12:06 75

2017-2018高..卷参考答案

中国传媒大学

2017—2018 学年第 二 学期期中考试试卷

考试科目：高等数学 A　　　　课程编码：123002

考试班级：2016 级工科各班、光电信息科学　　　　考试方式：闭卷

题目	一	二	三	四	总分
得分					

得分	评卷人

一、填空题（将正确答案填在横线上，本大题分 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1. 设 f(x,y)为连续函数，则二次积分 $\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy$ 交换积分次序后为:____________。

答：$\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx$

2.设 D：$x^2+y^2\le 2x$，则二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{2x-x^2-y^2}\,dxdy=$____________。

答：$\frac{2\pi}{3}$

3.球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影方程为____________。

答：$\begin{cases}2x^2-2x+y^2=8\\ z=0\end{cases}$

4.曲线 $x=3t^2+t^3, y=t-t^3, z=2t^2-4t$ 在对应于 $t=1$ 点处的切线方程为____________。

答：$\frac{x-4}{9}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{0}$

得分	评卷人

二、选择题（在四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题分 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

1.下列结论中错误的是（B　　）

(A) $z + 2x^2 + y^2 = 0$　　　表示椭圆形抛物面

(B) $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$　　表示双曲柱面

(C) $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$　表示圆锥面

(D) $y^2 = 5x$　　　　　表示抛物柱面

2.设函数 $u = 2xz^3 - yz - 10x - 23z$,则函数 u 在点(1，－2，2)处方向导数的最大值为(C　　)

(A) $\sqrt{17}$　　(B) $3\sqrt{5}$　　(C) 7　　(D) 3

3.若 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr$ ，则区域 D 为(A　　)

(A) $x^2 + y^2 \le ax,\ a > 0;$　　(B) $x^2 + y^2 \le ax,\ a < 0;$

(C) $x^2 + y^2 \le a^2;$　　(D) $x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0;$

4.曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是(　B　　)

(A) zox 平面上曲线 $z = x$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面

(B) zoy 平面上曲线 $z = |y|$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面

(C) zox 平面上曲线 $z = x$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面

(D) zoy 平面上曲线 $z = |y|$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面

得分	评卷人

三、解答下列各题（本大题共 8 小题，每小题 7 分，总计 56 分）

1.（本小题 7 分）

求过点（1,1,1）且垂直于二平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程。

解：已知二平面的法向量为 $\vec{n}_1=(1,-1,1)$ 和 $\vec{n}_2=(3,2,-12)$

取所求平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(10,15,5) \qquad (4\text{ 分})$$

则所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$$

化简得：

$$2x+3y+z-6=0 \qquad (7\text{ 分})$$

2.（本小题 7 分）

设：$z=x^3f(xy,\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(xf_1'+\frac{1}{x}f_2')=x^4f_1'+x^2f_2'$ （4 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3f_1'+x^4(f_{11}''y-f_{12}''\frac{y}{x^2})+2xf_2'+x^2(f_{21}''y-f_{22}''\frac{y}{x^2})$$

$$=4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}'' \qquad (7\text{ 分})$$

3.（本小题 7 分）

在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短。

解：设所求点 (x,y)，则 $d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$，

令 $L=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$，则

$$\begin{cases} L_x=4(2x+3y-6)+2x\lambda=0 \\ L_y=6(2x+3y-6)+8y\lambda=0, \\ L_\lambda=x^2+4y^2-4=0 \end{cases} \qquad (4\text{ 分})$$

解得$\begin{cases} x = \pm 8/5 \\ y = \pm 3/5 \end{cases}$，点$(8/5, 3/5)$为所求。 (7 分)

4.（本小题 7 分）

计算二重积分$\iint_D |xy| d\sigma$，其中 D:|x| + |y| ≤ 1。

解:由对称性，

$$\iint_D |xy| d\sigma = 4\int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy$$ (4 分)

$$= 2\int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{6}$$ (7 分)

