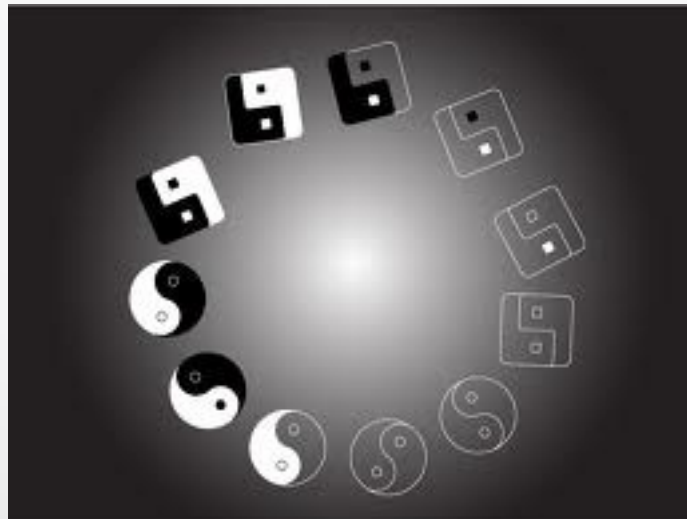


Nociones de Lógica Difusa

Luis Alberto Casillas Santillán
DCC, CUCEI, UdeG

Febrero - Marzo 2013
Actualizado Diciembre 2013



Fundamentos¹...

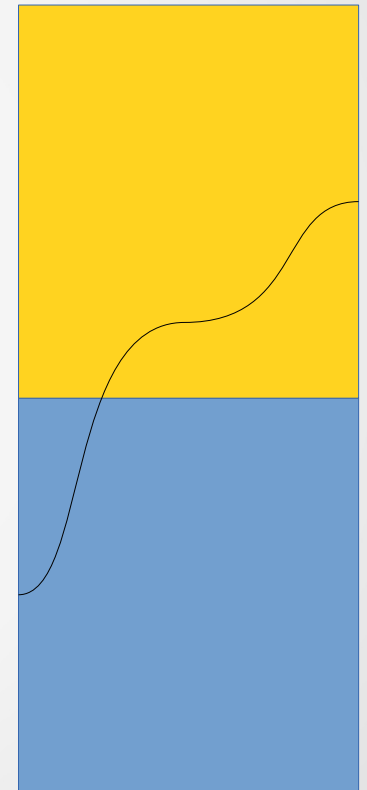
- 500 A.C. Buddha sienta las bases de la lógica difusa, al afirmar que la realidad está llena de contradicciones. La esencia del **Budismo**. Que prácticamente todo implica el opuesto y es así como se justifica la existencia mutua de éstos. De hecho, esto significa que **A** y **no A** son lo **mismo**.
- Casi en el mismo periodo, Hermes Trimigesto sintetiza el pensamiento egipcio (filosofía, ciencia, tecnología, medicina, religión y hasta magia) en un sólo saber: **Hermetismo**. Principios como: Mentalismo, Correspondencia, Vibración, Polaridad, Ritmo, Causa-Efecto, etcétera; están fuertemente vinculados al pensamiento difuso. Grupos “ocultos” conservaron este saber...
- 300 A.C. Aristóteles establece las bases de la lógica binaria. En una visión inesperada, entiende el mundo como opuestos desvinculados: Luz y Oscuridad, Femenino y Masculino, Frío y Caliente, etc. Sin admitir que esos opuestos son lo mismo. Para él, **A** y **no A** son cosas **diferentes**. Este entendimiento de la realidad es conocido como **Lógica Aristotélica** y fue adoptada por toda la cultura griega.
- En los siglos siguientes el Budismo se convirtió en una religión en Asia, el Hermetismo en una práctica “ocultista” en Asia y Europa... y la Lógica Aristotélica la base del desarrollo científico en Europa.

Fundamentos²...

- George Bool, nacido en 1815, desarrolla una visión pragmática para la lógica. De origen humilde, sus padres no pudieron costear estudios universitarios. Aprendió por sus medios.
 - Bool propuso una aproximación simbólica para ideas que solían tratarse como discursos, tenía como fin último la designación de los valores **Verdadero** y **Falso** a argumentos que son contruidos usando tres operadores: *AND*, *OR* y *NOT* más algunos paréntesis para expresar precedencias en el tratamiento. Todo este modelo se denomina **Álgebra Booleana**.
 - Sus esfuerzos fueron contemporáneos a los emprendidos por Charles Babbage y Ada Byron (Condesa de Lovelace). No obstante no tuvieron conocimiento mutuo de sus trabajos.

Fundamentos³...

- Claude E. Shannon fue el primero que formuló la **Teoría de la Información** en su trabajo "*A mathematical theory of communication*" (1948).
- La medida que él utilizó, el bit, permitió la definición cuantitativa de causalidades que hasta ahora no había sido posible expresar de una forma matemática exacta.
- Considerando que el medio será propenso a distorsionar el mensaje en el transcurso, la representación binaria provee robustez. Si el espectro tiene más graduaciones, la entropía puede llegar a producir errores en la interpretación. Por ello el sistema booleano es preferible para transferir y almacenar datos. La base de la era digital...
- El precio es que esta representación tiene la desventaja de desvincular de semántica al mensaje, al no incluir inherentemente significado, identidad del emisor y del destinatario, motivo de la transmisión, etc.



Fundamentos⁴...

- En 1965 Lotfi Asker Zadeh propone una lógica valorada infinitamente, en contraparte de la **Lógica Aristotélica** y su representación simbólica en el **Álgebra Booleana**.
- Aparentemente en contra de lo recomendado por la **Teoría de la Información**. No obstante, esta idea no es del todo nueva... pues en principio los humanos procesamos naturalmente el mundo valorando en un continuo las experiencias. Del mismo modo corrientes filosóficas como las expresadas antiguamente por varios personajes en el oriente son afines a esta perspectiva...
- ¿Dónde está lo nuevo? Que esta aproximación fue deliberadamente pensada para contrarrestar los efectos adversos que tiene la discretización que hacen las máquinas a los datos para poder procesarlos; lo que produce pérdidas.

