קורס מבוא לאופטימיזציה
בהנחיית דוקטור אריאל רוזנפלד

עבודה מסכמת

על שיטות לפתרון בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות מבוססות העדפות

ספיר קרויטורו – אור ש. נעים

בהשראת עבודתם של R.T Marler, J.S Arora (2004)

א. הקדמה:

בעבודה זו, נעסוק בשיטות שונות לפתרון בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות כאשר ללקוח יש העדפות מפורשות (Multi-Objective Optimization MOO). תוך כדי שאנו ממחישים את השיטות על בעיית בניית תיק ההשקעות. בבעיה זו, אנו מתמקדים בשתי מטרות עיקריות; (I) מקסום תוחלת הרווח של התיק (II) מזעור הסיכון שבתיק. בראייה אינטואיטיבית, ניכר כי שתי מטרות אלו **מנוגדות**. מחד גיסא, ככל שמשקיעים יותר, תוחלת הרווח עולה. מאידך גיסא, ככל שמשקיעים פחות הסיכון קטן. ניתן אפוא לומר שבשביל למקסם תוחלת רווח של תיק יש להשקיע כמות כסף אינסופית ואילו בשביל למזער סיכון, מוטב ולא להשקיע כלל. בפרקים הבאים, נדון בשיטות שונות לשם מציאת איזון בין שתי מטרות מנוגדות אלו.

ב. מושגים:

F^{norm} פונקציות המטרה מנורמלות
F_s פונקצית המטרה הראשית
F_i^{trans} פונקציית מטרה לאחר שינוי
F° Utopia Point
F וקטור של פונקציות מטרה
g_j אי שיוויון האילוצים
h_j משוואת האילוצים
k מספר פונקציות המטרה
λ פרמטר של $min - max$
n -מספר x_i, המשתנים העצמיים.
m זה המספר של אי שיווני האילוצים.
p מעריך החזקה לGlobal Criterion
U פונקציית התועלת
w וקטור המשקלים של האילוצים/החזקות
x וקטור של משתני ההחלטה
X Feasible Design Space
z Aspiration Point

Feasible Criterion Space Z

ג. הגדרת הבעיה:

$$\min_x F(x) = [F_1(x), F_2(x), \dots \dots F_k(x)]^T$$
$$subject\ to\ g_j(x) \le 0\ , j = 1,2, \dots ., m$$
$$h_l(x) = 0\ , l = 1,2, \dots . . e.$$

בהניתן $F(x) \in E^k$ -וקטור של פונקציות מטרה נרצה לקיים: $\min_x F(x)$ כאשר $F(x) =$ $, [F_1(x), F_2(x), \dots \dots F_k(x)]^T$

$F_i(x): E^n \to E^1$ פונקצית המטרה ה i , k מספר פונקציות המטרה $x \in E^n$ הינו וקטור של משתני החלטה.

n -מספר x_i המשתנים העצמיים, m זה המספר של אי שיווני האילוצים.

זהו וקטור של פונקציות מטרה מטרות הפונקציות

$$subject\ to\ g_j(x) \le 0\ , j = 1,2, \dots ., m$$
$$h_l(x) = 0\ , l = 1,2, \dots . . e.$$

אין פיתרון כללי לבעית אופטימיזציה של מיקסום מטרות מרובות,נבחן כמה שיטות לפיתרון בעיה זו.

חלק מהשיטות מכילות מוציאות פיתרון אשר הוא $Pareto\ Optimal$:

$Pareto\ Optimal$: $A\ point, x^* \in X, is\ Pareto\ optimal\ iff$
$there\ does\ not\ exist\ another\ point, x \in X, such\ that\ F(x) \le F(x^*),$
$and\ F_i(x) < F_i(x^*) for\ at\ least\ one\ function.$

במילים אחרות ,הפיתרון המתקבל מהקצאה של משאבים בצורה כזו,כך שאי אפשר להקצות אותם מחדש על מנת לשפר את מצבו של פרט אחר או העדפה אחרת מבלי לשנות לרעה את מצבו של פרט אחר או העדפה אחרת (מתוך ויקפידה).

שיטות אחרות לא תמיד מספקות פתרונות $Pareto\ Optimal$, אך מספקים תנאים אחרים המשמשים ליישום מעשי.

לדוגמה השיטות מספקות פתרון $Weakly\ Pareto\ Optimal$:

$Weakly\ Pareto\ Optimal$: $A\ point, x^* \in X, is\ weakly\ Pareto\ optimal\ iff$
$there\ does\ not\ exist\ another\ point, x \in X, such\ that\ F(x) < F(x*).$

כלומר, Weakly Pareto Optimal זה מצב אי אפשר לשפר את מצבו של כל אחד מפרטים.

(*.Mock, William B T. (2011). "Pareto Optimality". Encyclopedia of Global Justice.*)

נקודה יכולה להיות Weakly Pareto optimal אם אין נקודה אחרת שמשפרת את כל פונקציות המטרה בו זמנית.

לעומת זאת, נקודה יכולה להיות Pareto optimal אם אין עוד נקודה שמשפרת **לפחות** מטרה אחת בלי לשנות לרעה בפונקציה אחרת.

במילים אחרות, נקודות Pareto optimal הן weakly Pareto optimal אך נקודות שהן weakly Pareto optimal **אינן** Pareto optimal.

כדי לקבוע אם נקודה היא Pareto optimal אנו משתמשים בבדיקה הבאה :

$$Minimize_{x\in X,\delta\geq 0}\sum_{i=1}^{k}\delta_i$$
$$subject\ to\ F_i(x)+\delta_i=F_i(x^*),\qquad i\ =\ 1,2,\ldots,k.$$

אם δ_i הוא 0 אז x^* הוא Pareto optimal point .

