2011–2012 高等数学 A 期中试卷

CUC Life Hack

I 单项选择题

1. 设非零向量 $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ 与 $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ 不平行，$\overrightarrow{\mathbf{c}} = (\overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}}) \times \overrightarrow{\mathbf{a}}$，则 $\underline{\text{B}}$.

(A) $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ (B) $\langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}} \rangle < \dfrac{\pi}{2}$ (C) $\overrightarrow{\mathbf{c}} \perp \overrightarrow{\mathbf{b}}$ (D) $\langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}} \rangle > \dfrac{\pi}{2}$

2. 函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x^2+y^2 \neq 0) \\ 0 & (x^2+y^2=0) \end{cases}$ $\underline{\text{A}}$.

(A) 处处连续 (B) 处处有极限，但不连续
(C) 仅在 $(0,0)$ 点连续 (D) 除 $(0,0)$ 点外处处连续

3. 设 $u = f(r)$，而 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f(r)$ 具有二阶连续导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \underline{\text{B}}$.

(A) $f''(r) + \dfrac{1}{r} f'(r)$ (B) $f''(r) + \dfrac{2}{r} f'(r)$
(C) $\dfrac{1}{r^2} f''(r) + \dfrac{1}{r} f'(r)$ (D) $\dfrac{1}{r^2} f''(r) + \dfrac{2}{r} f'(r)$

4. 若 $f(x,2x) = x^2 + 3x$，$f'_x(x,2x) = 6x+1$，则 $f'_y(x,2x) = \underline{\text{D}}$.

(A) $x + \frac{3}{2}$ (B) $x - \frac{3}{2}$ (C) $2x+1$ (D) $-2x+1$

II 填空题

1. 已知点 $A(3,1,-2)$ 和向量 $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \langle 4,-3,1 \rangle$，则 B 点的坐标为 $\underline{(7,-2,-1)}$.

2. 已知点 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$，$M_3(3,1,3)$ 在平面 π 上，$\overrightarrow{\mathbf{n}}$ 是 π 的单位法向量，且 $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ 与 z 轴成锐角，则 $\overrightarrow{\mathbf{n}} = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{17}}(-3,2,2)}$.

3. 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 6xy - 14x - 6y + z + 4 = 0$ 确定，则函数 z 的驻点是 $\underline{(2,1)}$.

4. 曲面 $x+xy+xyz=9$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面方程为 $\underline{9x+4y+2z=23}$，法线方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{2}}$.

5. 曲面 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1$ 的名称是 旋转单叶双曲面，它是由 yOz 平面上的曲线 $\dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1$ 绕 z 轴旋转产生的.

6. 已知 e^{t^2}, e^{-t^2} 是微分方程 $x'' - \dfrac{1}{t}x' - 4t^2 x = 0$ 的两个线性无关特解，则此方程的通解为 $\underline{x = C_1 e^{t^2} + C_2 e^{-t^2}}$，其中 C_1, C_2 为任意常数.

III 解答题

1. 已知点 $A(-3,1,6)$ 及点 $B(1,5,-2)$，试在 yOz 面上求点 P，使 $|AP| = |BP|$，且点 P 到 Oy, Oz 轴等距离.

解　设点 P 为 $(0,y,z)$.

$$\begin{cases}9+(y-1)^2+(z-6)^2=1+(y-5)^2+(z+2)^2,\\ |y|=|z|.\end{cases}$$

…………………………………………………………………………………… (6 分)

得 $y_1=z_1=2$, $-y_2=z_2=\dfrac{2}{3}$. 故所求点为 $P_1(0,2,2)$ 或 $P_2=(0,-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$. ………………… (10 分)

2. 过两点 $M(0,4,-3)$ 和 $N(6,4,-3)$ 作平面，使之不过原点，且使其在坐标轴上截距之和等于零，求此平面方程.

