中国传媒大学

2016—2017 学年第 二 学期期中考试试卷

考试科目：高等数学 A　　　　课程编码：123002

考试班级：2016 级工科各班、光电信息科学　　　　考试方式：闭卷

题目	一	二	三	四	五	总分
得分						

得分	评卷人

一、填空题（将正确答案填在横线上，本大题分 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 直线 $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+7}{5}$ 与平面 $3x+y-9z+17=0$ 的交点为 **(2,4,3)** 。

2. 设 $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $u_x^2+u_y^2=$ $\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}$

3. 一平面平分两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(3,-1,4)$ 间的线段且和它垂直，则此平面方程为__________。

答：$2x-3y+z-6=0$。

4.设 D：$x^2+y^2\le a^2$，由二重积分的几何意义知 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=$__________。

$\frac{2\pi}{3}a^3$

5. 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xoy 坐标平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases}2x^2+y^2-2x=8\\ z=0\end{cases}$ 。

6. 以向量$\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$和$\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}$为边的三角形的面积为______$\frac{75}{4}$______，其中$|\vec{m}|=5, |\vec{n}|=3$, m, n的夹角为$\frac{\pi}{6}$。

得分	评卷人

二、选择题（在四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题分 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=$ (C)

(A)等于 0；　(B)等于$\frac{1}{2}$；　(C)不存在；　(D)存在且不等于 0 或$\frac{1}{2}$。

2. 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y)}{xy} & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$，则$f'_x(0,1)=$（ A ）

（A） 1；　(B)不存在；　(C)0；　(D) -1。

3．设$f(x,y)$是连续函数，则二次积分$\int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1+x^2}}f(x,y)dy=$（ D ）

(A) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-1}^{\sqrt{y^2-1}}f(x,y)dx$；$(B)$ $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^2 dy\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}}f(x,y)dx$；$(D)$ $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1}f(x,y)dx+\int_1^{\sqrt{2}}dy\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}}f(x,y)dx$

4. 设$I=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$,其中$D$由$x^2+y^2=a^2$所围成,则$I=$(B).

(A)$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a a^2rdr=\pi a^4$；　(B)$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=\frac{1}{2}\pi a^4$；

(C)$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2dr=\frac{2}{3}\pi a^3$；　(D)$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a a^2\cdot adr=2\pi a^4$.

得分	评卷人

三、解答下列各题（本大题共 5 小题，每小题 8 分，总计 40 分）

1.（本小题 8 分）

求过直线$l_1:\begin{cases} x+y=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$，且平行于直线$l_2: x=y=z$ 的平面的方程。

解： l_1 对称式方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ 3 分

故所求平面法向量为

$$\bar{n}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\{3,-1,-2\}$$ 6 分

故所求平面方程为

$3x-y-2z-4=0$ 8 分

2.（本小题 8 分）

设 f 具有二阶连续偏导数，且 $z=f(x^2y,\dfrac{y}{x})$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1'-\dfrac{y}{x^2}f_2'$， 4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1'+2x^3yf_{11}''+yf_{12}''-\dfrac{1}{x^2}f_2'-\dfrac{y}{x^3}f_{22}''$。 8 分

3、**（本小题 8 分）**

求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离。

解：设 $P(x,y,z)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点，则 P 到平面 $x+y-2z=2$ 的距离为

$d=\dfrac{1}{\sqrt{6}}|x+y-2z-2|$，问题归结为求目标函数 $u=(x+y-2z-2)^2$ 在条件

$z=x^2+y^2$ 下的最小值， 3 分

构造拉格朗日函数：$F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$

令$\begin{cases} F'_x = 2(x+y-2z-2)-2\lambda x = 0 \\ F'_y = 2(x+y-2z-2)-2\lambda y = 0 \\ F'_z = -4(x+y-2z-2)+\lambda = 0 \\ F'_\lambda = z - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$，解得唯一驻点$x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{8}.$

由实际意义，最小值存在，所以$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right| = \frac{7}{4\sqrt{6}}$。 8分

4.（本小题 8 分）

设区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2 \le 1, x \ge 0)$，计算二重积分$I=\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$。

解：区域 D 关于x轴对称，

$$I=\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy+\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy \;,$$

积分$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$中，被积函数关于$y$为奇函数，故$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$，4 分

对另一积分$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$，采用极坐标计算，令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，

$$I=\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy+\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}dr = \frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln 2 \text{。}$$ 8分

5.（本小题 8 分）

设$\vec{n}$是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$P(1,1,1)$处指向外侧的法向量，求函数

$u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点 P 处沿$\vec{n}$的方向导数。

解：$\vec{n}=(4x\,,6y\,,2z)\big|_P = 2(2\,,3\,,1)$

方向余弦$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$ 3 分

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\sqrt{14}$$ 6 分

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\frac{1}{14}\left(6\times2+8\times3-14\times1\right)=\frac{11}{7}$$ 8 分

得分	评卷人

四、证明题（本大题共 3 小题，总计 20 分）

1.（本小题 6 分）

设四向量$\vec a,\vec b,\vec c,\vec d$的长度相等，且$\vec a+\vec b+\vec c+\vec d=\vec 0$，证明$(\widehat{\vec a,\vec b})=(\widehat{\vec c,\vec d})$.

解：$\vec a+\vec b=-(\vec c+\vec d)$

$$\left|\vec a+\vec b\right|^2=\left|\vec c+\vec d\right|^2$$

即 $\left|\vec a\right|^2+\left|\vec b\right|^2+2\vec a\cdot\vec b=\left|\vec c\right|^2+\left|\vec d\right|^2+2\vec c\cdot\vec d$ （3 分）

因$\left|\vec a\right|^2=\left|\vec b\right|^2=\left|\vec c\right|^2=\left|\vec d\right|^2$，故

$\cos(\widehat{\vec a,\vec b})=\cos(\widehat{\vec c,\vec d})$，即 $(\widehat{\vec a,\vec b})=(\widehat{\vec c,\vec d})$ （6 分）

2.（本小题 7 分）

证明：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$处连续，偏导数存在，但不可微。

证明：因为$xy\le\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，所以$0\le\left|f(x,y)\right|\le\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$，

$\therefore\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，即$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续； 2 分

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$ ，

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y}=0$, 4分

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。 7分

3.（本小题 7 分）

试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 在任一点 (x_0,y_0,z_0) 处（其中 $x_0>0,y_0>0,z_0>0)$ 的切平面在三个坐标轴上的截距之和为常数。

证明：令 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$,

切平面在任一点 (x_0,y_0,z_0) 的法向量 $(\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}},\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}},\dfrac{1}{2\sqrt{z_0}})$, 3分

切平面方程：$\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\dfrac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\dfrac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$,

整理得 $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}x+\dfrac{1}{\sqrt{y_0}}y+\dfrac{1}{\sqrt{z_0}}z-\sqrt{x_0}-\sqrt{y_0}-\sqrt{z_0}=0$,

即 $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}x+\dfrac{1}{\sqrt{y_0}}y+\dfrac{1}{\sqrt{z_0}}z=\sqrt{a}$, 5分

则三截距和 $\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=a$ 。 7分