Definiciones¹

- En ocasiones, la perspectiva o concepción de la lógica tradicional para procesar racionalmente el entorno; es insuficiente por ser demasiado polarizada.
- Con sólo dos opciones discretas (verdadero [1] y falso [0]) para evaluar las manifestaciones de la realidad, parece ser inadecuada para describir algunos de los razonamientos humanos.
- La lógica difusa utiliza todo el intervalo entre falso [0] y verdadero [1] de manera no discreta, un continuo de valores que representan la noción del Grado de Verdad (GV).
- Así el $GV \in [0,1] \in \mathbb{R}$

Definiciones²

- Al transferir estas percepciones de la lógica a la Teoría de Conjuntos, se observa que en la perspectiva más clásica una entidad de la realidad (concreta o abstracta) **pertenece** o **no pertenece** a un conjunto a partir de la evaluación binaria {Falso: 0, Verdadero: 1} de un conjunto de reglas de pertenencia.
- En este contexto, la noción difusa de la pertenencia a un conjunto implica que una entidad de la realidad (concreta o abstracta) tendrá un nivel de pertenencia a dicho conjunto dentro del intervalo continuo $[0, 1] \in \mathbb{R}$.
- Lo que significa que es admitida solamente una pertenencia parcial, ubicada en algún punto entre los extremos. Situación que modela mejor situaciones frecuentes en fenómenos de la realidad y en la conducta o manifestación de las personas.

Ejemplos de conjuntos convencionales

- El conjunto de los enteros no negativos menores de cuatro. Conjunto finito con cuatro miembros.
- El conjunto de los dinosaurios vivos alojados en el Zoológico de Guadalajara. Conjunto sin miembros, llamado conjunto vacío.
- El conjunto de medidas mayores a 10 voltios. Aunque este conjunto es infinito, es posible determinar si una medida dada es miembro o no.

Ejemplos de conjuntos difusos

- El conjunto de gente joven: Un niño de un año pertenece, definitivamente, a este conjunto y un hombre de 100 no pertenece, pero ¿qué pasa con la gente con 20, 30 ó 40?. Cada cultura tiene nociones diferentes para calificar cualitativamente estas edades.
- El reporte del clima para las temperaturas, vientos o días bonitos. Siempre es impreciso debido a la complejidad para emitir una evaluación concreta y 100% certera. Hay muchas variables...
- Las velocidades logradas cuando se busca ir a 60 Km/h. En el intento de conducir a una cierta velocidad, un conductor (incluso si es un piloto automático) logra velocidades que rondan la velocidad buscada, pero no es posible estar por mucho tiempo así, pues las condiciones cambiantes del camino y de manejo producirán multiplicidad de valores.

Elementos¹

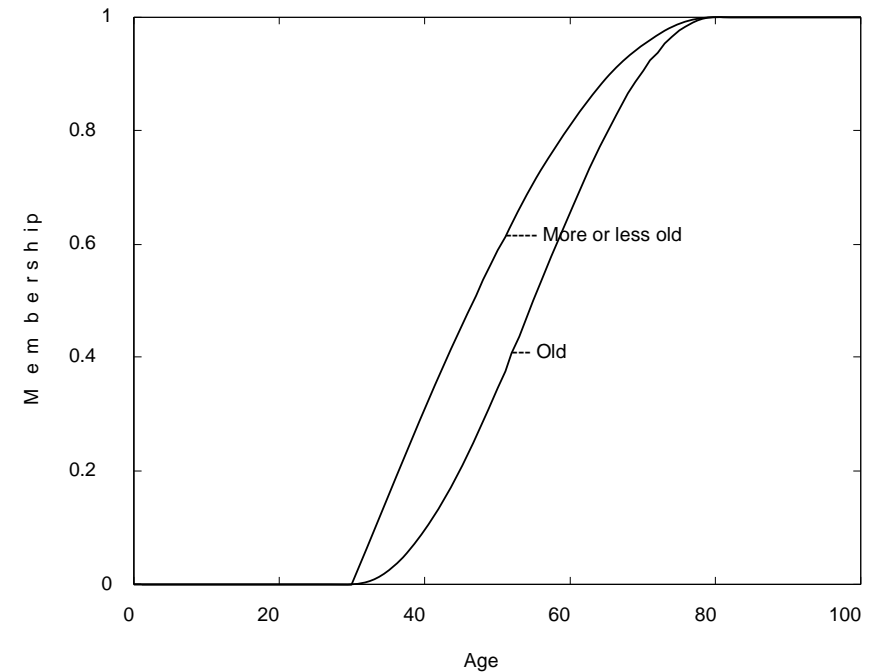
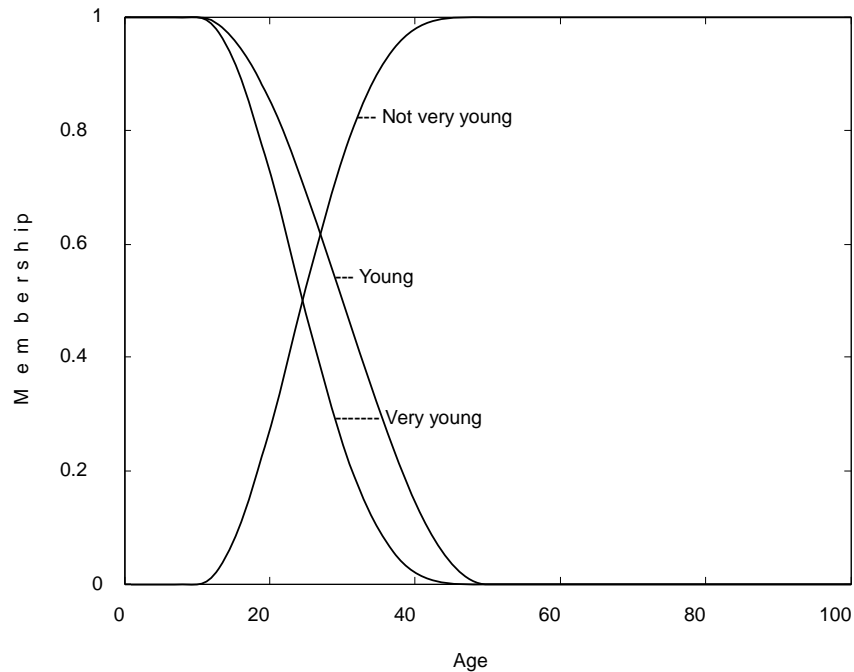
- **Universo de discurso:** El conjunto de entidades que serán sometidas a procesos de clasificación en búsqueda de definir su identidad.
- **Conjuntos difusos:** Modelos matemáticos que describen por medios geométricos las posibilidades de pertenencia que tienen los elementos del universo de discurso.
- **Función de pertenencia:** Fuertemente vinculada a la topología del conjunto difuso correspondiente, es el medio a través del cual se conoce formalmente el grado con que cada uno de los elementos del universo de discurso, pertenece a un conjunto difuso.

