中国传媒大学

2015—2016 学年第二学期期中考试试卷

参考答案与评分标准

考试科目： 高等数学 A（下） **课程编码：** 123002

考试班级： 2015 级工科 **考试方式：** 闭卷

题目	一	二	三	四	五	总分
得分						

得分	评卷人

一、填空题（将正确答案填在横线上，本大题分 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设$\vec{a}=\sqrt{3}\{1,-2,-1\}, \vec{b}=\{2,1,-3\}$，则$|(5\vec{a}-3\vec{b})\times(7\vec{a}-5\vec{b})|=$ ___ 60 ___.

2. 设$z=\arctan(xy)$，而$y=e^x$，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$ ___ $\frac{y(1+x)}{1+x^2y^2}$ ___.

3. 函数$z=\sin(x+y)+\sin x$的驻点是 ___ $\left(m\pi+\frac{\pi}{2}, n\pi\right)$, $m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ___.

4.设$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 2(1-x)$,由二重积分的几何意义知

$$\iint_D\left(1-x-\frac{y}{2}\right)dxdy= \underline{\quad \frac{1}{3} \quad}.$$

5.设Ω是由$x^2+y^2+z^2\le 2z+3$所确定的有界闭区域，试将$I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$化成柱面坐标下的三次积分式$I=$ ___ $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{1-\sqrt{4-r^2}}^{1+\sqrt{4-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$ ___.

得分	评卷人

二、选择题（在四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题分 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 向量$\vec{a}\times\vec{b}$与二向量$\vec{a}$及$\vec{b}$的位置关系是（ C ）

A. 共面; B. 共线;

C. 垂直; D. 斜交.

2. 设平面方程为$Bx+Cz+D=0$，且$B, C, D\neq 0$， 则平面（ B ）

A. 平行于 x 轴; B. 平行于 y 轴;

C. 经过 y 轴; D. 垂直于 y 轴.

3. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=$(B)

A. 等于 0 ; B. 不存在;

C. 等于$\dfrac{1}{2}$; D. 存在且不等于 0 或$\dfrac{1}{2}$.

4. 设$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

则在原点$(0,0)$处$f(x,y)$(D)

A. 偏导数不存在; B. 不可微;

C. 偏导数存在且连续; D. 可微.

5. 设$u=f(t)$是$(-\infty,+\infty)$上严格单调减少的奇函数，Ω是球体$x^2+y^2+z^2\leq 1$,则下列积分值不为零的是(D)

A. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2z^2)f(x^2yz)dv$; B. $\iiint\limits_{\Omega}(x+y^2+z^3)f(xyz)dv$;

C. $\iiint\limits_{\Omega}(y+z)f(x^2+y^2+z^2)dv$; D. $\iiint\limits_{\Omega}(x^3z)f(xy^2z^3)dv$.

得分	评卷人

三、计算下列各题（本大题分 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1.（本小题 8 分）

设$z=\ln[xy-y+\sqrt{(xy-y)^2-1}]$，求$z_x$.

解:$z_x=\dfrac{1}{xy-y+\sqrt{(xy-y)^2-1}}\left[y+\dfrac{y(xy-y)}{\sqrt{(xy-y)^2-1}}\right]$ (5 分)

$=\dfrac{y}{\sqrt{(xy-y)^2-1}}$ (8 分)

2.（本小题 8 分）

计算二次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_y^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$.

解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_y^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\int_0^x dy$ (5 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1$. (8 分)

3.（本小题 8 分）

设$u=f(t)$具有三阶连续偏导数，且$f(0)=0$,试完成下列算式

$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f'''(x+y+z)dz$

$=\int_0^1 dx\int_0^x \underline{\qquad\qquad} dy$

$=\int_0^1 \underline{\qquad\qquad} dx$

$=\underline{\qquad\qquad}$.

解: $I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f'''(x+y+z)dz$

$=\int_0^1 dx\int_0^x[f''(x+2y)-f''(x+y)]dy$ (3 分)

$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}f'(3x)-f'(2x)+\frac{1}{2}f'(x)\right]dx$ (5 分)

$$=\frac{1}{6}f(3)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}f(1).$$ (8分)

得分	评卷人

四、解答下列各题（本大题分 4 小题，每小题 8 分，共 32 分）

1.（本小题 8 分）

计算 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 是锥面 $x^2+y^2=z^2$,与平面 $z=a\ (a>0)$ 所围的立体.

