中国传媒大学

2011-2012 学年第二学期期中考试试卷

参考答案和评分标准

考试科目： 高等数学 A　　　　**课程编号：** 123002

考试班级： 2011 级工科各班　　　　**考试方式：** 闭卷

题目	一	二	三	四	总分
得分					

得分	评卷人

一. 单项选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中）（本大题共 4 小题，每小题 4 分，总计 16 分）

1、设非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行，$\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$，则(　　)

(A) $\vec{c} = \vec{0}$　　　　(B) $\widehat{(\vec{b},\vec{c})} < \dfrac{\pi}{2}$

(C) $\vec{c} \perp \vec{b}$　　　　(D) $\widehat{(\vec{b},\vec{c})} > \dfrac{\pi}{2}$　　　　答（ B ）

2、函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$。

(A) 处处连续　　　　(B) 处处有极限，但不连续

(C) 仅在（0,0）点连续　　　　(D) 除（0,0）点外处处连续　　　　答（ A ）

3、设$u = f(r)$,而$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，$f(r)$具有二阶连续导数，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$$

(A) $f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$　　(B) $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$

(C) $\frac{1}{r^2} f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$　　(D) $\frac{1}{r^2} f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$　　答（ B ）

4、若$f(x,2x) = x^2 + 3x, f_x'(x,2x) = 6x + 1$，则$f_y'(x,2x) =$

(A) $x + \frac{3}{2}$　　(B) $x - \frac{3}{2}$

(C) $2x + 1$　　(D) $-2x + 1$

答（D　）

得分	评卷人

二. 填空题（将正确答案填在横线上）（本大题共　5 小题，每小题 4 分，总计 24 分 ）

1、已知点$\boldsymbol{A(3,1,-2)}$和向量$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \{\boldsymbol{4,-3,1}\}$，则$B$点的坐标为____ (7，-2，-1) ___ 。

2、已知点$\boldsymbol{M_1(1,-1,2), M_2(3,3,1), M_3(3,1,3)}$在平面π上，$\vec{\boldsymbol{n}}$是π的单位法向量，

且$\vec{\boldsymbol{n}}$与z轴成锐角，则$\vec{\boldsymbol{n}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{17}}\{-3,2,2\}}$。

3、设函数$z = z(x, y)$由方程$2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 6xy - 14x - 6y + z + 4 = 0$确定，则函数$z$的驻点是 $\underline{(2，1)}$

4、曲面$\boldsymbol{x + x\,y + xyz = 9}$在点$(1,2,3)$处的切平面方程为$\underline{9x + 4y + 2z = 23}$

法线方程为$\underline{\frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}}$

5、曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$的名称是<u>旋转单叶双曲面</u>，它是由$yoz$平面上的曲线$\underline{\frac{y^2}{4}-z^2=1}$绕$z$轴旋转而产生的。

6、已知e^{t^2}, e^{-t^2}是微分方程$x''-\frac{1}{t}x'-4t^2x=0$的两个线性无关特解，则此方程的通解为: $\underline{x=C_1e^{t^2}+C_2e^{-t^2}}$其中$C_1, C_2$为任意常数。

得分	评卷人

三. 解答下列各题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，总计 48 分 ）

1、已知点$A(-3,1,6)$及点$B(1,5,-2)$，试在yoz面上求点P，使$|AP|=|BP|$，且点P到Oy, Oz轴等距离。

解

设点P为$(0,y,z)$ 。

$$\begin{cases} 9+(y-1)^2+(z-6)^2=1+(y-5)^2+(z+2)^2 \\ |y|=|z| \end{cases} \qquad (6\text{分})$$

得$y_1=z_1=2$， $-y_2=z_2=\frac{2}{3}$,

故所求点为$P_1(0,2,2)$或$P_2=(0,-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 。 (10 分)

2、过两点$M(0,4,-3)$和$N(6,-4,3)$作平面，使之不过原点，且使其在坐标轴上截距之和等于零，求此平面方程。

解

设平面方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{a+b}=1$ (4 分)