Elementos²

- **Variables lingüísticas:** Tal como en álgebra una variable toma números como sus valores, estas variables toman palabras u oraciones como sus valores, lo cual permite hacer una manipulación más cómoda (simbólica) de la realidad. Permiten un tratamiento cualitativo y declarativo de los fenómenos observados.
- **Paquete de Pertenencia:** Estructura compacta que contiene emparejados a un elemento del universo de discurso y el grado de membresía que tiene dicho elemento a un determinado conjunto difuso: $[x, \mu(x)]$. Donde x es el elemento observado del universo de discurso y $\mu(x)$ es el grado de membresía que tiene x a un conjunto difuso determinado.

Un ejemplo...

- Percepción de la edad de Jantzen



Algunas funciones de pertenencia¹

Función Γ (Gamma, Trapecio Abierto Derecha)

$\Gamma: U \rightarrow [0, 1], \Gamma(u; \alpha, \beta)$

$\Gamma(u; \alpha, \beta) = \{ 0 \text{ si } u < \alpha, (u - \alpha) / (\beta - \alpha) \text{ si } \alpha \leq u \leq \beta, 1 \text{ si } u > \beta \}$



Algunas funciones de pertenencia²

Función L (Trapezio Abierto Izquierda)

$L: U \rightarrow [0, 1], L(u; \alpha, \beta)$

$L(u; \alpha, \beta) = \{ 1 \text{ si } u < \alpha, (\alpha - u)/(\beta - \alpha) \text{ si } \alpha \leq u \leq \beta, 0 \text{ si } u > \beta \}$

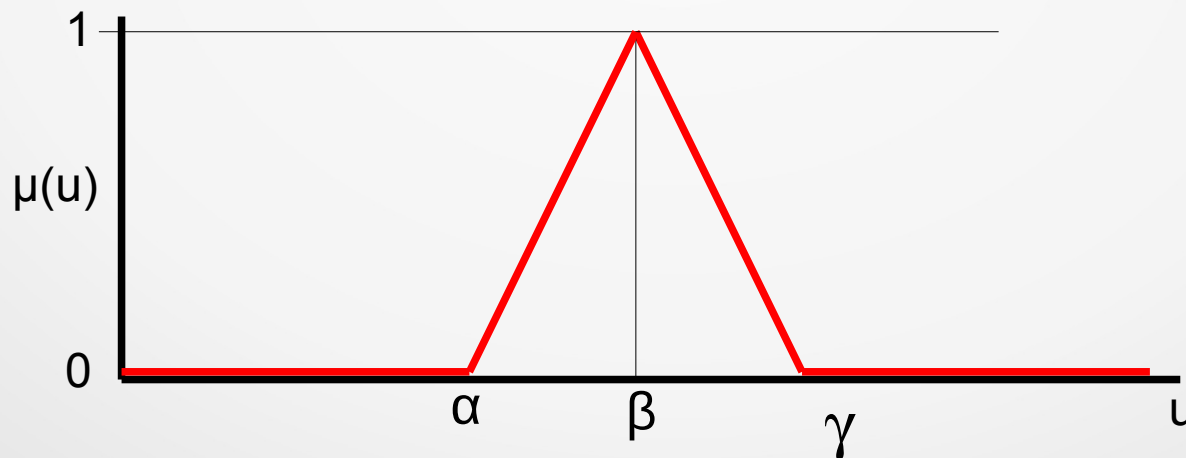


Algunas funciones de pertenencia³

Función Λ (Lambda, Triangular)

$\Lambda: U \rightarrow [0, 1], \Lambda(\alpha, \beta, \gamma)$

$\Lambda(\alpha, \beta, \gamma) = \{ 0 \text{ si } u < \alpha, (u-\alpha)/(\beta-\alpha) \text{ si } \alpha \leq u \leq \beta, \\ (\gamma-u)/(\gamma-\beta) \text{ si } \beta \leq u \leq \gamma, 0 \text{ si } u > \gamma \}$