נשים לב כי יכול להיות שלבעיה יהיו מספר אינסופי של Pareto optimal points .לכן, כל שיטה צריכה להבחין בין שיטות שמספקות קבוצה בדידה של נקודות Pareto optimal סופית או סט אינסופי של נקודות פארטו אופטימליות.

ישנם שיטות אשר מספקות compromise solution. פתרון זה ממזער את השוני בין הנקודה אופטימלית לבין Utopia point (נקרא גם ideal point):

$$Utopia\ Point: A\ point, F^{\circ}\in\ Z_k, is\ a\ utopia\ point\ iff\ for\ each\ i=1,2\ \ldots\ ,k,$$
$$F_i^{\circ}=\ minimum_x\ \{F_i\ (x)|x\ \in\ X\}.$$

באופן כללי F° היא Unattainable. לכן נסתפק בפתרון הקרוב ככל הניתן לUtopia Point. פתרון כזה נקרא Compromise Solution והוא Pareto optimal. הקושי בפיתרון זה הוא ההגדרה של המילה "קרוב". בדרך ככל ההגדרה של קרוב זה למזער את המרחק האוקלידי. אך בחלק מהמקרים אין צורך להגביל את ההגדרה למקרה של Euclidean Norm. אם יש פונקציות מטרה שונות עם יחידות מידה שונות, ה Euclidean Norm בכל דרגה לא תמיד קרוב מספיק בצורה מתמטית. לכן כל פונקציית מטרה צריכה להיות ללא מימדים.

ד. שיטת הקריטריון הכללי הממושקל:

שיטה נפוצה זו להתמודדות עם בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות, נקראת שיטת הקריטריון הכללי הממושקל (Weighted Global Criterion Method). בשיטה זו, כל פונקציות המטרה מתמזגות לכדי פונקציה אחת. פונקציה זו למעשה מייצגת את כל פונקציות המטרה בהתאם למשקל שנתנו להם. כך למשל, אם חשוב לנו יותר למקסם את רווח התיק, מאשר למזער את הסיכון, ניתן לפונקציה שמייצגת את מקסום רווח התיק משקל גדול יותר מהפונקציה שמייצגת את מזעור הסיכון בתיק. במידה ואין לנו העדפות ביחס לפונקציות המטרה השונות בהן עסקינן, והשתמשנו בשיטה זו, אפשר לומר שעבדנו עם **שיטת הקריטריון הכללי**, אך אילו, אנו רוצים לתת את הדעת על מידול העדפותינו כמו

בדוגמא הנ"ל, נשתמש בשיטת **הקריטריון הכללי הממושקל**. אחת מפונקציות התועלת הכלליות ביותר מבוטאות בצורתן הפשוטה ביותר כסכום אקספוננטציאלי ממושקל:

$$(1)\ U = \Sigma_{i=1}^{k} w_i [F_i(x)]^p, F_i(x) > 0 \forall i,$$
$$(2)\ U = \Sigma_{i=1}^{k} [w_i F_i(x)]^p, F_i(x) > 0 \forall i.$$

ההרחבות הנפוצות ביותר של פונקציות (1), (2) הן של Yu-Leitmann (1974), Zeleny (1982), Chankong-Haimes(1983).

$$(3)\ U = \left\{\Sigma_{i=1}^{k} w_i [F_i(x) - F_i^{\circ}]^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$
$$(4)\ U = \left\{\Sigma_{i=1}^{k} w_i^p [F_i(x) - F_i^{\circ}]^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

כאן, w הנו וקטור של משקלים, אשר לרוב מוגדר על ידי מבצע ההחלטות כך ש $\Sigma_{i=1}^{k} w_i = 1$ ומספר האיברים בווקטור המשקלים הוא כמובן לפחות 1. אם מאתחלים את אחד או יותר מהמשקולות לאפס, עשויים לקבל יעילות פאראטו חלשה. באופן כללי, הערך היחסי של כל משקולת ביחס לשאר המשקולות, מבטא על חשיבותו היחסית ביחס למשקולות שמייצגות את שאר המטרות. ניתן להסתכל בסכימות שבמשוואות (3), (4) בשתי דרכים: האחת כשינוי של פונקציות המטרה המקוריות השנייה, כרכיבים של פונקציות מרחק שממזערות את המרחק בין הפתרון הנוכחי ונקודת האוטופיה ביחס למרחב של הקריטריון. השלכה של ההסתכלות השנייה היא ששיטות **קריטריון כללי** נקראות גם **שיטות מבוססות נקודת אוטופיה** או **שיטות תכנות התפשרותי**, היות ולרוב על מבצע ההחלטה לבצע **פשרה** מסוימת בין הפתרון הסופי לבין נקודת האוטופיה בפועל, לצורך קבלת יעילות חישובית, דהיינו, שימור על זמן ריצה סביר. כאשר מתפשרים על נקודת האוטופיה, כלומר מעריכים אותה על ידי z, מקבלים למעשה נקודה שנקראת **נקודת השאיפה**

(Wietzbicki 1986, Miettinen 1999), או **נקודת מטרה** (Hallefjord- Jornsten 1986)).

