точкової еластичності.

3.2.2. Еластичність і виручка продавців

Це питання є дуже важливим для розробки ринкової стратегії фірми та здійснення маркетингу. Відомо, що дохід продавців визначається добутком проданого товару на ціну. Звідси видно, що для того, аби утримати дохід на певному рівні при спаді ціни, необхідно збільшити об'єм продажу у фізичному вираженні. Проте виникає запитання: якою мірою відбувається ця компенсація?

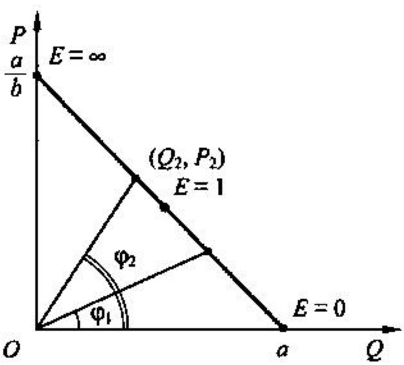


Рис. 6. Динаміка точкової еластичності

Для відповіді слід виділити ділянки еластичного та нееластичного попиту. Нехай $Q_d = a - bP$, $a > 0$, $b > 0$. Динаміка точкової еластичності попиту за ціною ілюструється за допомогою графіка (рис. 6).

Чому зі спадом ціни показник еластичності зменшується?

Це пов'язано з тим, що тангенс кута нахилу променя, проведеного з довільної точки на кривій попиту до початку координат, визначається співвідношенням $\operatorname{tg}\varphi = \frac{P}{Q}$. Якщо $P_1 < P_2$, то $\operatorname{tg}\varphi_1 < \operatorname{tg}\varphi_2$, а отже, і $E(P_1) < E(P_2)$. Зокрема, якщо $P \to 0$, то й $\operatorname{tg}\varphi \to 0$, тобто $E \to 0$. Якщо розглянути випадок, коли $P \to \frac{a}{b}$, і, відповідно, $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, то тоді $\operatorname{tg}\varphi \to \infty$ і $E \to \infty$. Отже, $0 \le E \le \infty$.

Де ж знаходиться та межа, за якою зміна ціни повністю компенсується зміною кількості? Це — точка з одиничною еластичністю.

Закономірності зміни показника еластичності величини попиту від ціни ілюструються в першому квадранті на рис. 7. В даному випадку особливої уваги заслуговують квадранти I та IV.

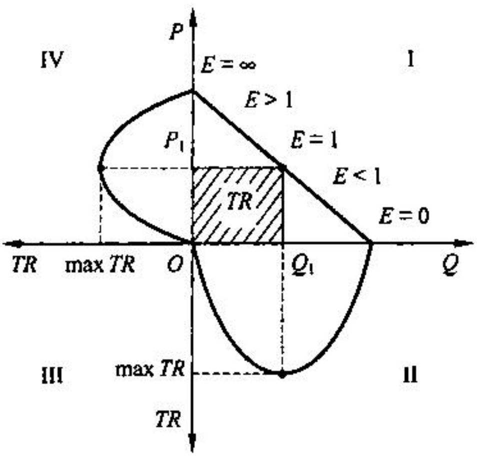


Рис. 7. Зміна еластичності від ціни

Попит, де $E > 1$, будемо називати *еластичним*. Попит, де $E < 1$, будемо називати *нееластичним*. Попит, для якого $E = 1$, називається *унітарним*, або *попитом з одиничною еластичністю*.

1. Якщо попит на товар еластичний, то зниження ціни веде до зростання доходу продавця.

2. Якщо попит на товар нееластичний, то зростання ціни веде до спаду доходу продавця.

3. Дохід при $E = 1$ — максимальний.

Можливий випадок, коли на довільній ділянці кривої попиту зміни в ціні на товар посилюються (компенсується) лише зміною кількості товару, тобто дохід продавця залишається незмінним: $Q_d = \frac{b}{P}$. Для цієї функції показник точкової еластичності дорівнює одиниці в довільній точці.

3.2.3. Перехресна еластичність

Оскільки кількість блага, яку готові придбати покупці, залежить не лише від ціни даного товару, а й від цін на товари, пов'язаних з ним за потребою, то закономірно виникає питання про зміну інтенсивності залежності попиту на дане благо від зміни ціни на інше благо. Для цього вводиться поняття перехресної еластичності.

Перехресна еластичність — це показник інтенсивності реакції попиту на даний товар у відповідь на зміну ціни пов'язаного товару, що обчислюється як відношення процентної зміни попиту до процентної зміни ціни доповняльного товару (або замінника).

Позначимо через $Q_{xy}(P_x, P_y)$ попит на товар X, де P_x — ціна на товар X, P_y — ціна на товар Y. В загальному вигляді показник точкової перехресної еластичності попиту на благо X за ціною на благо Y можна записати у вигляді:

$$E_{xy} = \frac{dQ_{xy}}{dP_y} \cdot \frac{P_y}{Q_{xy}}.$$

Як відомо, розрізняються три види зв'язків між благами: нейтральність, замінність та доповняльність. Сáме тому має значення не лише абсолютна величина показника перехресної еластичності, а й її знак.

Розглянемо *товари-замінники*. Для них характерним є те, що підвищення (зниження) ціни на один з них веде до зростання (спаду) попиту на інший, тобто характер залежності буде прямим. Це виражається в додатному значенні коефіцієнта перехресної еластичності: $E_{xy} > 0$.

Розглянемо *супутні*, або *доповняльні*, *товари*. Для них характерним є те, що підвищення (зниження) ціни на один з них призводить до зниження (підвищення) попиту на інший. Така зворотна форма залежності виражається у від'ємному значенні коефіцієнта перехресної еластичності: $E_{xy} < 0$.

Нарешті, для *нейтрального блага*, оскільки інтенсивність зміни в попиті як відповідь на зміну в ціні іншого товару є настільки малою, що нею можна знехтувати, то коефіцієнт перехресної еластичності буде дорівнювати нулеві.

Оскільки кожне благо, як правило, має і взаємодоповняльні, і взаємозамінні блага, то у випадку набору товарів 1, 2, ..., n можна побудувати матрицю коефіцієнтів еластичності одних із них відносно інших. В кожній клітинці таблиці записується еластичність попиту товару i за ціною товару j. Залежно від знака E_{ij} можна зробити висновок про вид зв'язку товарів i та j.

3.2.4. Еластичність попиту за доходом

Дуже важливо знати, як попит пов'язаний з доходами споживачів. Для цього вводять поняття еластичності попиту за доходом. Так само, як і показник еластичності попиту за ціною, еластичність попиту за доходом може бути точковою та дуговою. Показник точкової еластичності визначається як відношення:

$$E_I = \frac{dQ}{dI} : \frac{Q}{I},$$

де Q — попит на товар, I — дохід споживача.

Величина еластичності попиту за доходом залежить від якості блага, тобто від його відношення до певної системи переваг індивіда. Наведемо таку класифікацію благ:

предмети розкоші. Для них еластичність попиту за доходом більша за одиницю: $E_I > 1$;

нейтральні, або нормальні блага. Еластичність попиту за доходом дорівнює одиниці: $E_I = 1$;

предмети першої необхідності. Еластичність попиту за доходом перебуває в межах: $0 < E_I < 1$;

малоцінні, або неякісні блага. Для них еластичність попиту за доходом менша від нуля: $E_I < 0$.

Точніший аналіз еластичності попиту за доходом проводиться з використанням *кривих Енгеля*, які показують залежність попиту від доходу при незмінності інших факторів, що впливають на попит.

Для більшості нормальних товарів крива Енгеля має зростаючий характер і згасання, тобто певний приріст доходу спричиняє менший приріст споживання товару X. Однак для певної групи товарів крива Енгеля може зростати з прискоренням. До цієї групи і належать предмети розкоші. Ці залежності були помічені та сформульовані Енгелем і ввійшли до економічної теорії як *закони Енгеля*:

1. При незмінних цінах на всі блага частка сімейного бюджету, що витрачається на продукти споживання, має тенденцію до зменшення за умови зростання доходів сім'ї.
2. Споживання освітніх, юридичних та медичних послуг, а також послуг, пов'язаних з відпочинком, має тенденцію зростати швидше, ніж зростають доходи.

Розглянемо криві Енгеля детальніше (рис. 8 а, б, в).

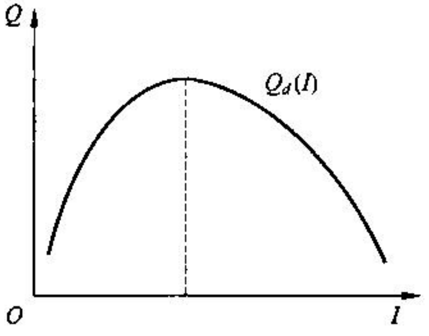


Рис. 8 *а*). Товари низької якості

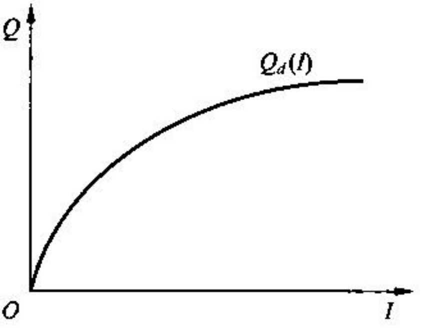


Рис. 8 *б*). Нееластичні товари

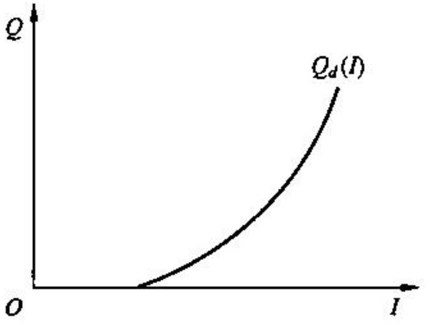


Рис. 8 *в*). Еластичні товари

1). Товари низької якості (молоко ($E_I = -0,5$); свинина ($E_I = -0,2$); картопля ($E_I = -0,2$)).

2). Нееластичні товари (кава ($E_I = 0,1$); сири ($E_I = 0,4$); яловичина ($E_I = 0,5$)).

3). Еластичні товари (вино ($E_I = 1,4$); довгострокові товари ($E_I = 1,8$); автомобілі ($E_I = 3,0$)).

3.3. Поняття пропозиції

Пропозиція — це ринковий вираз потреби, що полягає в бажанні та здатності економічних агентів заявити товари для продажу на ринку.

З огляду на таке визначення, варто вказати на відносність відмінностей між попитом і пропозицією. Це проявляється в тому, що, наприклад, за вищої ціни покупець може перетворитися на продавця, і навпаки. Ця теза стає більш очевидною при аналізі поведінки споживача, коли його повний дохід визначався через ціни і кількість благ, які він має для участі в ринкових угодах.

При аналізі пропозиції мається на увазі наявність множини варіантів використання блага. З означення ситуації економічного вибору відомо, що використання обмежених ресурсів одним способом передбачає відмову від їхнього використання іншим способом. Цінність пожертви і визначає ту мінімальну ціну, на яку погодився б продавець товару для того, щоб передати право на розпорядження ним іншій особі.

Величина пропозиції — це максимально можлива кількість блага, яку продавці готові реалізувати при заданій ціні. **Функцією пропозиції** називають залежність об'єму пропозиції від тих чинників, які його визначають. Серед цих чинників, зокрема, такі: ціна даного товару (P); ціна інших товарів ($P_1, \ldots, P_n$); ціна ресурсів (C); зміни технології (H); податки та дотації (T); природні умови (Θ); очікування виробників чи продавців (E); кількість продавців (N):

$$Q_s = f(P, P_1, \ldots, P_n, C, H, T, \Theta, E, N).$$

3.3.1. Пропозиція і ціна

Розглянемо залежність величини пропозиції від ціни. Множина точок, кожна з яких відповідає максимально можливій кількості товару, яку продавці погодилися б виставити для продажу на ринку при заданій ціні, утворюють **криву пропозиції**. Інакше кажучи, **крива пропозиції** — це множина точок, кожна з яких відповідає мінімально допустимій ціні, за якою продавці погодилися б реалізувати задану кількість товару. Залежність величини пропозиції від ціни (як і попиту) можна виразити трьома способами: графічно, алгебраїчно і таблично.

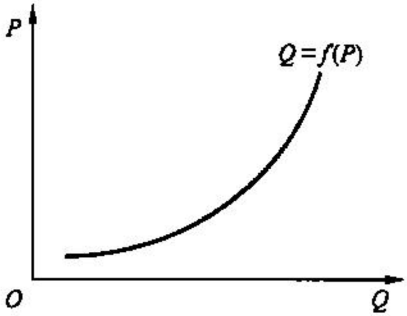


Рис. 9. Крива пропозиції

Зупинимося на графічній інтерпретації залежності величини пропозиції від ціни (рис. 9). Для функції пропозиції характерна пряма залежність: за більшої ціни на ринку пропонують більшу кількість товару:

$$Q_s = f(P),\ \frac{dQ_s}{dP} > 0;\ \frac{d^2Q_s}{dP^2} \geq 0.$$

В алгебраїчній формі лінійну функцію пропозиції можна записати таким чином:

$$Q_s = c + d \cdot P,$$

де c і d визначають нецінові фактори пропозиції, які ми розглянемо далі.

Множина точок, розташованих над кривою пропозиції, є *областю допустимих* для продавців комбінацій ціни та кількості, а множина точок під кривою відображає такі комбінації кількості та ціни, які лежать за межами ринкових можливостей продавців. Тому криву пропозиції можна інтерпретувати як границю ринкових можливостей продавців. Одночасно вона є і кривою ціни пропозиції, а **ціна пропозиції** — це мінімально допустима ціна, на яку погодилися б продавці при заданій кількості блага, що реалізується.

Як і у випадку з попитом, зміна лише ціни товару призводить до змін у величині попиту, а не в самому попиті. Графічно це відповідає переміщенню вздовж кривої пропозиції, але положення самої кривої при цьому залишається незмінним. Пояснення зсувів у кривій пропозиції потребує врахування у функції пропозиції інших факторів пропозиції.

3.3.2. Зміна цін на взаємопов'язані товари

Якщо ціна на інший товар (що є спорідненим за тим чи іншим фактором виробництва) зростає, то це означає, що у власників ресурсу, який використовується для виробництва даного блага, з'являється привабливіша альтернатива. Ця зміна відображається в підвищенні мінімальної ціни, на яку погодилися б продавці при незмінності використання кількості ресурсів.

З іншого боку, продавці погодилися б продавати товар за тією самою ціною, але в цьому випадку частина ресурсів має бути перерозподілена на користь виробництва товару, ціна на який підвищилася. Це означає, що кількість виробленого товару зменшилася.

Таким чином, підвищення ціни на інший товар зменшує пропозицію, що виражається у зсуві кривої пропозиції вліво. Алгебраїчна форма функції пропозиції може бути трансформована так:

$$Q_s = c + d \cdot P - vP_x,$$

де P_x — ціна блага, яке може бути вироблене за допомогою тих самих ресурсів, що й дане благо.

3.3.3. Зміна цін на ресурси

Якщо неринкові способи використання ресурсів набувають великої цінності, то й ціна ресурсів має зрости аби утримати їх в попередніх сферах використання. Проте для цього потрібна вища ціна, яку має отримувати продавець за кожну одиницю певної кількості товару, пропонованої ним на продаж. Наприклад, якщо для співробітника якоїсь фірми цінність дозвілля як альтернативної (робочому часу) форми використання фонду часу зросла, то він буде або менше уваги приділяти роботі, або необхідно буде підвищити йому зарплату з метою підтримання його бажання працювати на тому самому рівні. Отже, відстеження зміни ринкових та неринкових альтернатив може допомогти проводити правильну політику в галузі зайнятості у кожній фірмі.

3.3.4. Зміна технологій

Якщо технологію означити як сукупність способів та прийомів перетворення ресурсів на продукти, то при незмінних цінах на ресурси і продукти (за інших рівних умов) покращення технології виражається у збільшенні випуску на одиницю використаного ресурсу (більш детально про це йтиметься при розгляді виробничих функцій). Тоді продавець отримує можливість продавати ту саму кількість товару нижчою ціною або більшу кількість товару за тієї самою ціною. Навпаки, погіршення з якоїсь причини технології призводить до зворотних результатів.

Зростання податків на даний товар, очевидно, призводить до зменшення його пропозиції. Виділення дотацій, навпаки, дає змогу продавцям (виробникам) збільшити об'єм пропозиції.

3.3.5. Очікування продавців

Цей фактор поширюється на все перераховане вище, але з орієнтацією на майбутнє. Розглянемо для прикладу зміну очікування залежно від динаміки ціни на дане благо. Якщо очікувана ціна стає вищою за фактичну, то продавці стикаються з новою альтернативою: отримання меншої виручки зараз або більшої в майбутньому. Продавці як економічні агенти з раціональною поведінкою будуть намагатися перенести частину продуктів на продаж в майбутньому. Це викликає зменшення пропозиції, що виражається у зсуві кривої пропозиції вліво.

Отже, цінові очікування діють на поведінку покупців та продавців у протилежних напрямках, ілюструючи протилежність їхніх економічних інтересів.

3.3.6. Кількість продавців

Цей фактор діє аналогічно, що й для попиту. Зростання кількості продавців збільшує місткість ринку, збільшуючи пропозицію, оскільки при кожній з можливих цін кількість товару, що виставляється на продаж, буде більшою (або принаймні не меншою). Все ж слід зазначити, що в цьому судженні використовується таке припущення: продавці приймають рішення незалежно один від одного (це кореспондує з припущенням про чисту конкуренцію).

Так само, як і для попиту, існує індивідуальна пропозиція Q_i і ринкова пропозиція Q_s, яка визначається як сума індивідуальних пропозицій при кожній можливій ціні.

Можна навести більш повне визначення величини пропозиції. **Величини пропозиції** — це максимально можлива кількість блага, яку продавці готові реалізувати на ринку за певною ціною при заданих очікуваннях, цінах на фактори виробництва, цінах, споріднених з виробництвом продуктів, технологіях, податках і дотаціях.

3.3.7. Еластичність пропозиції

Аналогічно, як і для попиту, введемо поняття еластичності пропозиції за ціною. **Еластичність пропозиції за ціною** — це показник інтенсивності реакції величини пропозиції у відповідь на зміну ціни, що обчислюється через процентне відношення зміни величини пропозиції до зміни ціни:

$$E_S = (\%\ \text{зміни обсягу пропозиції}) : (\%\ \text{зміни ціни}).$$

Аналогічно, як і для еластичності попиту, вводиться поняття точкової та дугової еластичності пропозиції.

3.3.8. Еластичність пропозиції і динаміка ціни

Якщо взяти за основу припущення про лінійну залежність пропозиції від ціни, тобто

$$Q_s = c + d \cdot P,$$

то показник точкової еластичності пропозиції за ціною визначається співвідношенням:

$$E_S = \frac{dP}{c + dP} = \left(\frac{c + dP}{dP}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{c}{dP}\right)^{-1}.$$

Динаміка показника еластичності пропозиції за ціною буде залежати від значення c. Теоретично можливі три випадки:

А) $c > 0$. Тангенс кута нахилу променя, проведеного з початку координат до відповідної точки на кривій пропозиції, збільшується, отже, зменшується величина $\frac{Q}{P}$ (рис. 10). Таким чином, показник еластичності пропозиції зростає зі збільшенням ціни.

Розглянемо поведінку еластичності.

$$E_S' = \frac{dc}{(c + dP)^2} > 0; \qquad E_S'' = -\frac{2d^2c}{(c + dP)^2} < 0.$$

При $0 < P < \infty$ маємо:

$$\lim_{P \to 0} E_S = 0; \qquad \lim_{P \to \infty} E_S = 1.$$

Отже, функція $E_S(P)$ зростає, є опуклою вгору і має дві асимптоти (рис. 11).

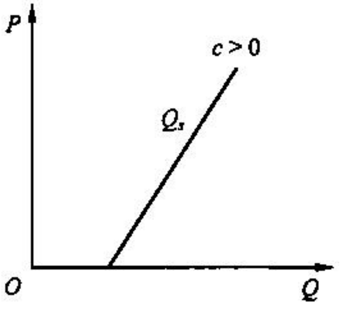


Рис. 10. Пропозиція

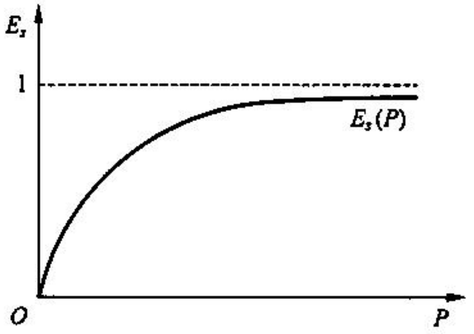


Рис. 11. Еластичність пропозиції

Б) $c < 0$. Тоді тангенс кута нахилу променя, проведеного з початку координат, зменшується. Оскільки ціна розглядається як незалежна змінна, то друга частина показника еластичності ($\frac{Q}{P}$) зростає (рис. 12). Отже, показник точкової еластичності пропозиції за ціною зменшується.

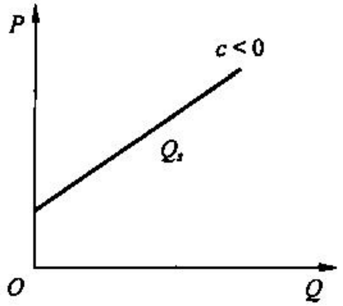


Рис. 12. Пропозиція

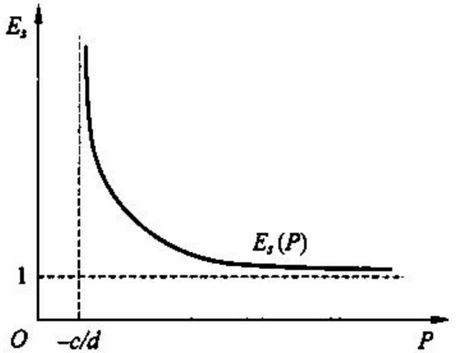


Рис. 13. Еластичність пропозиції

У цьому випадку: $E'_S = \dfrac{dc}{(c+dP)^2} < 0$; $E''_S = \dfrac{2d^2c}{(c+dP)^2} > 0$.

При $-\dfrac{c}{d} < P < \infty$ маємо: $\lim\limits_{P \to -\frac{c}{d}} E_S = \infty$; $\lim\limits_{P \to \infty} E_S = 1$. Отже, функція $E_S(P)$ спадає; вона опукла донизу і має дві асимптоти (рис. 13).

В) $c = 0$. Тангенс кута нахилу променя, проведеного з початку координат, збігається з кривою пропозиції, і отже, незалежно від значення ціни показник еластичності пропозиції буде сталим і дорівнюватиме одиниці (рис. 14). В даному варіанті: $E_S(P) = 1$; $E'_S = 0$; $E''_S = 0$; $0 \leq P \leq \infty$ (рис. 15).

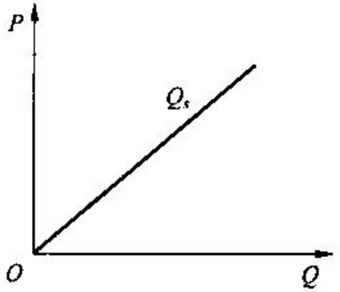


Рис. 14. Пропозиція

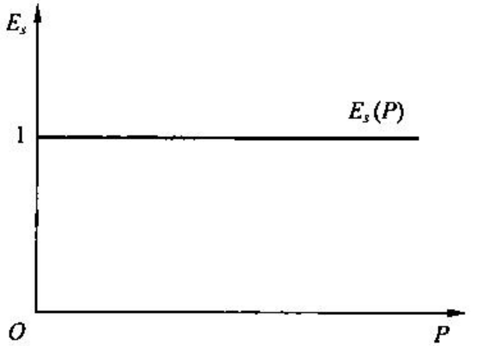


Рис. 15. Еластичність пропозиції

3.4. Взаємодія попиту і пропозиції

Наступним кроком в аналізі функціонування часткового ринку продукту є дослідження проблеми взаємодії попиту і пропозиції. Вона розглядається наче на двох рівнях, кожний з яких зі свого боку також розбитий на підрівні: статику і динаміку.

3.4.1. Умова часткової рівноваги (статична рівновага)

Якщо ми беремо за основу принцип економічної свободи, коли економічні агенти самостійно приймають рішення і поводяться відповідно до власних інтересів, використовуючи при цьому наявну інформацію, то область допустимих значень цін та відповідних їм кількостей для обох сторін матиме вигляд перетину ринкових можливостей продавців і покупців (рис. 16).

Розглянемо декілька комбінацій всередині даної області. Припустимо, що фактична ціна й об'єм ринкових угод відповідають положенню точки $A(P_a, Q_a)$ на площині. Оскільки ціна за даного об'єму ринкових угод опиняється нижче від максимально допустимої

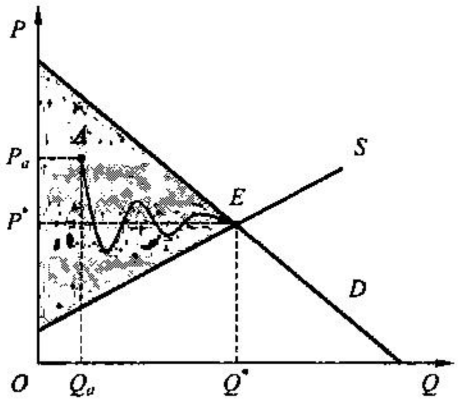


Рис. 16. Перетин ринкових можливостей

(яка відповідає кривій споживчого попиту), то покупці будуть намагатися придбати більшу кількість благ (навіть якщо в результаті ціна трохи зросте). З іншого боку, продавці отримали ціну вищу, ніж та, яка є мінімально прийнятною при заданому об'ємі ринкових угод. Це стимулює їх за інших рівних умов розширювати об'єм продажу в фізичному вираженні, оскільки, діючи в умовах конкуренції, це відповідає економічним інтересам продавців.

Таким чином, ми стикаємося із ситуацією збігу економічних інтересів у плані збільшення ринкових угод. Водночас протилежність інтересів зберігається в плані торгу за певний рівень ціни. Чим далі фактична ціна лежить від граничної для однієї зі сторін, тим вона є поступливішою, і навпаки. Отже, цим можна описати напрямок «дрейфу» точки *A* в області допустимих значень. Він буде, з одного боку, відображати збільшення об'єму ринкових угод у фізичному вираженні, а з іншого — коливання ціни відповідно до міри поступливості (або непоступливості) однієї зі сторін. Зі збільшенням об'єму ринкових угод множина значень, яких може набувати ринкова ціна, зменшується, що приводить, врешті-решт, до одного-єдиного значення — $E(P^*, Q^*)$. При цьому значенні і продавці, і покупці опиняються на межі своїх ринкових можливостей, що, з одного боку, робить їх непоступливими при торгівлі за ціну, а з іншого — не дає їм змоги збільшити об'єм ринкових угод у фізичному вираженні, оскільки в цьому випадку вже не буде жодного значення ціни, яке б влаштовувало (з точки зору майбутньої поведінки) обидві сторони.

Отже, ринок як система обмінів (угод) між покупцями і продавцями набуває такого стану, коли жоден з економічних агентів за інших рівних умов не змінить свого рішення щодо запланованої величини індивідуального попиту (пропозиції) і запропонованої ціни. Це і є стан *ринкової рівноваги.*

Більш строге формулювання виглядає так: **ринок перебуває у рівновазі** тоді, коли за певного об'єму ринкових угод у фізичному вираженні ціна попиту дорівнює ціні пропозиції. Або: **ринок перебуває у рівновазі,** якщо за деякої ціни величини запланованого попиту і пропозиції рівні. Це відображає погодженість часткових планів економічних агентів.

Процес «намацування» рівноважної комбінації ціни та кількості детальніше розглянемо дещо пізніше.

В алгебраїчній формі статична рівновага на частковому ринку може бути виражена так (за умови лінійності функцій попиту і пропозиції):

$$\begin{cases} Q_d = a - bP, \\ Q_s = c + dP. \end{cases}$$

Тоді за означенням:

$$Q_d(P) = Q_s(P),$$

або:

$$a - bP = c + dP.$$

Звідси маємо:

$$P^* = \frac{a-c}{b+d}.$$

Це і є формула рівноважної ціни. Знаючи її, можна одержати формулу рівноважного об'єму ринкових угод у фізичному вираженні:

$$Q^* = \frac{bc+da}{b+d}.$$

Варто зазначити, що встановлення рівноважної ціни і визначення відповідного їй об'єму ринкових угод у фізичному вираженні не є цілями покупців і продавців.

Взаємодія економічних агентів на ринку здійснюється відповідно до принципу самокоординації, який можна розуміти в сенсі «невидимої руки», що контролює поведінку індивідів у масштабах суспільства, певного «спонтанного порядку», який встановлюється природним, еволюційним шляхом як непередбачуваний результат життєдіяльності і взаємодії економічних одиниць громадської системи.

3.4.2. Динамічна рівновага

Досі йшлося про стан рівноваги та його зміни без врахування часу та процесу взаємного пристосування попиту і пропозиції. Насправді економічні агенти мають у своєму розпорядженні неповну інформацію і діють відповідно до особливостей технології виробництва благ. Отже, необхідний час для того, щоб відреагувати на зміну попиту.

Ми братимемо за основу те, що сáме попит як ринкове вираження потреби є керуючим механізмом в розподілі ресурсів, тобто використовуємо припущення про відсутність економічного розвитку.

Враховуватимемо також і те, що невизначеність зумовлює орієнтацію продавців на ціну, що склалася в попередній період, а товари, які вироблені в попередньому періоді, не можуть бути реалізовані в наступному періоді.

А. Дискретна (динамічна) павутиноподібна модель

Дискретна (динамічна) модель будується на основі припущення про запізнення пропозиції відносно змін у попиті. Спочатку опишемо цю модель у вербальній формі.

Якщо відбулося несподіване для продавців підвищення попиту, наприклад у результаті зростання ціни на товари-замінники, то величина пропозиції в заданий ринковий період залишиться незмінною, оскільки припускається рівність нулю (незмінність) запасів. Тоді корегування здійснюватиметься лише за рахунок ринкової ціни.

В наступному (першому після зміни попиту) ринковому періоді продавці, плануючи величину своєї пропозиції, будуть орієнтуватися вже на ціну, яка склалася в попередньому періоді. Проте при заданій ціні їм не вдасться реалізувати всю вироблену кількість блага. Оскільки діє припущення про врівноваження величини попиту і пропозиції в кожному ринковому періоді, то ринкова ціна має знизитися до рівня ціни попиту, який відповідає виробленій кількості.

Продавці, які орієнтуються на цю останню ціну, в другому після зміни попиту періоді зменшують заплановану величину пропозиції, а це знову призведе до зростання ціни в наступному періоді. Так буде продовжуватися доти, поки ціна й об'єм ринкових угод не наблизяться до певного рівня, для якого приватні плани продавців та покупців за обома параметрами можуть бути погоджені.

В алгебраїчній формі павутиноподібна модель може бути описана так. Нехай функція попиту і пропозиції задані у вигляді:

$$Q_d = a - bP; \qquad Q_s = c + dP.$$

Розглянемо умову рівноваги на ринку:

$$Q' = a - bP' = c + dP'. \tag{1}$$

З урахуванням запізнення в часі пропозиції відносно попиту вона перетворюється на співвідношення:

$$Q(t) = a - bP(t) = c + dP(t-1). \tag{2}$$

Припустимо, що відхилення від рівноважної ціни і рівноважного об'єму ринкових угод у фізичному вираженні визнається відповідно такими рівняннями:

$$p(t) = P(t) - P', \tag{3}$$

$$q(t) = Q(t) - Q'. \tag{4}$$

Використовуючи ці позначення, одержимо:

$$q(t) = -bp(t) = dp(t-1). \tag{5}$$

Тоді для періоду $t = 1$ відхилення фактичної ціни від рівноважної, що виражається через ціну, яка склалася в попередній період $t = 0$, дорівнюватиме:

$$p(1) = -\frac{d}{b}p(0). \tag{6}$$

Використовуючи формулу для відхилення фактичної ціни від рівноважної в період $t = 1$, можна визначити аналогічне відхилення для періоду $t = 2$:

$$p(2) = -\frac{d}{b}p(1) = \left(-\frac{d}{b}\right)^2 p(0). \tag{7}$$

Застосовуючи метод різницевих рівнянь, можна отримати формулу для відхилення фактичної ціни від рівноважної в період t, що виражається через початкове відхилення фактичної ціни від потенційно рівноважної:

$$p(t) = \left(-\frac{d}{b}\right)^t p(0) \tag{8}$$

або

$$P(t) = P' + (P(0) - P')\left(-\frac{d}{b}\right)^t . \tag{9}$$

Звернемо увагу, що відхилення від рівноважної ціни набуває почергово додатних та від'ємних значень, залежно від періоду, який розглядається. Отже, фактична рівноважна ціна може опускатися нижче від потенційно рівноважної або підійматися вище від неї.

На відміну від ціни, відхилення фактичного об'єму ринкових угод у фізичному вираженні від потенційно рівноважного буде завжди від'ємним, що вказує на наявність невикористаних можливостей торгівлі для обох сторін. Лише при переході до границі відхилення може стати нульовим. Проте для цього мають бути виконані певні умови. Йдеться про *стабільність рівноваги*.

Дослідимо формулу (8) при різних відношеннях параметрів b і d.

1. $0 < \frac{d}{b} < 1$. В цьому випадку маємо, що після зміни ціни при $t \to \infty$ ціна $P(t) \to P'$(тобто прямує до рівноважної ціни).

Рівновага ринку вважається **стабільною** якщо у стані рівноваги еластичність попиту за ціною вища від еластичності пропозиції за ціною. А це еквівалентно співвідношенню: $b > d$ ($|E_d| > E_s$). Отже, в цьому випадку ми якраз і маємо збіжність ряду відхилень фактичної ринкової ціни від рівноважної і фактичного об'єму ринкових угод від рівноважного об'єму.

В графічному вигляді ці види рівноваги можна зобразити так, як показано на рис. 17.

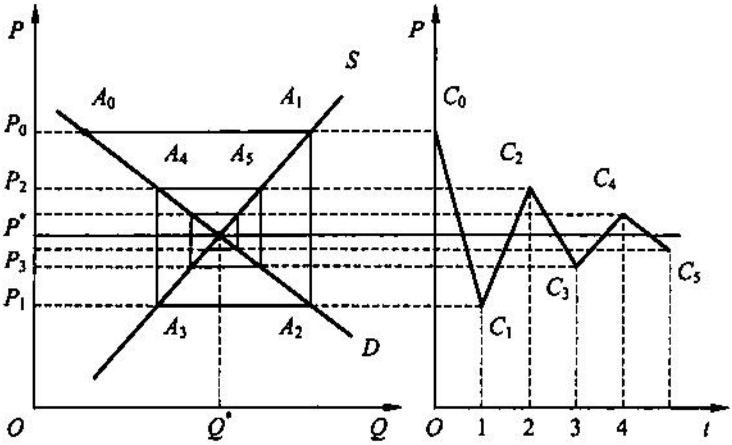


Рис. 17. Стабільна рівновага ринку

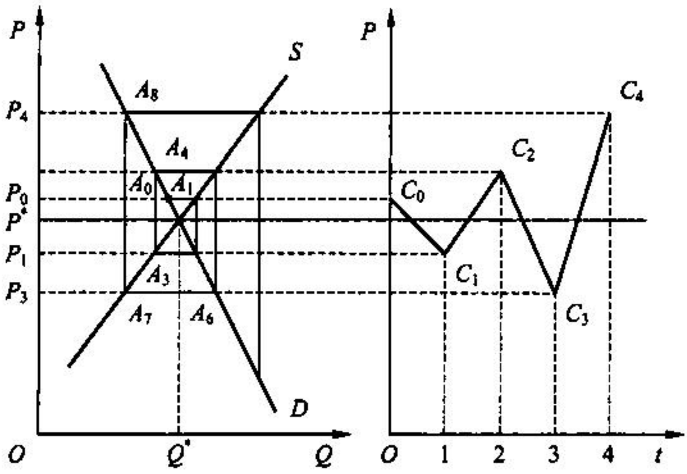


Рис. 18. Нестабільна рівновага ринку

2. $\frac{d}{b} > 1$. В цьому випадку: $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{d}{b}\right)^t = \infty$; $\lim\limits_{t\to\infty}(P(t) - P^*) = \pm\infty$.

Рівновага ринку називається **нестабільною**, якщо в результаті впливу деякого фактора амплітуда коливань ціни навколо рівноважної збільшується, що відповідно збільшує відхилення фактичного об'єму ринкових угод від рівноважного. А це можливо тоді, коли еластичність попиту за ціною в умовах рівноваги є нижчою від еластичності пропозиції за ціною, тобто $b < d$ ($|E_d| < E_s$).

В решті-решт коливання цін можуть стати настільки великими, що це призведе до «закриття» ринку (нульовому об'єму угод у фізичному вираженні). Графічно нестабільну рівновагу зображена на рис. 18.

3. $\frac{d}{b} = 1$. **Рівновагу** можна називати **квазістабільною**, якщо в результаті впливу певного фактора на попит відхилення фактичної ціни від рівноважної є постійним, адже тоді еластичність попиту і пропозиції за ціною в умовах рівноваги є однаковими, що й відповідає співвідношенню $b = d$. Графічно квазістабільність рівноваги зображено на рис. 19.

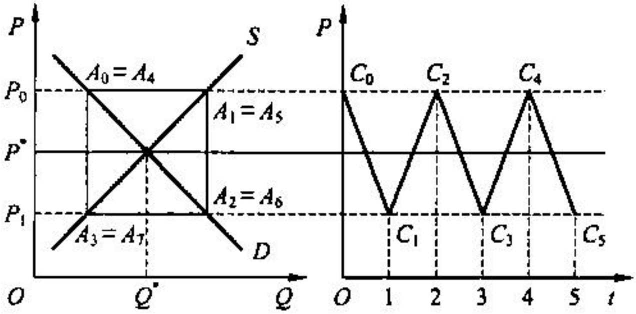


Рис. 19. Квазістабільна рівновага ринку

З економічної точки зору стабільність (нестабільність) рівноваги зумовлена порівняльною інтенсивністю реакції попиту і пропозиції у відповідь на зміни в ціні. Чим споживачі більшою мірою є консервативними у своїх смаках та перевагах, чим менше замінників даного блага є в споживанні, тим нижчою є еластичність попиту за ціною, тим менш стабільною виявляється рівновага на ринку. Тому, як правило, нестабільна рівновага є характерною для галузей традиційної економіки, а також тих галузей, які виробляють товари, що не мають близьких замінників.

Ще раз зауважимо, що ми припускали збіг ринкової ціни, яка склалася за даний ринковий період, з очікуваною ціною наступного ринкового періоду. Отже, ми не брали до уваги корегування, яке здійснюють продавці на основі відмінностей між очікуваннями та фактичними цінами і яке враховується при поясненні поведінки економічних агентів у складніших моделях. Наступним кроком може бути врахування гіпотези адаптивних очікувань (гіпотези корегування помилок).

Б. Неперервна модель рівноваги ринку

В неперервній моделі ціна перетворюється на функцію часу. Тоді величини попиту і пропозиції також будуть залежні від часу t. Якщо знову припустити, що зміна попиту відбувається першою, а пропозиція залишається тією самою, але залежною від часу t, то вважають, що зміна ціни з боку попиту призводить до зміни функції попиту таким чином:

$$Q_d(t) = a - bP - b'\frac{dP}{dt}, \tag{10}$$

де доданок $b'\dfrac{dp}{dt}$ якраз і відображає зміну попиту. Функцію пропозиції Q_s залишимо у вигляді:

$$Q_s(t) = c + dP, \quad P = P(t).$$

З умови рівноваги отримаємо:

$$a - bP - b'\frac{dP}{dt} = c + dP. \tag{11}$$

Якби величини запланованих попиту і пропозиції були однакові на всіх часових інтервалах, то це свідчило б про стан рівноваги. В протилежному разі відхилення фактичної ринкової ціни від рівноважної та фактичного об'єму ринкових угод від рівноважного виражаються такими співвідношеннями:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{d+b}{b'}p, \tag{12}$$

$$q(t) = -bp - b'\frac{dp}{dt} = dp. \tag{13}$$

Отже, $\frac{d(\ln p)}{dt} = -\frac{d+b}{b'}$. Таким чином, ми отримали диференціальне рівняння поведінки функції $p(t)$. Проінтегрувавши це рівняння, матимемо:

$$\ln p = const - \frac{d+b}{b'}t.$$

Звідси: $p(t) = p(0) \cdot e^{-\frac{d+b}{b'}t}$.

Отже, неперервна модель рівноваги ринку приводить до такого висновку: при $\frac{d+b}{b'} > 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = 0$. А це означає, що $P(t) \to P'$ при $t \to \infty$. При $\frac{d+b}{b'} > 0$ ринок є *стійким* (тобто динамічна рівновага є *стійкою*).

Якщо виберемо додатне або від'ємне відхилення, то матимемо відповідні графіки для $p(t)$ та $P(t)$ (рис. 20).

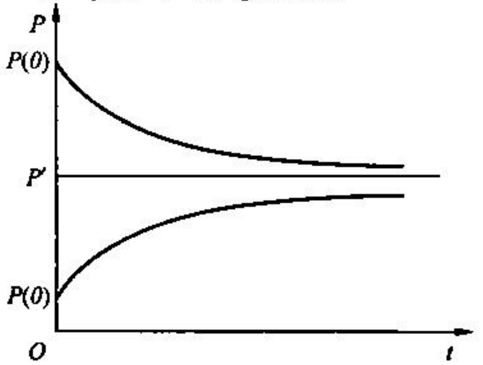


Рис. 20. Стійка динамічна рівновага

3.4.3. Державне регулювання взаємодії попиту і пропозиції

Досі наші міркування ґрунтувалися на припущенні, що роль держави обмежується лише встановленням правил гри і забезпеченням захисту прав економічних агентів, необхідного для здійснення принципу вільного обміну. Тепер відкинемо це припущення. Можливі різні форми державного регулювання:

1) оподаткування; 2) контроль за цінами; 3) квотування;

4) одночасне встановлення планових завдань і визначення розрахункових цін.

Коротко розглянемо перший вид державного регулювання, а саме опосередковане оподаткування.

Візьмемо за приклад опосередкований податок, який стягується у вигляді деякої фіксованої в абсолютному значенні суми з одиниці блага, що реалізується. Загальна величина податку, тобто доходу держави, становитиме:

$$T = t \cdot Q,$$

де T — загальна величина опосередкованого податку, t — ставка непрямого податку, Q — кількість блага.

Тепер розглянемо, як введення такого виду податку вплине на стан рівноваги. Варто зазначити, що введення непрямого податку не підриває принципу, відповідно до якого економічні агенти переслідують власні інтереси. Проте функціональна залежність величини пропозиції блага Q від ціни $Q_s = c + dP$ має зазнати певної модифікації. Оскільки ціна як функція кількості дорівнює:

$$P = \frac{Q_s}{d} - \frac{c}{d},$$

то при кожному з можливих значень величини пропозиції Q_s нова ціна пропозиції має бути вищою за попередню на величину, що відповідає ставці непрямого податку, тобто:

$$P_s' = P_s + t.$$

Отже,

$$P = \frac{Q_s}{d} - \frac{c}{d} + t.$$

Тоді нова функція пропозиції матиме такий вигляд:

$$Q_s = c + d(P - t).$$

А це зі свого боку рівнозначно зменшенню пропозиції порівняно із ситуацією, коли $t = 0$.

Оскільки за умовою рівноваги $Q_s(P, t) = Q_d$, то в результаті отримаємо нове значення рівноважної ціни:

$$P' = \frac{a - c + dt}{b + d}.$$

Легко помітити, що значення нової рівноважної ціни змінилось не на величину ставки опосередкованого податку, а на

$$\Delta p' = \frac{dt}{b+d} = \frac{t}{1+\frac{b}{d}}. \qquad (15)$$

Отже, зміна ціни у результаті введення непрямого податку залежить від співвідношення абсолютних значень показників еластичності попиту і пропозиції за ціною в точці рівноваги.

Проілюструвати зміну в рівновазі на частковому ринку можна таким чином. Формально даний непрямий податок сплачує продавець. Проте насправді відбувається розподіл податкового тягаря між покупцями і продавцями в пропорції, що відповідає відношенню показників еластичностей попиту і пропозиції в точці рівноваги. Чим відносно менш еластичним є попит за ціною, порівняно з еластичністю пропозиції за ціною в умовах рівноваги, тим більшу частку податку сплачуватимуть покупці, і навпаки. Лише в крайніх випадках, наприклад коли пропозиція абсолютно еластична за ціною, весь податковий тягар перекладається на споживача. Зауважимо, що в такому разі і нова рівноважна ціна буде вищою за стару рівно на ставку непрямого податку. Це са́ме випливає і зі співвідношення (15). Таким чином, абсолютна еластичність означає, що d набуває як завгодно великих значень, отже, граничне значення $\frac{b}{d} = 0$.

Серед найважливіших наслідків введення опосередкованого податку варто вказати на такі:

1) підвищення ринкової ціни залежно від співвідношення показників еластичностей попиту і пропозиції за ціною ($0 < \Delta p' < t$);
2) зменшення об'єму ринкових угод у фізичному вираженні;
3) утворення доходу держави у розмірі, що відповідає площі заштрихованого прямокутника (рис. 21);
4) утворення надлишкового податкового тягаря — так званих втрат мертвого вантажу (омертвілих витрат, харбергерського трикутника), величина яких відповідає площі трикутника *ABC* (рис. 21).

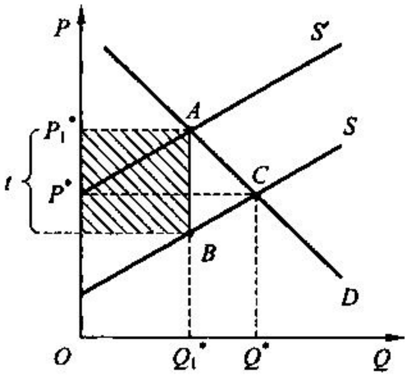


Рис. 21. Доход держави при оподаткуванні

Мертвим вантажем податку вважають величину втрат, пов'язаних зі зменшенням премії споживача та ренти виробника, які виникають у результаті скорочення об'єму виробництва і споживання, порівняно з тим, який існував до введення податку.

3.4.4. Ефективність раціонування через систему цін

Встановлення рівноважної ціни через механізм вільного ринку є ефективним способом розподілу ресурсів в економічній системі. З точки зору споживачів рівноважна ціна є оптимальною ціною попиту. Споживачі, які бажають придбати даний товар, готові були б заплатити за меншу його кількість більшу суму, а реально внаслідок дії ринкових сил вони купують більшу кількість товару за відносно меншою ціною. Різниця між сумою грошей, яку споживачі готові заплатити за даний товар (площа під кривою попиту, що обмежена зліва віссю цін, а справа — вертикальною лінією, яка відповідає рівноважній кількості товару) і реальними споживчими видатками на нього (добуток рівноважної ціни на рівноважну кількість товару) називається **споживчим надлишком**, або **виграшем споживача** (рис. 22). Алгебраїчно виграш споживача виражається так:

$$TS = \int_0^{Q^*} P_d(Q)dQ - P^*Q^*. \qquad (16)$$

У випадку лінійної залежності величини попиту від ціни споживчий надлишок дорівнює площі трикутника P^*BC.

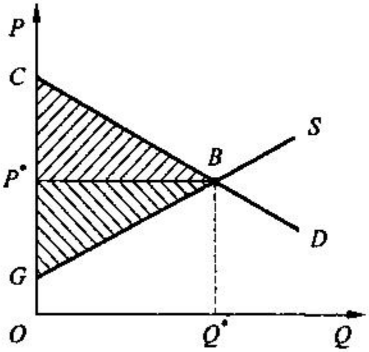


Рис. 22. Споживчий надлишок і рента виробників

Будь-яка фіксація ціни вище або нижче від рівноважної залишає незадоволеними частину споживачів, оскільки це спричиняє скорочення загальної величини споживчого надлишку.

З точки зору виробників рівноважна ціна є оптимальною ціною пропозиції. Різниця між сукупним доходом виробників від продажу товару (добуток рівноважної ціни на рівноважну кількість) і сукупними видатками, пов'язаними з його виробництвом (площа під кривою пропозиції), називається **рентою виробників**. Алгебраїчно рента виробників виражається формулою:

$$TR = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} P_s(Q)dQ. \qquad (17)$$

У випадку лінійної залежності величини пропозиції від ціни **рента виробників** буде відповідати площі трикутника P^*BG (див. рис. 22).

