Teorema de Bayes

Agosto 2012

Luis Casillas

Aparición…

- En 1763, luego de dos años de que Thomas Bayes murió, fue publicada una memoria en la que se explica, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de efectos que han podido ser observados.
- El cálculo de dichas probabilidades recibió el nombre de ***“Teorema de Bayes”***.

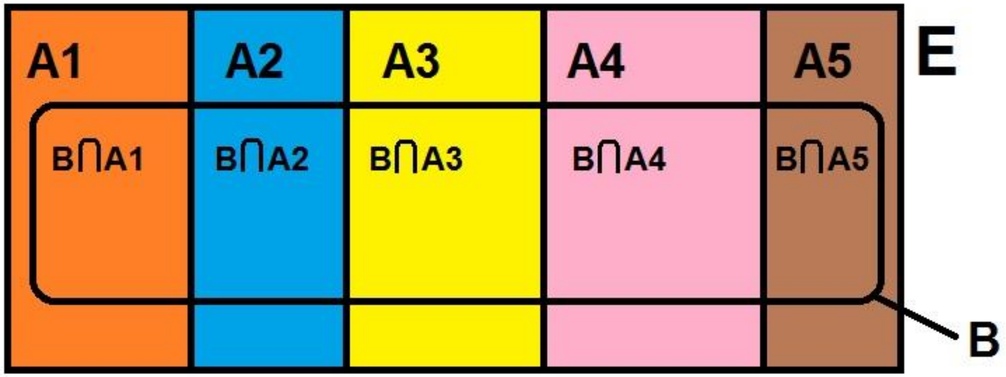
Teorema

- Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es diferente de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B / A_i)$. Así la probabilidad $P(A_i / B)$ es determinada por la expresión:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B / A_n)}$$

Entendimiento

- Puesto que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles (disjuntos), $A_1 U A_2 U \ldots U A_n = E$ *(espacio muestral)* y B es otro suceso:



- En la expresión:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B / A_k)}$$

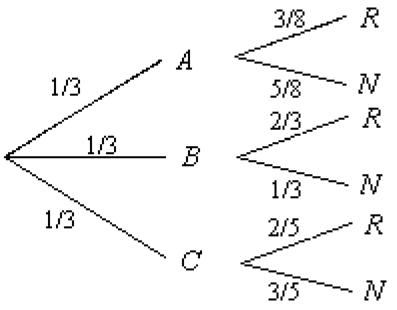
- $P(A_i)$ son probabilidades ***a priori***.
- $P(B / A_i)$ se conocen como **verosimilitudes**.
- $P(A_i / B)$ son probabilidades ***a posteriori***.

Ejemplo 1

- Hay tres urnas:
  - Urna **A** con 3 bolas rojas y 5 negras
  - Urna **B** con 2 bolas rojas y 1 negra
  - Urna **C** con 2 bolas rojas y 3 negras.
- Se elige una urna al azar y se extrae una bola. Si la bola ha es roja, ¿cuál es la probabilidad de que fue extraída de la urna A?

Solución

- Se entiende: R= "sacar bola roja" y N= "sacar bola negra". En el diagrama de árbol pueden verse las distintas probabilidades de ocurrencia de los sucesos R ó N para cada una de las tres urnas:



Continuación de ejemplo 1…

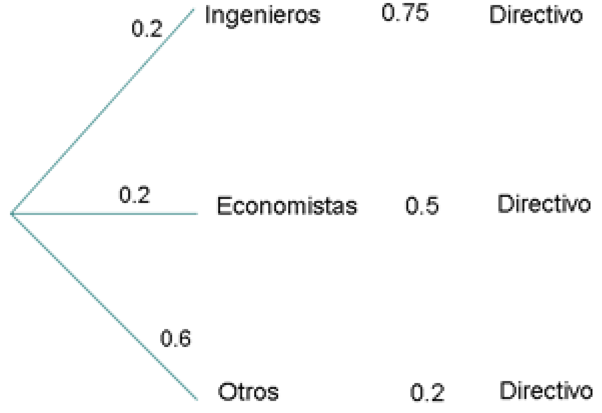
- La probabilidad solicitada es: P(A/R)
- Utilizando el Teorema de Bayes, se obtiene:

$$P(A/R) = \frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(A)\cdot P(R/A) + P(B)\cdot P(R/B) + P(C)\cdot P(R/C)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{1557}{3240}} = \frac{0.125}{0.48} = 0.26$$