由过M, N点，则

$$\begin{cases} \dfrac{4}{b}+\dfrac{3}{a+b}=1 \\ \dfrac{6}{a}-\dfrac{4}{b}-\dfrac{3}{a+b}=1 \end{cases}$$

解得：$a=3, \qquad b=-2,6$ (7 分)

故平面方程为

$2x-3y-6z=6$ 或 $6x+3y-2z=18$ (10 分)

3、求微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 的一条积分曲线，使其在原点处与直线 $y=4x$ 相切。

解

方程的通解为

$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$ (4 分)

由已知 $y(0)=0, y'(0)=4$，代入上式得

$C_1=1, C_2=-1$ (8 分)

故所求积分曲线的方程为

$y=e^x-e^{-3x}$ (10 分)

4、设 $f(x,y)=x^2+(y^2-1)\tan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$**，求** $f_x(x,1)$ **。**

解

$f_x(x,1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$ (10 分)

或 $f_x(x,1)=2x+(y^2-1)\left(\tan\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)'_x\Big|_{(x,1)}=2x$

或 $f(x,1)=x^2, f_x'(x,1)=2x$

5、求函数$z=x^2+2y^2+xy-7y+6$的极值。

解

由$\begin{cases} z_x=2x+y=0 \\ z_y=4y+x-7=0 \end{cases}$，得驻点$(-1,2)$ (5分)

$$D=\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=7>0$$

$z_{xx}=2>0$ (8分)

函数z在点$(-1,2)$处取极小值$z(-1,2)=-1$。 (10分)

6、设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$，问$f_x(0,0)$与$f_y(0,0)$是否存在？若存在，求其值。

解

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$不存在

即 $f_x(0,0)$不存在 (5分)

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\Delta y=0$$

即 $f_y(0,0)=0$ (10分)

7、设函数$z=f(x,y)$满足关系式$f(tx,ty)=t^k f(x,y)$，试证$f(x,y)$能化成$z=x^kF\left(\frac{y}{x}\right)$的形式。

解

在$f(tx,ty)=t^k f(x,y)$中，令$t=\dfrac{1}{x}$

则$f(1,\dfrac{y}{x})=\dfrac{1}{x^k}f(x,y)$

所以$f(x,y)=x^k f(1,\dfrac{y}{x})$ (6分)

令$f(1,\dfrac{y}{x})=F(\dfrac{y}{x})$

所以$f(x,y)=x^k F(\dfrac{y}{x})$ (10分)

8、求欧拉方程 $x^2y''+xy'-9y=0$ 的通解。

解

令$x=e^t$做换元, (2分)

原方程变为

$D(D-1)y+Dy-9y=0$

即$D^2y-9y=0$

即$\dfrac{d^2y}{dt^2}-9y=0$ (1) (5分)

这是常系数线性方程,其特征方程为: $r^2-9=0$

所以，$r=3,-3$

所以方程(1)的通解为: $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}$，C_1,C_2任意.

将$t=\ln x$代入,得欧拉方程的通解为:

$y=C_1x^3+C_2x^{-3}, C_1, C_2$任意 (10分)

得分	评卷人

四．（本大题 12 分 ）

求函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点（1，1）处沿单位矢量 $\vec{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ 方向的方向导数，并求 α 分别取什么值时，沿 $\vec{l}$ 方向的方向导数最大，最小或等于零。

解

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = (2x-y)\Big|_{(1,1)} = 1 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} = (2y-x)\Big|_{(1,1)} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha = \{1,1\}\cdot\{\cos\alpha, \sin\alpha\} = \sqrt{2}\cos\varphi$$

其中 φ 为 $\vec{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ 与 $\vec{g} = \{1,1\}$ 的夹角　　　　(5 分)

所以 $\varphi = 0$ 时，即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l} = \sqrt{2}$ 取最大值；

$\varphi = \pi$ 时，即 $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ 时，　$\frac{\partial z}{\partial l} = -\sqrt{2}$ 取最小值；

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时，即 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial z}{\partial l} = 0$ ．(10 分)