

# 国家气候中心大气环流模式

——基本原理和使用说明

董 敏 主编

气象出版社

## 内 容 提 要

本书全面系统地介绍了国家气候中心的大气环流模式的动力学框架、物理过程、计算方法及程序结构,包括模式在混合坐标系中的基本方程组、求解大气方程组的谱方法、模式所采用的各种物理过程,如辐射、对流、边界层及陆面过程等。书中包括了各种动力和物理过程的有关公式的详细推导,还包括较详细的程序框图及使用说明,内容深入浅出,易于理解和应用。本书适合气象、气候、水文、环境等专业大学高年级学生及研究生阅读,也可供从事天气、气候预测的专业人员及从事气候模拟、环境科学研究的专业人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

国家气候中心大气环流模式——基本原理和使用说明/董敏主编—北京:气象出版社,  
2001.10

ISBN 7-5029-3266-6

I. 国… II. 董… III. 大气环流模式 IV. P421.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 072424 号

### 国家气候中心大气环流模式——基本原理和使用说明

董敏 主编

责任编辑:李太宇 袁信轩 终审:周诗健

封面设计:沈辉 责任校对:寇红薇

**气象出版社** 出版

(北京市海淀区中关村南大街 46 号 邮政编码:100081)

北京兴怀印刷厂印刷

\* \* \*

新华书店总店北京发行所发行 全国各地新华书店经销

开本:787×1092 1/16 印张:9.875 字数:253 千字

2001 年 12 月第一版 2001 年 12 月第一次印刷

印数:1~500 册

ISBN 7-5029-3266-6/P·1148

定价:20.00 元

## 前 言

气候状况及其变化对人类生活和社会发展的各个方面都具有重大的影响。随着社会的发展,人类的进步,人们对气候信息的需求也越来越迫切。气候模式是研究各种气候的形成原因,各种气候变率的机制,理解各种气候灾害(如干旱、洪涝、酷热、严寒等)的发生机理的重要工具。同时也是预测气候变化的极具潜力的工具。

目前世界各国都在使用气候模式研究气候变化、进行气候预测的实验研究。同时也都在进一步发展和改进气候模式。我国政府对气候模式的发展也非常重视。“九五”期间(1996~2000年),国家科委(现为科技部)将“我国短期气候预测业务系统的研究”列为国家“重中之重”科技项目,给予极大支持。该项目包括5个课题。其中第二课题为“短期气候预测业务动力模式的研制”,目的在于发展一个由三维全球大气环流模式、海洋环流模式、区域模式及 ENSO 模式组成的,并包括资料同化、后处理及显示程序等的业务模式系统。而“季节预测大气环流模式的研制”是该课题所属的第二专题。专题的任务是发展一个有完整物理过程的三维大气环流模式,该模式将作为业务模式用以进行季节尺度的气候预测,同时也可以进行气候模拟研究。

国家气候中心、中国科学院大气物理研究所、北京大学地球物理学系及国家气象中心的20多名科研人员在一起合作攻关,经过近五年的努力完成了国家气候中心大气环流模式的研制,并已在国家气候中心的汛期气候预测中进行了试用。今后该模式将逐渐投入业务预测,同时也将提供给广大业务和科研人员在气候研究中应用,并在业务应用中不断完善和改进。本书将对国家气候中心的大气环流模式的基本原理、技术细节及使用方法进行较为详细的说明,希望能通过本书对使用国家气候中心大气环流模式的研究者提供一些有用的信息。本书对气候模式中动力框架及物理过程的参数化有较为详细的叙述和公式推导,对从事气候模拟的研究人员也会有一定的参考价值。

参加本书编著的主要是《我国短期气候预测业务系统的研究》项目第二课题第二专题“季节预测大气环流模式的研制”的研究人员。具体分工如下:

第一章:董 敏

第二章:陈家滨

第三章:叶正青

第四章:季仲贞

第五章:王 标、沈元芳

第六章:董 敏、平 凡

第七章:罗 勇、孙菽芬、党鸿雁

第八章:桑建国、张培群

第九章:叶正青、宋永加、董 敏

由于作者的知识水平有限和经验不足,书中难免有疏漏或错误之处,敬请专家和本书的广大读者及国家气候中心大气环流模式的使用者批评指正,并欢迎任何改进的建议和意见。

本书的编写和出版得到了国家科技部“我国短期气候预测业务系统的研究”项目第二课题“短期气候预测业务动力模式的研制”第二专题的经费资助。项目执行专家组、项目办公室及第二课题课题负责人丁一汇教授的指导和帮助对本专题的研究及本书的完成起着重要作用，作者深表谢意。

作 者

2001年9月

## 目 录

## 前言

第一章 概述 .....	(1)
1.1 发展历史 .....	(1)
1.2 模式改进的思路 .....	(1)
1.3 对原模式的改进 .....	(2)
第二章 模式基本方程组 .....	(5)
2.1 引言 .....	(5)
2.2 混合坐标 $\eta$ .....	(5)
2.3 参考大气 .....	(5)
2.4 基本方程组 .....	(6)
2.5 垂直离散化 .....	(8)
2.6 时间积分 .....	(11)
第三章 模式求解的谱方法 .....	(16)
3.1 谱方法基本概念 .....	(16)
3.2 勒让德变换 .....	(22)
3.3 快速傅里叶变换 .....	(24)
3.4 高斯积分 .....	(29)
3.5 大气模式方程的谱截断形式 .....	(33)
第四章 水汽输送的半拉格朗日方法 .....	(45)
4.1 引言 .....	(45)
4.2 水汽初始场的处理 .....	(45)
4.3 平方守恒半拉格朗日法的基本原理 .....	(47)
4.4 水汽方程的计算 .....	(51)
第五章 辐射传输过程的参数化 .....	(53)
5.1 计算辐射传输的 $K$ -分布方法 .....	(53)
5.2 Morcrette 辐射方案 .....	(61)
第六章 积云对流参数化 .....	(80)
6.1 基本思路和云模式 .....	(80)
6.2 初始的干抬升过程 .....	(88)
6.3 凝结 .....	(89)
6.4 初始质量通量的计算 .....	(90)
6.5 强迫卷出 .....	(91)
6.6 对流的终止 .....	(94)
6.7 降水过程 .....	(95)
6.8 对流云云底、云顶和云量 .....	(95)

6.9 对环境的影响 .....	(96)
6.10 相变和降水的蒸发 .....	(97)
第七章 陆面过程 .....	(99)
7.1 改进的生物圈-大气传输过程模型 (BATS) .....	(99)
7.2 简化的雪盖-大气-土壤间的输运模型 (SAST) .....	(121)
第八章 边界层过程参数化 .....	(133)
8.1 垂直扩散 .....	(133)
8.2 重力波波阻的参数化 .....	(136)
第九章 模式程序结构和运行 .....	(140)
9.1 模式程序结构简介 .....	(140)
9.2 模式初始资料和边界资料 .....	(145)
9.3 模式的运行 .....	(145)
9.4 模式的后处理 .....	(147)
9.5 与海洋模式的耦合 .....	(149)

# 第一章 概述

## 1.1 发展历史

气候变化与国民经济建设、社会发展以及人民的日常生活均有着密切的关系。而气候模式是研究气候变化，了解各种气候灾害（如干旱、洪涝）成因的重要工具。也是进行气候预测的极有发展潜力的工具之一。因此世界各国的气象业务和研究单位都投入了大量的人力和财力发展气候模式。自从1965年Manabe等人建立起全球三维大气环流模式以来，经过近40年的努力，全球大气环流模式日臻完善，并已经在中、短期天气预报及气候变化的研究方面取得了很大的成功。在气候预测方面也取得了可喜的进展。

我国从20世纪50年代起就开始研究数值预报。70年代以来我国气象业务和研究人员一方面引进国外的大气环流模式，同时也积极发展自己的三维大气环流模式。1980年我国正式开始进行中短期数值预报。

“九五”期间（1996~2000年）在国家科委（现为科技部）的直接领导和大力支持下，启动了国家“九五”重中之重科技项目“我国短期气候预测业务系统的研究”。该项目包括5个课题。其中第二课题为“短期气候预测动力模式的研制”，目的在于发展一个由三维全球大气环流模式、海洋环流模式、区域模式及ENSO模式组成的并包括资料同化、后处理及显示程序的业务模式系统。而“季节预测大气环流模式的研制”是该课题所属的第二专题。专题的任务是发展一个有完整物理过程的三维大气环流模式，该模式将作为业务模式用以进行季节尺度的气候预测，同时也可以进行气候模拟研究。经过4年多的努力，上述目标基本完成。本书就是对国家气候中心的大气环流模式的技术细节及使用方法进行说明的一个手册。

## 1.2 模式改进的思路

为研制适合我国国情的既可用于气候业务预测又可以用于气候变化研究的大气环流模式，课题组成员广泛地阅读了国内外有关文献，以便吸收国内外本领域的研究成果。为加快模式研制的效率，我们采取了在引进已有的较成熟的大气环流模式的基础上通过消化吸收并加以改造的方针。首先对世界上各主要气候业务单位及研究机构，包括欧洲中心（ECMWF）、美国环境预报中心（NCEP/CPC）、美国全国大气研究中心（NCAR）、英国气象局（UKMO）和哈得莱中心（Hadley Centre）、加拿大气候模拟和分析中心（CCCma）、澳大利亚联邦科学和工业研究组织（CSIRO）、中国科学院大气物理研究所（IAP）、中国气象局国家气象中心（CMA/NMC）等开发出的气候模式的性能进行了调研。经过比较，同时考虑到源程序维护管理的方便及将来在进行业务预报时初始资料获取的方便，我们最终选取原国家气象中心中期数值预报业务模式为我们工作的起点。在原国家气

象中心中期数值预报业务模式的基础上,吸收国内外各种气候及数值预报模式的优点,经过几年的努力发展研制而成现在的国家气候中心大气环流模式。

## 1.3 对原模式的改进

原国家气象中心中期数值预报业务模式最早来源于欧洲中期数值预报中心的大气模式。经过国家气象中心的移植和改造,于1991年正式用于中期数值预报业务。在将其发展成为气候模式的过程中又做了如下的改进:

### 1.3.1 模式动力学框架的改进

(1) 将经过考验的参考大气方案和质量守恒方案加入到大气模式中。改进方案和原方案各进行了10年积分作对比验证。结果表明引用参考大气方案可以改进陡峭地形处气压梯度力的计算精度,改善数值预报和气候模拟的结果。用地面气压 $P_s$ 代替传统谱模式中采用的 $\ln P_s$ 作为预报量的质量守恒方案可以克服原模式存在的质量不守恒、高度场系统飘移的现象。

(参见陈嘉宾等<sup>[1]</sup>及叶正青等<sup>[2]</sup>人的文章及本书的第二章)。

(2) 采用逐步循环订正法对国家气候中心模式初值中存在的负水汽问题进行了特别处理。经实际个例计算表明,其效果明显,不仅克服了负水汽现象,而且对各层水汽场的水平分布不会带来明显的变化<sup>[3]</sup>

(3) 采用半拉格朗日方法计算水汽输送并将模拟的降水结果和用谱方法时降水模拟结果进行了比较(参见本书第三章)。

### 1.3.2 模式中辐射计算过程的改进

太阳辐射是大气运动的主要能源,辐射过程在决定大气运动方面起着重要作用。我们选择了两个新的辐射参数化方案加入到模式中,以便改进模式的模拟效果。

(1) 引入 Morcrette<sup>[4]</sup>新辐射方案,对比试验表明,新的辐射方案不仅提高了辐射的计算精度而且改进了对环流场及降水的预报(详见沈元芳的论文《辐射参数化的变化对模式预报的影响》<sup>[5]</sup>及本书第四章)。

#### (2) K-分布辐射方案

引入了K-分布辐射方案替代原模式的全辐射方案,进行改造。该方案已移植到国家气候中心工作站上,加入到国家气候中心模式中。该方案与Morcrette辐射方案同时存在于模式中,用户可选择其一使用。我们将在今后的长期使用中考验两者的效果再决定取舍。

### 1.3.3 气候模式中对流参数化方案的改进

在新的国家气候中心模式中采用Gregory的质量通量方案<sup>[6]</sup>代替原模式中的Kuo氏对流参数化方案。该方案在预报我国雨带分布方面比Kuo方案更接近实际。而且,加入质量通量方案后模式对高度及环流场的模拟效果也比原Kuo方案有所改进<sup>[7]</sup>。



### 1.3.4 陆面过程和水文过程的参数化方法研究

原中期数值预报模式采用基于地表热量平衡的陆面过程模式, 这对气候模拟和预测的目的来说过于简单。为此将Dickenson研制的BATS<sup>[8]</sup> (Biosphere-Atmosphere Transfer Scheme) 模式加入到气候模式中。同时将孙菽芬<sup>[9,10]</sup>等研制的三层雪盖模式嵌入BATS中。

### 1.3.5 改进模式中边界层过程的参数化方案

#### (1) 重力波波阻参数化的改进

对原T63模式中的计算重力波波阻的子程序GWDRAG.F进行了修改。原有的参数化方法考虑了稳定层结大气流经地形造成的波阻。在修改的程序中增加了在不稳定层结气流产生的波阻<sup>[11]</sup>。当低层大气是不稳定或近中性的, 气流流经较大尺度地形时有可能在其上部稳定的自由大气中产生波动, 并造成水平动量的垂直输送。此种情况已由解析解、数值模拟和水槽试验证实。

(2) 边界层湍流扩散改为1阶半闭合方案, 程序改编已完成并装入T63模式中(见本书第八章)。

(3) 加入边界层湍流扩散的自由对流修正方案。这一修正使热带辐合带地区由于风速很小致使模拟的降水过弱的现象得到改进。

### 1.3.6 对模式的源程序进行了较大规模的改造

原国家气象中心中期数值预报业务模式在CRAY计算机平台上运行。目前工作站的计算能力大大提高, 同时分布式内存并行计算机的发展也很快。中国气象局已配备了国产的神威、银河3、曙光1000A及进口的SP和SP-2等并行计算机。为了在这些新的平台上运行, 对源程序作了如下的改造:

(1) 与国家气象中心、气候中心合作由金之雁、叶正青、余伟、王向东等将使用于CRAY机的源程序移植到IBM工作站上。替换掉所有的指针语句和CRAY专有的内部函数。这使新的气候模式增加了通用性, 可以在几乎所有的工作站上运行。

(2) 在工作站上对源程序进行了优化, 提高了模式运行速度, 减少了模式所需的内存。

(3) 在 SP 机上对优化后的模式版本进行了按纬圈并行。SP 机上 4CPU 运行时加速比为 3.44~3.66 平均为 3.52, 并行效率为 86%~92%, 平均为 88%。同时也移植到指定的业务运行平台——曙光 1000A 上。

(4) 原中期数值预报业务模式由于积分时间较短, 模式运行时所需的下垫面海温值使用积分时段所在月的气候平均值。作气候研究或预测时往往要运行数月、数年甚至上百年, 使用固定海温是不合适的。为此对模式源程序进行了改造, 使之既可使用各月不同的气候海温, 也可以使用与积分时段相配合的实际海温作为下边界条件。海温值被插值到每天的时间间隔, 在积分的过程中每天更换。

### 1.3.7 季节预测大气模式与全球海洋模式实现了耦合运行

国家气候中心(NCC)海洋模式及耦合方法由第二课题的第三专题研制。新的国家气候中心海气耦合模式是由 T63 大气模式和 30 层海洋模式组成的。T63 大气模式和 30 层海洋模

式是每天交换数据的，即大气 → 海洋 → 大气……。大气模式传输风应力，热通量给海洋模式以代替海洋模式原来的气候风应力和热通量，海洋模式则传送海表温度距平场，加到大气模式的海表温度气候场上得到新的海温场来驱动大气模式。这样就实现了海气环境模式的耦合。

#### 参考文献

- [1] 陈嘉滨, 高学杰. 质量守恒律在国家气候中心气候谱模式中的应用. 大气科学, 2000, 25 ( 5 ) : 608~614
- [2] 叶正青, 董敏, 陈嘉滨. 国家气候中心模式在实际海温条件下模拟的气候. 2000, “95” 攻关项目成果论文集. 气象出版社, 北京.
- [3] 季仲贞, 王斌. T63L16 谱模式水汽初始场的处理和实验. 气候与环境研究, 2000, 5 (2) : 141~144
- [5] 沈元芳, 伊兰, 陈谊, 胡国权. 辐射参数化的变化对模式预报的影响. 2000, “95” 攻关项目成果论文集. 气象出版社, 北京.
- [6] Gregory, D., Rowntree, P. R., Mass flux convection scheme with representation of cloud ensemble characteristics and stability-dependence. *Mon Wea Rew*, 1990, 118, 1483~1506
- [7] 平凡, 高守亭, 董敏, 顾宏道. 国家气候中心模式对流参数化的改进及其对 1998 年中国暴雨 的模拟. 2000, “95” 攻关项目成果论文集. 气象出版社, 北京.
- [8] Dickinson, R. E., Henderson-Sellers, A., Kennedy, P. J., Biosphere-Atmosphere Transfer Scheme (BATS) for NCAR community Climate Model. NCAR Technical Note NCAR/TN-275+STR, Boulder, Colorado, 1986, 69pp.
- [9] Sun Shufen, et al. A simple snow-atmosphere-soil transfer model. *J. Geophys Res.*, 1999, 104, D16, 19587—19597
- [10] 孙菽芬. 用于GCM耦合的积雪模型设计. 气象学报, 1999, 57 (3) : 293~300
- [11] 桑建国, 刘辉志, 洪钟祥. 二维地形的地形阻力. 2000, “95” 攻关项目成果论文集. 气象出版社, 北京.

## 第二章 模式基本方程组

### 2.1 引言

本模式基本方程组类似于国家气象中心的大气谱模式（来自于ECMWF<sup>[1]</sup>）。不同的是，在这套方程组中引入了仅是气压函数的参考大气和质量守恒律<sup>[2, 3]</sup>，热力学变量温度 $T$ 和位势高度 $\phi$ 变为与其参考大气的偏差变量 $T'$ 和 $\phi'$ 。并且，作为一个预报变量，地面气压 $p_s$ 的对数 $\ln p_s$ 改变为地面气压本身。这样修改的好处是，明显地减少了Gibbs截谱误差，并可保证模式大气总质量的守恒；有效地减少原预报模式在长期数值积分中出现的气候漂移误差<sup>[3]</sup>，提高了短期预报精度和气候模拟质量。

### 2.2 混合坐标 $\eta$

在垂直方向上采用较为灵活的 $\eta$ 坐标<sup>[1]</sup>。这种坐标是气压 $p$ 的单值函数，并依赖于地面气压 $p_s$ 。定义如下

$$\eta = \eta(p, p_s) \quad (2.1)$$

这里 $\eta(0, p_s) = 0$ ，和 $\eta(p_s, p_s) = 1$ 。

气压 $p$ 是通过两个特殊函数 $A(\eta)$ 和 $B(\eta)$ 与混合坐标 $\eta$ 相联系，即

$$p(\lambda, \varphi, \eta) = A(\eta) + B(\eta)p_s(\lambda, \varphi) \quad (2.2)$$

$A$ 和 $B$ 的选取，使之形成混合坐标面。

### 2.3 参考大气

按照文献[4]和[5]使用的参考大气，定义如下：参考大气温度 $\bar{T}$ 和位势高度 $\bar{\phi}$ 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \ln p} = R_d \bar{T} \\ \left( \frac{g}{c_p} + \frac{d\bar{T}}{dz} \right) \frac{R_d \bar{T}}{g} = C_0^2 \equiv \text{常数} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

其中,  $R_d$  为气体常数;  $c_p$  为定压比热\*;  $g$  为重力加速度;  $\ln p$  是气压的对数; 而  $C_0^2$  是常定的大气层结参数。由式 (2.3), 可得到参考大气温度  $\bar{T}$  和地面气压的对数  $\ln p_s$  的分布为

$$\overline{\ln p_s} = \ln p_0 + \ln \left( 1 - (\phi_s - Y \ln p_0 + Y \frac{\overline{\ln p_s}}{X}) \right) \frac{c_p}{R_d} \quad (2.4)$$

$$\bar{T} = X_0 + Y_0 \exp \left( \frac{R_d}{c_p} \ln p \right) \quad (2.5)$$

$$\bar{\phi} = -R_d \left[ X_0 \ln \frac{p}{p_0} + Y_0 \left( \exp \left( \frac{R_d}{c_p} \ln p \right) - \exp \left( \frac{R_d}{c_p} \ln p_0 \right) \right) \right] \quad (2.6)$$

其中

$$\begin{cases} X_0 = \frac{c_p C_0^2}{R_d^2}, Y_0 = (\bar{T}_0 - X_0) / \exp \left( \frac{R_d}{c_p} \ln p_0 \right) \\ X = (\bar{T}_0 R_d - Y) \frac{c_p}{R_d}, Y = \frac{c_p}{R_d} C_0^2, \end{cases} \quad (2.7)$$

$\bar{T}_0$  和  $p_0$  分别为海平面气温和气压, 它们均为常数。

实际的大气温度  $T$  和位势高度  $\phi$  分裂为参考大气部分和其偏差部分, 即

$$\begin{cases} T = \bar{T}(p) + T', \\ \phi = \bar{\phi}(p) + \phi' \end{cases} \quad (2.8)$$

很容易证明, 对参考大气有如下等式成立

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x(y)} + \frac{R_d \bar{T}}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x(y)} = 0. \quad (2.9)$$

## 2.4 基本方程组

引入参考大气、且满足大气质量守恒的控制方程为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial (F_v + P_v)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial (F_u + P_u)}{\partial \mu} + K_\xi \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial (F_u + P_u)}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial (F_v + P_v)}{\partial \mu} + \nabla^2 G + K_D \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -\frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial T'}{\partial \lambda} - \frac{V}{a} \frac{\partial T'}{\partial \mu} - \left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \frac{\partial T'}{\partial p}$$

\* 按国标 GB3102.8-93,  $c_p$  应定名为质量定压热容或比定压热容, 本书未做系统改动, 特此说明。

$$+\left(\frac{R_d}{c_p}T'+\frac{R_d}{c_p}T_q+\frac{c^2}{R_d}\right)\frac{\varpi}{p}+P_T+K_T \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{U}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial q}{\partial \lambda}-\frac{V}{a}\frac{\partial q}{\partial \mu}-\left(\dot{\eta}\frac{\partial q}{\partial \eta}\right)\frac{\partial q}{\partial p}+P_q+K_q \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial t}=-\int_0^1 \nabla \cdot \left(V \frac{\partial p}{\partial \eta}\right) d\eta, \quad (2.14)$$

$$d\phi'=-R_d T'_v d \ln p, \quad (2.15)$$

其中  $\eta$  面的垂直速度为

$$\left(\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial p}{\partial t}-\int_0^\eta \nabla \cdot \left(V \frac{\partial p}{\partial \eta}\right) d\eta \quad (2.16)$$

等压面的垂直速度为

$$\varpi=-\int_0^\eta \nabla \cdot (V dp)+V \nabla p \quad (2.17)$$

其他符号为

$$\begin{aligned} F_u &= (f+\zeta)V - \left(\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{R_d T'_v}{a}\frac{\partial \ln p}{\partial \lambda} \\ F_v &= -(f+\zeta)U - \left(\dot{\eta}\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{R_d T'_v}{a}\frac{\partial \ln p}{\partial \mu}(1-\mu^2) \\ G &= \phi' + E, \\ E &= \frac{1}{2(1-\mu^2)}(U^2 + V^2) \\ T'_v &= T_v - \bar{T} \\ T_q &= qT \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) - (\delta-1)}{1+(\delta-1)q} \\ \mu &= \sin \varphi \\ (U, V) &= (u, v) \sin \varphi \end{aligned}$$

在式 (2.12) 中的  $C^2$  是依赖于参考大气温度的垂直分布, 一般讲它是气压的函数。 $P_v, P_T, P_\mu$  和  $P_q$  是参数化倾向, 而  $K_\xi, K_T, K_D, K_q$  是扩散项。 $T_v$  是虚温,  $\varepsilon=R_d/R_v$ ,  $\delta=c_{pv}/c_p$  其它符号是气象中常用符号。

这套方程组和原气象中心大气谱模式方程组的区别在于, 前者引入了参考大气, 且以地面气压  $p_s$  (而不是其对数  $\ln p_s$ ) 作为预报变量, 保持了大气总质量守恒。

在静力方程 (2.15) 中  $\phi'$  是位势偏差。当  $\eta=1$  (即地面处) 时,  $\phi'$  就变为  $\phi'_s$ , 即地面位势偏差。这与原气象中心谱模式不同, 那里是  $\phi_s$ , 即地形位势高度。 $\phi'_s$  计算为

$$\phi'_s = \phi_s - \bar{\phi}_s(p_s) \quad (2.18)$$

$\bar{\phi}_s(p_s)$  是参考大气在地表面处的位势高度，它是在公式 (2.6) 中令  $p = p_s$  求得。 $\phi_s$  是截谱地形位势高度。

## 2.5 垂直离散化

### 2.5.1 坐标面

垂直方向离散化与气象中心的大气谱模式相同<sup>[1]</sup>。

模式大气分为 NLEV 层，预报变量涡度  $\zeta$ ，散度  $D$ ，温度偏差  $T'$  和比湿  $q$  是放在整层上，而地表面气压  $p_s$  是放在半层 ( $NLEV + 1/2$ ) 层上， $\eta$  面的垂直速度  $\eta$  放置在半层上。模式大气层是由他们之间的间面层 (或称半层) 的气压确定。间面层气压按式 (2.2) 给定为

$$p_{k+1/2} = A_{k+1/2} + B_{k+1/2} p_s \quad (2.19)$$

$$(k = 0, 1, \Lambda, NLEV)$$

$A_{k+1/2}$  和  $B_{k+1/2}$  对给定的  $\eta$  是常数，由他们可确定坐标面。一些特定值为

$$A_{1/2} = B_{1/2} = A_{NLEV} = 0 \text{ 和 } B_{NLEV+1/2} = 0$$

如果令

$$A_{k+1/2} = 0, \quad k = 0, 1, \Lambda, NLEV$$

则  $\eta$  坐标就退化为常用的  $\sigma$  坐标。如果令

$$B_{k+1/2} = 0, \quad k = 0, 1, \Lambda, NLEV$$

则就退化为  $P$  坐标。

在本模式中，取  $NLEV=16$ 。最下面 3 个间面层的  $A_{k+1/2}$  ( $k=14, 15, 16$ ) 为零，这就是  $\sigma$  坐标；在最上面的 2 个间面层  $B_{k+1/2}$  ( $k=0, 1$ ) 为零，这就是  $P$  坐标；从  $k=2$  到 13， $A$  和  $B$  两者均不为零，这是混合坐标。

在公式 (2.19) 中气压  $p$  和地面气压  $p_s$  间的显式关系，隐含地确定了垂直坐标  $\eta$ 。在模式公式中，不需要知道坐标的明确表示。

在初始化和物理参数化中要用到整层上的气压。按照本模式垂直差分格式构造中要求总能量和总角动量守恒，则整层上的气压被确定为

$$p_k = \frac{\Delta p_k}{\ln(p_{k+1/2}/p_{k-1/2})} \quad (2.20)$$

但是为计算方便，在本模式中简单取

$$p_k = \frac{1}{2}(p_{k+1/2} + p_{k-1/2}) \quad (2.21)$$

对计算不会有多大的影响。

## 2.5.2 垂直差分

在总能量和总角动量守恒要求下，构造本模式的垂直差分格式。

### 2.5.2.1 地面气压倾向方程

式 (2.14) 的差分近似为

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \sum_{k=1}^{NLEV} \nabla(V \cdot \Delta p)_k \quad (2.22)$$

其中

$$\Delta p_k = p_{k+1/2} - p_{k-1/2}$$

将式 (2.19) 代入，得到

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \sum_{k=1}^{NLEV} [D_k \Delta p_k + (V_k \cdot \nabla p_s) \Delta B_k] \quad (2.23)$$

这里

$$\Delta B_k = B_{k+1/2} - B_{k-1/2}$$

### 2.5.2.2 $\eta$ 面垂直速度

式 (2.16) 的差分近似为

$$\left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{k+1/2} = - \frac{\partial p_{k+1/2}}{\partial t} - \sum_{j=1}^k \nabla(V \cdot \nabla p)_j \quad (2.24)$$

由式 (2.19)，有

$$-\left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{k+1/2} = \left[ B_{k+1/2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \sum_{j=1}^k [D \Delta p + (V \cdot \nabla p_s) \Delta B]_j \right] \quad (2.25)$$

$\partial p_s / \partial t$  是由式 (2.23) 确定。

### 2.5.2.3 垂直平流

预报变量  $X$  的垂直平流为

$$\left( \dot{\eta} \frac{\partial X}{\partial \eta} \right)_k = \frac{1}{2\Delta p_k} \left[ \left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{k+1/2} (X_{k+1} - X_k) + \left( \dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_{k-1/2} (X_k - X_{k-1}) \right] \quad (2.26)$$

这种形式可以保证在差分近似时，没有虚假动能、位能或湿度的源（汇）出现。

### 2.5.2.4 静力方程

静力方程 2.15 的差分构造，是在第一层取单向差，其它层取中央差，即

$$\phi'_{1+1/2} - \phi'_1 = -R_d(T_v)_1 \ln \frac{p_{1+1/2}}{p_1}$$

$$\phi'_{k+1/2} - \phi'_{k-1/2} = -R_d(T_v)_k \ln \frac{p_{k+1/2}}{p_{k-1/2}},$$

由第二式有

$$\phi'_{k+1/2} = \phi'_s + \sum_{j=k+1}^{NLEV} R_d(T'_v)_j \ln \frac{p_{j+1/2}}{p_{j-1/2}} \quad (2.27)$$

在整层上的位势高度偏差为

$$\phi'_k = \phi'_{k+1/2} + \alpha_k R_d(T'_v)_k \quad (2.28)$$

这里

$$\begin{cases} \alpha_1 = \ln(p_{1+1/2}/p_1) \\ \alpha_k = 1 - \frac{p_{k-1/2}}{\Delta p_k} \ln \frac{p_{k+1/2}}{p_{k-1/2}} \quad (k \geq 2) \end{cases} \quad (2.29)$$

系数 $\alpha$ 的如上选取是由总能量和角动量守恒要求推出的。

#### 2.5.2.5 气压梯度项

位势高度偏差由式(2.28)给定, 则气压梯度项第二项为

$$R_d(T'_v \nabla \ln p)_k = \frac{R_d(T'_v)_k}{\Delta p_k} \left[ \ln \left( \frac{p_{k+1/2}}{p_{k-1/2}} \right) \nabla p_{k-1/2} + \alpha_k \nabla(\Delta p_k) \right] \quad (2.30)$$

可保证垂直差分不会引起虚假角动量的源(汇), 但要求式(2.29)中 $\alpha_1 = 1$ 。由此, 应有 $p_1 = p_{1.5}/e$ 。在本模式中由于取整层和半层的气压有如式(2.21)的近似关系, 即 $p_1 = (p_{1.5} + 0)/2$ , 则式(2.29)中 $\alpha_1 = \ln 2$ 。因此, 本模式(也包括气象中心的谱模式)实际上并不保证角动量和总能量守恒, 但是影响甚微。

将半层气压表达式(2.19)代入式(2.30)中, 则有

$$R_d(T'_v \nabla \ln p)_k = \frac{R_d(T'_v)_k}{\Delta p_k} \left[ \Delta B_k + C_k \frac{1}{\Delta p_k} \ln \left( \frac{p_{k+1/2}}{p_{k-1/2}} \right) \right] \nabla p_s \quad (2.31)$$