解 1:采用球面坐标

因为 $z=a \Leftrightarrow r=\dfrac{a}{\cos\varphi}$,

$$x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

所以 $\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}, 0\le r\le\dfrac{a}{\cos\varphi}$ (3分)

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^4\sin^3\varphi dr$$ (5分)

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{a^5}{\cos^5\varphi}-0\right)d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{10}a^5.$$ (8分)

解 2:采用柱面坐标

因为 $x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow z=r, D: x^2+y^2\le a^2$

所以 $\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le a, r\le z\le a$ (3分)

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a}rdr\int_r^{a}r^2dz$$ (5分)

$$=2\pi\int_0^{a}r^3(a-r)dr$$

$$= 2\pi\left[a \cdot \frac{a^4}{4} - \frac{a^5}{5}\right] = \frac{\pi}{10} a^5 .$$ (8分)

2.（本小题 8 分）

求椭球面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 13$ 与单叶旋转双曲面 $x^2 + y^2 - 4z^2 = 11$ 在点 $(2\sqrt{2},2,\frac{1}{2})$ 处两曲面交线的切线方程，并求两曲面在该点处的交角.

解:椭球面在点 $(2\sqrt{2},2,\frac{1}{2})$ 处切平面的法向量

$$\vec{n}_1 = \left\{4\sqrt{2},4,4\right\} = 4\left\{\sqrt{2},1,1\right\},$$

双曲面在点 $(2\sqrt{2},2,\frac{1}{2})$ 处切平面的法向量

$$\vec{n}_2 = \left\{4\sqrt{2},4,-4\right\} = 4\left\{\sqrt{2},1,-1\right\},$$

交线的切线向量

$$\vec{s} = \frac{\vec{n}_1}{4} \times \frac{\vec{n}_2}{4} = -2\left\{1,-\sqrt{2},0\right\}$$ (4分)

切线方程 $$x - 2\sqrt{2} = \frac{y-2}{-\sqrt{2}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{0}$$ (6分)

或 $$\begin{cases} x - 2\sqrt{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y-2) \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

两曲面的夹角余弦 $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \dfrac{1}{2}$，故夹角 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. (8分)

3.（本小题 8 分）

周长为 $2p$ 的矩形绕其一边旋转一周生成旋转体，求最大旋转体的体积.

解:设矩形的长、宽分别为 x, y，绕 x 一边旋转

则旋转体的体积为 $V = \pi x y^2$ 且 $x + y = p$， (3分)

令 $L = \pi x y^2 + \lambda(x + y - p)$ (5分)

由 $\begin{cases} L_x = \pi y^2 + \lambda = 0 \\ L_y = 2\pi xy + \lambda = 0 \\ L_\lambda = (x + y - p) = 0 \end{cases}$

得 $x = \dfrac{p}{3}$ $\quad y = \dfrac{2p}{3}$ (7分)

$$V\left(\frac{p}{3}, \frac{2p}{3}\right) = \frac{4}{27}\pi p^3$$ (8分)

4.（本小题 8 分）

函数$z = \arctan\dfrac{1+x}{1+y}$在（0，0）点处沿哪个方向的方向导数最大，并求此方向导数的值.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1+y}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{1+y}\Big|_{(0,0)} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1+y}\right)^2} \cdot \left[-\frac{1+x}{(1+y)^2}\right]\Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{1}{2}\cos\alpha + (-\frac{1}{2})\sin\alpha = \frac{1}{2}\{1,-1\}\cdot\{\cos\alpha, \sin\alpha\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$$ (5分)

其中φ为$\vec{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$与$\vec{g} = \left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\}$的夹角,

所以$\varphi = 0$时，即$\vec{l}$与$\vec{g}$同向时，方向导数取最大值$\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (8分)

得分	评卷人

五、证明题（本大题分 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

1.（本小题 7 分）

证明由方程组$\begin{cases} z = \alpha x + \dfrac{y}{\alpha} + f(\alpha) \\ 0 = x - \dfrac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha) \end{cases}$, $(\alpha \neq 0)$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

证: $\mathrm{d}z = \alpha\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{d}y + \left[x - \dfrac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha = \alpha\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{d}y$, (4 分)

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \alpha$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{\alpha}$, (6 分)

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$. (7 分)

2. (本小题 7 分)

证明曲线 $x = at\cos t, y = at\sin t, z = bt$ 上对应于 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 点处的法平面垂直于平面 $2bx + \pi az = \pi$.

证: 对应于 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 点处曲线法平面的法向量为 $\vec{n} = \left\{-\dfrac{\pi a}{2}, a, b\right\}$, (4 分)

已知平面法向量 $\vec{n}_1 = \{2b, 0, \pi a\}$

由 $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$，得 $\vec{n} \perp \vec{n}_1$ (6 分)

故两平面互相垂直. (7 分)