ה. שיטת הסכום הממושקל:

זוהי הגישה הנפוצה ביותר לפתרון בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות. היא מיוצגת על ידי פונקציית התועלת הבאה:

$$(5)\ U = \Sigma_{i=1}^{k} w_i F_i(x).$$

זוהי למעשה צורה של משוואות (1) או (2) כאשר $p = 1$. ובמילים אחרות, כופלים את התועלת שמתקבלת מכל פונקציית מטרה במשקולת שלה, ולכן, כאשר נצטרך להתפשר על האוטופיה, ננסה להתפשר יותר על המטרות שיש להן משקולת הקלה ולהתפשר פחות על המטרות בעלות המשקולת הכבדה. (Zadeh 1963) הראה כי מזעור משוואה 5, מספיק לקבלת אופטימליות פאראטית. קוסקי וסילבנוינן (1987) מציגים שיטה של משקול חלקית לפיה פונקציות המטרה המקוריות מקובצות לקבוצות עם מאפיינים משותפים. כל קבוצה משומשת ליצירת פונקציית סכום ממושקל **שאינה תלויה באחרות**, עם קבוצת משקלים ייחודית ובדרך זאת, מספר פונקציות המטרה המקוריות מצטמצם. סטוייר (1989) קישר מתמטית את המשקלים לפונקציית העדפות של מקבל ההחלטות. Eschenauer ושותפיו (1990) נתנו תיאור של השיטה במרחב האילוצים. קוסקי וסילבנוינן (1987) ממחישים את שיטת הסכום הממושקל כמקרה מיוחד של שיטות שמערבות p-norm. פרשנות שגוייה של המשמעות התאורטית והמעשית של משקולות עשויה לגרום

לתהליך הבחירה האינטואיטיבית של משקולות באופן לא שרירותי למטלה לא יעילה. לפיכך, מדענים רבים, פיתחו גישות מגוונות לבחירת המשקולות. נסביר כאן בקצרה על הגישות הבסיסיות הכלליות.

ו. שיטות מבוססות דירוג:

(Yoon and Hwang 1995) לפי גישה זו, פונקציות המטרה מסודרות ומדורגות על פי חשיבותן בעייני מקבל ההחלטות. הפונקציה הכי פחות חשובה, מקבלת משקולת בשווי 1. והפונקציות הבאות, מקבלות משקולות בערך עולה. (הפונקציה השנייה הכי פחות חשובה, מקבלת 2, השלישית הכי פחות חשובה מקבלת משקולת 3, הפונקציה הכי חשובה תקבל משקולת ששווה למספר פונקציות המטרה). משתמשים בגישה דומה **בשיטות מבוססות קטגוריה** בהן מטרות שונות מקובצות לקטגוריות רחבות כדוגמת "מטרות מאוד חשובות" או "מטרות פחות חשובות" וביוצא בזה. באופן כללי, בשיטות מבוססות דירוג, הרעיון הוא שמקבלי ההחלטות, נותנים משקולות שונות לפונקציות המטרה **בהתאם** לחשיבותן. כך למשל, אם עסקינן בבעיית בניית תיק ההשקעות, ואנו מתעדפים תוחלת רווח על פני מזעור סיכון, ניתן לפונקציית המטרה שמתארת את תוחלת הרווח משקולת בשווי 2, ולפונקציה שמתארת את מזעור הסיכון, משקולת בשווי 1. תהיות בנוגע ליחסים או השוואה בין זוגות, מספקות משמעות **לדירוג פונקציות הערכה בין זוגות** של פונקציות במקום דירוג פונקציה במקום השוואת פונקציה אחת לעומת כל שאר הפונקציות. Saaty (1977) מספק שיטה מבוססת ערכים עצמיים לשם החלטה לגבי המשקולות. שיטתו מערבת $\frac{k(k-1)}{2}$ השוואות בין זוגות של פונקציות מטרה. סדרת השוואות זו מייצרת מטריצת השוואות, והערכים העצמיים של המטריצה, הם המשקולות.

ז. קשיים בשיטת הסכום הממושקל:

מדענים רבים עסקו לאורך השנים בקשיים עם השיטה שזה עתה דנו בה. נתייחס בקצרה לשלושה קשיים. ראשית, למרות שקיימות שיטות רבות להחלטה על הגדרת המשקולות של פונקציות המטרה, **קיבוע מראש** של משקולות, לא בהכרח מבטיח שהפתרון הסופי יהיה טוב או אפילו מתקבל על הדעת. ייתכן ונדרש לכייל מחדש את המשקולות אחרי שביצענו את החישוב והגענו כבר לפתרון. Messac (1996) אף טוען שהמשקולות עצמם **לא יכולות** להיות קבועות, אלא עלינו להחליט שבחירת המשקולות היא פונקציית מטרה עצמאית **בפני עצמה**, בשביל לחקות את פונקציית הערכה באופן טוב. שנית, בשיטה זו, **לא ניתן לקבל נקודות על חלקים לא קמורים** של הקבוצה הפאראטית אופטימלית במרחב האילוצים (דס ודניס 1997, Messac ושותפיו 2000). שלישית, שימוש במשקולות שונות לא מבטיח לנו שימור של פיזור שווה של נקודות פאראטיות אופטימליות וייצוג מדוייק ונאמן של הקבוצה הפאראטית אופטימלית (דס ודניס 1997).