其中

$$C_k = A_{k+1/2} B_{k-1/2} - A_{k-1/2} B_{k+1/2} \quad (2.32)$$

#### 2.5.2.6 能量转化项——气压面垂直速度

在公式(2.12)中气压面垂直速度的差分近似的构造, 是在绝热无摩擦情况下, 要求模式大气总能量守恒。把式(2.17)改写为

$$\left( \frac{\omega}{p} \right)_k = \frac{1}{p} \int_0^{\eta_k} \nabla \left( V \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\eta + (V \cdot \nabla \ln p)_k \quad (2.33)$$

作如下差分近似

i) 在式(2.33)中第一项写为

$$-\frac{1}{\Delta p_k} \left[ \left( \ln \frac{p_{k+1/2}}{p_{k-1/2}} \right) \sum_{j=1}^{k-1} \nabla(V \Delta p)_j + \alpha_j \nabla(V \Delta p)_j \right] \quad (2.34)$$

这里



$$\nabla(V\Delta p)_k = D_k\Delta p_k + p_s(V_k \cdot \nabla \ln p_s) \Delta B_k$$

ii) 第二项

在式 (2.31) 中用  $V_k$  代  $T_v$ , 则有

$$(V \cdot \nabla \ln p)_k = \frac{p_s}{\Delta p_k} \left[ \Delta B_k + C_k \frac{1}{\Delta p_k} \ln \left( \frac{p_{k+1/2}}{p_{k-1/2}} \right) \right] V_k \cdot \nabla \ln p_s \quad (2.35)$$

在式 (2.30) 中作了如下近似

$$\left( \frac{1}{p} \right)_k = \left( \frac{d \ln p}{dp} \right)_k \approx \frac{1}{\Delta p_k} \ln \left( \frac{p_{k+1/2}}{p_{k-1/2}} \right)$$

这就是式 (2.20)

## 2.6 时间积分

首先对散度、温度和地面气压方程采用半隐式处理, 并用时间滤波来抑制虚假的计算模。第二, 对涡度方程的纬向平流部分  $U \frac{\partial q}{\partial \lambda}$ , 分出一线性项  $U_r(\mu) \frac{\partial q}{\partial \lambda}$ , 作半隐式处理,

增大时间步长。

基本方程 (2.10) ~ (2.14) 的时间差分格式形式上可写为

$$\delta_t \zeta_{\downarrow} = ZT_{\downarrow} - \frac{1}{2a} \beta_{zQ} \frac{\vec{U}_r(\mu)}{(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta_u \zeta_{\downarrow} \quad (2.36)$$

$$\delta_t q_{\downarrow} = QT_{\downarrow} - \frac{1}{2a} \beta_{zQ} \frac{\vec{U}_r(\mu)}{(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta_u q_{\downarrow} \quad (2.37)$$

$$\delta_t D_{\downarrow} = DT_{\downarrow} - \nabla^2 G_{\downarrow} - \frac{1}{2} \beta_{DT} \nabla^2 \left[ \underline{r} \Delta_u T_{\downarrow} + \frac{R_d T_0}{P_0} \Delta_u P_s \right] \quad (2.38)$$

$$\delta_t T'_{\downarrow} = TT_{\downarrow} - \frac{1}{2} \beta_{DT} \underline{\tau} \Delta_u D_{\downarrow} \quad (2.39)$$

$$\delta_t P_s = PT - \frac{1}{2} \beta_{DT} \vec{v} \Delta_u D_{\downarrow} \quad (2.40)$$

这里, 符  $\downarrow$  代表列向量;  $\rightarrow$  代表行向量; 底线=代表矩阵。  $ZT$ ,  $QT$ ,  $DT$ ,  $G$ ,  $TT$  和  $PT$  分别表示公式 (2.10) ~ (2.14) 的右端项 (不包括扩散项)。  $\vec{U}_r$  的分量  $U_r(\mu)_k$  是在时刻  $t - \Delta t$ , 对每个高斯纬圈和第  $k$  个模式层上的最大和最小风速的算术平均, 并乘以  $\cos \varphi$ 。

行向量  $\vec{v}$  定义为

$$\vec{v} = (\Delta P_1^r, \Delta P_2^r, L, \Delta P_{NLEV}^r)。$$

$\Delta$  矩阵  $\underline{\tau}$  定义为

$$\tau = \frac{C_0^2}{R_d} \begin{pmatrix} \alpha_1^r & & & & & & 0 \\ \frac{\Delta p_1^r}{\Delta p_2^r} \ln \frac{p_{2+1/2}^r}{p_{2-1/2}^r} \alpha_2^r & & & & & & \\ \frac{\Delta p_1^r}{\Delta p_3^r} \ln \frac{p_{3+1/2}^r}{p_{3-1/2}^r} & \frac{\Delta p_2^r}{\Delta p_3^r} \ln \frac{p_{3+1/2}^r}{p_{3-1/2}^r} & \alpha_2^r & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \frac{\Delta p_1^r}{\Delta p_{NLEV}^r} \ln \frac{p_{NLEV+1/2}^r}{p_{NLEV-1/2}^r} & \dots & \frac{\Delta p_{NLEV}^r}{\Delta p_{NLEV}^r} \ln \frac{p_{NLEV+1/2}^r}{p_{NLEV-1/2}^r} & \alpha_{NLEV}^r & & & \end{pmatrix}$$

▽ 矩阵  $\underline{r}$  定义为

$$\underline{r} = R_d \begin{pmatrix} \alpha_1^r, \ln \frac{p_{2+1/2}^r}{p_{2-1/2}^r} & \ln \frac{p_{3+1/2}^r}{p_{3-1/2}^r} & \dots & \ln \frac{p_{NLEV+1/2}^r}{p_{NLEV-1/2}^r} \\ & \alpha_1^r & \ln \frac{p_{3+1/2}^r}{p_{3-1/2}^r} & \ln \frac{p_{NLEV+1/2}^r}{p_{NLEV-1/2}^r} \\ & & \vdots & \\ & 0 & \alpha_{NLEV-1}^r & \ln \frac{p_{NLEV+1/2}^r}{p_{NLEV-1/2}^r} \\ & & & \alpha_{NLEV}^r \end{pmatrix}$$

其中

$$p_{k+1/2}^r = A_{k+1/2} + p_0 B_{k+1/2}$$

$$\Delta p_k^r = p_{k+1/2}^r - p_{k-1/2}^r$$

而算子  $\delta_t$  和  $\Delta_u$  定义为

$$\delta_t X = (X^+ - X_f^-) / 2\Delta t \quad (2.41)$$

$$\Delta_u X = (X^+ - X_f^- - 2X) \quad (2.42)$$

$$\tilde{\Delta}_u X = \bar{X}_f - 2X \quad (2.43)$$

$X$  表示在时刻  $t$  的一个变量,  $X^+$  是  $t + \Delta t$  时刻值,  $X_f^-$  是在  $t - \Delta t$  时刻时间滤波值。时间滤波定义为

$$X_f = X + \varepsilon_f (X_f^- - 2X + X^+) \quad (2.44)$$

它又可分为两部分计算

$$\tilde{X}_f = X + \varepsilon_f (X_f^- - 2X + X^+)$$

$$X_f = \tilde{X}_f + \varepsilon_f X^+$$

公式中使用的常数为

$$p_0 = 1013 \text{ hPa}, T_0 = 288 \text{ K}, \beta_{DT} = 0.75, \beta_{zQ} = 1$$

$$\varepsilon_f = 0.1$$

### 2.6.1 涡度和湿度方程的隐式处理

这与国家气象中心的预报模式类似。由式 (2.38)、(2.39) 和 (2.40) 有

$$\left( I + 2\Delta t \alpha(\mu) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) q_{\downarrow}^+ = q_{f\downarrow}^- + 2\Delta t Q T_{\downarrow} - 2\Delta T \alpha(\mu) \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{\Delta}_u q_{\downarrow} \quad (2.45)$$

其中

$$\overrightarrow{\alpha(\mu)} = \frac{1}{2a} \beta_{z0} \frac{\ddot{U}_r(\mu)}{1 - \mu^2}$$

对 (2.45) 作如下一章中讲的傅氏变换, 则湿度方程为

$$q_m^+ = \overrightarrow{b_m(\mu)} [(q_f^- + 2\Delta t Q T)_{m\downarrow} - 2im\Delta t \overrightarrow{\alpha(\mu)} \cdot \tilde{\Delta}_u q_{m\downarrow}] \quad (2.46)$$

这里向量

$$\overrightarrow{b_m(\mu)} = (1 + 2im\Delta t \overrightarrow{\alpha(\mu)})^{-1}。$$

类似于湿度方程的处理, 涡度方程为

$$\zeta_{m\downarrow}^+ = \overrightarrow{b_m(\mu)} \left[ \left( \zeta_{fm}^- + \frac{2im\Delta t}{2(1 - \mu^2)} (F_v + P_v)_m \right) - 2im\Delta t \alpha(\mu) \tilde{\Delta}_u \zeta_m - \frac{2\Delta t}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mu} (F_u + P_u)_m \right]_{\downarrow} \quad (2.47)$$

为便于计算, 上面方程中的  $b_m(\mu)$  和括号中最后一项作分部微分, 最后有如下的涡度方程

$$\zeta_{m\downarrow}^+ = \left[ \tilde{Z}_{\lambda m}(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{Z}_{\mu m}(\mu) \right]_{\downarrow} \quad (2.48)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{\lambda m}(\mu)_{\downarrow} = & \overrightarrow{b_m(\mu)} (\zeta_f^-)_{m\downarrow} + 2\Delta t \left[ im b_m(\mu) \left( \frac{(F_v + P_v)_m}{a(1 - \mu^2)} - \alpha(\mu) \tilde{\Delta}_u \zeta_m \right)_{\downarrow} \right. \\ & \left. + \frac{1}{a} C_m(\mu) (F_u + P_u)_{m\downarrow} \right] \end{aligned}$$

和

$$\tilde{Z}_{\mu m}(\mu)_{\downarrow} = -\frac{2\Delta t}{a} \overrightarrow{b_m(\mu)} \cdot (F_u + P_u)_{m\downarrow}$$

这里向量

$$\overrightarrow{C_m(\mu)} = \frac{\partial}{\partial \mu} \overrightarrow{b_m(\mu)}$$

未来时刻值  $(\zeta_{mn})^+$  是对式 (2.47) 作高斯积分求得。

### 2.6.2 散度、温度和地面气压的半隐式处理

用式 (2.41) 和 (2.42), 则式 (2.38), (2.39) 和 (2.40) 式展开为

$$D_{\downarrow}^+ = D_{f\downarrow}^- + 2\Delta t D T_{\downarrow} - 2\Delta t \nabla^2 \left\{ G_{\downarrow} + \frac{1}{2} \beta_{DT} \left[ r(T'^+ + T_f'^- - 2T') \right]_{\downarrow} \right.$$

$$\left. + \frac{R_d T_0}{P_0} (P_s^+ + P_{sf}^+ - 2P_s) \right\} \quad (2.49)$$

$$T_{\downarrow}^{\prime+} = T_1 - \Delta t \beta_{DT} \tau D_{\downarrow}^+ \quad (2.50)$$

$$P_s^+ = P_1 - \Delta t \beta_{DT} \bar{v} \bar{D}_{\downarrow}^+ \quad (2.51)$$

这里

$$T_1 = T_{f\downarrow}^{\prime-} + 2\Delta t (TT_{\downarrow}) - \Delta t \beta_{DT} \tau \tilde{\Delta}_u D_{\downarrow} \quad (2.52)$$

$$P_1 = P_{sf}^{\prime-} + 2\Delta t (PT) - \Delta t \beta_{DT} \bar{v} \tilde{\Delta}_u D_{\downarrow} \quad (2.53)$$

将式 (2.50) 和 (2.51) 代入式 (2.49) 有

$$(I - \Gamma \nabla^2) D_{\downarrow}^+ = DT'$$

这里

$$\Gamma = (\beta_{DT})^2 \Delta t^2 + \underline{r} \cdot \underline{\tau} + \frac{R_d T_0}{P_0} \bar{v} \quad (2.55)$$

$$DT' = [D_f^- + 2\Delta t (DT)]_{\downarrow} = \tilde{D}_{\lambda} + \tilde{D}_{\mu} + D^2 R$$

其中

$$\tilde{D}_{\lambda} = D_{f\downarrow}^- + \frac{2\Delta t}{\alpha(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (F_v + P_v)_{\downarrow}$$

$$\tilde{D}_{\mu} = \frac{2\Delta t}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (F_v + F_v)_{\downarrow}$$

$$R = -2\Delta t \left[ G_{\downarrow} + \frac{\beta_{DT}}{2} \left( \underline{r} \cdot T_{2\downarrow} + \frac{R_d T_0}{P_0} P_2 \right) \right] \quad (2.56)$$

而

$$T_{2\downarrow} = T_1 + (T_f^1)^{\sim} - 2T' \quad (2.57)$$

$$P_2 = P_1 + (P_{sf})^{\sim} - 2P_s \quad (2.58)$$

模式中半隐式求解次序如下。首先在高斯格点上计算式 (2.52) 和 (2.53) 和 (2.56) ~ (2.58) 形成  $R$  的格点值。将式 (2.54) 转到谱空间, 有

$$(D_{mn}^+)_{\downarrow} = (I + \frac{n(n+1)}{a^2} \Gamma)^{-1} (DT'_{mn})_{\downarrow}$$

同时也将  $T_1$  和  $P_1$  转谱空间, 利用式 (2.50) 和 (2.51) 就可计算出  $T^+$  和  $P_s^+$  的谱系数。

#### 参考文献

- [1] ECMWF. ECMWF Forecast model, Adiabatic Part, Meteorological Bulletin, ECMWF Research Department 1985
- [2] 陈嘉滨, 舒静君. 大气谱模式中质量守恒格式的研究. 大气科学, 1996, 20, (2): 169~180
- [3] 陈嘉滨, 高学杰. 质量守恒律在国家气象中心气候谱模式中的应用. 大气科学, 2000, 24 (5): 608~614
- [4] Chen Jiabin, Jiliren and Wu WanLi, 1988, Design and test of an improved scheme for global spectral model With reduced truncation error, Short-and Medium-Range Numerical Weather Prediction WMO/IUGG NWP Symposium, Tokyo, 4-8 August 1986, 431—440

- [5] Simmons A. J , Chen Jiabin. The calculation of geopotential and the pressure gradient in the ECMWF atmospheric model:Influence on the Simulation of the Polar atmosphere and on temperature analyses. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1991, 117, 29-58

## 第三章 模式求解的谱方法

将某一物理量（或场）通过按各种正交函数展开的形式来研究物理量（或场）的性质，广义地称为谱方法。更具体地说，如按三角函数的傅里叶展开，按球函数展开，按勒让德多项式展开（也称广义傅里叶展开），以及按其它正交函数展开等等。这种展开的意义可以理解为在向量空间中，一个向量用已知基底表示的概念的推广，因为这里基底函数的个数是无穷的。这种方法的特点是将比较复杂的函数用一些形式上比较简单，而性质为已知的函数族以级数形式表示出来，把大气模式方程组中的函数（包括已知的和未知的）在计算区域内用正交函数的有限项级数展开，通过积分运算，得到以展开系数和其对时间微商的常微分方程组，求解这些展开系数值，以达到求解谱展开前原函数的目的，这就是大气谱模式的基本原理。

### 3.1 谱方法基本概念

#### 3.1.1 球谐函数及其性质

延长预报时效或进行大气环流数值模拟，都是以全球大气为研究对象。对全球或半球的大气模式，选用球面曲线坐标系是适宜的，这样更能反映大气在地球上空运动的球面特征。这样，我们自然希望所选择的展开函数能适合于球坐标。另外，我们还希望所选择的展开函数能使大气预报方程中的各算子计算比较简单。由上一章可知，大气预报方程中包含了空间微分运算（水平和垂直偏导数、水平拉普拉斯算子）、非线性项以及垂直积分运算等。假如我们选择组成预报方程的某一算子（如球面拉普拉斯算子）的特征函数来作为展开函数，便可以在某种程度上达到简化运算的目的。球谐函数不但本身构成一个完备正交系，而且还正好可以满足以上这两个要求，因而被广泛地选作球面谱模式中的展开函数。

在球坐标系中，拉普拉斯方程为：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (3.1)$$

其中  $r$  为到球心的距离， $\varphi$  为纬度， $\lambda$  为经度。用分离变量法求解此方程，可令

$$u(r, \varphi, \lambda) = R(r)Y(\varphi, \lambda) \quad (3.2)$$

代入式 (3.1) 中，分离变量后得到

$$r^2 R'' + 2rR' - \nu R = 0 \quad (3.3)$$

和

$$\nabla^2 Y + \nu Y = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + \nu Y = 0 \quad (3.4)$$

其中  $\nu$  为分离变量时引进的参数。

方程 (3.4) 称为球调和方程。满足球调和方程的二阶导数的有界解，称为球谐函数。对式 (3.4) 继续应用分离变量法求解，令

$$Y(\varphi, \lambda) = H(\varphi)G(\lambda) \quad (3.5)$$

代入式 (3.4) 可得

$$G'' + m^2 G' = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \varphi \frac{dH}{d\varphi} \right) + \left( \nu_1 - \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} \right) H = 0 \quad (3.7)$$

其中  $m^2, \nu_1$  是在分离变量过程中引进的参数。显然，方程 (3.6) 有线性独立的解  $\cos m\lambda$  和  $\sin m\lambda$ 。

在方程式 (3.7) 中，令  $\cos \varphi = x$ ， $H(\varphi) = y(x)$  得：

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left( \nu_1 - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0 \quad (3.8)$$

当  $m = 0$  时，有

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \nu_1 y = 0 \quad (3.9)$$

式 (3.9) 称为勒让德方程，式 (3.8) 称为连带勒让德方程。可以证明，连带勒让德函数  $P_n^m(x)$  正是方程 (3.8) 的解<sup>[1]</sup>。所以，球调和方程 (3.4) 求出的球谐函数的表达式为：

$$Y_n^m(\varphi, \lambda) = \sin m\lambda P_n^m(\sin \varphi) \quad (3.10)$$

或

$$Y_n^m(\varphi, \lambda) = \cos m\lambda P_n^m(\sin \varphi) \quad (3.11)$$

( $m=0,1,2,\dots,n; n=0,1,2,\dots$ )

这里  $n$  称为球谐函数的阶。显然，独立的  $n$  阶球谐函数共有  $2n+1$  个。因为方程 (3.4) 是线性的，所以球谐函数的线性组合仍然是球谐函数。

根据欧拉公式：

$$\cos m\lambda + i \sin m\lambda = e^{im\lambda}$$

$$\cos m\lambda - i \sin m\lambda = e^{-im\lambda}$$

球谐函数也可表示成

$$Y_n^m(\varphi, \lambda) = e^{im\lambda} P_n^m \sin \varphi \quad (3.12)$$

( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ )

连带勒让德函数有多种解析表达式，其中比较经典的一个微分表达式是通过罗德里格（Rodrigues）公式给出的

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{(1-\mu^2)^{\frac{|m|}{2}}}{2^n n!}} \cdot \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2 - 1)^n \quad (3.13)$$

其中  $\mu = \sin \varphi$ 。值得注意的是，这里我们所定义的连带勒让德函数是标准化的，即有如下的正交性条件：

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^{m'}(\mu) d\mu = \begin{cases} 1 & \text{当 } (m, n) = (m', n') \\ 0 & \text{当 } (m, n) \neq (m', n') \end{cases} \quad (3.14)$$

另外，还要注意在式（3.13）中  $m$  取了绝对值，也就是说当  $m$  为负整数时，我们定义它所对应的连带勒让德函数与  $m$  取相应的正整数时相等，即

$$P_n^m(\mu) = P_n^{-m}(\mu) \quad (3.15)$$

如果在式（3.13）中  $m$  不取绝对值，则上式右端还应增加一个  $(-1)^m$  的因子，根据我们的定义，这个因子不再存在，从而使得相应的球谐函数展开式的表达较为简单。根据式（3.13），连带勒让德函数还可以写作如下的形式

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}} Q_{n-|m|}(\mu) \quad (3.16)$$

其中  $Q_{n-|m|}(\mu)$  表示一个关于  $\mu$  的  $n - |m|$  次多项式。显然，当  $m = 0$  时， $P_n^m(x)$  就变成了标准勒让德多项式  $P_n(x)$ 。

从式（3.16）可以得到  $P_n^m(x)$  的一个有用的性质：

$$P_n^m(-\mu) = (-1)^{\frac{n-|m|}{2}} P_n^m(\mu) \quad (3.17)$$

此式说明， $P_n^m(x)$  关于赤道或者为对称（ $n - |m|$  为偶数时），或者反对称（ $n - |m|$  为奇数时）。这一性质在全球和半球模式的设计中是很有用的。

在气象学的应用中，球谐函数  $Y_n^m(x)$  中的  $m$ ，通常称作纬向波数，它表示一个纬圈上谐波的个数。 $n - m$  表示除极点外北极和南极之间的  $P_n^m(x)$  的零点的个数。 $n$  常常被称为二维指数或全波数。因为  $\cos m\lambda$  和  $\sin m\lambda$  在  $2m$  条经线上等于零，而  $P_n^m(x)$  在  $n - m$  个纬圈上等于零，这些经、纬线便将整个球面分成了许多区域，球谐函数  $Y_n^m(x)$  在每一个区域内符号不变，而在两个相邻区域内符号相反，这样，我们就不难想象出在球面上波的分布概况。图 3.1 给出了  $n=5, m=1, 2, 3, 4, 5$  时  $Y_n^m$  的分布。



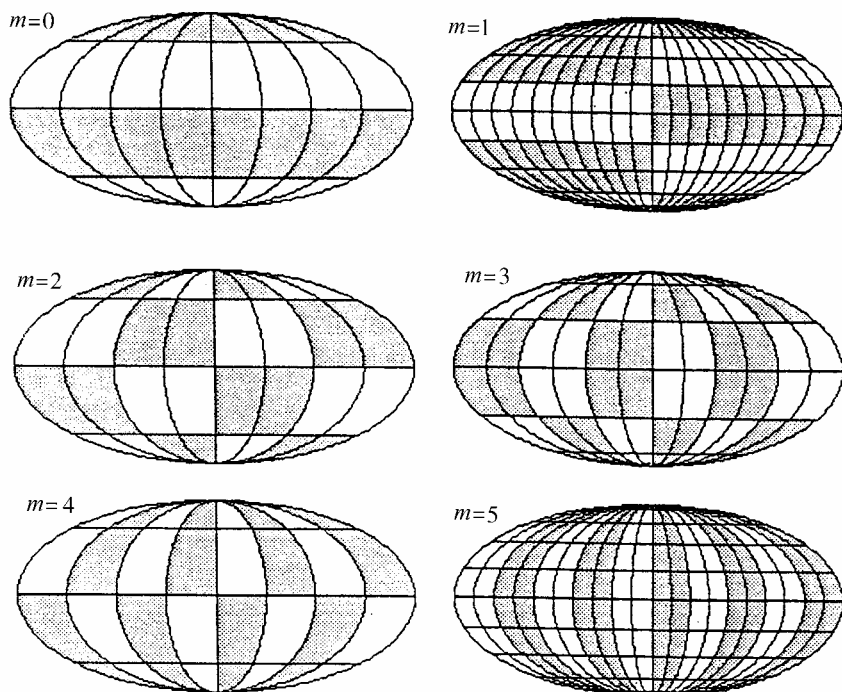


图 3.1  $Y_5^1, Y_5^2, Y_5^3, Y_5^4, Y_5^5$  在球面上的分布 (图中用的是能够表示 360 个经度的 Mollweide 投影,  $Y_n^m$  在阴影区和非阴影区取不同的符号)

球谐函数  $Y_n^m$  是球坐标系中二维拉普拉斯方程的特征函数, 即

$$\nabla^2 Y_n^m = -\frac{n(n+1)}{r^2} Y_n^m \quad (3.18)$$

其中,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$r$  为球半径。严格地说, 上式只对于一个几何球面坐标系  $(\varphi, \lambda, r)$  是成立的, 假如我们选取其他的垂直坐标, 如  $\sigma$  坐标, 则上式不再成立, 因为在  $\sigma$  常数的所谓“水平面”上,  $r$  不再是一个常数。然而, 此时式 (3.18) 仍然可以作为一个相当精确的近似公式而被采用, 而且这种近似与我们在推导数值天气预报和大气环流模式中用的原始方程组所引用的其他近似是一致的。

同时, 球谐函数还是纬向微分算子的特征函数, 即

$$\frac{\partial Y_n^m}{\partial \lambda} = im Y_n^m \quad (3.19)$$

这一关系式很容易从球谐函数的定义式 (3.12) 导出。

根据三角函数的正交性和连带勒让德函数的正交性, 立即可以推出球谐函数的正交性:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m Y_{n'}^{m'} * d\lambda d\mu = \begin{cases} 1 & \text{当}(m, n) = (m', n') \\ 0 & \text{当}(m, n) \neq (m', n') \end{cases} \quad (3.20)$$

其中  $Y_n^{m*}$  表示  $Y_n^m$  的复共轭函数, 根据 (3.15) 式, 则有

$$Y_n^{m*} = Y_n^{-m} \quad (3.21)$$

对于球面上任意一个连续函数  $F(\lambda, \mu)$ , 我们都可以表达为

$$F(\lambda, \mu) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} F_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (3.22)$$

如果  $F = F(\lambda, \mu, \eta, t)$ , 其中  $\eta$  表示某种垂直坐标, 因

$$F(\lambda, \mu, \eta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=|n|}^{\infty} F_n^m(\eta, t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (3.23)$$

其中  $F_n^m$  称为谱分量, 由球谐函数的正交性可推出:

$$F_n^m(\eta, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu, \eta, t) Y_n^m * d\lambda d\mu \quad (3.24)$$

### 3.1.2 谱截断问题

上一节中给出的球面上任一连续函数  $F$  的谱展开式 (3.22) 和 (3.23) 都包含无穷多个谱分量, 但在实际的数值计算中, 我们仅仅能够处理有限多个谱分量, 而不可能考虑无限多个分量, 因此, 这就给我们提出了无穷项展开式的波数截断问题。

在前述的谱展开式中, 当  $m$  和  $n$  增大时, 对应的谱分量所代表的大气运动所具有的水平尺度就趋于减小, 所以利用球谐函数展开式, 就可以直接控制那些我们希望忽略掉的尺度较小的现象, 这与格点法中通过选择网格距来达到同样的目的是非常相似的。通常我们可以这样来截断一个物理场的谱展开式:

$$F = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{N(m)} F_n^m Y_n^m \quad (3.25)$$

其中求和下标  $m$  取为从  $-M$  到  $M$  可以保证  $F$  为实数。这是因为从式 (3.24) 和 (3.21) 可知,

$$F_n^{-m} = F_n^{m*}$$

从而  $F_n^{-m} Y_n^{-m} + F_n^m Y_n^m$  是实数。

我们来考虑一下截断方式的问题。最一般的截断方式为五边形截断, 如图 3.2 所示, 这种截断由 3 个参数  $M$ 、 $N$ 、 $K$  来定义。 $M$  为东西向包括的最多傅里叶波数,  $N$  为连带勒让德多项式在  $m = 0$  时最高阶数,  $K$  为连带勒让德多项式的最高阶数。随着  $M$ 、 $N$ 、 $K$  取值不同, 五边形截断有如下几种常用的特例:

三角形截断:  $M = N = K$

平行四边形截断:  $K = N + M$

梯形截断:  $N = K > M$

式 (3.25) 中求和极限  $N(m)$  由下式确定:

$$N(m) = N + |m|, \text{ 当 } N + |m| \leq K$$

$$N(m) = K, \text{ 当 } N + |m| > K$$

显然, 对于三角形截断而言, 式 (3.25) 可写为如下形式:

$$F = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N F_n^m Y_n^m \quad (3.26)$$

而对于平行四边形截断式 (3.25) 则变为:

$$F = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{N+|m|} F_n^m Y_n^m \quad (3.27)$$

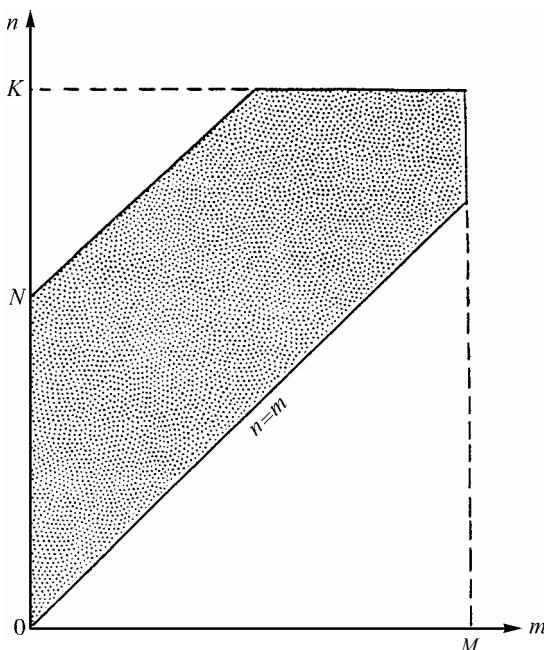


图 3.2 五边形截断

早期的谱模式几乎都是用的平行四边形截断, 但是大多数后来投入正式业务使用的谱模式, 如法国、日本和欧洲中期天气预报中心的模式, 则是用三角形截断。

选择截断方式的原则, 应当是最充分地利用给定的自由度, 也就是说, 或者是在一定的计算代价下 (即保留一定数目的谱分量的条件下), 获得最精确的计算结果, 或者是在一定的精度要求下, 花费最小的计算代价。当然, 上述要求的实现有赖于我们所研究问题的性质和可能获得的计算设备。

在早期的谱模式中, 倾向于应用平行四边形截断。一方面, 是因为平行四边形截断的谱分量可以存储在一个二维数组之中, 这样编写计算机程序较为方便。另一方面, 早期的研究表明<sup>[2]</sup>, 对于甚低分辨率 (即仅取 5~10 个纬向波数) 的模式, 平行四边形截断可使 500 hPa 旋转流场的动能保留最大的方差。但 Bear<sup>[3]</sup> 的研究则说明, 在中等分辨率模式中用三

角形截断较好。另外，三角形截断具有各向同性的性质<sup>[4]</sup>，它能保证截断后所得的分辨率在整个球面上是均匀的，而平行四边形截断的有限展开式，其分辨率仅在东西方向上是均匀的，而南北方向的分辨率既不一定与东西方向上的分辨率相等，而且还随地理位置的变化而变化，也就是说，对三角形截断而言，如果我们选择一新的球坐标系，该坐标系可沿经过球心的任意轴作任意旋转，旧坐标系中的球谐函数的  $n$  方向均可表示为新坐标系球谐函数  $n$  维方向的线性组合，这种关系可用下式来表示：

$$Y_{m,n}(\lambda, \varphi) = \sum_{m'=-n}^n C_n^{(m,m')} Y_{m',n}(\lambda', \mu') \quad (3.28)$$

上式中  $\lambda'$  和  $\varphi'$  为新坐标系的坐标（ $\mu' = \sin \varphi'$ ）。复数系数  $C_n^{(m,m')}$  依赖于  $n, m, m'$  以及新坐标系相对于旧坐标系的旋转方向。由此可知，对三角形截断，由于其截断形式为

$$\sum_{m'=-M}^M \sum_{n=|m|}^M, \text{ 所以式 (3.28) 右边的 } n \leq M, \text{ 因而式 (3.28) 右边所表示的在新坐标系下的}$$