У точці рівноваги за умов вільного ринку рента виробників буде максимальною. Будь-яке відхилення ціни від рівноважного рівня створює або дефіцит, або надлишок товару. А це завжди супроводжується скороченням ренти виробників.

Якщо встановлюється рівноважна ціна, то в умовах вільного ринку ні споживачі, ні виробник не мають стимулів до зміни своїх планів і, відповідно, дій. Той зі споживачів, хто хотів та міг придбати товар, придбав його. Той з виробників, хто хотів і міг продати товар, продав його. При цьому не залишилося ні надлишкової кількості блага, ні надлишкової платоспроможної потреби. Очікування виробників та споживачів виправдались, плани купівлі та продажу підтвердились. Прогноз ринку було зроблено правильно всіма учасниками економічного процесу. Якщо ж ціна відхиляється від рівноважної, то спостерігається розбіжність у планах та очікуваннях різних економічних агентів. Наприклад, якщо фактична ціна з певної причини стала вищою за рівноважну, то бажаючих купити буде менше, ніж бажаючих продати. Це призведе, з одного боку, до перегляду намірів виставити в майбутньому товар на ринок тими продавцями, яким не вдалося реалізувати його в поточному періоді; вони будуть корегувати свої плани виробництва. З іншого боку, частина споживачів, яким не вдалося придбати даний товар через його високу ціну, будуть намагатися змінити свої дії так, щоб або придбати товар (наприклад, працюючи інтенсивніше чи позичаючи певну суму), або ж знайти товар-замінник. Взаємні дії продавців та покупців, не задоволених такою ситуацією, призведуть до змін кількості блага, яке постачається, а також його ціни в наступному періоді. І так триватиме доти, доки не буде знайдено рівноважну ціну.

Подібні дії відбуватимуться і в тому випадку, коли ціна виявиться нижчою за рівноважну.

Отже, ринкова ціна виконує інформаційну функцію, передаючи виробникам та споживачам відомості про ситуацію на ринку та про поведінку інших економічних агентів. Це дає їм змогу корегувати приватні плани. Орієнтуючись на ринкову ціну, виробники та споживачі розподіляють засоби між альтернативними можливостями їхнього використання. Отже, ціна виконує функцію розподілу ресурсів та продуктів. Крім цього, подаючи сигнали виробництву та споживачам, ціна стимулює виробників змінювати структуру виробництва, а споживачів — структуру споживання.

3.5. Моделі вальрасівського типу

Моделі вальрасівського типу вивчають економіку в дезагрегованому вигляді. Їхніми складовими компонентами є окремі виробники (підприємства, фірми) та окремі споживачі (домашні господарства, приватні особи). Історично модель Вальраса була першою об'ємною економіко-математичною моделлю, яку її автор оприлюднив формалізованою мовою, близькою до сучасної. Ідеї, покладені в основу цієї моделі, мали значний вплив на всі галузі моделювання економічних процесів. Наприклад, поняття конкурентної рівноваги, що утворює ядро моделі Вальраса, потім трансформувалося в поняття динамічної рівноваги в моделі Дж. фон Неймана, а опис виробничих процесів у моделях «витрати-випуск» Леонтьєва теж пов'язаний з ідеями, що беруть початок у моделі Вальраса.

Розглянемо спочатку класичний варіант моделі, де розглядається економіка з H споживачами, E підприємствами, n типами продукції та m типами виробничих ресурсів (витрат). Нехай p_i позначає ціну i-го виду продукції, а w_j — ціну j-го виду витрат. Будемо вважати, що економіка є **конкурентною** у тому розумінні, що всі споживачі та фірми діють за заданими цінами. Споживачі, перебуваючи у межах своїх бюджетних обмежень, прагнуть одержати максимальне задоволення своїх потреб від придбання продукції, а виробники прагнуть до максимізації прибутків від виробництва.

Нехай r_j^e — кількість первинних ресурсів виду j, що закуповлюються фірмою e, а q_i^e — обсяг випуску продукції i, що продається цією фірмою. Тоді прибуток π^e фірми e має вигляд:

$$\pi^e = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^e - \sum_{j=1}^{m} w_j r_j^e, \quad e = 1, \ldots, E, \tag{1}$$

або у векторній формі: $\pi^e = p \cdot q^e - w \cdot r^e$, $e = 1, \ldots, E$. Кожна фірма максимізує свій прибуток при обмеженнях, визначених виробничою функцією, що задана в неявній формі співвідношенням: $\Phi^e(q^e, r^e) = 0$, $e = 1, \ldots, E$. Тоді, відповідно до результатів розділу 2, необхідні умови оптимального вибору обсягу продукції та витрат ресурсів фірми e мають вигляд:

$$\lambda^e \frac{\partial \Phi^e}{\partial q^e} = -p^T, \quad \lambda^e \frac{\partial \Phi^e}{\partial r^e} = w^T, \quad \Phi^e(q^e, r^e) = 0, \quad \lambda^e > 0, \qquad (2)$$

де λ^e — множник Лагранжа задачі фірми. Таким чином, для визначення $(n + m + 1)$ невід'ємного q_i^e, $i = 1, \ldots, n$, r_j^e, $j = 1, \ldots, m$, λ^e маємо $(n + m + 1)$ рівняння. Оскільки рівняння (2) описують вибір кожної фірми, то загалом маємо $E \cdot (n + m + 1)$ рівняння.

В економіці діють також H споживачів, кожен з яких розпоряджається певним набором виробничих факторів (наприклад, робочою силою), які він може продати на ринку факторів виробництва та одержати дохід. Крім цього, кожен споживач може мати свою частку у фірмі та одержувати відповідну частину її прибутків. Загальний дохід від продажу факторів виробництва та участі у справах фірм споживач використовує для закупівлі товарів та послуг на ринку продукції. Нехай x_i^h — кількість i-ої продукції, закупленої споживачем, а y_j^h — кількість j-ого фактора, проданого споживачем h. Тоді корисність, одержана споживачем h від придбання товарів та послуг, а також від продажу факторів виробництва можна охарактеризувати функцією корисності $U^h(x^h, y^h)$, в якій $x^h = (x_i^h)_{i=1,n}$, $y^h = (y_j^h)_{j=1,m}$.

Бюджетне обмеження для споживача h має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j y_j^h + \sum_{e=1}^{E} s^{h,e} \pi^e = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h, \qquad (3)$$

де перша сума зліва виражає загальний дохід від продажу факторів виробництва, а друга показує дохід споживача як власника виробництва (тут $s^{h,e}$ — частка участі споживача h у фірмі e); права частина показує загальні видатки споживача. Якщо ввести у розгляд вектори $s^h = (s^{h,e})_{e=1,E}$, $\pi = (\pi^e)_{e=1,E}$, то бюджетне обмеження (3) у векторній формі матиме вигляд: $w \cdot y^h + s^h \cdot \pi = p \cdot x^h$. Задача раціональної поведінки споживача має вигляд:

$$U^h(x^h, y^h) \to max, \qquad w \cdot y^h + s^h \cdot \pi = p \cdot x^h. \qquad (4)$$

Функція Лагранжа цієї задачі задається виразом:

$$L^h = U^h(x^h, y^h) + \mu^h(w \cdot y^h + s^h \cdot \pi - p \cdot x^h),$$

де μ^h — множник Лагранжа для споживача h. Поведінка споживача описується системою рівнянь, що виражають умови максимізації корисності в задачі (4):

$$\frac{\partial L^h}{\partial x^h} = \frac{\partial U^h}{\partial x^h} - \mu^h p^T = 0, \qquad \frac{\partial L^h}{\partial y^h} = \frac{\partial U^h}{\partial y^h} + \mu^h w^T = 0,$$

$$\frac{\partial L^h}{\partial \mu^h} = w \cdot y^h + s^h \cdot \pi - p \cdot x^h = 0. \tag{5}$$

Це дає $(n + m + 1)$ скалярне рівняння з $(n + m + 1)$ невідомими x^h, y^h, μ^h. Рівняння (5) можна записати у більш зручному вигляді:

$$\frac{\partial U^h}{\partial x^h} = \mu^h p^T, \quad \frac{\partial U^h}{\partial y^h} = -\mu^h w^T, \qquad w \cdot y^h + s^h \cdot \pi = p \cdot x^h. \tag{6}$$

Оскільки ці рівняння виконуються для кожного з H споживачів, то загалом маємо $(n + m + 1)H$ рівнянь з такою ж кількістю невідомих.

Системи рівнянь (2) та (6) описують рівновагу виробників та споживачів окремо. Наступна група рівнянь пов'язана з ринковою взаємодією і виражає їхню взаємну рівновагу — у вигляді рівності загального попиту на будь-який товар або фактор та загальної пропозиції цього товару або фактора. Така взаємна рівновага на товарному ринку породжує n рівнянь:

$$\sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{e=1}^{E} q_i^e, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

а взаємна рівновага на ринку факторів — m рівнянь:

$$\sum_{h=1}^{H} y_j^h = \sum_{e=1}^{E} r_j^e, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Таким чином, маємо ще $(n + m)$ рівнянь взаємної рівноваги.

Взяті разом $(n + m + 1)(E + H) + (n + m)$ скалярних рівнянь системи рівнянь (2), (6), (7) і (8) описують рівноважний стан ринкової економіки.

Основна закономірність теорії загальної економічної рівноваги — так званий **закон Вальраса**, який стверджує, що загальний попит має дорівнювати загальній пропозиції при будь-якій системі цін. З цього випливає, що одне з отриманих рівнянь є залежним від інших.

Для ілюстрації закону Вальраса розглянемо бюджетне обмеження (3). Якщо провести підсумовування рівностей (3) за всіма h, враховуючи, що сума часток $s^{h,e}$ дорівнює 1 для кожної фірми, то матимемо:

$$\sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{m} w_j y_j^h + \sum_{e=1}^{E}\pi^e = \sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h . \tag{9}$$

Рівняння (9) означає, що загальний дохід всіх споживачів разом із загальним прибутком всіх фірм дорівнює загальній вартості товарів (цей висновок використовується при підрахунках національного доходу економіки).

Користуючись визначенням прибутку (1), маємо:

$$\sum_{h=1}^{H}\sum_{j=1}^{m} w_j y_j^h + \sum_{e=1}^{E}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i^e - \sum_{j=1}^{m} w_j r_j^e\right) = \sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h$$

— або, групуючи вирази:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j\left(\sum_{h=1}^{H} y_j^h - \sum_{e=1}^{E} r_j^e\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h - \sum_{e=1}^{E} q_i^e\right). \tag{10}$$

З виражения (10) закону Вальраса випливає, що одне з рівнянь загальної рівноваги залежить від інших. Наприклад, припустимо, що всі фактори, крім останнього, є зрівноваженими:

$$\sum_{h=1}^{H} y_j^h = \sum_{e=1}^{E} r_j^e,\ \ j = 1, \ldots, m-1, \qquad \sum_{h=1}^{H} x_i^h = \sum_{e=1}^{E} q_i^e,\ \ i = 1, \ldots, n.$$

Підставляючи ці вирази в (10), отримаємо:

$$w_m\left(\sum_{h=1}^{H} y_m^h - \sum_{e=1}^{E} r_m^e\right) = 0.$$

Отже, при $w_m \neq 0$ і має виконуватися рівновага на ринку останнього фактора. Це означає, що останнє рівняння у (8) можна вивести з інших рівнянь системи.

Таким чином, відповідно до закону Вальраса, всього існує $(n + m + 1)(E + H) + (n + m - 1)$ незалежних рівнянь загальної рівноваги.

Розглянемо тепер кількість невідомих. Для кожної фірми e існує набір q^e з n обсягів продукції для продажу, набір r^e з m факторів для купівлі та множник Лагранжа λ^e, отже, загалом $(n + m + 1)E$ невідомих. Кожен споживач h характеризується набором x^h з n куплених товарів, набором y^h з m проданих факторів та множником Лагранжа μ^h, тобто загалом $(n + m + 1)H$ невідомими. Крім цього, ще існують ціни на товари та фактори p та w. Оскільки в умовах моделі, що розглядається, всі функції попиту та пропозиції є однорідними нульового степеня (розв'язки задачі раціональної поведінки фірми при цінах (p, w) є також розв'язками для цін $(\alpha p, \alpha w)$, $\alpha > 0$), то, вибираючи, скажімо, перший товар за одиницю виміру ($\alpha = 1/p_1$) і переходячи до відносних цін $(p/p_1, w/p_1) = (1, p_2/p_1, \ldots, p_n/p_1, w_1/p_1, \ldots, w_m/p_1)$, маємо $(n + m - 1)$ відносних цін. Тому загальна кількість невідомих (при відносних цінах) дорівнює $(n + m + 1)(E + H) + (n + m - 1)$.

Отже, система рівнянь загальної рівноваги (2), (6), (7) і (8) є замкненою в тому розумінні, що вона має однакову кількість незалежних рівнянь та змінних. Звичайно, це ще не є ні необхідною, ні достатньою умовою для існування розв'язку цієї системи (існування загальної економічної рівноваги).

Зауважимо, що ціни на продукцію та первинні фактори виробництва називаються **рівноважними цінами**, якщо виробники та споживачі, діючи найвигіднішим для себе чином та враховуючи бюджетні і виробничі обмеження, забезпечують такий стан в економіці, при якому попит на кожний продукт та фактор не перевищує його пропозиції.

Рівноважними називають також **відповідні рішення** економічних агентів. Сукупність цін рівноваги та рівноважних рішень називають **станом рівноваги в економіці**.

Основною проблемою в загальних моделях економіки якраз і є існування рівноважних цін. Відповідні розв'язки для різних варіантів моделей були отримані лише в другій половині XX ст. (якщо не враховувати робіт А. Вальда, в яких деякі найпростіші моделі було досліджено раніше).

Поряд з питанням існування загальної економічної рівноваги, тобто існування для даної системи переваг і виробничих технологій такої системи цін, при якій відповідні їй рішення економічних агентів (виробників та споживачів) є сумісними, в теорії загальної економічної рівноваги розглядаються й інші питання.

Ще одна проблема така: чи **досяжний стан рівноваги**, тобто чи досягає економіка стану рівноваги, якщо вона у ньому не перебувала спочатку? Це проблема **стійкості рівноваги**. Для дослідження цього питання потрібно мати моделі механізмів реакції на розбіжності попиту та пропозиції.

Якщо ж стан рівноваги існує, є єдиним та досяжним, то як він буде змінюватися при змінах технологій виробництва та переваг споживачів? Це питання належить до порівняльної статики.

Нарешті, ще таке важливе питання: наскільки з точки зору загального добробуту в суспільстві є ефективним стан рівноваги, тобто наскільки виправдана **гіпотеза А. Сміта,** за якою, діючи саме з егоїстичних міркувань, економічні агенти досягають максимального підвищення загального добробуту, хоча безпосередньо це й не входило до їхніх намірів?

Зазначимо, що поставлені запитання значною мірою незалежні. Модель економіки повинна бути дуже багатою та складною, аби з її допомогою можна було отримати відповіді на всі ці питання.

Розглянемо тепер більш сучасну моделль економіки вальрасівського типу. Характерним підходом до моделювання виробничих процесів у економіці останнім часом є застосування так званих **виробничо-технологічних множин**. Цей підхід є більш загальним, ніж використання виробничих функцій.

У сучасній математичній економіці кожний конкретний спосіб функціонування виробництва описують парою (r, x), що складається з **вектора витрат r** та **вектора випусків x** виробництва. Така пара називається **виробничим процесом** або скорочено просто **процесом.** Розмірності r та x є кількостями відповідно типів факторів та продуктів.

В загальному випадку задана виробнича технологія дає змогу **реалізовувати багато** різних процесів (r, x). Тому з економічної точки зору повністю вона описується **виробничо-технологічною множиною** T, яка є множиною всіх виробничих процесів, можливих при даній технології.

Для деякого процесу (r, x) можуть знайтися такі задіяні в ньому продукти, які одночасно і витрачаються, і випускаються (в інших випадках таких продуктів може і не бути — все залежить від конкретної ситуації). Такий випадок, коли кожний продукт може витрачатися й випускатися, є дуже важливим. Тоді вектори r та x мають однакову розмірність, а їхні компоненти відповідають тим самим продуктам: $x = (x_i)_{i=1,m}$, $r = (r_i)_{i=1,n}$. Різниця $x_i - r_i$ характеризує чистий (кінцевий) випуск i-го виду продукту у виробничому процесі і має характер потоку, тобто кількості за одиницю часу. При такій ситуації технологічною множиною T зручно вважати не множину всіх пар витрат та випуску (r, x), а множину всіх векторів чистих випусків $x - r$. Тоді вектор чистого випуску називається **процесом з потоками,** його додатні та від'ємні компоненти зображають відповідно реальні випуски та чисті витрати.

Таким чином, маємо два варіанти виробничих множин: перший — **варіант із запасами:** $T = \{(r, x)\}$; другий — **варіант із потоками:** $T = \{(x - r)\}$

Приклад. Розглянемо виробничу систему, що складається з підрозділів, кожний з яких виробляє за певною технологією певний вид продукції, що частково витрачається як проміжний продукт при виготовленні всіх або частини видів продукції. Якщо $A = (a_{ij})_{i=1,n}^{j=1,m}$ — матриця виробничих витрат, де a_{ij} — витрати i-ої продукції на виготовлення одиниці j-ої продукції, а $x = (x_i)_{i=1,n}$ — вектор випуску продукції, то виробничі витрати $r = Ax$. Таким чином, виробничо-технологічна множина T_i для i-го підрозділу має вигляд: $T_i = \{(a^i x_i, x_i), x_i \geq 0\}$, де a^i є i-им рядком матриці A. Ця технологічна множина описана у термінах запасів. Очевидно, що T_i є променем у просторі R^{n+1}, що виходить з початку координат у напрямку вектора $(a^i, 1)$. Інакше кажучи, T_i є виродженим випадком многогранного опуклого конуса.

Описана модель виробництва називається **статичною моделлю «витрати-випуск» Леонтьєва**. Вона може використовуватися як в мікроекономічному (підприємство), так і в макроекономічному варіанті (національна економіка з підрозділами у вигляді галузей економіки).

Розглянемо тепер модель Леонтьєва у варіанті з потоками. Якщо A — матриця витрат виробничої системи, E — діагональна одинична матриця розмірності $n \times n$, $x \geq 0$ — вектор валового випуску, то $x - r = (E - A)x$, а технологічна множина має вигляд: $T = \{(E - A)x\colon x \geq 0\}$. Отже, T у варіанті з потоками є многогранним опуклим конусом.

Фундаментальні економічні закони виробництва доволі легко сформулювати у термінах певних структурних властивостей виробничо-технологічних множин. Оскільки T завжди є підмножиною скінченновимірного евклідового простору, то окремі структурні властивості можна охарактеризувати і не конкретизуючи, який са́ме варіант T мається на увазі.

I. *Нездійсненність «рога достатку»* (неможливість виробити щось з нічого): (і) у варіанті із запасами: якщо $(r, x) \in T$, $r = 0$, то $x = 0$; (іі) у варіанті з потоками: якщо $x \in T$, $x \geq 0$, то $x = 0$.

II. *Відсутність зовнішньої неекономічності* виражається опуклістю множини T. (Зауважимо, що неформально зовнішня неекономічність означається як взаємний вплив двох одночасних виробничих процесів, який веде до збільшення витрат та зменшення випуску; навпаки зовнішня економія веде до підвищення ефективності процесів). Опукла лінійна комбінація двох процесів з вагами $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ описує одночасне та незалежне функціонування цих процесів з інтенсивностями α та β. Якщо для будь-яких процесів таке спільне функціонування технологічно здійсненне, то у межах технологічної множини T можна здійснити щонайменше зважену суму вихідних випусків за рахунок щонайбільше відповідно зваженої суми заданих витрат.

III. *Незворотність виробничих процесів* (якщо процес виробництва технологічно здійсненний, то зворотний процес, при якому виробляються як продукти початкові витрати з початкових випусків, нездійсненний): (і) у варіанті із запасами: (x, y) необоротний, якщо $(x, y) \in T$, але $(y, x) \notin T$; (іі) у варіанті з потоками: x необоротний, якщо $x \in T$, але $(-x) \notin T$.

IV. *Замкненість технологічної множини.* У більшості економічних ситуацій доцільно вважати, що коли деякий вектор витрат та випусків можливо з будь-якою точністю наблизити технологічно можливим вектором, то і сам цей вектор є технологічно можливим.

V. *Закон незмінності питомого випуску, незалежно від масштабів виробництва.* Цей закон означає, що T є конусом, тобто $T \supset \alpha T$ для будь-якого числа $\alpha \geq 0$. Таким чином, пропорційне збільшення при $\alpha > 1$ (зменшення при $\alpha < 1$) витрат у відношенні α веде до відповідного збільшення (зменшення) випусків у тому самому відношенні. Якщо закон незмінного питомого випуску порушується, то деякі додатні кратні від технологічно припустимого процесу можуть бути вже не припустимими, хоча з математичної, а не технологічної точки зору вони потенційно можливі.

Зауважимо, що завжди $T \subset \boldsymbol{R}^s$ для деякого s і нульова точка в $\boldsymbol{R}^s$ відповідає бездіяльності, яка можлива при будь-якій реальній технології. Отже, природно вважати, що T завжди містить нульовий вектор. Крім цього, у варіантів з потоками відсутність «рога достатку» можна описати рівністю: $T \cap \boldsymbol{R}^s_+ = \{0\}$, а необоротність процесів у T — рівністю: $T \cap (-T) = \{0\}$.

Поряд з виробничо-технологічними множинами у сучасній математичній економіці вживається й інший загальний варіант опису виробництва (виробника) — за допомогою технологічного багатозначного відображення F: $\boldsymbol{R}_+^m \to 2^{\boldsymbol{R}_+^n}$. Тоді довільна точка графіка $\Gamma(F)$ цього відображення, тобто пара (r, x), де $r \in \boldsymbol{R}_+^m$, $x \in F(r)$, є певним виробничим процесом у попередньому розумінні.

При векторі цін p на продукцію у тому випадку, коли розглядається такий рівень загальності (агрегації) моделювання, що продукція виробництва та фактори виробництва якісно не відрізняються, тобто розглядається один ринок, де вони продаються та купуються, і є n видів товарів, прибуток виробника від процесу (r, x) дорівнює $p(x - r)$. Виробник, звичайно, кожного разу вибирає такий виробничий процес $(r, x) \in \Gamma(F)$, при якому $p(x - r) = \max\limits_{(r', x') \in \Gamma} p(x' - r')$.

Називатимемо такий процес (r, x) **оптимальним** при цінах p. Тоді **функцією пропозиції** виробника називається багатозначне відображення $\Psi(p) = \{x - r : (r, x)$ — оптимальний процес при цінах $p\}$.

Технологічна множина T виробництва у розглянутому підході визначається рівністю $T = \{x - r:\ r \in \boldsymbol{R}_+^n,\ x \in F(r)\}$. Елементи множини T іноді називають ще **виробничими планами.** При розумних обмеженнях у більшості випадків байдуже — розглядати графік $\Gamma(F)$ багатозначного відображення $F(r)$ чи відповідну технологічну множину T, оскільки нас цікавить лише чистий (кінцевий) продукт виробництва у статичному варіанті моделі.

Кожного споживача h будемо характеризувати його функцією доходу $K_h(p)$ при цінах p та багатозначною функцією попиту $\Xi_h(p)$. Виробник e характеризується множиною $T_e \subset \boldsymbol{R}^n$ своїх виробничих планів та функцією пропозиції $\Psi_e(p)$, $e = 1, \ldots, E$. Множина T_e вважається компактною (її замкненість обумовлювалася у властивості IV, а обмеженість означає всього лишень неможливість виробництва в дуже великих масштабах). Дохід $K_h(p)$ споживача h складається з плати за продаж ним початкового запасу благ b_h (нагадаємо, що ми розглядаємо агреговану модель) (нехай за це одержано величину pb_h) та деякого доходу $I_h(p)$ від участі споживача як власника певної частки виробництва. Таким чином,

$$K_h(p) = pb_h + I_h(p), \quad h = 1, \ldots, H.$$

Технологічною множиною економіки називається алгебраїчна сума технологічних множин T_e всіх виробників:

$$T = \sum_{e=1}^{E} T_e = \left\{ z = \sum_{e=1}^{E} z_e :\ z_e \in T_e \right\}.$$

Функцією сукупної пропозиції виробничого сектора економіки $\Psi(p)$ називається сума $\sum_{e=1}^{E} \Psi_e(p)$: $\Psi(p) = \sum_{e=1}^{E} \Psi_e(p)$.

Нехай $\Psi * (p) = \{z:\ z \in T,\ pz = \max\limits_{z' \in T} pz'\}$ — множина планів, оптимальних з точки зору всього виробничого сектора.

***Теорема* 1.** *Плани, оптимальні з точки зору всього виробничого сектора, є оптимальними і з точки зору кожного виробника, тобто* $\Psi * (p) = \sum_{e=1}^{E} \Psi_e(p) = \Psi(p)$.

Доведення. Справді, нехай $z_0 \in \Psi*(p)$, $z_0 = \sum_{e=1}^{E} z_e$, $z_e \in T_e$ і $z'_e \in \Psi_e(p)$. Тоді $pz_0 = \sum_{e=1}^{E} pz_e \le \sum_{e=1}^{E} pz'_e = p\left(\sum_{e=1}^{E} z'_e\right) \le pz_0$ і, отже,

$$\sum_{e=1}^{E} pz_e = \sum_{e=1}^{E} pz'_e .$$

Оскільки $pz_e \le pz'_e$, то $pz_e = pz'_e$, $e = 1, \ldots, E$, та $z_e \in \Psi_e(p)$ для всіх e. Звідси: $z_0 \in \Psi*(p)$, тобто $\Psi*(p) \subset \Psi(p)$, Зворотне включення очевидне. Теорему 1 доведено.

Таким чином, можна характеризувати весь виробничий сектор економіки сукупною технологічною множиною T та функцією сукупної пропозиції $\Psi(p)$, забувши про окремих виробників.

У моделі вважається, що весь дохід виробничого сектора поділяється між споживачами, тобто $\sum_{h=1}^{H} I_h(p) = pz$, $z \in \Psi(p)$.

Означення 1. *Набір* $(z_1^*, \ldots, z_E^*, \xi_1^*, \ldots, \xi_H^*, p^*)$ *невід'ємних векторів називається* ***конкурентною рівновагою в економіці****, якщо*

$$z_e^* \in \Psi_e(p^*), \quad e = 1, \ldots, E, \quad \xi_h^* \in \Xi_h(p^*), \quad h = 1, \ldots, H, \tag{11}$$

і при цьому виконуються умови балансу попиту та пропозиції:

$$\sum_{e=1}^{E} z_e^* + \sum_{h=1}^{H} b_h \ge \sum_{h=1}^{H} \xi_h^* \tag{12}$$

$$p^*\left(\sum_{e=1}^{E} z_e^* + \sum_{h=1}^{H} b_h\right) = p^*\left(\sum_{h=1}^{H} \xi_h^*\right). \tag{13}$$

Означення 2. Компонента p^* конкурентної рівноваги в означенні 1 називається вектором **рівноважних цін**. Багатозначне відображення $\Xi(p) = \sum_{h=1}^{H} \Xi_h(p)$ називається **функцією сукупного попи-**

ту, а відображення $\varphi(p) = b + \sum_{e=1}^{E}\Psi_e(p)$, $b = \sum_{h=1}^{H} b_h$ — ***функцією сукупної пропозиції.***

Теорема 2. *Функції Ξ (p) та $\varphi(p)$ пов'язані співвідношенням:*

$$p\xi \le pz, \qquad \xi \in \Xi(p),\ z \in \varphi(p). \tag{14}$$

Доведення. Якщо $\xi \in \Xi(p)$, $\xi = \sum_{h=1}^{H}\xi_h$, $\xi_h \in \Xi_h(p)$, $h = 1, \dots, H$, то за означенням Ξ_h маємо: $p\xi_h \le pb_h + I_h(p)$. Звідси $p\xi \le pb + \sum_{h=1}^{H} I_h(p)$.

З іншого боку, якщо $z \in \varphi(p)$, то $z = b + \sum_{e=1}^{E} z_e$, $z_e \in \Psi_e(p)$. Нехай $z_0 = \sum_{e=1}^{E} z_e$. Тоді $z_0 \in \Psi(p)$ та $\sum_{h=1}^{H} I_h(p) = pz_0(p)$. Звідси $pz = pb + \sum_{h=1}^{H} I_h(p)$, що й доводить теорему 2.

Співвідношення (14) називається **законом Вальраса у широкому значенні.** Цей закон означає, що вартість попиту не перевищує вартості пропозиції при жодних цінах $p \ge 0$, $p \ne 0$. Заміна нерівності на рівність в (14) дає **закон Вальраса у вузькому значенні.**

Цим завершена побудова загальної моделі рівноваги Вальраса. Вкажемо на економічне тлумачення основних елементів моделі. Умова (11) означає, що економічні агенти, розглядаючи ціни p^* як задані, діють найкращим для себе чином. Нерівність (12) означає, що сукупний попит на товари (блага) не перевищує сукупної пропозиції. Рівність (13) показує, що вартість куплених благ дорівнює вартості проданих благ. Зокрема, якщо в (12) для якоїсь компоненти i виконується строга нерівність, тобто пропозиція i-го блага перевищує попит на нього, то відповідна компонента p вектора рівноважних цін дорівнює 0, тобто i-те благо є вільним.

Використовуючи функції Ξ і φ, можна інакше сформулювати визначення конкурентної рівноваги.

Означення 3. *Набір* (z^*, ξ^*, p^*) *є конкурентною рівновагою, якщо*

$$z^* \in \varphi(p^*), \qquad \xi^* \in \Xi(p^*), \qquad \xi^* \le z^*, \quad p^*\xi^* = p^*z^*. \qquad (15)$$

3.5.1. Умова існування рівноваги за Вальрасом у неокласичному підході

В неокласичній моделі економіки, яка розглядалася вище, споживачі та виробники однозначно визначають свої плани споживання $x_h = (x_i^h)_{i=1,n}$, $h = 1, \ldots, H$, та плани виробництва $q^e = (q_j^e)_{j=1,n}$, $e = 1, \ldots, E$ при будь-яких цінах $p = (p_i)^{i=1,n}$.

Векторна функція

$$E(p) = (E_i(p))_{i=1,n} = \left(\sum_{h=1}^{H} x_i^h(p) - \sum_{e=1}^{E} q_i^e(p)\right)_{i=1,n}$$

називається **функцією надлишкового попиту.** Щодо неї робляться такі припущення.

I. *Функція* $E(p)$ *однорідна нульового степеня відносно всіх можливих цін,* $E(\alpha p) = E(p)$ *для всіх* $\alpha > 0$. Отже, при пропорційній зміні всіх цін попит та пропозиція не змінюються (мають значення тільки відносні ціни). Це узгоджується з неокласичними моделями поведінки споживачів та виробників. Дана властивість дає змогу обмежитися розглядом множини цін у вигляді стандартного цінового симплекса $S_n = \{p\colon\ p \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$.

II. *Функція* $E(p)$ *однозначна та неперервна по* p. Тут однозначність узгоджується з неокласичними моделями споживання та виробництва, а умова неперервності, що грає важливу технічну роль у доведенні існування рівноваги, не узгоджується з аксіомою ненасичуваності моделі поведінки споживачів. Справді, можна вважати, що ціни належать симплексові S_n, який є опуклим компактом в $\boldsymbol{R}_+^n$. Тому образ $E(S_n)$ є обмеженою множиною в $\boldsymbol{R}^n$ і при $p_i \to 0$ для деяких i та E_i буде прямувати до скінченної границі, що не відповідає аксіомі ненасичуваності.

III. *Функція* $E(p)$ *задовольняє закону Вальраса*: $pE(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i E_i(p) = 0$ *для* $p \in S_n$. Ця властивість узгоджується з неокласичною моделлю економіки, де весь сумарний дохід дорівнює сумарним витратам.

Означення 4. *Система цін* p^* *у моделі, що розглядається, називається* ***рівноважною****, якщо виконуються умови*:

$$p^* \geq 0, \qquad E(p^*) \leq 0. \tag{16}$$

З (16) випливає, що при p^* надлишкова пропозиція можлива лише при нульовій ціні, тобто коли для деякого i_0 $E_{i_0}(p^*) < 0$, то $p^*_{i_0} = 0$. Справді, з (16) випливає, що всі доданки суми $\sum_{i=1}^{n} p_i^* E_i(p^*)$ недодатні. Якщо $p^*_{i_0} > 0$, то $p^*_{i_0} E_{i_0}(p^*) < 0$ і вся сума від'ємна, тобто $p^* E(p^*) < 0$, що суперечить закону Вальраса (III).

Оскільки існування товарів з надлишковою пропозицією при нульовій ціні вважається економічно безглуздим, то можливість нерівності в означенні рівноваги (16) не суперечить економічному змісту.

***Теорема* 3.** *Якщо в неокласичній моделі ринкової економіки функція надлишкового попиту* $E(p)$ *задовольняє умови* I – III, *то система рівноважних цін* p^* *існує.*

Цю теорему подаємо без доведення.

Зауважимо, що якщо з припущень I – III відносно функції надлишкового попиту випливає існування рівноважних цін p^*, то для доведення їх єдиності цих припущень замало. Виявляється, що рівновага p^* — єдина, коли загальна функція попиту задовольняє слабкій аксіомі виявленої переваги.

Іншою додатковою умовою, що забезпечує єдиність рівноважних цін p^*, є «умова стійкості Хікса», який розглядав цю умову при дослідженні стійкості рівноваги. Умова Хікса формулюється для диференційованих функцій надлишкового попиту у термінах відповідної матриці Якобі. Візьмемо за одиницю виміру товар n і припустимо, що надлишковий попит $E_n(p) \to \infty$ коли $p_n \to 0$ незалежно від цін на інші товари. Матриця Якобі подібної нормованої системи визначається рівністю $J = (\partial E_i(p)/\partial p_j)_{i=1,n-1}^{j=1,n-1}$. Рівновага p^* є єдиною, коли головні мінори матриці J змінюються знаками так, що мінори парних (непарних) номерів рядків та стовпців J є додатними (від'ємними).

3.5.2. Процеси формування цін

З економічної точки зору стан рівноваги є необхідною умовою для стабільного та нормального функціонування економіки. З наведених вище фактів про конкурентну рівновагу не випливає, що вона може бути досягнута автоматично, тобто шляхом неузгоджених дій економічних агентів (учасників економічних процесів виробництва та споживання), які пильнують лише свої власні інтереси. Виникає така важлива проблема: чи існує можливість досягнення стану рівноваги в реальних економічних системах?

Свого часу Л. Вальрас, висунувши вперше концепцію економічної рівноваги, запропонував процес поступової зміни цін у напрямку рівноваги, який він назвав «намацуванням». З точки зору сучасної теорії динамічних систем для того, щоб намацування цін Вальраса способом проб та помилок досягло мети, тобто стану рівноваги, необхідно, аби цей стан був глобально стійким.

Як приклад найпростішого процесу формування цін наведемо вже відому нам **павутиноподібну модель** намацування рівноважної ціни. До того ж тепер ще й коротко опишемо її в термінах сукупного попиту та сукупної пропозиції.

Нехай маємо один продукт, попит та пропозиція якого описуються функціями сукупного попиту $\Xi(p)$ та сукупної пропозиції $\varphi(p)$, які є однозначними, неперервними та визначеними для всіх $p > 0$, причому $\Xi(p)$ монотонно спадає, $\varphi(p)$ монотонно зростає, $\lim\limits_{p\to 0} \Xi(p) = \infty$, $\lim\limits_{p\to\infty} \Xi(p) = 0$, $\lim\limits_{p\to 0} \varphi(p) = 0$. Для єдиного товару в стані рівноваги, очевидно, $p \neq 0$ і, отже, цей стан характеризується рівністю $\Xi(p^*) = \varphi(p^*)$, де p^* — рівноважна ціна. Внаслідок припущень щодо функцій $\Xi(p)$ та $\varphi(p)$, ця рівність має єдиний розв'язок, тому стан рівноваги (p^*, x^*, z^*) описується рівностями: $x^* = \Xi(p^*) = \varphi(p^*) = z^*$.

Процес намацування для нашої моделі такий. У початковий момент на продукт призначається ціна p^0. Якщо $\Xi(p^0) > \varphi(p^0)$ (попит перевищує пропозицію), то ціна збільшується до величини p^1, при якій виконується рівність $\Xi(p^1) = \varphi(p^0)$. Якщо ж $\Xi(p^0) < \varphi(p^0)$ (надлишкова пропозиція), то ціна знижується так, щоб попит збільшився до величини пропозиції. Якщо t — дискретні моменти часу, в які відбуваються зміни цін, то різницеве рівняння, що описує павутиновидний процес намацування, має вигляд: $\Xi(p^t) = \varphi(p^{t-1})$, $t = 1, 2, \ldots$. Неважко переконатися, що такий процес дає послідовність цін p^t, яка збігається до рівноважної ціни p^* у тому випадку, коли еластичність попиту перевищує еластичність пропозиції.

Для загального випадку, тобто при наявності n видів товарів, П. Самуельсон запропонував схему моделювання динаміки цін у неперервному часі на реальному ринку товарів. У цій моделі припускається, що функція надлишкового попиту $E(p)$ однозначна та неперервна при всіх додатних векторах цін: $p > 0$. Модель описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dp_i}{dt} = \lambda_i E_i(p), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

в якій додатне число λ_i називається **коефіцієнтом налаштовування ціни** на i-тий товар.

Система (17) моделює динамічний процес формування цін на товари таким чином: якщо $E_i(p) > 0$ (тобто попит на товар i перевищує пропозицію), то ціна на товар i зростає; якщо ж $E_i(p) < 0$, то ціна спадає.

З теорії систем диференціальних рівнянь відоме таке. (i) Для кожної точки p^0 з відкритої множини P, $P \subset \boldsymbol{R}_+$, існує розв'язок $p(t)$ задачі Коші $\frac{dp_i}{dt} = \lambda_i E_i(p)$, $p_i(0) = p_i^0$, $i = 1, \ldots, n$, який визначений на певному проміжку $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, і при цьому $p(t) \in P$, $t \in [0, \varepsilon]$. Розв'язок необов'язково єдиний. (ii) Якщо локальний розв'язок $p(t)$ задачі Коші на всій області свого визначення набуває значення з деякої обмеженої підмножини Γ множини P, то $p(t)$ можна продовжити на всю піввісь $[0, \infty)$.

Означення 5. *Процес формування цін (17) називається* ***глобально стійким,*** *якщо при довільному $p^0 > 0$ існує границя $\lim_{t\to\infty} p(t) = \overline{p}$, де $\overline{p}$ — деякий вектор рівноважних цін, що залежить від p^0.*

Означення 6. *Функція надлишкового попиту $E(p)$ називається* ***нерозкладною,*** *якщо для будь-яких векторів $p, p' \in R_+^n$ з умов $p \geq p'$, $p \neq p'$ та $I = \{i: p_i = p_i'\} \neq \varnothing$ випливає, що $E_i(p) \geq E_i(p')$ для всіх $i \in I$, і при цьому принаймні для одного такого i дана умова має вид строгої нерівності.*

Зрозуміло, що нерозкладність є підсиленням вимоги валової замінності.

***Теорема* 4.** *Нехай для моделі динаміки цін (17) виконуються такі умови: 1) ціни p належать множині $P = \{p \in R^n,\ p > 0\}$; 2) функція $E(p)$ однозначна, неперервна на P та нерозкладна; 3) виконується закон Вальраса у вузькій формі $p \cdot E(p) = 0$; 4) функція $E(p)$ однорідна нульового степеня, $E(\alpha p) = E(p)$ при $\alpha > 0$; 5) існує рівноважний вектор цін $\overline{p} \in P$; 6) функція $E(p)$ обмежена знизу на P. Тоді процес формування цін (17) глобально стійкий.*

Теорему 4 подаємо без доведення.

3.6. Приклад задачі з розв'язанням до розділу 3

Задача. Ринок винограду в Києві можна описати такими функціями: $Q_d = 600 - 10 \cdot P$; $Q_s = 320 + 4 \cdot P$. Яка цінова еластичність попиту і пропозиції винограду в Києві, якщо ринок перебуває в рівновазі? Який характер стійкості рівноваги на цьому ринку?

Розв'язання. Цінові еластичності знаходимо в точці рівноваги. Рівновага визначається рівністю попиту і пропозиції товару:

$$Q_d = Q_s, \quad 600 - 10 \cdot P = 320 + 4 \cdot P.$$

Звідси отримуємо рівноважну ціну: $P^* = 20$ і рівноважний об'єм продажу: $Q^* = 400$.

Цінова еластичність попиту дорівнює: $E_d = \frac{\partial Q_d}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_d} = -0{,}5$,

а цінова еластичність пропозиції: $E_s = \frac{\partial Q_s}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_s} = 0{,}2$. Як бачимо, і попит, і пропозиція товару є нееластичними за ціною. Оскільки $|E_d| > E_s$, то рівновага на ринку винограду є стабільною.

Задачі для самостійної роботи

1. На початку року шоколад продавався за ціною 3 грн. за плитку. Еластичність попиту на цей шоколадні плитки дорівнює (– 2). На скільки потрібно було б змінити ціну шоколадних плиток, щоб величина попиту зросла з 50 штук на день до 100?

2. Відомо, що еластичність попиту на сіль дорівнює (– 0,5), а еластичність пропозиції за ціною дорівнює 0,4. На ринку було продано 400 кг солі за ціною 2 грн. за кілограмову пачку. Яка кількість солі була б продана, якби ціна пачки становила 3 грн.?

3. Функції індивідуального попиту покупців *A*, *B* і *C* виражаються відповідно рівняннями:

$$Q_a = 18 - 4 \cdot P; \quad Q_b = 20 - 5 \cdot P; \quad Q_c = 17 - 2 \cdot P.$$

Функція ринкової пропозиції $Q_s = 4 \cdot P - 5$. Визначте рівноважну ринкову ціну і відповідні їй величини індивідуального попиту *A*, *B* і *C*.

4. На минулому тижні фірма продала 100 тис. шт. троянд за ціною 1,5 грн. за шт. На цьому тижні президент фірми вирішив знизити ціну до 1,2 грн. за шт. Чи правильно він діяв, якщо цінова еластичність попиту дорівнює (– 2,5)? Який прибуток чи збитки отримає фірма? Віце-президент не був згодний з президентом і запропонував свій план: підняти ціну до 1,7 грн. за шт. Яким був би прибуток чи збитки, якби ухвалили план віце-президента?

5. Еластичність попиту за ціною на концерти для Марії дорівнює (– 1). Еластичність її попиту за доходом дорівнює 3. Перехресна еластичність за ціною між концертами та відвідинами басейну дорівнює 2. У 2004 році Марія відвідала 100 концертів. У 2006 році ціна квитка на концерт зросла на 15%, ціна одного відвідування басейну впала на 5%, а дохід Марії зріс на 10%. Яку кількість концертів відвідала дівчина у 2006 році?

6. Висів поліпшеного сорту пшениці дасть змогу фермерові знизити його сумарні витрати на 2% і збільшити врожай на 6%. Проте збільшення пропозиції пшениці на ринку призведе до зменшення її ціни на 4%. Чи є попит на пшеницю еластичним? Чи буде фермер у виграші?

7. Еластичність попиту за доходом на продовольчі товари дорівнює 0,8. Спочатку населення витрачало 50% своїх доходів на продовольчі товари. Припустимо, що доходи збільшилися на 10%. Визначити частку витрат на продовольчі товари в доходах населення.

8. Попит споживачів на певний товар має вигляд: $Q_d = max\{-\frac{3}{2}\cdot P+6; -\frac{10}{3}\cdot P+10\}$, а пропозиція товару: $Q_s = 5\cdot P - 1$. Визначити: а) рівноважну ціну та обсяг ринкових угод; б) еластичність товару в точці рівноваги ринку.

9. Функції індивідуальних попитів споживачів деякого товару мають відповідний вигляд: $Q_i = 1{,}5i - \frac{2(i-1)}{3}P$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Ринкова пропозиція товару описується функцією: $Q_s = 1{,}5P - 0{,}5$. Визначити рівноважну ринкову ціну даного товару та відповідні їй величини індивідуальних попитів споживачів.

10. Для функцій попиту і пропозиції виду $Q_d = \frac{b}{P}$ та $Q_s = d\cdot P^2$, в яких параметри $b, d > 0$, знайти ренту виробника і споживчий надлишок.

11. Нехай функція надлишкового попиту $E(p)$, $p \in R^n$, $p > 0$, визначається рівністю: $E_i(p) = \frac{\overline{p}_i}{p_i}\sum_{i=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{n}\overline{p}_j$, де $\overline{p} = (\overline{p}_i)_{i=1}^n$, $\overline{p} > 0$ — деякий фіксований вектор. Перевірити виконання таких властивостей функції $E(p)$: 1) $E(p)$ — однорідна нульового степеня; 2) $E(p)$ — нерозкладна; 3) для неї виконується закон Вальраса у вузькій формі; 4) якщо $\widetilde{p}$ — вектор рівноважних цін для $E(p)$, то $\widetilde{p} = \alpha\overline{p}$ для деякого $\alpha > 0$.

РОЗДІЛ 4. БАГАТОПРОДУКТОВА МОДЕЛЬ «ВИТРАТИ – ВИПУСК» ЛЕОНТЬЄВА

При написанні цього розділу використовувалися джерела [2], [3] і [8].

4.1. Міжгалузевий баланс

Статична модель «витрати-випуск» або інакше модель міжгалузевого балансу (МГБ) є основою багатьох лінійних моделей виробничого сектора економіки. Вона базується на понятті «чиста галузь» (галузь):

1) галузь випускає лише один продукт;
2) кожен продукт випускається лише однією галуззю;
3) кожна галузь має єдину технологію;
4) не допускається заміщення ресурсів.

Припустимо, що весь виробничий сектор народного господарства (н/г) розбито на n чистих галузей. В процесі виробництва кожна з галузей потребує, власне кажучи, продукцію, вироблену, іншими галузями. Отже, виробляється n продуктів, $n > 1$. І нехай в масштабі н/г маємо балансовий звіт за підсумками певного періоду, відображений у такій таблиці:

Таблиця

Випуск / **Витрати**		**Розподіл випуску між галузями** 1 2 ... j ... n	**Кінцева продукція (споживання)**	**Валовий випуск**
Розподіл продукції i-ої галузі на потреби інших галузей	**1**	$x_{11}\ x_{12}\ \dots\ x_{1j}\ \dots\ x_{1n}$	y_1	x_1
	2	$x_{21}\ x_{22}\ \dots\ x_{2j}\ \dots\ x_{2n}$	y_2	x_2
	...	....	...	...
	i	$x_{i1}\ x_{i2}\ \dots\ x_{ij}\ \dots\ x_{in}$	y_i	x_i
	...	....	...	...
	n	$x_{n1}\ x_{n2}\ \dots\ x_{nj}\ \dots\ x_{nn}$	y_n	x_n
Додана вартість		$v_1\ v_2\ \dots\ v_j\ \dots\ v_n$		
Валовий продукт (випуск)		$x_1\ x_2\ \dots\ x_j\ \dots\ x_n$		

Тут x_{ij} — об'єм продукту i-ої галузі, витраченого j-ою галуззю у виробничому процесі; x_i — загальний обсяг продукції i-ої галузі; y_i — об'єм i-ої продукції, що витрачається у невиробничій сфері (кінцеве споживання); v_j — додана вартість j-ої продукції (прибуток, амортизаційні відрахування, оподаткування, зарплата за наймом тощо).

Оскільки таблиця має балансовий характер, то для кожної з галузей можна записати:

$$x_i = (x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}) + y_i\,, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

а для народного господарства загалом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \tag{2}$$

Зауважимо, що баланс (1) можна отримувати як в натуральному, так і у вартісному вираженні.

Аналогічно визначається баланс продукції за стовпчиком: об'єм випущеної продукції дорівнює сумарним затратам:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j\,, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Цей баланс може мати лише вартісне вираження. Загалом для народного господарства:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j\,. \tag{4}$$

Об'єм валового суспільного продукту як сума розподіленої продукції галузей дорівнює об'єму валового суспільного продукту як сумі всіх виробничих витрат. Тому з (2) і (4) маємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j\,.$$

Звідси очевидно:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \tag{5}$$

(об'єми кінцевого продукту за матеріально-речовим та вартісним складом завжди рівні).