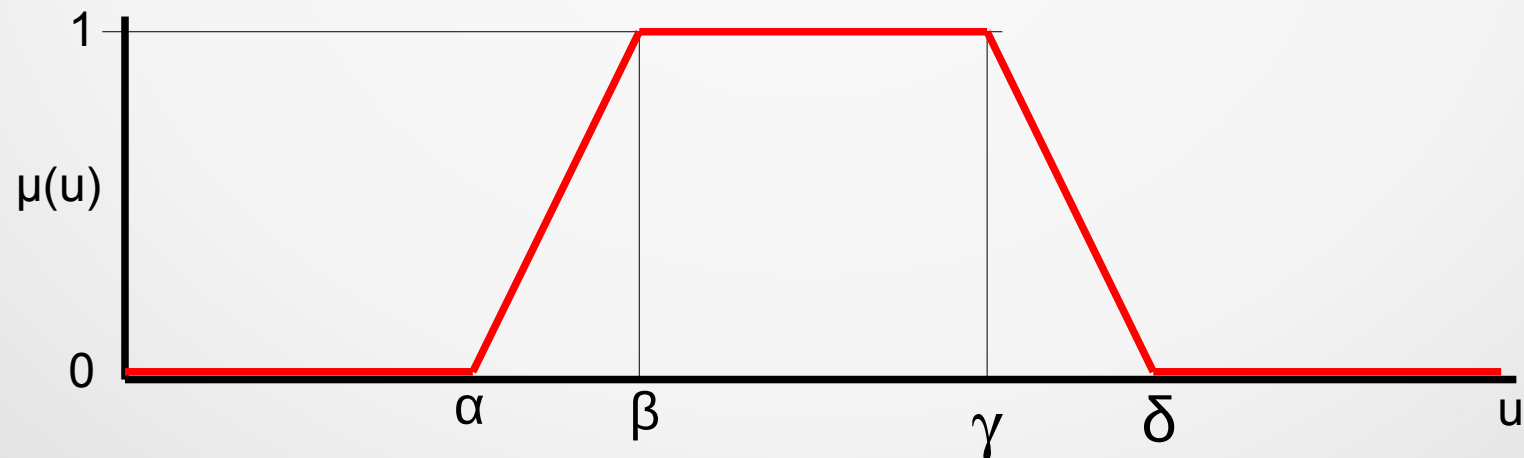


Algunas funciones de pertenencia⁴

Función Π (Pi, Trapecio)

$\Pi: U \rightarrow [0, 1], \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

$\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \{ 0 \text{ si } u < \alpha, (u-\alpha)/(\beta-\alpha) \text{ si } \alpha \leq u < \beta, 1 \text{ si } \beta \leq u \leq \gamma$
 $(\delta-u)/(\delta-\gamma) \text{ si } \gamma < u \leq \delta, 0 \text{ si } u > \delta \}$

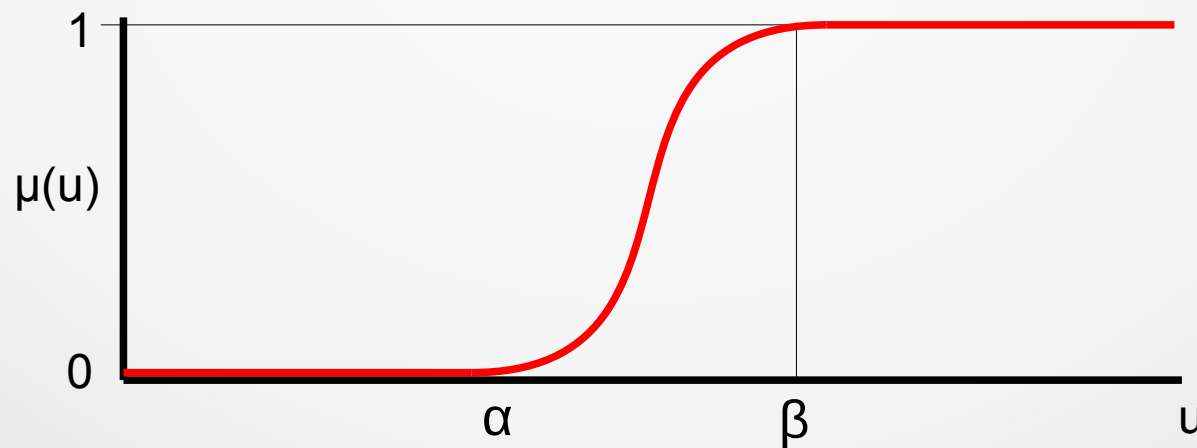


Algunas funciones de pertenencia⁵

Función S

$S: U \rightarrow [0, 1], S(u; \alpha, \beta)$

$S(u; \alpha, \beta) = \{ 0 \text{ si } u < \alpha, 0.5 * (1 + \cos(((u - \beta) / (\beta - \alpha)) * \pi)) \text{ si } \alpha \leq u \leq \beta, 1 \text{ si } u > \beta \}$



Algunas funciones de pertenencia⁶

Función Z

$Z: U \rightarrow [0, 1], Z(u; \alpha, \beta)$

$Z(u; \alpha, \beta) = \{ 1 \text{ si } u < \alpha, 0.5 * (1 + \cos(((u - \alpha) / (\beta - \alpha)) * \pi)) \text{ si } \alpha \leq u \leq \beta, 0 \text{ si } u > \beta \}$

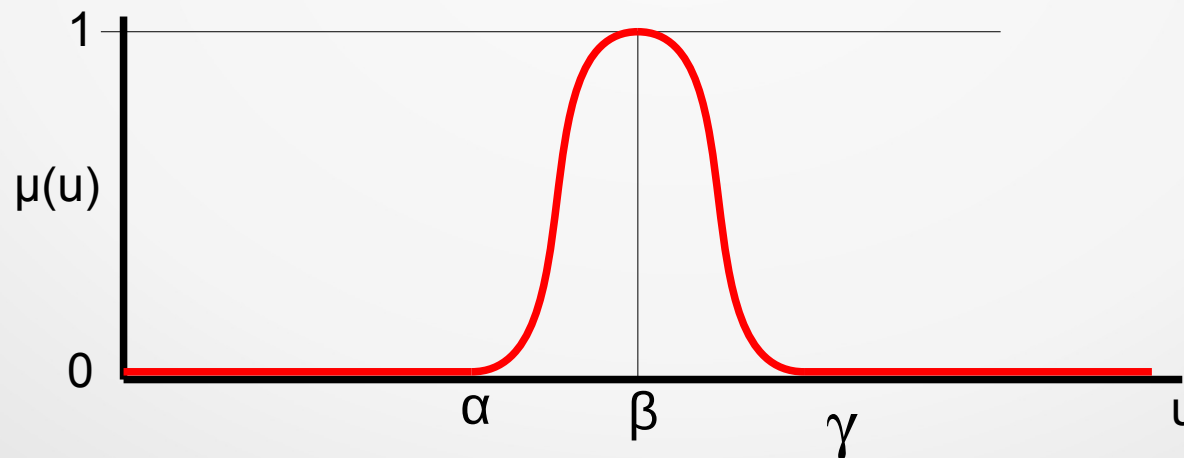


Algunas funciones de pertenencia⁷

Función $S\Lambda$ (Soft Lambda, Triangular Suave)