所有谐波分量均在保留波数范围之内，这就是说，老坐标系中原截谱展开式中的任意一个分量  $Y_n^m$  在新坐标系中的截谱展开式中均能得到完全准确的表达。而对平行四边形截断，它的有限项展开式所表示的场，仅仅对于围绕地球轴的坐标旋转变换保持不变。

## 3.2 勒让德变换

### 3.2.1 连带勒让德函数的计算

在求解谱模式的预报变量谱系数时，要反复用到在给定的沿经向格点  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) 上的  $P_n^m(\mu, j)$  之值，这些值最好能预先算好并存储在计算机内。为了便于在调试模式时应用，表 3.1 给出了前几个连带勒让德函数的具体表达式<sup>[5]</sup>。另外，有许多递推公式也可用于计算  $P_n^m(\mu, j)$  之值。虽然各种计算方案中，递推公式本身均精确成立，但由于在数值计算时存在舍入误差，这种舍入误差在逐步递推时可能造成误差累积，随着  $n, m$  的增大而误差迅速增大，以致严重影响所计算的  $P_n^m(\mu, j)$  的准确性，因而我们必须考虑递推公式的计算稳定性。下面给出的递推公式计算稳定性较好，可适用于高分辨率的谱模式。

表 3.1 标准化的勒让德函数  $P_n^m(\mu)$

$n \backslash m$	0	1	2	3
0	1			
1	$\sqrt{3}\mu$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-\mu^2}$		
2	$\frac{\sqrt{5}}{2}(3\mu^2 - 1)$	$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}\mu\sqrt{1-\mu^2}$	$\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}(1 - \mu^2)$	
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$	$\frac{\sqrt{21}}{4}(5\mu^2 - 1)\sqrt{1-\mu^2}$	$\frac{\sqrt{105}}{2\sqrt{2}}(\mu - \mu^3)$	$\frac{\sqrt{5}}{48}(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}$

考虑如下  $P_n^m(\mu, j)$  计算的递推公式

$$P_n^m(\mu) = c_n^m P_{n-2}^{m-2}(\mu) - d_n^m P_{n-1}^{m-2}(\mu) + e_n^m P_{n-1}^m(\mu) \quad (3.29)$$

其中

$$\begin{aligned} m > 0 \\ c_n^m &= \left( \frac{2n+1}{2n-3} \cdot \frac{m+n-1}{m+n} \cdot \frac{m+n-3}{m+n-2} \right)^{1/2} \\ d_n^m &= \left( \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{m+n-1}{m+n} \cdot \frac{n-m+1}{m+n-2} \right)^{1/2} \\ e_n^m &= \left( \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{n-m}{n+m} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

上面的递推公式中，计算  $m$  阶的连带勒让德函数，要用到  $(m-2)$  阶的连带勒让德函数之值。因此，要首先算出  $P_n^0(\mu_j)$  和  $P_n^1(\mu_j)$  来，具体计算步骤如下：

第一步，根据已知头两个连带勒让德函数多项式的解析表达式

$$\begin{aligned} P_0^0(\mu) &= 1 \\ P_1^0(\mu) &= \sqrt{3}\mu \end{aligned}$$

和递推公式

$$P_{n+1}^0(\mu) = \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{n+1} \mu P_n^0(\mu) - \frac{n}{n+1} \sqrt{\frac{2n+3}{2n-1}} P_{n-1}^0(\mu) \quad (3.30)$$

计算出  $P_n^0(\mu)$  ( $n=2, 3, \dots, N$ )

第二步，根据

$$P_1^1(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2}} (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}$$

和递推公式

$$P_{n+1}^m(\mu) = f_n^m \mu P_n^m(\mu) - g_n^m P_{n-1}^m(\mu) \quad (3.31)$$

计算出  $P_n^1(\mu)$  ( $n=2, 3, \dots, N$ )。上式中，

$$\begin{aligned} f_n^m &= \left( \frac{2n+1}{n-m+1} \cdot \frac{2n+3}{n+m+1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ g_n^m &= \left( \frac{n-m}{n-m+1} \cdot \frac{n+m}{n+m+1} \cdot \frac{2n+3}{2n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

这样，就可以用式 (3.29) 进行递推计算，计算  $P_m^m(\mu)$  时，要用到  $P_{m-1}^m(\mu)$  之值，此时只需定义

$$P_{m-1}^m(\mu) = 0$$

### 3.2.2 勒让德变换

由式 (3.23) 可知, 对任一球面上连续函数  $F(\lambda, \mu, \eta, t)$ , 均可展开为如下形式:

$$F = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} F_n^m P_n^m e^{im\lambda} \quad (3.32)$$

上式中, 在计算时实际上可分成两步来完成, 即

$$F^m = \sum_{n=|m|}^{\infty} F_n^m P_n^m \quad (3.33)$$

$$F = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F^m e^{im\lambda} \quad (3.34)$$

$F^m$  称为函数  $F$  的傅里叶展开系数。由式 (3.24) 可知

$$F_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} F P_n^m e^{-im\lambda} d\lambda \quad (3.35)$$

上式中也可把计算分成两部分

$$F^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F e^{-im\lambda} d\lambda \quad (3.36)$$

$$F_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F^m P_n^m(\mu) d\mu \quad (3.37)$$

式 (3.33) 称为勒让德逆变换, 它把函数从勒让德谱系数变换到傅里叶系数。式 (3.37) 则把函数由傅里叶系数变换到勒让德谱系数, 称之为勒让德正变换。(3.33) 和 (3.37) 这种傅里叶系数与勒让德谱系数之间的转换统称为勒让德变换。

## 3.3 快速傅里叶变换

在进行谱模式计算时, 要经常用到傅里叶变换。傅里叶变换包括解析的方法 (即傅里叶级数, 傅里叶积分) 和代数的方法 (即有限离散傅里叶变换), 在数值计算时主要讨论有限离散傅里叶变换 (以后称为 DFT), 由于 DFT 的计算工作量非常大, 致使有些问题无法通过这一途径来解决, 而快速傅里叶变换 (FFT) 就是为解决这一矛盾而提出的。由于 FFT 只是计算有限离散傅里叶变换的有效方法, 因此下面先介绍一下有限离散傅里叶变换。

### 3.3.1 离散傅里叶变换

离散傅里叶变换定义为:

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j W^{-jk} \quad (3.38)$$

其逆变换为

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} F_k W^{jk} \quad (3.39)$$

以上两式表示了向量  $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$  与向量  $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$  之间的线性互逆的关系。这里采用记号

$$W = W_N = e^{i2\pi/N} \quad (3.40)$$

它是 1 的一个  $N$  次原根，即  $W^N = 1$ ，并且当且仅当  $j$  为  $N$  的整数倍时， $W^j = 1$ 。

离散傅里叶变换有如下的性质：

(1) 设  $\{f_j\}$  为实数列，即  $f_j \equiv f_j^*$ ，则其变换  $\{F_k\}$  满足共轭关系  $F_{N-k} = F_k^*$ ，由于周期性，这等价于  $F_{-k} = F_k^*$ 。

(2) 当  $\{f_j\}$  为实数并且对称，即  $f_{N-j} = f_j = f_j^*$ ，则  $\{F_k\}$  也是实数并且对称。

(3) 当  $\{f_j\}$  为实数并且反对称，即  $f_{N-j} = -f_j = -f_j^*$ ，则  $\{F_k\}$  是纯虚数并且反对称。

利用上述这些性质，可使傅里叶变换的计算量减少一半。

### 3.3.2 快速傅里叶变换 (FFT)

离散傅里叶变换的计算，就是从已知的  $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$  按显示式 (3.38) 计算未知的  $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$ ，或者从已知的  $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$  按显示式 (3.39) 计算未知的  $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ ，表面上看，这是一个极其简单的算术问题。根据式 (3.38) 或 (3.39)，如果不计及三角函数

$$W^{jk} = \cos \frac{2\pi jk}{N} + i \sin \frac{2\pi jk}{N}$$

的产生，计算一个  $N$  点变换的工作量为  $N^2$  次复运算（所谓一次复运算，是指一次复数乘法连同一次复数加法）。对这种算法，考虑到三角函数的对称性等因素，可以把工作量节约一定的倍数，但工作量仍然具有  $N^2$  的量级。在谱模式或其它一些实际工作中用到的 DFT， $N$  值往往较大，特别是对于“实时”性计算，这样的工作量便成为一个沉重的负担。正因为如此，在相当长的时间内，在各种领域的谐波分析问题中，数值方法没有得到广泛应用。20 世纪 60 年代，Cooley 和 Tukey 将傅里叶变换作为分析工具，提出了适用于计算机上使用的方法<sup>[6]</sup>，即所谓的快速傅里叶变换 FFT 的算法，从此才引起了广泛的注意。这种算法比传统的直接算法大大提高了工效，从而为数值谐波分析方法在科学技术许多方面的应用开辟了道路。下面就介绍 FFT 的原理。

首先考虑  $N$  可以分解为二个整数因数的乘积的情形，并把式 (3.39) 写成如下形式：

$$X(j) = \sum_{k=0}^{N-1} A(k) \cdot W^{jk} \quad (3.41)$$

$A(k)$  为复系数,  $W$  为单位的  $N$  次原根, 即

$$W = e^{\frac{2\pi i}{N}} \quad (3.42)$$

设  $N = r_1 r_2$ , 则式 (3.41) 中  $j, k$  分别表示为  $r_1, r_2$  进制数为:

$$\begin{cases} j = j_1 r_1 + j_0 & j_0 = 0, 1, \Lambda, r_1 - 1; & j_1 = 0, 1, \Lambda, r_2 - 1 \\ k = k_1 r_2 + k_0 & k_0 = 0, 1, \Lambda, r_2 - 1; & k_1 = 0, 1, \Lambda, r_1 - 1 \end{cases} \quad (3.43)$$

所以, 式 (3.41) 可写为:

$$X(j_1, j_0) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} A(k_1, k_0) W^{jk_1 r_2} W^{jk_0} \quad (3.44)$$

又因为

$$W^{jk_1 r_2} = W^{(j_1 r_1 + j_0) k_1 r_2} = W^{j_0 k_1 r_2} \cdot W^{j_1 k_1 r_1 r_2} = W^{j_0 k_1 r_2} \cdot W^{j_1 k_1 N}$$

所以

$$W^{jk_1 r_2} = W^{j_0 k_1 r_2} \quad (3.45)$$

再定义

$$A(j_0, k_0) = \sum_{k_1} A(k_1, k_0) \cdot W^{j_0 k_1 r_2} \quad (3.46)$$

故式 (3.44) 可写为

$$X(j_1, j_0) = \sum_{k_0} A_1(j_0, k_0) \cdot W^{(j_1 r_1 + j_0) k_0} \quad (3.47)$$

由上面的推导可知,  $A_1$  有  $N$  个元素, 每个元素要求  $r_1$  次运算, 计算  $A_1$  要  $N \cdot r_1$  次运算。类似地, 从  $A_1$  计算  $X$  要  $N \cdot r_2$  次运算。因而, 两步合起来, 所需要的运算次数为:

$$T = N(r_1 + r_2) \quad (3.48)$$

下面再来考虑  $N$  可分解为多因子的情形。设  $r_1$  和 (或)  $r_2$  还可以进一步分解, 不失一般性, 设  $r_2 = N_1 N_2$ , 则式 (3.41) 中  $j, k$  可表示为如下形式:

$$\begin{cases} j = j_1 r_1 + j_0 & j_0 = 0, 1, 2, \Lambda, r_1 - 1 \\ k = k_1 r_2 + k_0 & k_1 = 0, 1, 2, \Lambda, r_1 - 1 \end{cases} \quad (3.49)$$

其中,

$$\begin{aligned} j_1 &= j_2 N_1 + j_3 & j_2 &= 0, 1, 2, \Lambda, N_2 - 1; & j_3 &= 0, 1, 2, \Lambda, N_1 - 1 \\ k_0 &= k_2 N_2 + k_3 & k_2 &= 0, 1, 2, \Lambda, N_1 - 1; & k_3 &= 0, 1, 2, \Lambda, N_2 - 1 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} jk &= (j_1 r_1 + j_0)(k_1 r_2 + k_0) \\ &= j_1 k_1 r_1 r_2 + j_0 k_1 r_2 + (j_1 r_1 + j_0) k_0 \\ &= j_1 k_1 r_1 r_2 + j_0 k_1 r_2 + [(j_2 N_1 + j_3) r_1 + j_0] (k_2 N_2 + k_3) \\ &= j_1 k_1 N + j_2 k_2 N + j_0 r_2 k_1 + (j_3 r_1 + j_0) N_2 k_2 + (j_2 N_1 r_1 + j_3 r_1 + j_0) k_3 \end{aligned} \quad (3.50)$$

又因为



$$W^{(j_1 k_1 + j_2 k_2)N} = 1$$

所以

$$\begin{aligned} X(j_0, j_2, j_3) &= \sum_{K_1} \sum_{K_2} \sum_{K_3} W^{jk} \\ &= \sum_{K_1} \sum_{K_2} \sum_{K_3} W^{j_0 r_2 k_1} \cdot W^{(j_3 r_1 + j_0) N_2 k_2} \cdot W^{(j_2 N_1 r_1 + j_3 r_1 + j_0) k_3} \end{aligned} \quad (3.51)$$

令

$$A_1(j_0, k_2, k_3) = \sum_{K_1} A(k_1, k_2, k_3) W^{j_0 r_2 k_1} \quad (3.52)$$

$$A_2(j_0, j_3, k_3) = \sum_{K_2} A_1(j_0, k_2, k_3) W^{(j_3 r_1 + j_0) N_2 k_2} \quad (3.53)$$

故式 (3.41) 可写为:

$$X(j_0, j_2, j_3) = \sum_{K_3} A_2(j_0, j_3, k_3) W^{(j_2 N_1 r_1 + j_3 r_1 + j_0) k_3} \quad (3.54)$$

因为  $A_1$  有  $N$  个元素, 要运算  $r_1$  次,  $A_2$  有  $N$  个元素, 要运算  $N_1$  次, 最后一步式 (3.45) 有  $N$  个元素, 要运算  $N_2$  次, 所以, 三步加起来, 需要的运算次数为

$$T = N(r_1 + N_1 + N_2) \quad (3.55)$$

由上面的推导可知, 若  $N = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_m$ , 则运算次数为

$$T = N(r_1 + r_2 + \Lambda + r_m) \quad (3.56)$$

若  $r_j = s_j t_j (s_j, t_j > 1)$ , 则  $s_j + t_j < r_j$  (除非  $s_j = t_j = 2$ , 此时  $s_j + t_j = r_j$ )。一般说来, 尽可能多的分解因子可使式 (3.56) 有极小值, 但因子“2”可成对地组合在一起变为“4”, 这样计算步数并不增加。如果我们能选择  $N$ , 使  $N$  具有高组合性 (即可分解的因子很多), 我们就可以减少很多运算量, 若所有  $r_j$  均等于  $r$ , 即  $N = r^m$ , 则总运算量为

$$T(r) = N \cdot m \cdot r = r N \log_r N \quad (3.57)$$

如果有可能选择  $N$ , 使  $N = r^m$  中  $r = 2$  或  $4$ , 此时利用 FFT 计算效率的提高最为显著, 且计算程序也较为简单, 这样我们可使用计算机二进制计算。无论在计算机内存占有方面还是在计算量方面都表现出很强的优越性。下面就来推导  $r = 2$  的计算方法。设  $N = r^m$ ,  $r = 2$ , 则式 (3.41) 中的  $j, k$  可用二进制数表示:

$$\begin{cases} j = j_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \Lambda + j_1 \cdot 2 + j_0 \\ k = k_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \Lambda + k_1 \cdot 2 + k_0 \end{cases} \quad (3.58)$$

式中  $j_i$  和  $k_i$  等于 0 或 1,  $j_i$  和  $k_i$  正是  $j$  和  $k$  以二进制数表示时二进制数在该二进制位 (bit) 上的值。因而, 式 (3.41) 可写为:

$$X(j_{m-1}, \Lambda, j_0) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} \Lambda \sum_{k_{m-1}} A(k_{m-1}, \Lambda, k_0) \cdot W^{jk_{m-1} 2^{m-1} + \Lambda + jk_0} \quad (3.59)$$

求和符号  $\Sigma$  的  $k_i = 0, 1$ 。又因为

$$W^{2^m} = W^N = 1$$

所以

$$W^{jk_{m-1}2^{m-1}} = W^{j_0k_{m-1}2^{m-1}}$$

所以式 (3.59) 中对  $k_{m-1}$  的求和仅依赖于  $j_0, k_{m-2}, \dots, k_0$ ，且可写为如下形式：

$$A_1(j_0, k_{m-2}, \Lambda, k_0) = \sum_{k_{m-1}} A(k_{m-1}, \Lambda, k_0) \cdot W^{j_0k_{m-1}2^{m-1}} \quad (3.60)$$

依次这样处理第二个  $k_{m-2}$  求和号，第三个  $k_{m-3}$  求和号……，并运用如下关系式：

$$W^{jk_{m-1}2^{m-1}} = W^{j_{l-1}(2^{l-1} + \Lambda + j_0)k_{m-1}2^{m-1}} \quad (3.61)$$

这样就可以获得连续序列

$$\begin{aligned} & A_l(j_0, \Lambda, j_{l-1}, k_{m-l-1}, \Lambda, k_0) \\ &= \sum_{k_{m-l}} A_{l-1}(j_0, \Lambda, j_{l-2}, k_{m-l}, \Lambda, k_0) \cdot W^{(j_{l-1}2^{l-1} + \Lambda + j_0)k_{m-l}2^{m-l}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

式中  $l=1, 2, \dots, m$ 。由于

$$\begin{aligned} (j_{l-1}2^{l-1} + \Lambda + j_0)2^{m-l} &= j_{l-1}2^{m-1} + j_{l-2}2^{m-2} + (j_{l-3}2^{m-3} + \Lambda + j_0)2^{m-l} \\ &= \frac{1}{2}j_{l-1}2^m + \frac{1}{4}j_{l-2}2^m + (j_{l-3}2^{m-3} + \Lambda + j_0)2^{m-l} \end{aligned} \quad (3.63)$$

而

$$\begin{aligned} W^{\frac{1}{2}j_{l-1}2^m + \frac{1}{4}j_{l-2}2^m} &= e^{\frac{2\pi i}{n}(\frac{1}{2}j_{l-1}2^m + \frac{1}{4}j_{l-2}2^m)} \\ &= e^{j_{l-1}\pi i} e^{j_{l-2}\frac{\pi}{2}i} \\ &= (-1)^{j_{l-1}} (i)^{j_{l-2}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

所以，式 (3.62) 求和号的具体表达式为：

$$\begin{aligned} A_l(j_0, \Lambda, j_{l-1}, k_{m-l-1}, \Lambda, k_0) &= A_{l-1}(j_0, \Lambda, j_{l-2}, 0, k_{m-l-1}, \Lambda, k_0) \\ &\quad + (-1)^{j_{l-1}} i^{j_{l-2}} A_{l-1}(j_0, \Lambda, j_{l-2}, 1, k_{m-l-1}, \Lambda, k_0) \\ &\quad \cdot W^{(j_{l-3}2^{l-3} + \Lambda + j_0)2^{m-l}}, \quad j_{l-1} = 0, 1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

把  $A_l$  的元素序数（即第几个元素）预先存贮于计算机中， $A_l$  的元素序数为

$$j_02^{m-1} + \Lambda + j_{l-1}2^{m-1} + k_{m-l-1}2^{m-l-1} + \Lambda + k_0$$

由式 (3.65) 可知，对  $2^{m-1}$  的二进制位，只有 0 和 1 两种取值，故该位仅需两个存贮单元。又因为式 (3.65) 中  $A_l$  相对于  $j_0, \Lambda, j_{l-2}$  和  $k_{m-l-1}, \Lambda, k_0$  来说，可以分开同时进行计算，所以可采取并行算法来进行。若把式 (3.65) 中的  $A_l$  以  $A_{l-2}$  来表示，这就给出了与  $r=4$  等

价的算法, 这里不再多做说明。

由式 (3.65) 和 (3.59) 可知,

$$X(j_{m-1}, \Lambda, j_0) = A_m(j_0, \Lambda, j_{m-1}) \quad (3.66)$$

因此,  $X$  的元素排序与  $A_m$  的元素排序用二进制数表示时正好相反。

下面我们来看看  $r=2$  时的计算量, 由式 (3.65) 可知, 计算  $A_l$  时, 由于  $A_l$  有  $N$  个元素, 而每个元素, 只需  $N$  次复运算, 但仔细分析表达式 (3.65) 可知, 对  $j_{l-1}$  的二个取值而言, 只需一次复数乘法, 故计算  $A_l$  时需  $N$  次复数加法和  $N/2$  次复数乘法。由于  $l=1, 2, \dots, m$ , 所以, 当  $N=2^m$  时, 完成 FFT 需  $\frac{Nm}{2}$  次复数乘法和  $N \cdot m$  次复数加法。

## 3.4 高斯积分

### 3.4.1 高斯型求积公式

数值积分法, 是从近似计算的角度, 采用某种数值过程来求出定积分的数值。这种数值过程, 通常就是用一有限项的求和计算来代替积分计算, 这之间就必然存在一定的误差。我们经常用“代数精确度”的概念来衡量一个数值积分公式的精确程度。若一个求积公式对于  $f(x) = x^k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) 都变成精确等式, 而对于  $f(x) = x^{n+1}$  就不精确成立, 则称这个求积公式具有  $n$  次代数精确度。

一般说来, 代数精确度越高的求积公式就越精确。 $n$  个结点的内插求积公式至少具有  $n-1$  次代数精确度。因此, 要提高数值积分的精度, 可以通过增加结点的数目来实现。

对于包含相同结点数的积分公式, 从经济的角度考虑, 我们自然希望能采用一种代数精确度比较高的公式, 以期付出同等的代价, 而获得较高近似程度的计算结果。因此, 在建立数值积分公式的工作中, 不免提出这样的问题: 我们能否适当地选择  $n$  个结点和相应的  $n$  个系数, 使得求积公式具有最大的代数精确度? 从这个观点导出的积分公式便是本节所要介绍的高斯型求积公式。

为了具有一般性, 考虑积分

$$I = \int_a^b \omega(x) f(x) dx \quad (3.67)$$

其中  $\omega(x) \geq 0$  称为权函数。当取  $\omega(x) = 1$  时, 上式即为普通的积分。对于任何普通

积分  $\int_a^b f(x) dx$  都可写成  $\int_a^b \omega(x) \frac{f(x)}{\omega(x)} dx$  的形式, 从而都可化成此种形式的积分。

对于上述积分, 假设我们采用具有  $n$  个结点的积分公式

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (3.68)$$

其中系数 ( $c_i = 1, 2, \dots, n$ ) 与函数  $f(x)$  无关, 但是可以依赖于权函数  $\omega(x)$ 。我们的目的就是要适当地选择  $n$  个结点的坐标  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和相应的  $n$  个系数  $c_1, c_2, \dots, c_n$ 。使得求积公式 (3.68) 具有最高次数的代数精确度。

首先分析对于  $n$  个节点, 公式 (3.68) 可达到的最大代数精确度是多少? 假设公式 (3.68) 对于  $m$  次多项式 ( $m$  待定)

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

是精确成立的, 将此多项式代入 (3.68) 得:

$$\begin{aligned} & a_m \int_a^b \omega(x) x^m dx + a_{m-1} \int_a^b \omega(x) x^{m-1} dx + \Lambda + a_0 \int_a^b \omega(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \Lambda + a_0) \end{aligned} \quad (3.69)$$

令

$$\mu_k = \int_a^b \omega(x) x^k dx \quad (k = 0, 1, \Lambda, m)$$

并重新组合式 (3.69) 右端各项, 得到

$$a_m \mu_m + a_{m-1} \mu_{m-1} + \Lambda + a_0 \mu_0 = a_m \sum_{i=1}^n c_i x_i^m + a_{m-1} \sum_{i=1}^n c_i x_i^{m-1} + \Lambda + a_0 \sum_{i=1}^n c_i \quad (3.70)$$

上式中由于权函数  $\omega(x)$  的形式已给定, 故  $\mu_k$  是已知的常数, 根据  $m$  次多项式的系数  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$  所具有的任意性, 使式 (3.70) 成立的充分必要条件

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \Lambda + c_n = \mu_0 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \Lambda + c_n x_n = \mu_1 \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \Lambda + c_n x_n^2 = \mu_2 \\ c_1 x_1^m + c_2 x_2^m + \Lambda + c_n x_n^m = \mu_m \end{cases} \quad (3.71)$$

由于  $2n$  个待定参数 ( $c_1, c_2, \dots, c_n; x_1, x_2, \dots, x_n$ ) 最多只能给出  $2n$  个独立的条件, 因此可知  $m$  最多为  $2n-1$ 。

由此得出, 对于  $n$  个结点的积分公式, 其可能达到的最高代数精确度的次数是  $2n-1$ , 并且可以证明, 方程 (3.71) 当取  $m = 2n-1$  时是可解的。因此确实可以找到一组  $x_i$  和  $c_i$ , 使积分公式 (3.68) 达到  $(2n-1)$  次的代数精确度, 这样的公式就是高斯型求积公式。

关于高斯型求积公式的结点和系数, 自然可以从方程 (3.70) 解得, 但求解非线性方程比较困难, 一般是利用正交多项式来确定它们<sup>[7]</sup>。由于其推导过程较繁琐, 这里仅给出有关结果。

高斯型求积公式 (3.68) 的  $n$  个结点  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $[a, b]$  上关于  $\omega(x)$  的  $n$  次正交多项式  $Q_n(x)$  的  $n$  个零点。

高斯型求积公式的  $n$  个系数为

$$c_i = \frac{1}{Q'_n(x_i)} \int_a^b \frac{\omega(x) Q_n(x)}{x - x_i} dx = \frac{a_n(b-a)}{a_{n-1} Q'_n(x_i) Q_{n-1}(x_i)} \quad (i = 1, 2, \Lambda, n) \quad (3.72)$$

其中  $Q_n(x)$  是  $[a, b]$  上关于权函数  $\omega(x)$  的标准化正交多项式, 即

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \omega(x) Q_n^2(x) dx = 1 \quad (3.73)$$

而  $a_n$  和  $a_{n-1}$  分别是  $n$  次和  $n-1$  次标准化正交多项式  $Q_n(x)$  和  $Q_{n-1}(x)$  的首项系数。此外, 可以证明, 只要  $f(x)$  在  $(a, b)$  上连续, 那么当  $n \rightarrow \infty$  时, 高斯积分公式收敛于定积分, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) = \int_a^b \omega(x) f(x) dx \quad (3.74)$$

### 3.4.2 高斯-勒让德求积公式

上面, 对于一般的权函数  $\omega(x)$  讨论了高斯型积分公式, 对于不同的权函数, 便得到不同的具体的高斯型求积公式。高斯-勒让德求积公式是对应于权函数  $\omega(x)=1$  时的积分公式, 它是古典的高斯求积公式, 故一般就称之为高斯求积公式。

假设积分区间  $(a, b)$  为  $(-1, 1)$ , 因为总可以利用积分变量的变换

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \quad (3.75)$$

将区间  $(a, b)$  变成  $(-1, 1)$ , 而积分变为

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt \quad (3.76)$$

由于标准化的勒让德多项式

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad (3.77)$$

是  $[-1, 1]$  上关于权函数  $\omega(x)=1$  的正交多项式, 其首项系数为

$$a_n = \sqrt{2n+1} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \quad (3.78)$$

因此, 根据前面介绍的高斯积分公式的结点和系数的确定法, 可知高斯-勒让德求积公式中的  $n$  个结点  $x_1, x_2, \dots, x_n$  就是  $P_n(x)$  的  $n$  个零点, 而系数  $c_i$  按公式 (3.72) 再利用标准化的勒让德多项式的一个递推公式

$$(1-x^2)P_n'(x) = n \left[ \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} P_{n-1}(x) - x P_n(x) \right] \quad (3.79)$$

可得

$$c_i = \frac{2(2n+1)}{(1-x_i^2) [P_n'(x_i)]^2} \quad (3.80)$$

或

$$c_i = \frac{2(2n-1)(1-x_i^2)}{[nP_{n-1}(x_i)]^2} \quad (3.81)$$

对于  $n=2$  的高斯求积公式, 从几何直观地看, 即是能找到  $x_1, x_2$ , 使通过  $(x_1, f(x_1))$  及  $(x_2, f(x_2))$  的直线在  $[-1, 1]$  上围成的面积同三次多项式  $y=f(x)$  在  $[-1, 1]$  上围成的面积相等, 如图 3.3 所示, 其中  $x_1 = -1/\sqrt{3}, x_2 = 1/\sqrt{3}, c_1 = c_2 = 1$  其求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (3.82)$$

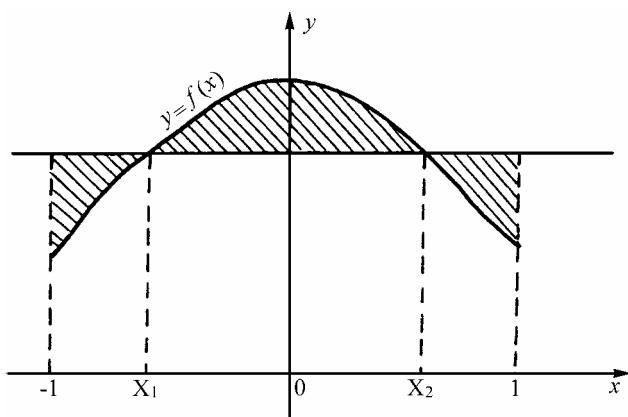


图 3.3  $n=2$  的高斯积分公式的几何意义

在应用高斯求积公式时, 应注意:

(1) 高斯求积公式的结点和系数仅与结点的总数  $n$  有关, 而与被积函数  $f(x)$  形式无关。如果  $f(x)$  是一个多项式, 且最高次数小于或等于  $2n-1$ , 则此求积公式是精确成立的, 实际计算时仅有舍入误差的影响; 否则, 此公式便是近似成立的, 除了舍入误差外, 尚有截断误差存在。

(2) 高斯求积公式的结点刚好是  $n$  次勒让德多项式的零点, 结点之间是非等距的。

(3) 如果积分区间不是  $(-1, 1)$ , 应当利用积分变换式 (3.75) 化成如式 (3.76) 的形式, 再应用高斯求积公式。

(4) 运算时与各结点取的先后顺序无关, 故被积函数的对称项可予以合并, 以减少乘法运算的次数。在改变求和顺序时, 应注意保持结点与所对应的系数不变。关于高斯求积公式的结点和系数, 有关书籍上列有较完整的表可供查用<sup>[6]</sup>, 如不够用, 亦可编程计算, 其计算步骤如下:

(1) 利用近似公式, 首先给出勒让德多项式零点的初始估计值。例如, 下面的公式对于  $n$  次勒让德多项式的第  $k$  个零点, 提供了相当精确的近似值

$$x_k^{(0)} = \arccos \left\{ \left[ \frac{4k-1}{4n+2} \pi + \frac{n-1}{8n^2} \operatorname{ctg} \left( \frac{4k-1}{4n+2} \pi \right) - \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (3.83)$$

(2) 再利用求函数零点的牛顿迭代法对逐个的  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 进行迭代计算, 其计算公式为

$$x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} - \frac{P_n(x_k^{(i)})}{P_n'(x_k^{(i)})} \quad (3.84)$$

其中勒让德多项式的计算可根据式 (3.30) 递推,  $P_n'(x)$  的计算则可利用式 (3.79)。

(3) 当

$$P_n(x_k^{(i)}) < \varepsilon_1 \quad (3.85)$$

或

$$\delta = \frac{|\delta_k^{(i+1)} - x_k^{(i)}|}{|x_k^{(i+1)}|} \quad (3.86)$$

时, 则停止迭代, 这里  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  是根据精度要求, 预先设定的充分小的常数。