Умовою взаємно-однозначної відповідності між міжгалузевими балансами, які використовують різні показники (вимірники), є незмінне співвідношення між масштабами цих показників за кожним видом продукції. Наприклад, якщо в одному МГБ (в натуральному вираженні) електроенергія вимірюється в кіловат-годинах, а в іншому (у вартісному вираженні) — в гривнях, то кожній гривні електроенергії завжди повинна відповідати одна й та сама кількість кіловат-годин, як би ця енергія не використовувалася. Отже, показники МГ матеріального балансу у вартісному вираженні, які задовольняють вказану умову, позначимо:

$$\tilde{x}_j, \quad \tilde{y}_j, \quad \tilde{x}_{ij}, \quad \tilde{v}_j.$$

Для МГБ в натуральному вираженні замінимо попередні позначення. Тоді замість (1) і (3) відповідно матимемо:

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} + \tilde{y}_i, \tag{6}$$

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij} + \tilde{v}_j. \tag{7}$$

Якщо p_i — єдина (узгоджена) ціна i-го виду продукції ($i = 1, \ldots, n$), то

$$\tilde{x}_i = p_i \cdot x_i; \qquad \tilde{y}_i = p_i \cdot y_i; \qquad \tilde{x}_{ij} = p_i \cdot x_{ij}. \tag{8}$$

4.2. Модель Леонтьєва

Для побудови математичної моделі вирішальне значення має припущення про те, що x_{ij} є функцією від об'єму виробництва цієї продукції: $x_{ij} = \varphi(x_j)$.

У найпростішій моделі використовується припущення про пропорційну залежність між витратами та об'ємом виробництва, тобто вводяться лінійно-однорідні функції виробничих витрат:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j. \tag{1}$$

Коефіцієнт пропорційності $a_{ij} \geq 0$ називається *коефіцієнтом прямих виробничих витрат* (технологічним коефіцієнтом) продукції i на виробництво одиниці продукції j.

Підставляючи вираз (1) в баланс (1) з підрозділу 4.1, маємо:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Позначимо:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}, \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}},$$

$A = \{a_{ij}\}_1^n$ — квадратна матриця коефіцієнтів прямих виробничих витрат (технологічна матриця). Тоді у векторно-матричній формі матимемо:

$$x = Ax + y, \qquad x \ge 0 \tag{2}$$

Це і є **модель Леонтьєва.**

Вище було показано, що при використанні єдиної ціни на кожний вид продукції та однакових методах обміну досягається взаємно-однозначна відповідність між показниками міжгалузевих балансів у натуральному та вартісному виразеннях. Беручи до уваги (1), маємо:

$$\widetilde{x}_{ij} = \widetilde{a}_{ij} \cdot \widetilde{x}_j, \qquad \widetilde{a}_{ij} = \frac{\widetilde{x}_{ij}}{\widetilde{x}_j} = \frac{p_i x_{ij}}{p_j x_j} = \frac{p_i a_{ij} x_j}{p_j x_j} = a_{ij} \frac{p_i}{p_j} \tag{3}$$

або

$$\widetilde{x} = Px; \quad \widetilde{y} = Py; \quad \widetilde{A} = PAP^{-1},$$

де $P = \{p_i\}_1^n$ — діагональна матриця цін, P^{-1} — діагональна матриця величин, обернених цінам. Отже, матриці A і $\widetilde{A}$ подібні (тобто мають однакові власні числа).

4.3. Модель міжгалузевої залежності цін

Вважатимемо, що додана вартість $\widetilde{v}_j$ в j-ій продукції пропорційна об'єму продукції:

$$\widetilde{v}_j = r_j \cdot \widetilde{x}_j,$$

де r_j — коефіцієнт доданої вартості в загальній вартості продукції. Тоді одержимо:

$$\widetilde{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \widetilde{x}_j + r_j \cdot \widetilde{x}_j.$$

Природно припустити, що $\widetilde{x}_j \ne 0$, тоді:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} + r_j. \qquad (1)$$

Помножимо (1) справа на p_j $(p_j \neq 0)$:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} p_j + r_j \cdot p_j.$$

Враховуючи співвідношення (3) з підрозділу 4.2, маємо:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} p_j^{-1} p_j + r_j \cdot p_j.$$

Тобто:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} + r_j \cdot p_j.$$

Позначимо як $s_j = r_j \cdot p_j$ додану вартість в ціні j-ої продукції та введемо в розгляд вектори $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ і $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Тоді матимемо **модель врівноважених цін** (модель МГ залежності цін):

$$p = pA + s, \qquad p \geq 0. \qquad (2)$$

Модель (2) є по суті двоїстою до моделі Леонтьєва (2) з підрозділу 4.2. Пара двоїстих задач, як легко збагнути, має вигляд:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} s_j x_j \to max, \\ x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n; \end{gathered} \qquad (3)$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \to min, \\ p_j - \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} = s_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \\ p_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \end{gathered} \qquad (4)$$

Якщо x^* та p^* — розв'язки відповідних задач (3 та (4), то

$$\sum_{j=1}^{n} s_j x_j^* = \sum_{i=1}^{n} p_i^* y_i ,$$

тобто об'єм створеної в народному господарстві продукції (за вартісним складом) дорівнює сумарній оцінці кінцевої продукції, яка використовується. (Вартість кінцевого споживання дорівнює сумарній доданій вартості.)

4.4. Аналіз продуктивності моделі «витрати – випуск»

Спочатку введемо поняття продуктивності.

Означення 1. *Якщо для будь-якого невід'ємного вектора кінцевого споживання $y \geq 0$ система (2) з підрозділу 4.2 сумісна (має розв'язок), то відповідну модель Леонтьєва (технологічну матрицю A) називають* ***продуктивною.***

Означення 2. *Матриця A називається* ***продуктивною****, якщо існує вектор $x \geq 0$, який дає змогу отримати невід'ємний вектор кінцевої продукції:*

$$(E - A) \cdot x = y \geq 0.$$

Термін «продуктивність» можна замінити синонімом «незбитковість» або «рентабельність».

Для подальшого викладу важливим є поняття нерозкладності матриці.

Означення 3. *В теорії матриць* ***розкладними*** *називаються такі матриці A, які одночасною перестановкою рядків та стовпчиків зводяться до вигляду:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & * \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

де A_{11}, A_{22} — квадратні блоки, що містять ненульові елементи; 0 — *блок, який містить лише нулі,* * — *блок, елементи якого можуть набувати будь-якого значення.*

Означення 4. *Матриця A* ***нерозкладна****, якщо для неї не існує таких одночасних перестановок рядків та стовпчиків, які б звели її до вигляду* (1).

Економічно нерозкладність означає те, що кожна галузь прямо чи опосередковано використовує продукцію всіх інших галузей, а її продукція прямо чи опосередковано використовується у виробництві продукції всіх інших галузей, тобто всі пари галузей перебувають у двосторонньому зв'язку.

***Теорема* 1** (Фробеніуса–Перона) (про спектральні властивості невід'ємної нерозкладної матриці). *Нехай матриця A розмірності $n \times n$ невід'ємна і нерозкладна, а $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$ — множина її власних чисел ($m \le n$). Тоді у множині $\sigma(A)$ існує додатне число λ_A, яке є простим коренем характеристичного рівняння матриці A і*

$$\left|\lambda_k\right| \le \lambda_A, \qquad k = 1, 2, \dots, m.$$

Крім цього, власному числу λ_A відповідає єдиний (з точністю до скалярного множника) власний вектор x_A, для якого $(x_A)_i \ne 0$, $\operatorname{sign}(x_A)_i = \operatorname{sign}(x_A)_j$ для всіх $i, j = 1, \dots, n$, тобто вектор x_A можна вибрати додатним: $x_A > 0$.

Теорему 1 подаємо без доведення.

Зазначимо, що число λ_A називається **числом Фробеніуса** матриці A, а x_A — вектором Фробеніуса матриці A:

$$Ax_A = \lambda_A x_A.$$

Приклад. Знайдемо λ_A, x_A, p_A для матриці другого порядку $A=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Характеристичне рівняння цієї матриці має вигляд: $\lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}5 = 0$, $\sigma(A) = \{0{,}5; 1\}$. Тому $\lambda_A = 1$. Вектори x_A і p_A знаходимо із таких систем: $(A - \lambda_A E_2)x = 0$ та $p\,(A - \lambda_A E_2) = 0$, тобто

$$\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & -0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{та} \quad (p_1, p_2)\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & -0{,}3 \end{pmatrix} = 0.$$

Легко визначаємо, наприклад, $x_A = (3, 2)^{\mathrm{T}}$ і $p_A = (1, 1)$.

Сформулюємо для початку достатні ознаки продуктивності моделі «затрати-випуск».

***Теорема* 2.** *Нехай система* (2) з *підрозділу 4.2 має розв'язок при деякому $y > 0$, тоді модель Леонтьєва продуктивна. Інакше кажучи, якщо деякий додатний кінцевий попит можна задовольнити в моделі Леонтьєва* (2) з *підрозділу 4.2, то вона продуктивна.*

Теорему 2 подаємо без доведення.

***Теорема* 3.** *Нехай:* 1) *матриця A невід'ємна і нерозкладна;* 2) *сума q_i елементів кожного її рядка не перевищує* 1:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1, \qquad i = 1, ..., n;$$

3) *хоча б для одного рядка* i_0: $q_{i_0} < 1$. *Тоді модель Леонтьєва, яка відповідає цій матриці, є продуктивною.*

Теорему 3 подаємо без доведення.

Теорема **4** (критерій продуктивності моделі «витрати-випуск»). *Для продуктивності моделі Леонтьєва* (2) з *підрозділу 4.2 необхідно і достатньо, щоб фробеніусове число* λ_A *матриці* A *задовольняло нерівність* $\lambda_A < 1$.

Теорему 4 подаємо без доведення.

Наведемо ще дві теореми щодо спектра довільної невід'ємної матриці A.

Теорема **5** (про спектр довільної невід'ємної матриці). *Якщо квадратна* $n \times n$ *матриця* A *невід'ємна, то вона має невід'ємне власне число* $\lambda_A \ge 0$, *яке є простим коренем характеристичного рівняння матриці* A, *і таке, що для будь-якого іншого її власного числа* λ: $|\lambda| \le \lambda_A$. *При цьому існує невід'ємний власний вектор* $x_A \ge 0$, *який відповідає* λ_A.

Теорему 5 подаємо без доведення.

Інша теорема дає змогу оцінити фробеніусове число λ_A матриці $A \ge 0$. Нехай $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Введемо позначення:

$$r = \min_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad R = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad s = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \quad S = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Теорема **6** (про оцінки для фробеніусового числа невід'ємної матриці A). *Якщо квадратна* $n \times n$ *матриця* $A \ge 0$, *то для її Фроленіусового числа виконуються такі нерівності:*

$$r \le \lambda_A \le R, \qquad s \le \lambda_A \le S. \tag{2}$$

А якщо матриця A *ще й нерозкладна, то всі ці нерівності строгі. Виняток лише у випадку, коли* $r = R$, $s = S$.

Теорему 6 теж подаємо без доведення.

Приклад. У попередньому прикладі легко обчислити: $r = 0{,}9$; $R = 1{,}1$; $s = 1$; $S = 1$. Тому $\lambda_A = 1$.

4.5. Динамічна модель Леонтьєва

В основі багатопродуктових балансових моделей «витрати–випуск» лежить відома динамічна модель Леонтьєва. Існує неперервна і дискретна форма цієї моделі. При цьому для теоретичного аналізу зазвичай використовується перша постановка, а за базу для прикладних задач береться друга. Розглянемо неперервну постановку.

Економіка описується певною галузевою структурою: нехай маємо n секторів (галузей), $n > 1$, кожний з яких випускає лише один вид продукту, і кожен продукт виробляється лише одним сектором.

Міжгалузеві потоки витрат продуктів описуються технологічною матрицею $A_{n \times n}$, яка вважається невід'ємною і невиродженою.

Зв'язок між інвестиціями і приростом випуску моделюється за допомогою матриці $B_{n \times n}$, яка теж є невід'ємною і невиродженою. Елемент b_{ij} матриці показує, скільки необхідно інвестувати продукту i, щоб збільшити випуск продукту j на «малу одиницю» за одиницю часу.

Модель є системою балансових рівнянь, що пов'язують випуск продуктів і напрямки їхнього використання: ринкова рівновага передбачає, що економіка має випускати стільки, щоб цього вистачило на покриття проміжного попиту на продукти, інвестиційного попиту і кінцевого споживання:

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) + c(t), \tag{1}$$

де $x(t)$ — вектор випуску продукції, $\dot{x}(t)$ — вектор похідних випуску, $c(t)$ — вектор кінцевого попиту (споживання).

Проаналізуємо зміст цього виразу. Перший член правої частини $Ax(t)$ — це проміжне споживання продуктів (вектор поточних виробничих витрат, які необхідні для забезпечення випуску продуктів обсягом $x(t)$). Другий доданок $B\dot{x}(t)$ — це інвестиції в галузевій структурі (кожна компонента цього вектора — інвестиційний попит на відповідний продукт). Якщо перші дві складові правої частини характеризують виробничі напрямки використання продуктів, то останній доданок — це невиробниче споживання, куди, взагалі кажучи, може бути віднесене не лише особисте (кінцеве) споживання населення. Наприклад, відкриту економіку, в якій існує продуктовий обмін із зовнішнім середовищем (експорт-імпорт), можна «закрити», включивши сальдо експорту-імпорту (так званий «чистий експорт») до складу кінцевого споживання. Такий прийом дає певну можливість для аналізу відкритих систем у межах моделі Леонтьєва, хоча й доволі укрупненого.

Якщо споживання задається екзогенно як деяка функція від часу, то маємо систему лінійних неавтономних диференціальних рівнянь, розв'язок якої буде залежати від виду функції $c(t)$. Для аналізу внутрішніх динамічних властивостей економічної системи вважатимемо споживання сталим $c(t) = c$, $c \geq 0$, тобто будемо розглядати автономні рівняння динаміки.

Перетворимо (1):

$$\dot{x}(t) = B^{-1}(E - A)x(t) - B^{-1}c. \tag{2}$$

Стаціонарний розв'язок цієї системи диференціальних рівнянь x_p знайдемо з умови:

$$B^{-1}(E - A)x(t) - B^{-1}c = 0,$$
$$x_p = (E - A)^{-1}BB^{-1}c = (E - A)^{-1}c.$$

Якщо задано початковий стан системи $x(0) = x_0$, то можемо записати розв'язок системи (2) у вигляді

$$x(t) = Ke^{\Lambda^*}K^{-1}(x_0 - x_p) + x_p, \tag{3}$$

де e^{Λ^*} — діагональна матриця з елементами e^{λ_i}, λ_i — власні числа матриці $B^{-1}(E - A)$, $i = 1, 2, ..., n$. Наприклад, для $n = 3$ і різних λ_i, $i = 1, 2, 3$, ця матриця матиме вигляд:

$$e^{\Lambda^*} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}.$$

K — матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці $B^{-1}(E - A)$.

Характер траєкторії $x(t)$ залежить від властивостей технологічних матриць A і B моделі. Подальший аналіз будемо проводити за умови, що матриця A продуктивна. З теорії лінійних моделей «витрата–випуск» відомо, що в цьому випадку матриця $(E - A)^{-1}$ (її називають *матрицею коефіцієнтів повних витрат*) є невід'ємною. Якщо ж продуктивна матриця ще й нерозкладна, то відповідна їй матриця коефіцієнтів повних витрат строго додатна. Оскільки матриця B невід'ємна і невироджена, то властивості продуктивності і нерозкладності матриці A забезпечують строгу додатність матриці $M = (E - A)^{-1}B$. Можемо тепер скористатися низкою результатів з теорії додатних матриць, зокрема теоремою 1 (підрозділ 4.4). Варто лише наголосити на тому, що власний вектор, який відповідає кореню Фробеніуса–Перона, є строго додатним; водночас інші власні вектори мають від'ємні компоненти.

Зауважимо, що $B^{-1}(E - A) = M^{-1}$, тому $\lambda_i = \dfrac{1}{\mu_i}$, де μ_i — власні числа матриці M, $i = 1, 2, ..., n$.

Розглянемо спочатку випадок, коли вектор кінцевого споживання $c = 0$. Така ситуація, звичайно, є нереалістичною, але аналіз її корисний для з'ясування максимальних технологічних можливостей системи. Оскільки в цьому випадку рівноважне рішення $x_p = 0$, то вираз (3) спрощується. Траєкторія випуску кожного продукту, відповідно до (3), є комбінацією експонент, кожна з яких зростає зі своїм темпом $\lambda_i = \dfrac{1}{\mu_i}$.

Для зручності запишемо розв'язок (3) у такому вигляді:

$$x(t) = d_1K_1e^{\lambda_1} + d_2K_2e^{\lambda_2} + ... + d_nK_ne^{\lambda n}, \tag{4}$$

де $d_1, d_2, ..., d_n$ — компоненти вектора $d = K^{-1}x_0$; $K_1, K_2, ..., K_n$ — власні вектори матриці $B^{-1}(E - A)$.

Нехай у виразі (4) максимальний коефіцієнт у показнику степеня λ^*, тоді експонента з показником степеня λ^* буде з часом домінувати і визначати характер траєкторії $x(t)$. Наявність кореня Фробеніуса–Перона в матриці M дає змогу розділити всі можливі ситуації на два принципово різні за своїми наслідками види.

1. $\lambda^* = \dfrac{1}{\mu^*}$, де μ^* — власне число Фробеніуса–Перона для матриці M. У цьому випадку вектор $x(t)$ буде щораз більшою мірою визначатися власним вектором K_μ, який відповідає цьому числу. Оскільки власний вектор визначається з точністю до променя, то з часом структура випуску, тобто співвідношення між компонентами вектора $x(t)$, наближатиметься до структури власного вектора K_μ. Цей результат має добру економічну інтерпретацію, оскільки вектор K_μ не містить від'ємних компонентів. Таким чином, динаміка багатопродуктової системи в цьому випадку характеризується зростанням додатних обсягів усіх видів продукції, що випускається.

2. $\lambda^* \neq \frac{1}{\mu^*}$, тобто домінуюча експонента пов'язана з власним числом, яке відмінне від кореня Фробеніуса–Перона. Така ситуація може бути, наприклад, якщо усі власні числа матриці M додатні. Тоді темп приросту $\frac{1}{\mu^*}$ буде найменшим з усіх у виразі (4), оскільки μ^* — максимальне власне число матриці M. Структура вектора $x(t)$ тепер прямуватиме до структури власного вектора K^*, який відповідає власному числу λ^*. Але ми знаємо, що у всіх власних векторів, крім K_μ, є від'ємні компоненти, в тому числі у вектора K^*. Від'ємні складові цього вектора будуть зростати (за абсолютною величиною) з максимальним темпом, тому з часом вони обов'язково з'являться і в складі вектора $x(t)$. Динаміка системи в такій ситуації характеризується виходом у неможливу область (від'ємні значення випуску взагалі не мають змістовної інтерпретації в межах даної моделі).

Таким чином, властивості траєкторії $x(t)$ залежать від технологічних матриць моделі A, B. Якщо реалізується перша ситуація, то структура випуску асимптотично наближається до структури додатного вектора, що відповідає кореню Фробеніуса–Перона, а якщо друга, — то вектор $x(t)$ виходить у неможливу зі змістовної точки зору область.

Тепер розглянемо випадок, коли існує кінцеве споживання $c > 0$. За цих умов точка рівноваги $x_p = (E - A)^{-1}c > 0$. Якщо $x_0 = x_p$, то це означає, що в економіці не існує інвестицій, а весь національний продукт йде на кінцеве споживання, тобто реалізується просте відтворення, при якому випуск продуктів залишається сталим у часі. Така траєкторія розвитку системи може викликати інтерес лише на обмежених проміжках часу. Більш реалістичною є ситуація, коли

$x_0 > x_p$, тобто не весь кінцевий продукт споживається, а частина його витрачається на інвестиції в початковий момент часу.

При введенні в однорідну модель споживання її динамічні властивості зберігаються, оскільки вони залежать від матриці системи: збережеться тип рівноваги, загальний вид фазового портрета. Зміна полягатиме в тому, що точка рівноваги переміститься з 0 в $x_p = (E - A)^{-1}c > 0$, відповідно зсунуться і директриси системи.

Розглянемо **приклад.** Дано матриці матеріаломісткості і капіталомісткості:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Початковий вектор валового продукту $x(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \end{pmatrix}$, вектор кінцевого споживання $c(t) = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Проаналізуємо спочатку властивості однорідної системи. Знайдемо матрицю системи рівнянь: $B^{-1}(E - A) = \begin{pmatrix} -0,8331 & 1,2501 \\ 1,9331 & -1,6251 \end{pmatrix}$.

Визначимо її власні числа і вектори:

$$\begin{vmatrix} -0,8331 - \lambda & 1,2501 \\ 1,9331 & -1,6251 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^2 + 2,452\lambda - 0,938 = 0 \quad => \quad \lambda_1 = 0,3365,\ \lambda_1 \approx 0,34;$$

$$\lambda_2 = -2,7885,\ \lambda_2 \approx -2,79.$$

Власний вектор для $\lambda_1 = 0,3365$: $\begin{cases} k_1 = 0,48, \\ k_2 = 0,52. \end{cases}$

Власний вектор для $\lambda_2 = -2,7885$: $\begin{cases} k_1 = -2,46, \\ k_2 = 3,46. \end{cases}$

Таким чином, матриця системи має власні числа різних знаків. Це означає, що з часом траєкторія системи на фазовій площині наближатиметься до променя, який визначається власним вектором, що відповідає числу $\lambda_1 = 0,3365$. Тип рівноваги — «сідло».

На рис. 1 зображено поле напрямків, фазова траєкторія і директриса однорідної системи.

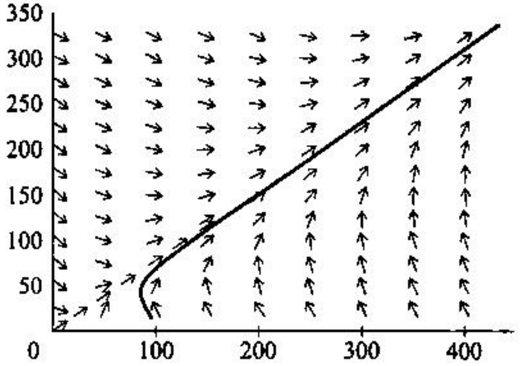


Рис. 1. Поле напрямків, фазова траєкторія та директриса однорідної системи

Тепер врахуємо задане споживання c. Стаціонарний розв'язок системи диференціальних рівнянь (2) знайдемо з умови $B^{-1}(E-A)x_p - B^{-1}c = 0$, тобто з умови $x_p = (E-A)^{-1}BB^{-1}c = (E-A)^{-1}c$.

$$\text{Тоді } x_p = \begin{pmatrix} 1{,}333 & 0{,}667 \\ 0{,}222 & 1{,}778 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73{,}32 \\ 28{,}88 \end{pmatrix}.$$

4.6. Приклад задачі з розв'язанням до розділу 4

Задача. Економіка країни поділяється на дві виробничі галузі (промисловість та сільське господарство). За минулий рік повний випуск промислових виробництв у вартісній формі мав таку структуру:

800 млн. грн. для виробничих потреб промисловості;

400 млн. грн. для виробничих потреб сільського господарства;

800 млн. грн. для споживання населення (відповідно до попиту на цю продукцію).

Повний випуск сільськогосподарської продукції (у вартісній формі) розподілявся таким чином:

300 млн. грн. для виробничих потреб промисловості;

350 млн. грн. для виробничих потреб сільського господарства;

600 млн. грн. для споживання населення (відповідно до попиту на цю продукцію).

На наступний рік прогнозується зростання попиту населення на вітчизняну продукцію, в тому числі на промислові вироби — до 1 000 млн. грн., а на сільськогосподарську продукцію — до 800 млн. грн. Який повний випуск промислової продукції та повний випуск сільськогосподарської продукції зможуть задовольнити новий попит?

Розв'язання. 1) Будуємо звітний баланс:

$x_1 = x_{11} + x_{12} + y_1$ — промисловість,

$x_2 = x_{21} + x_{22} + y_2$ — сільське господарство.

$x_{11} = 800$; $x_{12} = 400$; $y_1 = 800$;

$x_{21} = 300$; $x_{22} = 350$; $y_2 = 600$;

Отже, $x_1 = 2000$, $x_2 = 1250$.

2) Знаходимо коефіцієнти матеріальних витрат:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j$$

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{800}{2000} = 0,4; \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{400}{1250} = 0,32;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{300}{2000} = 0,15; \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{350}{1250} = 0,28.$$

Отже, технологічна матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,32 \\ 0,15 & 0,28 \end{pmatrix}.$$

3) Будуємо модель Леонтьєва:

$$\begin{cases} x_1 = 0,4x_1 + 0,32x_2 + y_1, \\ x_2 = 0,15x_1 + 0,28x_2 + y_2. \end{cases}$$

4) Знаходимо розв'язок моделі при $y_1 = 1000$, $y_2 = 800$, тобто розв'язуємо таку систему:

$$\begin{cases} 0,6x_1 - 0,32x_2 = 1000, \\ -0,15x_1 + 0,72x_2 = 800. \end{cases}$$

Звідси знаходимо:

$x_1 \approx 2541,7$ (млн. грн.); $x_2 \approx 1640,6$ (млн. грн.).

Задачі для самостійної роботи

1. Використовуючи дані розв'язаної в кінці розділу задачі, знайти ціни на продукцію промисловості та сільського господарства, вважаючи, що коефіцієнти умовно-чистої продукції дорівнюють:

0,4 — для промисловості;

0,5 — для сільського господарства.

2. Нехай матриця A нерозкладна. Що можна стверджувати про нерозкладність матриць A^T, A^{-1} та A^2?

3. Знайти власні числа матриці $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$, її число Фробеніуса, а також правий і лівий вектори Фробеніуса. З'ясувати питання про продуктивність даної матриці.

4. Показати, що: а) $\lambda_{A^k} = \lambda_A^k$; б) $\lambda_{\alpha A} = \alpha\lambda_A$ при $\alpha \geq 0$; в) з умови $A \geq B \geq 0$ випливає $\lambda_A \geq \lambda_B$.

5. Нехай A — деяка невід'ємна нерозкладна матриця. λ_A, x_A, — відповідно її фробеніусове число та правий фробеніусовий вектор. В $\boldsymbol{R}^n$ введемо норму: для $\forall\, p \in \boldsymbol{R}^n$: $\|p\| = (|p|, x_A)$, $|p| = (|p_1|, |p_2|, ..., |p_n|)$. Розглянемо в $\boldsymbol{R}^n$ множину $L = \{p \in \boldsymbol{R}^n\colon (p, x_A) = 0\}$. Очевидно, що L є підпростором в $\boldsymbol{R}^n$. Довести інваріантність підпростору L відносно лінійного оператора A.

Чи буде оператор $A\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ стискаючим на L, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}?$$

(Нехай на деякій множині $L \subseteq \boldsymbol{R}^n$ заданий оператор $A\colon L \to L$ і при цьому існує таке число $\gamma \in (0, 1)$, що $\|pA\| \leq \gamma\|p\|$, $\forall\, p \in L$. Тоді кажуть, що оператор A є *стискаючим* на множині L, а γ називають *коефіцієнтом стиску*.)

РОЗДІЛ 5. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ ТА РОЗПОДІЛУ КАПІТАЛОВКЛАДЕНЬ

При написанні цього розділу використовувалися джерела [6] та [8].

Економічне зростання — основний показник розвитку і добробуту будь-якої країни, одна з головних макроекономічних цілей. Її досягнення передбачає випереджаюче зростання національного доходу порівняно зі зростанням чисельності населення.

Економічне зростання означає:

1) збільшення реального валового внутрішнього продукту (*ВВП*) (або чистого внутрішнього продукту (*ЧВП*) чи національного доходу (*НД*)) в абсолютних вимірниках за певний проміжок часу;

2) збільшення реального *ВВП* (*ЧВП* чи *НД*) в розрахунку на душу населення;

3) збільшення реального *ВВП* (*ЧВП* чи *НД*) в розрахунку на одного зайнятого.

Використовуватися можуть усі три визначення. Проте незалежно від того, яке з них взято за основу, економічне зростання завжди вимірюється річними *темпами зростання* за формулою:

$$\rho = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0} \cdot 100\ \%,$$

де Y_1 та Y_0 — відповідно реальний *ВВП* (*ЧВП* або *НД*) у поточному та базисному роках.

Окремі спеціалісти, добре обізнані зі статистикою, можуть заперечити, мовляв наведений показник називається темпом приросту, а не темпом зростання. Проте варто пам'ятати, що коли певна величина зростає за рік на 2%, то в *міжнародній статистиці* заведено вважати, що тоді темп зростання становить 2%, і лише за статистичною термінологією *окремих колишніх соціалістичних країн* вважалося, що такий темп зростання становить 102%, у той час як 2% — це темп приросту. Варто також наголосити, що в теорії і моделях економічного зростання не враховується відмінність між показниками *ВВП*, *ЧВП* та *НД*: вони об'єднуються в одній категорії «випуск» або «дохід» і позначаються загальноприйнятим символом Y.

5.1. Неокласична модель зростання Р. Солоу

Моделі зростання займають значне місце в економіко-математичномих дослідженнях ще з 30-х рр. XX ст. Добре відомими і детально вивченими є моделі Харрода–Домара, Філліпса, Хікса, Самуельсона, Рамсея. Модель, яку будемо розглядати далі, була розроблена в 50-60-х рр. лауреатом Нобелівської премії Робертом Солоу. Ця модель дає змогу досліджувати, як основні фактори виробництва — праця, капітал, технологічні зміни — впливають на динаміку зміни обсягу виробництва, коли економічна система перебуває у рівноважному сталому стані. Перевагою моделі Солоу є розмежування згаданих факторів і поступове дослідження впливу кожного з них на процес довгострокового зростання національного доходу. Ця модель описує економічне зростання у так званій агрегованій замкнутій економіці, а са́ме *агрегована* економіка характеризується тим, що в ній виробляється єдиний однорідний продукт; *замкнутість* моделі означає відсутність як імпорту в економіку, так і експорту з неї.

Сформулюємо основні постулати даної моделі, позначення та висновки.

Будемо вважати, що час t змінюється неперервно, $t \in [0, T]$, і застосовуватимемо такі позначення: $Y(t)$ — *випуск* або *дохід* на момент часу t; $C(t)$ — споживання; $I(t)$ — капіталовкладення; $K(t)$ — капітал; $L(t)$ — праця (трудові ресурси).

Основні постулати (припущення) такі.

Припущення 1. *Прибутки і видатки (затрати) тотожно збігаються*:

$$Y(t) = I(t) + C(t). \tag{1}$$

Це означає, що випуск, або валовий національний продукт (Y), витрачається лише на споживання (C) та інвестиції (I). Що ж до інвестицій, то їх витрачають як на збільшення розміру національного капіталу, так і на заміщення зношеного. Якщо $K(t)$ — розмір капіталу в момент часу t, то капіталовкладення вимірюються швидкістю зміни наявного капіталу: $\dot{K}(t) = dK(t)/dt$.

Припущення 2. *Амортизація (зношення) наявного капіталу пропорційна до його величини:* $A = \mu K(t)$, *де* μ — *норма амортизації,* $\mu \in (0, 1)$.

Припущення 3. *Справджується така тотожність для валових інвестицій:*

$$I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t), \tag{2}$$

тобто чисті капіталовкладення становлять ту частину інвестицій, яка не витрачається на заміну зношених фондів.

Припущення 4. *Розміри випуску продукції Y визначаються агрегованою виробничою функцією, яка характеризує ефективні можливості виробництва залежно від розмірів капіталу та витрат праці: $Y = F(K, L)$.*

В даному випадку функція $F(K, L)$ від двох невід'ємних аргументів задовольняє такі умови: 1) вона не залежить від часу t; 2) є двічі неперервно диференційованою і для всіх невід'ємних значень аргументів виконуються співвідношення:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \tag{3}$$

$$\lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \qquad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0. \tag{4}$$

Припущення 5. *Для будь-якого $\alpha > 0$ виконується тотожність:*

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L), \tag{5}$$

тобто функція $F(K, L)$ є лінійно-однорідною.

Беручи до уваги властивість (5) виробничої функції, зведемо задачу до вигляду, де всі змінні є нормованими (у розрахунку на одного працівника).

Якщо підставимо в (5) $\alpha = L^{-1}$, то будемо мати:

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right). \tag{6}$$

Нова функція одного аргументу f характеризує продуктивність праці (випуск продукції на одного працівника) як функцію капіталоозброєності або, інакше кажучи, фондоозброєності (величина капіталу на одного працівника).

Введемо нові нормовані (питомі) величини і запишемо (6) у такому вигляді: $y = Y/L$, де $y(t)$ — величина випуску продукції на одного працівника (питомий випуск), $y(t) = Y(t)/L(t)$, а $k(t)$ —

величина капіталу на одного працівника (капіталоозброєність): $k(t) = K(t)/L(t)$.

З умов (3) та (4) на виробничу функцію $F(K, L)$ для виробничої функції $f(k)$ будемо мати:

$$f'(k) > 0,\ f''(k) < 0 \text{ для всіх } k > 0,\ \lim_{k \to 0} f'(k) = \infty,\ \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0. \quad (7)$$

Умови (7) означають, що виробнича функція $f(k)$ є строго опуклою, монотонно зростаючою, а в точці $k = 0$ та при $k \to \infty$ кутові коефіцієнти дотичних до графіка дорівнюють відповідно нескінченості та нулю. Функція, яка задовольняє такі умови (7), називається ще **неокласичною**.

Зведемо і всі інші змінні задачі до нормованого вигляду: $c(t) = C(t)/L(t)$, $i(t) = I(t)/L(t)$, де $c(t)$ — об'єм споживання на одного працівника, а $i(t)$ — обсяг капіталовкладень на одного працівника.

Тепер тотожності (1) для доходу і видатків, а також (2) для валових інвестицій набувають відповідно такого вигляду:

$$y(t) = c(t) + i(t), \quad (8)$$

$$i(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \mu k(t). \quad (9)$$

Швидкість зміни величини капіталоозброєності доволі легко обчислюється:

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\cdot\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L}.$$

Тоді співвідношення (9) для питомих інвестицій набуває вигляду: $i(t) = \dot{k} + (\mu + \frac{\dot{L}}{L})k$.

Нехай $\frac{\dot{L}}{L} = n$, тобто чисельність трудових ресурсів (робочої сили) зростає за експоненціальним законом $L(t) = L(0)e^{nt}$ з показником (темпом зростання) n. Тоді для $i(t)$ одержимо:

$$i(t) = \dot{k} + (\mu + n)k = \dot{k} + \lambda k. \quad (10)$$

Стала λ є сумою норми амортизації капіталу і темпу зростання чисельності робочої сили: $\lambda = \mu + n$, $\lambda = const > 0$. Підставимо вираз для $i(t)$ з рівняння валових інвестицій (10) і виробничу функцію в рівняння доходів і видатків (8). Тоді будемо мати відносно функції $k(t)$ таке звичайне диференціальне рівняння першого порядку:

$$f(k(t)) = c(t) + \lambda k(t) + \dot{k}(t), \tag{11}$$

або:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - c(t). \tag{12}$$

Це рівняння називають **основним диференціальним рівнянням неокласичної теорії економічного зростання.**

З рівняння (11) бачимо, що випуск продукції, який припадає на одного працівника $f(k(t))$, складається з трьох доданків: споживання на одного працівника c, частки інвестицій на підтримання капіталоозброєності працівника λk, чистого приросту капіталоозброєності працівника $\dot{k}$.

Початкова умова для рівняння (12) має вигляд:

$$k(t_0) = k_0, \quad \text{зокрема,} \quad k(0) = k_0, \tag{13}$$

де k_0 — значення капіталоозброєності працівника в початковий момент часу. Розв'язок задачі Коші (12), (13) будемо позначати як $k(t, t_0, k_0)$ або $k(t, k_0)$, при $t_0 = 0$.

Розглянемо також дещо спрощений варіант моделі Солоу. Отже, сукупний попит задається через характеристики споживання (c) та інвестицій (i) в розрахунку на одиницю праці: $y = c + i$. Будемо вважати, що споживання пропорційне до доходу і залежить від норми заощадження (s), тобто $c = (1 - s)y$. Тоді $y = (1 - s)y + i$. Звідси $i = sy$, $i = sf(k)$. (В умовах рівноваги інвестиції дорівнюють заощадженням і пропорційні до доходу.)

Крім цього, можна вважати, що ефективність праці під впливом технологічного прогресу (або працезберігаючий технологічний прогрес) змінюється з темпом g. Наприклад, якщо $g = 0{,}02$, то це означає, що ефективність праці кожного робітника зростає на 2% за рік. За рахунок цього обсяг виробництва зростає настільки ж, наскільки він зріс би за умови, що кількість робочої сили збільшилася б за рік на 2% при незмінній ефективності робочої сили. Показник g ще називають **швидкістю науково-технічного прогресу**. Математично це припущення означає, що тепер $\lambda = \mu + n + g$.

Отже, рівняння (12) за таких умов набуде вигляду:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \lambda k(t). \tag{14}$$

Рівняння (14) є основою моделі економічного зростання Рамсея.

Як уже зазначалося, модель дає змогу дослідити характер процесу економічного зростання у стані довгострокової рівноваги, тобто з'ясовує, які основні фактори виробництва впливають на темпи зростання *потенційного ВВП*. А для цього потрібно насамперед задати умови довгострокового стану рівноваги.

Одержане основне рівняння (12) в загальному випадку є нелінійним і неавтономним рівнянням першого порядку. Універсального методу інтегрування такого рівняння в елементарних функціях або в квадратурах не існує. В окремих випадках таке інтегрування можливе. Проте деякі якісні результати щодо динаміки питомих капіталовкладень $k(t)$ можна отримати безпосередньо із самого цього рівняння.

Проведемо такий аналіз. Вважатимемо надалі, що $c(t) = const$. У цьому випадку умови, накладені на функцію $f(k)$, гарантують можливість продовження розв'язку $k(t, k_0)$ задачі Коші (12), (13) на нескінчений інтервал $(0, \infty)$ для довільного $k_0 > 0$.

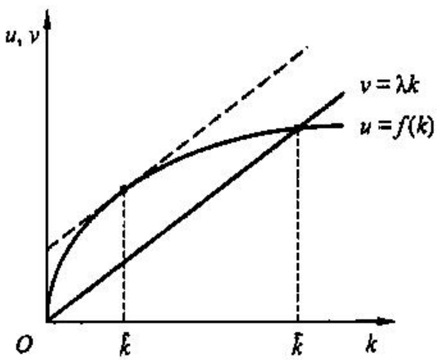


Рис. 1. Графіки функцій u та v

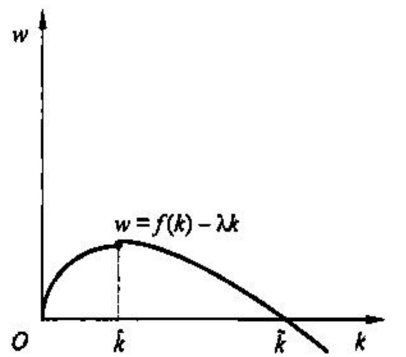


Рис. 2. Графік функції w

Зобразимо на координатній площині графіки функцій $u = f(k)$, $v = \lambda k$ та $w = u - v = f(k) - \lambda k$ (рис. 1, 2).

Точки $\widehat{k}$ і $\widetilde{k}$ на осі абсцис такі, що:

1) при $k = \widetilde{k} > 0$ функція w дорівнює нулю: $f(k) - \lambda k = 0$;

2) при $k = \hat{k}$ функція w досягає максимуму: $f(\hat{k}) - \lambda\hat{k} \geq f(k) - \lambda k$ для $\forall\, k > 0$.

З урахуванням припущень щодо виробничої функції $f(k)$, неважко показати, що такі значення $\hat{k}$ і $\tilde{k}$ існують і єдині.

Вважаючи $c(t)$ константою, розглянемо три випадки:

а) $c = 0$ (нульовий рівень споживання на одного працівника);

б) $c = \hat{c} = f(\hat{k}) - \lambda\hat{k}$ (максимальний рівень споживання на одного працівника);

в) $c = \bar{c}$, $0 < c < \hat{c}$ (проміжний випадок).

Випадок а). Основне рівняння (12) набуває вигляду: $\dot{k} = f(k) - \lambda k(t)$, і має, очевидно, сталий розв'язок $k = \tilde{k}$, або, інакше кажучи, точку рівноваги $\tilde{k}$ на фазовій прямій Ok. Дослідження цього стану рівноваги на стійкість показує, що точка $k = \tilde{k}$ є *асимптотично стійкою.*

Випадок б). Визначимо рівень капіталоозброєності $\hat{k}$, який максимізує функцію $w = f(k) - \lambda k$, з рівняння:

$$f'(k) = \lambda \quad \text{або} \quad f'(k) = \mu + n,$$

і врахуємо, що

$$\hat{c} = f() - \lambda\hat{k}. \tag{15}$$

Якщо в основному рівнянні (12) підставити $c(t) = \hat{c}$, то воно набуде вигляду:

$$\dot{k} = f(k) - f(\hat{k}) - \lambda(k - \hat{k}). \tag{16}$$

Зауважимо, що $\hat{c}$ — це максимально можливий рівень споживання на одного працівника. Співвідношення (15), з якого цей рівень визначається, називають **золотим правилом накопичення.** Величину $\hat{c}$ називають **рівнем споживання** на одного працівника, **який відповідає золотому правилу накопичення**. Відповідний рівень $\hat{k}$ **є рівнем капіталоозброєності золотого правила накопичення.**

Зі співвідношення (16) випливає, що $k = \hat{k}$ є положенням рівноваги (для основного рівняння (12)). Отже, рівень капіталоозброєності $\hat{k}$ та відповідний рівень $\hat{c}$ споживання золотого правила теоретично можуть зберігатися як завгодно довго. Проте рівноважний рівень $k = \hat{k}$ не є асимптотично стійким.

Випадок в). Тепер рівень споживання $\bar{c}$ зафіксовано в межах $(0, \hat{c})$. В цьому випадку основне рівняння:

$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - \bar{c} = g(k)$$

має два стаціонарних розв'язки: $k = k_L$, $0 < k_L < \hat{k}$, та $k = k_U$, $\hat{k} < k_U < \tilde{k}$. Крива w і пряма $w = \bar{c}$ перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють k_L та k_U. Ці точки теж є точками рівноваги для основного рівняння (12). У цьому випадку точка $k = k_U$ — асимптотично стійка, а точка $k = k_L$ не є асимптотично стійкою.

5.2. Метод розрахунку джерел економічного зростання (залишок Солоу)

Загальне зростання обсягів виробництва залежить від трьох факторів: 1) приросту капіталу (K); 2) приросту затрат праці (L); 3) вдосконалення технології.

Якщо з вимірюванням перших двох факторів виробництва (капіталу і затрат праці) проблем не виникає, то як і за допомогою якого показника можна оцінити внесок технологічних змін у процес економічного зростання?

На це запитання дав відповідь Р. Солоу, запропонувавши для вимірювання поточного рівня технології використовувати так званий **загальний фактор продуктивності** (цей показник позначається літерою A). Вважається, що виробництво зростає не лише тому, що зростає капітал або праця, а також завдяки зростанню загального фактора продуктивності. Коли загальний фактор продуктивності зростає на 1%, а обсяг затрат залишається незмінним, то обсяг виробництва зростає на 1%.

Ґрунтуючись на цьому припущенні, темпи приросту обсягу виробництва можна характеризувати так:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \cdot \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta A}{A}, \qquad (1)$$

де $\frac{\Delta Y}{Y}$ — темп приросту обсягу виробництва; $\frac{\Delta K}{K}$ — темп приросту затрат капіталу; $\frac{\Delta L}{L}$ — темп приросту затрат праці; α — частка капіталу в доході; $(1-\alpha)$ — частка праці в доході; $\frac{\Delta A}{A}$ — темп приросту загального фактора продуктивності.

Рівняння (1) є визначальним для розрахунку вкладу технологічного прогресу ($\Delta A/A$) в економічне зростання. Однак оскільки загальний фактор продуктивності не можна визначити безпосередньо, то його вимірюють опосередковано — як величину темпу економічного зростання після вирахування з неї вкладу в це зростання вхідних факторів — капіталу та робочої сили:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta Y}{Y} - \alpha \cdot \frac{\Delta K}{K} - (1-\alpha) \cdot \frac{\Delta L}{L}.$$

Са́ме тому компонент $\Delta A/A$ називають **«залишком Солоу»**.

Сукупна продуктивність факторів може змінюватися під впливом багатьох причин: коли вдосконалюються методи організації виробництва, підвищується рівень освіти працюючих, або коли за вимогами державного регулювання фірми змушені витрачати капі-тал на охорону довкілля чи підвищення безпеки праці робітників. Інакше кажучи, ***загальний фактор продуктивності*** вбирає в себе все те, що змінює співвідношення між динамікою виробництва та динамікою затрат праці й капіталу.

5.3. Приклад задачі з розв'язанням до розділу 5

Задача. Якщо виробнича функція одиниці праці задана як $Y = K^{1/2}$, норма заощаджень дорівнює 0,2, а норма амортизації дорівнює 0,1, то чому дорівнює рівноважний рівень капіталооснащеності праці?

Розв'язання. Оскільки в умові йдеться про виробничу функцію одиниці праці, то це фактично означає, що задано виробничу функцію $f(k) = k^{1/2}$. Також з умови відомо, що норма заощадження $s = 0{,}2$, а норма амортизації $\mu = 0{,}1$. Оскільки нічого не відомо щодо темпу приросту населення n та швидкості науково-технічного прогресу g, то можна вважати, що $n = 0$ та $g = 0$.

Для визначення рівноважного рівня капіталооснащеності праці, скористаємося таким рівнянням моделі Рамсея:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \lambda k(t),$$

де $\lambda = \mu = 0{,}1$. Оскільки рівноважний рівень капіталооснащеності праці визначається зі співвідношення $\dot{k}(t) = 0$, то маємо:

$$sf(k(t)) - \lambda k(t) = 0{,}2k^{1/2} - 0{,}1k = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо, що рівноважний рівень капіталооснащеності праці $k^* = 4$.

Задачі для самостійної роботи

1. Виробнича функція в моделі Солоу має вигляд: $y = 0{,}72k^{\frac{1}{2}}$. Норма вибуття капіталу становить 9%, чисельність населення зростає на 1% за рік, а темп працезберігаючого технологічного прогресу дорівнює 2%. Якою є норма збереження за «золотим правилом»?

2. Припустимо, що виробнича функція має вид: $Y = 10K^{0{,}25}L^{0{,}75}$, а капітал у середньому — термін служби 50 років. Населення і рівень технології в країні залишаються незмінними при нормі заощаджень $s = 0{,}128$. Визначити: 1) сталий рівень капіталооснащення праці; 2) продуктивність праці; 3) споживання та інвестиції на одиницю праці у стані довгострокової рівноваги економіки.

3. Нехай виробнича функція має вигляд: $Y = 10K^{0{,}3}L^{0{,}7}$.

а) Якщо загальний фактор продуктивності зростає на 2% на рік, а запас капіталу і ресурсу праці зросли на 1% кожний, то на скільки відсотків має зрости національний продукт країни?

б) Якщо величина накопиченого капіталу зросла на 2% за рік, то яким буде зростання загального випуску?

4. Нехай випуск продукції в країні описується виробничою функцією виду $Y = K^{0{,}3}L^{0{,}7}$. Відношення капітал-випуск дорівнює 3. Випуск зростає з темпом 3% за рік. Норма вибуття дорівнює 4%.

а) Визначити граничну продуктивність капіталу.

б) Якщо економіка перебуває у стійкому стані, то чому дорівнює норма заощадження?

в) Якщо економіка досягла рівня запасу капіталу, який відповідає «золотому правилу», то якою буде величина граничної продуктивності капіталу? Яким тоді буде відношення капітал-випуск?

г) Якою має бути норма заощадження, щоб економіка досягла стійкого стану, що відповідає «золотому правилу»?