Ejemplo 2

- El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

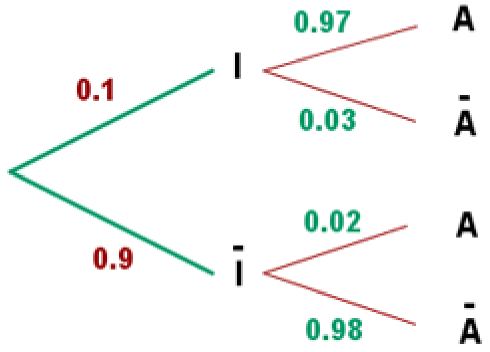


$$P(Ingeniero / Directivo) = \frac{0.2 \cdot 0.75}{0.2 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.2} = 0.405$$

Ejemplo 3

- La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que suene esta si se ha producido algún incidente es de 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0.02. En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Sean los sucesos:
I = Producirse incidente.
A = Sonar la alarma.



$$P(\bar{I}/A) = \frac{0.9 \cdot 0.02}{0.1 \cdot 0.97 + 0.9 \cdot 0.02} = 0.157$$

Ejemplo 4

- El reporte del servicio meteorológico ha anunciado tres posibilidades para el fin de semana:
  - **Que llueva**: probabilidad del 50%
  - **Que nieve**: probabilidad del 30%
  - **Que haya niebla**: probabilidad del 20%
- Considerando estos estados meteorológicos, la posibilidad de que ocurra un accidente para cada estado es la siguiente:
  - **Si llueve:** probabilidad de accidente del 10%
  - **Si nieva:** probabilidad de accidente del 20%
  - **Si hay niebla:** probabilidad de accidente del 5%

Continuación de ejemplo 4…

- Ocurre un accidente y se desea conocer el clima que había (¿llovió, nevó o hubo niebla?) en el momento del accidente.
- El Teorema de Bayes permite calcular estas probabilidades:
- Probabilidad de que estuviera lloviendo:

$$P(Lloviendo/Accidente) = \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.05} = \frac{0.05}{0.12} = 0.417$$

- Probabilidad de que estuviera nevando:

$$P(Nevando/Accidente) = \frac{0.3 \cdot 0.2}{0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.05} = \frac{0.05}{0.12} = 0.5$$

- Probabilidad de que hubiera niebla:

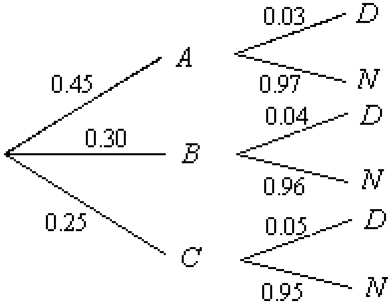
$$P(Niebla/Accidente) = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.05} = \frac{0.01}{0.12} = 0.083$$

Ejemplo 5

- Tres máquinas, A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del A: 3%, B: 4% y C: 5%.
- Seleccionando una pieza al azar, calcular la probabilidad de que sea defectuosa.
- Tomando, al azar, una pieza que resulta ser defectuosa; calcular la probabilidad de haber sido producida por la máquina B.
- ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

Solución

- Sea D= "la pieza es defectuosa" y N= "la pieza no es defectuosa". La información del problema puede expresarse en el diagrama de árbol adjunto.
- Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, P(D), por la propiedad de la probabilidad total: $P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = 0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05 = 0.038$



Continuación de ejemplo 5…

- Calcular *P(B/D)* por el Teorema de Bayes:

$$P(B/D)=\frac{P(B)\cdot P(D/B)}{P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)}$$

$$=\frac{0.3\cdot 0.04}{0.45\cdot 0.03+0.3\cdot 0.04+0.25\cdot 0.05}=\frac{0.012}{0.038}=0.316$$

- Ahora calcular P(A/D) y P(C/D) similarmente, para compararlo con el valor de P(B/D) ya calculado. Aplicar el Teorema de Bayes:

$$P(A/D)=\frac{0.45\cdot 0.03}{0.45\cdot 0.03+0.3\cdot 0.04+0.25\cdot 0.05}=\frac{0.0135}{0.038}=0.355$$

$$P(C/D)=\frac{0.25\cdot 0.05}{0.45\cdot 0.03+0.3\cdot 0.04+0.25\cdot 0.05}=\frac{0.0125}{0.038}=0.329$$

- De este modo, una pieza defectuosa elegida al azar, tiene una probabilidad mayor de haber sido producida por la máquina A

Teorema de Bayes

- Gracias ☺

- Fuentes consultadas:
  - http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/
  - http://www.aulafacil.com/CursoEstadistica/
  - http://www.vitutor.com/pro/