以上介绍的用牛顿迭代法求勒让德多项式的零点的方法, 是一种收敛比较快的方法, 通常只要经过几次迭代便能达到所要求的精度。

在求出结点坐标  $x_k$  之后, 根据式 (3.81), 便可计算出对应的系数  $c_k$  来。

### 3.5 大气模式方程的谱截断形式

#### 3.5.1 谱方法回顾

本大气谱模式中, 连带勒让德多项式取如下标准化:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(\mu)]^2 d\mu = 1 \quad (3.87)$$

与式 (3.14) 比较可知, 二者的连带勒让德函数相差  $\sqrt{2}$  倍, 即如今的  $P_n^m(\mu)$  在运用式 (3.13) 计算时, 须除以  $\sqrt{2}$ , 因而由式 (3.13)、(3.14), 并与 (3.28) 比较可知,  $P_1^0(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2}}\mu$ , 所以,

$$f = \frac{\Omega}{\sqrt{0.375}} P_1^0 \quad (3.88)$$

式 (3.27) 中谱系数可写成如下形式

$$F_n^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda P_n^m(\mu) d\mu \quad (3.89)$$

傅里叶变换由快速傅里叶变换 (FFT) 完成, 外部积分则采用高斯积分来计算

$$F_n^m = \sum_{j=1}^J F^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \omega_j \quad (3.90)$$

其中  $\mu_j$  为经圈方向上的高斯格点,  $\omega_j$  为  $\mu_j$  格点上的权重。J 为南极至北极间的高斯格点总数。高斯格点  $\mu_j$  为勒让德多项式  $P_J(\mu)$  的零点

$$P_j^0(\mu_j) = 0, \quad j = 1, 2, \Lambda, J \quad (3.91)$$

对应的权函数为

$$\omega_j = \frac{2(1 - \mu_j^2)}{[JP_{J-1}(\mu_j)]^2} \quad (3.92)$$

且满足

$$\sum_{j=1}^J \omega_j = 2.0 \quad (3.93)$$

为避免混淆 (aliasing) 误差, 沿纬圈方向离散傅氏变换所用的计算格点总数  $I$  与沿经圈方向上的高斯格点总数  $J$  必须满足一定的条件。如第一章所推导的大气模式运动方程中含有形如

$$C = A \cdot B \quad (3.94)$$

形式的二次型非线性项, 而我们在处理非线性项时采用的技术方法为谱变换法, 所谓谱变换法, 就是将  $A$  和  $B$  首先从谱空间变换到网格点空间, 然后在逐个格点上作乘法计算, 得到每个格点上的  $C$  值, 最后再把  $C$  从网格点空间变换回谱空间。

将  $A, B$  从谱空间变换到格点空间, 是分解成如下两个步骤来进行的, 以  $A$  为例, 首先进行勒让德逆变换

$$A_m(\mu_j) = \sum_{n=|m|}^{N(m)} A_n^m P_n^m(\mu_j) \quad (3.95)$$

然后进行傅里叶逆变换

$$A(\lambda_i, \mu_j) = \sum_{m=-M}^M A_m(\mu_j) e^{im\lambda_i} \quad (3.96)$$

$B(\lambda_i, \mu_j)$  之值也按类似的步骤算出, 然后在逐个格点上计算

$$C(\lambda_i, \mu_j) = A(\lambda_i, \mu_j) \cdot B(\lambda_i, \mu_j) \quad (3.97)$$

这样计算出的  $C$  的格点值被用于纬向和经向的数值积分公式, 以完成从网格点到谱空间的变换, 该变换用连续函数的积分形式可以写成:

(1) 傅里叶变换

$$C_m(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \quad (3.98)$$

(2) 勒让德变换

$$C_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 C_m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \quad (3.99)$$

式 (3.98) 和式 (3.99) 的积分运算需要采用数值积分公式, 而且通常要求能给出准确的结果, 虽然舍入误差是肯定存在的, 但应力求避免混淆误差, 以消除可能导致的非线性计



算不稳定。

我们首先考虑沿纬圈的积分。在式 (3.98) 中, 被积函数是三个三角函数 (级数) 的乘积, 因为  $C$  中包含了  $A$  和  $B$  的各个谐波经非线性作用后新产生的波分量, 而  $A$ 、 $B$  均截断于  $M$ , 所以  $C$  中所包含的谐波的最大波数是  $2M$ ,  $e^{-im\lambda}$  中的  $m$  取值亦是  $-M$  至  $M$ , 于是整个被积函数中所包含的最大纬向波数是  $3M$ 。这一积分是利用离散傅里叶变换来计算的, 即在东西方向选取等距的计算网格点。

$$\lambda_i = \frac{2\pi i}{I} \quad i = 0, 1, 2, \dots, I-1 \quad (3.100)$$

于是

$$C_m(\lambda_i) = \frac{1}{I} \sum_{j=0}^{I-1} C(\lambda_i, \mu_j) e^{-im\lambda_i} \quad (3.101)$$

而矩形积分公式

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} f\left(\frac{2\pi i}{I}\right) \quad (3.102)$$

中  $f(x)$  如果是任意一个最大波数小于或等于  $I-1$  的截断傅里叶级数时, 则此求积公式是精确成立的。因此, 我们欲使式 (3.101) 的计算结果是准确的, 就应选取

$$I-1 \geq 3M \quad (3.103)$$

一般地, 选取的  $I$  值要易于进行有效的快速傅里叶变换, 以提高计算效率, 例如常常令  $I$  可以分解为  $2^p 3^q 5^r$  (其中  $p, q, r$  均为非负整数) 的形式。根据这一要求, 可调整纬向波数的截断点  $M$ , 使得  $3M+1$  刚好等于或略小于某一个可作如上分解的整数  $I$ 。所以, 在各种谱模式中所选取的比较典型的  $M$  值为 15、21、31、42、63、85、95、106。

其次, 再来考虑沿经圈方向的积分式 (3.99)。要选取适当的数值积分公式和相应的计算格点, 就需要考察一下式 (3.99) 中被积函数的性质。根据本章第一节提到的, 连带让德函数可表示为

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}} Q_{n-|m|}(\mu)$$

其中  $Q_{n-|m|}(\mu)$  是一个关于  $\mu$  的  $n-|m|$  次多项式。沿经圈方向的积分式 (3.99) 中被积函数包含了三个球谐波分量的乘积, 即

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 C_m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m_1} \sum_{n_1} \sum_{m_2} \sum_{n_2} [A_{n_1}^{m_1} B_{n_2}^{m_2} e^{i(m_1+m_2)\lambda} \cdot P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2}] e^{im_3\lambda} p_{n_3}^{m_3} \right\} d\lambda d\mu \end{aligned} \quad (3.104)$$

其中  $m_3 = -m$ ,  $n_3 = n$ 。从上式显然可见, 如果  $m_1+m_2+m_3 \neq 0$ , 根据  $e^{im\lambda}$  的周期性, 则逐项积分后该项对  $C_n^m$  的贡献必为零。也就是说, 要使对  $C_n^m$  的贡献不为零, 那么对应的三个纬向

波数就必须满足如下关系

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0 \quad (3.105)$$

要使  $m_1, m_2, m_3$  之和为零, 则  $m_1, m_2, m_3$  有两种可能的取值方式: (a) 三个数均为偶数, (b) 一个为偶数, 另两个为奇数。无论是哪一种取值方式, 均使得  $|m_1| + |m_2| + |m_3|$  为偶数, 从而  $(1 - \mu^2)^{(|m_1| + |m_2| + |m_3|)/2}$  为  $|m_1| + |m_2| + |m_3|$  次多项式。

令  $Q_n(\mu)$  表示关于  $\mu$  的  $n$  次多项式, 则有

$$\begin{aligned} P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_{n_3}^{m_3} &= (1 - \mu^2)^{(|m_1| + |m_2| + |m_3|)/2} Q_{n_1 - |m_1|}(\mu) \cdot Q_{n_2 - |m_2|}(\mu) \cdot Q_{n_3 - |m_3|}(\mu) \\ &= Q_{|m_1| + |m_2| + |m_3|}(\mu) \cdot Q_{n_1 - |m_1|}(\mu) \cdot Q_{n_2 - |m_2|}(\mu) \cdot Q_{n_3 - |m_3|}(\mu) \\ &= Q_{|n_1| + |n_2| + |n_3|}(\mu) \end{aligned} \quad (3.106)$$

由此可见, 式 (3.99) 中的被积函数是由有限个多项式的和组成的。现在, 我们再进一步观察它可能达到的最高次数是多少。

(1) 如果取三角形截断,  $N(m) = M$ , 这时  $n_1, n_2, n_3$  的最大值均为  $M$ , 所以  $\max(n_1 + n_2 + n_3) = 3M$ , 即对三角形截断, 式 (3.99) 的被积函数可以表示为一个  $3M$  次多项式。

(2) 如果取平行四边形截断,  $N(m) = |m| + N$ , 这时

$$\max(n_1 + n_2 + n_3) = \max(|m_1| + |m_2| + |m_3|) + 3N \quad (3.107)$$

其中  $m_1, m_2, m_3$  的取值范围均是从  $-M$  至  $M$ , 那么  $|m_1| + |m_2| + |m_3|$  是否可以达到  $3M$  的最大值呢? 回答是否定的, 因为如果  $|m_1|, |m_2|, |m_3|$  同时都等于  $M$ , 这三个纬向波数就不能满足约束条件式 (3.105) 了。为了求出  $|m_1| + |m_2| + |m_3|$  的最大值, 我们来考虑一下  $m_1, m_2, m_3$  的正负性, 这也有两种情况: (a)  $m_1, m_2, m_3$  同号, 此时只可能同时都为零, 否则式 (3.105) 便不能成立; (b) 两个同号, 一个异号 (即两正一负或两负一正), 此时, 不失一般性, 可设  $m_1$  和  $m_2$  同号, 那么由式 (3.105) 知:

$$m_3 = -m_1 - m_2$$

所以

$$|m_3| = |-m_1 - m_2| = |m_1| + |m_2|$$

从上式可知, 如果  $m_3$  一旦取定,  $m_1$  和  $m_2$  就不能随意取值, 而必须满足上述约束条件。由于  $|m_3|$  最大可达  $M$ , 所以  $|m_1| + |m_2|$  也可达  $M$ , 于是

$$\max(|m_1| + |m_2| + |m_3|) = 2M \quad (3.108)$$

虽然, 如果  $m_1$  与  $m_3$  或  $m_2$  与  $m_3$  同号, 上式仍然是成立的。从式 (3.107) 可知

$$\max(n_1 + n_2 + n_3) = 2M + 3N \quad (3.109)$$

这就是说, 对于平行四边形截断, 式 (3.99) 的被积函数可表示为  $3M + 2N$  次多项式。

而式 (3.99) 的高斯-勒让德求积可写为:

$$C_n^m = \sum_{j=1}^J C_n(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \omega_j \quad (3.110)$$

又因为高斯求积公式 (3.110) 具有  $2J-1$  次代数精确度, 所以要使式 (3.110) 成为准确的求积公式, 经圈方向的格点总数  $J$  必须满足

$$2J-1 \geq 3M \quad (\text{对于三角形截断}) \quad (3.111)$$

或者

$$2J-1 \geq 2M+3N \quad (\text{对于平行四边形截断}) \quad (3.112)$$

也就是

$$\begin{cases} J \geq \frac{3M+1}{2} & (\text{三角形截断}) \\ J \geq \frac{2M+3N+1}{2} & (\text{平行四边形截断}) \end{cases} \quad (3.113)$$

运用式 (3.17) 勒让德函数的对称与反对称性质, 可定义式 (3.90) 中  $F^m$  的对称与反对称分量

$$(F_E)^m = \frac{1}{2} [F(\mu_j) + F(-\mu_j)] \quad (3.114)$$

$$(F_O)^m = \frac{1}{2} [F(\mu_j) - F(-\mu_j)] \quad (3.115)$$

上式中  $E$  表示  $n-m$  为偶数 (even),  $O$  表示  $n-m$  为奇数 (odd)。因为  $\omega_j$  是关于赤道对称的, 故式 (3.90) 可写为

$$(F_n^m) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{J/2} (F_E)^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \cdot 2\omega_j & n-m \text{ 为偶数} \\ \sum_{j=1}^{J/2} (F_O)^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \cdot 2\omega_j & n-m \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (3.116)$$

对大气模式预报方程所有非线性项均使用上面提到的谱变换法进行计算。因此, 模式就能从  $t$  时刻的格点场初值开始, 经过预报处理产生  $t + \Delta t$  时刻的格点值, 预报处理的过程如下:

- (1) 计算格点上包括物理过程参数化在内的非线性项。
- (2) 由高斯积分完成非线性项格点到谱空间的转换。
- (3) 计算  $t + \Delta t$  时刻预报变量的谱系数。
- (4) 把预报变量的谱系数变换回格点空间。

### 3.5.2 预报方程各项的重新组合

为了描述谱空间的变换, 上一章中动力框架方程组中方程的变量可分成三部分: 含经向导数的显式项, 含纬向导数的显式项, 无需差分的显式项。这样, 涡度方程可写成如下的形式:

$$(\zeta + f)^{n+1} = \underline{V} + \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\underline{V}_\lambda) - (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (\underline{V}_\mu) \right] \quad (3.117)$$

其中  $\underline{V} = (\zeta + f)^{n+1}$ ;  $\underline{V}_\lambda = 2\Delta t n_v^n$ ;  $\underline{V}_\mu = 2\Delta t n_u^n$ 。

散度方程可写为:

$$\begin{aligned} \underline{\delta}^{n+1} = \underline{D} + \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\underline{D}_\lambda) - (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (\underline{D}_\mu) \right] - \nabla^2 \underline{D}_\Delta \\ - \Delta t \nabla^2 (RH^r \underline{T}'^{n+1} + R(\underline{b}^r + \underline{h}^r) \underline{T}'^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.118)$$

上式中, 在右边最后两项中, 不包括温度的平均分量, 因为它的拉普拉斯为 0。

其中

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \underline{\delta}^{n-1} \\ \underline{D}_\lambda &= 2\Delta t n_u^n \\ \underline{D}_\mu &= 2\Delta t n_v^n \\ \underline{D}_\lambda &= 2\Delta t n_u^n \\ \underline{D}_\nabla &= 2\Delta t [\underline{E}^n + \Phi_s \underline{1} + RH^r \underline{T}'^n] + \Delta t [RH^r ((\underline{T}')^{n-1} - 2(\underline{T}')^n) \\ &\quad + R(\underline{b}^r + \underline{h}^r) (\underline{\Pi}^{n-1} - 2\underline{\Pi}^n)] \end{aligned}$$

热力学方程可变为:

$$\underline{T}'^{n+1} = \underline{T} - \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\underline{T}_\lambda) + (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (\underline{T}_\mu) \right] - \Delta t D^r \underline{\delta}^{n+1} \quad (3.119)$$

其中

$$\begin{aligned} \underline{T} &= (\underline{T}')^{n-1} + 2\Delta t \underline{T}^n - \Delta t D^r [\underline{\delta}^{n-1} - 2\underline{\delta}^n] \\ \underline{T}_\lambda &= 2\Delta t (\underline{UT}')^n \\ \underline{T}_\mu &= 2\Delta t (\underline{VT}')^n \end{aligned}$$

表面压力倾向方程可变为:

$$\underline{\Pi}^{n+1} = PS - \frac{1}{\pi^r} (\underline{\Delta P}^r)^T \underline{\delta}^{n+1} \quad (3.120)$$

其中

$$\begin{aligned} PS &= \underline{\Pi}^{n-1} - 2\Delta t \frac{1}{\pi^n} [(\underline{\delta}^n)^T (\underline{\Delta P}^n) + (\underline{V}^n)^T \nabla \underline{\Pi}^n \pi^n \underline{\Delta B}] \\ &\quad - 2\Delta t [(\underline{\Delta P}^r)^T \frac{1}{\pi^r}] [\underline{\delta}^{n-1} - 2\underline{\delta}^n] \end{aligned}$$

把预报方程 (3.117) ~ (3.120) 进行谱展开, 即把方程中每一项按 (3.88) ~ (3.90) 的方式变换到谱空间, 由于方程包含有三种类型的变量项, 如涡度方程中包含有无差分项  $\underline{V}$ , 经向差分项  $\underline{V}_\lambda$  和纬向差分项  $\underline{V}_\mu$ , 分别对各项谱展开, 即有

$$\{\underline{V}\}_n^m = \sum_{j=1}^J \underline{V}^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \rho_j \quad (3.121)$$

$V^m(\mu_j)$  为  $V$  为在高斯格点到  $\mu_j$  上波数为  $m$  的傅里叶系数。对经向差分项，运用分步积分，取周期性边界条件，则

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} (V_\lambda) \right\}_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial V_\lambda}{\partial \lambda} e^{-im\lambda} d\lambda = im \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_\lambda e^{-im\lambda} d\lambda \quad (3.122)$$

因而，首先执行傅里叶变换，然后再在谱空间计算差分，最后才按 (3.121) 变换到球谐函数空间：

$$\left\{ \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (V_\lambda) \right\}_n^m = im \sum_{j=1}^J V_\lambda^m(\mu_j) \frac{P_n^m(\mu_j)}{a(1-\mu_j^2)} \omega_j \quad (3.123)$$

对纬向差分项，运用分步积分法，在极地取零边界条件：

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{a(1-\mu^2)} (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (V_\mu) \right\}_n^m &= \int_{-1}^1 \frac{1}{a(1-\mu^2)} (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (V_\mu)^m P_n^m d\mu \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{1}{a(1-\mu^2)} (V_\mu)^m (1-\mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} d\mu \end{aligned} \quad (3.124)$$

定义连带勒让德多项式的导数

$$H_n^m = (1-\mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} \quad (3.125)$$

式 (3.124) 可写为：

$$\left\{ \frac{1}{a(1-\mu^2)} (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (V_\mu) \right\}_n^m = - \sum_{j=1}^J (V_\mu)^m \frac{H_n^m(\mu_j)}{a(1-\mu_j^2)} \omega_j \quad (3.126)$$

类似地，对散度方程中的拉普拉斯算符，多次运用分步积分，并考虑到

$$\nabla^2 P_n^m(\mu) e^{im\lambda} = \frac{-n(n+1)}{a^2} P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (3.127)$$

则散度方程中拉普拉斯项的谱系数为

$$\left\{ \nabla^2 \underline{D}_\nabla \right\}_n^m = \frac{-n(n+1)}{a^2} \sum_{j=1}^J \underline{D}_\nabla^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \omega_j \quad (3.128)$$

其中  $\underline{D}_\nabla^m$  为格点变量  $\underline{D}_\nabla$  的傅里叶系数。

### 3.5.3 求解隐式方程

第二章中描述的预报方程可写成如下的谱形式：

$$(\zeta + f)_n^m = \underline{VS}_n^m \quad (3.129)$$

$(\zeta + f)_n^m$  表示  $(\zeta + f)^{n+1}$  的球谐函数系数

$$\underline{VS}_n^m = \sum_{j=1}^J [\underline{V}^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) + im \underline{V}_{\lambda}^m(\mu_j) \frac{P_n^m(\mu_j)}{a(1 - \mu_j^2)} + \underline{V}_{\mu}^m(\mu_j) \frac{H_n^m(\mu_j)}{a(1 - \mu_j^2)}] \omega_j$$

散度方程变为:

$$\underline{\delta}_n^m = \underline{DS}_n^m + \Delta t \frac{n(n+1)}{a^2} [RH^r \underline{T}_n^m + R(\underline{b}^r + \underline{h}^r) \underline{T}_n^m] \quad (3.130)$$

$\underline{\delta}_n^m, \underline{T}_n^m$  和  $\Pi_n^m$  为  $\delta^{n+1}, T^{n+1}$  和  $\Pi^{n+1}$  的谱系数, 上式中扰动温度拉普拉斯替代了 (3.118) 式中总温度的拉普拉斯。

$$\begin{aligned} \underline{DS}_n^m = \sum_{j=1}^J \left\{ \underline{D}^m(\mu_j) + \frac{n(n+1)}{a^2} \underline{D}_{\nabla}^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \right\} \\ + im \underline{D}_{\lambda}^m(\mu_j) \frac{P_n^m(\mu_j)}{a(1 - \mu_j^2)} - \underline{D}_{\mu}^m(\mu_j) \frac{H_n^m(\mu_j)}{a(1 - \mu_j^2)} \omega_j \end{aligned}$$

热力学方程的谱形式为:

$$\underline{T}_n^m = \underline{TS}_n^m - \Delta t D^r \underline{\delta}_n^m \quad (3.131)$$

式中

$$\underline{TS}_n^m = \sum_{j=1}^J \left[ \underline{T}^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) - im \underline{T}_{\lambda}^m(\mu_j) \frac{P_n^m(\mu_j)}{a(1 - \mu_j^2)} \right] \omega_j$$

表面气压方程的谱形式为:

$$\Pi_n^m = PS_n^m - \left( (\underline{\Delta P}^r)^T \frac{1}{\pi^r} \right) \underline{\delta}_n^m \quad (3.132)$$

式中

$$PS_n^m = \sum_{j=1}^J PS^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \omega_j$$

式 (3.129) 为显示方程, 但式 (3.130) ~ (3.132) 均为隐式方程, 即这些方程中含有不止一个预报量, 因而还必须进一步地处理。把式 (3.131) 和式 (3.132) 代入式 (3.130), 消去除  $\underline{\delta}_n^m$  以外的预报变量, 则式 (3.130) 可写为:

$$A_n \underline{\delta}_n^m = \underline{DS}_n^m + \Delta t \frac{n(n+1)}{a^2} [RH^r (\underline{TS})_n^m + R(\underline{b}^r + \underline{h}^r) (PS)_n^m] \quad (3.133)$$

式中,

$$A_n = I + \Delta t^2 \frac{n(n+1)}{a^2} \left[ RH^r D^r + R(\underline{b}^r + \underline{h}^r) \left( (\underline{\Delta P}^r)^T \frac{1}{\pi^r} \right) \right] \quad (3.134)$$

式中  $I$  为  $n$  阶单位矩阵。因此, 利用式 (3.133) 即可求出散度的谱系数  $\delta_{-n}^m$ 。把  $\delta_{-n}^m$  代入式 (3.131) 和 (3.132), 则可求出  $T_n^m$  和  $\Pi_n^m$ 。因而, 一旦求得  $\delta_{-n}^m$ , 就能解出  $n+1$  时刻的所有预报变量的球谐函数系数。实际上, 方程 (3.130) ~ (3.131) 组成闭合的联立方程组, 求解的过程就是运用消去法解方程的预报变量。为了抑制全球平均散度的舍入误差积累 (如果初值为零, 则应保持以后时刻严格为零), 故  $(A_0)^{-1}$  设置为零矩阵, 这样式 (3.133) 能严格保证  $\delta_0^0$ 。值得注意的是,  $T_0^0$  不需设置为零, 这是由于扰动温度是相对于平均温度  $T^r$  而言的。

### 3.5.4 水平耗散

对水平耗散而言, 如第二章所讨论过的, 预报方程可以写成如下形式 (由于  $(\zeta + f)$  与  $\delta$  二者比较类似, 这里仅写出散度  $\delta$  和温度  $T$  的方程的谱系数形式)

$$(\delta^*)^m_n = (\delta^{n+1})^m_n - (-1)^i 2\Delta t K^{(2i)} [\nabla^{2i} (\delta^*)^m_n - (-1)^i (\delta^*)^m_n (2/a^2)^i] \quad (3.135)$$

$$(T^*)^m_n = (T^{n+1})^m_n - (-1)^i 2\Delta t K^{(2i)} [\nabla^{2i} (T^*)^m_n] \quad (3.136)$$

求解上面谱系数方程可知:

$$(\delta^*)^m_n = K_n^{2i}(\delta) (\delta^{n+1})^m_n \quad (3.137)$$

$$(T^*)^m_n = K_n^{2i}(T) (T^{n+1})^m_n \quad (3.138)$$

其中, 当  $i$  为 1 时, 即为 2 阶耗散:

$$K_n^{(2)}(\delta) = \left\{ 1 + 2\Delta t D_n K^{(2)} \left[ \left[ \frac{n(n+1)}{a^2} - \frac{2}{a^2} \right] \right] \right\}^{-1} \quad (3.139)$$

$$K_n^{(2)}(T) = \left\{ 1 + 2\Delta t D_n K^{(2)} \frac{n(n+1)}{a^2} \right\}^{-1} \quad (3.140)$$

当  $i$  为 2 时, 即为 4 阶耗散:

$$K_n^{(4)}(\delta) = \left\{ 1 + 2\Delta t D_n K^{(4)} \left[ \left[ \frac{n(n+1)}{a^2} - \frac{4}{a^4} \right]^2 \right] \right\}^{-1} \quad (3.141)$$

$$K_n^{(4)}(T) = \left\{ 1 + 2\Delta t D_n K_n^{(4)} \left[ \frac{n(n+1)}{a^2} \right]^2 \right\}^{-1} \quad (3.142)$$

当  $n=0$  时,  $K_n^{(2)}$  和  $K_n^{(4)}$  均取 1。  $D_n$  表示“库朗 (Courant) 数限制”, 一般设为 1。然而, 为保证某些模式上部层次不违背 CFL 判据,  $D_n$  做了些修改。如果在上部层次风速的极值足够大, 则当这些层次上  $n > n_c$  时, 取  $D_n = 1000$ , 其中  $n_c = a\Delta t / \max |V|$ 。这一方案临时减小了这些模式层的有效分辨率。这些层次由用户自己选定。但在 18 层模式的控制运行试验中, 该方法仅用于模式的顶层。

温度  $T$  的耗散至此还没完全结束。为了计算从  $\eta$  到  $P$  坐标的订正项, 只有在  $\nabla^2 \Pi$  也由谱系数变换成格点值后才可以推导。

在标准  $T42$  分辨率的模式中, 系数值  $K^{(2)}$  和  $K^{(4)}$  分别为  $2.5 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  和  $1.0 \times 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 。

### 3.5.5 谱空间到格点空间的转换

在预报变量  $((\zeta + f)^*)_n^m, (\delta^*)_n^m, (\underline{T}^*)_n^m, (\underline{\Pi}^{n+1})_n^m$  完成  $n+1$  时刻谱空间的计算后, 把这些变量由谱系数值再变换到格点上, 对任一变量  $\psi$ , 变换为:

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M \left[ \sum_{n=|m|}^{N(m)} \psi_n^m P_n^m(\mu) \right] e^{im\lambda} \quad (3.143)$$

方程中括号内的求和为勒让德变换, 而外部求和则通过快速傅里叶变换完成, 计算温度耗散所需的  $\nabla^4 \Pi$  由下式可得:

$$\nabla^4 \Pi^{n+1} = \sum_{m=-M}^M \left[ \sum_{n=|m|}^{N(m)} \left[ \frac{n(n+1)}{a^2} \right]^2 (\Pi^{n+1})_n^m P_n^m(\mu) \right] e^{im\lambda} \quad (3.144)$$

另外, 还需要  $\Pi$  导数的格点值, 包括  $\nabla \Pi$  和  $V \cdot \nabla \Pi$ 。

$$V \cdot \nabla \Pi = \frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{V}{a(1-\mu^2)} (1-\mu^2) \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} \quad (3.145)$$

其中

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = \sum_{m=-M}^M im \left[ \sum_{n=|m|}^{N(m)} \Pi_n^m P_n^m(\mu) \right] e^{im\lambda} \quad (3.146)$$

$$(1-\mu^2) \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = \sum_{m=-M}^M \left[ \sum_{n=|m|}^{N(m)} \Pi_n^m H_n^m(\mu) \right] e^{im\lambda} \quad (3.147)$$

式 (3.147) 的推导中运用了式 (3.125) 的定义。上面这些表达式与式 (3.144) 具有同样的形式。另外, 还需要计算  $U, V$ 。而  $U, V$  则直接由绝对涡度与散度的谱系数求得:



$$(\zeta + f)_n^m = -\frac{n(n+1)}{a^2} \psi_n^m + f_n^m \quad (3.148)$$

$$\delta_n^m = -\frac{n(n+1)}{a^2} \chi_n^m \quad (3.149)$$

$$U = \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \frac{(1-\mu^2)}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad (3.150)$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{(1-\mu^2)}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \quad (3.151)$$

式 (3.148) 中  $f_n^m$  仅有一项  $f_1^0 = \Omega / \sqrt{0.357}$  不为零。所以,  $U, V$  直接由下式求得:

$$U = - \sum_{m=-M}^M a \sum_{n=|m|}^{N(m)} \left[ \frac{im}{n(n+1)} \delta_n^m P_n^m(\mu) \frac{1}{n(n+1)} (\zeta + f)_n^m H_n^m(\mu) \right] e^{im\lambda} - \frac{a}{2} \frac{\Omega}{\sqrt{0.357}} H_1^0 \quad (3.152)$$

$$V = - \sum_{m=-M}^M a \sum_{n=|m|}^{N(m)} \left[ \frac{im}{n(n+1)} (\zeta + f)_n^m P_n^m(\mu) + \frac{1}{n(n+1)} \delta_n^m H_n^m(\mu) \right] e^{im\lambda} \quad (3.153)$$

水平耗散倾向也变换到格点空间, 按式 (3.135) 和式 (3.136), 水平耗散的倾向为

$$F_{T_H}(T^*)_n^m = (-1)^{i+1} K^{2i} [\nabla^{2i}(T^*)_n^m] \quad (3.154)$$

$$F_{\zeta_H}(\zeta + f)_n^m = (-1)^{i+1} K^{2i} \{ \nabla^{2i}(\zeta + f)^* - (-1)^i (\zeta + f)^* (2/a^2)^i \} \quad (3.155)$$

$$F_{\delta_H}(\delta^*)_n^m = (-1) K^{2i} \{ \nabla^{2i}(\delta^*) - (-1)^i \delta^* (2/a^2)^i \} \quad (3.156)$$

取  $i = 1$  或  $i = 2$  表示耗散的  $\nabla^2$  和  $\nabla^4$  形式, 这些谱系数均变换到格点空间, 由式 (3.152) 和式 (3.153) 可知, 涡度和散度的耗散倾向等价于  $U$  与  $V$  的耗散倾向。

### 3.5.6 水平耗散订正

计算出格点值后, 摩擦加热率可由动量耗散的倾向决定。把摩擦加热率加到温度  $T$  上, 并把由  $\eta$  面到  $P$  面的偏差订正  $\nabla^4$  也加到  $T$  上。摩擦加热率由动量耗散计算的动能倾向求得:

$$F_{FH} = -\mu^{n-1} F_{uH}(u^*) / c_p^* - \nu^{n-1} F_{vH}(v^*) / c_p^* \quad (3.157)$$

式中  $F_{uH}$  和  $F_{vH}$  为动量的当量耗散倾向。它们由  $F_{\zeta_H}$  和  $F_{\delta_H}$  所决定, 这如同  $u, v$  由  $\zeta$  和  $\delta$  所决定一样。且式中  $c_p^*$  为

$$c_p^* = c_p \left[ 1 + \left( \frac{c_{p_v}}{c_p} - 1 \right) q^{n+1} \right] \quad (3.158)$$

加热率与订正项合并可得:

$$\hat{T}_k^{n+1} = T_k^* + (2\Delta t F_{FH})_k + 2\Delta t \left( \pi B \frac{\partial T^*}{\partial P} \right)_k K^{(4)} \nabla^4 \Pi^{n+1} \quad (3.159)$$

$T^*$  的垂直导数如下定义:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=1} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} \quad (3.160)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=1} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} \quad (3.161)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=1} + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} \quad (3.162)$$

把订正项加到前面计算所得的耗散项式 (3.154) 中, 则可得总温度倾向

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.163)$$

#### 参考文献

- [1] 郭秉荣, 丑纪范, 杜行远. 大气科学中数学方法的应用. 北京: 气象出版社, 1986.
- [2] Ellsaesser H W. Evaluation of spectral versus grid methods of hemispheric numerical weather prediction. *J. Appl. Meteor.*, 1966, 5, 246—262.
- [3] Bear F. An alternate scale representation of atmospheric energy spectra. *J. Atmos. Sci.*, 1972, 29, 649—664.
- [4] 雷兆崇, 章基嘉. 数值模式的谱方法. 北京: 气象出版社, 1991.
- [5] Machenhauer, B., The spectral method, GARP Publication Series No.17, 1979, 124—277.
- [6] Cooley, J. W., Tukey, J. W., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, [WTBX]Math. Computation[WTBZ], 1965, 19, 297-301.
- [7] 徐萃薇. 计算方法引论. 北京: 高等教育出版社, 1985.