5. Показати, що сталі розв'язки рівняння (12) з підрозділу 5.1, тобто точки $\widetilde{k}$ та k_U, є асимтотично стійкими, а відповідні рівноважні рівні $\widehat{k}$ та k_L не є асимтотично стійкими.

6. Розміри валового випуску в економіці визначаються виробничою функцією Кобба–Дугласа $Y(t) = F(K, L) = \xi K^{\alpha} L^{\beta}$, де $\xi, \alpha, \beta > 0$, $K(t)$ — капітал, $L(t)$ — трудові ресурси. Норма амортизації капіталу дорівнює μ; темп приросту населення становить n.

1) Записати рівняння Солоу для економічного зростання.

2) Знайти стаціонарні точки рівняння для нульового, максимального та проміжного питомого споживання. Визначити максимальне питоме споживання.

Знайти розв'язки при $\xi = 1$; $\beta = 0{,}5$; $n + \mu = 0{,}8$; $\bar{c} = 0{,}2$.

7. В моделі зростання Харрода–Домара $Y(t) = v\dot{Y}(t) + C(t)$ знайти максимально можливий темп приросту доходу для економіки, в якій коефіцієнт прирістної капіталомісткості дорівнює 4. Через скільки років у цій економіці подвоїться дохід? (*Вказівка.* v — коефіцієнт прирістної капіталомісткості. Розглядається випадок, коли $C(t) = 0$, тобто весь дохід витрачається на накопичення.)

8. Нехай в моделі зростання Харрода–Домара відсутнє споживання, а коефіцієнт прирістної капіталомісткості залежить від часу: $v(t) = v(0)e^{\lambda t}$, де $v(0)$ — коефіцієнт в початковий момент часу, $\lambda > 0$. Визначити межу (границю) зростання доходу.

9. В моделі зростання Харрода–Домара споживання зростає з темпом, що дорівнює технологічному темпу приросту ($1/v$), норма споживання дорівнює 0,8 (C/Y), а коефіцієнт прирістної капіталомісткості 4. Визначити: 1) відрізок часу, на якому дохід буде зростати; 2) момент часу, коли дохід впаде до нуля; 3) максимальне значення доходу, якщо споживання в початковий момент часу дорівнює 400.

10. Припустимо, що динаміка моделі зростання описується таким співвідношенням: $Y(t) = C(t) + v\dot{Y}(t) + I(t)$, де $C(t) = cY(t)$, $0 < c < 1$, $v > 0$, $I(t)$ — витрати на інвестиції, які вважаються заданими (модель зростання Харрода–Домара). Дослідити динаміку $Y(t)$, якщо витрати на інвестиції $I(t) = I_0 = const$.

РОЗДІЛ 6. МАКРОЕКОНОМІЧНА НЕСТАБІЛЬНІСТЬ. ЦИКЛИ ДІЛОВОЇ АКТИВНОСТІ, БЕЗРОБІТТЯ, ІНФЛЯЦІЯ

При написанні цього розділу використовувалися джерела [2] та [6].

6.1. Цикли ділової активності: фази циклу та причини коливань

В ідеальній економіці реальний валовий внутрішній продукт (ВВП) міг би зростати швидкими і сталими темпами. Рівень цін, який визначається індексом споживчих цін чи дефлятором ВВП, залишався б незмінним або ж зростав доволі повільно. У результаті незначними були б інфляція та безробіття.

Проте досвід переконливо свідчить про те, що економічні умови ніколи не залишаються сталими. Економічне піднесення прокладає шлях до спаду. В роки спаду ВВП зайнятість та реальні доходи населення падають, прибутки зменшуються, люди втрачають роботу. Невдовзі знову починається пожвавлення, яке може бути настільки сильним, що породить новий бум. Цей етап характеризується достатньою кількістю робочих місць та підвищенням життєвого рівня. Але за піднесенням настає новий спад економіки.

Зростання і падіння обсягів національного виробництва, цін, процентних ставок і зайнятості утворюють *діловий цикл,* який є характерною рисою ринкової економіки.

Отже, **економічний цикл (цикл ділової активності)** — це періодичний підйом або спад реального ВВП на фоні загальної тенденції до зростання.

Причинами циклічності можуть бути:

• технічні нововведення (НТР), які впливають на інвестиції та споживчі витрати, а відповідно — на виробництво, зайнятість та рівень цін;

• політичні й випадкові події (наприклад, війни, «перебудова» в СРСР та перехідні періоди у нових незалежних державах);

• зміни в кредитно-грошовій політиці (коливання обсягів грошової маси);

• нестача національних інвестицій;

• зміни світових цін на нафту, газ та інші види сировини тощо.

В макроекономіці не існує цілісної теорії економічного циклу, й економісти різних напрямків концентрують свою увагу на різних причинах циклічності. Водночас більшість з них вважає, що рівень сукупних витрат безпосередньо визначає рівень зайнятості і виробництва. Чому саме зміни у рівні сукупних витрат спричиняють коливання економічної активності? Річ у тім, що в економіці, орієнтованій головним чином на ринок, сектор фірм виробляє товари і надає послуги лише в тому випадку, коли їх можна вигідно продати, або, інакше кажучи, коли на них заявлено достатній сукупний попит. Якщо ж цей сукупний попит (або сукупні витрати) недостатній, то сектору фірм невигідно виробляти товари і послуги у великому обсязі, тому ВВП скорочується. При вищому рівні сукупних витрат сектор фірм, розширюючи обсяги виробництва, буде отримувати прибуток, і, таким чином, ВВП зростатиме.

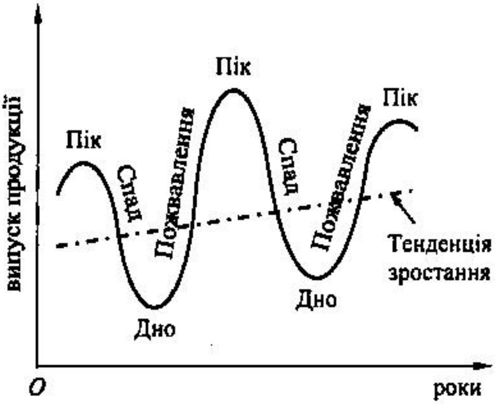


Рис. 1. Економічні цикли

Окремі економічні цикли суттєво відрізняються між собою за тривалістю та інтенсивністю (рис. 1), проте всі вони складаються з одних і тих самих *фаз* (див. таблицю).

Таблиця

ПІК	В економіці спостерігається повна зайнятість, і виробництво працює на повну потужність. Рівень цін має тенденцію до підвищення, але зростання ділової активності припиняється.
СПАД (РЕЦЕСІЯ)	Виробництво і зайнятість скорочуються, проте ціни не завжди мають тенденцію до зниження. Вони падають лише в тому випадку, коли спостерігається депресія (глибокий і тривалий спад).
ДНО	Найнижча точка спаду (депресії): виробництво та зайнятість досягають найнижчого рівня.
ПОЖВАВЛЕННЯ	Виробництво та зайнятість зростають. Рівень цін може підвищуватися, доки не буде досягнуто повної зайнятості і виробництво почне працювати на повну потужність.

При цьому циклічно змінюються обсяг випуску, рівні зайнятості, безробіття, інфляції, процентної ставки, обсяг грошової маси і т. ін. Проте основними *індикаторами* фази циклу слугують: 1) рівень зайнятості; 2) рівень безробіття; 3) обсяг випуску, оскільки динаміка рівнів інфляції і процентної ставки може бути різною залежно від факторів, які спричинили спад.

Фактичний реальний обсяг випуску коливається при цьому навколо **потенційного рівня ВВП,** який ми розуміємо як обсяг виробництва за умови *повної зайнятості ресурсів*. Він опускається нижче цієї позначки під час спаду, потім поступово повертається до неї, а інколи навіть перевищує цей рівень під час чергового підйому економіки. Коливання фактичного обсягу ВВП навколо потенційного характеризується показником, який має назву **«розрив ВВП»:**

$$Розрив\ ВВП = \frac{Y - Y^*}{Y^*},$$

де Y — фактичний обсяг виробництва, Y^* — потенційний ВВП.

Коли $Y < Y^*$, ми ведемо мову про *відставання ВВП* — це обсяг продукції, який економіка втрачає через неповне використання свого виробничого потенціалу.

Значно рідше трапляється ситуація *перевищення фактичним ВВП* потенційного свого рівня ($Y > Y^*$). Це стає можливим найчастіше в екстремальних ситуаціях, коли в процес виробництва залучаються додаткові зміни робітників, капітальне обладнання використовується понад встановлені нормативи, понаднормова праця і праця за сумісництвом стають звичайним явищем. Проте тривалий час перевищення фактичного ВВП над потенційно можливим зберігатися не може.

Обсяги виробництва і зайнятості найсильніше реагують на зміну фаз економічного циклу в галузях, які виробляють засоби виробництва і споживчі товари тривалого користування. В галузях, які випускають споживчі товари нетривалого використання, коливання зайнятості і випуску є значно меншими.

Розглянемо одну з моделей економічного циклу.

6.2. Модель економічного циклу Хікса

Відповідно до вихідних передумов, у моделі Хікса національний дохід (Y) складається з трьох компонентів: особистого споживання (C), індукованих (ендогенних) інвестицій (I) і автономних (незалежних) інвестицій (A). Остання змінна пов'язана головним чином з економічною діяльністю держави; при цьому передбачається, що її динаміка не залежить від стану економіки і задається екзогенно.

Індукованими інвестиціями називають капіталовкладення приватного сектора, динаміка яких повністю визначається економічною ситуацією у певний момент часу, а сáме приростом доходу за період від $(t-2)$ до $(t-1)$. Передбачається, що заощадження в момент t збігаються з інвестиціями. Нарешті, особисте споживання визначається рівнем доходу за два попередні періоди.

Відповідно до зроблених припущень, модель Хікса записується в такому вигляді:

$$\begin{aligned} C_t &= c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2}, \\ I_t &= \nu(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \\ Y_t &= C_t + I_t + A_t. \end{aligned} \qquad (1)$$

На структурні коефіцієнти, а саме схильність до споживання (c_1 і c_2) та акселератор ν накладаються такі обмеження: $0 < c_1$, c_2, $c_1 + c_2 < 1$; $\nu > 0$.

Будемо вважати, що автономні інвестиції є певною сталою додатною величиною: $A_t = A > 0$.

Зведемо модель до форми кінцево-різницевого рівняння:

$$Y_t = (\nu + c_1)Y_{t-1} - (\nu - c_2)Y_{t-2} + A. \qquad (2)$$

Характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$\lambda^2 - (\nu + c_1)\lambda + (\nu - c_2) = 0. \qquad (3)$$

Розв'язок цього рівняння: $\lambda_{1,2} = \frac{w+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{w+c}{2}\right)^2 - w}$,

де $c = c_1 + c_2$; $w = \nu - c_2$. Сталу w можна називати *ослабленим інвестиційним коефіцієнтом*: акселератор ν, що пов'язує інвестиції з приростом доходу, зменшений на коефіцієнт c_1.

Введемо величину схильності до заощаджень $s = 1 - c$, тоді $1/s$ — це мультиплікатор.

Рівноважний розв'язок рівняння (2) знаходимо з умови:

$$Y_p = (\nu + c_1)Y_p - (\nu - c_2)Y_p + A,$$
$$Y_p = A/s.$$

Характер траєкторії доходу залежить від властивостей коренів характеристичного рівняння. Дійсні корені визначають зростаючу (при $\lambda > 1$) або спадну (при $\lambda < 1$) тенденцію. Траєкторія Y_t в моделі має вигляд:

$$Y_t = D_1\lambda_1^t + D_2\lambda_2^t + Y_p,$$

де D_1, D_2 — сталі, зумовлені початковими умовами.

Значення λ, які дають компоненти розв'язку зі знаками, що чергуються, навряд чи можуть бути інтерпретовані з економічної точки зору.

Якщо корені рівняння будуть попарно комплексно-спряженими ($\lambda = \alpha \pm \beta i$), то розв'язок описуватиме коливальну динаміку. В цьому випадку: $\alpha = \dfrac{w+c}{2}$; $\beta = \sqrt{w - \left(\dfrac{w+c}{2}\right)^2}$. Частота коливань дорівнюватиме: $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha}$, період коливань — $\tau = \dfrac{2\pi}{\theta}$, а коефіцієнт згасання — $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\left(\dfrac{w+c}{2}\right)^2 + w - \left(\dfrac{w+c}{2}\right)^2} = \sqrt{w}$.

Розв'язок, який описує коливальну тенденцію, запишеться в такому вигляді:

$$Y_t = Dr^t\cos(\theta t + \omega)Y_p,$$

де D та ω — сталі, що визначаються початковими умовами.

Коливання будуть згасаючими при $r < 1$ і «вибуховими» при $r > 1$, тобто — відповідно при $w < 1$ і $w > 1$. Регулярні коливання відповідатимуть випадку $w = r = 1$.

Модель описує різні типи траєкторій доходу через взаємодію мультиплікатора й акселератора, вона виявляє внутрішні коливання Y_t при відповідній комбінації сталих w і s. Можна виділити чотири види співвідношень між w і s, яким відповідає певний характер динаміки доходу.

Структурні сталі ($s = c_1 + c_2$ та $w = \nu - c_2$)		Зміна Y_t у часі
I.	$w < (1-\sqrt{s})^2$	Неколивальна згасаюча
II.	$(1-\sqrt{s})^2 < w < 1$	Коливальна згасаюча
III.	$1 < w < (1+\sqrt{s})^2$	Коливальна вибухова
IV.	$(1+\sqrt{s})^2 < w$	Неколивальна вибухова

Область можливих розв'язків можна описати графічно (рис. 2). Тут область $w < 1$ містить у собі згасаючі розв'язки, $w > 1$ — «вибухові», заштрихована область — коливальні розв'язки, не заштрихована — неколивальні. Розв'язок, який є рівномірними коливаннями, можливий лише в окремому випадку: $w = 1$ або $\nu - c_2 = 1$, що в економіці може реалізовуватися як тенденція на тривалий відрізок часу.

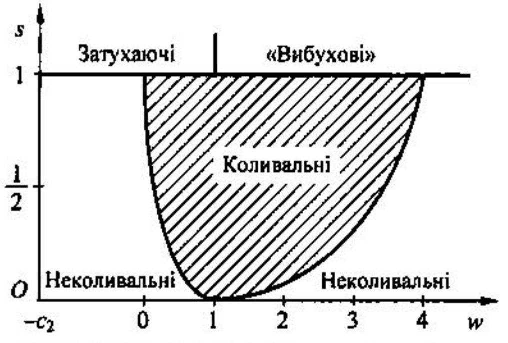


Рис. 2. Можливий характер динаміки доходу

Передбачається, що в реальній економіці $w > 1$, тобто розв'язок відображає «вибуховий» характер динаміки, а забезпечення такого процесу неминуче має натрапити на дефіцит ресурсів, зокрема робочої сили. Тому в модель вводиться обмеження у вигляді верхньої і нижньої меж. Вони реалізуються через припинення зростання виробництва при досягненні «стелі» і відключення механізму акселератора через надлишок виробничих потужностей, що не використовуються, при досягненні нижньої межі.

Обмеження зверху запишемо у вигляді $Y_t \leq N_t$, де N_t — максимально можливий випуск у рік t, що задається екзогенно. Поки це обмеження не вступає в дію, величина доходу для кожного року визначається за формулою: $Y_t = C_t + I_t + A$. Але уявімо, що рік $t - 1$ був останнім перед зіткненням з обмеженням. Тоді, за Хіксом, дохід у рік t буде дорівнювати: $Y_t = N_t$.

Розглянемо тепер обмеження по нижній межі. Тільки дохід почав падати, фазові інвестиції (I_t) стають від'ємними і починають прискорювати падіння доходу, що зі свого боку ще більше зменшує фазові інвестиції. Цей процес триває доти, доки фазові інвестиції не набувають мінімального значення $I_t = -D_t$, за якого валові інвестиції дорівнюють нулеві. З цього моменту в моделі «працюють» тільки рівняння $C_t = c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2}$ і $Y_t = C_t + I_t + A$, а замість рівняння $I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2})$ вступає в дію нижнє обмеження. Після цього темп падіння доходу починає сповільнюватися, і, врешті-решт, автономні витрати, які зростають, викликають переломний момент та перехід до підйому.

Таким чином, циклічний рух, згідно з Хіксом, відбувається в такий спосіб. Припустимо, що економіка перебуває в стані початкової рівноваги. Імпульсне «вприскування» у вигляді додаткових автономних інвестицій викликає збільшення продукції і доходів. Це, зі свого боку, призводить до зростання індукованих інвестицій та споживання і, в решті-решт, до подальшого зростання продукції та доходів. Амплітуда коливань наростає доти, доки економіка не досягне «стелі» чи «підлоги» (нижньої межі), визначених відповідно ресурсами і виробничими потужностями. Пом'якшення циклічності можливе за допомогою спеціально підібраної динаміки автономних витрат (інвестицій), які тут виступають інструментом керування розвитком економіки.

Основне теоретичне значення цієї моделі полягає в тому, що вона є спробою ендогенного пояснення природи циклічних коливань в економіці.

Розглянемо **приклад.** Нехай економіка, що описується моделлю Хікса, має такі параметри: $c_1 = 0{,}5$; $c_2 = 0{,}15$; $\nu = 1{,}3$. Досліджуємо її динамічні властивості. Для цього обчислимо коефіцієнти c, s та w: $c = 0{,}65$; $s = 0{,}35$; $w = 1{,}15$. Перевіримо співвідношення між w і $(1+\sqrt{s})^2$: $1 < 1{,}15 < 2{,}53$. Отже, на основі наведеної вище таблиці класифікації, можна зробити висновок, що траєкторія Y є зростаючою з «вибуховими» коливаннями.

Справді, характеристичне рівняння (3) при заданих параметрах має комплексно-спряжені корені $\lambda_{1,2} = 0{,}9 \pm i\sqrt{0{,}34}$. Отже, динаміка коливальна; коефіцієнт згасання $r \equiv \sqrt{w} = 1{,}07 > 1$, тому амплітуда коливань посилюється. Як бачимо, для цих висновків про характер траєкторії доходу, не потрібні дані про зовнішнє втручання в економіку (незалежних витратах A_t), а також про її початковий стан. Характер динаміки в моделі Хікса визначається тільки внутрішніми властивостями системи, вираженими через параметри c_1, c_2, ν. Щоб одержати конкретну траєкторію доходу, необхідно задати його початкове значення Y_0 та автономні витрати A_t, які можуть бути сталими або змінюватися в часі за певним законом.

Розрахуємо траєкторії доходу, споживання та інвестицій за наступних умов. Нехай при $t = 0$ економіка перебуває в стані «бездіяльності» $Y_0 = C_0 = I_0 = A_0 = 0$. При $t = 1$ задамо початкове збурення у вигляді автономних інвестицій $A_1 = 5$, а також припустимо, що їхній темп приросту за одиницю часу сталий і становить 10%, тобто $A_t = A_1(1 + 0{,}1)^{t-1}$, $t = 1, 2, ..., T$.

Динаміка доходу буде в цьому випадку описуватися розв'язком такого виду:

$$Y_t = D_1\lambda_1^t + D_2\lambda_2^t + \bar{Y}_0(1+p)^t,$$

де D_1, D_2 — константи, зумовлені початковими умовами; $\bar{Y}_0$ — початковий рівень рівноваги, що дорівнює $\dfrac{A_0}{s}$; p — заданий темп приросту автономних капіталовкладень. У випадку комплексних коренів λ траєкторія коливатиметься навколо кривої зростання автономних інвестицій.

Скориставшись формулами (1), знайдемо значення доходу для періоду $t = [0, 32]$. Результати подано на графіку динаміки Y (рис. 3).

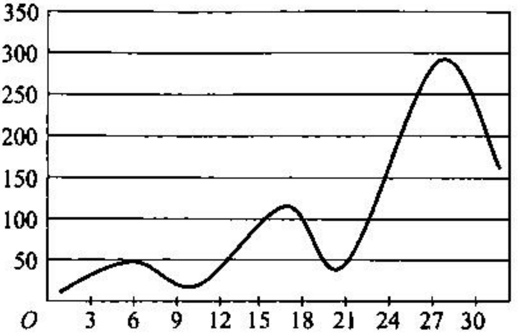


Рис. 3. Динаміка доходу

Як бачимо, характер коливань не змінився при введенні автономних інвестицій: амплітуда коливань збільшується, але тепер вони відбуваються навколо траєкторії екзогенних інвестицій, що забезпечує загальну зростаючу тенденцію доходу.

Розглянемо ще два приклади.

1. Нехай $c_1 = 0{,}4$; $c_2 = 0{,}25$; $\nu = 1{,}15$; $A_1 = 5$; $A_t = A_1(1 + 0{,}05)^t$. Тоді $c = 0{,}65$; $s = 0{,}35$; $w = 0{,}9$; $r = 0{,}949$. Траєкторія Y — зростаюча зі згасаючими коливаннями (рис. 4, зліва).

2. Нехай $c_1 = 0{,}6$; $c_2 = 0{,}1$; $\nu = 1{,}1$; $A_1 = 5$; $A_t = A_1(1 + 0{,}03)^t$. Тоді $c = 0{,}7$; $s = 0{,}3$; $w = 1$; $r = 1$. Траєкторія Y — зростаюча з рівномірними коливаннями (рис. 4, справа).

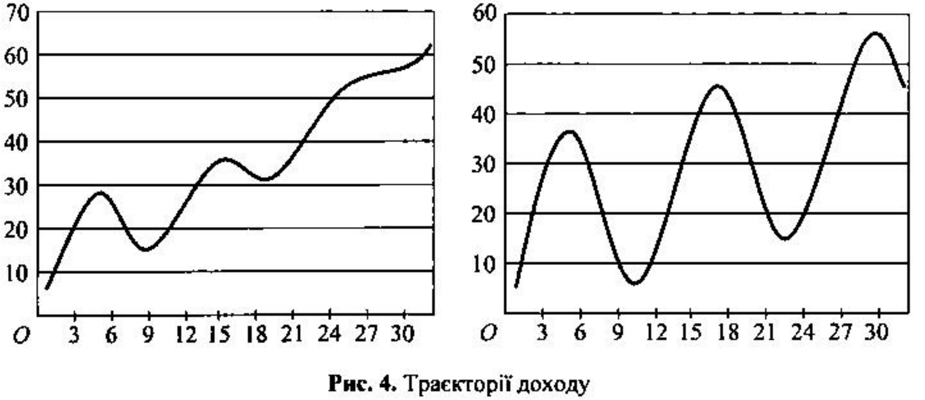


Рис. 4. Траєкторії доходу

6.3. Циклічна модель мультиплікатора-акселератора

Вибір типу моделі (дискретної чи неперервної) можна розглядати як питання «зручності» в тій чи тій ситуації. Для аналітичних цілей, коли ми хочемо застосувати теореми з диференціальних рівнянь, кращим є неперервний підхід. Якщо ж ми хочемо застосувати цю модель до експериментального часового ряду, що неминуче є дискретним, то доведеться використовувати дискретизацію. Те ж саме й тоді, коли засобів аналізу недостатньо, і ми змушені вдаватися до імітацій. Алгоритми для диференціальних систем необхідно дискретизувати.

Можливо, після відкриття хаотичного режиму тепер ми могли б надати перевагу неперервному підходу. Простий процес логістичного зростання, який добре вкладається в неперервний час, став найбільше вивченим прототипом для хаотичних процесів у дискретному часі. Нестабільності, які трапляються в дискретних процесах першого порядку, не виникають у неперервних процесах, доки вони не сягають третього порядку.

У період «золотого віку» економічної динаміки Філліпс (1954 р.) зрозумів, що процес другого порядку разом з лініями Самуельсона–Хірша може бути сформульований як неперервний процес, в якому похідні за часом можна інтерпретувати як показниково розподілені запізнення. Модель Філліпса є зручною точкою відліку, адже ми прагнемо вивчити процес другого порядку, водночас маючи доступ до аналітичних засобів теорії диференціальних рівнянь. Розглянемо дуже просту схему цієї моделі, запропоновану Алленом (1956 р.).

Позначимо дохід через Y. Заощадження S перебувають у заданому відношенні s до доходу. Зберігається незмінне відношення між основним капіталом K і доходом, ν означає коефіцієнт пропорційності. Інвестиції, що позначаються як I, за означенням є темпами зміни основного капіталу. Таким чином, $I = \nu Y$ і $S = sY$. Точкою відліку для Харрода слугувало твердження про те, що при рівновазі ми могли б мати $I = S$. Філліпс припустив, що існує адаптивний процес, при якому доходи зростають пропорційно до різниці інвестицій і заощаджень, тобто $\dot{Y} \sim (I - S)$. Припускалося, що подібна затримка відбувається і при регулюванні інвестицій, отже, $\dot{I} \sim \nu Y - I$.

При корегуванні рівнянь необхідно врахувати швидкість регулювання; заради загальності Філліпс допускав різні швидкості в двох адаптивних процесах. Попередні роботи Самуельсона і Хікса, які передбачали для всіх видів регулювань тотожно одиничні запізнення, стають простими спрощенням при такому моделюванні, якщо припустити, що два запізнення рівні між собою. Після усього, що нам задано, залишилося лише вибрати зручну одиницю виміру часу, аби зробити швидкість регулювання одиничною; при цьому можемо цілком обійтися і без позначення для неї. Отже, маємо:

$$\dot{Y} = I - sY, \tag{1}$$

$$\dot{I} = \nu Y - I. \tag{2}$$

Тоді ще раз диференціюємо рівняння (1), а для виключення інвестиції та її похідної за часом користуємося рівнянням (2), одержуючи, таким чином, основне рівняння:

$$\ddot{Y} - (\nu - 1 - s)\dot{Y} + sY = 0. \tag{3}$$

Залежно від знака виразу ($\nu - 1 - s$) воно може описувати згасаючі або вибухові коливання. Необхідно згадати про те, що ми маємо знехтувати так званими автономними витратами (урядовими, експортом або інвестиції, що не викликані акселератором). Річ у тім, що вони входять лише як неоднорідності і тому їх можна врахувати, знаходячи частковий розв'язок, до якого завжди можна додати розв'язок однорідного рівняння (3). Необхідно зазначити, що в обмеженому від'ємному «доході» немає нічого абсурдного, оскільки він вимірюється як відхилення від (додатної) стаціонарної рівноваги.

6.4. Безробіття: основні означення та вимірювання

Іншою серйозною макроекономічною проблемою є безробіття. Поняття «повна зайнятість» доволі складне щодо визначення. На перший погляд, його можна було б трактувати в тому розумінні, що всі 100% робочої сили мають роботу. Проте це не так. Певний рівень безробіття вважається нормальним і цілком виправданим.

Відповідно до міжнародних стандартів, розроблених у 1983 р. Міжнародною організацією праці (МОП), все населення можна поділити на три категорії:

1) *зайняті* — це ті люди, які виконують яку-небудь оплачувану роботу, а також ті, що мають роботу, але тимчасово не працюють через хворобу, страйк чи відпустку. До цієї категорії належать і ті, хто зайнятий неповний робочий день;

2) *безробітні* — ті, хто не має роботи, але активно шукає її або чекає, щоб повернутися на попереднє місце роботи. Конкретніше: людина вважається безробітною, якщо вона відповідає трьом критеріям одночасно:

- «без роботи»;
- «робить активні спроби знайти роботу»;
- «готова відразу ж приступити до роботи».

Зайняті та безробітні становлять **робочу силу**, або **економічно активне населення**, в даний момент часу;

3) *особи поза робочою силою*, або інакше *економічно неактивне населення*, — це, перш за все, люди у віці до 16 років, а також ті, хто перебуває у спеціалізованих установах (наприклад, психіатричних диспансерах, лепрозоріях, виправних закладах тощо). До цієї категорії належать і особи, які вибули зі складу робочої сили, — дорослі, які потенційно можуть працювати, але не працюють і не шукають роботи (навчаються, перебувають на пенсії, надто хворі, щоб працювати, або просто не шукають роботи).

Таким чином,

$$\text{Населення} = \text{Робоча сила} + \text{Особи поза робочою силою}.$$

$$\text{Робоча сила} = \text{Зайняті} + \text{Безробітні}.$$

Рівень безробіття визначається відношенням кількості безробітних до чисельності робочої сили. Позначається буквою *u* і вимірюється у відсотках:

$$u = \frac{\text{Безробітні}}{\text{Робоча сила}} \cdot 100\%.$$

Рівень зайнятості визначається як частка від ділення числа зайнятих до чисельності населення у віці від 16 років і старші:

$$\text{Рівень зайнятості} = \frac{\text{Зайняті}}{\text{Особи у віці від 16 років і старші}} \cdot 100\%.$$

Економісти розрізняють три види безробіття: *фрикційне, структурне, циклічне та інституціональне.*

Фрикційне безробіття виникає внаслідок постійного руху населення між регіонами і видами праці, а також у різних стадіях життєвого циклу. Навіть якщо економіці властива повна зайнятість, то завжди існують люди, які шукають роботу (після закінчення навчання, через переїзд на інше місце проживання або шукають роботу, яка б відповідала рівню їхньої кваліфікації чи вподобанням). Цей різновид безробіття вважається неминучим і певною мірою бажаним.

Структурне безробіття означає невідповідність між пропозицією праці та попитом на робочу силу. Така невідповідність виникає у зв'язку з технологічними змінами в процесі виробництва, коли попит на один різновид праці зростає, на інший — зменшується, а пропозиція не може швидко пристосуватися до цього. Структурна незбалансованість між видами діяльності виникає, якщо, наприклад, одні сектори економіки розширюються, а в інших скорочуються обсяги виробництва (скажімо, попит на працю набірника в друкарні різко скоротився у зв'язку з переходом на комп'ютерний набір інформації; механізація та автоматизація виробничих процесів витісняє некваліфіковану і малоосвічену робочу силу). Структурне безробіття теж вважається неминучим.

Відмінність між фрикційним і структурним безробіттям не дуже виразна. Суттєва різниця полягає в тому, що «фрикційні» безробітні мають навички, які вони можуть продати, а «структурні» безробітні не можуть відразу отримати роботу без перепідготовки, без додаткового навчання, а інколи і без зміни місця проживання. Структурне безробіття характеризується більшою тривалістю, а тому вважається серйознішою проблемою, ніж безробіття фрикційне.

До **циклічного безробіття** призводить спад виробництва, тобто та фаза економічного циклу, яка характеризується недостатністю сукупних витрат. Коли сукупний попит на товари і послуги зменшується, зайнятість скорочується, а безробіття зростає. В періоди економічного спаду циклічне безробіття доповнює фрикційне і структурне, а в періоди циклічного підйому воно відсутнє.

Інституціональне безробіття — це вид безробіття, який пов'язаний із функціонуванням самих інститутів ринку робочої сили та факторами, що впливають на його попит і пропозицію (неповна інформація про вакансії, завищений рівень допомоги для безробітних, занижені податки на доходи тощо).

Повна зайнятість *не означає абсолютної відсутності безробіття.* Економісти розглядають фрикційне, інституціональне та структурне безробіття як абсолютно неминучі; отже, «повна зайнятість» не означає стопроцентну зайнятість робочої сили.

Інакше кажучи, *рівень безробіття за умов повної зайнятості дорівнює сумі рівнів фрикційного, структурного, а також інституціонального безробіття.* Цей показник називають ще **природним рівнем безробіття;** він відповідає потенційному ВВП. Ця концепція вперше була запропонована у 1968 р. Мілтоном Фрідманом і незалежно від нього розроблена Едмундом Фелпсом із Колумбійського університету. Слово *«природний»* тут означає те, що фрикційне, структурне та інституціональне безробіття є неминучими, тоді як циклічне безробіття можна побороти за допомогою засобів макроекономічної політики.

Різниця між фактичним та природним рівнем безробіття дає показник циклічного безробіття.

Є економісти, які вважають неприпустимим використання терміну «природний» щодо безробіття, спричиненого структурними зрушеннями. Ось чому в макроекономічній літературі використовують як синонім ще й інший термін — **NAIRU (Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment),** котрий зосереджує увагу на тому, що рівень природного безробіття відповідає стану макроекономічної рівноваги, при якому фактична інфляція дорівнює очікуваній.

Основними причинами існування стійкого рівня безробіття є:

1) виплата допомоги для безробітних;

2) «жорсткість» заробітної плати.

Встановлення і виплата *допомог для безробітних* підвищують природний його рівень, оскільки полегшують долю безробітних.

При визначенні ймовірності того, чи стануть працівники безробітними, і якщо так, то чи довго вони ними залишатимуться, вчені розраховують *коефіцієнт заміни.* Він визначається співвідношенням доходу людини за умови, що вона безробітна, і доходу (після сплати податків), коли ця ж людина працює:

$$K_3 = \frac{\textit{Дохід за умови безробіття}}{\textit{Використовуваний дохід за умови зайнятості}}.$$

Допомога для безробітних сприяє підвищенню природного рівня безробіття, тому що:

• виплата цієї допомоги дає людині можливість довше підшуковувати собі роботу. Коли суми такої допомоги доволі великі, безробітний не поспішає з пошуком роботи, оскільки його життя за даних умов ще не дуже скрутне. Чим більший коефіцієнт заміни, тим меншою є нагальна потреба шукати роботу;

• щоб одержувати таку допомогу, слід належати до «робочої сили», тобто шукати роботу, навіть якщо людина насправді не хоче працювати; тоді її зараховують до безробітних. Якби допомоги для безробітних не було, то окремих людей не зараховували б до складу робочої сили, і тоді «вимірюваний» рівень безробіття був би нижчим.

Незважаючи на те, що виплати допомоги для безробітних підвищують його природний рівень, скасовувати такі виплати не можна. Якщо ми хочемо, щоб трудові ресурси в економіці ефективно перерозподілялися, людям треба давати певний час для пошуків роботи. Було б недоцільно змушувати кваліфікованого робітника, щойно він втратив роботу, ставати до нової, некваліфікованої через страх стати безробітним чи втратити час на пошуки роботи. Отже, навіть з огляду на економічну доцільність зводити виплати допомоги для безробітних до нуля — це не найкраще рішення.

Ще одним фактором, який впливає на рівень безробіття, є так звана *«жорсткість» заробітної плати,* тобто її нездатність до гнучкої зміни.

Механізм впливу мінімальної заробітної плати на зайнятість і безробіття відображено на рис. 5. Спочатку уявимо, що мінімальної заробітної плати не існує. Рівні зайнятості та безробіття визна-

Рис. 5. Мінімальна зарплата і безробіття

чаються попитом і пропозицією. Рівноважне значення заробітної плати, при якому зайнято N_0 осіб, дорівнює W_0 (точка E, що відповідає природному рівню безробіття). Нехай потім вводиться мінімальна заробітна плата W_{min}. Мінімум перебуває на рівні, який перевищує величину заробітної плати, при якій ринок праці перебуває у стані рівноваги. За такого рівня заробітної плати попит на працю становить лише N_1 і така сама кількість працівників зайнята. Однак при такому рівні мінімальної заробітної плати бажає працювати N_2 осіб. Таким чином, мінімальна заробітна плата підвищує безробіття на $(N_2 - N_1)$ осіб. Крім цього, вона скорочує зайнятість на $(N_0 - N_1)$ працівників.

«Застигання» ринку праці в нерівноважному стані буде пов'язане з:

1) законодавчим встановленням мінімуму заробітної плати;

2) фіксацією рівня заробітної плати в колективних договорах з профспілками;

3) «стимулюючою заробітною платою», яка встановлюється і підтримується фірмами для залучення кваліфікованої робочої сили, скорочення плинності кадрів та підвищення рівня продуктивності праці.

Рівень безробіття дуже відрізняється, залежно від груп населення за віком і професійним досвідом. Зокрема, рівень безробіття серед молоді набагато вищий, ніж в інших вікових групах. Тенденція до зростання природного рівня безробіття в довгостроковому періоді пов'язана зі:

• збільшенням частки молоді в складі робочої сили;
• збільшенням частки жінок у складі робочої сили;
• прискоренням структурних зрушень в економіці;
• підвищенням рівня життя й «очікуванням» на добрі робочі місця.

6.5. Економічні та соціальні втрати від безробіття. Закон Оукена

Надмірне безробіття призводить до значних економічних та соціальним втрат. *Головна «ціна» безробіття — це невипущена продукція.* Коли економіка не в змозі створити достатню кількість робочих місць для всіх, хто хоче і може працювати, потенційне виробництво втрачається безповоротно. Безробіття не дає змоги суспільству постійно рухатися вгору по кривій своїх потенційних можливостей. Цю втрачену продукцію ми визначили раніше як *розрив ВВП.* Чим більший рівень безробіття, тим значніше відставання ВВП.

Відомий дослідник у галузі макроекономіки Артур Оукен математично виразив зв'язок між рівнем безробіття та відставанням в обсязі виробленого ВВП. Цей зв'язок відомий нині як **закон Оукена.**

Відомі дві формули зазначеного взаємозв'язку:

1) Коли потрібно з'ясувати, як впливає зміна рівня *циклічного безробіття* на відхилення фактичного рівня ВВП від потенційно можливого, то користуються формулою:

$$\frac{Y - Y^*}{Y^*} \cdot 100\% = -\beta(u - u^*),$$

де Y — фактичний обсяг виробництва; Y^* — потенційний ВВП; u — фактичний рівень безробіття; u^* — природний рівень безробіття; $(u - u^*)$ — циклічне безробіття; β — коефіцієнт чутливості ВВП до динаміки циклічного безробіття (він показує, що коли фактичний рівень безробіття перевищує природний на 1%, то фактичний обсяг виробництва буде нижчим за потенційно можливий на β%).

Коефіцієнт β у відсотках найчастіше набуває значень у межах від 2 до 2,5. Це дає змогу зробити такий висновок: якщо циклічне безробіття в економіці становить 1%, то відставання фактичного обсягу виробництва від потенційно можливого дорівнюватиме $2 \div 2{,}5\%$.

2) Можна визначати також вплив *динаміки фактичного рівня безробіття на динаміку реального ВВП* за два періоди, які порівнюються між собою. Тоді скористуються такою формулою:

$$\frac{Y_1 - Y_0}{Y_0} \cdot 100\% = 3 - 2(u_1 - u_0),$$

де Y_1 — фактичний обсяг виробництва в поточному році; Y_0 — фактичний обсяг виробництва у попередньому році; u_1 — фактичний рівень безробіття в поточному році (у відсотках); u_0 — фактичний рівень безробіття у попередньому році (у відсотках).

Ця формула свідчить про те, що:

а) коли рівень безробіття не зміниться порівняно з попереднім ($u_1 = u_0$), то темп зростання реального ВВП дорівнюватиме 3%. Цей показник називають *темпом зростання потенційного ВВП*, а його значення зумовлене приростом населення, нагромадженням капіталу та науково-технічним прогресом;

б) при збільшенні рівня безробіття на 1% порівняно з попереднім роком реальний ВВП скоротиться на 2%.

Закон Оукена розкриває істотний зв'язок між ринком продукту і ринком праці та ще раз нагадує про те, що безробіття є основною проблемою сучасного суспільства. Коли рівень безробіття високий, ресурси використовуються не повністю, значна частина продуктів не добирається, доходи населення зменшуються.

Проте циклічне безробіття — це не лише економічне лихо, а й велика соціальна катастрофа. Депресія призводить до бездіяльності, а бездіяльність — до втрати кваліфікації, втрати самоповаги, занепаду моральних принципів, а також до громадського і політичного безладдя.

Нещодавні дослідження американських вчених показали, що безробіття призводить до погіршення і фізичного, і психологічного станів людей — підвищується рівень серцевих захворювань, алкоголізму та самогубств. Психологічні тести показують, що травма, спричинена втратою роботи, за рівнем стресу відповідає смерті близької людини.

6.6. Інфляція

Інфляція є основною проблемою в багатьох країнах, що розвиваються. Вона свого часу не оминула і республік колишнього СРСР, які стали на шлях створення ринкових економічних відносин, у тому числі й України.

Інфляція означає зростання загального рівня цін. Інакше кажучи, це — падіння купівельної спроможності грошей, підвищення грошової вартості життя.

Можливе ще й таке означення інфляції. **Інфляція** — це процес знецінення грошей, який проявляється як стійке підвищення загального рівня цін у результаті перевантаження сфери обігу грошовою масою, що не підтверджена матеріальними цінностями.

Рівень інфляції показує, як змінилися ціни в економіці; він вимірюється за допомогою індексів цін — як різниця між значенням цього індексу за певний період (у відсотках) і 100%:

$$\pi = I_{цін} - 100\%.$$

Темп інфляції показує, як змінилася сама інфляція за певний період (прискорилася чи сповільнилася); він визначається за формулою:

$$Темп\ інфляції = \frac{I^1_{цін} - I^0_{цін}}{I^0_{цін}},$$

де $I^1_{цін}$, $I^0_{цін}$ — відповідно ціновий індекс у поточному і минулому періодах.

Протилежним до інфляції поняттям є **дефляція**, яка виникає тоді, коли загальний рівень цін падає і купівельна спроможність грошей підвищується. Дефляція трапляться вкрай рідко.

Дезінфляція означає сповільнення темпів інфляції. В Україні періоди дезінфляції були в 1995 – 1996 рр., коли високі темпи інфляції, що вимірювалися чотиризначними числами, були зменшені завдяки застосуванню активної стабілізаційної політики.

В економіці немає одного певного виду інфляції, оскільки вона зумовлюється різними факторами. Одні види інфляції зумовлює, наприклад, попит, інші — пропозиція. Тому й розрізняють інфляцію попиту та інфляцію пропозиції. Іноді ще виділяють **структурну інфляцію**, спричинену макроекономічною міжгалузевою незбалансованістю.

Однією з головних причин для виникнення інфляції може стати якась зміна (скажімо, у споживчих та інвестиційних витратах, урядових видатках, чистому експорті), що призводить до значної зміни сукупного попиту, а обсяг виробництва виходить за межі потенційного. **Інфляція попиту** спостерігається тоді, коли сукупний попит зростає швидше ніж виробничий потенціал економіки, а тому ціни, намагаючись зрівноважити пропозицію і попит, зростають.

Інфляція попиту була притаманна нашій економіці на початку 90-х рр. XX ст., коли радянський уряд фінансував свій бюджетний дефіцит, використовуючи друкарський верстат, а величезні черги людей збиралися в магазинах, щоб позбутися зайвих грошей і придбати якомога більшу кількість товарів «про запас».

Основи інфляції попиту з'ясували ще економісти-класики, які користувалися цим поняттям для характеристики динаміки цін в історичному аспекті. Проте у другій половині XX ст. інфляційний процес змінився: ціни зростають повільно в періоди спаду і швидше — в роки піднесення. Сучасну інфляцію від просто інфляції попиту відрізняє те, що ціни починають зростати ще до досягнення повної зайнятості, бо витрати на працю, капітал та матеріали мають здатність збільшуватися навіть у недовантаженій економіці. Це явище відоме як *інфляція витрат*, або *інфляція пропозиції*.

Інфляція, що виникає через зростання витрат у періоди високого безробіття і неповного використання виробничих ресурсів, називається **інфляцією витрат**, або інакше **інфляцією пропозиції**.

Таким чином, інфляція витрат пов'язана зі скороченням сукупної пропозиції внаслідок дії несприятливих зовнішніх шоків — підвищення цін на сировину, матеріали, зростання номінальної заробітної плати та ін., — які сприяють збільшенню витрат виробництва, падінню обсягів випуску і зайнятості, зростанню безробіття. Цей тип інфляції призводить до **стагфляції** — такої ситуації в економіці, коли одночасно відбувається підвищення рівнів інфляції та безробіття на фоні загального спаду виробництва.

Поєднання інфляції попиту та інфляції витрат створює так звану **інфляційну спіраль**.

Під час відкритої інфляції в економці виникає інфляційна спіраль «зарплати — ціни», при якій підвищення заробітної плати породжує підвищення цін, а це призводить до подальшого зростання цін і ставок заробітної плати.

6.6.1. Інфляція і процентні ставки. Ефект Фішера

Уявіть собі, що ви поклали свої заощадження на банківський рахунок під 6% річних. Наступного року ви знімаєте свої заощадження разом із сумою нарахованих процентів. Чи станете ви на 6% багатшими порівняно з тим періодом, коли вкладали свої кошти в банк минулого року?

Відповідь на це запитання залежить від того, як розуміти слово «багатший». Безсумнівно, грошей ви тепер матимете на 6% більше. Але як змінилися ціни на товари та послуги за рік, що минув? Коли вони зросли, скажімо, на 4%, то кількість товарів і послуг, які ви зможете тепер придбати, зросла лише на2 %. А коли б рівень інфляції становив 10%, то ваша купівельна спроможність насправді скоротилася б на 4%.

Економісти називають банківський процент **номінальною процентною ставкою,** а збільшення вашої купівельної спроможності — **реальною процентною ставкою.** Якщо номінальну процентну ставку позначити через i, реальну процентну ставку — r, а інфляцію — π, то залежність між цими трьома змінними виражається так:

$$r = i - \pi.$$

Отже, реальна процентна ставка є різницею між номінальною процентною ставкою та рівнем інфляції.

Перегрупувавши члени цього рівняння, побачимо, що номінальна процентна ставка є сумою реальної процентної ставки і рівня інфляції:

$$i = r + \pi.$$

Рівняння, записане в такому вигляді, має назву **рівняння Фішера.** Воно вказує на те, що номінальна процентна ставка може змінюватися під впливом двох причин: внаслідок зміни реальної процентної ставки або ж унаслідок зміни рівня інфляції.

Відповідно до рівняння Фішера, збільшення рівня інфляції на 1% призводить до підвищення номінальної процентної ставки на 1%. Це співвідношення між рівнем інфляції і номінальною процентною ставкою має назву **ефекту Фішера.**

Інфляція впливає на економіку шляхом:

• перерозподілу доходу і багатства між різними групами людей;

• спотворення відносних цін та обсягів виробництва різних товарів.

Водночас потрібно зазначити, що вплив інфляції на рівень реальних доходів та обсяги виробництва суперечливий і залежить від того, якою є ця інфляція — очікуваною чи непередбаченою.

Непередбачена інфляція перерозподіляє багатство між різними групами людей. Вона переважно сприяє боржникам, спекулянтам тощо. Водночас вона шкодить кредиторам, групам з фіксованими доходами, власникам заощаджень. Непередбачене зниження темпів інфляції дає протилежний ефект. Усупереч стереотипам статистика показує, що бідні сім'ї часто мають вигоду з інфляції за рахунок заможних сімей.

Окрім перерозподілу доходів, інфляція впливає і на загальний обсяг виробництва.

Економісти вважають, що немає прямого зв'язку між цінами та обсягом виробництва. Збільшення сукупного попиту збільшує і ціни, і обсяг виробництва. Проте потрясіння в пропозиції, переміщуючи вгору криву сукупної пропозиції, підвищать ціни і зменшать обсяг виробництва. Ми доходимо висновку, що *інфляція може поєднуватися як з вищим, так і з нижчим рівнями обсягу виробництва.*

Очікувана інфляція. Припустимо, що всі ціни зростають щороку на 5%, а всі реальні процентні ставки саме такі, якими вони були б, якби ціни залишалися стабільними. Чи хтось турбуватиметься такою інфляцією? Відповідь: ні. *Інфляція, яка є збалансованою* (тобто такою, що не змінює відносні ціни) *і передбаченою, не впливає на загальний обсяг виробництва чи перерозподіл доходів.* Наш дохід теж зростатиме на 5%. Проте цей вид інфляції є рідкісним.

Значно частіше трапляється **незбалансована інфляція**, тобто така, яка *впливає на відносні ціни, затрати і податки.* Навіть тоді, коли незбалансована інфляція передбачена, ціни не встигають пристосуватися до інфляційних тенденцій. Проте і в цьому випадку, враховуючи майбутні зміни в рівні цін, *люди мають можливість скоригувати свої номінальні доходи,* зменшуючи цим негативні наслідки інфляції.

Існує три типи інфляції: помірна, галопуюча, гіперінфляція.

Помірна інфляція характеризується повільним зростанням цін: щорічний рівень інфляції вимірюється однозначним числом. Коли ціни відносно стабільні, то люди довіряють грошам і охоче нагромаджують їх, підписують довгострокові контракти у номінальних цінах. Вони не витрачають часу і коштів, намагаючись розмістити своє багатство в «реальних» активах, оскільки впевнені, що рівень цін не дуже збільшиться порівняно з тим, який існує сьогодні.