ח. השיטה הלקסיקוגרפית:

בשיטה זו, פונקציות המטרה מסודרות לפי סדר חשיבותן. ואז בעיות האופטימיזציה הבאות נפתרות באופן סדרתית, אחת-אחת:

$$(6) Minimize_{x\in X} F_i(x)$$
$$Subject\ to\ F_j(x) \le F_j(x_j^*), j = 1,2,\dots,i-1, i>1,$$
$$i = 1,2,\dots,k.$$

כאן, i מייצג את מיקום הפונקציה בסדר העדיפויות, ו$F_j(x_j^*)$ מייצג את נקודת המקסימום של פונקציית המטרה הj, שנמצאת באיטרציה הj. לאחר האיטרציה הראשונה, $(j = 1)$, $F_j(x_j^*)$, לא בהכרח זהה למינימום העצמאי של $F_j(x)$, שכן אילוצים חדשים נוספו. האילוצים של נוסחא (6), ניתנים להמרה בשוויונות (סטדלר 1988). מספר חוקרים, מפרידים בין הגישה ההירככית לגישה הלקסיקוגרפית, היות והיא כפופה לאילוצים הבאים (Osyczka 1984):

$$(7) F_j(x) \le \left(1+\frac{\delta_j}{100}\right) F_j(x_j^*), j = 1,2,\dots,i, i>1$$

בהשוואה ל(6), (7), מייצג הקלה על האילוצים באמצעות העלאה של צידו הימני של האילוץ באחוז של $F_j(x_j^*)$. δ_j נע בטווח של [0,100]. ניתן להדק את האילוצים וכך להשיג נקודות פאראטו אופטימליות שונות. Rentmeesters ושותפיו (1996) הציגו פתרונות עם השיטה הלקסיקוגרפית שלא עומדות בתנאי האופטימליות שהציגו Kuhn-Tucker בשנת 1950. במקום, חוקרים אלו מציגים תנאי אופטימליות חליפיים אותם הם פותרים באמצעות שיטות של ניוטון.

ט. קריטריון המשקל המעריכי:

נועד להתמודד עם חוסר היכולת של שיטת **הסכום הממושקל** ללכוד נקודות על חלקים הלא קמורים של המישור הפאראטו אופטימלי. בשנת 1996, Athan and Papalambros הציעו שיטה זו כדלקמן:

$$(8) U = \Sigma_{i=1}^{k}(e^{pw_i}-1)\cdot e^{pF_i(x)}$$

כאשר הסיגמא מייצגת פונקציית תועלת עצמאית בעבור $F_i(x)$. למרות שערכים גדולים עשויים להוביל לOverflow, מזעור (8), מספק תנאי הכרחי ומספיק לאופטימליות פאראטית.

י. שיטת המכפלה הממושקלת:

בשביל לאפשר קיום של פונקציות עם סדרי גודל שונים, להיות עם חשיבויות דומות, ובשביל להימנע מהצורך לשנות צורה של פונקציות מטרה, כדאי לקחת בחשבון את הנוסחא הבאה:

$$(9) U = \Pi_{i=1}^{k}[F_i(x)]^{w_i}$$

כאשר w_i הוא המשקולת של פונקציית המטרה הi, המייצגת את מידת חשיבותה. Bridgman (1922), היה הראשון להתייחס לשיטה זו וקרא לה, "מכפלת החזקות" (Product of Powers). Gerasimov and Repko (1978) הצליחו להשתמש בשיטה זו, והתייחסו אליה כאל "פשרה תקפה" לאופטימיזציית מרובת מטרות של מסבך[1].

יא. תכנות פיזי:

פותח לראשונה על ידי Messac ב1996, ומיושם מאז במגוון בעיות. תכנות פיזי, ממפה סיווג כללי של מטרות, ומביע מילולית העדפות לפונקציית תועלת. הוא מספק דרכים לשלב העדפות ללא צורך לעדכן את המשקולות הקשורות להעדפות אלו. במאמרו של Messac מ1996, מסופק הסבר מלא לשיטה ובמאמרם של Chen ושותפיו משנת 2000, יש הדגמות והמחשות נוספות. פונקציות מטרה, אילוצים, ומטרות כולם מטופלים באופן זהה ושווה כמטריצות עיצוב. באופן כללי, מקבל ההחלטות מעצב פונקציית תועלת יחידה שנקראת **פונקציית מחלקה**: $\overline{F_i}[F_i(x)]$, לכל מטריצת עיצוב. נקודתית, כל סוג של מטריצת עיצוב מזוהה תחילה עם סוג בודד של פונקציית תועלת המיוחדת על ידי צורה כללית כגון פונקצייה מונוטונית עולה, פונקצייה מונוטונית יורדת וכו. לאחר מכן, מקבל ההחלטות מסווג תחומים מספריים לכל מטריצה בהתאם להעדפותיו; רצוי, מוסכם, לא מתקבל על הדעת וכיוצא בזה. אם עסקינן למשל בבעיית בניית תיק ההשקעות נרצה לסווג תוחלת רווח גבוהה כתחום רצוי, תוחלת רווח קטנה כתחום מוסכם ותוחלת רווח שצפויה להניב לנו הפסד כתחום שאינו מתקבל על הדעת. תחומים אלו, כוללים כאמור גבולות מספריים על ערכי המטריצות שנחשבים ונלקחים בחשבון כאילוצים נוספים. תוך כדיי התקדמות התהליך, הגבולות שבין התחומים הנ"ל עשויים להתעדכן בהתאם להתקדמות. Messac (1996), דן בפרטים המתמטיים מאחורי העיצוב של **פונקציות המחלקה**. בשל האופן שבו פונקציות המחלקה נבנות, **תכנות פיזי** מסוגל לבצע אופטימיזציה לפונקציות המטרה עם הפרשי הגדלה ניכרים באופן יעיל. ניתן להסתכל על הדרישה לסווג מספרית ערכים לכל מטריצה בשני אופנים: מחד גיסא, דרישה זו מרמזת **שתכנות פיזי** מצריך הכרות מעמיקה עם כל מטרה ואילוץ. מאידך גיסא, ובאור חיובי יותר, דרישה זו מצהירה על יתרונות השיטה ועל כך שהיא מאפשרת ניצול יעיל של מידע זמין. פונקציות התועלת העצמאיות כטרנספורמציות נטולות ממד, חד מודליות, ממוזגות לפונקציית תועלת אחת כדלקמן:

$$(10)F_a(x) = Log\left\{\frac{1}{dm}\Sigma_{i=1}^{dm}\overline{F_i}[F_i(x)]\right\}$$