## 第五章 辐射传输过程的参数化

### 5.1 计算辐射传输的 $K$ -分布方法

#### 5.1.1 引言

单色辐射在平面平行大气中的传输一般用如下方程描述 (Lenoble<sup>[1]</sup>, 1985)

$$\mu \frac{dI_v(\tau_v, \mu, \phi)}{d\tau_v} = I_v(\tau_v, \mu, \phi) - J_v(\tau_v, \mu, \phi) \quad (5.1)$$

其中  $I_v$  表示在光学厚度  $\tau_v$  处及天顶角余弦  $\mu$ 、方位角  $\phi$  方向上的比辐射强度, 源函数  $J_v$  一般可以写为

$$J_v(\tau_v, \mu, \phi) = \frac{\omega_v(\tau_v)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^1 d\mu' P_v(\tau_v, \mu, \phi; \mu', \phi') I_v(\tau_v, \mu', \phi') + Q_v(\tau_v, \mu, \phi) \quad (5.2)$$

其中单次散射反照率 (或单次散射比)  $\omega_v$  表示散射消光在总消光中所占的百分比,  $(\mu', \phi')$  方向的辐射散射后在各个方向上的归一化分布由相函数  $P_v(\tau_v, \mu, \phi; \mu', \phi')$  表示, 方程右边的第二项代表大气辐射的真正的源

$$Q_v(\tau_v, \mu, \phi) = Q_v^{(\text{thermal})}(\tau_v) + Q_v^{(\text{beam})}(\tau_v, \mu, \phi) \quad (5.3)$$

$$Q_v^{(\text{thermal})}(\tau_v) = [1 - \omega_v(\tau_v)] B_v[T(\tau_v)] \quad (5.4)$$

$$Q_v^{(\text{beam})}(\tau_v, \mu, \phi) = \frac{\omega_v(\tau_v) I_{0v}}{4\pi} P_v(\tau_v, \mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) \exp(-\tau_v/\mu_0) \quad (5.5)$$

其中  $I_{0v}$  代表大气层顶太阳辐射的比辐射强度,  $B_v[T(\tau_v)]$  表示由大气本身的热辐射造成的各向同性的辐射源,

$$B_v(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 (e^{h\nu/kT} - 1)} \quad (5.6)$$

量纲同比辐射强度。

由于光学厚度是几何高度的单调函数, 平面平行大气中的位置坐标常用光学厚度  $\tau_v$  来表示, 它在实际计算中为各种成分贡献之和

$$\begin{cases} \tau_v = \sum_i k_{vi} u_i \\ u_i = \int \rho_i dz \end{cases} \quad (5.7)$$

其中下标  $i$  代表各种成分（如气体分子、气溶胶和云）， $k_{vi}$  为吸收系数， $\rho_i$  为成分密度。单次散射反照率和相函数也是各种成分共同作用的结果

$$\omega_v = \frac{\sum_i \omega_{vi} \tau_{vi}}{\tau_v} \quad (5.8)$$

$$P_v(\tau_v, \mu, \phi, \mu', \phi') = \frac{\sum_i P_{vi}(\tau_{vi}, \mu, \phi, \mu', \phi') \omega_{vi} \tau_{vi}}{\omega_v \tau_v} \quad (5.9)$$

需要注意的是，由于方程的太阳辐射源项中只包含了太阳辐射的单次散射辐射，因而完整的大气辐射场应该是上述方程的解  $I'_v$  加上直接透射的太阳辐射强度，即

$$I_v(\tau_v, \mu, \phi) = I'_v(\tau_v, \mu, \phi) + \delta(\mu + \mu_0) \delta(\phi - \phi_0) I_{0v} e^{-\tau_v / \mu_0} \quad (5.10)$$

其中，太阳入射方向为  $(-\mu_0, \phi_0)$ 。

将辐射强度按照天顶角余弦加权积分即得到穿过  $\tau_v$  平面的辐射能净通量，但一般将属于正的和负的天顶角余弦的通量分开，即分别为向上和向下通量

$$\begin{cases} F_v^\uparrow(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_v(\tau, \mu, \phi) \mu d\mu d\phi \\ F_v^\downarrow(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^{-1} I_v(\tau, \mu, \phi) \mu d\mu d\phi \end{cases} \quad (5.11)$$

$$F_v^{(\text{net})}(\tau_v) = F_v^\uparrow(\tau_v) - F_v^\downarrow(\tau_v) \quad (5.12)$$

而总的辐射能通量是对所有频率积分的结果

$$F^{(\text{net})}(\tau) = \int_0^\infty F_v^{(\text{net})}(\tau) dv \quad (5.13)$$

最终作为动力学方程中的非绝热项的加热率为  $\frac{g}{c_p} \frac{dF^{(\text{net})}}{dp}$ 。

本文所发展的辐射模式是以对大气光学性质的统一描述为基础的。即采用光学厚度、单次散射反照率和相函数（或不对称因子）代表大气中各种成分的辐射性质，因而各种成分的性质可以自然地按照方程（5.7）～（5.9）叠加，并代入统一的方程中处理。这样的表示方法也使我们可以对基于方程（5.1）的各类辐射传输解法加以选择，辐射传输的解与大气性质的参数化是相互独立的。下面我们将介绍模式中几个主要部分所采用的方法，这些部分基本上是相互独立的，可以通过简单的开关在运算中加以选择。随着模式的发展，我们可以随时单

独更新或修正其中的任一部分，而其他部分保持不变；或者我们可以在任何一个部分中保留几种来源于不同数据集的参数化，以供选择或进行相互比较。

### 5.1.2 $K$ -分布方法与指数和拟合 (ESFT)

本文所采用的波数积分方法是在 Shi<sup>[2]</sup> (1981) 的  $k$ -分布方法的基础上，参照原有波段的结果进一步扩充和简化得到的。因此本文的做法在操作上虽然与原来的  $k$ -分布方法一致，但严格来说是一种指数和拟合方法。下面分别对这两部分加以介绍。

从逐线积分到  $k$ -分布 设第  $i$  个波段的波数区间为  $[v_{\min,i}, v_{\max,i}]$ 。在某种温度和压强条件下，一种吸收气体在此区间上存在一个吸收系数的理论表达式  $k(v)$ ，逐线积分可以给出这一表达式的离散形式

$$k(v) = k_j, \quad \text{当 } v_{\min,i} + (j-1)\Delta v_i < v \leq v_{\min,i} + j\Delta v_i, \quad (5.14)$$

其中  $\Delta v_i = (v_{\max,i} - v_{\min,i})/N_i$  为逐线积分的波数分辨率， $N_i$  为该区间内等距离散吸收系数总数， $j = 1, \dots, N_i$ 。

设该波数区间上的归一化  $k$ -分布几率密度函数为  $f(k)$ ，分布函数为  $F(k) = \int f(k)dk$ ，则吸收系数可以用  $n_i$  个指定分布函数值上的离散点表示

$$k_l = F^{-1}(x_l), \quad l = 1, \dots, n_i \quad (5.15)$$

其中  $x_l = \frac{(1+x_l^*)^2}{4}$ ， $x_l^*$  为区间  $(-1,1)$  上的高斯积分节点。这时，每一个  $k_l$  所具有的权重为

$p_l = \frac{(1+x_l^*)p_l^*}{2}$ ， $p_l^*$  是与  $x_l^*$  相应的高斯积分权重。采用上述规定除了要考虑吸收系数分布的实际状况外，还要满足必要的归一化条件

$$\sum_{l=1}^{n_i} p_l = 1 \quad (5.16)$$

在 Shi<sup>[2]</sup> (1981) 的  $k$ -分布模式中， $n_i$  对所有的波段一律取为 9。 $k$ -分布函数  $F(k)$  是通过以下数值方法得到的：首先，将上述的离散的  $k_j$  按照从大到小的顺序排列可以得到一个  $k(v)$  函数的离散序列，记为  $\{k_j^*, j \in [1, N_i]\}$ ；分别取这一序列的两个端点的值为 0 和 1，即可得到  $F(k^*)$ ，显然  $F(k) = F(k^*)$ 。 $k$ -分布方法适用的前题正是波数在适当宽度的波数区间内的无关性，因而实际上可以用这一序列替代原来的  $k(v)$  函数。

非均匀路径的处理 假定上述取得  $k$ -分布函数的数值方法对不同的温度和压强具有较好的相关性，或者换句话说，如果我们选择适当的温度和压力，可以得到一个在其他条件下仍保持相当好的单调性的序列  $\{k_j^*, j \in [1, N_i]\}$ ，就可以对式 (5.15) 中的每一个  $k_l$  分析其温度、压力依赖关系。如果假定这两种依赖关系是可分离的，即对于某一个  $l$  来说，

$$k_l(p, T) = k_l(p_{ref}, T_{ref}) F_l(p, p_{ref}) R_l(p, p_{ref}) \quad (5.17)$$

近似成立，则问题可以得到进一步的简化。Shi<sup>[2]</sup>（1981）将上述两个依赖关系函数表示为如下两个经验公式

$$R_l(T, T_{ref}) = \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{\alpha_l + \beta_l T} \quad (5.18)$$

$$F_l(p, p_{ref}) = \exp \left( \sum_{n=1}^5 a_{ln} x^n \right), \quad x = \ln(p/p_{ref}) \quad (5.19)$$

**不同吸收气体的叠加** 前面假定的  $k$ -分布的相关性质只可能对同一种成分在不同温度压力下的吸收系数成立。对不同气体来说，需要用特殊的方式保证这一相关性。Shi（1981）首先确定了单个波段中最重要的吸收气体，在对其进行吸收系数重排时同时相应重排其他叠加吸收成分的吸收系数。在此基础上，对与每个主要吸收成分的谱单色吸收系数对应的多个次要成分的无序吸收系数值可以按照同样的方法重排。在实际应用中，由于次要成分的作用总是受到主要吸收气体的限制，通常只要计算其平均透过率就可以满足精度要求了。

Shi（1981）已经细致地论述了前面提及的若干假定的适用性和该模式所能达到的精度。关于这一模式在处理长波非均匀路径辐射问题和评价温室气体气候强迫作用中的应用，可参见石广玉（1984<sup>[3]</sup>，1992<sup>[4]</sup>）的文章。

**扩充** 当前模式对 Shi<sup>[2]</sup>（1981）的太阳辐射波段的臭氧吸收作了补充。与红外和近红外波段不同，位于紫外和可见光波段的臭氧吸收没有可以利用的谱线数据资料。我们采用了 WMO<sup>[5]</sup>（1986）推荐的吸收截面值和温度依赖关系代入模式，其他方面与原有的  $k$ -分布方案完全一样。于是，当前的方案使得我们有可能以一种一致的方式计算从紫外到远红外的全部波段的气体吸收。实际上，我们已经完成了基于上述  $k$ -分布方案的单列辐射模式，本文主要介绍的是这一模式用于气候模拟的“简化版”。

**简化** 为了提高原有模式的计算效率，需要减少实际计算的谱单色吸收系数总数。本文改变了如下两个方面：1. 将高分辨率模式中的部分波段分组合并，减少总波段数；2. 在各个波段采用不同的谱单色  $k$  个数。前者的划分原则主要照顾到吸收气体在各个波段上的分布和重叠作用，后者则是在保证精度的前提下尽量减少  $k$  的总数。

对各个波段内的谱单色吸收系数按照与前面对于单色吸收系数所描述的基本相同的步骤处理。但要注意一个重要的差别：这时每个单色吸收系数值所对应的光谱宽度不再像方程（5.14）表示的那样，而是不等间距的。有两个原因：1. 每个谱单色吸收系数本身对应的宽度就是不等的，它应该是原波段宽度本身乘以方程（5.16）中出现的权重；2. 由于新的波段很宽，需要按照大气中典型的能量光谱分布加权。在长波，我们以 280 K 的 Planck 函数作为权重函数，在短波取 6000 K 的 Planck 函数。新的波段划分方法见表 5.1。公式（5.17~5.19）中各个参数化系数的值见王标（1996）附录 A。现有的吸收气体暂时没有包含各类卤代烃，但要加入它们的作用是很简单的，可以采用类似于处理紫外和可见光波段臭氧吸收的方法。

简化的低分辨率模式与原来的高分辨率模式在 5 种模式大气（McClatchey *et al.*<sup>[6]</sup>，1971）条件下得到的长波加热率结果进行了比较。除了大气顶层之外，最大误差不超过 0.3 K/d，二者的符合程度是相当好的。

表 5.1 简化波段

序号	对应旧波段序号	$k$ 个数	吸收气体
1	1~9	13	H <sub>2</sub> O
2	10	4	H <sub>2</sub> O
3	11	5	CO <sub>2</sub> , H <sub>2</sub> O, N <sub>2</sub> O
4	12	4	O <sub>3</sub> , H <sub>2</sub> O, CO <sub>2</sub>
5	13	4	H <sub>2</sub> O, CO <sub>2</sub>
6	14~15	9	O <sub>3</sub> , H <sub>2</sub> O, CO <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> O
7	16~21	9	H <sub>2</sub> O, CO <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> O, CH <sub>4</sub>
8	22~34	12	H <sub>2</sub> O, CO <sub>2</sub>
9	35	1	
10	36~40	9	O <sub>3</sub> , H <sub>2</sub> O
11	41	1	
12	42~44	9	O <sub>3</sub>
总计		80	

注：气体成分中排在最前面的为主要吸收气体。

### 5.1.3 辐射传输方法

原则上，在上述  $k$ -分布处理方法的框架内采用某种 $\delta$ -二流方法可以处理大气中出现的多次散射与热辐射同时存在的情况。Ritter & Geleyn<sup>[7]</sup>（1992）在 CNRM 模式中所采用的方法正是这样做的。但简单的实验证明，普通的二流方法或 $\delta$ -二流方法不能在单次散射反照率为零（即不存在散射）的极限情况下给出与通量的精确解相吻合的结果。而较小的单次散射反照率正是长波部分的典型情况，所以，有必要对长波计算部分的二流方法加以修正。

#### 5.1.3.1 非均匀路径上的二流近似解

要将辐射传输方程应用于非均匀路径，一般的做法是将大气分成几个可以用均匀参数表示的层。如图 5.1 所示，模式在大气各层的界面处指定温度和光学厚度，而单次散射反照率和相函数（或不对称因子）则对于相邻界面间的层给出。图中还显示了各个层次和界面的序号规定。

Stamnes *et al.*<sup>[8]</sup>（1988）给出了辐射传输方程对此种大气分层结构的解。这种方法也可

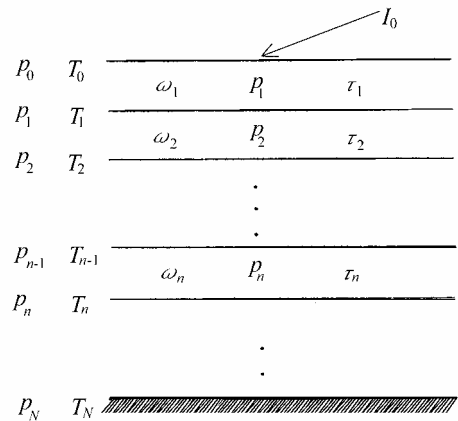


图 5.1 大气分层及界面标号规定示意图

以用于二流方程。在此之前，多数的二流方法是对单一层次进行的，然后将得到的各层的反射率和透过率累加求得各个界面处的通量。这两种处理方法在实际上是等价的（Stamnes<sup>[9]</sup>，1986），但前者可以更好地吸收离散坐标法中的指数换算处理以改善计算的稳定性，而且最终根据边界条件得到的线性方程组是一个三角矩阵（Toon *et al.*<sup>[10]</sup>，1989），因而具有较高的效率。按照 Toon *et al.*<sup>[10]</sup>，（1989）的表示法，解出的辐射通量为

$$F_n^\uparrow = Y_{1n} \left( 1 + \Gamma_n e^{-\lambda_n \tau_n} \right) + Y_{2n} \left( 1 - \Gamma_n e^{-\lambda_n \tau_n} \right) + C_n^\uparrow \quad (5.20)$$

$$F_n^\downarrow = Y_{1n} \left( \Gamma_n + e^{-\lambda_n \tau_n} \right) + Y_{2n} \left( \Gamma_n - e^{-\lambda_n \tau_n} \right) + C_n^\downarrow \quad (5.21)$$

方程中的  $n=1, \dots, N$  对应于图 5.1 中的各个界面。在大气顶

$$F_0^\uparrow = Y_{11} \left( e^{-\lambda_1 \tau_1} + \Gamma_1 \right) + Y_{21} \left( e^{-\lambda_1 \tau_1} - \Gamma_1 \right) + C_0^\uparrow \quad (5.22)$$

$$F_0^\downarrow = Y_{11} \left( \Gamma_1 e^{-\lambda_1 \tau_1} + 1 \right) + Y_{21} \left( \Gamma_1 e^{-\lambda_1 \tau_1} - 1 \right) + C_0^\downarrow \quad (5.23)$$

方程（20）～（23）中  $Y, C, \Gamma, \lambda$  的定义与 Toon *et al.*<sup>[10]</sup>（1989）所使用的完全一致。对于短波计算， $\delta$ -Eddington 方法被证明是较好的选择（King & Harshvardhan<sup>[11]</sup>，1986）。

### 5.1.3.2 二流源函数技术

Toon *et al.*<sup>[10]</sup>（1989）所采用的二流源函数技术可以较好地处理热辐射和散射同时存在的情况。它优于一般二流方法之处在于能够在单次散射反照率为 1 和 0 时都能得到与精确解吻合的结果。我们将这种方法加以简化用于长波辐射计算。在 Toon *et al.*<sup>[10]</sup>（1989）的方程（55）和（56）中，取  $\mu=0.5$ ，一次计算得到  $I_n$ ，假定它是各项同性的，则通量是这个值的一半。应该注意的是，在不考虑散射作用时，这两个公式没有意义，其极限情况自然退化为热辐射方程的形式解。另外，当存在散射时，应该将光学上非常薄的层的光学厚度赋一个任意小量，这样才能保证计算结果的稳定，而对精度没有影响。

### 5.1.4 分子 Rayleigh 散射

按照 WMO<sup>[5]</sup>（1986）的推荐，我们采用 Bates<sup>[12]</sup>（1984）的公式计算大气的 Rayleigh 散射截面：

$$\sigma_{RS}(\lambda) = \frac{4.02 \times 10^{-28}}{\lambda^4 + \chi} \quad (5.24)$$

单位为  $\text{cm}^{-1}$ ，其中

$$\left\{ \begin{array}{ll} \chi = \frac{0.389\lambda + 0.09426}{\lambda} - 0.3228 & 0.19 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.55 \mu\text{m} \\ 0.04 & 0.55 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1.0 \mu\text{m} \end{array} \right. \quad (5.25)$$

在模式中，这些截面按照 6000 K 的 Planck 函数加权平均得到表 5.1 中各个波段的平均截面，并转化为层光学厚度与气压差的比。具体数值见王标<sup>[13]</sup>（1996）附录 B。



### 5.1.5 云的辐射性质参数化

在  $k$ -分布和二流方法的框架下, 可以计算云的非灰性质。只有关于云的综合性参数化方案, 即根据 Mie 理论计算得到的、包括全部辐射波段的参数资料, 才能满足这种需要。因而现有的模式可以充分利用像 Stephens<sup>[14]</sup> (1979) 和 Hu & Stamnes<sup>[15]</sup> (1993) 等人所得到的数据集。我们将他们所提供的参数按照类似方法对长短波加权平均, 得到不同类型水云的非灰性质。具体数值见王标<sup>[13]</sup> (1996) 附录 C。

模式中对多层云假定了随机重叠。这是大多数气候模式中采用的做法, 对于垂直分辨率要求不高的全球气候模式来说, 位于不同层次上的云可以看作是相互独立的; 而在具有更高垂直分辨率的模式中, 有时需要考虑相邻层次上云的最大重叠。一般来说, 随机重叠导致最大数量的重叠情况, 例如, 假定有  $n$  个层有部分覆盖的云, 天空中云层覆盖所形成的不同垂直结构就有  $2^n$  个。分别计算这些情况无疑导致运算量的大幅度增加。但这种假定另一方面也可以用来使运算量减小, 即如果能够将云空情况用一层完全覆盖的云空代替, 就可以避免对各种随机重叠的情况分别计算。当然, 这样一层云的辐射参数需要调整。有些模式在短波采用了这种方法, 例如 NCAR CCM2 模式 (Hack *et al.*<sup>[16]</sup>, 1993) 使用了调整的光学厚度  $\tau' = \tau A^{3/2}$ , 其中  $\tau$ ,  $A$  分别为云的实际光学厚度和覆盖率。这个公式在晴空和完全云覆盖的情况下显然是精确的。但用这一公式计算云量适中的情况, 得到的结果却很差, 而且即使对不同的光学厚度的精度差别也很大。我们设计了一种形式上更为合理的方法, 即基于晴空和云空的平均透过率来反推替代云的光学厚度, 用这种方法可以得到如下计算公式

$$\tau' = -\frac{1}{C} \ln \left( 1 - A + A e^{-C\tau} \right) \quad (5.26)$$

其中  $C$  是与波段和云的种类有关的待定常数; 它在物理上对应于倾斜路径因子。由于光学厚度中包含散射作用, 使吸收路径比光学厚度表面上反映出来的要短, 因而使  $C$  值倾向于减小; 而散射作用同时又增大了光子路径, 又使  $C$  倾向于增大。所以  $C$  的取值是这两种效应竞争的结果, 与云的光谱特性和具体类型都有关系。在模式中  $C$  的取值见王标<sup>[13]</sup> (1996) 附录 D。

值得注意的是, 相当多的模式在长波采用宽带发射率方法, 因而只能采用黑体或灰体云假定; 这时无法利用上述方法, 运算量与云的层数成正比。而我们的计算表明, 这种处理方法在长波达到的精度更为理想。

### 5.1.6 气溶胶辐射性质参数化

对气溶胶的处理与云的处理类似。我们采用的是 WCP<sup>[17]</sup> (1983) 的气溶胶模型 (SRA'83 模型), 不同的是为了考虑每个网格点上可能的复杂特征, 采用的气溶胶廓线可以是 SRA'83 模型中几种廓线的组合, 只需指定各种廓线在  $0.55 \mu\text{m}$  处的光学厚度即可。因而, 模式可以计算几种主要的自然或人为环境下的格点的气溶胶的辐射效应和平流层本底的和火山爆发期

间的气溶胶辐射效应, 并对它们在长短波的贡献分别加以估计。另外, 参照 Kiehl & Briegleb<sup>[18]</sup> (1993) 的做法, 用硫酸液滴气溶胶的光学性质代表硫酸盐气溶胶, 只要假定某种廓线分布 (例如与气压成正比的关系), 模式也可以计算这一类对流层气溶胶的影响。模式各个波段对应的气溶胶辐射性质参数见王标<sup>[13]</sup> (1996) 附录 E。

### 5.1.7 入射太阳通量

大气顶的太阳辐射通量为 (Paltridge & Platt<sup>[19]</sup>, 1976)

$$S_I = S_0 \varepsilon \cos \zeta \quad (5.27)$$

其中  $S_0$  为太阳常数;  $\varepsilon$  为地球轨道偏心率;  $\zeta$  为太阳天顶角, 取决于地方时和纬度:

$$\begin{aligned} \cos \zeta &= \sin \phi \sin \delta - \cos \phi \cos \delta \cos(2\pi t_{\text{local}}) \\ \varepsilon &= 1.000110 + 0.034221 \cos \theta_0 + 0.001280 \sin \theta_0 + 0.000719 \cos 2\theta_0 + 0.000077 \sin 2\theta_0 \\ \delta &= 0.006918 - 0.0399912 \cos \theta_0 + 0.070257 \sin \theta_0 - 0.006758 \cos 2\theta_0 + \\ &\quad 0.000907 \sin 2\theta_0 - 0.002697 \cos 3\theta_0 + 0.001480 \sin 3\theta_0 \\ \theta_0 &= \frac{2\pi d}{365} \\ t_{\text{local}} &= d + \frac{\lambda}{360^\circ} \end{aligned} \quad (5.28)$$

其中  $d$  为历日 (即以 1 月 1 日为 0);  $\phi$  为纬度;  $\lambda$  是由格林威治向东计的当地经度。太阳辐射能量在各个波段上的分配根据 Valley<sup>[20]</sup> (1965) 编辑的数据计算。

### 5.1.8 其他方面

关于臭氧对直射光的吸收, 我们采用了 Rodgers<sup>[21]</sup> (1967) 的放大因子

$$M = \frac{35}{\sqrt{1244\mu_0^2 + 1}} \quad (5.29)$$

修正直射太阳光在臭氧波段的光学路径, 以计入倾斜路径和折射效应。

## 5.2 Morcrette 辐射方案

### 5.2.1 引言

本章第 II 部分主要根据文献<sup>[22,23]</sup>详细地描述了 ECMWF 预报模式物理过程中的辐射参数化方案。它于 1989 年 5 月 2 日成为 ECMWF 的业务版本。这个方案计算了地球大气和地表由于长波辐射的吸收和发射,以及太阳辐射的反射、散射和吸收引起的加热/冷却率。表 5.2 按 Stephens (1984)<sup>[24]</sup>的形式,给出了这个方案的概要。在 Morcrette 方案中,短波计算使用了二流公式与光学路径分布方法 (Fouquart 和 Bonnet, 1980<sup>[25]</sup>)。谱的区域为  $0.25 \sim 0.68 \mu\text{m}$  和  $0.68 \sim 4.0 \mu\text{m}$ 。在长波计算中,使用波数为  $0 \sim 2620 \text{ cm}^{-1}$  之间覆盖 6 个谱区域的宽带通量发射率的方法。吸收依赖于温度和气压 (Morcrette 等, 1986<sup>[26]</sup>), 吸收系数与 AFGL (1982) 一致。方案的长波和短波辐射部分将分别在第 3 和第 4 节中详细描述。

表 5.2 ECMWF 业务辐射方案的概要

a. 晴空	
(1) 短波:	
两个谱区域	( $0.25 \sim 0.68 \mu\text{m}$ 和 $0.68 \sim 4.0 \mu\text{m}$ )
Rayleigh 散射	Rayleigh 光学厚度的参数表示
气溶胶散射和吸收	基于气候模式 5 种类型气溶胶的米参数 (WMO-ICSU, 1984 年) <sup>[27]</sup>
气体吸收	根据 AFGL (1982 年) 线参数汇集
H <sub>2</sub> O	一个区域
均匀的混合气体	一个区域
O <sub>3</sub>	一个区域
(2) 长波:	
H <sub>2</sub> O	6 个谱区域, e 和 p 型连续吸收 ( $350 \sim 1250 \text{ cm}^{-1}$ )
CO <sub>2</sub>	透射的倍增至 3 个区域中选加 ( $500 \sim 1250 \text{ cm}^{-1}$ )
O <sub>3</sub>	与 $970 \sim 1110 \text{ cm}^{-1}$ 区域中选加
气溶胶	应用发射率公式的吸收作用
b. 有云	
(1) 短波:	
云滴吸收和散射	用 LWP 确定的 $\tau$ 和 $\omega$ , 给定 $g$ 和 $r_e$ , 使用 Delta-Eddington 方法 *
气体吸收	通过光子路径分布方法分开
(2) 长波:	
散射	忽略
云滴吸收	应用发射率公式从 LWP 计算
气体吸收	同晴空长波

\* 表中  $\tau$ ,  $\omega$ ,  $g$  和  $r_e$  分别为光学厚度, 单次散射反照率, 不对称因子和云滴的有效半径, LWP 为液态水路径。

## 5.2.2 辐射加热

由净辐射通量  $F$  的散度可计算出辐射加热率：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{rad} = \frac{g \partial F}{c_p \partial p} \quad (5.30)$$

式中  $c_p$  是湿空气的定压比热

$$c_p = c_{p_{dry}} \left\{ 1 + (c_{p_{vap}} - c_{p_{dry}}) q / c_{p_{dry}} \right\},$$

$c_{p_{dry}}$  和  $c_{p_{vap}}$  分别为干空气和水汽的定压比热。

以下第 3、4 节将分别描述长波和短波辐射通量的计算。由于辐射传输方程解得辐射通量很费计算时间，因此我们采用每 3 小时每 4 个格点进行一次全辐射计算。第 5 节将描述在每个格点和每个时间步长上应用瞬时的温度和太阳天顶角获得辐射通量的插值方案。第 6 节将给出辐射方案的输入变量，特别描述了对辐射计算重要的气候资料场。最后附本章第 II 部分的符号表和参考文献。

## 5.2.3 长波辐射

Morcrette(1991 年)<sup>[28]</sup>给出了长波通量和冷却率的计算。由长波辐射发射和吸收引起的大气冷却率为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{g}{c_p} \frac{\partial F_{LW}}{\partial p} \quad (5.31)$$

式中的  $F_{LW}$  是净长波辐射通量（本节余下部分下标 ‘LW’ 被省略）。假定一个处于局地热力平衡的无散射大气， $F$  由下式给出

$$F = \int_{-1}^1 \mu d\mu \left[ \int_0^\infty dv \left\{ L_v(p_{surf}, \mu) t_v(p_{surf}, p, \mu) + \int_{P'=P_{surf}}^0 L_v(P', \mu) dt_v \right\} \right] \quad (5.32)$$

式中  $L_v(p, \mu)$  是  $p$  层上波数为  $v$  的单色辐射率，在与铅直成  $\theta$  倾角的方向上传播，其中  $\mu = \cos \theta$ ,  $t_v(p, p'; r)$  为通过  $p$  和  $p'$  层的单色透射， $r = \sec \theta$ ，下标  $surf$  表示地表。用上标 + 和 - 分别指示向上和向下的分量，对式 (5.32) 部分地积分，则可得到在辐射程序长波部分实际用来计算通量的辐射传输方程

$$\begin{cases} F_v^+(p) = [B_v(T_{surf}) - B_v(T_{0+})] t_v(p_{surf}, p; r) + B_v(T(p)) + \int_{p'=p_{surf}}^p t_v(p, p'; r) dB_v \\ F_v^-(p) = [B_v(T_\infty) - B_v(T_{top})] t_v(p, 0; r) + B_v(T(p)) + \int_{p'=p}^0 t_v(p', p; r) dB_v \end{cases} \quad (5.33)$$