Галопуюча інфляція — це інфляція, що вимірюється двозначними чи тризначними числами (50% або 300% за рік). Коли помірна інфляція перероджується у галопуючу, виникають економічні спотворення. Гроші втрачають свою вартість, фінансові ринки звужуються, населення нагромаджує товари, купує нерухомість і ніколи не віддає гроші в позику за низькими номінальними процентними ставками. Люди намагаються вкласти свої гроші за кордоном, а це призводить до скорочення внутрішніх інвестицій.

Гіперінфляція — це третій вид інфляції: ціни зростають на тисячі, мільйони чи навіть мільярди процентів на рік. Гіперінфляція, як правило, пов'язана з нерозумною державною політикою, руйнівно впливає на обсяг національного виробництва і зайнятість, може підірвати фінансову систему і прискорити крах.

6.6.2. Взаємозв'язок інфляції та безробіття. Крива Філліпса

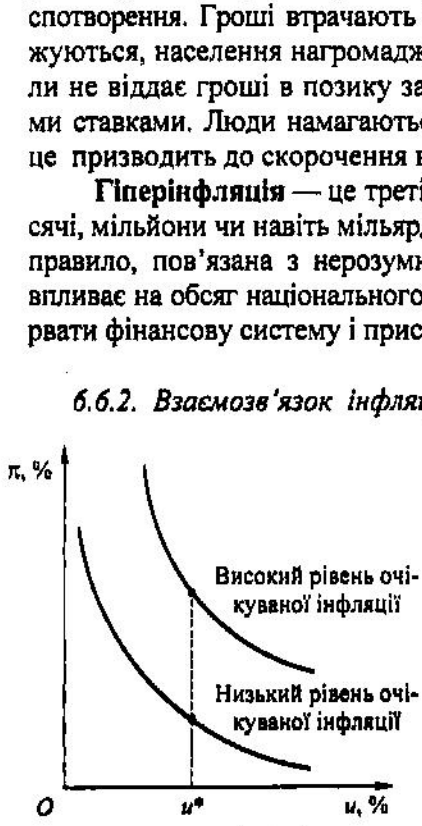


Рис. 6. Криві Філліпса

Основними завданнями економічної політики є досягнення низького рівня безробіття та низького рівня інфляції.

В короткостроковому періоді між рівнями інфляції та рівнями безробіття існує зворотна залежність, графік якої має назву **кривої Філліпса** (рис. 6).

Крива Філліпса показує, що рівень інфляції залежить від трьох факторів: очікуваної інфляції; циклічного безробіття, тобто відхилення фактичного рівня безробіття від його природного значення; шокових змін пропозиції.

Три зазначені фактори зводяться воєдино у рівнянні кривої Філліпса:

$$\pi = \pi^e - \gamma(u - u^*) + \varepsilon$$

(*Інфляція = Очікувана інфляція – γ·Циклічне безробіття + Шоки пропозиції*),

де γ — це параметр, який показує, наскільки відчутно реагує інфляція на динаміку циклічного безробіття; цей коефіцієнт завжди більший від нуля.

Зауважимо, що перед показником циклічного безробіття стоїть знак «мінус»: при високому рівні безробіття спостерігається тенденція до зменшення темпів інфляції.

Таким чином, у короткостроковому періоді економічна політика, спрямована на швидке зниження рівня безробіття, вестиме до прискорення інфляції. Треба вибирати між:

1) політикою, спрямованою на *економічне пожвавлення з високими темпами приросту ВВП*, що швидко знизить безробіття,

2) політикою *пожвавлення з повільним приростом ВВП*, що дає змогу сповільнити інфляцію, але за рахунок тривалого безробіття.

Цей вибір залежатиме від очікуваного рівня інфляції: чим більшим буде цей рівень, тим вище розміщуватиметься крива Філліпса. А це означає, що фактичний рівень інфляції також буде вищим для будь-якого рівня безробіття.

6.6.3. Інфляційний податок та сеньйораж. Крива Лаффера

Інфляційний податок — це втрата капіталу власниками грошових коштів внаслідок інфляції.

Інфляційний податок сплачується автоматично домашніми господарствами, оскільки зі зростанням цін вони витрачають більше своїх грошових коштів.

Інфляційний податок визначається таким співвідношенням:

$$\boldsymbol{IT} = \frac{P_1 - P_0}{P_1} \cdot \frac{M_1}{P_1},$$

де P_1, P_0 — рівень цін відповідно у поточному та попередньому роках, M_1 — пропозиція грошей у поточному році.

Сеньйораж — це дохід, який отримує уряд внаслідок монопольного права друкувати гроші.

Сеньйораж може бути визначений купівельною спроможністю грошей, випущених в обіг за даний період:

$$\boldsymbol{SE} = \frac{M_1 - M_0}{P_1} = \frac{M_1 - M_0}{M_1} \cdot \frac{M_1}{P_1}.$$

Якщо

$$\frac{M_1}{P_1} = \frac{M_0}{P_0}, \text{ то } \boldsymbol{IT} = \boldsymbol{SE}.$$

Для інфляційного податку існує **крива Лаффера**. Вона показує величину надходжень від інфляційного податку при різних рівнях інфляції в умовах, коли економіка перебуває в стані рівноваги і темпи інфляції не змінюються в часі (рис. 7).

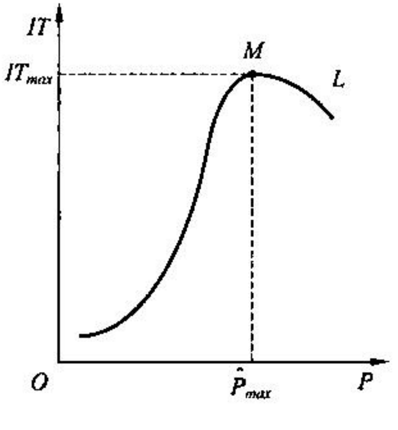


Рис. 7. Крива Лаффера

Зі зростанням інфляції база оподаткування (у цьому випадку — це попит на реальні грошові залишки) зменшується. Максимальний інфляційний податок IT_{max} досягається, за графіком, при рівні інфляції $\hat{P}_{max}$. Подальше зростання інфляції призводить до скорочення надходжень, оскільки високий рівень інфляції не компенсує скорочення рівня реальних грошових залишків, які, власне, й обкладаються податком (відрізок *ML*).

Отже, при стійких темпах інфляції існує максимальний бюджетний дефіцит (IT_{max}), який фінансується за допомогою друкування грошей. Уряд може тимчасово фінансувати дефіцит, який є більшим за IT_{max}, але за рахунок прискорення інфляції, замість збереження її стабільного темпу. Якщо уряд намагається довгий час фінансувати більший, ніж IT_{max}, дефіцит бюджету, то це призводить до *гіперінфляції*.

Наслідками інфляції є:

а) зниження життєвого рівня населення у формі зниження реальної вартості особистих заощаджень та скорочення поточних реальних доходів. При цьому поточні реальні доходи населення знижуються навіть за умови індексації, оскільки протиінфляційні компенсації відстають від темпу зростання цін (при гіперінфляції важко передбачити рівень зростання цін) і не покривають скорочення доходів населення;

б) ефект інфляційного оподаткування (*ефект Танзі–Олівера*);

в) падіння виробництва як результат зниження стимулів до праці та розширення виробництва;

г) некерована інфляція, що порушує управління економікою загалом.

До протиінфляційних заходів належать:

- стабілізація інфляційних очікувань;
- грошові обмеження;
- розв'язання проблем бюджетного дефіциту;
- реформи оподаткування;
- структурна перебудова і конверсія військового виробництва;
- регулювання валютного курсу;
- підвищення ступеня товарності економіки;
- приватизація;
- засоби збільшення норми заощаджень та зменшення їхньої ліквідності.

Задачі для самостійної роботи

При розв'язуванні цих задач безпосередньо використовуються визначення та формули теоретичної частини.

1. Для моделі ділового циклу Хікса фактор акселерації $v = 0{,}4$, схильність до споживання $c_1 = 0{,}75$, $c_2 = 0$, $A_0 = 0$. Побудувати загальну траєкторію ділової активності, якщо $Y_0 = 50$. Дати економічне тлумачення можливих наслідків.

2. Використати наведені в задачі 1 дані для розрахунку величини робочої сили та рівня безробіття. Все населення становить 500 тис. чол., у тому числі:

- діти до 16 років та особи, які перебувають у психіатричних лікарнях та виправних закладах, — 120 тис. чол.;
- доросле населення, яке вибуло зі складу робочої сили, — 150 тис. чол.;
- безробітні — 23 тис. чол.;
- особи, які зайняті неповний робочий день і шукають роботу, — 10 тис. чол.

3. Нехай рівень безробіття становить 8%. Наскільки швидким має бути економічне зростання (щорічний процент зростання), щоб знизити рівень безробіття до 6%:

а) за 1 рік; б) за 2 роки.

4. Природний рівень безробіття у поточному році становить 5%, а фактичний — 9%. Визначити величину відносного відставання реального ВНП від потенційного за умови, що коефіцієнт чутливості ВНП до динаміки циклічного безробіття дорівнює 2,5. Якщо реальний ВНП у цьому ж році становить 500 млрд. дол., то який обсяг продукції було втрачено через безробіття?

5. Обчислити абсолютні втрати продукції, пов'язані з безробіттям, якщо фактичний рівень безробіття становить 9,5%; природний рівень — 6%; номінальний обсяг ВНП — 3 300 млрд. гр. од.

6. Визначити обсяг фрикційного безробіття за умови, що кількість тимчасово непрацюючих унаслідок переходу з одного підприємства на інше становить в середньому 20 млн. чол. на рік і кожен з них перебував на ринку робочої сили в середньому 1 місяць.

7. Мешканців деякого студентського гуртожитку умовно розділили на тих, хто ходить на побачення, і тих, хто не ходить. З'ясувалося, що серед тих, хто ходить на побачення, 10% розривають свої стосунки щомісяця. Серед тих, хто ще ні з ким не зустрічався, 5% щомісяця починають ходити на побачення. Якою є та стабільна частка мешканців, які не ходять на побачення?

8. Наведена таблиця містить дані щодо норми (рівня) безробіття і темпу інфляції у Франції. Що трапилося з кривою Філліпса?

Індекс споживчих цін як вимірник інфляції (% за рік)	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
	9,6	7,4	5,8	2,5	3,3	2,7	3,5	2,8
Норма безробіття	8,3	9,7	10,2	10,4	10,5	10,0	9,4	9,8

9. а) Як показано в таблиці, попит на реальні гроші національного банку $\left(\frac{H}{P}\right)$ (джерело сеньйоражу) зменшується разом з темпом інфляції (дані в млрд. гр. од.). Сеньйораж є податком, що його застосовують до попиту. Ставка оподаткування дорівнює темпу інфляції. Обчислити сеньйораж як функцію темпу інфляції (темпу інфляції 5% відповідає податкова ставка, що дорівнює 0,05). Який темп інфляції максимізує сеньйораж?

	Темп інфляції у %							
	0	1	2	5	10	20	25	50
$\left(\frac{H}{P}\right)$	1000	905	819	607	368	435	82	7

б) Попит на гроші національного банку H описується функцією $\left(\frac{H}{P}\right) = Ae^{(-\alpha\pi)}$. За умови тривалої рівноваги темп інфляції є стабільним $\left(\frac{\partial\pi}{\partial t} = 0\right)$. Сеньйораж — це $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)/P$. Обчислити сеньйораж у довгостроковому періоді і знайти темп інфляції, при якому надходження максимальні. Тут $A = 1000$, $\alpha = 10$. Перевірити результат.

ЧАСТИНА II

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Застосування математики в екології має давню історію. Однак сучасна математична екологія починається з книги В. Вольтерра — першої спроби побудови математичної теорії біологічних спільнот. Як зазначав сам Вольтерра, «... слід схематизувати явища, вибираючи гіпотези, можливо грубі, але прості, що дають змогу провести математичні міркування».

Як правило, у вольтеррівських моделях описуються популяції та спільноти живих організмів; при цьому припускається, що параметри абіотичного (неживого) середовища є фіксованими. Існує велика кількість моделей, які описують динаміку абіотичних компонентів екосистеми (переважно за допомогою рівнянь математичної фізики).

Інший важливий розділ математичної екології присвячений моделям екосистемного рівня, що відображають взаємодію живих організмів та їхнього абіотичного середовища.

Живі організми та їхнє абіотичне оточення нерозривно пов'язані один з одним і перебувають в постійній взаємодії. Будь-яка біосистема, що охоплює всі організми, які спільно функціонують (біотична спільнота) на даній ділянці, і взаємодіє з фізичним середовищем таким чином, що потік енергії утворює чітко визначені біотичні структури і кругообіг речовин між живою і неживою частинами, становить **екологічну систему (екосистему)**.

Складність будови і функцій екосистем та їхній комплексний характер роблять екосистеми одним з найважчих для вивчення об'єктів і потребують об'єднання методів та концепцій фізичних, хімічних, геолого-географічних і біологічних наук. Важко обходитися при цьому і без соціально-економічних наук, оскільки основна мета екології в широкому розумінні — це організація раціонального природокористування, гармонійного співіснування біосфери і людини. Але найголовнішу роль в комплексних екологічних дослідженнях відіграє математичне моделювання.

Як і в математичній економіці, при побудові моделей математичної екології використовується досвід математичного моделювання механічних та фізичних систем. Звісно, біологічні системи мають багато специфічних особливостей, серед яких можна виділити такі:

— складність внутрішньої будови кожної особини;

— поліфакторність зовнішнього середовища (умов життєдіяльності організмів);

— незамкненість (проточність) екосистеми як в енергетичному, так і в структурному (інформаційному) розумінні;

— істотна нелінійність, тобто величезний діапазон зовнішніх характеристик, при яких зберігається життєздатність систем.

Ці особливості мають такі «математичні наслідки»:

— фазовий простір біологічної системи є багатовимірним;

— математична модель біологічної системи повинна містити багато параметрів, які задають складне середовище функціонування системи;

— необхідність сумісного моделювання біосистеми і середовища її функціонування;

— модель має враховувати різноманітний характер нелінійностей біологічних систем, зокрема експоненціальні нелінійності.

Можна сформулювати такі принципи математичного моделювання екосистем, значною мірою заснованих на ідеях О.А. Ляпунова.

1. Побудова концептуальної основи моделі

В основі математичної моделі біологічного явища має бути його детальне вивчення. Зокрема, потрібно виділити основні елементи та об'єкти, які визначають явище (компоненти явища), і перерахувати ті елементарні акти, в які ці об'єкти вступають, а також зміни, що відбуваються в об'єктах у результаті виконання вказаних актів.

Значне місце в математичній екології мають займати різноманітні «предмоделі», тобто логічні (концептуальні) схеми майбутніх моделей, які передують самим моделям. Їхнє призначення полягає насамперед в тому, щоб в умовах недостатньої інформації для побудови моделей в цілому пов'язати існуючі уявлення про перебіг явища і з'ясувати, які додаткові дослідження потрібні для одержання необхідних даних.

Після цього конструюється певна абстрактна система, елементами якої є абстрактні об'єкти — образи компонентів тих явищ, які досліджуються. Ці абстрактні об'єкти підпорядковуються певним співвідношенням, що описують елементарні акти і відповідні їм перетворення об'єктів. Здійснення будь-яких інших актів заборонено. Така абстрактна система називається ***математичною моделлю природного явища.***

2. Повнота опису

Вимога повноти полягає в тому, що в кожній ситуації, яка може виникнути в даній системі, має бути зрозуміло, який елементарний акт буде виконуватися.

Проте це не виключає, що деякі акти можуть мати випадковий характер і описуватися ймовірнісними методами. Крім цього, повнота опису не передбачає врахування всіх дрібних обставин, які можуть вплинути на досліджуване явище.

3. Принцип моделі «в розвитку»

Завжди потрібно починати з побудови простіших математичних моделей реальних процесів. Спочатку необхідно відчутно «спростити» досліджуване явище і, лише з'ясувавши, що є поганого у «спрощеній» моделі, вводити її ускладнення. Послідовність моделей, яка чимраз краще і краще описує дійсність, сама собою викликає інтерес. Водночас при побудові надто складної моделі легко заплутатися і піти хибним шляхом.

Реалізації цього принципу покликана сприяти блочна (модульна) структура моделі. В цьому випадку модель складається з доволі автономних підмоделей (блоків, модулів), які описують відповідні частини екосистеми. Така структура дає змогу нарощувати кількість блоків, враховувати нові фактори та природничо-наукові відомості.

4. Ієрархія моделей

Система моделей математичної біології має будуватися відповідно до рівнів живої природи. Згідно з класифікацією Н.В. Тимофєєва-Ресовського, можна виділити чотири таких рівні: 1) клітинно-молекулярний; 2) організмовий; 3) популяційний; 4) біогеоценологічний. До сфери екології належать два останніх рівні.

Популяцію можна означити як будь-яку групу з організмів одного виду, яка обіймає певний простір і функціонує як частина біотичної спільноти. Остання, зі свого боку, означається як сукупність популяцій, що функціонує як цілісна одиниця у відведеному їй просторі фізичного середовища.

Біогеоценоз (БГЦ) — це «сукупність на певному просторі земної поверхні однорідних природних явищ (атмосфери, гірської породи, грунту та гідрологічних умов), що має свою особливу специфіку взаємодій компонентів, які її утворюють, і певний тип обміну речовиною та енергією між ними та з явищами природи; це — внутрішньо суперечлива діалектична єдність, що перебуває в постійному русі та розвитку».

Поняття БГЦ та екосистеми близькі за змістом і часто використовуються як синоніми. Однак вони не є тотожними. Основна відмінність між ними полягає в тому, що при виділенні екосистеми не є суттєвими природні межі: як екосистеми можуть розглядатися не лише реально існуючі спільноти, а й будь-які інші структури, навіть нестійкі або такі, що не мають цілісності.

При побудові ієрархії моделей треба прагнути того, щоб об'єкти моделювання нижчого рівня служили елементами моделей вищого рівня.

5. Системний підхід

При системному підході до вивчення БГЦ одним з основних етапів дослідження є побудова структурно-функціональної схеми БГЦ. Йдеться про опис системи кругообігів речовини і потоків енергії в БГЦ. Сутність системного підходу до вивчення БГЦ полягає в тому, що:

а) кожен БГЦ розглядається як система з певних блоків;

б) в кожному з блоків міститься запас різних субстанцій;

в) існують потоки субстанцій, що переходять з одного блоку в інший, і ті, що входять і виходять з деяких блоків БГЦ за його межі.

Субстанціями вважають речовину та енергію, що циркулює в біосфері, а *блоком* — певний елемент БГЦ, до якого субстанція надходить, в якому вона зберігається, можливо, перетворюється і з якого вона виходить. При описі процесів обміну в одному й тому самому БГЦ його можна розбити на блоки різного масштабу. В одному випадку блоками можна вважати популяцію, в іншому —функціональну групу організмів тощо.

Кожний блок характеризується набором субстанцій, які в ньому зберігаються, та їхньою кількістю (запасами). Виділення субстанцій, блоків та потоків має задовольняти вимоги повноти опису, які конкретизуються таким чином:

а) якщо в деякий блок надходить певна субстанція, то мають бути враховані всі потоки даної субстанції, які призводять до помітної зміни кількості цієї субстанції в блоці або до помітного переміщення субстанції через блок. Крім цього, для кожного потоку кількість будь-якої вхідної субстанції має дорівнювати кількості субстанції, що направляється цим потоком в інші блоки. Інакше кажучи, для кожної врахованої субстанції, кожного блоку і кожного потоку повнота опису має забезпечити можливість складання балансу;

б) далеко не всі потоки і всі субстанції, які перерозподіляються в блоці, є незалежними між собою;

в) слід визначити, які субстанції відіграють істотну роль в існуванні блока та описати їхню циркуляцію.

Для побудови математичної моделі важливо визначити інтенсивність всіх потоків. Для цього необхідно визначити, від яких параметрів залежать коефіцієнти пропорційності між інтенсивністю потоків та запасами субстанцій, якими законами природи керуються ці залежності і як вони кількісно виражаються. В найпростішому випадку ці коефіцієнти можна вважати сталими чи такими, що змінюються ступенево або лінійно.

Таким чином, побудова математичної моделі для процесів обміну в БГЦ зводиться до того, що для кожного блоку, а також і для кожної субстанції в межах блоку визначається баланс за певний проміжок часу. Це дає змогу перерахувати новий розподіл досліджуваних субстанцій між блоками системи.

Для наступного моменту часу за встановленими правилами треба перерахувати всі інтенсивності потоків; потім, використовуючи балансові рівняння, визначити розподіл субстанції за блоками на новий момент часу. Послідовно повторюючи цю операцію, можна простежити перерозподіл субстанції між блоками системи з плином часу.

6. Інформаційне забезпечення

Коли вже з'ясована схема перебігу процесу і на її основі сформульована математична задача, то таким чином виокремлені початкові дані, необхідні для проведення розрахунків за моделями. Ці дані можна розподілити на дві частини:

1) ті, що характеризують початковий стан системи;

2) ті, що характеризують інтенсивність перебігу різних часткових процесів. Останні, зі свого боку, поділяються на дві групи параметрів та співвідношень між ними: а) які можна «витягнути» з відомих загальних законів природи; б) які при вивченні даного явища мають бути знайдені експериментально.

Все, що стосується групи 2а), можна взяти з довідників загального призначення, а те, що стосується груп 1) та 2б), потрібно добирати шляхом спеціальних спостережень та експериментів. Крім цього, дані з групи 1) слід мати для різних моментів часу, аби можна було зіставляти перебіг природного явища з модельними розрахунками (верифікація моделі).

Необхідно забезпечити достатньо повний перелік значень початкових даних, а також їхню точність. Це означає, що багато початкових даних потрібно визначати у результаті спостережень, які проводяться на різних ділянках території досліджуваного БГЦ чи на її межі. При цьому слід з'ясувати, як раціонально розмістити пункти спостереження і з якою точністю проводити виміри, щоб результати, які визначаються моделлю на основі цих початкових даних, були достатньо точними. Це дуже серйозне питання, недооцінювання важливості якого може звести нанівець всю роботу з математичного моделюванню біосферних процесів.

Широкого застосування мають набути математичні методи планування експерименту та обробки спостережень, а також спеціальні методи оптимізації спостережень за станом екосистем.

Однією з центральних проблем екології взагалі і математичної екології зокрема є проблема стійкості, стабільності екосистем. Довго існувати можуть лише стійкі екосистеми. З іншого боку, межі стійкості системи встановлюють ті максимальні навантаження на неї, перевищення яких призведе до руйнації. Цей аспект набуває особливої актуальності у зв'язку з посиленням антропогенного впливу на екосистеми.

Незважаючи на здавалося б очевидність поняття стійкості, його загальноприйнятого однозначного означення досі немає. Виділяють два типи стійкості (стабільності): *резистентна* (здатність залишатися в стійкому стані під навантаженням) і *пружна* (здатність швидко відновлюватися); ці два типи стабільності пов'язані оберненою залежністю. Стосовно біологічних спільнот поняття стійкості зазвичай зводиться до вимоги збереження чисельності видів протягом тривалого часу.

Якщо маємо достатньо повну і адекватну модель біологічної спільноти, то на питання про стійкість реальної спільноти можна відповісти, досліджуючи цю модель методами математичної теорії стійкості. Методологічно такий підхід виправданий тим, що аналіз стійкості моделі дає змогу формувати різні гіпотези щодо поведінки модельованого об'єкта, виконання або відсутність яких в реальності визначає додаткові аргументи у міркуваннях щодо адекватності моделі.

Будемо вважати, що *спільнота стійка*, якщо стійким є деякий нетривіальний додатний розв'язок системи диференціальних (різницевих) рівнянь, яка є моделлю цієї спільноти. Як правило, розглядається лише стійкість стаціонарних розв'язків, до того ж таких, для яких чисельність жодного з видів не дорівнює нулю або нескінченності. Ці розв'язки називаються *нетривіальною рівновагою*, або просто *рівновагою*, спільноти. Зі стійкості таких розв'язків випливає збереження чисельності видів у спільноті.

З багатьох математичних означень стійкості найчастіше застосовується поняття стійкості за Ляпуновим.

РОЗДІЛ 7. МОДЕЛЬ «ХИЖАК – ЖЕРТВА»

При написанні цього розділу використовувалися джерела [1] та [5].

7.1. Динаміка популяцій жертви і хижака

Стосунки з умовною характеристикою «хижак–жертва» є найістотнішими для функціонування екосистем. В основу відповідної моделі покладено такі ідеалізовані уявлення про характер внутрішньо- та міжвидових стосунків у спільноті, що складається з виду «хижак» і виду «жертва»:

1) за умови відсутності хижака популяція жертви розмножується експоненціально;

2) за умови відсутності жертви популяція хижака експоненціально вимирає;

3) сумарна кількість біомаси жертв, що споживається популяцією хижака за одиницю часу, лінійно залежить від густини популяції жертви і від щільності популяції хижака;

4) біомаса жертви, що споживається хижаком, перетворюється з певним коефіцієнтом на біомасу хижака;

5) будь-які додаткові фактори, що впливають на динаміку популяції жертви і хижака, відсутні.

За цих припущень дана модель може бути описана у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1 x_1 - \gamma_1 x_1 x_2 = (\varepsilon_1 - \gamma_1 x_2) x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\varepsilon_2 x_2 + \gamma_2 x_1 x_2 = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x_1) x_2, \end{cases} \tag{1}$$

де x_1 — густина популяції жертви; x_2 — густина популяції хижака; $\varepsilon_1 > 0$ — швидкість розмноження популяції жертви за відсутності хижака; $\varepsilon_2 > 0$ — природна смертність хижака; $\gamma_1 > 0$ — питома швидкість споживання популяцією хижака популяції жертви при одиничній густині обох популяцій; $\gamma_2/\gamma_1 > 0$ — коефіцієнт перетворення біомаси жертви, що була спожита хижаком, на його біомасу.

Інакше кажучи, популяції жертви та хижака розмножуються з коефіцієнтами приросту, що дорівнюють відповідно $(\varepsilon_1 - \gamma_1 \cdot x_2)$ та $(-\varepsilon_2 + \gamma_2 \cdot x_1)$.

Для знаходження рівноваги системи (1) потрібно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}(\varepsilon_1-\gamma_1 x_2)x_1=0,\\(-\varepsilon_2+\gamma_2 x_1)x_2=0,\end{cases}\qquad(2)$$

з якої:

$$1)\ x_1^*=0;\ x_2^*=0;$$

$$2)\ x_1^*=\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2};\ x_2^*=\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}.$$

Проаналізуємо знайдені рівноваги на стійкість. Нехай

$$dx^i/dt=f^i(x^1,\ldots,x^n),\quad i=1,\ldots,n,\quad —\qquad(3)$$

автономна система диференціальних рівнянь, $a=(a^1,\ldots,a^n)$ — її стан рівноваги,

$$a_j^i=\partial f^i(a)/\partial x^j,\quad A=(a_j^i)_{i,j=1}^n.$$

Тоді істинна така теорема.

Теорема. *Якщо всі власні значення матриці A мають від'ємні дійсні частини, то стан рівноваги a системи* (3) *асимптотично стійкий.*

Теорему подаємо без доведення.

Таким чином, для дослідження стійкості потрібно лінеаризувати систему (1); при цьому отримаємо матрицю:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1-\gamma_1x_2 & -\gamma_1x_1\\ \gamma_2x_2 & -\varepsilon_2+\gamma_2x_1\end{pmatrix}.$$

У першій точці рівноваги характеристичне рівняння має вигляд:

$$(\varepsilon_1-\lambda_1)(-\varepsilon_2-\lambda_2)=0.$$

Звідси:

$$\lambda_1=\varepsilon_1\quad\text{і}\quad\lambda_2=-\varepsilon_2.$$

Оскільки $Re\lambda_1=\varepsilon_1>0$, то рівновага 1) нестійка.

Для другої точки рівноваги маємо:

$$\lambda^2+\varepsilon_1\varepsilon_2=0.$$

Звідси: $Re\lambda_1=Re\lambda_2=0$. Отже, даний метод застосувати не можна.

Помножимо перше рівняння в (1) на γ_2, друге — на γ_1 і додамо їх. У результаті отримаємо:

$$\frac{\gamma_2 dx_1}{dt}+\frac{\gamma_1 dx_2}{dt}=\varepsilon_1\gamma_2 x_1-\varepsilon_2\gamma_1 x_2. \qquad (4)$$

Тепер помножимо перше рівняння в (1) на ε_2 і поділимо на x_1, а друге — помножимо на ε_1 і поділимо на x_2; потім знову додамо їх:

$$\frac{\varepsilon_2}{x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\varepsilon_1}{x_2}\frac{dx_2}{dt}=\varepsilon_1\gamma_2 x_1-\varepsilon_2\gamma_1 x_2. \qquad (5)$$

З рівності правих частин (4) і (5) випливає рівність їхніх лівих частин:

$$\frac{\gamma_2 dx_1}{dt}-\frac{\varepsilon_2}{x_1}\frac{dx_1}{dt}=\frac{\varepsilon_1}{x_2}\frac{dx_2}{dt}-\frac{\gamma_1 dx_2}{dt}.$$

Звідси шляхом інтегрування одержуємо:

$$\gamma_2 x_1-\varepsilon_2\ln x_1=\varepsilon_1\ln x_2-\gamma_1 x_2+C_1,$$

а після потенціювання —

$$x_1^{-\varepsilon_2}e^{\gamma_2 x_1}=Cx_2^{\varepsilon_1}e^{-\gamma_1 x_2}. \qquad (6)$$

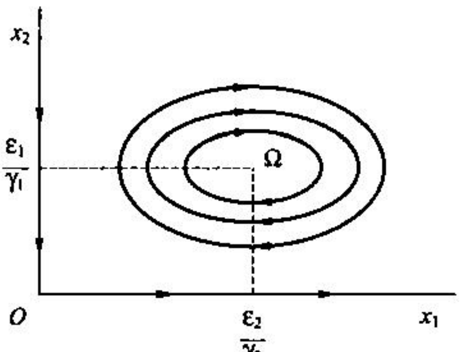


Рис. 1. Фазовий портрет

Оскільки біологічний зміст мають лише невід'ємні значення x_1, x_2, то достатньо побудувати сім'ю кривих (6) у першому квадранті. Фазовий портрет системи (1) (тобто її графік при координатних осях, що відповідають фазовим змінним x_1 та x_2) в першому квадранті показано на рис. 1.

Тобто маємо нескінченну сім'ю концентричних замкнених кривих, що стягуються в одну точку $\Omega\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2},\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$. З якісної теорії диференціальних рівнянь відомо, що при $Re\lambda_1=Re\lambda_2=0$ рівновага є так званим центром — точкою стійкою, але не асимптотично.

Точка Ω характеризує стаціонарний стан, що відповідає системі (1), оскільки її координати перетворюють на нуль dx_1/dt, dx_2/dt. У будь-якому іншому випадку dx_1/dt, dx_2/dt не можуть перетворюватися на нуль одночасно (при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$). Отже, точка (x_1, x_2) буде описувати криву завжди в одному й тому самому напрямку.

Для характеристики цього руху вводиться поняття секторальної швидкості. **Секторальною швидкістю** вектора ΩM, що обертається навколо Ω, називають похідну за часом від площі, котру він «замітає» (остання береться алгебраїчно), за умови, що площа «замітається» в додатному напрямку. У площині $(x\Omega y)$ площа «замітається» в додатному напрямку, коли таке «замітання» відбувається при повороті від Ωx до Ωy на кут $\pi/2$. У цьому випадку секторальна швидкість дорівнює $\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$, а в полярних координатах — $\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\varphi}{dt}$.

У нашому випадку секторальна швидкість радіус-вектора, що виходить з точки Ω, дорівнює:

$$\frac{\left[\left(x_1-x_1^*\right)\frac{dx_2}{dt}-\left(x_2-x_2^*\right)\frac{dx_1}{dt}\right]}{2}=\frac{\left[\gamma_2\left(x_1-x_1^*\right)^2x_2+\gamma_1\left(x_2-x_2^*\right)^2x_1\right]}{2}, \quad (7)$$

де (x_1^*, x_2^*) — координати точки Ω.

Оскільки $x_1^*-x_1$ і $x_2^*-x_2$ не перетворюються на нуль одночасно, то одержаний вираз (7) завжди додатний. Якщо його розглядати як функцію від точки (x_1, x_2), то він має деякий додатний мінімум m.

Нехай (ρ, φ) — полярні координати з полюсом Ω. Тоді $\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\varphi}{dt} > m > 0$, і якщо d — верхня грань відстаней від Ω до точок кривої, то $\frac{d\varphi}{dt} > \frac{2m}{d^2}$.

Отже, точка (x_1, x_2) описує криву, рухаючись у напрямку від Ox_1 до Ox_2, а кутова швидкість обертання навколо Ω більша за певне додатне число. Таким чином, за якийсь скінченний час ця точка повернеться у свій початковий стан та відновить той самий рух, тобто наявна *періодичність*.

Важливий наслідок з періодичності x_1 і x_2 можна отримати, якщо записати рівняння (1) у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{d(\ln x_1)}{dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 x_2, \\ -\dfrac{d(\ln x_2)}{dt} = \varepsilon_2 - \gamma_2 x_1. \end{cases}$$

Інтегруючи за періодом T, отримаємо:

$$0 = \varepsilon_1 T - \gamma_1 \int_{t_0}^{t_0+T} x_2 dt = \varepsilon_2 T - \gamma_2 \int_{t_0}^{t_0+T} x_1 dt,$$

а звідси маємо:

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \mathrm{T}^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} x_2(t) dt;$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = \mathrm{T}^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} x_1(t) dt. \qquad (8)$$

Таким чином, $K_1 = \dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$, $K_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ є середніми значеннями x_1 та x_2 протягом періоду T.

Припустимо, що відбувається рівномірне за часом і пропорційне до чисельності особин винищування особин кожного виду (виловлювання, відстрілювання і т. ін.). Якщо за час dt винищується $\alpha\lambda x_1 dt$ жертв і $\beta\lambda x_2 dt$ хижаків, то система (1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \alpha\lambda - \gamma_1 x_2) x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (-\varepsilon_2 - \beta\lambda + \gamma_2 x_1) x_2, \end{cases} \qquad (9)$$

де числа $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ характеризують способи винищування, $\lambda \geq 0$ — інтенсивність винищування.

Легко побачити, що система (9) отримана з (1) заміною ε_1 і ε_2 відповідно на $\varepsilon_1 - \alpha\lambda$ та $\varepsilon_2 + \beta\lambda$.

Попередні результати можуть бути використані лише в тому випадку, якщо $\varepsilon_1 - \alpha\lambda > 0$. Якщо заданий спосіб винищування, то, доки інтенсивність λ залишається меншою, ніж ε_1/α, будуть відбуватися флуктуації (коливання чисельності). Якщо λ доволі мале, то середня кількість жертв, які винищуються за одиницю часу, дорівнюватиме:

$$T^{-1}\int_{t_0}^{t_0+T}\alpha\lambda x_1(t)dt = \alpha\lambda\frac{\varepsilon_2+\beta\lambda}{\gamma_2}. \tag{10}$$

Порівняємо ці коливання з тими, які ми мали до винищення. Середні значення для x_1, x_2 замість $\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ дорівнюватимуть тепер $\frac{\varepsilon_2+\beta\lambda}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1-\alpha\lambda}{\gamma_1}$.

Отже, отримані з аналізу системи (1) результати дають змогу сформулювати такі закони:

1. Закон періодичного циклу. Коливання чисельностей обох видів періодичні. Для певної пари значень чисельності стан біологічної спільноти стаціонарний і рівновага стійка.

2. Закон збереження середніх. Середні протягом періоду T чисельності особин обох видів не залежать від початкових умов і дорівнюють числам, що відповідають нетривіальному стаціонарному стану для даних значень параметрів ε_1, ε_2, γ_1, γ_2.

3. Закон зміни середніх. Якщо обидва види винищуються рівномірно і пропорційно до кількості особин, то середня кількість жертв зростає, а хижаків — зменшується.

Розвиток математичної теорії біологічних спільнот після виходу в світ книги В. Вольтерра відбувався переважно в двох напрямках. Перший з них бере свій початок зі статті А.М. Колмогорова, у якій для системи «хижак – жертва» пропонувалося розглядати більш загальну модель вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 f_1(x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 f_2(x_1, x_2). \end{cases} \tag{11}$$

У цій моделі функції f_1 і f_2 задовольняють лише найбільш загальні обмеження (наприклад, $f_1(0, 0) = 0$; $\partial f_1/\partial x_1 \le 0$; $\partial f_1/\partial x_2 \le 0$ і т. ін.), що випливають із загальнобіологічних міркувань. Модель (11), маючи багатий набір фазових траєкторій, може якісно описати практично будь-яку реальну ситуацію і не залежить від основного недоліку вольтеррівської моделі — відсутності стійкого граничного циклу.

Проте висока загальність моделі Колмогорова ускладнює її кількісну ідентифікацію і робить майже непридатною для практичного використання.

Інший напрямок у розвитку цих досліджень пов'язаний з різними модифікаціями вольтеррівської моделі. Тут можна виділити три шляхи:

1. На першому представники чистої математики, зацікавившись новим класом диференціальних рівнянь, намагалися продовжити ці дослідження, як правило, поза будь-яким зв'язком з біологічною реальністю. На цьому шляху виникали цікаві узагальнення вольтеррівських моделей за рахунок відмови від занадто сильних обмежень.

2. Другий шлях (ним йшли переважно біологи, які вивчали реальні спільноти) починається із заперечення. Стверджується, що вольтеррівські моделі взагалі не мають жодного відношення до реальної поведінки біологічних спільнот, а лише історичну цінність, і т.д. Після висновку, що вольтеррівська модель «погана», автор будує свою власну модель, яка, як з'ясовується, значно краще описує дійсність. При цьому не враховується, що метою Вольтерра не був точний опис якої-небудь конкретної ситуації (для цього більше придатні статистичні моделі), а дослідження загальних властивостей таких систем. Звичайно, для цього доводиться вдаватися до сильних спрощень реальної картини.

3. На третьому шляху вольтеррівські моделі (з чітким розумінням ступеня й сфери їхньої застосовності) використовуються для дослідження нових проблем екології (стійкості біологічних спільнот, перетину екологічних ніш, формування трофічних рівнів тощо).

Сприймаючи критику вольтеррівських моделей, слід все ж мати на увазі, що на даний час не існує інших продуктивних моделей біологічних спільнот, які були б достатньо загальними для опису закономірностей динаміки популяцій, що утворюють спільноту, і водночас конкретними та простими для інтерпретування їх розумним чином.

Розглянемо деякі видозміни моделі Вольтерра.

7.2. Врахування внутрішньовидової конкуренції

Як зазначалося вище, модель Вольтерра має певні недоліки. Наприклад, за відсутності хижака чисельність жертви може необмежено зростати. Насправді цього не відбувається завдячуючи конкуренції всередині популяції. Гаузе запропонував враховувати внутрішньовидову конкуренцію і назвав таку модель моделлю Лоткі–Вольтерра.

Модель з урахуванням конкуренції серед жертв зводиться до системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 x_2 - \beta x_1)x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x_1)x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Ця система має єдиний нетривіальний стан рівноваги в точці

$$q_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}; \quad q_2 = \frac{\varepsilon_1 - q_1\beta}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2}{\gamma_1\gamma_2}. \tag{2}$$

За умови

$$\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2 > 0 \quad \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > \frac{\beta}{\gamma_2}\right) \tag{3}$$

величина $q_2 > 0$, а також існуватиме стан рівноваги.

Лінеаризуємо систему рівнянь (1) в околі точки рівноваги $q = (q_1; q_2)$. Для цього позначимо:

$$u = x_1 - q_1, \quad v = x_2 - q_2 \tag{4}$$

та використаємо формулу Тейлора для розкладу функції в околі даної точки:

$$\Delta f(q) = f'_{N_1}(q)u + f'_{N_2}(q)v + \dots \quad (f(q) = 0). \tag{5}$$

Лінеаризовані рівняння для приростів в околі точки q мають вигляд:

$$\frac{du}{dt} = -\beta q_1 u - \gamma_1 q_1 v, \quad \frac{dv}{dt} = \gamma_2 q_2 u. \tag{6}$$

Розв'язок рівнянь (6) шукатимемо у вигляді:

$$u = C_1 e^{\lambda t}; \quad v = C_2 e^{\lambda t}. \tag{7}$$

Підставивши (7) в (6), дійдемо до однорідної системи алгебраїчних рівнянь:

$$(-\beta q_1 - \lambda)C_1 - \gamma_1 q_1 C_2 = 0, \quad \gamma_2 q_2 C_1 - \lambda C_2 = 0. \tag{8}$$

Ненульовий розв'язок цієї системи можливий за умови:

$$\lambda^2 + \lambda\beta q_1 + \gamma_1\gamma_2 q_1 q_2 = 0. \tag{9}$$

Звідси:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\beta q_1 \pm \sqrt{D}), \quad D = (\beta q_1)^2 - 4\gamma_1\gamma_2 q_1 q_2. \tag{10}$$

Оскільки з (9)

$$\lambda_1\lambda_2 = \gamma_1\gamma_2 q_1 q_2 > 0, \tag{11}$$

то точка q є або фокусом — при $D < 0$, або вузлом — при $D > 0$. А оскільки $\lambda_1 + \lambda_2 = -\beta q_1 < 0$, то ця точка буде стійкою точкою рівноваги.

Стійкість системи рівнянь (1) можна також дослідити за допомогою функції Ляпунова. Розглянемо функцію Ляпунова:

$$L(x) = \frac{q_1}{\gamma_1}\left(\frac{x_1}{q_1} - \ln\frac{x_1}{q_1} - 1\right) + \frac{q_2}{\gamma_2}\left(\frac{x_2}{q_2} - \ln\frac{x_2}{q_2} - 1\right).$$

Для довільних z маємо: $z - 1 \geq \ln z$. Рівність можлива лише при $z = 1$. Тому:

$$L(x) \geq 0 \quad \text{і} \quad L(q) = 0.$$

Знайдемо $\frac{dL}{dt}$ на траєкторіях системи (1):

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{\gamma_1}\left(\dot{x}_1 - \frac{q_1}{x_1}\dot{x}_1\right) + \frac{1}{\gamma_2}\left(\dot{x}_2 - \frac{q_2}{x_2}\dot{x}_1\right) = -\frac{\beta}{\gamma_1}(x_1 - q_1)^2 \leq 0.$$

Отже, точка q стійка за Ляпуновим. Оскільки $\frac{dL}{dt} \leq 0$ скрізь, за винятком прямої $x_1 = q_1$, то дана точка асимптотично стійка. Всередині цієї області не повинно бути стійких граничних циклів.

Повна система рівнянь Вольтерра–Лоткі має вигляд:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=(\varepsilon_1-\gamma_{11}x_2-\gamma_{12}x_1)x_1,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=(-\varepsilon_2+\gamma_{21}x_1+\gamma_{22}x_2)x_2.\end{cases} \tag{12}$$

В кожне рівняння входять квадратичні члени. Ці члени враховують внутрішньовидову конкуренцію (кажуть: «самообмеження»).

Припустивши, що $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження точок рівноваги:

$$\begin{cases}(\varepsilon_1-\gamma_{11}x_2-\gamma_{12}x_1)x_1=0,\\ (-\varepsilon_2+\gamma_{21}x_1+\gamma_{22}x_2)x_2=0.\end{cases} \tag{13}$$

Звідси знаходимо точки рівноваги: (0, 0); (0, q_2'); (q_1', 0); ($\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$), де

$$q_1'=\frac{\varepsilon_1}{\gamma_{12}};\qquad q_2'=\frac{\varepsilon_2}{\gamma_{22}};$$

$$\tilde{q}_1=\frac{\varepsilon_1\gamma_{22}-\varepsilon_2\gamma_{11}}{\gamma_{12}\gamma_{22}-\gamma_{11}\gamma_{21}};\qquad \tilde{q}_2=\frac{\varepsilon_2\gamma_{12}-\varepsilon_1\gamma_{21}}{\gamma_{12}\gamma_{22}-\gamma_{11}\gamma_{21}}.$$

Були спроби уточнення рівнянь (1). Один з варіантів уточнених рівнянь має вигляд:

$$\frac{dx_1}{dt}=\varepsilon x_1-\gamma_1 x_2\sqrt{x_1},\ x_1\neq 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\begin{cases}\gamma_2 x_2\sqrt{x_1}, & x_1\neq 0,\\ -\gamma_2 x_2, & x_1=0.\end{cases} \tag{14}$$

У цій моделі маємо слабшу залежність швидкості розмноження хижака від кількості жертв. В ній нехтується загибеллю жертви за наявності її, але за повної відсутності жертви хижак повністю вимирає.

Відомою також є модель, в якій наявне самообмеження обох популяцій, а функція взаємодії задається у вигляді гіперболи:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1(\varepsilon_1-\gamma_1 x_1)-\dfrac{\alpha_1 x_1 x_2}{1+\beta x_1},\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_2(\varepsilon_2-\gamma_2 x_2)-\dfrac{\alpha_2 x_1 x_2}{1+\beta x_1}.\end{cases} \tag{15}$$

Залежно від співвідношення між параметрами системи (15), можливе більше розмаїття фазових портретів. Кількість точок спокою зростає до п'яти, одна з яких може бути нестійким фокусом, що обмежений стійким граничним циклом.

7.3. Узагальнені моделі системи «хижак–жертва»

Вище розглядалися моделі системи «хижак–жертва», відомі як рівняння Лоткі–Вольтерра. У 30-х рр. XX ст. А.М. Колмогоровим була запропонована модель доволі загального характеру. При введених раніше змінних ця модель має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_1(x_1)x_1 - V(x_1)x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_2(x_1)x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Як видно з (1), всі функції залежать лише від змінної x_1, але на них накладаються певні обмеження:

1. Коефіцієнт природного приросту жертви $\alpha_1(x_1)$ монотонно спадає при зростанні x_1, що вказує на наявність внутрішньовидової конкуренції:

$$\frac{d\alpha_1(x_1)}{dx_1} < 0, \qquad \alpha_1(0) > 0 > \alpha_1(\infty). \tag{2}$$

При деякому значенні $x_1 = \bar{x}_1$ функція $\alpha_1(\bar{x}_1) = 0$. Це — верхня межа. Популяція жертв не може зростати безмежно за відсутності хижака.

2. Коефіцієнт природного приросту чисельності хижака $\alpha_2(x_1)$ — функція зростаюча, вона змінює знак з мінуса на плюс у точці $x_1 = x_1^*$:

$$\frac{d\alpha_2(x_1)}{dx_1} > 0, \qquad \alpha_2(0) < 0 < \alpha_2(\infty) \tag{3}$$

3. Трофічна функція $V(x_1)$ (іноді її називають функціональним відгуком) задовольняє умови:

$$V(0) = 0, \quad V(x_1) > 0 \text{ при } x_1 > 0, \quad V(\infty) < 0.$$

Експерименти показують, що трофічна функція належить до одного з трьох типів: 1) монотонно зростає з повільно спадною похідною (рис. 2, а) (така крива характерна для безхребетних та хижих риб); 2) лінійна з різким порогом насичення (рис. 2, б) (крива характерна для хижих фільтратів); 3) S-подібна крива (рис. 2, в) (такою функцією описується дія хижаків з цілеспрямованим пошуком).