כאשר dm מייצג את מספר מטריצות העיצוב שנלקחות בחשבון. Messac ושותפיו (2001), הוכיחו **שתכנות פיזי** מספק תנאי מספיק לאופטימליות פאראטית. שנה לאחר מכן, Messac and Mattson, מדגימים כיצד **תכנות פיזי** ניתן לשימוש כתנאי הכרחי לאופטימליות פאראטית. על ידי סיפוק כל הנקודות הפראטיות אופטימליות. שיטה זו למעשה טובה יותר **משיטת הסכום הממושקל** ביכולתה לייצג קבוצות אופטימליות פאראטית בפיזור אחיד של נקודות (Chen ושתפיו (2000), Messac (2000), Messac ושותפיו (2001)).

---

1 מסבך הוא מבנה של מוטות שמחוברים ע"י חוליות ומרכיבים מבנה יציב. דוגמא למסבך הוא מגדל אייפל בפריז, צרפת.

יב. דיון:

מאמרם של R.T Marler, J.S Arora, (2004), שעליו עבודתנו מבוססת, סוקר שיטות רבות ומגוונות להתמודדות עם בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות. ובפרט, לשיטות הקיימות כאשר למקבל ההחלטות יש העדפות ברורות באשר למטרות השונות (פרק 3 במאמר). בעבודה זו התייחסנו לחלק מהשיטות שהחוקרים דנו בהם; שיטת הקריטריון הממושקל, שיטת הסכום הממושקל, השיטה הלקסיקוגרפית, קריטריון המשקל המעריכי, שיטת המכפלה הממושקלת וסיימנו עם תכנות פיזי. בהנתן שיטות רבות כל כך להתמודדות על הבעיה, עולה בוודאי השאלה איזו שיטה היא הטובה ביותר? למרבה הצער, אין לשאלה זו תשובה אחת נכונה. נאמר אבל ששיטות המספקות תנאי הכרחי ומספיק לאופטימליות פאראטית, מהוות שיטות מועדפות. כאשר נתונה בעיה ומתבקש פתרון יחיד, היתרונות בקבלת פתרון שהוא אופטימלי פאראטי ברורים. בנוסף, שיטוח שמהוות תנאי הכרחי לאופטימליות פאראטית גם הם טומנים בחובם יתרונות. שיטות כאלו, ישרתו ביותר נאמנות את העדפותיו של מחולל ההחלטות מאשר שיטות שמפספסות נקודות מסוימות במישור הפאראטי (דהיינו, שיטות שאינן מספקות תנאי הכרחי לאופטימליות פאראטית). זאת מכיוון שבהנחה וכל הנקודות הפאראטיות דומות מתמטית, ונבדלות זו מזו רק בהעדפות הלקוח, אין סיבה מהותית להתעלם מפתרונות פוטנציאליים. התעלמות שכזאת עשויה לגזול ממקבל ההחלטות פתרון שמשרת באופן הנאמן ביותר את העדפותיו. לפיכך, עולה שאלה נוספת; דנו הרי במספר שיטות (ויש עוד הרבה שיטות שכלל לא דנו בהן), שמהוות תנאי הכרחי ומספיק לאופטימליות פאראטית. מבין שיטות אלו, באיזו שיטה כדאי להשתמש? התשובה לשאלה זו תלויה חלקית בשאלה לגבי היכולת של מקבל ההחלטות לאמוד נכונה את פונקציית העדפות שלו. **תכנות פיזי** הוא יעיל במקרה זה. משקולת כאמור מייצגת את הצורה הפשוטה ביותר של פונקציית תועלת ואילו **תכנות פיזי** מאפשר למחולל ההחלטות לעצב פונקציות תועלת שהן יותר מסובכות ומדויקות לכל מטרה בפני עצמה. בנוסף, למרות **שתכנות פיזי** מבוסס על העדפות שנכפות, הוא מספק דרך לחמוק משימוש במשקולות, שעשוי להיות קשה ומסובך. החסרונות המרכזיים של השיטה כאמור טמונים באתגר שבכתיבת התוכנית שעשוי להיות מאתגר, ובדרישה לידע רב אודות הבעיה הנתונה. באותו האופן, במקרים אחרים בהם לא ניתן לכתוב קוד של תכנית מבוססת שיטת תכנות פיזי או שאין מספיק ידע אודות הבעיה, שיטות אחרות שמהוות תנאי הכרחי ומספיק ליעילות פאראטית ניתנות לשימוש עם יתרונותיהן שלהן.

יג. מסקנות ודברים שלמדנו מהפרויקט:

1. בעיות אופטימיזציה בהן אנו רוצים לספק מספר מטרות, הן בעיות קשות. במאמרו של Paolo Serfani מאוניברסיטת אודינה (איטליה): " Some Considerations about Computational Complexity for Multi Objective Combinatorial Problems[2]", כותב המאמר מתייחס לסיבוכיות של בעיות MOO, תוך שהוא מזכיר את בעיית המסלול הקצר ביותר וסיפוק שתי מטרות במסגרתו, הוא עוסק בשאלה האם בעיות MOO הן במחלקת הסיבוכיות NPC? לעניות דעתנו, עניין שיוך בעיות אלו למחלקת סיבוכיות כלשהי לא

[2] המאמר זמין כאן: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-46618-2_15

הוסדר עדיין, אך דבר אחד בטוח; קשה יותר לספק מספר מטרות בו-זמנית מאשר לספק מטרה אחת, גם אם הקושי אינו עולה בקנה מידה מעריכי אלא רק בקנה מידה פולינומי.