这里, 取长波辐射各向同性的优点, 式 (5.32) 中的辐射率  $L_v$  已被通量单位为  $\text{W m}^{-2}$  的 Planck 函数  $B_v(T)$  替换 ( $B_v$  已包括了  $\pi$  因子)。  $T_{surf}$  为地表温度,  $T_{0+}$  为贴近地表的空气温度,  $T(p)$  为气压层  $p$  上的温度,  $T_{top}$  为大气模式顶的温度。透射  $t_v$  是作为与铅直成  $\theta$  角方向上的辐射率透射被估计的,  $r = \sec\theta$  为漫射率因子 (Elsasser, 1942)<sup>[29]</sup>。对这个角积分的这种近似在辐射传输计算中是很平常的。这种近似的有效性试验已有 Rodgers 和 Walshaw (1996)<sup>[30]</sup> 以及 Liu 和 Schmetz (1988)<sup>[31]</sup> 给出。应用漫射率因子和 4 点 Gaussian 求积方法得到的冷却率其误差仅在 2% 以内。

### 5.2.3.1 垂直积分

考虑大气为均质的, 对垂直格点离散化后就可对式 (5.33) 数值求解。由于冷却率强烈地依赖于局地温度和气压条件, 能量交换主要在计算通量的邻近层次, 所以较远层的贡献可简单地用梯形规则积分, 而邻近层的贡献应用 2 点高斯求积计算。于第  $i$  层

$$\int_{p'=p_{surf}}^{p_i} t_v(p, p'; r) dB_v = \sum_{l=1}^2 dB_v(l) \omega_l t_v(p_i, p_l; r) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-2} dB_v(j) [t_v(p_i, p_j; r) + t_v(p_i, p_{j-1}; r)] \quad (5.34)$$

式中  $p_l$  为对应高斯根的气压,  $\omega_l$  为高斯权重。  $dB_v(j)$  和  $dB_v(l)$  分别为两个界面, 以及中间层和界面之间计算的 Planck 函数的梯度。

### 5.2.3.2 谱的积分

正如 Rodgers (1967)<sup>[21]</sup> 最初讨论过那样, 对波数  $\nu$  的积分可应用谱带发射率的方法进行, 长波谱可划分成 6 个谱区域

- 1)  $0 \sim 350 \text{ cm}^{-1}$  和  $1450 \sim 1880 \text{ cm}^{-1}$
- 2)  $500 \sim 800 \text{ cm}^{-1}$
- 3)  $800 \sim 970 \text{ cm}^{-1}$  和  $1110 \sim 1250 \text{ cm}^{-1}$
- 4)  $970 \sim 1110 \text{ cm}^{-1}$
- 5)  $350 \sim 500 \text{ cm}^{-1}$
- 6)  $1250 \sim 1450 \text{ cm}^{-1}$  和  $1880 \sim 2820 \text{ cm}^{-1}$

分别对应  $\text{H}_2\text{O}$  的旋转和振动旋转谱带的中心,  $\text{CO}_2$  的  $15 \mu\text{m}$  谱带, 大气窗,  $\text{O}_3$  的  $9.6 \mu\text{m}$  谱带,  $25 \mu\text{m}$  窗区, 和  $\text{H}_2\text{O}$  的振动旋转谱带的翼。对这些谱区域, 我们可以借助于从 Morcrette 和 Fouquart (1985)<sup>[32]</sup> 的窄带模式预先算好的谱带透射率计算谱带通量, 详细可参见 Morcrette 等 (1986)<sup>[26]</sup> 的附录。

式(5.33)在第  $k$  个谱区域内对波数  $\nu$  积分给出了向上和向下的通量为

$$F_k^+(p) = \{B_k(T_{surf}) - B_k(T_{0+})\} t_{B_k} \{ru(p_{surf}, p), T_u(p_{surf}, p)\} + B_k(T_P) + \int_{p'=p_{surf}}^p t_{dB_k} \{ru(p, p'), T_u(p, p')\} dB_k \quad (5.35)$$

$$F_k^-(p) = \{B_k(T_0) - B_k(T_\infty)\} t_{B_k} \{ru(p, 0), T_u(p, 0)\} - B_k(T_p) - \int_{p'=p}^0 t_{dB_k} \{ru(p', p), T_u(p', p)\} dB_k \quad (5.36)$$

以上两式说明了在大气通量计算中所涉及的各种温度, 即对  $T_p$ , 通量计算层上的温度和对  $T_u$ , 控制透射的温度的依赖关系。谱带是非等温的, 解释了从单色吸收和 Planck 函数积的波数积分中引起的温度依赖关系。对在给定谱区域中的各吸收体, 我们应用了两个正规化的谱带透射率: 第一个用来计算式(5.33)中的右边第一项, 包括边界, 它对应于用 Planck 函数表示的透射函数的加权平均

$$t_B(\overline{up}, T_p, T_u) = \frac{\int_{\nu_1}^{\nu_2} B_\nu(T_p) t_\nu(\overline{up}, T_u) d\nu}{\int_{\nu_1}^{\nu_2} B_\nu(T_p) d\nu} \quad (5.37)$$

第二个用来计算式(5.33)中的积分项, 它是用 Planck 函数的导数表示的透射函数的加权

$$\text{平均 } t_{dB}(\overline{up}, T_p, T_u) = \frac{\int_{\nu_1}^{\nu_2} \{dB_\nu(T_p)/dT\} t_\nu(\overline{up}, T_u) d\nu}{\int_{\nu_1}^{\nu_2} \{dB_\nu(T_p)/dT\} d\nu} \quad (5.38)$$

式中  $\overline{up}$  是吸收体的气压加权量。

谱线的 Doppler 加宽的吸收作用(仅对气压低于 10 hPa 重要)简单地应用 Fels(1979)<sup>[33]</sup> 的气压订正方法。一个有限的谱线宽度(假定被用来表示谱线的 Doppler 半宽度)维持在纯 Lorentz 谱线(正比于气压)通常可忽略的低气压条件下(Giorgetta 和 Morcrette, 1995)<sup>[34]</sup>。在这个方案中, 对  $T_p$  的实际依赖关系是在对谱区域积分的 Planck 函数中显式地进行的。虽然透射率通常和  $B_\nu(T_p)$  或  $dB_\nu(T_p)/dT$  有关, 但它仍然通过 Planck 函数随温度变化最大值的 Wien 位移和吸收系数的温度依赖关系而取决于  $T_u$ 。为使计算上更有效, 已用 Pade 近似来计算透射率

$$t(\overline{u}, \overline{p}, T_u) = \frac{\sum_{i=0}^2 c_i u_{eff}^{i/2}}{\sum_{j=0}^2 d_j u_{eff}^{j/2}} \quad (5.39)$$

式中  $u_{eff} = r(\overline{up}) \psi(T_u, \overline{up})$  是吸收体的有效量，它结合了漫射率因子  $r$ ，气压和吸收量的权重  $\overline{up}$ ，以及吸收系数的温度依赖关系。函数  $\psi(T_u, \overline{up})$  取自

$$\psi(T_u, \overline{up}) = \exp[a(\overline{up})(T_u - 250) + b(\overline{up})(T_u - 250)^2] \quad (5.40)$$

虽然系数  $c_i$  和  $d_j$  不随温度显式变化，但仍考虑了由于 Wien 定理引起的温度依赖关系。对温度在 187.5 K 和 312.5 K 之间步长为 12.5 K 的温度，已计算好这些系数，对应于最接近气压权重温度  $T_u$  的参考温度的透射率被实际应用在这个方案中。

### 5.2.3.3 云作用的加入

Washington 和 Williamson (1977) [35] 讨论了云的加入对长波通量的作用。不管大气云的状况如何，方案都从计算晴空大气的通量开始，并把能量交换项贮存在不同的层之间（式(5.33)中的积分）。用  $F_0^+(i)$  和  $F_0^-(i)$  表示向上和向下的晴空通量。对大气中实际存在的任何云层，方案计算通量时假定了比辐射率为单位 1 的阴天云。用  $F_n^+(i)$  和  $F_n^-(i)$  表示当大气第  $n$  层有这样的云时向上和向下的通量。云上的向下通量和云下的向上通量可假定由晴空的值给出

$$\begin{cases} F_n^+(i) = F_0^+(i) & , \quad i \leq n \\ F_n^-(i) = F_0^-(i) & , \quad i > n \end{cases} \quad (5.41)$$

倘若边界项现被对应于云和周围空气之间可能的温度不连续项所替换，则云上的向上通量（ $F_n^+(k)$ ，对  $k \geq n+1$ ）和云下的向下通量（ $F_n^-(k)$ ，对  $k < n$ ）可由类似于式(5.33)的式子表示

$$\begin{cases} F_n^+(k) = \{F_{cld}^+ - B(n+1)\}t(p_k, p_{n+1}; r) + B(k) + \int_{p'=p_{n+1}}^{p_k} t(p_k, p'; r) dB \\ F_n^-(k) = \{F_{cld}^- - B(n)\}t(p_k, p_n; r) + B(k) + \int_{p'=p_k}^{p_n} t(p_k, p'; r) dB \end{cases} \quad (5.42)$$

式中  $B(k)$  现为  $k$  层总的 Plank 函数（对整个长波谱域积分）， $F_{cld}^+$  和  $F_{cld}^-$  为云上、下边界的长波通量。积分项对应于晴空大气层之间的能量交换，在计算的首步已算好。这步对所有的云层重复。实际大气（有半透明、部分、和/或多层的云）的通量可在多层有云情况下用一些云的叠加假定从前几步计算通量的线性组合中推导出来。用  $N$  表示含最高云的层数， $C_{cld}(i)$  为  $i$  层的云量。对地表向上的通量， $C_{cld}(0)=1$ ；对最高云上面的向下通量， $C_{cld}(N+1)=1$  和  $F_{N+1}^- = F_0^-$ ，为正确的边界条件。

鉴于最大和随机的叠加假定在程序中是有效的 (Morcrette 和 Fouquart, 1986) [26], 并已应用在 ECMWF 模式的业务方案中, 所以有云向上的通量  $F^+$  和向下的通量  $F^-$  可写为

$$\begin{cases} F^+(i) = F_0^+(i) & , i = 1 \\ F^-(i) = C_{cld}(i-1)F_{i-1}^+(i) + \sum_{n=0}^{i-2} C_{cld}(n)F_n^+(i) \prod_{l=n+1}^{i-1} \{1 - C_{cld}(l)\} & , 2 \leq i \leq N+1 \\ F^+(i) = C_{cld}(N)F_N^+(i) + \sum_{n=0}^{N-1} C_{cld}(n)F_n^+(i) \prod_{l=n+1}^N \{1 - C_{cld}(l)\} & , i \geq N+2 \end{cases} \quad (5.43)$$

在半透明云的情况下, 进入计算的云量为乘上比辐射率的有效云量。比辐射率  $\varepsilon_{cld}$  与云层中由于水平辐合引起的凝结水量有关, 可由下式给出

$$\varepsilon_{cld} = 1 - \exp(-k_{abs} u_{LWP}) \quad (5.44)$$

式中  $k_{abs}$  为凝结水的质量吸收系数 (单位为  $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$ ), 参见 Stephens (1978, 1979) [36, 37] 及 Smith 和 Lei (1992) [38]。

## 5.2.4 短波辐射

由短波辐射吸收和散射引起的大气加热率为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{g \partial F_{SW}}{c_p \partial p} \quad (5.45)$$

式中  $F_{SW}$  是净的总短波通量 (本节余下部分, 下标 ‘SW’ 被省略)

$$F(\delta) = \int_0^\infty dv \left[ \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ \int_{-1}^{+1} \mu L_v(\delta, \mu, \phi) d\mu \right\} \right] \quad (5.46)$$

$L_v$  是波数为  $v$ , 在方位角  $\phi$ , 天顶角  $\theta$  给定方向上的漫射辐射率,  $\mu = \cos \theta$ 。在式 (5.46) 中, 我们假定一个平面平行大气, 垂直坐标是光学厚度  $\delta$ , 当能源在介质外部时,  $\delta$  可表示成一个方便的变量

$$\delta(p) = \int_p^0 \beta_v^{ext}(p') dp' \quad (5.47)$$

$\beta_v^{ext}(p)$  是消光系数, 等于气溶胶的散射系数 (或云滴的吸收系数  $\beta_v^{abs}$ ) 和纯分子吸收系数  $k_0$  的和。漫射辐射率  $L_v$  由辐射传输方程控制

$$\begin{aligned} \mu \frac{dL_v(\delta, \mu, \phi)}{d\delta} = & L_v(\delta, \mu, \phi) - \frac{\varpi_v(\delta)}{4} P_v(\delta, \mu, \phi, \mu_0, \phi_0) E_v^0 \exp(-\delta/\mu_r) \\ & - \frac{\varpi_v(\delta)}{4} \int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ \int_{-1}^{+1} \Phi_v(\delta, \mu, \phi, \mu', \phi') L_v(\delta, \mu', \phi') d\mu' \right\} \end{aligned} \quad (5.48)$$



$E_v^0$  是  $\mu_0 = \cos \theta_0$  方向上的入射太阳辐照度,  $\omega_v$  是单次散射反射率 ( $= \beta_v^{sca} / k_v$ ),  $\Phi_v(\delta, \mu, \phi, \mu', \phi')$  是散射的位相函数, 它定义了来自  $(\mu', \phi')$  方向在  $(\mu, \phi)$  方向散射的辐射概率。原先由 Fouquart 和 Bonnel (1980) [25] 研制的方案短波部分对辐射传输方程求解, 并对 0.2  $\mu\text{m}$  和 4  $\mu\text{m}$  之间的整个短波谱域积分求得通量。向上和向下的通量可从层的反射和透射中得到。光学路径分布方法允许把散射过程和分子吸收过程的参数化分离开来。

#### 5.2.4.1 谱的积分

太阳辐射因吸收气体, 主要是水汽, 均匀混合气体 (氧, 二氧化碳, 甲烷, 二氧化氮) 和臭氧而减弱, 并受到分子 (Rayleigh 散射), 气溶胶和云滴的散射。由于散射和分子吸收同时发生, 吸收体沿着光子路径长度的精确量是未知的, 透射函数的谱带模式不能像长波辐射传输那样直接应用 (见第 5.2.3 节)。光子路径分布方法计算概率  $\Pi(U)dU$ , 即在守恒情况下 (没有吸收,  $\omega_0 = 1, k_0 = 0$ ) 对通量  $F_{\text{cons}}$  作贡献的光子经历了  $U$  的  $U+dU$  之间的吸收量的变化。有了这个分布, 在波数  $\nu$  处和  $F_{\text{cons}}$  有关的辐射通量可由下式给出

$$F_\nu = F_{\text{cons}} \int_0^\infty \Pi(U) \exp(-k_\nu U) dU \quad (5.49)$$

而在谱间隔  $\Delta\nu$  上的平均通量则可借助透射函数  $t_{\Delta\nu}$  的谱带模式计算

$$F = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{\Delta\nu} F_\nu d\nu = F_{\text{cons}} \int_0^\infty \Pi(U) t_{\Delta\nu}(U) dU \quad (5.50)$$

为了找到分布函数  $\Pi(U)$ , 首先求解散射问题, 用任何方法, 对一组任意固定的吸收系数  $k_l$ , 给出一组模拟的通量  $F_{k_l}$ 。然后对式 (5.49) 作一个逆的 Laplace 变换以得到  $\Pi(U)$

(Fouquart, 1974) [39]。这个方法的主要优点是实际分布的  $\Pi(U)$  足够光滑, 以致即使  $\Pi(U)$  本身并不精确地知道, 式 (5.49) 也可给出精确的结果。事实上, 当谱的积分通量为

$$F = F_{\text{cons}} t_{\Delta\nu}(\langle U \rangle), \quad \text{在弱吸收的极限情况下}$$

$$F = F_{\text{cons}} t_{\Delta\nu}(\langle U \rangle^{1/2}), \quad \text{在强吸收的极限情况下}$$

时, 不需要显式地计算  $\Pi(U)$ , 式中  $\langle U \rangle = \int_0^\infty \Pi(U) U dU$ ,  $\langle U^{1/2} \rangle = \int_0^\infty \Pi(U) U^{1/2} dU$ 。

在水汽带中的大气吸收一般较强, 方案确定了在  $\langle U \rangle$  和  $\langle U^{1/2} \rangle$  之间的有效吸收量  $U_e$ , 从下式得到

$$U_e = \ln(F_{k_e}/F_{\text{cons}})/k_e \quad (5.51)$$

式中  $k_e$  为吸收系数, 可用晴空大气谱平均透射近似得到

$$k_e = \frac{1}{U_{tot} / \mu_0} \ln(t_{\Delta v}(U_{tot} / \mu_0)) \quad (5.52)$$

式中  $U_{tot}$  是垂直柱中吸收体的总量,  $\mu_0 = \cos\theta_0$ 。一旦获得了  $H_2O$  和均匀混合气体的有效吸收量, 我们就可用 Pade 近似计算出透射函数

$$t_{\Delta v}(U) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i U^{i-1}}{\sum_{j=0}^N b_j U^{j-1}} \quad (5.53)$$

也考虑了臭氧的吸收, 但由于臭氧位于低气压层, 分子散射小, Mie 散射可忽略, 散射过程和臭氧吸收之间的相互作用也可忽略。可用式(5.53) 计算穿过臭氧的透射, 式中的臭氧量  $U_{O_3}$  为

$$U_{O_3}^d = M \int_P^0 dU_{O_3}, \quad \text{对直接太阳光束的向下透射}$$

$$U_{O_3}^d = r \int_{P_s}^0 dU_{O_3} + U_{O_3}^d(p_{surf}), \quad \text{对漫射辐射的向上透射}$$

$r = 1.66$  为漫射率因子 (见第 3 节),  $M$  的是放大因子 (Rodgers, 1967) <sup>[21]</sup> 用来代替  $r$ , 解释了在非常小的太阳高度时大气的球状。

$$M = 35 / \sqrt{\mu_0^2 + 1} \quad (5.54)$$

为了进行谱的积分, 我们把太阳光谱的区域离散成子区域, 在子区域中地表反射率可视为常数。因为地表反射率重要的谱变化的主要因子是红外附近植被反射率的陡峭增加, 又因为水汽在  $0.68 \mu m$  以下不吸收, 所以短波方案考虑了两个谱区域, 一个是太阳光谱的紫外和可见光 ( $0.2 \sim 0.68 \mu m$ ), 一个是近红外 ( $0.38 \sim 4.0 \mu m$ ) 部分。 $0.68 \mu m$  的划分也使得方案在计算上更加有效, 因为气体的吸收 (由水汽和均匀混合气体引起) 和散射过程之间的相互作用只在近红外的区域才被考虑。

## 5.2.4.2 垂直积分

考虑有云覆盖的大气，云量  $C_{\text{cld}}^{\text{tot}}$  依赖于云的叠加假定，最终通量可作为气柱晴空和有云通量的加权平均给出

$$F^-(j) = C_{\text{cld}}^{\text{tot}} F_{\text{cld}}^-(j) + (1 - C_{\text{cld}}^{\text{tot}}) F_{\text{clr}}^-$$

式中“clr” “cld” 分别指层的晴空和有云部分。对照 Geleyn 和 Hollingsworth (1979) [40] 的方案，通量不是通过以矩阵形式的线性方程系统的解获得，而是假定大气划分成  $N$  个均质层，在给定的界面层  $j$  上的向上和向下通量由下式给出

$$\begin{aligned} F^-(j) &= F_0 \prod_{k=j}^N T_{\text{bot}}(j) \\ F^+(j) &= F^-(j) R_{\text{top}}(j-1) \end{aligned} \quad (5.55)$$

式中  $R_{\text{top}}(j)$  和  $T_{\text{bot}}(j)$  是第  $j$  层顶的反射比和底的透射比。 $R_{\text{top}}$  从地表开始向上计算，而  $T_{\text{bot}}$  从大气顶开始向下计算。 $R_{\text{top}}$  和  $T_{\text{bot}}$  说明了层中有云存在

$$\begin{cases} R_{\text{top}} = C_{\text{cld}} R_{\text{cld}} + (1 - C_{\text{cld}}) R_{\text{clr}} \\ T_{\text{bot}} = C_{\text{cld}} T_{\text{cld}} + (1 - C_{\text{cld}}) T_{\text{clr}} \end{cases} \quad (5.56)$$

式中  $C_{\text{cld}}$  为层的云量。

## 5.2.4.2.1 层的有云部分

$R_{t_{\text{cld}}}$  和  $T_{b_{\text{cld}}}$  是用 Delta-Eddington 近似计算云层顶的反射比和底的透射比，已知  $\delta_c, \delta_a$  和  $\delta_g$  分别为云，气溶胶和气体分子吸收的光学厚度 ( $=k_e U$ )， $g_c$  和  $g_a$  为云和气溶胶的不对称因子， $R_{t_{\text{cld}}}$  和  $T_{b_{\text{cld}}}$  是作为层的总光学厚度

$$\delta = \delta_c + \delta_a + \delta_g \quad (5.57)$$

总的单次散射反射率

$$\varpi^* = \frac{\delta_c + \delta_a}{\delta_c + \delta_a + \delta_g} \quad (5.58)$$

总的不对称因子

$$g^* = \frac{\delta_c}{\delta_c + \delta_a} g_c + \frac{\delta_a}{\delta_c + \delta_a} g_a \quad (5.59)$$

下垫介质（地表或第  $j$  层界面下的层）的反射比  $R$ ，和有效的太阳天顶角的余弦  $\mu_{\text{eff}}(j)$  的函数而计算的。 $\mu_{\text{eff}}(j)$  解释了直接太阳光束的减少和相应由上一层散射层引起的向下辐射的漫射部分的增加。

$$\mu_{\text{eff}}(j) = [(1 - C_{\text{cld}}^{\text{eff}}(j)) / \mu + r C_{\text{cld}}^{\text{eff}}(j)]^{-1} \quad (5.60)$$

式中  $C_{\text{cld}}^{\text{eff}}(j)$  为  $j$  层上的有效总云量

$$C_{\text{cld}}^{\text{eff}}(j) = 1 - \prod_{i=j+1}^N (1 - C_{\text{cld}}(i)E(i)) \quad (5.61)$$

和

$$E(i) = 1 - \exp \left[ - \frac{(1 - \varpi_c(i)g_c(i)^2 \delta_c(i))}{\mu} \right] \quad (5.62)$$

式中  $\delta_c(i)$ ,  $\varpi_c(i)$ , 和  $g_c(i)$  为第  $i$  层云的光学厚度, 单次散射反射率和不对称因子,  $r$  是漫射率因子。方案根据 Shettle 和 Weinman (1970) <sup>[41]</sup> 首先提出的 Eddington 近似, 然后用 Joseph 等 (1976) <sup>[42]</sup> 提出的方法修正, 更加精确地解释了在高度不对称位相函数的情况下, 前向散射峰值中直接传输的大部分辐射。Eddington 近似假定在光学厚度  $\delta^*$ , 单次散射反射率  $\omega$  和不对称因子  $g$  的散射介质中, 式 (5.46) 的辐射率  $L$  可写成

$$L(\delta, \mu) = L_0(\delta) + \mu L_1(\delta) \quad (5.63)$$

在这种情况下, 当位相函数展开成一系列连带的勒让德函数, 式 (5.46) 对  $\mu$  和  $\phi$  积分时, 所有阶数大于 1 的项都消失了。因此位相函数由下式给出

$$P(\theta) = 1 + \beta_1(\theta)\mu$$

式中  $\theta$  是入射和散射辐射率之间的角度。于是式 (5.46) 的积分成为

$$\int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ \int_{-1}^{+1} P(\mu, \phi, \mu', \phi') L(\mu', \phi') d\mu' \right\} = 4\pi (L_0 + \pi L_1) \quad (5.64)$$

令

$$g = \frac{\beta_1}{3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P(\theta) \mu d\mu$$

是不对称因子。在式 (5.46) 中应用式 (5.64), 对  $\mu$  积分并用  $2\pi$  除以后, 我们得到

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\delta} (L_0 + \mu L_1) = & -(L_0 + \mu L_1) + \varpi (L_0 + g\mu L_1) \\ & + 1/4 \varpi F_0 \exp(-\delta/\mu_0) (1 + 3g\mu_0\mu) \end{aligned} \quad (5.65)$$

将式 (5.65) 对  $\mu$  积分, 我们得到一组  $L_0$  和  $L_1$  的方程组

$$\begin{aligned} \frac{dL_0}{d\delta} = & -3(1 - \varpi)L_0 + \frac{3}{4} \varpi F_0 \exp(-\delta/\mu_0) \\ \frac{dL_1}{d\delta} = & -(1 - \varpi g)L_1 + \frac{3}{4} \varpi g \mu_0 F_0 \exp(-\delta/\mu_0) \end{aligned} \quad (5.66)$$

假定有云层不守恒 ( $\varpi < 1$ ), 对  $0 \leq \delta \leq \delta^*$ , 式 (5.65) 和式 (5.66) 的解为

$$\begin{cases} L_0(\delta) = C_1 \exp(-K\delta) + C_2 \exp(+k\delta) - \alpha \exp(-\delta/\mu_0) \\ L_1(\delta) = P \{ C_1 \exp(-K\delta) - C_2 \exp(+K\delta) - \beta \exp(-\delta/\mu_0) \} \end{cases} \quad (5.67)$$

式中

$$K = \{3(1 - \varpi)(1 - \varpi g)\}^{1/2}$$

$$P = \{3(1 - \varpi) / (1 - \varpi g)\}^{1/2}$$

$$\alpha = 3\varpi F_0 \mu_0 \{1 + 3g(1 - \varpi)\} / \{4(1 - K^2 \mu_0^2)\}$$

$$\beta = 3\varpi F_0 \mu_0 \{1 + 3g(1 - \varpi)\mu_0^2\} / (4(1 - K^2 \mu_0^2))$$

两个边界条件用来解  $C_1$  和  $C_2$  的系统；大气顶的向下直接漫射通量为零，即

$$F^-(0) = \left[ L_0(0) + \frac{2}{3} L_1(0) \right] = 0$$

可改写成

$$(1 + 2P/3)C_1 + (1 - 2P/3)C_2 = \alpha + 2\beta/3 \quad (5.68)$$

层底的向上直接通量等于向下直接漫射及直接通量和相应的下垫介质的漫射和直接反射比（分别用  $R_d$  和  $R_-$  表示）的乘积

$$F^+(\delta^*) = \left\{ L_0(\delta^*) - \frac{2}{3} L_1(\delta^*) \right\} = R_- \left\{ L_0(\delta^*) + \frac{2}{3} L_1(\delta^*) \right\} + R_d \mu_0 F_0 \exp(-\delta^* / \mu_0)$$

可改写成

$$\begin{aligned} & \{1 - R_- - 2(1 + R_-)P/3\}C_1 \exp(-K\delta^*) \\ & + \{1 - R_- + 2(1 + R_-)P/3\}C_2 \exp(+K\delta^*) \\ & = \{ (1 - R_-)\alpha - 2(1 + R_-)\beta/3 + R_d \mu_0 F_0 \} \exp(-\delta^* / \mu_0) \end{aligned} \quad (5.69)$$

在 Delta-Eddington 近似中，位相函数可由 Dirac delta 函数的前向散射峰值近似得到，位相函数的两项展开为

$$P(\theta) = 2f(1 - \mu) + (1 - f)(1 + 3g'\mu)$$

式中  $f$  是进入前向峰值的部分散射， $g'$  是截断位相函数的不对称因子，正如 Joseph 等（1976）<sup>[42]</sup> 所示，这些参数是

$$\begin{aligned} f &= g^2 \\ g' &= g / (g + 1) \end{aligned} \quad (5.70)$$

倘若进入式（5.65）～（5.69）的总光学厚度，单次散射反射率和不对称因子取它们的转换值

$$\begin{cases} \delta'^* = (1 + \varpi f) \delta^* \\ \omega' = \frac{(1 - f)\varpi}{1 - \varpi f} \end{cases} \quad (5.71)$$

则 Eddington 方程的解保持相同。实际上，进入式（5.68）～（5.71）的光学厚度，单次散射反射率，不对称因子和太阳天顶角是式（5.59）和式（5.60）中定义的  $\delta^*$ ,  $\varpi^*$ ,  $g^*$  和  $\mu_{eff}$ 。

#### 5.2.4.2.2 层的晴空部分

在大气的晴空部分，短波方案考虑了分子和气溶胶的散射和吸收。下面的计算实际上做了两次，一次对大气柱的晴空部分（ $1 - C_{cld}^{tot}$ ）， $\mu$  等于  $\mu_0$ ，只对 Rayleigh 和气溶胶散射作修正，第二次在云量为  $C_{cld}^{tot}$  的有云大气柱内，对个别层为晴空的部分， $\mu$  等于  $\mu_e$ 。

因为 Rayleigh 和气溶胶散射的光学厚度较小,  $R_{\text{clr}}(j)$  和  $T_{\text{clr}}(j)$ , 即第  $j$  层顶的反射比和底的透射比可分别应用类似于 Coakley 和 Chylek (1975)<sup>[43]</sup> 方法的二流方程分析解的一阶和二阶展开来计算。对 Rayleigh 散射, 光学厚度, 单次散射反射率和不对称因子分别为  $\delta_R, \varpi_R = 1$ , 和  $g_R = 0$ , 因此

$$\begin{cases} R_R = \frac{\delta_R}{2\mu + \delta_R} \\ T_R = \frac{2\mu}{(2\mu + \delta_R)} \end{cases} \quad (5.72)$$

大气层的光学厚度可简单地写成

$$\delta_R = \delta_R^* \{p(j) - p(j-1)\} / p_{\text{surf}} \quad (5.73)$$

这里  $\delta_R^*$  可作为太阳天顶角的函数参数化的整个大气的 Rayleigh 光学厚度 (Deschamps 等, 1983)<sup>[44]</sup>。对气溶胶的散射和吸收, 光学厚度, 单次散射反射率和不对称因子分别分为  $\delta_a, \varpi_a$  和  $g_a$ , 并有  $1 - \varpi_a < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} \text{den} = 1 + \{1 - \varpi_a + \text{back}(\mu_e) \varpi_a\} (\delta_a / \mu_e) \\ + (1 - \varpi_a) \{1 - \varpi_a + 2\text{back}(\mu_e) \varpi_a\} (\delta_a^2 / \mu_e^2) \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{cases} R(\mu_e) = \frac{(\text{back}(\mu_e) \varpi_a \delta_a) / \mu_e}{\text{den}} \\ T(\mu_e) = 1 / \text{den} \end{cases} \quad (5.75)$$

式中  $\text{back}(\mu_e) = (2 - 3\mu_e g_a) / 4$  是后向因子。

实际上,  $R_{\text{clr}}$  和  $T_{\text{clr}}$  是用式 (5.75) 计算的, 气溶胶和 Rayleigh 散射的联合作用来自于应用对应于两个散射体的修正参数, 通过前向散射峰值的 Delta 近似提供了高度不对称的气溶胶位相函数 (如式 (5.66) ~ (5.67) 所示)。

$$\begin{cases} \delta^+ = \delta_R + \delta_a (1 - \varpi_a g_a^2) \\ g^+ = \frac{g_a}{1 + g_a} \frac{\delta_a}{(\delta_R + \delta_a)} \\ \varpi^+ = \frac{\delta_R}{\delta_R + \delta_a} \varpi_R + \frac{\delta_a}{\delta_R + \delta_a} \frac{\varpi_a (1 - g_a^2)}{1 - \varpi_a g_a^2} \end{cases} \quad (5.76)$$

至于有云部分,  $R_{\text{clr}}$  和  $T_{\text{clr}}$  必须考虑下层的多次反射。

$$R_{\text{clr}} = R(\mu_e) + R_- T(\mu_e) / (1 - R_-^* R_-) \quad (5.77)$$

$R_-$  为下垫介质的反射比,  $R_- = R_i(j-1)$ ,  $r$  是漫射率因子。因为分子吸收、Rayleigh 和气溶胶散射之间的相互作用是可以忽略的, 所以晴空大气的辐射通量可简单地由气体透射 (式 (5.53)) 减弱的式 (5.55) 和式 (5.77) 计算得到。

