中国传媒大学

2012—2013 学年第 二 学期

高等数学 A（下）期中考试试卷参考解答及评分标准

考试科目： 高等数学 A　　　考试班级：_______

考试方式： 闭卷　　　命题教师：______

题目	一	二	三	四	五	总分
得分						

得分	评卷人

一、填空题（将正确答案填在横线上，本大题分 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

1、函数 $y=\sqrt{y-x}+\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域为 $y \ge x \quad , x>0 \quad , x^2+y^2<1$.

2、设 $D: x^2+y^2 \le 2x$，由二重积分的几何意义知 $\iint\limits_D \sqrt{2x-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{2}{3}\pi$.

3、平行于 x 轴，且过点 $P(3,-1,2)$ 及 $Q(0,1,0)$ 的平面方程是 $y+z=1$.

4、设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，且 $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ |\vec{c}|=5$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}==-25$.

得分	评卷人

二、选择题（在四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题分 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1、极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} = ?$

(A)等于 0；　　(B)不存在；

(C)等于 $\dfrac{1}{2}$ ；　　(D) 存在,但不等于 0 和 $\dfrac{1}{2}$.

答（ B ）

2、若 $f(x,x^2)=x^2e^{-x}, f_x(x,x^2)=-x^2e^{-x}$，则 $f_y(x,x^2)=?$

(A) $2xe^{-x}$；　　(B) $(-x^2+2x)e^{-x}$；

(C) e^{-x}；　　(D) $(2x-1)e^{-x}$

答（ C ）

3、设函数 $F(x,y,z)$ 在有界闭域 Ω 上可积，$F(x,y,z)=f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)$，则:

$$\iiint\limits_{\Omega} F(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f_1(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega} f_2(x,y,z)dv$$

(A) 上式成立；　　(B) 上式不成立；

(C) $f_1(x,y,z)$ 可积时成立；　　(D) $f_1(x,y,z)$ 可积也未必成立.

答(C)

4、设 $f(x,y)$ 是连续函数，则二次积分 $\int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy=?$

(A) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-1}^{\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx$；

(B) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1} f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^2 dy\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx$；

(D) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1} f(x,y)dx+\int_1^{\sqrt{2}} dy\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx$.

答（ D ）

得分	评卷人

三、简答下列各题（本大题共 2 小题，每小题 7 分，总计 14 分）

1、（本小题 7 分）

求直线l:$\begin{cases} 3x - z = -4 \\ 3x - 2y = 24 \end{cases}$与平面$\pi$:$6x + 15y - 10z + 31 = 0$的夹角.

解:直线l的方向向量为$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\{2,3,6\}$

平面π的法向量为$\vec{n} = \{6,15,-10\}$ （4 分）

$\cos(\hat{\vec{s},\vec{n}}) = \dfrac{\vec{S} \cdot \vec{n}}{|\vec{S}||\vec{n}|} = \dfrac{3}{133}$ （6 分）

故所求夹角为$\arcsin\dfrac{3}{133}$ （7 分）

2、（本小题 7 分）

求由曲面$z = 3 - x^2 - 2y^2, z = 2x^2 + y^2$所围成的立体在$xoy$平面上的投影区域.

解:交线$\begin{cases} z = 3 - x^2 - 2y^2 \\ z = 2x^2 + y^2 \end{cases}$在$xoy$平面上的投影曲线为

$\begin{cases} 3 - x^2 - 2y^2 = 2x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ （5 分）

故所求投影区域为

$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ z = 0 \end{cases}$ （7 分）

得分	评卷人

四、回答下列各题（本大题共 3 小题，每小题 9 分，总计 27 分）

1、（本小题 9 分）

函数$z=z(x,y)$由方程$F(x+yz,y+xz)=1$所确定，其中F具有一阶连续偏导数，求$\mathrm{d}z$.

解:$F_1\cdot(\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}y)+F_2\cdot(\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x)=0$ (7 分)

$$\mathrm{d}z=-\frac{(F_1+zF_2)\,\mathrm{d}x+(F_2+zF_1)\,\mathrm{d}y)}{yF_1+xF_2}$$ (9 分)

2、（本小题 9 分）

周长为$2p$的矩形绕其一边旋转一周生成旋转体，求最大旋转体的体积.

解:设矩形的长、宽分别为x,y，绕x一边旋转

则旋转体的体积为$V=\pi xy^2$且 $x+y=p$ (3 分)

令 $L=\pi xy^2+\lambda(x+y-p)$ (5 分)

由 $\begin{cases}L_x=\pi y^2+\lambda=0\\L_y=2\pi xy+\lambda=0\\L_\lambda=(x+y-p)=0\end{cases}$

得 $x=\dfrac{p}{3}$ $y=\dfrac{2p}{3}$

$$V\left(\frac{p}{3},\frac{2p}{3}\right)=\frac{4}{27}\pi p^3$$ (7 分)

由于旋转体的最大体积必定存在,

因此$V_{\max}=V\left(\dfrac{p}{3},\dfrac{2p}{3}\right)=\dfrac{4}{27}\pi p^3$即为所求。 (9 分)

3、（本小题 9 分）

函数$u = xy^2 + yz^3$在点（1，2，－1）处沿哪个方向的方向导数值最大，并求此最大方向导数的值.

解:$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(y^2\cos\alpha + (2xy + z^3)\cos\beta + 3yz^2\cos\gamma\right)\Big|_{(1,2,-1)}$

$= 4\cos\alpha + 3\cos\beta + 6\cos\gamma$ (5 分)

设$\vec{g} = \{4,3,6\}$ $\vec{l^0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ (8 分)

则$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{g} \cdot \vec{l^0} = |\vec{g}|\cos\varphi$，其中$\varphi$为$\vec{g}$与$\vec{l^0}$的夹角。

所以当$\vec{l^0}$与$\vec{g}$同向时，$\frac{\partial u}{\partial l} = |\vec{g}| = \sqrt{61}$取最大值。 (9 分)

得分	评卷人

五、解答下列各题（本大题共 3 小题，每小题 9 分，总计 27 分）

1、(本小题 9 分)

计算二次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$

解:原式$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \int_0^x dy$ (6 分)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$ (9分)

2、(本小题 9 分)

设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=1$，$y=x$ 以及 $y=0$ 所围闭区域位于 $x\ge 0, y\ge 0$ 的部分。试将 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 化成先对 z 次对 x 再对 y 积分的三次积分式.

解: $\Omega: \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1, (x,y)\in D_{xy}$,

D_{xy}: $y=x$, $y=0$ 以及 $x^2+y^2=1$ 所围, (6 分)

$$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}dx\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$$ (9 分)

3、（本小题 9 分）

试求由 $x\le 2+\sqrt{y-1}$, $y\le 2x$, $y\ge 8-2x$ 所确定的平面图形的面积.

解: 由 $\begin{cases} x=2+\sqrt{y-1} \\ y=8-2x \end{cases}$,得交点 $(3,2)$

$\begin{cases} x=2+\sqrt{y-1} \\ y=2x \end{cases}$,得交点 $(5,10)$

$\begin{cases} y=2x \\ y=8-2x \end{cases}$,得交点 $(2,4)$ (3 分)

所以 $S=\int_2^3 dx\int_{8-2x}^{2x}dy+\int_3^5 dx\int_{(x-2)^2+1}^{2x}dy$ (7 分)

$=\int_2^3 4(x-2)dx+\int_3^5(6x-x^2-5)dx=\frac{22}{3}$. (9 分)