2. בעיות אופטימזציה מרובות מטרות, קיימות במגוון רחב של תחומים בחיינו. כך למשל, המוטיבציה לעבודתנו הייתה בעיית בניית תיק המניות- בעיה מעולם הפיננסים. גילינו בשלב מוקדם למדי את האתגר שבסיפוק שתי מטרות מאוד מנוגדות, אך שסיפוק כל אחת בפני עצמה חשוב מאוד והן מקסום רווח ומזעור סיכון. התעלמות מאחת משתי מטרות אלו, עשויה להיות בעלת השלכות קולוסליות למשקיע; חוסר תשומת לב לסיפוק המטרה של מקסום רווח, תוביל לבזבוז זמן והקטנת התשואה שהשקעת המשקיע יכולה להניב, וחוסר תשומת לב מספק למזעור הסיכון עשויה לגרום למשקיע להתרושש במקרים מסוימים ולכל הפחות לגרום לו ללחץ נפשי רב.

3. תחום נוסף בו בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות קיים, הוא התחום שעליו המאמר שעליו ביססנו את עבודתנו[3] מתמקד בו; תחום ההנדסה. בעיה הנדסית שאני מניח שמהנדסים משקיעים עליה זמן רב הוא האיזון שבין כמות החומר שמשקיעים במבנה (בניין, חפץ, כלי וכ"ב), לבין עמידותו, יציבותו וחוזקתו. האינטואיציה היא, שככל ויש יותר חומר, כך המבנה חזק יותר ויציב יותר. מנגד, ככל ויש יותר חומר, במבנה, כך עלות הייצור שלו גבוהה יותר, משקלו כבד יותר, ומכמות מסוימת של חומר, הוא יחדול לשמש את ייעודו; ניתן למלאות את כל הנפח של בניין בבטון ואנו נקבל מבנה חזק אך מנגד, לא ניתן יהיה לאכלס בו אנשים ועלותו תהיה יקרה.

4. אם עסקינן בבניינים, מוטב גם לתת את הדעת על עולם הנדל"ן. ככל ודירה גדולה יותר, כך ניתן להרוויח עליה יותר. ולכן הקבלן ירצה שהקירות בבניין יהיו כמה שיותר דקים. מנגד, קירות דקים פירושו מבנה חלש יותר, איטום רעשים פחות טוב ובעיות נוספות. בראייה כללית על הבניין, ככל ויש בו יותר קומות, יש בו יותר דירות וניתן להרוויח עליו יותר, אך ככל ובניין גבוה יותר, כך הוא יותר חשוף לכוחות הטבע כגון רוח או רעידות אדמה.

5. במסגרת עבודתנו, דנו במספר דרכים ושיטות לפתרון בעיות אופטימיזציה מרובות מטרות MOO. התייחסנו בקצרה לשיטות שסקרנו במסגרת פרק הדיון של עבודתנו.

...

---

[3] R.T. Marler and J.S. Arora , Survey of multi-objective optimization methods for engineering

יד. שימוש באלגוריתם בעולם האמיתי:

ראשית, חשוב להגיד שבהתייחס לבעיה בעולם האמיתי, יש לקחת בחשבון המון אילוצים נוספים שכלל לא התייחסנו אליהם. אקטואלית להיום למשל, נעדיף שלא להשקיע בחברות רוסיות או אוקראיניות בשל המלחמה המתחוללת בימים אלו באזור והסנקציות הכלכליות שמעצמות מטילות על רוסיה כתגובה. דוגמא אחרת, היא משבר הקורונה שבמהלכו, היה מאוד לא משתלם להשקיע במניות של חברות תעופה וחברות בענף התיירות, לעומת זאת, אנשים שהשקיעו ממש לפני פרוץ המגפה בחברות כמו ZOOM[4] (NASDAQ[5] ZM) התעשרו באופן יפה. האלגוריתם שלנו, למרבה הצער, לא נותן את הדעת על מקרים שכאלו, ובמקום, קיימת הנחה הסתברותית סמוייה, שאם נסתכל מספיק זמן אחורה, מספר האירועים "החריגים" (מגפה, מלחמה, מתקפת טרור, תביעת ענק, Exit וכ"ב) יהיה דומה למספר האירועים "החריגים", שיקרו באותה תקופת זמן בעתיד. הבעיה היא שלא ניתן להסתכל יותר מדי זמן אחורה, כי אז הנתונים שלנו יושפעו מאינפלציה ומשינוי בשוק (חברות ענק מצליחות מאוד שהיו קיימות לפני חמישים שנה למשל, לא בהכרח קיימות היום. למשל Blockbuster[6] (NASDAQ BLIAQ)).

---

[4] בשמה המלא: Zoom Meetings, חברה שהוקמה ב2011 ומתעסקת בשיחות ועידה מקוונות. לקריאה נוספת:
(https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%96%D7%95%D7%9D_(%D7%99%D7%99%D7%A9%D7%95%D7%9D

[5] בורסת מניות אמריקאית מפורסמת. לקריאה נוספת:
https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%A0%D7%90%D7%A1%D7%93%22%D7%A7

[6] חברה אמריקאית שסיפקה שירותי השכרה של משחקי וידיאו וסרטים שהוקמה ב1985 ופורקה ב2014, לאחר שספגה הפסדים רבים.
לקריאה נוספת: https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%91%D7%9C%D7%95%D7%A7%D7%91%D7%A1%D7%98%D7%A8

בשביל להשתמש באלגוריתם בעולם האמיתי לקחנו תת קבוצה שרירותית של חברות ממדד ה S&P 500[7]:

Company (Please click the name of the company to learn more about it.)	Code	Field	Annual Stock Price (On Average)
Apple	AAPL	Technology	148.1788976
Amazon.Com	AMZN	Technology	3,314.99
Tesla	TSLA	Vehicle	807.4015748
Ford Motor Company	F	Automobile	15.85
WYNN Resorts	WYNN	Hospitality & Casino	102.5719685
MGM Resorts International	MGM	Hospitality & Entertainment	42.32
Citigroup	C	Finance	68.92
JPMorgan Chase & Co.	JPM	Finance	157.1856
The Coca-Cola Company	KO	Food and Beverage	56.14
McDonald's	MCD	Food and Beverage	242.26

הסתכלנו על עלות הסגירה בעבור כל מניה שכזו בשנה האחרונה (365 ימים אחרונים), ביצענו ממוצע על ערכים אלו,וכך קיבלנו את העלות השנתית הממוצעת של כל אחת מהמניות .לאחר מכן,נעזרנו במודל אשר מדמה תהליך קביעת עלות המנייה והחזרנו את עלות הסגירה שלה.בעזרת עלות זו הרכבנו את זוג המספרים כדלקמן: תוחלת הרווח המירבי ביותר מהמנייה , תוחלת ההפסד המירבי האפשרי ממנייה זו.

טו. הסבר על מימוש הקוד:

נשתמש ב Pareto Weighted Sum Tuning **על מנת לפתור** Multiobjective Optimization Problems [**מקור** 2]

בהינתן אוסף של מניות,אנחנו נרצה להשיג 2 מטרות:

1.למקסם את תוחלת הרווח המרבי

---

[7] S&P 500 קיצור של (Standard and Poor's 500) הנו מדד ניירות ערך של 500 התאגידים בעלי השווי הגבוה ביותר שנסחרים בבורסת המניות האמריקאית. לקריאה נוספת: https://he.wikipedia.org/wiki/S%26P_500

2. למזער את תוחלת ההפסד המרבי

לשם כך,נשתמש בגישת Weighted Sum:

נתחיל בכך שנגדיר את תוחלת ה$utility$ לרכישת מנייה כלשהי.

לשם כך נגדיר:

o_i תוחלת הרווח המרבי ממנייה i
p_i תוחלת ההפסד המרבי ממנייה i
α המשקל שנותן הלקוח לo_i, המשקל שנותן הלקוח לתוחלת הרווח המרבי.

s_i המחיר של מנייה i .

b מקסימום התקציב שיש ללקוח

x_i כמות המנייה i שנקנה (1 או 0)

לכן, תוחלת ה$utility$ לרכישת מנייה i :

$$f_i(\alpha) = \alpha * o_i + (1 - \alpha) * p_i$$

כך בעצם אנחנו נותנים "משקל" גם לרווח וגם להפסד ומאחדים את זה למשתנה אחד $f_i(\alpha)$.

וכעת בעיית האופיטיזציה שלנו:

$$\max \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}} x_i * f_i(\alpha)$$

כאשר $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}} s_i * x_i \le b$, $x_i \in \{0,1\}$

כלומר, נרצה למקסם את ה$utility$ של כל המניות שנקנה, בגבולות התקציב שניתן לנו.

לשם פתירת בעיה זו, נרצה למצוא את α .

בקוד שלנו נמצא את הערך של α :

נלמד כל פעם בהתאם לנתונים מהו α עד אשר נקבל את ערך ה α הטוב ביותר בהתחשב בכמות האיטרציות שנגדיר.

טז. הסבר על הקוד:

ניצור אוסף של n מניות בשם objective Value tuples.כל מנייה מוגדרת כtuple .

$$\text{objective Value tuples} = [\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2 \ldots . \mathrm{t}_\mathrm{n}]$$

למנייה i מוגדר tuple $\mathrm{t_i}$:

$$\mathrm{t_i} = [o_i, p_i]$$

ניתן ל"משתמש" מדגם מתוך המניות אלו, והוא ידרגם בכל איטרציה.

בתחילה הדירוג נעשה על ידי בחירת α רנדומי.

הדירוג הוא בעצם חישוב של :

$$f_i(\alpha) = \alpha * o_i + (1 - \alpha) * p_i$$

ככל ש $f_i(\alpha)$ גבוהה יותר, המנייה טובה יותר ומשתלם לקנות אותה.

ככל ש $f_i(\alpha)$ נמוכה יותר, המנייה פחות אטרקטיבית להשקעה.

נהפוך את דירוג זה למספרים בין 0 לגודל המדגם.אם גודל המדגם הינו m אז:

מנייה בדירוג 0 זו המנייה הגרועה ביותר, והמנייה בדירוג m זו המנייה הטובה ביותר. בעזרת מידע זה ו$SVM\ Ranking$ נלמד את α. [מידע זה ישמש אותנו באיטרציה הבאה]

בסוף האיטרציה,נעשה ממוצע על כל ה α שקיבלנו עד כה ונקבל את $\bar{\alpha}$. את ערך זה נשמור ונמשיך לאיטרציה הבאה.

לאחר שסיימנו את כל האיטרציות,נחזיר את כל ערכי $\bar{\alpha}$ ששמרנו.

יז. הפסדו קוד:

-נגדיר α עם ערך שרירותי.

-נגדיר שונות (Tolerance) עם ערך שרירותי

- ניצור פרופיל למשתמש בעזרת α ו tolerance

- $i = 0$

- ניצור את המניות - Objective Value Tuples כפי שהוסבר מקודם.

-ניצור מערך Batch_sizes המכיל גדלים שונים לBatch //נוכל לבחור ערכים שרירותיים.