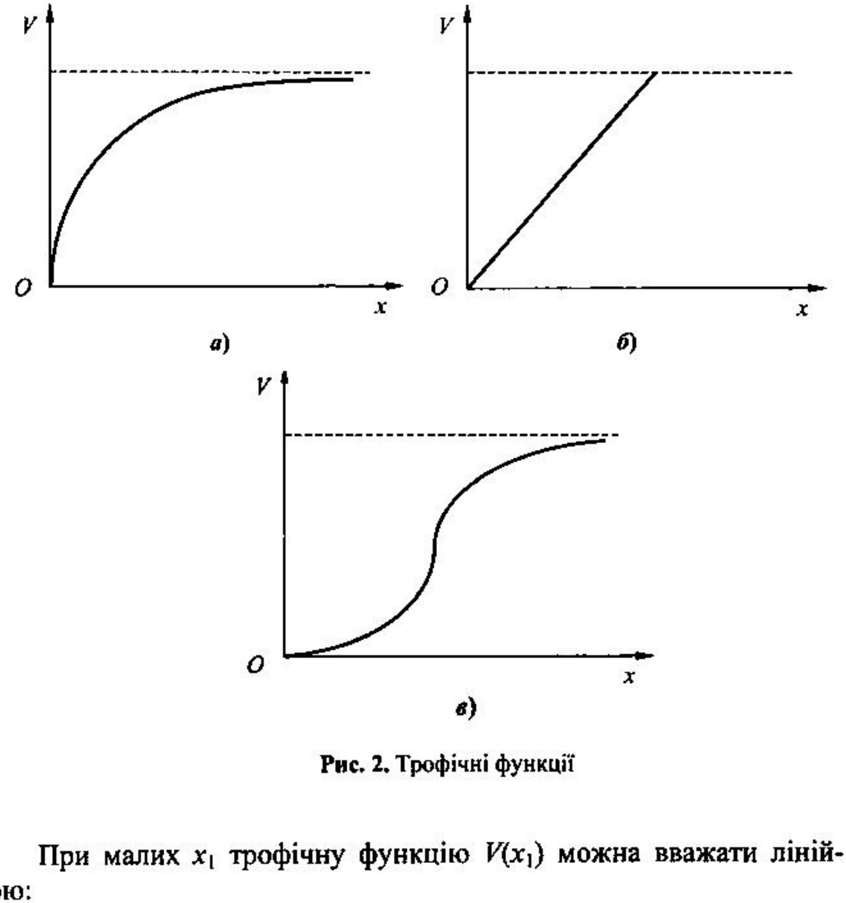


Рис. 2. Трофічні функції

При малих x_1 трофічну функцію $V(x_1)$ можна вважати лінійною:

$$V(x_1) = \beta x_1. \tag{4}$$

Система рівнянь (1) має дві або три точки рівноваги: (0, 0); $(\bar{x}_1, 0)$; (q_1, q_2); вони є розв'язками рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha_1(x_1)x_1 - V(x_1)x_2 = 0,\\ \alpha_2(x_1)x_2 = 0.\end{cases} \tag{5}$$

Дослідимо поведінку траєкторій в околі точок спокою. Для цього лінеаризуємо початкову систему рівнянь в околі кожної точки рівноваги.

Нехай $\xi = x - \tilde{x}$, де $\tilde{x}$ — одна зі стаціонарних точок ($\xi = (\xi_1\ \xi_2)^T$).

а) У точці $\tilde{x} = 0$ маємо:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \alpha_i(0)\xi_i, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_i = \alpha_i(0), \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0. \tag{7}$$

Тому точка $\xi = 0$ — сідлова. Осі координат є сепаратрисами. При $\lambda_1 > 0$ сепаратриса виходить із сідла, а при $\lambda_2 < 0$ — входить у сідло.

б) В околі точки $(\bar{x}_1, 0)$ лінеаризовані рівняння мають вигляд:

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1 = \alpha_1'(\bar{x}_1)\bar{x}_1\xi_1 - V(\bar{x}_1)\xi_2,\\ \dot{\xi}_2 = \alpha_2(\bar{x}_1)\xi_2.\end{cases} \tag{8}$$

Корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = \alpha_1'(\bar{x}_1)x_1, \quad \lambda_2 = \alpha_2(\bar{x}_1). \tag{9}$$

Оскільки $\alpha_1'(\bar{x}_1) < 0$, то $\lambda_1 < 0$. Якщо $\alpha_2(\bar{x}_1) > 0$ ($\bar{x}_1 > q_1$), то $\lambda_2 > 0$ і $\lambda_1\lambda_2 < 0$, а тому точка $(\bar{x}_1, 0)$ — сідлова. Кутові коефіцієнти сепаратрис $k_1 = 0$, $k_2 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{V(q_1)} < 0$.

Сепаратриса, що виходить із сідла з кутовим коефіцієнтом $k_2 = 0$, напрямлена всередину додатного квадранта. Взагалі кутові коефіцієнти сепаратрис визначаються з рівняння:

$$V(\bar{x}_1)k^2 - (\alpha_1(\bar{x}) - \alpha_2(\bar{x}))k = 0. \tag{10}$$

Якщо $\bar{x}_1 < q_1$, $\alpha_2(\bar{x}_1) < 0$ ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$), то точка $(\bar{x}_1, 0)$ — стійкий вузол.

в) У точці $q = (q_1, q_2)$ маємо лінеаризовані рівняння:

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1 = \sigma\xi_1 - V(q_1)\xi_2,\\ \dot{\xi}_2 = \alpha_2'(q_1)q_2\xi_1,\end{cases} \tag{11}$$

де

$$\sigma = \alpha_1(q_1) + \alpha_1'(q_1)q_1 - V'(q_1)q_2, \tag{12}$$

і характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + V(q_1)\alpha_2'(q_1)q_2 = 0. \tag{13}$$

Оскільки добуток $\lambda_1\lambda_2 > 0$, то точка q є або фокусом — при $\sigma^2 < 4V\alpha_2'q_2$, або вузлом — при $\sigma^2 > 4V\alpha_2'q_2$. При $\sigma < 0$ стаціонарна точка стійка, а при $\sigma > 0$ — нестійка.

Дослідимо поведінку сепаратрис, що виходять із точки $(\bar{x}_1, 0)$. Оскільки при наших припущеннях траєкторії не можуть йти у нескінченність (чисельність і жертв, і хижаків лімітована), то можливі такі випадки:

1) сепаратриса «намотується» на граничний цикл;

2) сепаратриса входить у точку q. У цьому випадку точка q має бути стійкою.

У результаті маємо таку класифікацію точок: а) $q_1 > \bar{x}_1$ — точка $(\bar{x}_1, 0)$, стійкий вузол; б) $q_1 > \bar{x}_1$ — сепаратриса, що виходить із точки $(\bar{x}_1, 0)$ і входить у точку q, яка є стійким фокусом, якщо дискримінант рівняння (13) $D < 0$, або стійким вузлом при $D > 0$; в) $q_1 < \bar{x}_1$ — сепаратриса, що виходить із точки $(\bar{x}_1, 0)$ і намотується на граничний цикл. Поведінка траєкторій всередині граничного циклу може бути достатньо складною.

Вище показано, як із простих і природних припущень про характер міжвидових та внутрішньовидових взаємодій виникає доволі складна поведінка системи «хижак-жертва». Найцікавішим є те, що в цій системі можливе існування граничного циклу. Умова $\alpha_1'(\bar{x}_1) < 0$ означає саморегуляцію в популяції жертв.

Розглянемо частковий випадок системи рівнянь (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 - V(x_1)x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \left(kV(x_1) - m\right)x_2, \quad (m, k, \alpha = const). \end{cases} \tag{14}$$

Якщо $V(x_1) \equiv \beta x_1$, то доходимо до класичних рівнянь Вольтерра. Зауважимо, що система рівнянь виду (1) при окремих значення функцій α_1, α_2 і V розглядалася багатьма авторами.

Задачі для самостійної роботи

У цих задачах знаходження і дослідження точок рівноваги системи «хижак–жертва» потрібно провести у той спосіб, який описано у теоретичній частині.

1. Знайти точки рівноваги системи (узагальнена модель Лоткі–Вольтера). У кожному випадку дослідити характер стійкості (b, $c > 0$):

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1-u-y), \\ \dot{y} = y(-c-bu+uy). \end{cases}$$

2. Знайти точки рівноваги системи (повна модель Лоткі–Вольтерра для взаємодії двох популяцій виду «хижак–жертва»). В кожному випадку дослідити характер стійкості:

а) $\begin{cases} \dot{x} = x(1-2x-3y), \\ \dot{y} = -y(4-5x-6y); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x(2-2x-y), \\ \dot{y} = -y(3-x-2y). \end{cases}$

3. Знайти точки рівноваги системи (узагальнення логістичної популяції на модель типу «хижак-жертва»). В кожному випадку дослідити характер стійкості:

а) $\begin{cases} \dot{x} = x(2-x-\dfrac{y}{1+x}), \\ \dot{y} = -y(2+y-\dfrac{3x}{1+x}); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x(1-x-\dfrac{y}{1+\dfrac{x}{2}}), \\ \dot{y} = -y(1+y-\dfrac{2x}{1+\dfrac{x}{2}}). \end{cases}$

РОЗДІЛ 8. МОДЕЛЬ ОЗЕРНОЇ ЕКОСИСТЕМИ

При написанні цього розділу використовувалося джерело [1].

Озера як великі сховища прісної води привертають до себе щораз більшу і більшу увагу у зв'язку з посиленням антропогенного впливу на прісні водойми, а також зростаючою нестачею прісної води для задоволення промислових, сільськогосподарських та побутових потреб. Особливий інтерес викликає явище евтрофікації озер — збільшення в них органічної біомаси внаслідок надходження біогенних речовин ззовні (з території водозбору). За цією ознакою розрізняють *оліготрофні, мезотрофні* та *евтрофні* озера (відповідно з низьким, середнім і високим вмістом органіки).

Спектр математичних моделей, які розробляються для моделювання озерних екосистем, доволі широкий: від найпростіших двовимірних, що дають змогу аналітично вивчати основні тренди розвитку екосистем, до складних багатовимірних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описують динаміку просторового розподілу основних компонентів озерних екосистем.

8.1. Концептуальна модель евтрофікації

Розглянемо найпростішу модель евтрофікації, яка охоплює декілька дуже агрегованих змінних і для якої можливе аналітичне дослідження. Ця модель будувалася передусім для того, щоб розібратися в процесі евтрофікації озер загалом, якісно його проаналізувати та виділити ключові параметри екосистеми, які керують цим процесом. Стан екосистеми прісноводного водоймища достатньо повно описується такими фазовими змінними:

$a(t)$ — біомаса продуцентів (фітопланктон);

$z(t)$ — біомаса консументів (зоопланктон);

$n(t)$ — концентрація біогенних (поживних) речовин у водоймищі;

$s(t)$ — маса детриту (мертвої органіки);

$b(t)$ — біомаса бактерій;

$x(t)$ — концентрація кисню, розчиненого у воді.

Кожна зі змінних, зі свого боку, може бути поділена на окремі складові, але в загальному випадку динаміка cáме цих речовин впливає на стан екосистеми і якість води. Взаємодія між зазначеними змінними описується діаграмою потоків (рис. 1). Ця діаграма дає якісний опис процесів трансформації речовин у водоймищах, що евтрофікуються, тобто вона є концептуальною моделлю процесу евтрофікації.

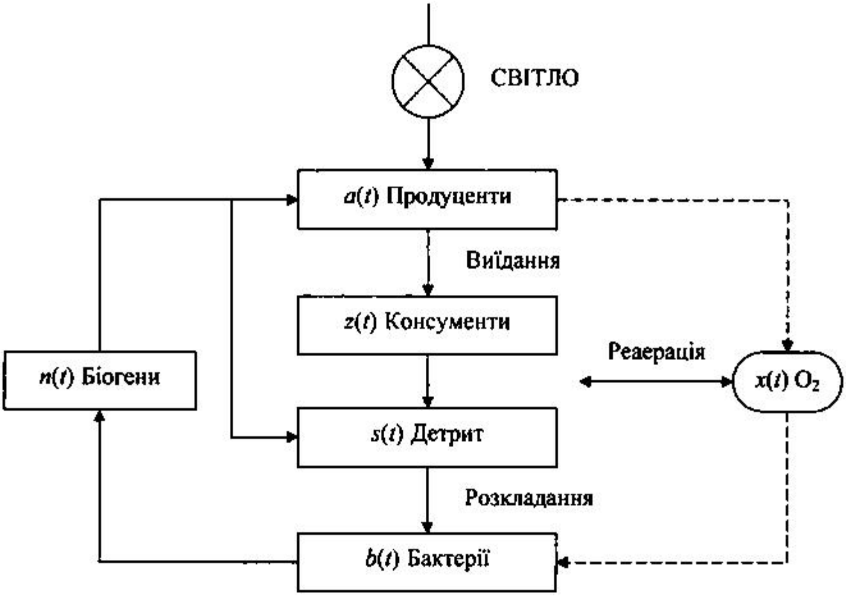


Рис. 1. Діаграма потоків речовини в озері

Звичайно, евтрофікація існуючого реально озера вносить певні зміни в цю схему. Однак на першому етапі достатньо розглянути локальну (точкову) модель для усереднених концентрацій. Крім цього, оскільки в більшості реальних водоймищ світло не є лімітуючим фактором, то можна не враховувати залежність швидкості фотосинтезу від освітленості.

Користуючись наведеною концептуальною моделлю, можна скласти потокові (балансові) рівняння для даної системи:

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= q_{na} - q_{az} - q_{as};\\
\frac{dz}{dt} &= q_{az} - q_{zs};\\
\frac{ds}{dt} &= q_{as} + q_{zs} - q_{sb};\\
\frac{db}{dt} &= q_{sb} - q_{bn};\\
\frac{dn}{dt} &= q_{bn} - q_{na};\\
\frac{dx}{dt} &= k(x_n - x) + q_{ax} - q_{xb},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де q_{ij} — потік речовини з i-го блоку в j-й; x_n — концентрація кисню при насиченні ним води; k — коефіцієнт реаерації.

8.2. Аналітична модель евтрофікації

Спробуємо тепер, виходячи із загальноекологічних міркувань про трансформацію речовин у системі і ґрунтуючись на асимптотичних оцінках, максимально спростити модель, щоб провести її аналітичне дослідження.

У блоці «Консумент» поєднуються біомаси зоопланктону, бентосу, риб і т. ін., але навіть при такій агрегації в реальних екосистемах біомаса консументів є малою величиною порівняно з біомасами продуцентів або бактеріопланктону. Водночас у цьому блоці постійно відбувається переробка значних кількостей речовини: виїдається фітопланктон, виділяється детрит. З іншого боку, звичайно, біомаса консументів — порівняно повільно змінний компонент екосистеми. Це пояснюється тим, що, по-перше, консументи пов'язані в ієрархічні трофічні ланцюги зі стійкою структурою, а по-друге — мають доволі складну трофічну поведінку, що дає їм змогу значно меншою мірою залежати від коливань ресурсу.

Усе це дає підстави розглядати консументи як проточний блок, в якому відбувається швидка трансформація речовини. Тому можна вважати, що $q_{az} \approx q_{zs}$, а dz/dt має порядок ε, де ε << 1 — малий параметр.

Тоді $z(t) \approx z^0 = const$, а

$$q_{az} = V_a(a, z)z \approx V_a(a, z^0)z^0,$$

де $V_a(a, z)$ — трофічна функція споживання фітопланктону консументами.

У природних системах трофічні ланцюги, як правило, є напруженими і ефект насичення відсутній. Якщо до того ж припустити, що внутрішньовидовою конкуренцією серед консументів можна знехтувати, то $V_a(a, z)z$ природно записати у вигляді: $V_a(a, z^0)z^0 \approx m_1 az^0 = m_a^1 a$. При цьому константа $m_a^1 a$ описує певну додаткову «смертність» фітопланктону за рахунок консументів. Збільшення складності трофічних ланцюгів в екосистемі (як і збільшення біомаси консументів) призводить до зростання $m_a^1 a$.

Оскільки характерні часи росту мікроорганізмів є меншими за характерні часи решти процесів, то можна вважати, що біомаса бактерій не лімітує швидкості біорозкладу органічної речовини: чисельність бактерій-деструкторів швидко підлаштовується до змін середовища, практично не затримуючи процес розкладання. Звичайно, це справджується тільки для доволі усереднених систем, в яких не враховуються різні ефекти температурного, світлового, токсичного і т. ін. інгибіювання.

З урахуванням ієрархії часу відповідні рівняння для бактерій в (1) точніше було б записати у вигляді:

$$\varepsilon \frac{db}{dt} = q_{sb} - q_{bn}.$$

Величина $b(t)$ швидко прямує до свого стаціонарного значення, яке природно вважати функцією від біомаси детриту: чим більшою є кількість мертвої органіки, тим більшою є біомаса бактерій, які її розкладають. Отже, при $t \to \infty$: $b(t) \to b^*(s) \approx \lambda s$.

Після цього можна вважати, що потік q_{sb} приблизно дорівнює потоку q_{bn}, оскільки біомаса детриту s у бактеріальному масштабі часу є повільною змінною, і тому $db^*/dt \approx 0$. Потік q_{sb} можна виразити в такому вигляді:

$$q_{sb} = q_{sb}(s, b, x) = \mu^0(x)Q(s, b),$$

де $\mu^0(x)$ — кисневий коефіцієнт, $Q(s, b)$ — швидкість мінералізації органіки.

При таких припущеннях $Q(s, b) \approx Q(s, b^*) \approx \lambda^0 s$. Таким чином, $q_{sb} = \lambda^0\mu^0(x)s = s\mu(x)$. Тут $\mu(x)$ — коефіцієнт бактеріального розпаду детриту, який залежить від концентрації кисню у воді (рис. 2).

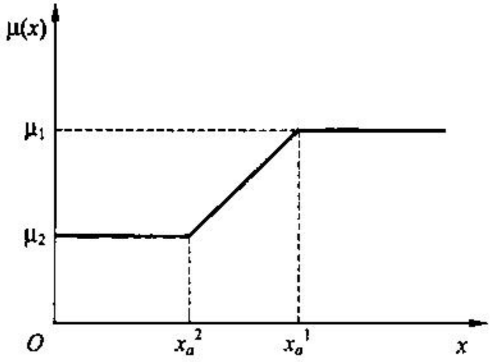


Рис. 2. Залежність швидкості бактеріального розкладання детриту від концентрації кисню у воді

Функція $\mu(x)$ відображає зміну швидкості біорозкладу при перемиканні від аеробних до анаеробних умов: x_a^1 і x_a^2 — певні порогові значення концентрації O_2; $x > x_a^1$ відповідає аеробним умовам, $x < x_a^2$ — анаеробним, а при $x_a^2 < x < x_a^1$ встановлюються певні проміжні режими.

Нехай $q_{na} = aV_n(n, a)$, де $V_n(n, a)$ — трофічна функція споживання біогенів фітопланктоном.

У найпростішій моделі вважається, що $V_n = V_n(n)$. Оскільки $V_n(0) = 0$ і $V_n(\infty) < \infty$, то для конкретного завдання $V_n(n)$ можна використовувати функцію Моно:

$$V_n(n) = \frac{\alpha n}{\delta + n},$$

де α — максимальна швидкість росту фітопланктону, δ — константа Міхаеліса.

Природна смертність фітопланктону задається у вигляді: $q_{as} = m_a a$; тоді сумарна втрата біомаси фітопланктону:

$$q_{as} + q_{az} = m_a a + m_a^1 a = \rho a.$$

Можна вважати, що потік кисню, утворюваного при фотосинтезі, лінійно залежить від біомаси фітопланктону: $q_{ax} = q_{ax}(a) = \beta a$, де β — коефіцієнт швидкості виділення кисню.

Нарешті, $q_{xb} = \gamma q_{sb}$, де γ — коефіцієнт споживання кисню при розкладі органічної речовини.

Збираючи всі зроблені правдоподібні припущення, можна звести модель (1) з підрозділу 8.1 до вигляду:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{\alpha an}{\delta+n} - \rho a;\\
\frac{dn}{dt} &= -\frac{\alpha an}{\delta+n} + s\mu(x);\\
\frac{ds}{dt} &= \rho a - s\mu(x);\\
\frac{dx}{dt} &= k(x_n - x) + \beta a - \gamma s\mu(x)
\end{aligned} \qquad (1)$$

8.3. Дослідження стійкості стаціонарних станів

Дослідимо систему (1) з підрозділу 8.2. Для перших трьох змінних виконується закон збереження речовини, тому:

$$a + n + s = A = const.$$

Тоді цю систему можна звести до системи трьох рівнянь, вилучивши з розгляду друге рівняння:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{a(B-(\alpha-\rho)(s+a))}{\delta+A-s-a},\\
\frac{ds}{dt} &= \rho\cdot a - s\mu(x),\\
\frac{dx}{dt} &= k(x_n - x) + \beta a - \gamma s\mu(x),
\end{aligned} \qquad (1)$$

де $B = \alpha A - \rho A - \rho\delta$.

Ця система має дві стаціонарні точки:

1) $a_1^* = 0;\ s_1^* = 0;\ x_1^* = x_n;\ n_1^* = A;$ (2)

2) $a_2^* = \dfrac{B\mu}{(\rho+\mu)(\alpha-\rho)};\quad s_2^* = \dfrac{B\rho}{(\rho+\mu)(\alpha-\rho)};\quad (\mu = \mu(x_2^*)),$

x_2^* є розв'язком рівняння:

$$k(x_n - x)(\rho + \mu(x))(\alpha - \rho) + B\mu(x)(\beta - \gamma\rho) = 0; \quad n_2^* = \frac{\rho\delta}{\alpha - \rho}.$$

Для того, щоб друга стаціонарна точка мала біологічний зміст, природно вимагати, щоб a_2^*, s_2^*, n_2^* та x_2^* були невід'ємними. Легко збагнути, що $a_2^* > 0$ і $s_2^* > 0$ при $A > \dfrac{\delta\rho}{\alpha - \rho}$; $n_2^* > 0$ при $\alpha > \rho$. Строго кажучи, $V_n(n)$ необхідно визначити таким чином:

$$V_n(n) = \begin{cases} \dfrac{\alpha n}{\delta + n}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

— і рівняння для знаходження стаціонарного розв'язку n^*: $V_n(n) = \rho$, яке випливає з першого рівняння системи (1), взагалі не має розв'язку при $n < 0$. Єдина стаціонарна точка при цьому буде задаватися співвідношеннями (2).

Аналіз стійкості стаціонарних точок за лінійним наближенням показує, що при $\alpha > \rho$ і $A < \dfrac{\delta\rho}{\alpha - \rho}$ перша точка є стійкою, а друга — нестійкою. При $\alpha > \rho$ і $A > \dfrac{\delta\rho}{\alpha - \rho}$, навпаки, перша точка стає нестійкою, а друга — стійкою. Таким чином, умова стійкості другої точки збігається з однією з умов її існування.

При $\alpha < \rho$ єдиною стаціонарною точкою залишається перша, і вона буде стійка. Можна вважати, що цей випадок відповідає загибелі озерної екосистеми, яка є неминучою, коли зменшення біомаси фітопланктону ρ перевищує максимальну швидкість його приросту α.

Отже, розглянуто найпростішу модель евтрофікації водоймища, яка дає якісну картину екодинаміки прісноводної системи. Найважливішим керуючим параметром виявилася сумарна кількість речовини A; власне, са́ме цей параметр визначає швидкість і ступінь евтрофікації.

Внаслідок сильної агрегованості моделі всі результати мають суто якісний характер і не дуже придатні для конкретних прогнозів. Однак розглянута модель презентує доволі адекватний теоретичний опис усього процесу евтрофікації прісноводних водоймищ.

Задачі для самостійної роботи

1. Дослідити умови та характер стійкості стаціонарної точки $a_1^* = 0;\ s_1^* = 0;\ x_1^* = x_n;\ n_1^* = A$ в моделі озерної екосистеми (1) з підрозділу 8.3.

2. Дослідити умови та характер стійкості стаціонарної точки

$$a_2^* = \frac{B\mu}{(\rho+\mu)(\alpha-\rho)}; \quad s_2^* = \frac{B\rho}{(\rho+\mu)(\alpha-\rho)}; \qquad (\mu = \mu(x_2^*)),$$

x_2^* — розв'язок рівняння

$$k(x_n - x)(\rho + \mu(x))(\alpha - \rho) + B\mu(x)(\beta - \gamma\rho) = 0; \quad n_2^* = \frac{\rho\delta}{\alpha-\rho}$$

в моделі озерної екосистеми (1) з підрозділу 8.3.

ЧАСТИНА III

КОНЦЕПЦІЯ СТІЙКОГО РОЗВИТКУ І МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГО – ЕКОНОМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Особливістю розвитку виробничих сил суспільства на сучасному етапі є виснаження традиційних природних ресурсів, забруднення довкілля, а також порушення рівноваги між довкіллям і виробництвом. Однак історично склалося так, що науки про виробничі та природні системи (економіка та екологія) розвивалися незалежно одна від одної, розробляючи свої власні концептуальні основи і свої апарати для дослідження, що й зумовило паралельний розвиток двох напрямків у математичному моделюванні — математичної економіки і математичної екології. Проте у другій половині XX ст. економіка та екологія вже розглядаються не лише традиційно, тобто як окремі дисципліни, а починається інтеграція економічних і екологічних знань, придатних для вивчення законів екологічної економіки.

На той час вже був накопичений багатий досвід з побудови економіко-математичних моделей, заснованих на різних методах моделювання: економетричних, оптимізаційних, балансових, імітаційних тощо. Математична економіка досягла значних наукових вершин, вона стала могутнім джерелом нових задач, які стимулювали розвиток методів оптимізації та інших розділів математики. Розв'язки багатьох економічних проблем спиралися на фундаментальні результати в галузі теорії оптимізації та моделювання.

Введення в економічну науку і практику математичних методів дало змогу використати в економічному аналізі динамічні моделі і зробити цей аналіз точнішим. Таким чином було сформовано економічну теорію та розроблено моделі виробничих функцій, міжгалузевого балансу, економічної рівноваги, економічного зростання тощо.

Поряд з економікою та математичною економікою прискореними темпами розвивалась і екологічна наука. Екологію традиційно вважали одним з розділів «науки про життя» — біології, проте вже доволі швидко стало зрозуміло, що екологія — це широкий міждисциплінарний комплекс, який охоплює десятки наук. На сьогодні діапазон екологічних досліджень дуже багатогранний, оскільки актуальність цих досліджень стала очевидною в найрізноманітніших галузях суспільного буття. В межах математичної екології були розроблені основи математичного моделювання складних систем, моделі оптимального керування в екології, моделі популяцій, імітаційні моделі екосистем, методи математичного аналізу екологічних моделей, а також розв'язано багато інших теоретичних і прикладних проблем.

Але вже в другій половині XX ст., коли з'явилося усвідомлення того, що розглядати економіку та екологію традиційно, тобто як окремі дисципліни неможливо, почалася інтеграція економічних та екологічних знань, їх кількісне та якісне зростання. Зокрема, думки багатьох вчених поступово збігалися до того, що екологія тісно пов'язана з макроекономікою, а остання має розглядатися як відкрита підсистема екосистеми та повністю від неї залежати. Так, фундатор екологічної економіки Герман Дейлі зазначав, що створена людиною економіка «вмурована» в природну екосистему нашої планети, а тому цілком від неї залежить.

Отже, від економічних та екологічних досліджень наука поступово перейшла до дослідження проблем екологізації економіки. Зрозуміло, що система «природа —виробництво» має підкорятися таким критеріям розвитку, які б відображали як економічні (орієнтовані на сумірність у затратах праці), так і екологічні (орієнтовані на збереження цілісності природи) інтереси. Оскільки взаємодія людини з навколишнім середовищем здійснюється переважно через економічну діяльність (виробництво, перерозподіл та споживання продукції), яка є головним джерелом забруднення та виснаження довкілля, то необхідність екологізації сучасного виробництва та розробка стратегій екологічно орієнтованого менеджменту і практичного екологічного підприємництва перетворилася на одне з найбільш актуальних завдань сьогодення.

Необхідність розглядати цілісні еколого-економічні системи привела науковців до необхідності застосовувати методи математичного моделювання як найбільш потужного та ефективного способу дослідження еколого-економічних систем. Складність математичного моделювання тут пояснюється особливістю об'єкта моделювання, який охоплює низку природних, виробничих і біологічних процесів, рівновагу між якими надзвичайно важко зберегти, а ще складніше — керувати нею. Труднощі, які виникають окремо при математичному моделюванні економічних і екологічних систем, багатократно зростають у випадку побудови еколого-економічних моделей. Ці труднощі зумовили необхідність поетапного переходу від моделей математичної економіки та математичної екології до еколого-економічних моделей, і на даний час ми маємо два основних напрямки у побудові моделей еколого-економічних систем:

1) врахування екологічного фактора в економіко-математичних моделях;
2) врахування антропогенної дії в моделях екосистем.

Класичним представником моделі першого напрямку є, наприклад, міжгалузева балансова модель В. Леонтьєва–Д. Форда. Представником другого напрямку є так звана модель оптимального «збирання врожаю» (оптимальної експлуатації природних ресурсів) Моно–Ієрусалимського.

До складу еколого-економічних моделей обов'язково входять два основних блоки, що описують відповідно економічну та екологічну підсистеми, причому ці блоки пов'язані спільними змінними та співвідношеннями. Важливе значення при моделюванні еколого-економічних систем має рівень агрегованості, залежно від якого розрізняють регіональні та глобальні еколого-економічні моделі.

Зазначимо також, що еколого-економічні системи належить до класу кібернетичних систем, тобто систем, якими можна керувати за допомогою деяких вільних екзогенних змінних. Головною ознакою таких систем є наявність мети і критерію розвитку.

В багатьох роботах вплив економічних стратегій на стан навколишнього середовища оцінюється за допомогою екзогенних змінних, що описують технологічні зміни. Часто для опису економічних процесів в умовах взаємодії економічного зростання і навколишнього середовища використовується «нова теорія зростання».

Усвідомлення того факту, що виснаження природних ресурсів та відсутність екологічної рівноваги призведе до катастрофічних наслідків всесвітнього масштабу, стало початком не тільки інтенсивних наукових, але й політичних пошуків у напрямку ухвалення економічних, екологічних та соціально-політичних рішень. В цьому плані особливо виразною подією стало проведення у 1992 році Конференції ООН з навколишнього середовища і розвитку, на якій керівники зі 179 країн світу, в тому числі й України, спільно виробили всесвітню програму дій під назвою «Порядок дня на XXI століття». Основу програми становлять 27 принципів, які регламентують раціональну поведінку країн світу (права та зобов'язання) на шляху до переходу людства на збалансований в економічному, екологічному і соціальному значенні спосіб життя.

Такий спосіб передбачає самовідтворювальний розвиток економіки та економічне зростання в межах допустимих можливостей природного середовища. Цей розвиток був названий *сталим*. Одне з визначень сталого розвитку належить, зокрема, Донелі Медоуз: «Це такий розвиток, коли ми задовольняємо свої поточні потреби і водночас не створюємо загрози для існування наступних поколінь».

Тому однією з основних теоретичних і методологічних проблем розробки довгострокової стратегії природокористування того чи того регіону, що забезпечує гармонійний соціально-економічний розвиток на віддалену перспективу, є розподіл наявних природних ресурсів між теперішнім та майбутніми поколіннями. Са́ме обмеженість природних ресурсів необхідно розглядати як фактор, який лімітує довгостроковий економічний розвиток. А обмежені спроможності навколишнього природного середовища щодо «знищення» викидів і регенерації відновлюваних природних ресурсів необхідно розглядати як фактор, який лімітує економічне зростання.

Отже, в сучасному суспільному виробництві реалізація ресурсозберігаючих та природоохоронних заходів на основі науково-технічного прогресу має розглядатися як фактор економічного зростання. Однак визначення оптимальних темпів економічного зростання і частки суспільно необхідних витрат на проведення ресурсозберігаючих та природоохоронних заходів на сьогодні є ще малодослідженою проблемою.

З терміном «сталий розвиток» асоціюються поняття про розвиток збалансований, стабільний, природовідповідний. Збалансований в динаміці еколого-економічний процес суспільного відтворення стає тим надзвичайно важливим об'єктом, дослідження якого належить до пріоритетних напрямків наукової діяльності, зокрема математичного моделювання. Останнім часом вітчизняними економістами та екологами досить активно розробляються наукові основи еколого-економічної політики в Україні, спрямовані на досягнення ознак суспільства сталого розвитку.

Таким чином, нові реалії життя потребують нових підходів до моделювання та дослідження взаємодії економіки та довкілля.

Принципи моделювання еколого-економічних систем

Повна модель еколого-економічної системи повинна містити математичний опис таких чотирьох взаємозалежних аспектів:

1) соціально-економічної підсистеми;
2) природної підсистеми (екосистеми);
3) антропогенного впливу на природне середовище та оцінку його наслідків;
4) впливу природних факторів на життєдіяльність суспільства і здоров'я людини.

Ідеологія математичного моделювання економічних і екологічних процесів обговорювалася вище. Розглянемо детальніше третій і четвертий аспекти.

Проблема оцінювання наслідків впливу на природне середовище є центральною в системі взаємин суспільства і природи. Забруднення навколишнього середовища всілякими шкідливими речовинами і сполуками, інтенсивний видобуток корисних копалин і експлуатація природних ресурсів, відчуження природних територій під промислове і міське будівництво, створення каналів і водоймищ, осушення боліт і зрошення посушливих земель — усі ці і багато інших видів впливу набувають глобального характеру та істотно змінюють сталий плин природних процесів, що найчастіше призводить до непередбачених і майже незворотних наслідків.

Оцінювання впливу на довкілля має стати невід'ємною складовою частиною планування основних видів людської діяльності. Задача математичного моделювання полягає в тому, щоб навчитися описувати динаміку екологічних систем в умовах антропогенного впливу.

Можна запропонувати таку спрощену формалізацію: якщо поведінка екосистеми в «природному» стані описується системою нелінійних диференціальних рівнянь:

$$dx/dt = f(t, x(t)), \tag{1}$$

де $x(t)$ — вектор-функція стану екосистеми, то врахування антропогенного впливу означає перехід до системи:

$$dx/dt = f(t, x(t), \mu(t)), \tag{2}$$

де $\mu(t)$ — узагальнена характеристика впливу.

Для побудови моделі виду (2) необхідно вивчити всі фізико-хімічні, біологічні, економічні, технічні і соціальні фактори, що мають відношення до справи. Наприклад, при дослідженні процесів забруднення треба знати кількість і розташування джерел забруднення, склад і динаміку викидів, закономірності переміщення і трансформації забруднюючих речовин у різних геофізичних середовищах, можливості самоочищення елементів біосфери, відповідну реакцію біоти, заходи для контролю і запобігання забруднення. Останнє становить природний перехід до аналізу четвертого аспекту еколого-економічної взаємодії — впливу природних факторів на життєдіяльність суспільства. Річ у тім, що найбільший інтерес викликає не так перетворення чи навіть деградація природних систем, як наслідки цих змін для людини і суспільства загалом. Відношення людини до природи неминуче носить історичний характер, і критерії «екологічного добробуту» завжди детерміновані соціально.

Зі зростанням матеріального добробуту і культурного рівня людей вимоги до якості довкілля зростають, а екологічні складові відіграють дедалі більшу роль при визначенні «якості життя».

У найбільш загальній формі можна стверджувати, що якщо $y(t)$ — вектор-функція стану соціально-економічної системи, то його динаміка визначається співвідношенням:

$$dy/dt = g(t, y(t), x(t), dx/dt), \tag{3}$$

де похідна dx/dt знаходиться з (2).

Тоді функціонування еколого-економічної системи загалом описується співвідношеннями (2) і (3) при $\mu(t) = (y(t), dy/dt)$, тобто системою:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t), dy/dt), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t, y(t), x(t), dx/dt). \end{cases} \tag{4}$$

Звичайно, система (4) є дуже умовним описом процесу еколого-економічної взаємодії. Однак безумовний характер має вимога детального опису економічних і природних процесів з урахуванням їхньої взаємозалежності. А це зумовлює іншу вимогу — приділяти особливу увагу опису зворотних зв'язків в еколого-економічній системі.

У попередніх розділах вже було обговорено труднощі, які виникають при математичному моделюванні економічних і природних систем. Зрозуміло, що ці труднощі багатократно збільшуються при спробах побудови еколого-економічних моделей, які потребують одночасного комплексного розгляду різнорідних фізико-хімічних, біологічних і соціально-економічних процесів, чимало з яких ще недостатньо вивчені в змістовому плані.

Значно збільшується і складність інформаційного забезпечення моделей, необхідного для їхньої ідентифікації та верифікації, а також виникають проблеми, пов'язані з високою розмірністю моделей.

Такі труднощі, що мають не тільки технічний, а й принциповий характер, зумовили необхідність поступового, поетапного переходу від моделей математичної економіки і математичної екології до інтегрованих еколого-економічних моделей. У зв'язку з цим можна виділити два основних напрямки у побудові «проміжних» моделей. Один з них зводиться до врахування екологічного фактора в економіко-математичних моделях, а інший — до врахування антропогенного впливу в моделях екосистем. Охарактеризуємо їх в загальних рисах.

Моделі першого виду, зберігаючи традиційну структуру економіко-математичних моделей (як правило, це системи опуклих чи навіть лінійних рівнянь і нерівностей), залучають додаткові змінні і зв'язки, що характеризують екологічну підсистему. При цьому, як і раніше, повинні виконуватися закони збереження в їхній балансовій формі, які тепер включають потоки природної сировини і матеріалів, забруднюючих речовин і т. ін. Власне, природні процеси, що визначають динаміку екосистеми, у моделі не описуються, або описуються зі значно меншим ступенем деталізації, ніж виробничо-економічна діяльність. Одним з класичних прикладів моделей цього виду є модель Леонтьєва–Форда.

В моделях другого виду за основу беруться моделі математичної екології. Антропогенна діяльність розглядається як екзогенний вплив на екосистему. Слід зазначити, що вже в основній роботі В. Вольтерра вивчався вплив на динаміку популяції вилову частини її особин. З того часу найпоширенішими прикладами цього виду моделей стали моделі оптимальної експлуатації природних ресурсів («збирання врожаю»). Їхньою особливістю є наявність економічного критерію, відповідно до якого здійснюється політика експлуатації піддослідної популяції чи співтовариства.

Нехай $x(t)$ — чисельність цієї популяції на рік t, $u(t)$ — величина вилову особин популяції. Тоді динаміку чисельності можна описати рівнянням:

$$dx/dt = f(x(t)) - \dot{u}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{5}$$

Критерій ефективності експлуатації («збирання врожаю») можна задавати різними способами, наприклад,

$$p \int_0^T u(t)dt \to max, \tag{6}$$

де p — «ціна» однієї особини.

Для з'ясування частки популяції, що експлуатується за межами періоду T, потрібно накласти додаткове обмеження виду:

$$x(T) \geq x_T, \tag{7}$$

де x_T — деяка критична чисельність популяції, яка є необхідною для її виживання.

Досвід, накопичений при узагальненні моделей математичної економіки та екології, дав змогу перейти до побудови комплексних еколого-економічних моделей, до складу яких входять два основних блоки, що описують економічні та екологічні процеси. При цьому кожен блок обов'язково містить рівняння, які пов'язують змінні екологічної та економічної підсистем між собою.

За рівнем агрегованості еколого-економічні моделі можна поділити на регіональні і глобальні.

Регіональні, як правило, зосереджують увагу на певній проблемі, що визначається специфікою конкретного регіону (водогосподарчі проблеми, проблеми лісокористування, сільського господарства, рекреації і т. ін.). У цих моделях з найбільшою повнотою описуються процеси, що мають безпосереднє відношення до розглянутих проблем. Можливі і регіональні моделі загального призначення.

Глобальні моделі описують функціонування світової економіки взагалі і її вплив на біосферу. Як правило, вони мають ієрархічну структуру, охоплюючи блоки моделей великих регіонів світу. До біосферних процесів належать глобальні біогеохімічні цикли, динаміка атмосфери і Світового океану, приріст органічної речовини, рослинності тощо. Економічну підсистему характеризують процеси виробництва і споживання, демографічні процеси, забруднення навколишнього середовища і т. ін.

Особливою рисою еколого-економічних моделей є їхня керованість, тобто наявність вільних екзогенний змінних, значення яких дослідник може задавати на свій розсуд. Зазвичай набори значень керуючих змінних поєднуються в сценарії, що відображають різні стратегії керування досліджуваними еколого-економічними системами. Якісний аналіз фазових траєкторій системи при різних сценаріях її розвитку дає змогу оцінити припустимість цих сценаріїв із соціально-економічної та соціально-екологічної точок зору.

Як правило, еколого-економічні моделі мають блочну (модульну) структуру, тобто складаються з порівняно автономних підсистем (блоків), що описують відповідні компоненти еколого-економічної системи. Структура моделі повинна забезпечувати можливість у разі необхідності нарощувати кількість блоків, що враховують нові фактори чи відомості.

Різні блоки можуть формуватися за допомогою різного математичного апарату: диференціальних, інтегральних та різницевих рівнянь, систем алгебраїчних рівнянь і нерівностей тощо.

Найбільш адекватним засобом для еколого-економічного аналізу на сьогодні видається імітаційне моделювання, що передбачає розробку імітаційних систем.

РОЗДІЛ 9. МІЖГАЛУЗЕВА МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА – ФОРДА

При написанні цього розділу використовувалося джерело [3].

В сучасних умовах суспільство страждає від наслідків негативних антропогенних впливів і тому надзвичайно великого значення набуває охорона навколишнього середовища (повітряного та водного басейнів, ґрунтового покриття, рослинного та тваринного світу тощо). Забруднення навколишнього середовища є побічним результатом економічної діяльності суспільства (виробництва, розподілу та споживання продукції). Боротьба із забрудненням середовища потребує щораз більших витрат, зумовлює створення нових виробництв з переробки та знищення шкідливих відходів. Як результат розширюється сама сфера суспільного виробництва: тепер вона передбачає не лише створення матеріальних благ, а й різні види діяльності, пов'язані зі зменшенням забруднення навколишнього середовища та відновленням природних ресурсів.

9.1. Статична модель Леонтьєва–Форда

Перша міжгалузева модель, що охоплювала взаємозв'язки економіки та навколишнього середовища, була запропонована В. Леонтьєвим і Д. Фордом. Вона узагальнює схему класичного міжгалузевого балансу й охоплює дві групи галузей (виробництв): *основне виробництво* (галузі матеріального виробництва) та *допоміжне виробництво* (галузі, що знищують шкідливі відходи). Основні умови моделі виражаються системою рівнянь:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1, \\ x_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

В цій системі вектори-колонки

$$x_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)^{\mathrm{T}}, \qquad y_1 = (y_1^1, y_2^1, ..., y_n^1)^{\mathrm{T}}$$

та квадратна матриця n-го порядку $A_{11} = (a_{ij}^{11})_1^n$ характеризують величини x, y та A основної моделі міжгалузевого балансу: $x_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2)^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка об'ємів знищених забруднювачів, $y_2 = (y_1^2, y_2^2, ..., y_m^2)^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка об'ємів незнищених забруднювачів; $A_{12} = (a_{ig}^{12})_{i,g=1}^{n,m}$ — прямокутна матриця затрат продукції i на одиницю знищення забруднювачів g, $A_{21} = (a_{kj}^{21})_{k,j=1}^{m,n}$ — прямокутна матриця випуску забруднювачів k на одиницю виробництва продукції j, $A_{22} = (a_{kg}^{22})_1^m$ — квадратна матриця випуску забруднювачів k на одиницю знищення забруднювачів g.

Модель (1) одержується, якщо записати баланси для кожної галузі основного виробництва (матеріальне виробництво):

$$x_i^1 = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{11} + \sum_{g=1}^{m} x_{ig}^{12} + y_i^1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

та для кожної галузі допоміжного виробництва (знищення забруднювачів):

$$x_k^2 = \sum_{j=1}^{n} x_{kj}^{21} + \sum_{g=1}^{m} x_{kg}^{22} - y_k^2, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

де x_{ij}^{11} — затрати i-ої продукції в j-ій галузі основного виробництва, x_{ig}^{12} — затрати i-ої продукції в g-ій галузі допоміжного виробництва, x_{kj}^{21} — випуск k-го забруднювача j-ою галуззю основного виробництва, x_{kg}^{22} — випуск k-го забруднювача g-ою галуззю допоміжного виробництва.

Співвідношення (2) та (3) характеризують залежності між $2(n+m) + (n+m)^2$ величинами $x_i^1, y_i^1, x_k^2, y_k^2, x_{ij}^{11}, x_{ig}^{12}, x_{kj}^{21}, x_{kg}^{22}$. Вони мають дуже загальний характер. Для побудови математичної моделі головним є припущення про те, що $x_{ij}^{11}, x_{ig}^{12}, x_{kj}^{21}$ та x_{kg}^{22} — функції від об'ємів виробництва відповідної галузі:

$$x_{ij}^{11} = \varphi_{ij}^{11}(x_j^1), \quad x_{ig}^{12} = \varphi_{ig}^{12}(x_g^2), \quad x_{kj}^{21} = \varphi_{kj}^{21}(x_j^1),$$

$$x_{kg}^{22} = \varphi_{kg}^{22}(x_g^2), \;\; i, j = 1, 2, \ldots, n, \; k, g = 1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$

В найпростішому варіанті моделі Леонтьєва–Форда використовується припущення про пропорційний характер залежності між затратами та об'ємами виробництва, тобто вводяться лінійні однорідні функції виробничих затрат:

$$x_{ij}^{11} = a_{ij}^{11} x_j^1, \qquad x_{ig}^{12} = a_{ig}^{12} x_g^2, \qquad x_{kj}^{21} = a_{kj}^{21} x_j^1, \qquad x_{kg}^{22} = a_{kg}^{22} x_g^2. \qquad (5)$$

Коефіцієнти пропорційності $a_{ij}^{11} \geq 0$, $a_{ig}^{12} \geq 0$, $a_{kj}^{21} \geq 0$ та $a_{kg}^{22} \geq 0$ називають коефіцієнтами відповідно прямих затрат продукції i на виробництво одиниці продукції j, прямих затрат продукції i при знищенні одиниці забруднювачів g, прямого випуску k-го забруднювача при виробництві одиниці продукції j, прямого випуску k-го забруднювача при знищенні одиниці забруднювача g. Ці коефіцієнти в сукупності утворюють матриці:

$$A_{11} = (a_{ij}^{11})_1^n, \qquad A_{12} = (a_{ig}^{12})_{i,g=1}^{n,m},$$

$$A_{21} = (a_{kj}^{21})_{k,j=1}^{m,n}, \qquad A_{22} = (a_{kg}^{22})_1^m.$$

Підставляючи значення x_{ij}^{11}, x_{ig}^{12}, x_{kj}^{21} та x_{kg}^{22} з (5) у (2), (3), одержуємо систему $n+m$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $2(n+m)$ змінними x_i^1, y_i^1, x_k^2, y_k^2:

$$x_i^1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{11} x_j^1 + \sum_{g=1}^{m} a_{ig}^{12} x_g^2 + y_i^1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6)$$

$$x_k^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{21} x_j^1 + \sum_{g=1}^{m} a_{kg}^{22} x_g^2 - y_k^2, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (7)$$

У векторно-матричній формі система рівнянь (6), (7) набуває вигляду (1).

Припускаючи, що коефіцієнти $a_{ij}^{11} \geq 0$, $a_{ig}^{12} \geq 0$, $a_{kj}^{21} \geq 0$, $a_{kg}^{22} \geq 0$, ми неявно поширюємо на всі види виробничої діяльності (матеріальне виробництво та знищення забруднювачів) припущення (гіпотезу) основної моделі міжгалузевого балансу (кількість технологічних способів дорівнює кількості видів продукції, а в кожному технологічному способі виробляється лише один вид продукції). І надалі будемо вважати матриці A_{11}, A_{12}, A_{21} та A_{22} невід'ємними:

$$A_{11} \geq 0, A_{12} \geq 0, \quad A_{21} \geq 0, \quad A_{22} \geq 0.$$

У прикладних моделях номенклатура знищуваних забруднювачів менша від номенклатури існуючих забруднювачів. Розширення першої номенклатури відбувається тоді, коли концентрація нових забруднювачів стає істотною з точки зору умов життєдіяльності або виробництва та коли створюються технічні і економічні можливості для боротьби з наявними забруднювачами.

Додамо, що економічний зміст моделі Леонтьєва–Форда потребує, аби всі її змінні були невід'ємними, тобто

$$x_i^1 \geq 0, \quad x_k^2 \geq 0, \quad y_i^1 \geq 0, \quad y_k^2 \geq 0. \tag{8}$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Міжгалузеву модель Леонтьєва–Форда (1) і (8) можна також розглядати як узагальнення класичної схеми міжгалузевого балансу на випадок відкритої економічної системи, коли чистий імпорт i окремих видів продукції перевищує невиробниче споживання $\bar{y}$ (тобто ця продукція імпортується ще й для виробничого споживання). В цьому випадку кінцева продукція y для цих галузей є від'ємною: $y = \bar{y} - i < 0$. Тоді, групуючи галузі з додатною кінцевою продукцією в блок (x_1, y_1), а інші галузі (з не додатною кінцевою продукцією) — в блок $(x_2, -y_2)$, одержимо матриці прямих матеріальних затрат $A_{11} \geq 0$, $A_{12} \geq 0$, $A_{21} \geq 0$, $A_{22} \geq 0$ і модель міжгалузевого балансу у вигляді (1), де $y_1 > 0$, $y_2 \geq 0$. Тому одержані результати з дослідження моделі Леонтьєва–Форда можуть бути використані і для дослідження міжгалузевих балансів відкритих економік.