$S\Lambda: U \rightarrow [0, 1], S\Lambda(\alpha, \beta, \gamma)$

$S\Lambda(\alpha, \beta, \gamma) = \{ 0 \text{ si } u < \alpha, 0.5*(1+\cos(((u-\beta)/(\beta-\alpha))*\pi)) \text{ si } \alpha \leq u \leq \beta, \\ 0.5*(1+\cos(((u-\beta)/(\gamma-\beta))*\pi)) \text{ si } \beta \leq u \leq \gamma, 0 \text{ si } u > \gamma \}$

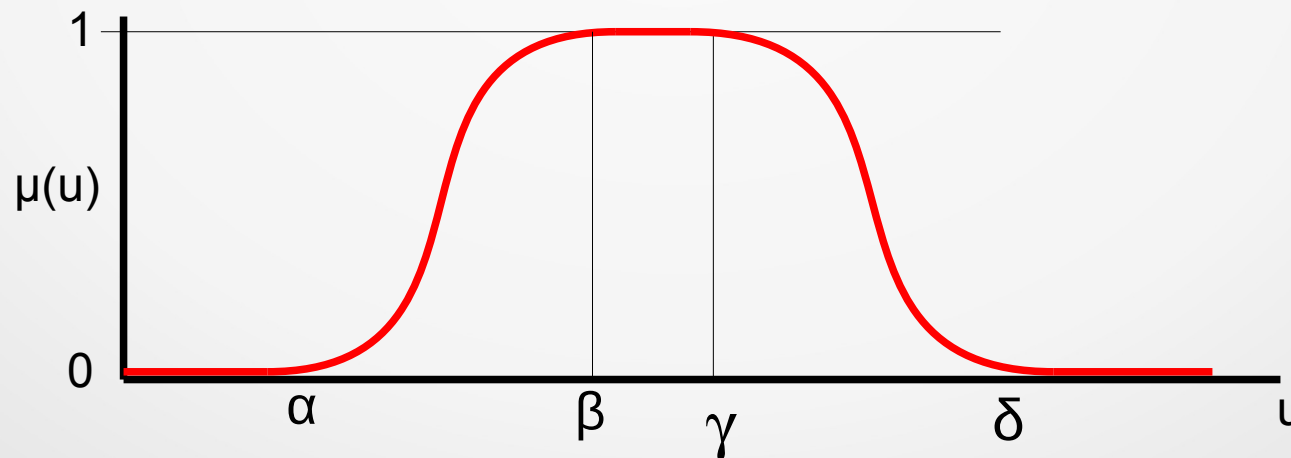


Algunas funciones de pertenencia⁸

Función SΠ (Soft Pi, Trapecio Suave)

SΠ: $U \rightarrow [0, 1]$, SΠ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

$$\text{S}\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \{ 0 \text{ si } u < \alpha, 0.5*(1+\cos(((u-\beta)/(\beta-\alpha))*\pi)) \text{ si } \alpha \leq u \leq \beta, \\ 1 \text{ si } \beta \leq u \leq \gamma, 0.5*(1+\cos(((u-\gamma)/(\delta-\gamma))*\pi)) \text{ si } \gamma \leq u \leq \delta, \\ 0 \text{ si } u > \delta \}$$



Operadores difusos¹

- Con el fin de realizar los mecanismo de inferencia difusa, son requeridas como insumo las variables que fueron procesadas de forma difusa (*fuzzyfied* :: *fuzzificadas*) para producir conclusiones.
- Así como se realiza en la lógica tradicional, que utiliza operaciones de conjunción, la disyunción, complemento, implicación, etcétera; la versión difusa utiliza estas mismas operaciones, sólo que en este enfoque deben ser considerados, para el proceso, los grados de membresía que se han producido al *fuzzificar* las variables de entrada.
- Es, por tanto, necesario definir la manera en que funcionan estos operadores en el contexto de la lógica difusa, así como los resultados que éstos generan.

Operadores difusos² : Normas T

- Las Normas T son vinculadas a la operación lógica: Conjunción.
- Las propiedades del operador **T** son las siguientes:
 - T1 : $T(a,b) = T(b,a) ::$ Conmutabilidad
 - T2 : $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c)) ::$ Asociatividad
 - T3 : $(a \leq c) \wedge (b \leq d) \rightarrow T(a,b) \leq T(c,d) ::$ Monotonicidad
 - T4 : $T(a,1)=a ::$ Identidad

Operadores difusos³ : Normas S

- Las Normas S son vinculadas a la operación lógica: Disyunción. También son conocidas como *Conormas T*
- Las propiedades del operador **S** son las siguientes:
 - S1 : $S(a,b) = S(b,a) ::$ Conmutabilidad
 - S2 : $S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c)) ::$ Asociatividad
 - S3 : $(a \leq c) \wedge (b \leq d) \rightarrow S(a,b) \leq S(c,d) ::$ Monotonicidad
 - S4 : $S(a,0)=a ::$ Identidad

Operadores difusos⁴ : Complemento

- El operador de complemento C , como en la teoría tradicional de conjuntos, provee la parte complementaria de un conjunto respecto del universo de discurso; sólo que en este caso considerando grado de membresía.
- Las propiedades del operador C son las siguientes:
 - $C1 : C(0) = 1$
 - $C2 : a < b \rightarrow C(a) > C(b)$
 - $C3 : C(C(a)) = a$

Operadores difusos⁵ : Propuesta de Zadeh

- Conjunción / Intersección
 - $\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u))$
- Disyunción / Unión
 - $\mu_{A \cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u))$
- Complemento
 - $\mu_{A'}(u) = 1 - \mu_A(u)$

Inferencia difusa¹

- Es el mecanismo que vincula los antecedentes con los consecuentes. Es decir, las variables de entrada con las variables de salida.
- Puede ser cualitativa o cuantitativa. La versión cualitativa permite principalmente la clasificación, mientras la cuantitativa es más orientada al control automático. Aunque este entendimiento no es restrictivo, pues podría ser cualitativa en control y cuantitativa en clasificación.