-נגדיר מספר איטרציות מירבי=$\text{Max}\_Epoches$

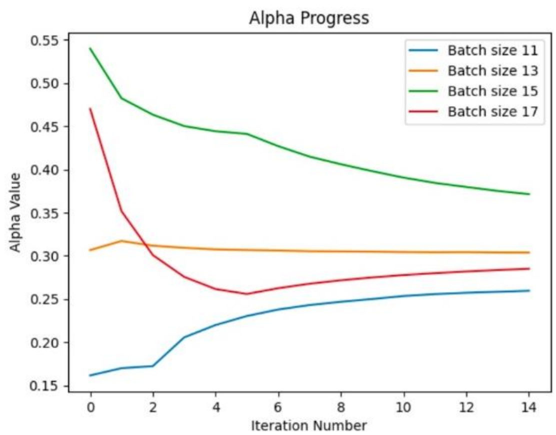
-נגדיר Alpha_Vectors_Learned מערך ריק

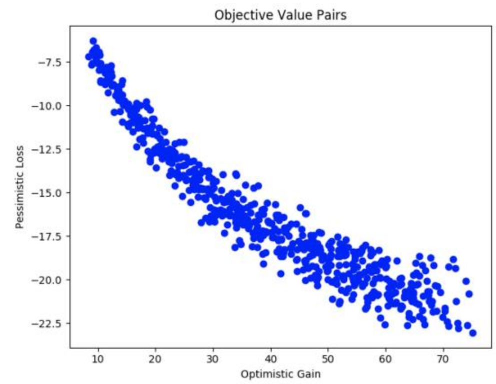
ניצור Batch מה Objective Value Tuples בגודל Batch[j]

1. -לכל j ב Batch_Sizes :
   a. לכל i אשר קטן ממספר $\text{Max}\_Epoches$:
      i. נחזיר Alpha_vector_learned בעזרת הBatch שיצרנו והפרופיל משתמש /// בעזרת SVM Ranking
      ii. ניצור Batch חדש בגודל Batch[j] מבין כל הזוגות שלא היו ב Batch הקודם.
      iii. נוסיף ל Alpha_Vectors_Learned את הAlpha_vector_learned הנוכחי.
      iv. נחשב את $\bar{\alpha}_1$: ממוצע על כל הAlpha_vector_learned שלמדנו עד כה.
      v. נוסיף את $\bar{\alpha}_1$ ל Mean_alpha_vectors
      vi. ניצור פרופיל משתמש חדש בעזרת הMean_alpha_vectors שלמדנו.
   b. נחזיר Mean_alpha_vectors

יח. תוצאות עיקריות:

נוכל לראות כי ככל שנשפר את α נקבל רווח גדול יותר בצורה משמעותית, במחיר של הפסד הגדלת תוחלת ההפסד:





כלומר, בעזרת למידת הדירוגים של המשתמש ,נוכל להתקרב להשיג את שתי המטרות שלנו בו זמנית.
ניתן לראות כי אי אפשר להימנע מהגדלת תוחלת ההפסד תוך כדי הגדלת תוחלת הרווח,אך ברור כי הגדילה ברווח הייתה משמעותית הרבה יותר.

יט. תובנות עיקריות:

התובנה העיקרית אליה הגענו, היא שאין גישה אחת הטובה ביותר לבעיה שלנו.בכל אחת מהגישות יש יתרונות וחסרונות ולא תמיד נוכל להשיג את הטוב ביותר שנרצה משתי המטרות שקבענו לנו.
בנוסף,אמנם הצלחנו להביא לכך שנמקסם את תוחלת הרווח ונמזער את תוחלת ההפסד ,אך ההתאמה שלנו לעולם האמיתי הייתה מופשטת למידי. לאורך העבודה ראינו כי ישנם שיקולים נוספים,חשובים לא פחות,אשר משפיעים על קניית מניות.לדוגמה,תוך כמה זמן ניתן להרוויח? האם יש גבול לכמה אנחנו מוכנים להפסיד בשביל בעתיד להרוויח? .אך עם זאת,אם היינו בוחרים להוסיף שיקולים אלו-היינו מוסיפים אילוצים נוספים אשר מקשים על פיתרון הבעיה שלנו וכתוצאה מכך,מקשים על כתיבת קוד מתאים.

תובנה נוספת אליה הגענו היא הקושי בבעיית אופטימיזציה שלנו -חשיבותה של כל מטרה.איזה מבין המטרות חשובה יותר ולה צריך לתת יותר משקל בפיתרון? ברור כי האידיאל שנצליח להשיג את שתי המטרות בו זמנית,אך במקרה שלנו,השגת הרווח המירבי לא פעם באה עם סיכון גבוהה-הפסד גדול.
בגישה שבחרנו לעסוק, weighted sum ,ניתן לראות התגברנו על קושי זה בעזרת מציאת $\alpha \in [0,1]$,כאשר α

הוא המשקל שניתן לתוחלת הרווח המירבי .בנוסף,החלטנו כי המשלים של α לאחד הוא המשקל שניתן לתוחלת ההפסד המירבי.כך בעצם בעזרת פונקציית ה$utiliy$ הצלחנו להגדיר ערך אשר משקף את 2 המטרות בו זמנית .

כ. מקורות:

1. R.T Marler, ,(2004) ,"Survey Of Multi-Objective Optimization Methods For Engineering" .J.S Arora
https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.404.9971&rep=rep1&type=pdf

2. המימוש המעשי בהשראת שיטה שפותחה על ידי Harry Wang לפתרון Multi-Objective Optimization :Problems

https://github.com/harryw1248/Pareto-Weighted-Sum-Tuning ,
https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-003-0368-6 ,
https://www.investopedia.com/ask/answers/041415/what-are-some-common-measures-risk-used-risk-management.asp

...