9.2. Умови існування невід'ємних розв'язків

Для дослідження умов існування економічно змістовних розв'язків моделі (1), (8) з підрозділу 9.1, розглянемо друге з рівнянь цієї моделі. Сума $A_{21}x_1 + A_{22}x_2$ визначає об'єм забруднення від усіх видів виробничої діяльності (основного та допоміжного виробництв). Вектор x_2 залежить не лише від цієї суми, а й від припустимих об'ємів незнищуваних забруднювачів y_2. Взагалі максимально припустимі значення компонент вектора y_2 визначаються умовами екологічної рівноваги або прийнятими стандартами якості навколишнього середовища, проте вони можуть встановлюватися також і з реальних техніко-економічних можливостей або економії коштів.

Діяльність зі знищенням забруднювачів має сенс (тобто відповідні $x_g^2 \geq 0$), якщо $y_2 \leq A_{21}x_1 + A_{22}x_2$.

Розв'яжемо формально систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1) з підрозділу 9.1 двома способами. За першим способом спочатку знайдемо x_2 з другого рівняння, підставимо знайдене x_2 в перше рівняння і розв'яжемо його відносно x_1. За другим способом спочатку знайдемо x_1 з першого рівняння, підставимо знайдене x_1 в друге рівняння і розв'яжемо його відносно x_2. У результаті одержимо:

$$x_1 = (E_1 - A_1)^{-1}[y_1 - A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}y_2], \tag{1}$$

$$x_2 = (E_2 - A_2)^{-1}[A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}y_1 - y_2], \tag{2}$$

де E_1 та E_2 — діагональні одиничні матриці відповідно n-го та m-го порядків, A_1 та A_2 — квадратні матриці відповідно n-го та m-го порядків:

$$A_1 = A_{11} + A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}A_{21}, \tag{3}$$

$$A_2 = A_{22} + A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}A_{12}. \tag{4}$$

Взявши розв'язки у вигляді (1) і (2), можемо записати формальний розв'язок системи (1) з підрозділу 9.1 в такому виді:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (E_1 - A_1)^{-1} & (E_1 - A_1)^{-1}A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1} \\ (E_2 - A_2)^{-1}A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} & (E_2 - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Таким чином, маємо явний вигляд оберненої матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1) з підрозділу 9.1:

$$\begin{bmatrix} E_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} (E_1 - A_1)^{-1} & (E_1 - A_1)^{-1}A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1} \\ (E_2 - A_2)^{-1}A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} & (E_2 - A_2)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Одержана матриця

$$B = \begin{bmatrix} E_1 - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E_2 - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

є узагальненням матриці $(E-A)^{-1}$ коефіцієнтів повних затрат для класичної моделі міжгалузевого балансу. Елементи-блоки матриці B мають такий економічний зміст: B_{11} — коефіцієнти повних затрат виробленої продукції на одиницю кінцевої продукції, B_{12} — коефіцієнти повних затрат виробленої продукції на одиницю зменшення незнищених забруднювачів, B_{21} — коефіцієнти необхідного знищення забруднювачів на одиницю кінцевої продукції, B_{22} — коефіцієнти необхідного знищення забруднювачів на одиницю зменшення незнищених забруднювачів. Цей економічний зміст випливає із самого розв'язку системи рівнянь моделі (1) з підрозділу 9.1:

$$x_1 = B_{11}y_1 - B_{12}y_2,$$
$$x_2 = B_{21}y_1 - B_{22}y_2.$$

Раніше було введено поняття продуктивності економічної системи в моделі міжгалузевого балансу, що пов'язується лише з властивостями матриці прямих затрат A. Продуктивній економічній системі відповідала така матриця коефіцієнтів A, яка забезпечувала можливість одержання кінцевої продукції ($y > 0$) при відповідних пропорціях розвитку виробництва ($x \geq 0$). Матриця A називалася продуктивною, якщо існував невід'ємний вектор $x \geq 0$, що давав змогу одержати додатний вектор кінцевої продукції, $(E-A)x = y > 0$. Для продуктивності матриці A необхідною та достатньою умовою є невід'ємність матриці $B = (E-A)^{-1} \geq 0$. Якщо при цьому матриця A є нерозкладною, то матриця $B = (E-A)^{-1} > 0$.

Узагальнимо поняття продуктивності матриці A на випадок блочної матриці з невід'ємними елементами:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq 0. \qquad (7)$$

Будемо вважати невід'ємну блочну матрицю (7) *продуктивною*, якщо продуктивними є матриці A_{11}, A_{22}, а також матриці A_1, A_2, які визначаються співвідношеннями (3) і (4).

Продуктивність матриць A_1 та A_2 означає рентабельність основного та допоміжного виробництва за повним циклом виробництва продукції та за повним циклом знищення забруднювачів.

Якщо матриці A_{11}, A_{22}, A_1 та A_2 продуктивні, то матриці

$$(E_1 - A_{11})^{-1} \geq 0, \qquad (E_2 - A_{22})^{-1} \geq 0,$$
$$(E_1 - A_1)^{-1} \geq 0, \qquad (E_2 - A_2)^{-1} \geq 0, \tag{8}$$

тобто вони існують і мають невід'ємні елементи. Тоді:

$$B_{11} = (E_1 - A_{11})^{-1} \geq 0, \quad B_{22} = (E_2 - A_{22})^{-1} \geq 0,$$
$$B_{12} = (E_1 - A_1)^{-1} A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1} \geq 0, \; B_{21} = (E_2 - A_2)^{-1} A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} \geq 0.$$

Якщо матриці A_{11} та A_{22} — нерозкладні, то нестрогі нерівності (≥ 0) у формулах (15) замінюються на строгі нерівності (> 0).

Проте продуктивність блочної матриці (7) не гарантує невід'ємності розв'язків системи (1) з підрозділу 9.1. Річ у тім, що величини векторів $y_1 > 0$ та $y_2 \geq 0$ можуть змінюватися довільно, а тому можуть з'явитися умови, які їх зв'язують.

Аналізуючи вирази для x_1 та x_2, бачимо, що

$$x_1 = (E_1 - A_{11})^{-1}[y_1 + A_{12}x_2].$$

Таким чином, якщо $x_2 \geq 0$, то при $y_1 > 0$ автоматично виконується умова $x_1 \geq 0$.

Отже, необхідною і достатньою умовою для невід'ємності розв'язків моделі Леонтьєва–Форда при продуктивності матриці (7) системи рівнянь (1) з підрозділу 9.1 та при $y_1 > 0$, $y_2 \geq 0$, буде умова $x_2 \geq 0$, тобто:

$$(E_2 - A_2)^{-1}[A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} y_1 - y_2] \geq 0. \tag{9}$$

Достатньою умовою невід'ємності розв'язків при продуктивності матриці (7) та при $y_1 > 0$, $y_2 \geq 0$ є умова:

$$A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} y_1 \geq y_2, \tag{10}$$

що має такий економічний зміст: основне та допоміжне виробництва будуть функціонувати, якщо об'єм незнищених забруднювачів y_2 не перевищує повного забруднення, яке виникає при одержанні кінцевої продукції y_1.

Неважко переконатися, що замість (10) достатньою умовою також є більш жорстка умова:

$$A_{21} y_1 \geq y_2. \tag{11}$$

9.3. Модель міжгалузевих залежностей цін

Перейдемо тепер до побудови двоїстої моделі Леонтьєва–Форда відносно цін. Для цього запишемо вартісний баланс виробленої продукції для кожної галузі основного виробництва:

$$\tilde{x}_j^1 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij}^{11} + \sum_{k=1}^{m} \tilde{x}_{kj}^{21} + z_j^1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

та вартісний баланс знищених забруднювачів для кожної галузі допоміжного виробництва:

$$\tilde{x}_g^2 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ig}^{12} + \sum_{k=1}^{m} \tilde{x}_{kg}^{22} + z_g^2, \quad g = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Тут $\tilde{x}_j^1$ — об'єм виробництва j-ої продукції у вартісній формі; z_j^1 — додаткова вартість продукції j-ої галузі основного виробництва, що включає амортизацію, оплату праці та додатковий продукт; $\tilde{x}_g^2$ — вартість знищення всього об'єму g-го забруднювача; z_g^2 — додаткова вартість продукції g-ої галузі допоміжного виробництва, що включає амортизацію, оплату та додатковий продукт; $\tilde{x}_{ij}^{11}$ — вартісні витрати i-ої продукції при випуску j-ої продукції; $\tilde{x}_{kj}^{21}$ — вартість знищення k-го забруднювача, що випускається j-ою галуззю основного виробництва; $\tilde{x}_{ig}^{12}$ — вартість прямих затрат i-ої продукції основного виробництва на знищення об'єму g-го забруднювача; $\tilde{x}_{kg}^{22}$ — вартість прямих затрат, пов'язаних зі знищенням об'єму k-го забруднювача, що виникає при знищенні g-го забруднювача.

Нехай p_i^1 — ціна одиниці i-ої продукції, p_k^2 — вартість знищення одиниці k-го забруднювача, r_j^1 — коефіцієнт додаткової вартості продукції на одиницю продукції виробництва j-ої галузі $(z_j^1 = r_j^1 x_j^1)$, r_g^2 — коефіцієнт додаткової вартості продукції g-ої галузі допоміжного виробництва $(z_g^2 = r_g^2 x_g^2)$. Підставимо вирази

$$\tilde{x}_j^1 = p_j^1 \cdot x_j^1, \quad z_j^1 = r_j^1 \cdot x_j^1, \quad \tilde{x}_{ij}^{11} = p_i^1 \cdot a_{ij}^{11} \cdot x_j^1, \quad \tilde{x}_{kj}^{21} = p_k^2 \cdot a_{kj}^{21} \cdot x_j^1,$$

$$\tilde{x}_g^2 = p_g^2 \cdot x_g^2, \quad z_g^2 = r_g^2 \cdot x_g^2, \quad \tilde{x}_{ig}^{12} = p_i^1 \cdot a_{ig}^{12} \cdot x_g^2, \quad \tilde{x}_{kg}^{22} = p_k^2 \cdot a_{kg}^{22} \cdot x_g^2$$

в баланси (1) та (2). Тоді після скорочення обох частин відповідних рівностей на $x_j^1 > 0$ і $x_g^2 > 0$ одержимо:

$$p_j^1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 a_{ij}^{11} + \sum_{k=1}^{m} p_k^2 a_{kj}^{21} + r_j^1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$p_g^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 a_{ig}^{12} + \sum_{k=1}^{m} p_k^2 a_{kg}^{22} + r_g^2, \quad g = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Скалярні рівняння (3) та (4) можна записати також у векторно-матричному вигляді:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1 A_{11} + p_2 A_{21} + r_1, \\ p_2 &= p_1 A_{12} + p_2 A_{22} + r_2, \end{aligned} \tag{5}$$

де $p_1 = (p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1)$ — вектор-рядок цін основної продукції, $p_2 = (p_1^2, p_2^2, \ldots, p_m^2)$ — вектор-рядок вартостей знищення одиниць забруднювачів, $r_1 = (r_1^1, r_2^1, \ldots, r_n^1)$ — вектор-рядок коефіцієнтів додаткової вартості продукції основного виробництва, $r_2 = (r_1^2, r_2^2, \ldots, r_m^2)$ — вектор-рядок коефіцієнтів додаткової вартості продукції допоміжного виробництва.

Модель міжгалузевих залежностей цін (3) і (4) є двоїстою щодо моделі міжгалузевих матеріально-речових зв'язків (6), (7) з підрозділу 9.1. Співвідношення між рівняннями цих моделей аналогічні до співвідношень між умовами двоїстості задач лінійного програмування. Крім цього, обов'язково виконується рівність:

$$\sum_{j=1}^{n} r_j^1 x_j^1 + \sum_{g=1}^{m} r_g^2 x_g^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 y_i^1 + \sum_{k=1}^{m} p_k^2 (-y_k^2), \tag{6}$$

тобто об'єм створеної в народному господарстві продукції (за вартісним складом) дорівнює сумарній оцінці використаної кінцевої продукції. Дане співвідношення еквівалентне умові рівності функціоналів прямої та двоїстої задач лінійного програмування й одержується таким чином. З (6) та (7) підрозділу 9.1, записаних у вартісних показниках, одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}_i^1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_{ij}^{11}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{g=1}^{m}\widetilde{x}_{ig}^{12}+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{y}_i^1,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\widetilde{x}_k^2=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_{kj}^{21}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{g=1}^{m}\widetilde{x}_{kg}^{22}-\sum_{k=1}^{m}\widetilde{y}_k^2.$$

Водночас з (1) та (2) одержуємо:

$$\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j^1=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}_{ij}^{11}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\widetilde{x}_{kj}^{21}+\sum_{j=1}^{n}z_j^1,$$

$$\sum_{g=1}^{m}\widetilde{x}_g^2=\sum_{g=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}_{ig}^{12}+\sum_{g=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\widetilde{x}_{kg}^{22}+\sum_{g=1}^{m}z_g^2.$$

Після прирівнювання сум лівих та правих частин цих рівностей одержуємо тотожність:

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{y}_i^1+\sum_{k=1}^{m}(-\widetilde{y}_k^2)=\sum_{j=1}^{n}z_j^1+\sum_{g=1}^{m}z_g^2,$$

з якої очевидним чином випливає (6).

Економічний зміст наведеної двоїстої моделі Леонтьєва–Форда вимагає, щоб усі її змінні були невід'ємними: $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. Однак оскільки коефіцієнти умовно-чистої продукції $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, то для випадку нерозкладної продуктивної блочної матриці A системи рівнянь (5) розв'язками будуть $p_1 > 0$, $p_2 > 0$. Цей випадок відповідає ситуації, коли галузі основного виробництва (виробництва продукції) та галузі допоміжного виробництва (знищення забруднювачів) функціонують окремо і кожна з них має свій матеріально-фінансовий рахунок.

Проте нерідко трапляються випадки, коли знищення забруднювачів відбувається в нерозривному технологічному процесі «випуск продукції + знищення (повне або часткове) забруднювачів». В цьому випадку додаткова вартість продукції, що включає амортизацію основних фондів, оплату праці і додатковий продукт, має відношення лише до основної продукції. Отже, в цьому випадку умовно-чиста вартість знищення забруднювачів окремо не враховується, а повністю переноситься на ціну основної продукції. Ми пропонуємо цю ситуацію розглядати, як випадок $r_2 = 0$. Відповідна двоїста модель

$$p_1 = p_1 A_{11} + p_2 A_{21} + r_1,$$
$$p_2 = p_1 A_{12} + p_2 A_{22} \qquad (7)$$
дає змогу визначити як ціну основної продукції $p_1 > 0$, що враховує додаткову вартість продукції, так і ціну знищення забруднювачів $p_2 > 0$, яка не враховує додаткової вартості продукції, а складається лише з матеріальних витрат. Це доцільно робити, щоб мати оцінку повних матеріальних витрат на очищення забруднювачів.

Трапляються випадки порушення нерозривного технологічного процесу «випуск продукції + знищення забруднювачів» через економію коштів при знищенні забруднювачів, що призводить до погіршення якості знищення забруднювачів (наприклад, використовується заміна матеріалів очисних споруд, пришвидшується технологічний процес очищення, проводяться несанкціоновані викиди забруднювачів і т. ін.). В цьому випадку потрібно оцінити лише величину прямої економії на знищенні одиниці забруднювачів ($-r_2$), а відповідна двоїста модель
$$p_1 = p_1 A_{11} + p_2 A_{21} + r_1,$$
$$p_2 = p_1 A_{12} + p_2 A_{22} - r_2 \qquad (8)$$
дає змогу вже оцінити повні матеріальні затрати на очищення забруднювачів у цій ситуації.

Аналогічно, як це було зроблено раніше, можна показати, що необхідною та достатньою умовою невід'ємності розв'язків двоїстої моделі (8) є продуктивність блочної матриці (7) з підрозділу 9.2 та умова:
$$[r_1(E_1 - A_{11})^{-1} A_{12} - r_2](E_2 - A_2)^{-1} \geq 0,$$
де $r_1 > 0$, $r_2 \geq 0$.

Достатньою умовою невід'ємності розв'язків є продуктивність блочної матриці A та умова:
$$r_1(E_1 - A_{11})^{-1} A_{12} \geq r_2$$
— або простіша умова:
$$r_1 A_{12} \geq r_2.$$

Що стосується практичного знаходження невід'ємних розв'язків системи рівнянь (8), то, крім прямих методів, пов'язаних з оберненням матриць $E_1 - A_{11}$, $E_2 - A_{22}$, $E_1 - A_1$, $E_2 - A_2$, корисними виявляються ітераційні методи.

9.4. Динамічна модель Леонтьєва–Форда

9.4.1. Побудова динамічної моделі

Специфічною ознакою еколого-економічних міжгалузевих динамічних моделей є опис співвідношень «витрати-випуск» у формі матриць міжгалузевого балансу, де кожний вид продукції представлений лише одним виробничим способом, а в кожному способі випускається лише один продукт. Аналогічно кожний вид забруднювачів, що утворюються при випуску продукції, знищується лише одним виробничим способом, а в кожному способі знищується лише один забруднювач, але при цьому можуть утворюватися інші забруднювачі. Значення динамічних міжгалузевих моделей серед інших моделей економічної динаміки визначається трьома обставинами. По-перше, вони є деталізованими (дезагрегованими) аналогами моделей відтворення суспільного продукту і національного доходу. По-друге, вони є узагальненнями статичних (балансових і оптимізаційних) міжгалузевих моделей. По-третє, вони слугують теоретико-методичною основою для прикладних динамічних моделей з матрицями міжгалузевого балансу.

Запропонована В. Леонтьєвим на початку 50-х рр. XX ст. динамічна міжгалузева модель стала класичним прикладом використання систем диференціальних рівнянь в дослідженні проблем економічного зростання. Ця модель має вигляд:

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) + c(t), \qquad (1)$$

де $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка об'ємів виробництва; $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), ..., \dot{x}_n(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка абсолютних приростів виробництва продукції; $c(t) = (c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка споживання (включаючи невиробниче нагромадження); $A = (a_{ij})_1^n$ — матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (на відміну від коефіцієнтів статичного міжгалузевого балансу коефіцієнти в динамічній моделі включають також витрати на відновлення вибуття капіталу та ремонт основних виробничих фондів); $B = (b_{ij})_1^n$ — матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва (затрати виробничого нагромадження на одиницю приросту відповідних видів продукції).

За аналогією з цим для статичної еколого-економічної міжгалузевої моделі Леонтьєва–Форда теж можна запропонувати відповідну динамічну міжгалузеву модель взаємодії економіки та навколишнього середовища:

$$x_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1\dot{x}_1(t) + B_2\dot{x}_2(t) + c_1(t),$$
$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) - c_2(t), \qquad (2)$$

де $x_1(t) = (x_1^1(t), x_2^1(t), ..., x_n^1(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка об'ємів виробництва продукції; $\dot{x}_1(t) = (\dot{x}_1^1(t), \dot{x}_2^1(t), ..., \dot{x}_n^1(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка абсолютних приростів виробництва продукції; $c_1(t) = (c_1^1(t), c_2^1(t), ..., c_n^1(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка споживання продукції (включаючи невиробниче нагромадження); $x_2(t) = (x_1^2(t), x_2^2(t), ..., x_m^2(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка об'ємів виробництва зі знищення забруднювачів; $\dot{x}_2(t) = (\dot{x}_1^2(t), \dot{x}_2^2(t), ..., \dot{x}_m^2(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка абсолютних приростів виробництва зі знищення забруднювачів; $c_2(t) = (c_1^2(t), c_2^2(t), ..., c_m^2(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-колонка об'ємів незнищених забруднювачів (викиди в навколишнє середовище); $A_{11} = (a_{ij}^{11})_1^n$ — квадратна матриця коефіцієнтів прямих матеріальних затрат на виробництво продукції (сюди включаються також затрати на відновлення вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів основного виробництва); $A_{21} = (a_{ig}^{12})_{i,g=1}^{n,m}$ — прямокутна матриця коефіцієнтів прямих матеріальних затрат на знищення забруднювачів (сюди включаються також затрати на відновлення вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів допоміжного виробництва — очисних споруд); $A_{21} = (a_{kj}^{21})_{k,j=1}^{m,n}$ — прямокутна матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів основним виробництвом; $A_{22} = (a_{kg}^{22})_1^m$ — квадратна матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів допоміжним виробництвом — очисними спорудами; $B_1 = (b_{ij}^1)_1^n$ — квадратна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів основного виробництва;

$B_2 = (b_{ig}^2)_{i,g=1}^{n,m}$ — прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва.

Щоб виключити з розгляду $x_2(t)$ в системі (2), розв'яжемо друге з цих рівнянь відносно $x_2(t)$:

$$x_2(t) = (E_2 - A_{22})^{-1}[A_{21}x_1(t) - c_2(t)] \tag{3}$$

— та продиференціюємо цей вираз:

$$\dot{x}_2(t) = (E_2 - A_{22})^{-1}[A_{21}\dot{x}_1(t) - \dot{c}_2(t)]. \tag{4}$$

Підставляючи вирази (3) та (4) в перше рівняння системи (2), одержимо:

$$x_1(t) = A_1x_1(t) + B\dot{x}_1(t) + c(t), \tag{5}$$

де A_1 і B — квадратні матриці:

$$A_1 = A_{11} + A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}A_{21}, \tag{6}$$

$$B = B_1 + B_2(E_2 - A_{22})^{-1}A_{21}, \tag{7}$$

а $c(t)$ — вектор-колонка:

$$c(t) = c_1(t) - A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}c_2(t) - B_2(E_2 - A_{22})^{-1}\dot{c}_2(t).$$

Систему диференціальних рівнянь (5) запишемо у вигляді:

$$y_1(t) = B(E_1 - A_1)^{-1}\dot{y}_1(t) + c(t), \tag{8}$$

де введено позначення $y_1(t) = x_1(t) - A_1x_1(t)$, тобто

$$x_1(t) = (E_1 - A_1)^{-1}y_1(t). \tag{9}$$

Тут $B(E_1 - A_1)^{-1}$ — матриця коефіцієнтів повної приростної капіталомісткості, тобто повних затрат виробничого нагромадження на одиничні прирости елементів використаного національного доходу.

Припускається, що матриці A_{11}, A_{22} та A_1 — продуктивні. Надалі при аналізі зручно вважати матрицю A_1 нерозкладною, а матрицю B — невиродженою. Тоді $(E_1 - A_1)^{-1} > E_1 + A_1$; $B(E_1 - A_1)^{-1} > B$.

Очевидно, що економічний зміст мають лише розв'язки $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$, а з економічного змісту моделі (2) нас цікавлять лише неспадні траєкторії $x_1(t)$ та $x_2(t)$, тобто, коли $\dot{x}_1(t) \geq 0$, $\dot{x}_2(t) \geq 0$.

Розв'язок системи (8) при $c(t) \geq 0$, $\dot{y}_1(t) \geq 0$ і невід'ємності матриць $(E_1 - A_1)^{-1}$ та $B \cdot (E_1 - A_1)^{-1}$ гарантує, що

$$y_1(t) \geq 0, \qquad x_1(t) \geq 0, \qquad \dot{x}_1(t) \geq 0.$$

Для невід'ємності неспадного розв'язку $x_2(t) \geq 0$, $\dot{x}_2(t) \geq 0$ достатньо, щоб

$$A_{21}x_1(t) \geq c_2(t), \qquad A_{21}\dot{x}_1(t) \geq \dot{c}_2(t).$$

З екологічного змісту моделі (2) нас цікавить лише випадок, коли $c_2(t) = const = c_2 \geq 0$. Тоді $\dot{c}_2(t) = 0$ і достатні умови невід'ємності неспадаючих розв'язків $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$ будуть мати вигляд:

$$c_1(t) \geq A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}c_2, \tag{10}$$

$$A_{21}x_1(0) \geq c_2, \quad x_2(0) = (E_2 - A_{22})^{-1}[A_{21}x_1(0) - c_2]. \tag{11}$$

Згідно з теорією диференціальних рівнянь, розв'язування систем (2) і (8) проводиться в три етапи:

1) визначається загальний розв'язок однорідної системи рівнянь при $c(t) = 0$;

2) знаходиться частинний розв'язок неоднорідної системи;

3) із початкових умов розраховуються невизначені сталі загального розв'язку.

9.4.2. Динаміка замкненої виробничої систем.

Проаналізуємо систему однорідних диференціальних рівнянь:

$$y_1(t) = B(E_1 - A_1)^{-1}\dot{y}_1(t). \tag{12}$$

Розв'язок цієї системи характеризує граничні технологічні можливості для розвитку виробництва при відомих матрицях A_1 і B, коли всі ресурси національного доходу спрямовуються на розширене відтворення.

Природно виникає запитання: чи існує траєкторія системи (12) зі сталим темпом приросту μ, однаковим для всіх компонент вектора $y_1(t)$?

Загальний розв'язок системи (12) можна записати у вигляді:

$$y_1(t) = \sum_{s=1}^{n} d_s k_s e^{\lambda_s t}, \tag{13}$$

де λ_s — корені характеристичного рівняння:

$$\det[E_1 - \lambda B(E_1 - A_1)^{-1}] = 0; \tag{14}$$

k_s — відповідні λ_s власні вектори матриці $B(E_1 - A_1)^{-1}$, d_s — константи, що визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{s=1}^{n} d_s k_s = y_1(0). \qquad (15)$$

В загальному випадку розв'язок системи (15) містить декілька відмінних від нуля компонент d_s. Тому в типовій ситуації єдина траєкторія системи (12), що виходить з початкової точки $y_1(0)$, є комбінацією експонент, що зростають з різними темпами. Отже, розвиток точно за законом $y_1(t) = y_1(0)e^{\mu \cdot t}$ неможливий. Це істотно відрізняє міжгалузеву модель від її макроекономічного (одновимірного) прототипу.

Згідно з прийнятими припущеннями, матриця $B(E_1 - A_1)^{-1} \geq 0$. Згідно з теоремою Персона, вона має додатне власне число $\hat{\mu}$ (корінь Фробеніуса–Перрона), яке переважає за модулем всі інші власні числа цієї матриці, а відповідний йому власний вектор $\hat{k} > 0$. При цьому власні вектори, що відповідають відмінним від $\hat{\mu}$ власним числам, обов'язково мають компоненти різних знаків.

Величина $\hat{\mu}$ знаходиться між максимальною і мінімальною сумами елементів колонок матриці $B(E_1 - A_1)^{-1}$. Позначимо як $\tilde{\beta}_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}$ суму елементів j-ої колонки цієї матриці. Тоді

$$\min_j \tilde{\beta}_j \leq \hat{\mu} \leq \max_j \tilde{\beta}_j.$$

Відповідна величина $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\hat{\mu}}$ знаходиться в проміжку:

$$\min_j \frac{1}{\tilde{\beta}_j} \leq \hat{\lambda} \leq \max_j \frac{1}{\tilde{\beta}_j}.$$

Таким чином, показник експоненти $\hat{\lambda}$ є оберненою величиною до деякого середнього з коефіцієнтів повних галузевих капіталомісткостей. У випадку ж рівності цих коефіцієнтів ($\tilde{\beta}_j = \beta_0$, $j = 1, 2, \ldots, n$) маємо: $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\beta_0}$, що аналогічне до формули технологічного темпу приросту. Це дає підставу називати $\hat{\lambda}$ **технологічним темпом приросту** в динамічній міжгалузевій моделі.

Траєкторія $y_1(t)$ є сумою компонент. Очевидно, що при $t \to \infty$ в ній починає переважати доданок з максимальною (серед номерів s з $d_s \neq 0$) дійсною частиною λ_s. Можливі дві взаємно протилежні ситуації:

1) домінуючою є експонента $e^{\hat{\lambda}t}$;

2) домінуючою є експонента з темпом $\lambda_s \neq \hat{\lambda}$.

У першому випадку темпи приросту продукції кожної галузі при $t \to \infty$ прямують до технологічного темпу приросту $\hat{\lambda}$, а гранична галузева структура національного доходу визначається пропорціями компонент власного вектора $\hat{k}$. У другому випадку динаміка $y_1(t)$ щораз більше і більше визначається власним вектором k_s, який має компоненти різних знаків. Тому при достатньо великих t у розв'язку $y_1(t)$ обов'язково з'являються від'ємні компоненти.

Таким чином, розв'язок (13), в якому домінує доданок з темпом, відмінним від $\hat{\lambda}$, є економічно неприйнятним.

Відзначені особливості розв'язків принципово відрізняють міжгалузеву модель від її макроекономічного (одновимірного) аналогу, де розв'язок втрачає прийнятність лише в результаті непомірних вимог до зростання споживання.

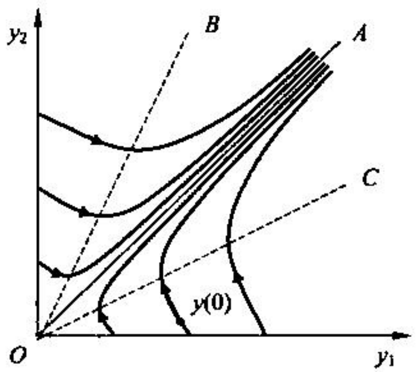


Рис. 1. Траєкторії замкненої виробничої системи

Сім'ю траєкторій системи (12), що ілюструють перший випадок, зображено на рис. 1. Траєкторією зі сталим темпом $\hat{\lambda}$ є промінь OA. Конус BOC — множина станів, для яких $\dot{y}_1 \geq 0$. Траєкторія, що виходить з вихідного стану $y_1(0)$, швидко наближається до променя OA. Однак початкова частина траєкторії не відповідає припущенню про невід'ємність $\dot{y}_1$. Зазначимо, що всі інші траєкторії (які виходять з будь-якої початкової точки) теж прямують до променя OA. Після входження в конус допустимих розв'язків траєкторія вже залишається в ньому. В теорії диференціальних рівнянь сім'ю траєкторій такого типу називають *сідлом*.

9.4.3. Економічне зростання при різних траєкторіях споживання

Запишемо загальний розв'язок системи (12) у вигляді суми загального розв'язку однорідної системи $\bar{y}_1(t)$ і часткового розв'язку неоднорідної системи $y_1^0(t)$:

$$y_1(t) = \bar{y}_1(t) + y_1^0(t).$$

Будемо розглядати траєкторію споживання у вигляді: $c(t) = c(0)e^{rt}$, тобто вважати, що компоненти вектора споживання зростають з одним і тим самим сталим темпом $r \geq 0$ і при цьому $c(0) \geq 0$.

Частинний розв'язок $y_1^0(t)$ визначається таким чином:

$$y_1^0(t) = [E_1 - rB(E_1 - A_1)^{-1}]^{-1}c(0)e^{rt}. \qquad (16)$$

Об'єднуючи (13) та (16), одержуємо загальний розв'язок системи у вигляді:

$$y_1(t) = \sum_{s=1}^{n} d_s k_s e^{\lambda_s t} + [E_1 - rB(E_1 - A_1)^{-1}]^{-1}c(0)e^{rt}. \qquad (17)$$

Невизначені константи d_s, $s = 1, 2, \ldots, n$, знаходяться як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (умова відповідності розв'язку початковим даним при $t = 0$):

$$\sum_{s=1}^{n} d_s k_s = y_1(0) - [E_1 - rB(E_1 - A_1)^{-1}]^{-1}c(0).$$

При відомих значеннях k_s, $s = 1, 2, \ldots, n$, конкретні значення розв'язку (17) знаходяться шляхом задавання темпу приросту споживання r. Аналіз допустимих значень r можна проводити за аналогією з аналізом одновимірної моделі. Можна довести, що економічно прийнятні траєкторії національного доходу одержуються при $r < \hat{\lambda}$.

Дослідження якісно різних ситуацій в межах умови $0 < r < \hat{\lambda}$ виявляє значну схожість розв'язків макроекономічної та міжгалузевої моделей. Різниця в поведінці розв'язків значною мірою поясню-

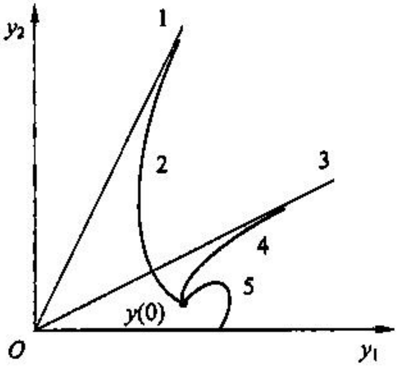


Рис. 2. Траєкторії продукції при сталих темпах зростання споживання

ється впливом галузевої структури початкових умов, тобто векторів $y_1(0)$ та $c(0)$. На рис. 2 зображено траєкторії продукції, що використовується на споживання і нагромадження при сталих темпах зростання споживання: 1) магістраль; 2) $0 \le r \le r_0$; 3) асимптотична траєкторія зростання зі сталою нормою нагромадження; 4) $r = r_0$; 5) $r > r_0$.

9.5. Приклад задачі з розв'язанням до розділу 9

Задача. Розглядається тригалузева модель економіки (промисловість, сільське господарство, очисні споруди).

Відповідні матриці мають вигляд:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}; \quad A_{21} = (0{,}2 \quad 0{,}2); \quad A_{22} = 0{,}5.$$

Вектори споживання населення та обсягу незнищених забруднень мають відповідно вигляд:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}; \qquad y_2 = 10.$$

Знайти валовий випуск продукції (x_1) та об'єм знищення забруднень (x_2).

Розв'язання. Перш ніж знаходити вектори x_1 та x_2, з'ясуємо, чи виконується для даних матриць та векторів достатня умова невід'ємності розв'язків. А цими умовами є продуктивність матриць $A_1 = A_{11} + A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}A_{21}$, $A_2 = A_{22} + A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}A_{12}$, а також виконання нерівності $A_{21}y_1 \ge y_2$. (Тут E_1 та E_2 — одиничні матриці, розмірності яких збігаються відповідно з розмірностями матриць A_{11} та A_{22}.

1) Отже, спочатку знайдемо матриці A_1 та A_2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} \frac{1}{1-0,5} (0,2 \quad 0,2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,08 & 0,08 \\ 0,04 & 0,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,58 & 0,28 \\ 0,14 & 0,44 \end{pmatrix}.$$

$$A_2 = 0,5 + (0,2 \quad 0,2) \begin{pmatrix} 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0,5 + (0,2 \quad 0,2) \frac{1}{0,28} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} = 0,5 + \frac{0,3}{2} = 0,65.$$

Очевидно, що $\|A_2\| < 1$. Скористаємося достатньою умовою продуктивності для матриці A_1:

$$\|A_1\| = \max_j \sum_i a_{ij} = \max\{0,58 + 0,14; \quad 0,28 + 0,44\} = 0,72 < 1.$$

Таким чином, матриці A_1 та A_2 є продуктивними.

2) Умова $A_{21}y_1 \geq y_2$ також виконується:

$$A_{21}y_1 = (0,2 \quad 0,2) \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = 40 + 20 = 60 > 10 = y_2.$$

3) Отже, тепер можна приступати до визначення векторів x_1 та x_2, використовуючи систему еколого-економічного балансу:

$$x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1,$$
$$x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2.$$

В нашому випадку система має вигляд:

$$x_1^1 = 0,5\,x_1^1 + 0,2\,x_1^2 + 0,2x_2 + 200,$$
$$x_1^2 = 0,1\,x_1^1 + 0,4\,x_1^2 + 0,1x_2 + 100,$$
$$x_2 = 0,2\,x_1^1 + 0,2\,x_1^2 + 0,5x_2 - 10.$$

Розв'язавши цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь, остаточно знайдемо:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 700 \\ 350 \end{pmatrix}; \quad x_2 = 400.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Розглядається тригалузева модель еколого-економічного балансу (промисловість, сільське господарство, очисні споруди) з такими параметрами:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = (0{,}2 \quad 0{,}2), \quad A_{22} = 0{,}5.$$

Дослідити, чи виконуються для цієї моделі достатні умови невід'ємності розв'язків. Розрахувати ціни на продукцію кожної галузі, якщо відповідні вектори коефіцієнтів умовно чистих витрат є такими:

а) (0,3; 0,5; 0,2); б) (0,3; 0,5; 0); в) (0,3; 0,5; – 0,2).

2. Розглядається динамічна тригалузева модель еколого-економічного балансу (промисловість, сільське господарство, очисні споруди) з такими параметрами:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = (0{,}5 \quad 0{,}2), \; A_{22} = 0,$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad y_1(t) = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot e^{0{,}1 \cdot t},$$

$$y_2(t) = y_2 = 10.$$

Дослідити динаміку $x_1(t)$.

РОЗДІЛ 10. КІНЕТИЧНА МОДЕЛЬ МОНО – ІЄРУСАЛИМСЬКОГО

При написанні цього розділу використовувалося джерело [3].

10.1. Кінетичні рівняння Моно – Ієрусалимського

Однією з актуальних еколого-економічних задач є задача оптимального збирання врожаю, яка має таку біологічну інтерпретацію. В популяціях, неперервний ріст яких стимулюється потоком поживних речовин та пригнічується продуктами життєдіяльності, здійснюється неперервне або дискретне збирання врожаю шляхом відбору частини біомаси і виведення її з репродукційного циклу. Ставиться задача про визначення такого керування системою виробництва біомаси, щоб сумарний врожай, зібраний за фіксований проміжок часу $[0, T]$, був максимальним. У кінцевий момент часу T процес зупиняється шляхом повного відбору біомаси.

Досліди з неперервного (проточного) культивування бактерій показали, що для опису основних особливостей росту біомаси достатньо знати всього лише декілька величин (концентрацій): лімітованого поживного субстрату; інгібітору, що впливає на мінімальну швидкість в біохімічному ланцюгу реакцій; біомаси. Залежність між питомою швидкістю (темпом) ензиматичної реакції та концентрацією субстрату характеризується рівнянням Міхаеліса–Ментен:

$$\mu_1 = \frac{\mu_m s}{k_s + s}, \qquad (1)$$

де μ_m — границя, до якої прямує питома швидкість реакції з підвищенням концентрації субстрату s; k_s — константа лімітування, що чисельно дорівнює концентрації субстрату при $\mu_1 = \frac{\mu_m}{2}$. Гальмування ензиматичної реакції пригнічуючими речовинами, в тому числі продуктами обміну, підкоряється тій самій закономірності, відповідно до якої субстрат пришвидшує її. Тоді

$$\mu = \mu_1 - \frac{\mu_1 p}{k_p + p} = \mu_m \frac{s}{k_s + s} \frac{k_p}{k_p + p}, \qquad (2)$$

де p — концентрація продуктів обміну; k_p — константа інгібірування, яка чисельно дорівнює концентрації продуктів обміну при $\mu = \frac{\mu_1}{2}$.

Нехай поживне середовище концентрації s^0 неперервно надходить до культиватора зі швидкістю розчинення (темпом) u (1/год) та з тією самою швидкістю з культиватора виходить суміш, що складається із непрореагованого поживного середовища, біомаси і продуктів обміну. Оскільки поживне середовище є єдиним джерелом вуглецю як для побудови клітинної маси, так і для утворення продуктів обміну, то для складання рівняння динаміки процесу природно скористатися законом збереження речовини. Для цього всі величини, що входять до балансу, необхідно виразити в єдиних одиницях — молях вуглецю. Кінетичні рівняння в нових позначеннях відомі як модель **Моно–Ієрусалимського:**

$$\dot{x} = \frac{\mu_m y k_z}{(k_y + y)(k_z + z)} x - ux,$$

$$\dot{y} = -\alpha \frac{\mu_m y k_z}{(k_y + y)(k_z + z)} x + u(y^0 - y), \qquad (3)$$

$$\dot{z} = (\alpha - 1) \frac{\mu_m y k_z}{(k_y + y)(k_z + z)} x - uz.$$

Тут $\alpha = const > 0$ — економічний коефіцієнт, який дорівнює затратам лімітуючого компонента на приріст одиниці біомаси; y^0 — концентрація поживного субстрату (в молях вуглецю), що надходить ззовні. Система рівнянь (3) замкнута і пов'язує між собою концентрації біомаси x, поживного субстрату y та продуктів життєдіяльності z.

10.2. Задача оптимального збирання врожаю

Для подальшого дослідження розглянемо більш загальну систему кінетичних рівнянь виду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y, z) - ux, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= -\alpha f(t, x, y, z) + u(y^0 - y), \quad y(0) = y_0, \qquad (1) \\ \dot{z} &= (\alpha - 1) f(t, x, y, z) - uz, \quad z(0) = z_0, \end{aligned}$$

де $f(t, x, y, z) \geq 0$ — відома функція, що задовольняє всі необхідні умови існування розв'язку задачі Коші (1) на часовому проміжку $[0, T]$, (x_0, y_0, z_0) — задане початкове значення розв'язку (x, y, z).

Диференціальні рівняння (1) не мають жодної біологічної специфіки і тому адекватно описують будь-який неперервний технологічний процес, що супроводжується подачею сировини та відтоком продуктів. Надалі цю систему та її часткові випадки використаємо для моделювання технологічних процесів екологічно чистих виробництв.

Для системи кінетичних рівнянь (1) поставимо задачу оптимального збирання врожаю у вигляді узагальненої задачі оптимального керування:

$$F(x, y, z, u) = \int_0^T uxdt + x(T) \to \sup_{(x,y,z,u)\in V'}, \tag{2}$$

$$\dot{x} = f(t, x, y, z) - ux, \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

$$\dot{y} = -\alpha f(t, x, y, z) + u(y^0 - y), \quad y(0) = y_0 < y^0, \tag{4}$$

$$\dot{z} = (\alpha - 1)f(t, x, y, z) - uz, \quad z(0) = z_0, \tag{5}$$

$$x(t) \geq 0, \quad 0 \leq y(t) \leq y^0, \quad z(t) \geq 0, \quad u(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \tag{6}$$

Тут V' — допустима множина, що описується співвідношеннями (3) – (6) при будь-якому $t \in [0, T]$; $u(t)$ — керування, що має такий технологічний зміст: $u = 0$ (непроточний процес), $0 < u < \infty$ (проточний процес); $u = \infty$ (часткове або повне скидання біомаси — миттєве розведення). В останньому випадку $u(t)$ виступає як узагальнена функція типу дельта-функції.

Згідно з узагальненою теоремою про достатні умови оптимальності для неперервних процесів, побудуємо допоміжну неперервно-диференційовану функцію $\varphi(t, x, y, z)$, для якої послідовність допустимих процесів $\{x_s(t), y_s(t), z_s(t), u_s(t)\} \in V'$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, буде відповідно максимізуючою та мінімізуючою для функціоналів:

$$R(t,x,y,z,u)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(f-ux)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(-\alpha f+u(y^0-y))+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial z}((\alpha-1)f-uz)+ux\ \to \sup_{(x,y,z,u)\in V^t},$$

$$\Phi(x,y,z)=\varphi(T,x,y,z)-x(T)\ \to \inf_{(x,y,z)\in V_u^T},$$

де V_u^T — допустима множина при $t = T$ та будь-якому допустимому u.

Виберемо допоміжну функцію $\varphi(t, x, y, z)$ так, щоб функціонал $R(t, x, y, z, u)$ не залежав від u. Дійдемо до співвідношення:

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(y-y^0)\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}=x,$$

з якого робимо висновок, що можна взяти $\varphi(t, x, y, z) = x$. При цьому функціонал $\Phi(x, y, z) \equiv 0$, і достатньою умовою оптимальності задачі (2) – (6) буде лише одна умова:

$$R(t,x,y,z,u)=f(t,x,y,z)\ \to \sup_{(x,y,z,u)\in V^t} \qquad (7)$$

рівномірно для всіх $t \in [0, T]$.

Зазначимо, що функціонал $F(x, y, z, u)$ задачі (2) – (6) можна ще записати у вигляді:

$$F(x,y,z,u)=x(0)+\int_0^T f(t,x(t),y(t),z(t))dt,$$

а тому вимога з його максимізації узгоджується з вимогою (7).

Система кінетичних рівнянь (3) – (5) є замкненою системою диференціальних рівнянь. Сумуючи рівняння (3), (4) і (5), а потім інтегруючи одержане рівняння, доходимо до співвідношення:

$$x(t)+y(t)+z(t)-y^0=(x_0+y_0+z_0-y^0)\cdot\exp\left(-\int_0^t u(\tau)d\tau\right). \qquad (8)$$

Помножимо рівняння (3) на $(\alpha - 1)$ і віднімемо від нього рівняння (5), а потім проінтегруємо підсумкове рівняння. Одержимо:

$$(\alpha-1)x(t)-z(t)=((\alpha-1)x_0-z_0)\cdot\exp\left(-\int_0^t u(\tau)d\tau\right). \qquad (9)$$

Додаючи (8) та (9), маємо:

$$\alpha x(t) + y(t) - y^0 = (\alpha x_0 + y_0 - y^0)\cdot \exp\left(-\int_0^t u(\tau)d\tau\right). \qquad (10)$$

Таким чином, система трьох диференціальних рівнянь (3) – (5) еквівалентна одному диференціальному рівнянню (3) та двом балансовим співвідношенням (9) і (10).

Назвемо початкові умови системи (3) – (5) *інваріантними*, якщо вони вибрані так, що

$$\alpha x_0 + y_0 = y^0, \quad z_0 = (\alpha - 1)x_0. \qquad (11)$$

Для випадку інваріантних початкових умов (11) система рівнянь (3), (9), (10) спрощується і стає еквівалентною системі:

$$\dot{x} = f(t, x, y, z) - ux, \quad x(0) = x_0, \qquad (12)$$

$$y = y^0 - \alpha x, \quad z = (\alpha - 1)x, \qquad (13)$$

або одновимірній задачі Коші:

$$\dot{x} = f(t, x, y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x) - ux, \quad x(0) = x_0. \qquad (14)$$

Розв'язки $x(t) \ge 0$, $y(t) = y^0 - \alpha x(t) \ge 0$, $z(t) = (\alpha - 1)x(t) \ge 0$ системи (12), (13) також називатимемо *інваріантними*.

Достатня умова оптимальності (7) на інваріантному розв'язку запишеться у вигляді:

$$f(t, x(t), y^0 - \alpha x(t), (\alpha - 1)x(t)) = f_0(t, x(t)) \to \sup_{0 \le x(t) \le y^0/\alpha} \qquad (15)$$

— рівномірно для всіх $t \in [0, T]$.

За умови єдиності оптимального розв'язку $x^*(t)$ задачі (15) можливі три випадки:

1) $x^*(t) = 0$, $y^*(t) = y^0$, $z^*(t) = 0$ (система перебуває в спокої — нічого не виробляється);

2) $0 < x^*(t) < \dfrac{y^0}{\alpha}$, $\quad y^*(t) = y^0 - \alpha x^*(t) > 0$, $\quad z^*(t) = (\alpha - 1)x^*(t) > 0$ (здійснюється оптимальний виробничий процес);

3) $x^*(t) = \dfrac{y^0}{\alpha}$, $\quad y^*(t) = 0$, $\quad z^*(t) = (\alpha - 1)\dfrac{y^0}{\alpha}$ (система перебуває в спокої — зростання припинене).

Якщо початкові умови системи (3) – (5) неінваріантні, тобто умови (11) не виконуються, то при $u > 0$ і $t >> 1/u$ розв'язки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ внаслідок співвідношень (9), (10) все ж встановлюються та асимптотично переходять в інваріантні розв'язки.

Таким чином, за умови єдиності оптимальний розв'язок $x^*(t)$, одержаний з (15), є магістральною траєкторією для задачі оптимального збирання врожаю (2) – (6):

$$x^*(t) = \arg \sup_{0 \le x \le y^0/\alpha} f(t, x, y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x) \tag{16}$$

— рівномірно для всіх $t \in [0, T]$.