Inferencia difusa²

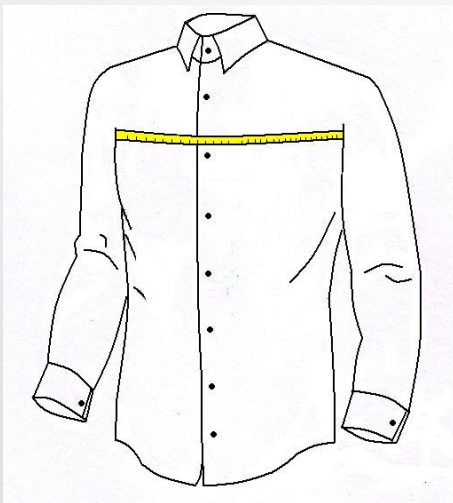
- Implicación de Zadeh :
 - $\mu_{z(A \rightarrow B)}(x,y) = \max(\min(\mu_A(x), \mu_B(y)), 1-\mu_A(x))$
- Implicación de Mamdani :
 - $\mu_{m(A \rightarrow B)}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$
- Implicación de Gödel :
 - $\mu_{g(A \rightarrow B)}(x, y) = \{ 1 \text{ si } \mu_A(x) \leq \mu_B(y); \mu_B(y) \text{ en otro caso } \}$

Un ejemplo práctico...

- Decidir talla de camisa...

Medir pecho

- El rango para esta medida es:
 - 34" - 56"



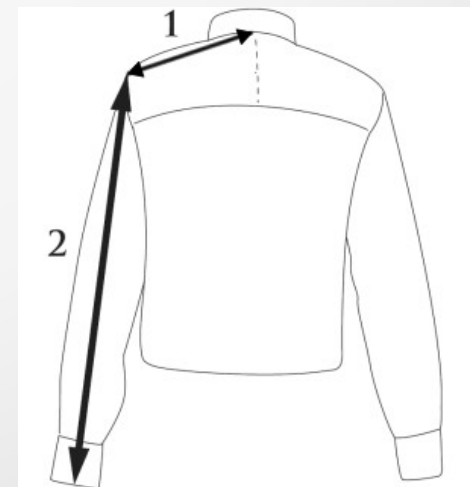
Medir cuello

- El rango para esta medida es:
 - 14.5" - 20"

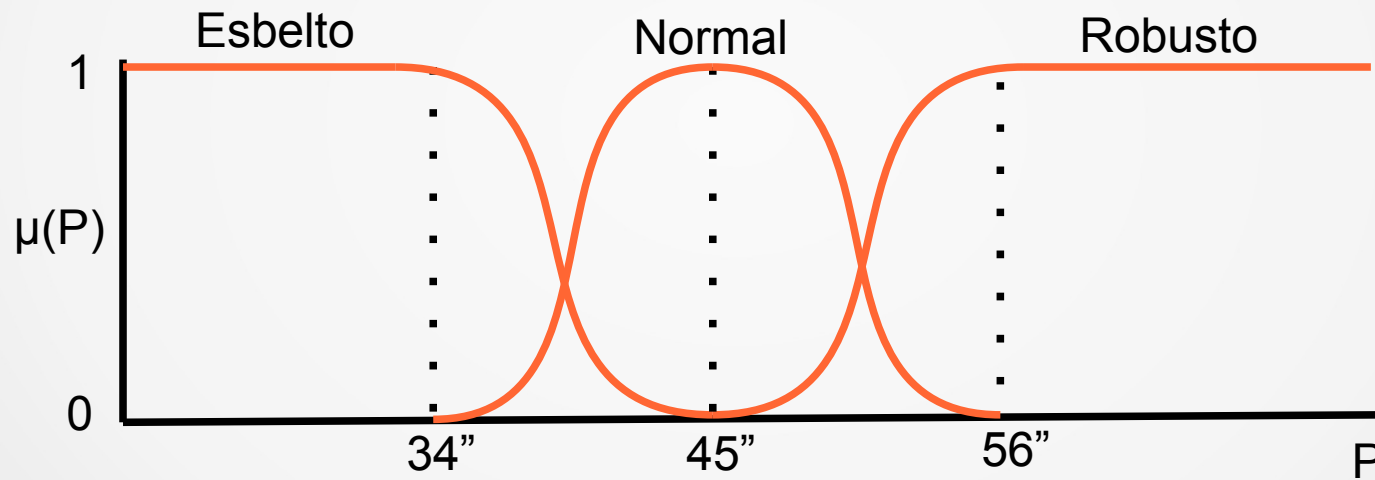


Medir manga

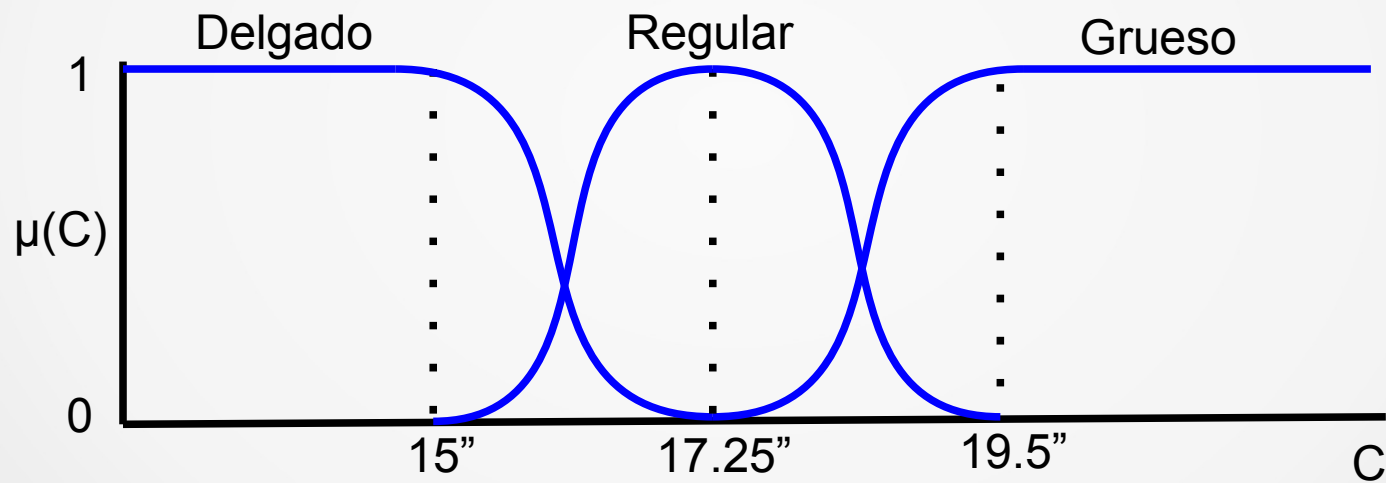
- El rango para esta medida es:
 - 30" - 39"