## 5.2.4.3 层之间的多次反射

因为各反射面引起吸收量的特别分布，所以为了适当处理反射面和云层之间的多次反射，我们应该分开各反射面对层反射比和透射比的贡献。在  $N$  个云层的大气情况下，最高云上面的反射光由最高云直接反射，没有与下垫大气相互作用的光子，以及通过这个云层至少经历了下垫面大气一次反射的光子组成。事实上，式 (5.50) 应写成

$$F = \sum_{l=0}^N F_{cl} \int_0^{\infty} P_l(U) \mathcal{K}_{\Delta v}(U) dv \quad (5.78)$$

式中  $F_{cl}$  和  $P_l(U)$  是对应不同反射表面吸收量的保守通量和分布。

Fouquart 和 Bonnel (1980) [25] 指出，对这个问题一个很好的近似可逐次假定一个无反射下垫介质 ( $R_- = 0$ )，再假定一个反射下垫介质 ( $R \neq 0$ )，通过应用式 (5.69) 和式 (5.71) 估算各层反射比和透射比获得。首先计算那些仅仅与考虑层有相互作用光子的反射比和透射比，然后再给出与该层以外有相互作用光子的贡献。

根据两组分别为 ( $R_{t0}, T_{b0}$ ) 和 ( $R_{t\neq}, T_{\neq}$ ) 层反射比和透射比，被用于计算向上和向下通量透射函数的有效吸收量可用式 (5.51)，推导得到，从地表开始向上计算

$$\begin{cases} U_{e0}^- = \ln(T_{b0} / T_{bc}) / k_e \\ U_{e\neq}^+ = \ln(T_{t\neq} / R_{tc}) / k_e \\ U_{e0}^+ = \ln(R_{t0} / R_{tc}) / k_e \\ U_{e\neq}^- = \ln(T_{b\neq} / T_{bc}) / k_e \end{cases} \quad (5.79)$$

式中  $R_{tc}$  和  $T_{bc}$  为对应守恒散射介质的层反射比和透射比。最后可获得向上和向下通量

$$F^+(j) = F_0 \{ R_{t0} t_{\Delta v}(U_{e0}^+) + (R_{t\neq} - R_{t0}) t_{\Delta v}(U_{e\neq}^+) \} \quad (5.80)$$

$$F^-(j) = F_0 \{ T_{b0} t_{\Delta v}(U_{e0}^-) + (T_{b\neq} - T_{b0}) t_{\Delta v}(U_{e\neq}^-) \} \quad (5.81)$$

## 5.2.4.4 云短波的光学性质

正如 5.4.2 节中看到的，云的辐射性质依赖于 3 个不同的参数：光学厚度  $\delta_c$ ，不对称因子  $g_c$ ，和单次散射反射率  $\omega_c$ 。目前水态云的光学性质根据 Fouquart (1987) [45] 推导，而冰晶云则根据 Ebert 和 Curry (1992) [46] 的推导。 $\delta_c$  和云的液态水量  $U_{LWP}$  有关

$$\delta_c = \frac{3U_{LWP}}{2r_e}$$

式中  $r_e$  是云水滴大小分布的平均有效半径。目前  $r_e$  是作为从地表 10  $\mu\text{m}$  到大气顶 45  $\mu\text{m}$  高度的线性函数而参数化的，以经验形式处理水态云随高度的变化。在低层的层状云中观测到较小的水滴，而在中层层积云的水态云中发现了较大的水滴。

在短波辐射方案的两个谱区域中， $g_c$  分别固定为 0.865 和 0.910，而  $\omega_c$  则根据 Fouquart

(1987)<sup>[45]</sup>的文章, 是作为  $\delta_c$  的函数而给定的

$$\begin{cases} \varpi_{c1} = 0.9999 - 5 \times 10^{-4} \exp(-0.5\delta_c) \\ \varpi_{c2} = 0.9988 - 2.5 \times 10^{-3} \exp(-0.05\delta_c) \end{cases} \quad (5.82)$$

这些云的短波辐射参数和层积云的场地测量一致 (Bonnell 等, 1983)<sup>[47]</sup>。对冰晶云的光学性质, 我们有

$$\begin{cases} \delta_{ci} = IWP(\alpha_i + b_i/r_e) \\ \varpi_i = c_i - d_i r_e \\ g_i = c_i + f_i r_e \end{cases} \quad (5.83)$$

Ehert 和 Curry (1992)<sup>[46]</sup>已推导出短波辐射方案两个谱区域中的系数,  $r_e$  固定在  $40 \mu\text{m}$ 。

## 5.2.5 水平插值

用辐射传输方程解得的辐射通量很费计算时间, 因此我们不能在模式的每个格点和每个时间步长上计算辐射通量。为了减少计算费用, 目前我们只在每 4 个格点上和每 3 小时 (全辐射时间步) 进行全辐射计算。由于在全辐射计算时, 需要考虑温度和太阳天顶角在这两次间隔之间的变化, 因此我们在模式层中定义一个有效比辐射率  $\varepsilon_e$  和有效透射率  $\tau_e$ , 使

$$\begin{cases} F_s = \tau_e S_0 \\ F_T = \varepsilon_e \pi B(T) \end{cases} \quad (5.84)$$

式中  $F_T$  和  $F_s$  分别代表热通量 (长波) 和太阳辐射通量 (短波)。  $B(T)$  是 Planck 函数, 它是温度的函数。  $S_0$  是大气顶的太阳辐射通量。使用公式 (5.84) 时,  $\varepsilon_e$  和  $\tau_e$  在全辐射时间步之间保持不变, 净通量在每个时间步重新计算, 同时应用每个格点当时的温度和太阳天顶角。

由于辐射过程在经向上有较强的变化, 以及模式程序内部结构的限制, 这种空间插值仅仅是沿纬向进行的。对于每个纬圈, 将与辐射计算有关的输入变量转换到较粗的次网格点上。在粗网格上, 通量由前几节提及的方法进行计算。然后通过直接或间接的快速傅里叶变换 (或 3 次插值) 将已计算好的有效透射率和有效比辐射率变换到原来的细网格点上去。最后由净辐射通量的垂直导数得到辐射加热率。

## 5.2.6 辐射方案中的输入变量

### 5.2.6.1 模式变量

计算通量时需要各层边界上的温度, 因此用气压做权重将整层温度插值到半层上得到

$$T_{k+1/2} = T_k \frac{p_k(p_{k+1} - p_{k+1/2})}{p_{k+1/2}(p_{k+1} - p_k)} + T_{k+1} \frac{p_{k+1/2}(p_{k+1/2} - p_k)}{p_{k+1/2}(p_{k+1} - p_k)} \quad (5.85)$$



方案中还需要用大气底部的地表温度或 2 m 处的温度，而大气顶的温度可以从第一整层和第二半层的温度外推得到。

#### 5.2.6.2 云

由云的方案提供模式各层云量和液态/冰晶水的含量。

#### 5.2.6.3 气溶胶

4 种气溶胶气候类型（海洋，沙漠，都市和平流层背景）的水平分布用  $T5$  谱系数表示，并有固定的垂直分布（Tanre 等，1984）<sup>[48]</sup>。但目前 T63 气候模式中，气溶胶仅仅随高度变化。

#### 5.2.6.4 二氧化碳，臭氧

二氧化碳的浓度为  $353 \times 10^{-6}$ ，但目前 T63 气候模式中取  $348 \times 10^{-6}$ ，臭氧的混合比  $q_{O_3}$  随高度，纬度，经度和季节而变，它的垂直分布可假定从气压零到  $p$ ，对它积分得到

$$\int_0^p q_{O_3} dp = \frac{a}{1 + (b/p)^{3/2}} \quad (5.86)$$

常数  $a$  和  $b$  与臭氧总量和它的最大混合比的高度有关。它的地理分布用有限的球谐级数 T10 表示，而季节变化用 Fourier 级数表示。臭氧的总量引自 London 等（1976）<sup>[49]</sup> 的文章，最大浓度的高度是由 Wilcox 和 Belmont（1977）<sup>[50]</sup> 推导的。

#### 5.2.6.5 地表反照率和发射率

最新的陆地背景反照率是由 Sellers 等（1995）<sup>[51]</sup> 从 1987~1988 年无雪反照率的月平均资料插值到模式格点上得到的。

海面上的漫射反照率为 0.07。直接平行辐射的地表反照率与地球辐射收支试验 (ERBE) 中短波反照率在大气顶的测量值极为一致。

$$\alpha_{sp} = 0.052 / (\mu_0^{1.5} + 0.065) \quad (5.87)$$

在  $800 \sim 1250 \text{ cm}^{-1}$  谱区域外的地表热发射率假定处处为 0.996，在窗区，对水的谱发射率为 0.996，并随陆地表层的水汽而变化。

#### 5.2.6.6 太阳天顶角

计算太阳常数  $I_0$  的年变化，太阳赤纬  $\delta_s$  及太阳时和地方时之间差异的方程都能在 Paltridge 和 Platt（1976）<sup>[19]</sup> 的文章中找到。用这些方程可得到局地的太阳天顶角的余弦。由于地球曲率，天顶角沿太阳射线不完全是常数，因此对  $\mu_0^a$  进行修正，得到对大气的一个平均值  $\mu_0$ ：

$$\mu_0 = \frac{\frac{H}{a}}{(\mu_0^a)^2 + \frac{H}{a} \left( 2 + \frac{H}{a} \right) - (\mu_0^a)^2} \quad (5.88)$$

这里  $a$  是地球半径， $H$  是大气的等价深度， $H/a$  等于 0.001277。

## 附录 符号表

$\alpha$	地表反照率
$\beta_v^{abs}$	云滴吸收系数
$\beta_v^{ext}$	消光系数
$\beta_v^{sca}$	散射系数
$\delta_g$	气体的分子吸收
$\delta$	光学厚度
$\varepsilon_{cld}$	云的发射率
$\mu$	$\cos\theta$
$\nu$	波数
$\varpi_v$	单次散射反射率
$\Phi$	散射位相函数
$\varphi$	方位角
$\theta$	天顶角
$\theta_0$	入射太阳光束的方向
$\Theta$	入射和散射辐射率之间的角
$\tau_e$	有效透射率
$B_v$	对半球积分的 Planck 函数, 包含了 $\pi$ 因子
$C_{cld}$	云量
$c_p$	湿空气的定压比热
$c_{p_{dry}}$	干空气的定压比热
$c_{p_{vap}}$	水气的定压比热
$E_v^0$	$\theta_0$ 方向上入射太阳辐射率
$F$	辐射通量
$f$	进入前向峰值的部分散射
$g$	重力加速度
$g_a$	气溶胶散射的不对称因子
$k$	吸收系数
$L_v$	波数 $\nu$ 的单色辐射率
$M$	放大因子
$m_{O_3}$	臭氧的混合比
$P$	散射位相函数
$p$	气压
$\Pi(U)dU$	光子在 $U$ 和 $U+dU$ 之间遇到收体量的概率
$q$	比湿
$r$	漫射率因子 ( $= \sec\theta$ )
$r_e$	云水滴的平均有效半径

---

$R$	反射比
$S_0$	大气顶的太阳通量
$T_{bot}$	层底的透射比
$T$	温度
$t_\nu$	波数 $\nu$ 处的单色透射
$U, u$	吸收体的量

## 参考文献

- [1] Lenoble, J. (Ed.), 1985: Radiative Transfer in Scattering and Absorbing Atmosphere: Standard Computational Procedures. A. Deepak Publishing.
- [2] Shi, G. Y., 1981: An accurate calculation and representation of the infrared transmission function of the atmospheric constituents. Ph.D. Thesis, Dept. of Sci., Tohoku University of Japan, pp. 1991.
- [3] 石广玉 (1984): 计算 9.6 微米臭氧带冷却的一种新方法, 中国科学 (B), No. 4. 378--385
- [4] 石广玉 (1991): 大气微量气体的辐射强迫与温室效应, 中国科学 No. 7. 776--784.
- [5] WMO, 1986: Atmospheric Ozone 1985: Assessment of our Understanding of the Processes Controlling its Present Distribution and Change. Global Ozone Research and Monitoring Project, Rep. 16, Geneva.
- [6] McClatchey, R. A., R. W. Fenn, J. E. A. Selby, F. E. Voltz, and S. Garing, 1971: Optical properties of the atmosphere. AFCRL 71-0279 Environmental Research Papers No. 254.
- [7] Ritter, B. and J. F. Geleyn, 1992: A comprehensive radiation scheme for water prediction models with potential applications in climate simulations. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 303-325.
- [8] Stamnes, K., S. Tsay, W. Wiscombe, and K. Jayawera, 1988: Numerically stable algorithm for discrete-ordinate-method radiative transfer in multiple scattering and emitting layered media. *Appl. Opt.*, **27** (12), 2502-2509.
- [9] Stamnes, K., 1986: The theory of multiple scattering of radiation in plane parallel atmospheres. *Rev. Geophys.*, **24** (2), 299-310.
- [10] Toon, O. B., C. P. McKay, and T. P. Ackerman, 1989: Rapid calculation of radiative heating rates and photodissociation rates in inhomogeneous multiple scattering atmospheres. *J. Geophys. Res.*, **94** (D13), 16287-16301.
- [11] King, M. D. and Harshvardhan, 1986: Comparative accuracy of the albedo, transmission and absorption for selected radiative transfer approximations. NASA Reference Publication 1160.
- [12] Bates, D. R., Rayleigh scattering by air. *Planet. Space Sci.*, 1984, **32**: 785-790.
- [13] 王标: 气候模拟中的辐射传输模式, 中国科学院大气物理研究所博士论文, 1996。
- [14] Stephens, G. L., 1979: Optical properties of eight water cloud types. CSIRO, Division of Atmospheric Physics, Tech. Paper No. 36, 35pp.
- [15] Hu, Y. X. and K. Stamnes, 1993: An accurate parameterization of the radiative properties of water clouds suitable for use in climate models. *J. Climate*, **6**, 728-742.
- [16] Hack, J. J., B. A. Boville, B. P. Briegleb, J. T. Kiehl, P. J. Rasch and D. L. Williamson, 1993: Description of the NCAR Community Climate Model (CCM2). NCAR Tech. Note, NCAR/TN-382+STR, National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO, 108pp.
- [17] WCP, 1983: WCP-55: Report of the Experts Meeting on Aerosols and Their Climatic Effects. A. Deepak

- p>and H. E. Gerber (eds.), World Meteorological Organization, Geneva.
- [18] Kiehl, J. T. and B. P. Breigleb, 1993: The relative roles of sulfate aerosols and greenhouse gases in climate forcing. *Science*, **260**, 311.
- [19] Paltridge, G. W., and C. M. R. Platt, 1976: Radiative Processes in Meteorology and Climatology. Elsevier Press, Amsterdam, 318pp.
- [20] Valley (ed.), 1965: Handbook of Geophysics and Space Environments. McGraw-Hill Book Company, Inc.
- [21] Rodgers, C.D., 1967: *The Radiative Heat Budget of the troposphere and lower stratosphere*. Report No. A2, Planetary Circulation Project, Dept. of Meteorology, Mass. Instit. Technology, Cambridge, Mass., 99 pp.
- [22] Morcrette, J.-J., 1989: Description of the radiation scheme in the ECMWF model, Research Department, Technical Memorandum No. 165, 026
- [23] ECMWF, 1998: Integrated Forecasting System Technical Documentation, Part IV, Physical Processes, 5~24.
- [24] Stephens, G.L., 1984: The parameterization of radiation for numerical weather prediction and climate models, *Mon. Wea. Rev.*, **112**, 826-867.
- [25] Fouquart, Y., and B. Bonnel, 1980: Computations of solar heating of the earth's atmosphere: A new parameterization. *Beitr. Phys. Atmosph.*, **53**, 35-62.
- [26] Morcrette, J.-J., L. Smith, and Y. Fouquart, 1986: Pressure and temperature dependence of the absorption in longwave radiation parameterizations. *Beitr. Phys. Atmosph.*, **59**, 455-469.
- [27] WMO-ICSU, 1984: Optical properties for the standard aerosols of the Radiation Commission, WCP-55, World Climate Program, Geneva, Switzerland.
- [28] Morcrette J.-J. 1991: Radiation and cloud radiative properties in the ECMWF operational weather forecast model. *J. Geophys. Res.*, **96D**, 9121-9132.
- [29] Elsasser, W.M., 1942: *Heat Transfer by Infrared Radiation in the Atmosphere*. Harvard Meteorological Studies No. 6, Harvard University Press, 43pp.
- [30] Rodgers, C.D., and C.D. Walshaw, 1966: The computation of infrared cooling rate in planetary atmospheres. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **92**, 67-92.
- [31] Liu, Q. And J. Schmetz, 1988: On the problem of an analytical solution to the diffusivity factor., *Beitr. Phys. Atmos.*, **61**, 23-29.
- [32] Morcrette, J.-J., and Y. Fouquart, 1985: On systematic errors in parametrized calculations of longwave radiation transfer. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **111**, 691-708.
- [33] Fels, S. B., 1979: Simple strategies for inclusion of Voigt effects in infrared cooling rate calculations. *Appl. Optics*, **18**, 2634-2637.
- [34] Giorgetta, M. A. and J.-J. Morcrette, 1995: Voigt line approximation in the ECMWF radiation scheme. *Mon. Weather Rev.*
- [35] Washington, W.M., and D.L. Williamson, 1977: A description of the NCAR GCMS. in *General Circulation Models of the Atmosphere*. J. Chang, Ed., Methods In Computational Physics, vol. 17, Academic Press, 111-172.
- [36] Stephens, G.L., 1978: Radiative properties of extended water clouds. Part II: *J. Atmos. Sci.*, **35**, 2111-2132.
- [37] Stephens, G.L., 1979: Optical properties of eight water cloud types. CSIRO, Div. Atmos. Phys., Technical Paper NO. 36, Australia.

- 
- [38] Smith, E.A. and S. Lei, 1992: Surface forcing of the infrared cooling profile over the Tibetan plateau. Part I: Influence of relative longwave radiative heating at high altitude. *J. Atmos. Sci.*, 49, 805-822.
  - [39] Fouquart, Y., 1974: Utilisation des approximations de Padé pour l'étude des largeurs équivalentes des raies formées en atmosphère diffusante. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 14, 497-506.
  - [40] Geleyn, J.-F., and A. Hollingsworth, 1979: An economical analytical method for the computation of the interaction between scattering and line absorption of radiation. *Beitr. Phys. Atmosph.*, 52, 1-16.
  - [41] Shettle, E.P., and J.A. Weinman, 1970: The transfer of solar irradiance through inhomogeneous turbid atmospheres evaluated by Eddington's approximation. *J. Atmos. Sci.*, 27, 1048-1055.
  - [42] Joseph, J.H., W.J. Wiscombe, and J.A. Weinman, 1976: The delta-Eddington approximation for radiative flux transfer. *J. Atmos. Sci.*, 33, 2452-2459.
  - [43] Coakley, J.A., Jr., and P. Chylek, 1975: The two-stream approximation in radiation transfer: Including the angle of the incident radiation. *J. Atmos. Sci.*, 32, 409-418.
  - [44] Deschamps, P.-Y., M. Herman, and D. Tanré, 1983: Modélisation du rayonnement solaire réfléchi par l'atmosphère et la Terre, entre 0,35 et 4 microns. Rapport ESA 4393/80/F/DD(SC), 156 pp.
  - [45] Fouquart, Y., 1987: Radiative transfer in climate modeling. NATO Advanced Study Institute on Physically-Based Modeling and Simulation of Climate and Climatic Changes. Erice, Sicily, 11-23 May 1986. M.E. Schlesinger, Ed., 223-283.
  - [46] Ebert, E. E. and J. A. Curry, 1992: A parameterization of ice cloud optical properties for climate models. *J. Geophys. Res.*, 97D, 3831-3836.
  - [47] Bonnel, B., Y. Fouquart, J.-C. Vanhouette, C. Fravallo, and R. Rosset, 1983: Radiative properties of some African and mid-latitude stratocumulus clouds. *Beitr. Phys. Atmosph.*, 56, 409-428.
  - [48] Tanre, D., J.-F. Geleyn, and J. Slingo, 1984: First Results of the introduction of an advanced aerosol-radiation interaction in the ECMWF Low resolution global model. in *Aerosols and their Climatic Effects*, H.E. Gerber and A. Deepak, Eds., A. Deepak Publishing, Hampton, Va., 133-177.
  - [49] London, J., R. D. Bojkov, S. Oltmans, and J. I. Kelley, 1976: Atlas of the global distribution of total ozone, July 1957—June 1967. NCAR Technical Note 113+STR.
  - [50] Wilcox, R. W. and A. D. Belmont, 1977: Ozone concentration by latitude, altitude and month, near 80 W. Report, Control Data Corporation, Contract No. Dot-FA77WA-3999.
  - [51] Sellers, P. J. and etc., 1995: Remote sensing of the land surface for studies of global Change: Models-Algorithms-Experiments. *Remote Sens. Environ.*, 51, 3-26

## 第六章 积云对流参数化

一系列观测和理论研究表明, 积云对流所产生的潜热释放及云中热量, 水汽、动量的垂直输送可以显著地改变大尺度环流。积云通过对于辐射的影响, 可以对地气系统中的辐射平衡产生重要作用。由于大气中发生的积云对流活动的水平尺度通常为  $10^0 \sim 10^1$  km, 远小于目前大气环流模式的水平分辨率(约 100 km 或数百公里), 因此需要通过积云对流参数化的方法表示积云对流活动对大尺度环流影响的平均效应。在国家气候中心的大气环流模式中, 我们采用了 D.Gregory 和 P.R.Rowntree<sup>[1]</sup>提出的对流参数化方案。此方案适用于浅、中、深不同的对流过程, 也适合于干对流。这里对其进行较详细的介绍。

### 6.1 基本思路和云模式

在大气中取一个垂直的气柱, 设在此气柱中有一小的空气块, 从下层向上逐层检查, 看它是否有上升的可能, 即所谓是否受到浮力的作用(一般以此气块的温度比环境空气的温度高 0.2 K 作为受浮力的标准), 如果在它受到浮力作用而上升, 在上升过程中它会使周围的空气在夹卷作用下进入此气块。如果当它上升到上一层时仍然具有浮力(即比周围环境高 0.2 K)这时我们就认为对流活动发生了。于是气块就继续上升, 同时卷入环境空气并向环境卷出其本身的一部分, 这一过程一直持续到达到某一层时其浮力为 0 时为止。假设, 当气块到达某一层(例如  $K$  层)时, 气块的一部分的浮力为零并向外卷出, 而剩余的部分刚好可上升到  $K+1$  层。云块按上述过程上升, 直到整个气块都达到零浮力或垂直通量下降到某一最小值为止, 对流上升就结束了。

#### 6.1.1 云模式的定义

假设在一个网格区内, 存在着很多各式各样的云, 那么对某一个云(用下标  $I$  来表示)来说, 其云中的质量通量  $M_P$  (单位为 Pa/s), 位温  $\theta$  (单位为 K), 混合比  $q$  (单位 kg/kg) 和云中的液态水  $l$  (单位 kg/kg) 应满足如下关系:

$$-\frac{\partial M_{PI}}{\partial P} = E_I - N_I - D_I \quad (6.1)$$

$$-\frac{\partial \theta_I^P M_{PI}}{\partial P} = E_I \theta_I^E - N_I \theta_I^N - D_I \theta_I^R + \frac{L' Q_I}{c_p \pi} \quad (6.2)$$

$$-\frac{\partial q_I^P M_{PI}}{\partial P} = E_I q_I^E - N_I q_I^N - D_I q_I^R - Q_I \quad (6.3)$$

$$-\frac{\partial l_I^P M_{PI}}{\partial P} = -(N_I l_I^N + D_I l_I^R) + Q_I - PR_I \quad (6.4)$$

其中,  $M_p$  为云中质量通量

$\phi^P$  云中的  $\phi$ ,  $\phi$  可代表  $\theta$  (位温),  $q$  (比湿) 或  $l$  (液态水)

$\phi^E$  为环境空气中的  $\phi$

$\phi^N$  为  $\phi$  的混合卷出

$\phi^R$  为  $\phi$  的强迫卷出

$E$  为夹卷率

$N$  为混合卷出率

$D$  为强迫卷出率

$Q$  为水汽向水或冰的转换

$PR$  为液态或固态降水

$I$  为下标,  $\phi_I$  则为第  $I$  个云块的  $\phi$

$\pi = (P/100000)^k$  而  $k = R/c_p$  ( $P$  的单位为 Pa)

$R$  干空气气体常数

$c_p$  干空气的定压比热

$L'$  是凝结潜热或凝结+凝华潜热 (如果有冰冻发生)

卷入和卷出率为

$$E_I = \varepsilon_I M_{PI}; \quad N_I = \mu_I M_{PI}; \quad D_I = \delta_I M_{PI} \quad (6.5)$$

其中  $\varepsilon, \mu, \delta$  为质量卷入或卷出系数。

对所有的云种  $I$  积分, 就得到总体云模式:

$$\frac{-\partial M_P}{\partial P} = (E - N - D) \quad (6.6)$$

$$\frac{-\partial \theta^P M_P}{\partial P} = (E\theta^E - N\theta^N - D\theta^R) + \frac{L'\theta}{c_p\pi} \quad (6.7)$$

$$\frac{-\partial q^P M_P}{\partial P} = (Eq^E - Nq^N - Dq^R) - Q \quad (6.8)$$

$$\frac{-\partial l^P M_P}{\partial P} = -(Nl^N + Dl^R) + Q - PR \quad (6.9)$$

其中  $E = \varepsilon M_P$ ,  $N = \mu M_P$ ,  $D = \delta M_P$

$\phi^P$ ,  $\phi^N$ ,  $\phi^R$  分别代表云群项 (以质量权重为平均), 混合卷出项, 和强迫卷出项。

### 6.1.2 云模式的离散化

图 6.1 说明方程的各个量在垂直方向上是如何离散化的。

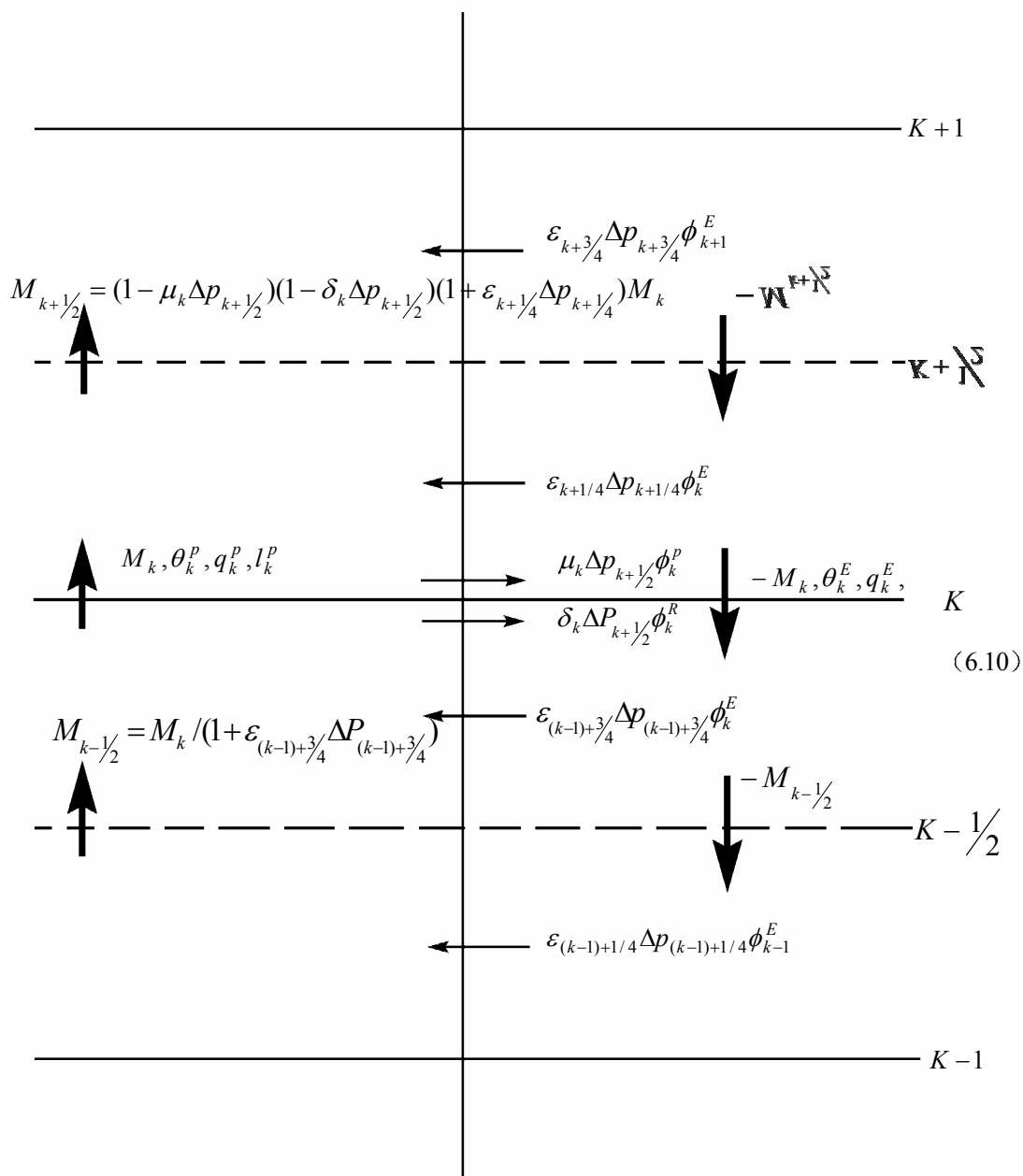


图 6.1 垂直方向上对流过程离散化示意图

离散化时假设:

- ① 卷入的环境空气发生在  $K + \frac{1}{4}$  和  $K + \frac{3}{4}$  层, 而混合和强迫卷出发生在 K 层。
- ② 为简化云模式, 作如下假设, 混合卷出的空气具有其相同层次上的云块 (云群) 的特征, 因此避免了说明云边际的特征, 凝结加热发生在  $K+1$  层。



在方程的离散化过程中，混合卷出，强迫卷出以及卷入过程是分别考虑的，因为各过程均与云块的质量成正比，上述每一过程发生，均会引起气块质量变化，从而对下一过程气块的质量产生影响。

方程 (6.6) ~ (6.9) 经过离散化后可写成如下形式。

质量方程：

$$\begin{aligned}
 M_{K+1} = & M_K - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}} M_K - \delta_K (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}} \\
 & + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} (1 - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K \Delta p_{K+\frac{1}{4}} \\
 & + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} (1 + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \Delta p_{K+\frac{1}{4}}) (1 - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K \Delta p_{K+\frac{1}{4}}
 \end{aligned} \quad (6.10)$$

位温方程：

$$\begin{aligned}
 M_{K+1} \theta_{K+1}^P = & M_K \theta_K^P - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}} M_K \theta_K^P - \delta_K (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K \theta_K^P \Delta p_{K+\frac{1}{2}} \\
 & + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} (1 - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K \theta_K^E \Delta p_{K+\frac{1}{4}} \\
 & + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} (1 + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \Delta p_{K+\frac{1}{4}}) (1 - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K \theta_{K+1}^E \Delta p_{K+\frac{1}{4}} \\
 & + (L'/c_p \pi_{K+1}) COND_{K+1}
 \end{aligned} \quad (6.11)$$