5.（本小题 7 分）

坐标面在平面$3x - y + 4z - 12 = 0$上截得一个ΔABC，求此三角形面积。

解：所给平面的截距式方程为$\frac{x}{4} + \frac{y}{-12} + \frac{z}{3} = 1$，因此$\Delta ABC$在$Ox$，$Oy$，$Oz$轴

顶点坐标依次为$A(4,0,0)$，$B(0,12,0)$，$C(0,0,3)$. (3 分)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

由于 $\vec{AB}$=（-4,12,0），$\vec{AC}$=（-4,0,3），因此

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 36\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 48\mathbf{k}$$ (5 分)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|36i+12j+48k| = 6\sqrt{26}$$ (7 分)

6.（本小题 7 分）

设$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$，试研究函数在点（0，0）处是否存在偏导，是否可微?

解：因为$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$不存在

所以 $f_x(0,0)$ 不存在，所以偏导不存在 （4 分）

故函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。 （7 分）

7.（本小题 7 分）

求由平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的柱面被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 所截得的立体的体积。

解：该立体可视作以 D 为底，以抛物面为曲顶的曲顶柱体，而 D 为：

D： $0\le x\le 1$， $0\le y\le 1-x$，

曲顶为： $f(x,y)=z=6-x^2-y^2$ （2 分）

故该曲顶柱体的体积为：$V=\iint\limits_D f(x,y)dx=\iint\limits_D(6-x^2-y^2)dxdy$ （4 分）

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)dy=\int_0^1(6y-x^2y-\frac{y^3}{3})\Big|_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1\left[6-6x-x^2+x^3-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]dx=\left[6x-3x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1$$

$$=3-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{17}{6}$$ 。 （7 分）

8.（本小题 7 分）

设 D 是以 $O(0,0)$, $A(1,2)$ 和 $B(2,1)$ 为顶点的三角形区域，求 $\iint\limits_D xdxdy$

解：直线方程分别为： $OA: y=2x, OB: y=\frac{x}{2}, AB: y=3-x$ 将 D 分成两部分

$$\iint\limits_D xdxdy=\int_0^1 xdx\int_{\frac{x}{2}}^{2x}dy+\int_1^2 xdx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}dy$$ （4 分）

$$=\int_0^1\frac{3}{2}x^2dx+\int_1^2(3x-\frac{3}{2}x^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^3\right]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2=\frac{3}{2}$$ （7 分）

得分	评卷人

四、证明题（本大题共 2 小题,，每小题 6 分，总计 12 分）

1．（本小题 6 分）

1．证明：$z=yf(x^2-y^2)$ 满足方程 $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=zx$， f 可微.

证明：

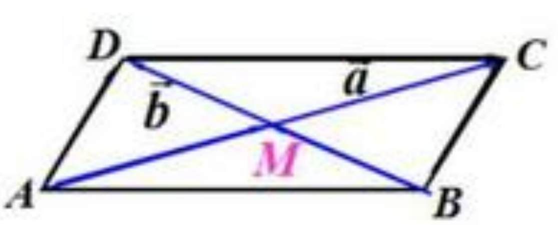
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf'(x^2-y^2)$$ （2 分）

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(x^2-y^2)-2y^2f'(x^2-y^2)$$ （4 分）

所以，$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=zx$ （6 分）

2．（本小题 6 分）

用向量证明：平面上一个四边形的对角线互相平分，此四边形是平行四边形。



证明：

设四边形 ABCD 中的 AC 与 BD 交于点 M，已知$\vec{AM}=\vec{MC}$，$\vec{DM}=\vec{MB}$，

因此，$\vec{AB}=\vec{AM}+\vec{MB}=\vec{MC}+\vec{DM}=\vec{DC}$ （2 分）

即 AB // DC，AB = DC，（4 分）

因此四边形 ABCD 是平行四边形（6 分）