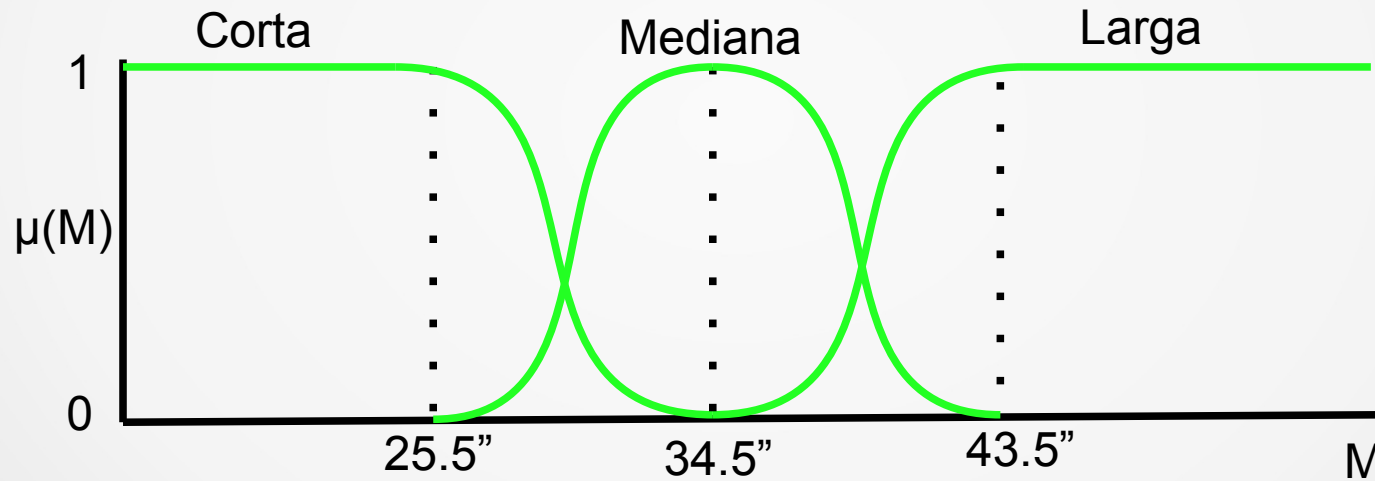
Variables de Entrada¹ : Pecho (P)



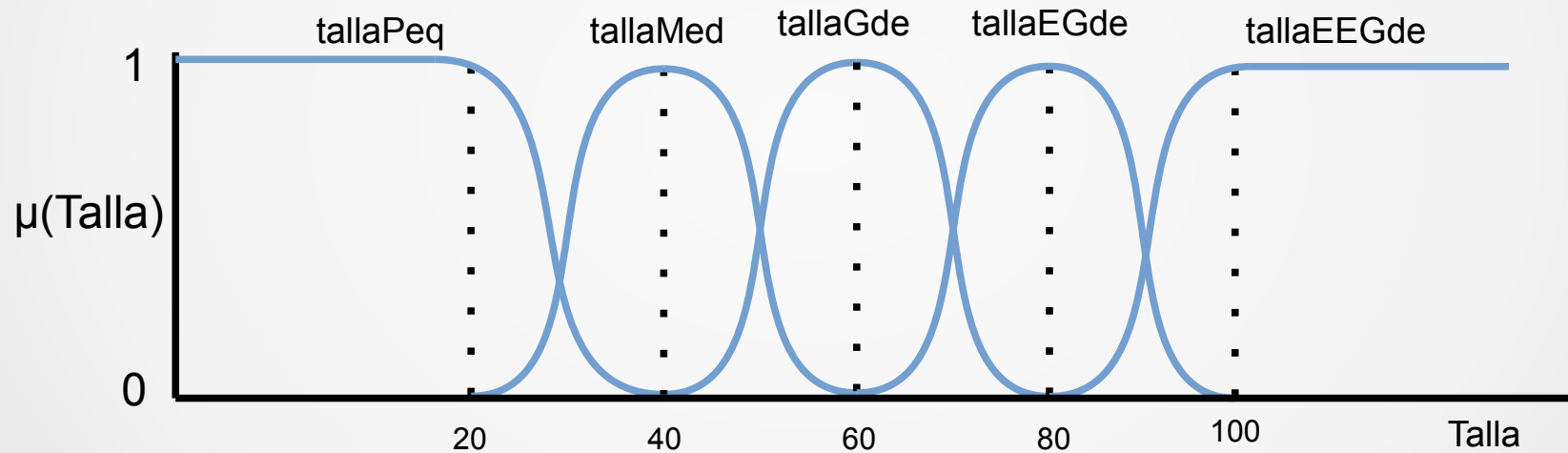
Variables de Entrada² : Cuello (C)



Variables de Entrada³ : Manga (M)



Variable de Salida : Talla



Reglas de inferencia aplicables

		Manga			
		Corta	Mediana	Larga	
Cuello	Delgado	<i>tallaPeq</i>	<i>tallaMed</i>	<i>tallaGde</i>	Esbelto
	Regular	<i>tallaMed</i>	<i>tallaGde</i>	<i>tallaGde</i>	Normal
	Grueso	<i>tallaEGde</i>	<i>tallaEGde</i>	<i>tallaEEGde</i>	Robusto
					Pecho