Якщо магістральна траєкторія $x^*(t) > 0$ побудована, то на ділянці диференційованості її оптимальне керування $u^*(t)$ може бути знайдене з рівняння (3), а саме:

$$u^*(t) = \frac{1}{x^*(t)}\left(f_0(t, x^*(t)) - \dot{x}^*(t)\right). \tag{17}$$

10.3. Оптимальні врівноважені стани моделі Моно – Ієрусалимського

Як уже зазначалося вище, загальна система кінетичних рівнянь (1) з підрозділу 10.2 описує будь-який неперервний технологічний процес, що супроводжується подачею сировини і відтоком продуктів. Цю систему можна використати при моделюванні технологічних процесів екологічно чистих виробництв. У цьому випадку її змінні набувають конкретного технологічного змісту: $x(t)$ — концентрація чистого корисного продукту, який у результаті технологічного процесу одержується зі швидкістю u (1/год); $u(t)$ — інтенсивність технологічного процесу; ux — потік корисного продукту за одиницю часу; y^0 — концентрація природного ресурсу (сировини), яка зі швидкістю u (1/год) надходить до технологічного процесу; uy^0 — потік сировини за одиницю часу; $y(t)$ — концентрація залишкової сировини у відходах виробництва; uy — потік сировини через відходи виробництва за одиницю часу; $z(t)$ — концентрація шкідливих відходів (забруднювачів), що утворюються у результаті технологічного процесу; uz — потік забруднювачів за одиницю часу.

Надалі будемо розглядати лише випадок автономної системи, тобто коли функція $f(t, x, y, z)$ в системі (1) з підрозділу 10.2 не залежить явно від часу t. Конкретизуємо функцію $f(t, x, y, z)$ і подамо її у вигляді:

$$f(t, x, y, z) = \mu(y, z)x.$$

У біології $\mu(y, z)$ — це питома швидкість (темп) ензиматичної реакції, що залежить від концентрації поживного субстрату y та концентрації метаболітів z. Залежність $\mu = \mu(y, z)$ встановлюється емпіричним шляхом через статистичну обробку дослідних даних. Найбільш відомі в біології гіперболічні залежності:

$$\mu = \mu_m \frac{y}{k_y + y} \frac{1}{k_z + z}, \quad \mu = \mu_m \frac{y}{k_y + y + y^2 / k_m} \frac{1}{k_z + z}, \tag{1}$$

де μ_m, k_y, k_z, k_m — додатні константи. У першому випадку моделюється процес росту біомаси при лімітуючому впливові поживного субстрату та інгібіруючому впливові метаболітів. У другому випадку наявні інгібіруючий вплив метаболітів, а також одночасно лімітуючий та інгібіруючий вплив поживного субстрату. Ілюстрацією для другого випадку є фотосинтез зелених рослин, де світло виступає поживним субстратом, що має лімітуючий вплив при малих енергетичних рівнях освітленості й одночасно інгібіруючий вплив при великих рівнях.

Співвідношення (1) достатньо точно уловлюють нелінійні особливості використання сировинних ресурсів і утворення забруднень. Тому ці співвідношення разом з моделлю Моно–Ієрусалимського можна успішно використовувати для моделювання технологій з еколого-економічними характеристиками.

Надалі розглянемо загальну залежність темпу зростання μ від лімітуючого фактора y та інгібіруючого фактора z, а саме: $\mu = \mu(y, z)$.

Щодо функції $\mu(y, z)$ передбачатимемо виконання таких умов:

1) $\mu(y, z)$ — обмежена та неперервна в $\boldsymbol{R}_+^2$ і при цьому:

$$0 \le \mu(y, z) \le \mu_m < \infty, \ \mu(0, z) = 0, \qquad \mu(y, \infty) = 0; \tag{2}$$

2) $\mu(y, z)$ двічі неперервно диференційовна в $\boldsymbol{R}_+^2$ і при цьому:

$$\mu_y' \ge 0, \quad \mu_z' \le 0, \quad |\mu_y'| + |\mu_z'| > 0, \quad \mu_{yy}'' < 0, \quad \mu_{zz}'' > 0 \tag{3}$$

для $y < \infty$, $z < \infty$.

Відповідна система кінетичних рівнянь Моно–Ієрусалимського набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu(y, z)x - ux, \\ \dot{y} &= -\alpha\mu(y, z)x + u(y^0 - y), \quad y < y^0, \\ \dot{z} &= (\alpha - 1)\mu(y, z)x - uz. \end{aligned} \tag{4}$$

Розглянемо питання про існування зрівноважених стаціонарних станів кінетичної системи (24), що одержуються із системи нелінійних рівнянь:

$$\begin{gathered} \mu(y, z)x - ux = 0, \\ -\alpha\mu(y, z)x + u(y^0 - y) = 0, \\ (\alpha - 1)\mu(y, z)x - uz = 0. \end{gathered}$$

Звідси, враховуючи, що нас цікавить лише випадок $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, одержуємо:

$$\begin{gathered} u = \mu(y, z), \\ \alpha x + y = y^0, \\ (\alpha - 1)x = z. \end{gathered} \tag{5}$$

Ця система рівнянь еквівалентна одному рівнянню:

$$\mu(y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x) = u, \tag{6}$$

або:

$$\mu_0(x) = u,$$

де $\mu_0(x) = \mu(y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x)$ є монотонно спадною функцією від x при $0 \le x \le y^0/\alpha$, оскільки:

$$(\mu_0)'_x = -\alpha\mu'_y + (\alpha - 1)\mu'_z < 0.$$

Тому рівняння (6) має єдиний корінь $x > 0$ для кожного значення $u > 0$ за умови:

$$\mu(y^0, 0) > u > 0. \tag{7}$$

Отже, за умови (7) рівняння (6) має однопараметричну сім'ю коренів $\bar{x}(u)$, $\bar{y}(u)$, $\bar{z}(u)$.

Розглянемо питання про стійкість однопараметричної сім'ї стаціонарних врівноважених точок кінетичної системи диференціальних рівнянь (4). Для цього складемо матрицю частинних похідних від правих частин цих рівнянь і знайдемо власні числа одержаної матриці. Маємо:

$$\begin{vmatrix} \mu-u-\lambda & \mu'_y x & \mu'_z x \\ -\alpha\mu & -\alpha\mu'_y x-u-\lambda & -\alpha\mu'_z x \\ (\alpha-1)-\mu & (\alpha-1)\mu'_y x & (\alpha-1)\mu'_z-u-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -(\lambda+u)^2(\lambda-\mu+u+\alpha\mu'_y x-(\alpha-1)\mu'_z x)=0.$$

Враховуючи, що стаціонарні точки визначаються умовою $u = \mu > 0$, одержуємо власні числа:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu < 0, \qquad \lambda_3 = \left(-\alpha\mu'_y + (\alpha-1)\mu'_z\right)x < 0.$$

Таким чином, всі стаціонарні точки кінетичної системи (4) при $\bar{x} > 0$, $\bar{y} > 0$, $\bar{z} > 0$ є асимптотично стійкими за Ляпуновим (стійкість відносно збурень правих частин диференціальних рівнянь). Зазначимо також, що тривіальна стаціонарна точка $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = y^0$, $\bar{z} = 0$ не є асимптотично стійкою.

Розглянемо тепер питання про оптимальні стаціонарні розв'язки задачі оптимального збирання врожаю. Аналізуючи систему (5), доходимо висновку, що нетривіальні стаціонарні розв'язки системи рівнянь (4) можна подати у вигляді функції від параметра u:

$$\bar{x} = \mu_0^{-1}(u), \quad \bar{y} = y^0 - \alpha\mu_0^{-1}(u), \quad \bar{z} = (\alpha-1)\mu_0^{-1}(u),$$

де $\mu_0^{-1}(u)$ — обернена функція для функції $u = \mu_0(x)$. Враховуючи умови (2), (3), переконуємося, що обернена функція $\mu_0^{-1}(u)$ при $0 \le u \le \mu_0(x)$ існує, оскільки для $0 \le x \le y^0/\alpha$ маємо:

$$\frac{d\mu_0(x)}{dx} = -\alpha\mu'_y(y,z) + (\alpha-1)\mu'_z(y,z) < 0.$$

Тепер природно поставити питання про існування оптимальних стаціонарних точок, що відповідають стаціонарним розв'язкам, які, за критерієм (7) з підрозділу 10.2, максимізують продуктивність:

$$\mu(\bar{y},\bar{z})\bar{x} \to max.$$

Ця задача еквівалентна задачі умовної оптимізації:

$$\mu_0(x)x \to \max_{0\le x\le y^0/\alpha},$$

що має єдиний оптимальний розв'язок x^*, якщо функція $\varphi(x) = \mu_0(x)x = \mu(y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x)x$ є строго опуклою вгору на відрізку $0 \le x \le y^0/\alpha$.

Оскільки $\varphi(0) = 0$, $\varphi(y^0/\alpha) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $0 \le x \le y^0/\alpha$, то максимум функції досягається у внутрішній точці відрізка $0 \le x \le y^0/\alpha$. Ця точка визначається як корінь рівняння:

$$\varphi'(x) = \mu_0(x) + \mu_0'(x)x = \mu(y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x) -$$
$$-[\alpha\mu_y'(y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x) - (\alpha - 1)\mu_z'(y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x)]x = 0.$$

Насамкінець дослідимо детально задачу оптимального збирання врожаю для випадку автономної системи диференціальних рівнянь (4), коли

$$\mu(y, z) = \mu_m \frac{y}{k_y + y}\frac{1}{k_z + z}.$$

В цьому випадку, відповідно до (15) з підрозділу 10.2, маємо задачу оптимізації:

$$f_0(x) = \frac{\mu_m x(y^0 - \alpha x)}{(k_y + y^0 - \alpha x)(k_z + (\alpha - 1)x)} \to \max_{0 \le x \le y^0/\alpha}.$$

Тоді

$$f_0'(x) =$$
$$= \mu_m\left[\frac{-\alpha k_y}{(k_y + y^0 - \alpha x)^2}\frac{x}{k_z + (\alpha - 1)x} + \frac{y^0 - \alpha x}{k_y + y^0 - \alpha x}\frac{k_z}{(k_z + (\alpha - 1)x)^2}\right].$$

Необхідна умова екстремуму $f_0'(x) = 0$ призводить до квадратного рівняння

$$\left(1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\frac{k_y}{k_z}\right)x^2 - 2\frac{k_y + y^0}{\alpha}x + \frac{(k_y + y^0)y^0}{\alpha^2} = 0,$$

яке завжди має один корінь, що знаходиться в інтервалі $(0, y^0/\alpha)$, а саме:

$$x^*(y^0) = \frac{y^0/\alpha}{1 + \sqrt{D}} \quad (\text{тут } D = 1 - \frac{y^0}{k_y + y^0}\left(1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\cdot\frac{k_y}{k_z}\right) > 0). \qquad (8)$$

Оскільки при $0 \le x \le y^0/\alpha$

$$f_0''(x) =$$

$$= \mu_m \left[-\frac{2\alpha^2 k_y}{(k_y + y^0 - \alpha x)^3} \frac{x}{k_z + (\alpha - 1)x} - \frac{2\alpha k_y}{(k_y + y^0 - \alpha x)^2} \frac{k_z}{(k_z + (\alpha - 1)x)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{y^0 - \alpha x}{k_y + y^0 - \alpha x} \frac{2(\alpha - 1)k_z}{(k_z + (\alpha - 1)x)^3} \right] < 0,$$

то функція опукла вгору на $[0, y^0/\alpha]$, а тому знайдена точка x^* є точкою локального максимуму. При цьому

$$y^*(y^0) = \frac{y^0\sqrt{D}}{1+\sqrt{D}}, \qquad z^*(y^0) = \frac{\frac{\alpha - 1}{\alpha} y^0}{1+\sqrt{D}},$$

а програмне керування (17) з підрозділу 10.2 набуває вигляду:

$$u^*(y^0) = \frac{\mu_m y^0(1+\sqrt{D})\sqrt{D}}{[k_y + (k_y + y^0)\sqrt{D}][k_z + \frac{\alpha - 1}{\alpha} y^0 + k_z\sqrt{D}]}.$$

Легко перевірити, що $\frac{dx^*(y^0)}{dy^0} > 0$, і, отже, $x^*(y^0)$ — монотонно зростаюча функція від y^0.

Дослідимо значення функціоналу в задачі оптимального збирання врожаю на магістральній траєкторії. Маємо:

$$F(u^*) = x^* + \frac{T\mu_m}{\left[1 + \frac{k_y}{y^0} + \frac{k_y}{y^0\sqrt{D}}\right]\left[\alpha - 1 + \frac{\alpha k_z}{y^0} + \frac{\alpha k_z}{y^0}\sqrt{D}\right]}.$$

Перший доданок у $F(u^*)$ збігається з початковим значенням x^* магістральної траєкторії. Другий доданок характеризує приріст врожаю за період $[0, T]$. Приріст врожаю на магістралі є монотонно зростаючою функцією від концентрації природного ресурсу y^0, а тому свого верхнього значення він набуває при $y^0 \to \infty$. Воно дорівнює $\frac{T\mu_m}{\alpha - 1}$, що при $\alpha > 1$ є обмеженою величиною.

Параметр y^0 підлягає вибору і його значення залежить від планового рівня магістралі x^*. З (8) маємо:

$$y^0-\alpha x^*=\alpha x^*\sqrt{1-\frac{y^0}{k_y+y^0}\left(1-\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{k_y}{k_z}\right)}.$$

Звідси одержуємо квадратне рівняння відносно y^0:

$$(y^0)^2-(2\alpha x^*-k_y)y^0+\alpha^2(x^*)^2-\alpha(\alpha-1)\frac{k_y}{k_z}(x^*)^2-2k_y\alpha x^*=0.$$

Умову $y^0-\alpha x^*\geq 0$ задовольняє лише один з його коренів:

$$y^0=\alpha x^*-\frac{k_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{k_y}{2}\right)^2+k_y\alpha x^*+\alpha(\alpha-1)(x^*)^2\frac{k_y}{k_z}}. \qquad (9)$$

Для змінних x, y, z область існування визначається біологічними обмеженнями: біомаса не повинна розчавлюватися через свою велику густину ($0\leq x\leq x_{max}$), субстрат не повинен пригнічувати ріст ($0\leq y\leq y_{крит}$), оскільки при $y>y_{крит}$ клітини можуть перероджуватися. Співвідношення для $x^*(y^0)$, $y^*(y^0)$, $z^*(y^0)$ разом з (9) якраз і дають можливість вибирати значення основного параметра y^0 в даній моделі.

Нехай маємо інваріантні початкові умови x_0, y_0, z_0 і керування $u=0$. Тоді розв'язок відповідної задачі Коші

$$\dot{x}=\frac{\mu_m x(y^0-\alpha x)}{(k_y+y^0-\alpha x)(k_z+(\alpha-1)x)}, \qquad x(0)=x_0$$

одержується у явному вигляді:

$$(\alpha-1)(x-x_0)+\frac{k_y+y^0}{y^0}k_z\ln\frac{x}{x_0}+\frac{k_y\left(k_z+\frac{\alpha-1}{\alpha}y^0\right)}{y^0}\ln\frac{y^0-\alpha x_0}{y^0-\alpha x}=t.$$

Оскільки $\dot{x}(t)>0$, то функція $x(t)$ — монотонно зростаюча, і час $t=\tau$ виходу на магістраль x^* визначається співвідношенням:

$$\tau=(\alpha-1)(x^*-x_0)+\frac{k_y+y^0}{y^0}k_z\ln\frac{x^*}{x_0}+\frac{k_y\left(k_z+\frac{\alpha-1}{\alpha}y^0\right)}{y^0}\ln\frac{y^0-\alpha x_0}{y^0-\alpha x^*},$$

де x^* визначається з (8).

РОЗДІЛ 11. ІМІТАЦІЙНІ МОДЕЛІ

При написанні цього розділу використовувалися джерела [1] і [3].

11.1. Принципи побудови імітаційних схем

На даний час можна вважати, що визначилося два підходи до вивчення еколого-економічних систем математичними методами.

Перший з них заснований на ідеях теорії оптимізації і полягає в тому, що розробляється математична модель процесу, яка зв'язує його внутрішні (ендогенні) характеристики і впливає на його зовнішні (екзогенні) фактори, до складу яких входять керуючі впливи. А ставиться задача математичного програмування для знаходження таких керувань процесом, при яких досягається екстремум певного функціоналу, що характеризує якість керування.

Якщо досліджуваний процес такий, що на його перебіг можуть впливати за допомогою своїх керувань не одна, а декілька осіб, то природно виникає постановка теоретико-ігрових задач, які мають містити гіпотези про інформованість гравців щодо перебігу процесу і про дії одного з них у відповідь на дії іншого. В тому аспекті, який розглядається в даному розділі, теоретико-ігровий підхід можна вважати різновидом математичного програмування.

Другий підхід до вивчення еколого-економічних систем пов'язаний з імітаційним моделюванням. Імітаційні моделі використовують шляхом відтворення дослідного процесу при деяких варіантах керування, які визначаються експертами, з подальшим аналізом отриманих результатів. Кожен акт модельного відтворення процесу називається імітаційним експериментом. Якщо на піддослідний процес можуть впливати за допомогою своїх керувань декілька груп осіб, то імітаційні експерименти набувають характеру імітаційних ігор.

Як правило, імітаційні моделі складні, мають велику розмірність, містять велику кількість нелінійних прямих і обернених зв'язків між змінними, включають велику кількість екзогенних величин, частина з яких є випадковими функціями від часу. В багатьох випадках постановка задач математичного програмування в межах таких моделей неможлива — або через неможливість сформулювати єдиний критерій для якості керування, або просто наслідок технічної складності такої задачі. Проте існують моделі, які, з одного боку, є оптимізаційними, тобто в їхніх межах розв'язуються задачі математичного програмування, а з іншого — імітаційними, тобто передбачають можливість проведення імітаційних експериментів з призначеними експертами керуваннями.

Досвід використання методів математичного програмування в керуванні еколого-економічними системами показав обмеженість сфери їхнього застосування. Головна причина цієї обмеженості полягає у високій складності і тісному взаємозв'язку між різними за своєю природою соціально-економічними й екологічними процесами. Необхідність формулювання скалярного критерію для якості керування і значні витрати обчислювальних ресурсів на пошук оптимальних керувань у більшості випадків призводять до занадто великого спрощення моделі, відкидання таких факторів, які обов'язково потрібно враховувати в практиці керування. З'ясувалося, що оптимальні керування, отримані в результаті розв'язання задачі математичного програмування, в «чистому вигляді» не можна використовувати якраз через непередбачені негативні наслідки, які виникають через неадекватність моделі реальності і при цьому перекривають позитивний ефект від її застосування.

Відмова від постановки та розв'язування в межах імітаційної моделі математичних задач з вибору керувань дають змогу витрачати наявний обчислювальний потенціал для більш ретельного відтворення процесу, тобто побудови більш адекватних моделей, які можна було б взяти за основу для вироблення рекомендацій щодо раціонального керування даним процесом. Результати імітації значно простіше пояснити особам, які приймають рішення (ОПР), особливо якщо вони самі беруть участь в проведенні імітаційних експериментів.

Проте й імітація має низку недоліків. Перш за все, це — складність організації і висока вартість проведення імітаційних експериментів, можливість спостерігати і порівнювати лише невелику кількість заздалегідь відібраних варіантів керування. Імітація ставить також доволі високі, часто важко здійсненні вимоги щодо інформаційного забезпечення.

Таким чином, імітаційні й оптимізаційні моделі в багатьох аспектах доповнюють одна одну, а тому можна вважати доцільним їхнє спільне застосування.

Водночас потрібно зазначити, що математичні моделі, навіть реалізовані програмно, самі собою ще не можуть бути ефективно застосовані для розв'язування практичних задач. Необхідні також чисельні технічні засоби, які дають змогу організувати зберігання і пошук даних, їхнє введення-виведення в режимі діалогу, корекцію керувань у ході розв'язування задачі і т. ін. Особливу роль відіграють питання взаємодії користувача (особи, яка приймає рішення — ОПР) з ЕОМ, забезпечення ОПР можливостями вводити в ЕОМ запитання і отримувати на них відповіді в зручному вигляді, втручатися в хід розв'язування тощо. Ця обставина видається особливо важливою, оскільки вдале розв'язання еколого-економічних задач можливо лише за умови активної участі людини-експерта на всіх етапах математичного моделювання.

Для задоволення перелічених вимог необхідна розробка певного спеціального об'єкта — людино-машинної імітаційної системи (ІС). Цей об'єкт має складатися з таких основних частин:

1) імітаційної моделі процесу разом з програмою, яка реалізує модель на ЕОМ. Якщо модель достатньо складна, то програма, що її реалізує, є сукупністю програм (модулів), які оперують єдиним банком даних;

2) сукупності спрощених моделей процесу або окремих його сторін і алгоритмів, які дають змогу розв'язувати оптимізаційні або ігрові задачі з вибору керування. Ця частина ІС називається *зовнішнім математичним забезпеченням*;

3) сукупності програм, які реалізують належний ступінь зручності при спілкуванні з ЕОМ під час проведення імітаційних експериментів; вони забезпечують використання в процесі імітації результатів оптимізації, а також здійснюють різні сервісні операції. Цю частину ІС називають *внутрішнім математичним забезпеченням*.

Імітаційна система має складну структуру, що визначається задачами, для розв'язування яких вона призначена. Найважливішою складовою ІС є блок моделей об'єкта дослідження. Моделі в імітаційній системі реалізуються у вигляді програм, які дають змогу провести дослідження моделі за допомогою методів певного типу, певною алгоритмічною мовою (для цього доводиться складати різні обчислювальні програми).

Водночас при застосуванні одного й того самого методу дослідження до різних моделей значна частина програми залишається без змін, оскільки вона залежить від методу, а не від моделі. Тому в ІС програма розрахунку для кожної з моделей є сукупністю окремих програм — обчислювальних модулів. Модулем є або представлення якої-небудь частини моделі в потрібній формі, або обчислювальна реалізація алгоритму дослідження. При складанні програми її «збирають» з окремих модулів. Це дуже зручно, оскільки дає змогу з невеликої кількості модулів «збирати» велику кількість різних обчислювальних програм.

Таким чином, блок моделей ІС є банком обчислювальних модулів, який містить модулі двох типів — проблемно орієнтовані (що реалізують окремі моделі) і стандартні (які реалізують різні алгоритми досліджень).

Банк даних містить: 1) значення коефіцієнтів і параметрів моделей; 2) варіанти сценаріїв (різні значення екзогенних змінних, зокрема, керуючих); 3) результати розрахунків; 4) різноманітну допоміжну інформацію.

Для ефективного відбору і використання інформації, що міститься в банку даних, туди повинна бути внесена інформаційно-пошукова система, яка дає змогу проглядати зміст банку, швидко знаходити потрібну інформацію, добирати вихідні дані для дослідження моделей, а також вносити нові.

Для забезпечення спілкування людини з ЕОМ потрібно створити спеціальний блок програм, який дає змогу з термінального пристрою ЕОМ легко, швидко і зрозумілою ОПР мовою вводити нову інформацію та корегувати стару; організовувати розрахунки, потрібні ОПР; оперативно втручатися в процес обчислення; виводити результати розрахунків у зручній формі (наприклад, у графічній). Цей комплекс програм називається *блоком спілкування* з ЕОМ. Власне, він є транслятором, який перекладає запити і директиви людини мовою ІС.

Нарешті, до складу ІС входить її операційна система (монітор) — блок програм, які керують роботою ІС. Відповідно до директив користувача, монітор «збирає» обчислювальну програму з проблемно-орієнтованих і стандартних модулів з банку модулів, за допомогою інформаційно-пошукової системи вибирає потрібну інформацію з банку даних, забезпечує проведення розрахунків, а також зміну плину процесу за командою користувача, фіксує результати розрахунків і передає їх у банк спілкування з ЕОМ.

Можна виділити такі етапи побудови ІС:

1) системний аналіз проблеми;
2) вибір якісних альтернатив її розв'язування;
3) побудова основної моделі об'єкта дослідження;
4) побудова системи спрощених моделей;
5) вибір розв'язку.

1. Системний аналіз проблеми. Перш ніж приступити до математичного моделювання, необхідно провести системний аналіз досліджуваної еколого-економічної проблеми. Це найважливіший етап дослідження, який багато в чому визначає його подальший успіх.

Ключовим моментом даного етапу слід вважати організацію взаємодії між ОПР та математиком, автором моделі. Математику, як правило, складно самому розібратися в тонкощах функціонування конкретної системи (хоча детальне ознайомлення з відповідною літературою обов'язкове). Однак і ОПР, тобто спеціаліст із системи, не завжди може чітко поставити задачу і сформулювати вимоги до моделі. Лише в процесі тривалого спільного обговорення поступово вимальовуються контури майбутньої моделі. Вміння вести такі бесіди з ОПР (принципово неформалізовано!) належить до набору необхідних інструментів розробника моделі.

Існує низка методів, які забезпечують процедуру системного аналізу. Так, для аналізу складних еколого-економічних проблем доцільно використовувати так званий граф цілей і задач, який має вигляд ієрархічної структури, що складається зі скінченної кількості рівнів. На кожному рівні (окрім найвищого) розміщені певні задачі, які необхідно розв'язати для досягнення цілей більш високого рівня. Зі свого боку, для розв'язування задач конкретного рівня (окрім найнижчого) необхідно розв'язати задачі нижчого рівня. Цілі найвищого рівня є кінцевими, а задачі найнижчого можуть бути розв'язані за допомогою наявних ресурсів.

Побудова графу цілей і задач починається з найвищого рівня, тобто з формулювання кінцевих цілей. Потім формується рівень задач, які необхідно розв'язати для досягнення цих цілей. Поступово вдається підійти до проблеми, для розв'язання якої і призначена дана ІС.

Етап системного аналізу повинен завершуватися побудовою концептуальної моделі об'єкта дослідження, яка відображає уявлення дослідника і ОПР про даний об'єкт. Ступінь формалізації конкретної моделі залежить від складності об'єкта (проблеми, яка вивчається) і може суттєво змінюватися — від власне математичної моделі для простих систем до суто вербального (словесного) опису дуже складних ситуацій. Як правило, концептуальна модель займає проміжне місце між цими двома граничними випадками. Зручним засобом для побудови концептуальної моделі є блок-схеми, графіки, діаграми тощо. Ще одним важливим результатом системного аналізу проблеми є формулювання критеріїв, за якими буде оцінюватися якість її розв'язання.

2. Вибір якісних альтернатив. Для розв'язання наявної проблеми можна придумати велику кількість варіантів, у тому числі й найфантастичніших. Досвід і знання ОПР та експертів дає змогу заздалегідь відкинути більшість з них і залишити лише ті, аналіз яких можливий з використання наявних математичних моделей. ОПР формує перелік якісних альтернатив розв'язку і наводить аргументи, які доводять непридатність відкинутих варіантів.

Вибрані альтернативи слугують основою для сценаріїв, за якими надалі будуть проводитися імітаційні експерименти.

3. Побудова основної моделі об'єкта дослідження. Після розробки концептуальної моделі можна переходити до її формалізації та створення моделі імітаційного рівня, з якою будуть проводитися імітаційні експерименти.

Як правило, через високу розмірність модель імітаційного рівня має блочну структуру: кожен блок описує сукупність однорідних процесів — метеорологічних, гідрологічних, ґрунтових, росту рослин, розмноження і конкуренції тварин, функціонування різних галузей промисловості і сільського господарства, соціально-демографічних і т. ін. Кожна така група відносно незалежних процесів має описуватися за допомогою найбільш адекватного для неї математичного апарату.

При цьому слід дотримуватися принципу рівної точності опису блоків. Немає сенсу детально моделювати, наприклад, біотичні відношення в суспільстві тварин, якщо клімат або економіка описуються спрощеними, агрегованими моделями.

Дуже важливу, найчастіше вирішальну роль при побудові математичних моделей відіграють питання інформаційного забезпечення. Традиційними джерелами інформації є різні звіти, матеріали натурних досліджень, літературні джерела тощо. Часто, однак, цих відомостей буває недостатньо, і тоді неоціненну допомогу можуть надати експертні оцінки. Але оскільки судження різних експертів часто бувають розбіжними, то застосовують спеціальні методи колективної експертизи.

4. Побудова системи спрощених моделей. Побудована модель, яка описує піддослідний об'єкт достатньо детально, зазвичай настільки складна, що імітація залишається єдиним методом її дослідження. При цьому, як правило, вдається провести лише невелику кількість розрахунків, оскільки кожен з них потребує великих затрат машинного часу. Водночас кількість допустимих варіантів розв'язків дуже велика. Тому в ІС, окрім основної моделі, будується блок спрощених моделей, які призначені для попереднього спрощеного аналізу проблеми загалом і вибору тих варіантів розв'язків, які є сенс перевіряти в імітаційних експериментах з основною моделлю.

Доцільно будувати не одну спрощену модель, а ієрархічну систему таких моделей, при переході до верхніх рівнів якої відповідні моделі стають щораз простішими і зручнішими для людино-машинного дослідження, а при русі вниз — щораз ближчими до основної моделі.

Процес спрощення починається уже з концептуальної моделі, що дає змогу перейти від неї до моделі імітаційного рівня. На наступному рівні спрощення може знаходитися, наприклад, модель, яку, як і основну, можна досліджувати лише методами імітації, але кожен розрахунок займає значно менше машинного часу. В процесі подальшого спрощення на певному рівні має з'явитися модель, яку можна було б досліджувати за допомогою методів оптимізації.

Нарешті, на найвищому рівні доцільно побудувати найбільш спрощені моделі, на основі яких ОПР зможе окреслити ефективну множину в просторі критеріїв.

Методи спрощення математичних моделей вже утворили спеціальний напрямок математичного моделювання, який інтенсивно розвивається. Зокрема, для економіко-математичних застосувань розробляється теорія агрегування, яка дає змогу зменшувати кількість змінних та співвідношень у моделі. При цьому найбільшу роль відіграють асимптотичні методи, за допомогою яких можна виділяти змінні, що мало впливають на загальний перебіг процесу.

5. Вибір розв'язку. Прийняття рішення в ІС ґрунтується на послідовному стисненні множини можливих варіантів шляхом відкидання неконкурентних або нездійсненних альтернатив. Методи відкидання базуються як на математичних, так і на неформальних процедурах.

При цьому дуже важливого значення набуває той факт, що в процесі відбраковування варіантів ОПР можуть залучатися соціальні й організаційні міркування, які погано формалізуються, але врахування яких є необхідною умовою для практичного застосування математичних моделей. Наголосимо ще раз, що найважливішим фактором ефективності ІС є активна участь ОПР та спеціалістів-експертів на усіх етапах проектування, розробки та використання системи. Цій умові повинні підпорядковуватися і організація діалогу з ЕОМ, і методи спрощення математичних моделей, і обробка результатів дослідження. Лише спільна робота людини й ЕОМ може забезпечити прийняття найбільш адекватних рішень щодо керування еколого-економічними системами.

11.2. Математичні основи імітаційного моделювання динамічних систем

Перш ніж перейти до імітаційних моделей по суті, коротко охарактеризуємо загальну методологію їхньої побудови.

Диференціальні балансові співвідношення будуються за простою загальною схемою: в лівій частині рівняння — швидкість зміни будь-якого параметра, у правій — різниця між певними потоками, які входять та виходять із системи. Наприклад, якщо в якийсь басейн тече потік $Q_{вх}$ (м^3/год), а з нього витікає потік $Q_{вих}$ (м^3/год), то зміна об'єму V(м^3) водяної маси, що міститься в басейні, виражається так:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{вх} - Q_{вих}. \qquad (1)$$

Абсолютно аналогічне рівняння відображає і процес накопичення грошей D (грн.) у банку, який неперервно проводить операції з вкладами (з інтенсивністю $S_{вх}$ (грн/год)) та видачею (з інтенсивністю $S_{вих}$ (грн/год)) грошей:

$$\frac{dD}{dt} = S_{вх} - S_{вих}.$$

Потоки $Q_{вх}$, $Q_{вих}$, $S_{вх}$, $S_{вих}$ в найбільш загальному й важливому для моделювання реальних систем випадку є певними функціями від часу чи якогось іншого фактора. Наприклад, потік витікання $Q_{вих}$ може залежати від рівня h води в басейні: $Q_{вих} = Q_{вих}(h)$, а рівень води, зі свого боку, однозначно пов'язаний з об'ємом води в басейні: $h = h(V)$. Тому наведені вище рівняння можна записати так:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{вх} - Q_{вих}(V). \qquad (2)$$

Фактори, які впливають на вигляд правої частини рівняння, можуть бути дуже різноманітними за своєю природою і, відповідно, визначатися дуже різними функціями з математичної точки зору.

Уявімо собі, що згаданий вище басейн цікавить нас як гідрохімічна система, в яку скидаються стічні води $Q_{вх}(t)$ (м^3/год) з концентрацією забруднень у стоці $c_{вх}(e)$ (м^3/год). Припустимо, що у водоймищі відбувається повне та миттєве змішування водної маси, яка надходить, з масою, що міститься в ньому. Тоді концентрація забруднень у басейні буде в кожний момент часу однакова і в самому басейні, і на його виході в потоці $Q_{вх}(t)$. Позначимо цю концентрацію як $c_{вих}$. Тоді матеріальний баланс забруднень виразиться рівнянням:

$$\frac{dVc_{вих}}{dt} = Q_{вх}c_{вх} - Q_{вих}(V)c_{вих}.$$

Доповнивши це рівняння рівнянням (2) зміни об'єму водної маси, яка міститься в басейні, отримаємо систему двох диференціальних рівнянь, яка описує всі динамічні властивості даного об'єкта.

Методично важливим елементом у побудові диференціальних рівнянь для динамічних систем є включення до піддослідних моделей процесів, які відбуваються не лише на вході та виході, а й усередині самої системи. Наприклад, якщо водоймище має самоочисні властивості і в ньому відбувається процес розкладу забруднень зі швидкістю, яка пропорційна до концентрації забруднювача у водоймищі, то повна система диференційних рівнянь для такого об'єкта матиме вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{вх} - Q_{вих}(V),$$

$$\frac{dVc_{вих}}{dt} = Q_{вх}c_{вх} - kc_{вх} - Q_{вих}c_{вих}.$$

Перейдемо тепер від ілюстративних моделей до конкретних економічних моделей, які справили значний вплив на розвиток методології аналізу глобальних систем.

Одним з перших досліджень у цій галузі стала праця М.І. Будико (1967 р.). Її метою було вивчення впливу первісного мисливства на чисельність мамонтів та вимирання інших видів великих тварин. Ця праця, зокрема, переконливо довела, що негативний вплив людини на навколишнє середовище, який призводить до екологічних криз, відбувався ще у первісному суспільстві.

Коротко охарактеризуємо методологію побудови моделі екологічної кризи.

Зміну чисельності будь-якого виду тварин у часі можна виразити таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n - \beta n,$$

в якому n — чисельність тварин на одиниці площі їхнього ареалу; α — відносний приріст чисельності у результаті народжуваності; β —відносне зменшення тварин внаслідок вимирання.

Якщо на тварин ведеться систематичне полювання з виловлюванням g тварин за одиницю часу, то диференціальне рівняння динаміки популяції набуває вигляду:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n - \beta n - g.$$

У ньому коефіцієнти α і β є функціями від n, а коефіцієнт β залежить ще й від g, оскільки в умовах систематичного полювання відносна смертність тварин внаслідок природних причин знижується: адже під час полювання винищуються здебільшого слабші тварини. Але, не ускладнюючи моделі урахуванням цих факторів, перейдемо до наступного етапу її побудови.

Оскільки інтенсивність полювання g можна вважати пропорційною до щільності населення m, то

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n - \beta n - \gamma m, \qquad (3)$$

де γ — відносна біомаса переслідуваних тварин, яку споживає одна людина за одиницю часу (одиницею часу тут може слугувати 1 рік).

Динаміка зміни чисельності населення описується рівнянням:

$$\frac{dm}{dt} = am - bm, \qquad (4)$$

в якому a та b — коефіцієнти народжуваності і смертності.

Якщо обмежитися грубою оцінкою цих коефіцієнтів і ввести позначення $a - b = c$, то, розв'язуючи диференціальне рівняння (4) за початкової умови $m = m_0$ при $t = 0$, отримуємо експоненціальну функцію зростання чисельності населення у часі:

$$m = m_0 e^{ct}. \qquad (5)$$

Підставивши цю функцію в рівняння (3), одержимо:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n - \beta n - \gamma m_0 e^{ct}.$$

Помноживши всі члени цього рівняння на величину середньої ваги тварини, М.І. Будико надає йому такої форми:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N - \Gamma m_0 e^{ct},$$

де N — біомаса тварин на одиницю площі ареалу; Γ — біомаса тварин, яка споживається людьми за одиницю часу.

Використовуючи низку спрощень, автор отримує аналітичний розв'язок диференціального рівняння у такому вигляді:

$$N(t) = \frac{\Gamma m_0}{\alpha - c} e^{ct} + e^{c(t-r)} \left[N_0 - \frac{\Gamma m_0}{\alpha - c} e^{cr} \right], \text{ де } r = \frac{1}{c} \ln \frac{2N_0}{\Gamma m_0}.$$

Для визначення параметрів, що входять до цього розв'язку, необхідно використовувати результати широкого комплексу палеогеографічних, біологічних та етнографічних досліджень.

Отриманий розв'язок відображає динаміку зменшення чисельності тварин під впливом природних та антропогенних факторів. Через катастрофічний розвиток цього процесу первісні племена, які займалися полюванням, були змушені перейти до інших способів здобування їжі.

11.3. Глобальні еколого-економічні моделі

Перша модель глобального розвитку сучасного світу була побудована Дж. Форрестером у книзі «Світова динаміка» (1971 р.). Методологічне значення цієї праці для розвитку економіко-екологічного моделювання, яка привернула увагу фахівців, урядів та широкої спільноти до даної проблеми, неможливо переоцінити.

Модель Форрестера містить п'ять змінних у часі параметрів: P — чисельність населення Землі, V — виробничий капітал (основні фонди), S — частка сільськогосподарського капіталу в загальному виробничому капіталі, R — невідновлювальні природні ресурси, Z — забруднення навколишнього середовища.

Дж. Форрестер провів велику підготовчу роботу зі збирання, статистичної обробки та систематизації наявного фактичного матеріалу. В результаті він одержав 20 конкретних функцій, що відображають взаємозв'язок найважливіших економіко-екологічних факторів розвитку суспільства.

Диференціальне рівняння зміни чисельності населення відображає баланс між народжуваністю B та смертністю D:

$$\frac{dP}{dt} = B - D. \qquad (1)$$

Обидва фактори, що визначають праву частину цього рівняння, конкретизуються Форрестером з урахуванням основних демографічних залежностей. Вони виражаються сімома з двадцяти згаданих функціональних залежностей моделі.

Диференціальне рівняння зменшення невідновлювальних природних ресурсів має вигляд:

$$\frac{dR}{dt} = -PR_M. \qquad (2)$$

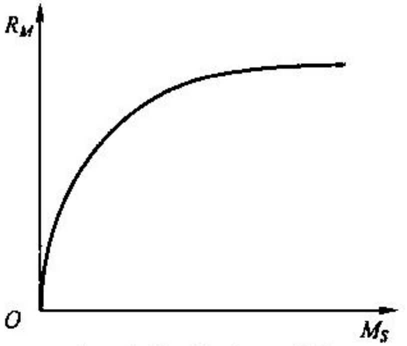


Рис. 1. Графік функції R_M Форрестера

За цим рівнянням природні ресурси зникають зі швидкістю, яка пропорційна до чисельності населення та ще певного фактора R_M, який є нелінійною функцією від рівня життя і враховує уповільнення темпів видобутку ресурсів зі зростанням матеріального рівня життя. Ця остання залежність пов'язана з використанням природних ресурсів, перш за все, на предмети промислового виробництва, потреба в яких асимптотично прямує до насичення з підвищенням матеріального рівня життя. Графік цієї функції зображено на рис. 1.

Фактор M_S — матеріальний рівень життя. Зі свого боку, він виражається через параметри V, P, S та функцію $E_R(R_R)$, що відображає зростання труднощів з видобутку корисних копалин зі зменшенням їхніх запасів.

Динаміка зміни капіталу (динаміка капіталовкладень) описується рівнянням:

$$\frac{dV}{dt} = PC_V V_M(M_S) - \frac{V}{T_V}. \qquad (3)$$

Функція $V_M(M_S)$ тут характеризує приріст вкладів коштів населення у виробництво під впливом зростання матеріального рівня життя. C_V та T_V — сталі коефіцієнти, визначені на основі вивчення інвестиційних процесів та процесів зношення основних фондів.

Динаміка сільськогосподарського капіталу описується рівнянням:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{(S_F S_Q - S)}{T_S}. \qquad (4)$$

Специфіку зміни сільськогосподарського капіталу відображають дві функції: S_F — вплив на величину сільськогосподарського капіталу рівня харчування F_R та S_Q — залежність між сільськогосподарським капіталом і якістю життя. Якість життя, зі свого боку, визначається впливом чотирьох факторів: матеріальним рівнем життя, кількістю продуктів на душу населення, щільністю населення та рівнем забруднення навколишнього середовища. T_S — час, необхідний для перерозподілу капіталу.

Динаміка забруднення моделюється рівнянням:

$$\frac{dZ}{dt}=PZ_N Z_V - \frac{Z}{T_Z}. \qquad (5)$$

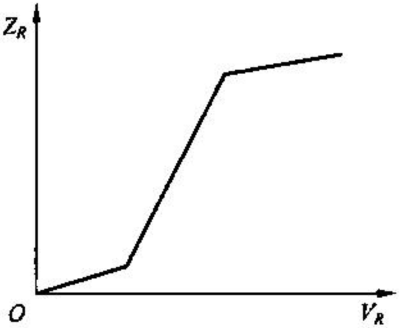


Рис. 2. Графік функції Z_R

Перший член у правій частині цього рівняння, який характеризує генерацію забруднення, пропорційний до чисельності населення, константи Z_N, що відображає нормальний рівень забруднення, та функції $Z_V(V_R)$. Графік останньої функції зображено на рис. 2. Він відображає закон наростання швидкості забруднення середовища зі збільшенням граничного капіталу.

Другий, від'ємний член правої частини рівняння (5) характеризує процес знищення та природного розпаду забруднення. T_Z визначає час, необхідний для зміни у певну кількість разів показника забруднення за відсутності нових забруднень.

В результаті інтегрування системи диференціальних рівнянь (1) – (5) Дж. Форрестер отримав криві зміни у часі основних параметрів своєї моделі (рис. 3). Даними для визначення функціональних зв'язків між параметрами системи слугували для нього глобально усереднені дані світової статистики за 1900 – 1970 рр. Як видно, всі криві мають чітко виражені екстремуми (крива рівня життя —1960 р., чисельності населення — 2020 р., капіталовкладень — 2040 р., рівня забруднення — 2050 р.).

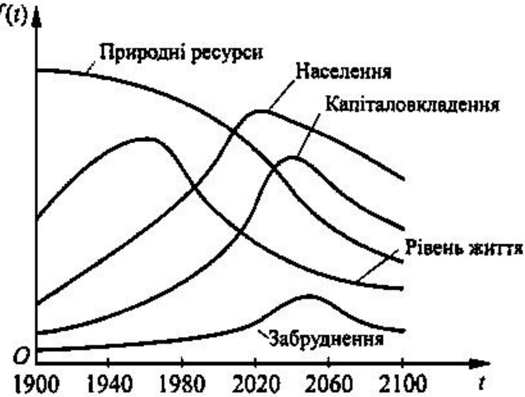


Рис. 3. Динаміка світу

Рис. 3 відображає таку тенденцію. Зменшення природних ресурсів спричиняє спад у промисловості, оскільки зростання цін на ресурси внаслідок виснаження їхніх запасів уповільнює темпи зростання капіталовкладень та призводить до скорочення виробництва. Останнє відображається на рівні життя, погіршення якого спочатку призводить до зниження темпу його зростання, а згодом — і до зменшення чисельності населення.

Як бачимо, модель Дж. Форрестера побудована на простих принципах. Тому надмірна переоцінка окремими економістами складності математичного апарату системної динаміки не має підстав. Вся складність такого моделювання зводиться до адекватного відображення екологічних та економічних законів, до повноти статистичних даних, до вирішення питань допустимості екстраполяцій функцій та інших традиційних для економічної науки труднощів.

Значний внесок Дж. Форрестера в науку полягає в тому, що він спрямував великі зусилля са́ме на популяризацію методів побудови імітаційних моделей. На даний час його праця є предметом обговорення лише в методологічному плані, оскільки при такому рівні агрегування точність практичних результатів не може бути задовільною. Сам Дж. Форрестер неодноразово наголошував на складності глобальної економіко-екологічної системи, особливо на збуджуючі впливи. Багато кібернетичних особливостей об'єкта Дж. Форрестер та його послідовники взагалі не вбачають можливості визначити хоча б приблизно коректно. Власне, заокруглення в моделі таке, що розв'язок зводиться до тривіального результату: система з параметрами, які змінюються експоненціально, обов'язково виходить на границі своєї параметричної області. Тому основні зусилля послідовників Дж. Форрестера спрямовані на деталізацію структури опису економіко-екологічної системи, збільшення розмірності параметричного простору та, відповідно, кількості диференціальних рівнянь, що описують динаміку взаємозв'язку між різними факторами. Прикладом такого дослідження є праця групи вчених з Массачусетського технологічного інституту під керівництвом Д. Мезоуза «Границі зростання» (1972 р.). В ній модель економіко-екологічної системи зводиться до розгорнутої системи декількох сотень рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Горстко А.Б., Угольницкий Г.А. Введение в моделирование эколого-экономических систем. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовс. ун-та, 1990. — 112 с.
2. Конспект лекций по магистерской специальности «Прикладная экономика». В 2 т. Том II. Базовые модели / Под ред. А.И. Черняка. — Донецк: Изд-во ДНУ, 2004. — 383 с.
3. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — К.: Вища шк., 1999. — 236 с.
4. Ляшенко И.Н., Михалевич М.В., Утиулиев Н.У. Методы эколого-экономического моделирования. — Нукус: Билим, 1994. — 236 с.
5. Ляшенко І.М., Мукоєд А.П. Моделювання біологічних та екологічних процесів. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2002. — 340 с.
6. Мікроекономіка і макроекономіка: Підр. У 2 ч. / С. Будаговська, О. Кілієвич, І. Луніна та ін. — К.: Основи, 2003. — 518 с.
7. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Сучасний економічний аналіз: Мікроекономіка. /Навч. пос. — К.: Вища шк., 2004. — 262 с.
8. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Сучасний економічний аналіз: Макроекономіка. /Навч. пос. — К.: Вища шк., 2004. — 205 с.
9. Розанова Н.М., Шаститко А.Е. Теория спроса и предложения. — М.: Анкил, 1995. — 96 с.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЛЯШЕНКО ІГОР МИКОЛАЙОВИЧ
КОРОБОВА МАРИНА ВІТАЛІЇВНА
СТОЛЯР АНАТОЛІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ ТА СОЦІАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист від 13.10.2005 р. № 14/18.2-2208)

Головний редактор *Б.Є. Будний*
Редактори *В.О. Тадеєв, І.Є. Буняк*
Художник обкладинки *Р.Р. Крамар*
Комп'ютерна верстка *В.О. Тадеєва, А.В. Кравчука*
Коректор *І.Є. Буняк*

Підписано до друку 26.11.2006. Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Таймс. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 17,67. Умовн. фарбо-відб. 17,67. [В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

«Навчальна книга – Богдан», а/с 529, м. Тернопіль 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66
publishing@budny.te.ua
www.bohdan-books.com

Друк ВВП «Місіонер». Зам. № 606

Автори книги — співробітники кафедри математичних методів еколого-економічних досліджень факультету кібернетики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка.

ЛЯШЕНКО Ігор Миколайович — заслужений професор, доктор фізико-математичних наук, працює в університеті понад 40 років. Основні напрямки наукової діяльності пов'язані з еколого-економічним моделюванням, балансовими та оптимізаційними моделями економічних процесів, чисельними методами розв'язування задач математичної фізики. Автор понад 200 наукових праць, серед яких 8 монографій і 4 навчальних посібники. Підготував 20 кандидатів та 4 доктори наук.

КОРОБОВА Марина Віталіївна — доцент, кандидат фізико-математичних наук, в університеті працює з 1998 р. Наукові дослідження пов'язані з еколого-економічним моделюванням та оптимізаційними балансовими моделями взаємодії економіки та довкілля.

СТОЛЯР Анатолій Миколайович — асистент, має досвід роботи в бізнесових структурах. Займається оптимізаційними моделями розміщення особливо небезпечних виробництв, а також пакетами прикладних програм економічного спрямування.

In the following textbook fundamental principles and the most extended methods of mathematical modelling of social and economic processes is given. Besides, classical analytical models of micro- and macroeconomics, ecology and ecology economical interaction according to conception of permanent development is described, examples of their theoretical basing and analysis is proposed.

ISBN 966-692-824-8
9 789666 928248