解　设平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{a+b}=1$. ……………………………………………… (4 分)

由过 M,N 点，则

$$\begin{cases}\dfrac{4}{b}+\dfrac{3}{a+b}=1,\\ \dfrac{6}{a}-\dfrac{4}{b}-\dfrac{3}{a+b}=1.\end{cases}$$

解得 $a=3,b=-2,6$. ………………………………………………………………… (7 分)

故平面方程为 $2x-3y-6z=6$ 或 $6x+3y-2z=18$. ……………………………………… (10 分)

3. 求微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 的一条积分曲线，使其在原点处与直线 $y=4x$ 相切.

解　方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}.$$

…………………………………………………………………………………… (4 分)

由已知 $y(0)=0$, $y'(0)=4$，代入上式得

$$C_1=1,\ C_2=-1.$$

…………………………………………………………………………………… (8 分)

故所求积分曲线的方程为

$$y=e^x-e^{-3x}.$$

…………………………………………………………………………………… (10 分)

4. 设 $f(x,y)=x^2+(y^2-1)\tan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解

$$f_x(x,1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$$

或

$$f_x(x,1)=2x+(y^2-1)\left(\tan\sqrt{\frac{x}{y}}\right)'_x\Bigg|_{(x,1)}=2x$$

或

$$f_x(x,1)=x^2,\ f_x'(x,1)=2x.$$

…………………………………………………………………………………… (10 分)

5. 求函数 $z=x^2+2y^2+xy-7y+6$ 的极值.

解　由 $\begin{cases} z_x=2x+y=0, \\ z_y=4y+x-7=0, \end{cases}$ 得驻点 $(-1,2)$. .... (5 分)

$$D=\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=7>0,$$
$$z_{xx}=2>0,$$

.... (8 分)
函数 z 在点 $(-1,2)$ 处取极小值 $z(-1,2)=-1$. .... (10 分)

6. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$，问 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 是否存在? 若存在，求其值.

解　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，即 $f_x(0,0)$ 不存在. .... (5 分)
$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta y=0$ 即 $f_y(0,0)=0$. .... (10 分)

7. 设函数 $z=f(x,y)$ 满足关系式 $f(tx,ty)=t^kf(x,y)$，试证 $f(x,y)$ 能化成 $z=x^kF\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的形式.

解　在 $f(tx,ty)=t^kf(x,y)$ 中，令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{1}{x^k}f(x,y)$. 所以 $f(x,y)=x^kf\left(1,\frac{y}{x}\right)$. .. (6 分)
令 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$，所以 $f(x,y)=x^kF\left(\dfrac{y}{x}\right)$. .... (10 分)

8. 求欧拉方程 $x^2y''+xy'-9y=0$ 的通解.

解　令 $x=e^t$ 做换元，.. (2 分)
原方程变为
$$\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y+\mathrm{D}y-9y=0,$$
即
$$\mathrm{D}^2y-9y=0, \tag{1}$$
即
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-9y=0.$$
.... (5 分)
这是常系数线性方程，其特征方程为：$r^2-9=0$. 所以，$r=\pm3$. 所以方程(1)的通解为：
$$y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t},$$
C_1，C_2 任意. 将 $t=\ln x$ 代入，得欧拉方程的通解为：
$$y=C_1x^3+C_2x^{-3},$$
C_1，C_2 任意. .... (10 分)

9. 求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿单位矢量 $\overrightarrow{\mathrm{l}}=\langle\cos\alpha,\sin\alpha\rangle$ 方向的方向导数，并求 α 分别取什么值时，沿 $\overrightarrow{\mathrm{l}}$ 方向的方向导数最大，最小或等于零.

解
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=(2x-y)|_(1,1)=1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=(2y-x)|_(1,1)=1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha = \langle 1, 1\rangle \cdot \langle \cos\alpha, \sin\alpha\rangle = \sqrt{2}\cos\varphi,$$

其中 φ 为 $\overrightarrow{\mathbf{l}} = \langle \cos\alpha, \sin\alpha\rangle$ 与 $\overrightarrow{\mathbf{g}} = \langle 1, 1\rangle$ 的夹角. ....（5 分）

所以 $\varphi = 0$ 时，即 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial l} = \sqrt{2}$ 取最大值；

$\varphi = \pi$ 时，即 $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial l} = -\sqrt{2}$ 取最小值；

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 时，即 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 或 $-\frac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial l} = 0$. ....（10 分）