Reglas Inferencia Cualitativa¹

// Regla de inferencia difusa #1

Si ((cuello="Delgado" o pecho="Esbelto") y manga="Corta") entonces
talla="TallaPequeña"

// Regla de inferencia difusa #2

Si ((cuello="Delgado" o pecho="Esbelto") y manga="Mediana") entonces
talla="TallaMediana"

// Regla de inferencia difusa #3

Si ((cuello="Delgado" o pecho="Esbelto") y manga="Larga") entonces
talla="TallaGrande"

// Regla de inferencia difusa #4

Si ((cuello="Regular" o pecho="Normal") y manga="Corta") entonces
talla="TallaMediana"

// Regla de inferencia difusa #5

Si ((cuello="Regular" o pecho="Normal") y manga="Mediana") entonces
talla="TallaGrande"

Reglas Inferencia Cualitativa²

// Regla de inferencia difusa #6

Si ((cuello="Regular" o pecho="Normal") y manga="Larga") entonces
talla="TallaGrande"

// Regla de inferencia difusa #7

Si ((cuello="Grueso" o pecho="Robusto") y manga="Corta") entonces
talla="TallaExtraGrande"

// Regla de inferencia difusa #8

Si ((cuello="Grueso" o pecho="Robusto") y manga="Mediana") entonces
talla="TallaExtraGrande"

// Regla de inferencia difusa #9

Si ((cuello="Grueso" o pecho="Robusto") y manga="Larga") entonces
talla="TallaExtraExtraGrande"

Inferencia Difusa Cuantitativa

- // El cálculo se ha colocado una sola vez, puesto que es estructuralmente el mismo para todas las reglas. Si fuera distinto en las reglas, cada una debería llevarlo:

NivMemTalla=

$\min(\max(\text{nivMemCuello}, \text{nivMemPecho}), \text{nivMemManga});$

- Este cálculo produce el nivel de certeza para la evaluación cualitativa previa...

Desfuzzificación¹

- Con el fin de realizar alguna respuesta de control, es posible desfuzzificar la respuesta difusa que el sistema produce.
- En este caso, elegir una camisa específica por número directo y NO por una talla genérica: tallaPeq, tallaMed, tallaGde, etc.

Desfuzzificación²

```
switch(tallaDifuso){  
    case "CamisaTallaPequeña":return nivCertTalla*20;  
    case "CamisaTallaMediana":return nivCertTalla*40;  
    case "CamisaTallaGrande":return nivCertTalla*60;  
    case "CamisaTallaExtraGrande":return nivCertTalla*80;  
    case "CamisaTallaExtraExtraGrande":return nivCertTalla*100;  
}
```

Los valores 20, 40, 60, etc. son colocados como un *Singleton* de acuerdo a Michio Sugeno. Es un valor representativo del conjunto difuso observado. Evita la necesidad de integrar el área del conjunto en tiempo real. Un enfoque práctico muy frecuente en la lógica difusa.

Resultados del sistema¹

- C:16 P:45 M:33
 - Membresías Cuello=16.0: [0.5868240888334653, 0.41317591116653485, 0.0]
 - Membresías Pecho=45.0: [0.0, 1.0, 0.0]
 - Membresías Manga=33.0: [0.06698729810778065, 0.9330127018922194, 0.0]
 - Para Cuello=16.0 corresponde: Delgado
 - Para Pecho=45.0 corresponde: Normal
 - Para Manga=33.0 corresponde: Mediana
 - La camisa que debe adquirirse es: CamisaTallaMediana, con una certeza de: 0.9330127018922194
 - Membresías Talla: [0.0, 0.9330127018922194, 0.0, 0.0, 0.0]
 - Defuzzificación correspondiente: 37.32050807568878

Resultados del sistema²

- C:15 P:35 M:33
 - Membresías Cuello=15.0: [1.0, 0.0, 0.0]
 - Membresías Pecho=35.0: [0.9797464868072487, 0.02025351319275137, 0.0]
 - Membresías Manga=33.0: [0.06698729810778065, 0.9330127018922194, 0.0]
 - Para Cuello=15.0 corresponde: Delgado
 - Para Pecho=35.0 corresponde: Esbelto
 - Para Manga=33.0 corresponde: Mediana
 - La camisa que debe adquirirse es: CamisaTallaMediana, con una certeza de: 0.9330127018922194
 - Membresías Talla: [0.0, 0.9330127018922194, 0.0, 0.0, 0.0]
 - Defuzzificación correspondiente: 37.32050807568878

Resultados del sistema³

- C:15 P:35 M:33
 - Membresías Cuello=18.0: [0.0, 0.75, 0.25000000000000001]
 - Membresías Pecho=55.0: [0.0, 0.02025351319275137, 0.9797464868072487]
 - Membresías Manga=38.0: [0.0, 0.6710100716628344, 0.32898992833716567]
 - Para Cuello=18.0 corresponde: Regular
 - Para Pecho=55.0 corresponde: Robusto
 - Para Manga=38.0 corresponde: Mediana
 - La camisa que debe adquirirse es: CamisaTallaGrande, con una certeza de: 0.6710100716628344
 - Membresías Talla: [0.0, 0.0, 0.6710100716628344, 0.0, 0.0]
 - Defuzzificación correspondiente: 40.260604299770065

Referencias

- Kosko, B. (1994) "Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic". 1st Ed. Hyperion.
- Jantzen, J. (1998) "Tutorial On Fuzzy Logic". Technical Report 98-E-868 (logic), Technical University of Denmark, Dept. of Automation.
- del Brio, B. y Molina, A. (2002) "Redes Neuronales y Sistemas Difusos". Alfaomega / Ra-Ma.
- Reynoso, G. (2005) "Notas en Control Difuso". Departamento de Mecatrónica y Automatización, ITESM

Gracias!!!

- Dudas?