水汽方程：

$$\begin{aligned}
 M_{K+1} q_{K+1}^P = & M_K q_K^P - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}} M_K q_K^P - \delta_K (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K q_K^R \Delta p_{K+\frac{1}{2}} \\
 & + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} (1 - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K q_K^E \Delta p_{K+\frac{1}{4}} \\
 & + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} (1 + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \Delta p_{K+\frac{1}{4}}) (1 - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K q_{K-1}^E \Delta p_{K+\frac{1}{4}} - COND_{K+1}
 \end{aligned} \quad (6.12)$$

和液态水方程

$$\begin{aligned}
 M_{K+1} l_{K+1}^P = & M_K l_K^P - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}} M_K l_K^P - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}} (1 - \mu_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) M_K l_K^P \\
 & + COND_{K+1} - PREP_{K+1}
 \end{aligned} \quad (6.13)$$

其中  $K, K+1, K+\frac{1}{2}, K+\frac{1}{4}$  等分别表示模式的层次。  $COND_K$  是第  $K$  层由于凝结造成的水汽汇,  $PREP_K$  是第  $K$  层气块产生的降水。

$$\Delta P_{K+\frac{1}{2}} = P_K - P_{K+1}$$

$$\Delta P_{K+\frac{1}{4}} = P_K - P_{K+\frac{1}{2}}$$

$$\Delta P_{K+\frac{3}{4}} = P_{K+\frac{1}{2}} - P_{K+1}$$

由方程 (6.6) ~ (6.9) 到方程 (6.10) ~ (6.13) 的推导过程很烦琐, 这里仅就由式 (6.6) 到 (6.10) 的推导过程说明如下:

(1) 首先仅考虑气块的混合卷出过程

$$\frac{-\partial M_P}{\partial P} = -N \quad (a)$$

离散化, 则有  $-\frac{M_{k+1} - M_k}{P_{k+1} - P_k} = \frac{M_{k+1} - M_k}{\Delta P_{k+1/2}}$ , 其中  $\Delta P_{k+1/2} = P_k - P_{k+1}$  因混合卷出发生在  $K$  层, 则有  $M_P = M_k$ , 则  $N_k = \mu_k M_P = \mu_k M_k$ , 代入式 (a) 中得到:

$$\frac{M_{k+1} - M_k}{\Delta P_{k+\frac{1}{2}}} = -\frac{\partial M_P}{\partial P} = \mu_k M_k \quad \text{则} \quad M_{k+1} = M_k - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} M_k$$

即

$$M_{k+1} = \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k$$

(2) 再考虑气块的强迫卷出过程

即  $\frac{-\partial M_P}{\partial P} = -N - D$ , 这时气块在发生了混合卷出后的质量发生变化, 即

$$M_P = \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k \quad (\text{因气块在 } K \text{ 层有部分质量卷出})$$

$$\frac{-\partial M_P}{\partial P} = -N_k - D_k \quad (\text{考虑 } K \text{ 层}) \quad \text{其中} \quad D_k = \delta_k M_P = \delta_k \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k$$

$$\text{则} \quad \frac{-\partial M_P}{\partial P} = \frac{M_{k+1} - M_k}{\Delta P_{k+\frac{1}{2}}} = -\mu_k M_k - \delta_k \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k$$

$$M_{k+1} = M_k - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} M_k - \delta_k \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta P_{k+\frac{1}{2}} M_k$$

$$M_{k+1} = \left(1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) M_k \quad (\text{b})$$

(3) 考虑气块中的卷入过程

首先考虑气块在  $K + \frac{1}{4}$  层的卷入, 即

$$\frac{-\partial M_P}{\partial P} = E_{k+\frac{1}{4}} - N_k - P_k$$

同理气块在经过混合及强迫卷出后, 气块的质量变化为  $M'_P$ , 由式 (b) 可知

$$E_{k+\frac{1}{4}} = \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} M'_P = \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \left(1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) M_k$$

代入原方程

$$\begin{aligned} \frac{-\partial M_P}{\partial P} &= \frac{M_{k+1} - M_k}{\Delta P_{k+\frac{1}{4}}} = \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \left(1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) M_k - \mu_k M_k \\ &\quad - \left(1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \delta_k M_k \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \left(1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} M_k \\ &\quad - \left(1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \delta_k M_k \times \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

化简得

$$M_{k+1} = M_k \left(1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

最后考虑气块在  $K + \frac{3}{4}$  层的卷出, 即

$$\frac{-\partial M_P}{\partial P} = E_{k+\frac{1}{4}} + E_{k+\frac{3}{4}} - N_k - P_k \quad (\text{c})$$

同理, 气块在经过  $K$  层的混合及强迫卷出, 以及气块在  $K + \frac{1}{4}$  层的卷入后, 气块的空气量为

$$M_P = \left(1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) \left(1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}}\right) M_k$$

$$E_{k+\frac{3}{4}} = E_{k+\frac{3}{4}} M_P = \varepsilon_{k+\frac{3}{4}} \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k$$

代入方程 (c) 中有

$$\begin{aligned} \frac{-\partial M_P}{\partial P} &= \frac{M_{k+1} - M_k}{\Delta P_{k+\frac{1}{4}}} = \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k + \varepsilon_{k+\frac{3}{4}} \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \\ &\times \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k - \mu_k M_k - \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \delta_k M_k \end{aligned}$$

方程化简后得

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} M_k - \delta_k \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \\ &\times M_k \Delta P_{k+\frac{1}{4}} + \varepsilon_{k+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k \Delta P_{k+\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

此即式 (6.10)。

同理可由式 (6.7) 推出 (6.11)、式 (6.8) 推出 (6.12)、式 (6.9) 推出 (6.13)。

对式 (6.10) 进行化简, 提出公因子  $M_k$ , 合并同类项, 则有:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k \left[ 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} - \delta_k \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta P_{k+\frac{1}{2}} + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta P_{k+\frac{1}{4}} \right. \\ &\times \left. \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) + \varepsilon_{k+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left[ 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} + \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) + \varepsilon_{k+\frac{3}{4}} \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\times \left. \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right] = M_k \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \\ &\times \left[ 1 + \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} + \varepsilon_{k+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right] \\ M_{k+1} &= M_k \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{3}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) M_k \quad (6.10a) \end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}\theta_{K+1}^P = & \left[ \theta_K^P - \delta_K \theta_K^R \Delta P_{K+\frac{1}{2}} + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \left( 1 - \delta_K \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) \theta_K^E \Delta P_{K+\frac{1}{4}} \right. \\ & \left. + \varepsilon_{K+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \Delta P_{K+\frac{1}{4}} \right) \left( 1 - \delta_K \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) \theta_{K+1}^E \Delta P_{K+\frac{3}{4}} \right] / EPSS_K \\ & + (L'/c_p \pi_{K+1}) COND_{K+1} / M_{K+1}\end{aligned}\quad (6.11a)$$

$$\begin{aligned}q_{K+1}^P = & \left[ q_K^P - \delta_K q_K^R \Delta P_{K+\frac{1}{2}} + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \left( 1 - \delta_K \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) q_K^E \Delta P_{K+\frac{1}{4}} \right. \\ & \left. + \varepsilon_{K+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \Delta P_{K+\frac{1}{4}} \right) \left( 1 - \delta_K \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) q_{K+1}^E \Delta P_{K+\frac{3}{4}} \right] / EPSS_K \\ & - COND_{K+1} / M_{K+1}\end{aligned}\quad (6.12a)$$

$$l_{K+1}^P = (l_K^P / EPSS) + (COND_{K+1} - PREP_{K+1}) / M_{K+1} \quad (6.13a)$$

其中  $EPSS_K = (1 + \varepsilon_{K+\frac{3}{4}} \Delta P_{K+\frac{3}{4}}) (1 + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \Delta P_{K+\frac{1}{4}})$

### 6.1.3 卷入和卷出率的确定

一些研究指出, 例如 Simpson 和 Wiggert<sup>[2]</sup>及 Simpson<sup>[3]</sup> (1971) 认为卷入系数依赖于云的半径。在高度坐标系中, 有

$$\varepsilon_z = \frac{0.2}{R}$$

转换到气压坐标, 有  $\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_z}{\rho g}$ 。假设  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$  和  $\rho \approx 1$  则有  $\varepsilon_p = 10^{-1} \varepsilon_z$ 。对于

$R \approx 500 \text{ m}$  的浅云,  $\varepsilon_p \approx 4 \times 10^{-5}$ 。而对  $R = 2000 \text{ m}$  的深厚云系  $\varepsilon_p \approx 1 \times 10^{-5}$ 。因此卷入系数最

好能随高度变化。在近地面处深厚云和浅薄云均可能存在, 而在云砧达到对流层上层的云则一定是深厚的云, 在本对流参数化方案中, 取

$$\varepsilon = 3A_E \frac{P}{p_*^2}$$

$A_E$  通常设为 1.5, 因此, 在近地面处  $P \approx P_*$  ( $P_*$  为地面气压),  $\varepsilon = 4.5 \times 10^{-5}$  反映深、浅对流同时存在。而当  $P = 20000 \text{ Pa}$ ,  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$  (假设  $P_* = 100000 \text{ Pa}$ )。对离散化的方程来

说, 在  $K + \frac{1}{4}$  及  $K + \frac{3}{4}$  层有

$$\varepsilon_{K+\frac{1}{4}} = 3A_E \frac{P_K}{P_*^2}$$

$$\varepsilon_{K+\frac{3}{4}} = 3A_E \frac{P_{K+1}}{P_*^2} \quad (6.14)$$

$$A_E = \begin{cases} 1 & \text{若 } k=1 \\ 1.5 & k > 1 \end{cases}$$

强迫卷出系数  $\delta$  由隐式方法求解。

$$\text{而混合卷出系数 } \mu_k = \left( \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{4}} + \varepsilon_{k+\frac{3}{4}} \Delta P_{k+\frac{3}{4}} \right) \frac{(1 - A_E^{-1})}{\Delta P_{k+\frac{1}{2}}} \quad (6.15)$$

由于  $A_E$  在最低层取为 1, 这就意味着  $\mu_1 = 0$

## 6.2 初始的干抬升过程

气块在上升运动中位温的变化可由下式给出

$$\theta_{k+1}^P = \theta_k + (L/c_p) \pi_{k+1} (-q_{k+1} + q_k)$$

计算气块在  $K+1$  层位温时, 作如下的假设①在抬升过后中没有卷入的发生, ②如果气块在  $K+1$  层饱和, 气块的混合比等于该层环境位温下的饱和比湿, 即

$$q_{k+1} = q_s(\theta_{k+1}^E)$$

同时在计算中, 避免负水汽的产生, 可得下式

$$\theta_{k+1}^P = \theta_k + \max(0, (L/c_p) \pi_{k+1} (q_k - q_s(\theta_{k+1}^E))) \quad (6.16a)$$

气块是否能在  $K$  层发生对流, 是由其在  $K+1$  层时位温与  $K+1$  层时环境位温差来判定的, 是浮力判据的延伸。即当

$$[\theta_{k+1}^P] - \theta_{k+1} > 0$$

时, 在  $K+1$  层满足浮力判据 (只在理论上如此), 在  $K+1$  层发生对流。其中  $[\theta_{k+1}^P]$  为气块在  $K+1$  层的位温近似估值。在实际应用中, 则要求:

$$[\theta_{k+1}^P] - \theta_{k+1} > -DETHST \quad (6.16b)$$

在实际计算格式中  $DETHST$  取为 1.5 K, 这一向上浮力判据表明, 气块抬升至  $K+1$  层, 位温若不比环境位温小过多, 则应有  $\theta_k^P - \theta_k^E > 0$  成立 (这是一个初始, 简单的判据), 则在  $K$  层发生对流。

$K$  层发生对流条件下, 初始温度和比湿的假定:

若能在  $K$  层发生对流, 则应有如下初始条件

$$\theta_k^P = \theta_k^E + 0.2 \quad (\text{浮力判据})$$

$$q_k^P = q_k^E \quad (\text{水汽充分混和})$$

气块在从  $K$  层原始升至  $K+1$  层时, 仅考虑了卷入过程, 气块的位温和混合比可由下式给出:

$$\theta_{K+1}^P = \left[ \theta_K^P - \delta_k \theta_K^R \Delta P_{K+\frac{1}{2}} + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \left( 1 - \delta_k \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) \theta_k^E \Delta P_{K+\frac{1}{4}} + \varepsilon_{K+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ \left. \times \left( 1 - \delta_k \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) \theta_{K+1}^E \Delta P_{K+\frac{3}{4}} \right] / EPSS_K + (L'/c_p) \frac{COND}{\pi_{K+1}} \frac{K+1}{M_{K+1}} \quad (6.11a)$$

$$q_{k+1}^P = \left[ q_k^P - \delta_k \theta_K^R \Delta P_{K+\frac{1}{2}} + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \left( 1 - \delta_k \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) q_k^E \Delta P_{K+\frac{1}{4}} + \varepsilon_{K+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ \left. \times \left( 1 - \delta_k \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) q_{k-1}^E \Delta P_{K+\frac{3}{4}} \right] / EPSS_K - COND_{K+1} / M_{k+1} \quad (6.12a)$$

令  $\mu_k = \delta_k = 0$

则有

$$\theta_{k+1}^{p_d} = \frac{\theta_k^P + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \theta_k^E \Delta p_{K+\frac{1}{4}} + \varepsilon_{K+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \Delta p_{K+\frac{1}{4}} \right) \theta_{K+1}^E \Delta p_{K+\frac{1}{4}}}{EPSS_K} \quad (6.11b)$$

及

$$q_{k+1}^{p_d} = \frac{q_k^P + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} q_k^E \Delta p_{K+\frac{1}{4}} + \varepsilon_{K+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \Delta p_{K+\frac{1}{4}} \right) q_{K+\frac{3}{4}}^E q_{K+1}^E}{EPSS_K} \quad (6.12b)$$

### 6.3 凝结

如果初始的抬升过程超过了凝结层，则在  $K+1$  层气块饱和并且位温通过增加  $COND_{K+1}$  项进行调节。

$$COND_{K+1} = \gamma_{k+1} M_{k+1} [q_{k+1}^{p_d} - q_s(\theta_{k+1}^{p_m})] \quad (6.18)$$

如果气块在  $K+1$  层达到饱和则  $r_{k+1}=1$ ，如不饱和则  $r_{k+1}=0$  即

$$COND_{K+1} = \begin{cases} M_{k+1} [q_{k+1}^{p_d} - q_s(\theta_{k+1}^{p_m})], & \text{若在 } K+1 \text{ 层饱和} \\ 0, & \text{若在 } K+1 \text{ 层不饱和} \end{cases}$$

式 (6.18) 意味着中  $\theta_{k+1}^{p_m}$  隐式给出，将饱和比湿作为位温的函数作一阶泰勒展开得

$$q_s(\theta_{k+1}^{p_m}) = q_s(\theta_{k+1}^E) + (\theta_{k+1}^{p_m} - \theta_{k+1}^E) (\partial q_s / \partial \theta)_{k+1}^E \quad (6.19)$$

由 Clausius-Clapeyron 方程可知

$$dq_s / dT = \frac{lv}{T(a_v - a_e)} = \frac{lv}{a_v T} = \frac{lvq_s}{R_v T^2}$$

$$\text{则} \quad \frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{\partial q}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{l_v q_s}{R_v T^2} \cdot \pi = \frac{l_v q_s}{R_v (T/\pi)^2 \pi} = \frac{l_v q_s}{R_v \theta^2} \quad (6.20)$$

由式 (6.11a) 可知  $\theta_{K+1}^{p_m} = \theta_{K+1}^{p_d} + \left( \frac{L'}{C_p} \right) \frac{COND_{K+1}}{\pi_{K+1} M_{k+1}}$  代入式 (18) 有

$$\theta_{K+1}^{p_m} = \theta_{K+1}^{p_d} + \frac{L'}{c_p \pi_{k+1}} \frac{\gamma_{k+1} M_{k+1}}{M_{k+1}} (q_{K+1}^{p_d} - q_s(\theta_{K+1}^{p_m}))$$

代入式 (6.19) 有

$$\theta_{K+1}^{p_m} = \theta_{K+1}^{p_d} + \frac{L'}{c_p \pi_{k+1}} \gamma_{k+1} \left[ q_{K+1}^{p_d} - q_s(\theta_{k+1}^E) - (\theta_{k+1}^{p_m} - \theta_{k+1}^E) \left( \frac{\delta q_s}{\partial \theta} \right)_{k+1}^E \right]$$

合并  $\theta_{K+1}^{p_m}$  项, 则有

$$\left[ 1 + \frac{L' \gamma_{k+1}}{c_p \pi_{k+1}} \left( \frac{\delta q_s}{\partial \theta} \right)_{k+1}^E \right] \theta_{K+1}^{p_m} = \theta_{K+1}^{p_d} + \frac{L' \gamma_{k+1}}{c_p \pi_{k+1}} \left[ (q_{K+1}^{p_d}) - q_s(\theta_{k+1}^E) + \left( \frac{\delta q_s}{\partial \theta} \right)_{k+1}^E \theta_{k+1}^E \right]$$

故有

$$\theta_{k+1}^{p_m} = \left\{ \theta_{K+1}^{p_d} + \frac{L'}{c_p \pi_{k+1}} \left[ q_{k+1}^{p_d} - q_s(\theta_{k+1}^E) + \left( \frac{\delta q_s}{\partial \theta} \right)_{k+1}^E \theta_{k+1}^E \right] \right\} / \left[ 1 + \frac{L' \gamma_{k+1}}{c_p \pi_{k+1}} \left( \frac{\delta q_s}{\partial \theta} \right)_{k+1}^E \right]$$

令  $\gamma_{k+1} = 1$ , 则式 (6.21)

$$\theta_{k+1}^{p_m} = \left\{ \theta_{K+1}^{p_d} + \left( \frac{L'}{c_p \pi_{k+1}} \right) \left[ q_{k+1}^{p_d} - q_s(\theta_{k+1}^E) + \theta_{k+1}^E \left( \frac{\delta q_s}{\partial \theta} \right)_{k+1}^E \right] \right\} / \left[ 1 + \frac{L'}{c_p \pi_{k+1}} \left( \frac{\delta q_s}{\partial \theta} \right)_{k+1}^E \right] \quad (6.21)$$

## 6.4 初始质量通量的计算

初始对流发生时, 初始的质量通量与最低层对流层的稳定度有关, 可用下面的经验公式表示:

$$M_I = 10^{-3} P_* \left( d + c \times P_* \left\{ (\theta_v^{p_m})_{k+1} - (\theta_v^E)_{k+1} - b \right\} / \Delta p_{K+\frac{1}{2}} \right) \quad (6.22)$$



其中  $c = 3.33 \times 10^{-K}$ ,  $d = 0.0$ ,  $P$  为气压,  $P_*$  为地面气压 (单位均为 Pa)  $M_l$  为初始质量通量 (单位为 Pa/s)。 $(\theta_v^{pm})_{k+1}$  是气块在  $k+1$  层, 考虑了夹卷作用和潜热释放影响的虚位温。

## 6.5 强迫卷出

### 6.5.1 强迫卷出的条件

给定一气块, 根据 6.1 可知其质量通量随高度增加, 它的增加会受到强迫卷出的限制, 对于云群中浮力较弱的气块而言, 当浮力达到零时, 就会最终卷出。

在气块由  $K$  层到  $K+1$  层的上升过程中, 已考虑过卷入及湿过程后, 若此时气块的浮力小于一个极小的临界值, 则强迫卷出就会被激发, 即触发强迫卷出的条件为:

$$(\theta_v^{pm})_{k+1} - (\theta_v^E)_{k+1} < b \quad (6.23)$$

$K$  层上的卷出被假定为最终卷出; 根据  $b$  的量级 (在标准条件下,  $b=0.2$ ), 由式 (6.23) 决定气块在上升到什么层次时, 会发生强迫卷出。

### 6.5.2 卷出气块位温的确定

卷出在气块的位温应等于在卷出层的云环境的位温, 即:

$$(\theta_v^R)_k = (\theta_v^E)_k, \text{ 而由相当位温公式的泰勒一级近似}$$

则为

$$\theta_k^R(1 + 0.61q_k^p) = \theta_k^E(1 + 0.61q_k^E)$$

应用饱和比湿判据  $\gamma_k$  即  $\begin{cases} \gamma_k = 1 & \text{饱和} \\ \gamma_k = 0 & \text{不饱和} \end{cases}$ , 则上述公式变型为:

$$\theta_k^R(1 + 0.61\gamma_k q_s \theta_k^R + 0.61(1 - \gamma_k) q_k^p) = \theta_k^E(1 + 0.61q_k^E) \quad (6.24)$$

对于饱和气块, 则  $\gamma_k = 1$ , 式 (6.24) 变为

$$\theta_k^R(1 + 0.61\gamma_k q_s \theta_k^R) = \theta_k^E(1 + 0.61q_k^E)$$

展开

$$\theta_k^R + 0.61\theta_k^R q_s (\theta_k^R) = \theta_k^E(1 + 0.61q_k^E) \quad (a)$$

取近似  $\theta_k^R q_s (\theta_k^R) = \theta_k^E q_s (\theta_k^R)$ , 则 (a) 式为

$$\theta_k^R + 0.61\theta_k^R q_s (\theta_k^R) = \theta_k^E(1 + 0.61q_k^E) \quad (b)$$

$q_s(\theta_k^R)$  展开为一级泰勒公式有:

$$q_s(\theta_k^R) = q_s(\theta_k^E) + (\theta_k^R - \theta_k^E)(\delta q_s / \delta \theta)_k^E \quad (6.25)$$

把式 (6.25) 代入式 (b) 中有

$$\theta_k^R + 0.61\theta_k^E [q_s(\theta_k^E) + (\theta_k^R - \theta_k^E)(\delta q_s / \delta \theta)_k^E] = \theta_k^E [1 + 0.61q_k^E]$$

合并  $\theta_k^R$  项有

$$\begin{aligned} \theta_k^R [1 + 0.61\theta_k^E (\delta q_s / \delta \theta)_k^E] &= \theta_k^E [1 + 0.61q_k^E + 0.61(\delta q_s / \delta \theta)_k^E \theta_k^E 0.61q_s(\theta_k^E)] \\ \theta_k^R &= \theta_k^E \left\{ \frac{1 + 0.61(\delta q_s / \delta \theta)_k^E \theta_k^E + 0.61(q_k^E - q_s(\theta_k^E))}{1 + 0.61\theta_k^E (\delta q_s / \delta \theta)_k^E} \right\} = \theta_k^E \left\{ 1 + \frac{0.61(q_k^E - q_s(\theta_k^E))}{1 + 0.61\theta_k^E (\delta q_s / \delta \theta)_k^E} \right\} \end{aligned} \quad (6.26a)$$

对于未饱和气块, 则  $\gamma_k = 0$

式 (6.24) 为

$$\theta_k^R [1 + 0.61q_k^P] = \theta_k^E (1 + 0.61q_k^E)$$

取近似  $q_k^R = q_k^P$  ( $q_k^R$  等于未饱和气块的平均混合比, 则有 (6.26b) 式, 即

$$\theta_k^R = \theta_k^E (1 + 0.61q_k^E) / (1 + 0.61q_k^P) \quad (6.26b)$$

为了修正经卷出过程 (即强迫卷出过程) 后  $K+1$  层的气块位温, 需确定在  $K$  层强迫卷出气块的部分。对于气柱云模式而言, 卷出气块部分是未知的, 故需要采取替代的办法。

假设在  $K$  层强迫卷出的气块在  $K+1$  层有最小的浮力  $b$ , 则有

$$(\theta_v^{P_t})_{k+1} = (\theta_v^E)_{k+1} + b$$

即

$$\theta_{K+1} (1 + 0.61\gamma_{k+1} q_s(\theta_{k+1}^P) + 0.61(1 - \gamma_{k+1}) q_{k+1}^P) = \theta_{k+1}^E (1 + 0.61q_{k+1}^E) + b \quad (6.27)$$

对于饱和气块而言, 与式 (6.24) 的推导相同可以得到

$$\theta_{K+1}^{P_t} = \theta_{K+1}^E + \frac{0.61\theta_{k+1}^E (q_{k+1}^E - q_s(\theta_{k+1}^E)) + b}{1 + 0.61\theta_{k+1}^E (\delta q_s / \delta \theta)_{k+1}^E} \quad (6.28a)$$

而对未饱和气块而言,

$$\theta_{K+1}^{P_t} = (\theta_{k+1}^E (1 + 0.61q_{k+1}^E) + b) / (1 + 0.61q_{K+1}^{P_d}) \quad (6.28b)$$

这里  $b$  再次取为 0.2K, 这意味着“宏观”的气块经过强迫卷出之后在  $k+1$  层正好还受有浮力。

如果在最初上升过程中, 气块刚刚饱和并且其位温接近于环境位温则有可能

$$q_{K+1}^{P_d} < q_s(\theta_{K+1}^{P_i}) \quad (6.29)$$

这意味着气块在由  $K$  层抬升至  $K+1$  层时, 经过强迫卷出过程后, 气块中的水汽未能产生足够的凝结, 在此情况下气块由饱和变为不饱和, 故需对  $\theta_{K+1}^{P_i}$  气块重新将其当作未饱和气块来计算其强迫卷出过程结束后的最终的位温。

注意, 气块在经过卷出过程后 (这里指强迫卷出) 到达  $K+1$  层时位温若低于未考虑强迫卷出过程所计算出的位温, 在此情况下, 则放弃强迫卷出过程的计算, 气块的各种特征值重新返回到经过湿过程后的结果。

方程中  $\delta_k$  (强迫扩散系数) 是由方程 (6.10), (6.11) 和 (6.12) 及方程 (6.26)、(6.28) 计算的  $\theta_K^R$  和  $\theta_{K+1}^{P_f}$  的值进行诊断的。为进行这一工作必须对发生于  $K+1$  层, 由于气块被卷出, 饱和湿空气的额外凝结进行调整。这将在下面一段介绍。

### 6.5.3 强迫卷出过程中凝结的计算

一般说来  $\theta_K^R$  不等于  $\theta_K^P$ , 因而  $q_K^R$  不等于  $q_K^P$ , 因此在抬升过程中气块由  $K$  层上升到  $K+1$  层在经过强迫卷出过程后, 气块中凝结出的水汽比正常情况下多或者少, 实际上此过程是气块在由  $K$  层抬升过程逐步发生的, 而在此我们假定气块的凝结正好发生在  $K$  层, 经过强迫卷出后, 凝结的变化如下式所述。

$$COND_K^d = \gamma_k \delta_k \Delta p_{K+\frac{1}{2}} \left( 1 - \eta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}} \right) M_k (q_K^P - q_s(\theta_K^R)) \quad (6.30)$$

考虑到这种凝结的变化, 则对位温方程进行修改, 把式 (6.11a) 变为

$$\begin{aligned} \theta_{K+1}^{P_i} = & \left[ \theta_K^P - \delta_k \theta_K^R \Delta p_{K+\frac{1}{2}} + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \left( 1 - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}} \right) \theta_K^E \Delta p_{K+\frac{1}{4}} + \varepsilon_{K+\frac{3}{4}} \left( 1 + \varepsilon_{K+\frac{1}{4}} \Delta p_{K+\frac{1}{4}} \right) \right. \\ & \times \left( 1 - \delta_k \Delta p_{K+\frac{1}{2}} \right) \times \left. \theta_{K+1}^E \Delta p_{K+\frac{3}{4}} \right] / \left( EPSS_K \times (1 - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}) + \left( L'/c_p \pi_{k+1} \right) COND_{K+1}^2 / M_{K+1} \right. \\ & \left. + \left( L'/c_p \pi_k \right) COND_K^d / M_K \right) \quad (6.11c) \end{aligned}$$

这里

$$COND_{K+1}^2 = \gamma_{k+1} M_{k+1} (q_{K+1}^{P_d} - q_s(\theta_{K+1}^{P_f}))$$

式 (6.11c) 为  $\delta_k$  的诊断方程

$$\delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}} = \frac{\theta_{K+Z}^P}{\left[ \theta_{K+Z}^P - \left( L'/c_p \pi_k \right) (q_k^P - q_s(\theta_k^R)) \right]} \quad (6.31b)$$

其中

$$Z = \varepsilon_{k+1/4} \theta_k^E \Delta p_{k+1/4} + \varepsilon_{k+3/4} (1 + \varepsilon_{k+1/4} \Delta p_{k+1/4}) \theta_{k+1}^E \Delta p_{k+3/4} - EPSS_K \times [\theta_{k+1}^{p \text{ Final}} - (L'/c_p \pi_{k+1})(q_{k+1}^{p \text{ dry}} - q_s(\theta_{k+1}^{p \text{ Final}}))]$$

新的  $q_{K+1}^{pd}$  值为

$$q_{K+1}^{pd} = q_{K+1}^{pd} + \frac{\delta_K \Delta P_{K+\frac{1}{2}} (q_K^p - q_s(\theta_K^R))}{EPSS_K \times \left(1 - \delta_K \Delta P_{K+\frac{1}{2}}\right)} \quad (6.12c)$$

## 6.6 对流的终止

如果在云群中气块温度分布是不受限制的, 则强迫卷出使温度增加了的小气块不断卷出, 从而使云群的温度不断增加。然而在实际中, 气块在云群中那些温度最高气块常常是从初始对流层开始未被掺杂的气块, 因此一旦这些未被掺杂的气块达至零浮力层时, 这些气块会整个地卷出。

这些未被掺杂气块在  $K+1$  层时的位温, 则为

$$\begin{aligned} \theta_{K+1}^{UD} = & [\theta_l^p + (L/c_p \Pi_{k+1})(q_l^p - q_{sice}) + ((L + L_F)/c_p \Pi_{k+1}) \times (q_{sice} - q_s(\theta_{k+1}^E))] \\ & \times (1 + 0.6q_s(\theta_{k+1}^E)) \end{aligned} \quad (6.32)$$

其中  $\phi_l^p$  是  $\phi$  在初始对流层的值,  $q_{sice}$  是在 263 K 时饱和混合比湿, 在这一温度下凝结物发生冻结。未被掺杂气块, 位温变化因未考虑卷入及卷出过程, 故位温改变仅由凝结潜热项的释放来改变, 式 (6.32) 考虑了水汽转化为液相和冰相两种潜热释放情况, 即冻结为冰释放潜热与饱和湿空气中水汽析出所释放的潜热。此外, 本对流参数化方案还假设如果一个气块的对流质量通量小于某个界限时, 气块就会被夹卷作用破坏, 这最小质量通量定义为:

$$M_{\min} = 10^{-3} P_* CE_{\min} \quad (6.33)$$

其中,  $E_{\min} = 1 \text{ K}$ ,  $C = 3.33 \times 10^{-4}$  为一常数

当对流终止时,  $\delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}$  部分气块在中性浮力下在  $K$  层卷出, 而其余部分  $\left(1 - \delta_K \Delta p_{K+\frac{1}{2}}\right)$

则在  $K+1$  层卷出。

## 6.7 降水过程

阵性降雨云中的降水的发展主要是靠云中小水滴与大水滴的碰并过程。具有较大凝结核的云形成降水较快。凝结核的多少可从云的厚度反映出来,在陆地上凝结核较丰富,云厚可达 3~5 km,而海上凝结核较少但体积大,云厚通常 1~2 km。对形成降水来说不一定要云中形成冰,但云顶超过 -10℃层一公里以上的云将会由过冷水冻结成冰雹而产生降水。

模式中没有气溶胶在空气中分布的数据,但这些观察事实通过抑制凝结水形成降水方法,来反映到对流格式中,这些限制性条件是:(1)云超过某一临界厚度  $D_{CRIT}$  (从云顶到云底);(2)云中凝结水超过临界最小值  $l_{min}$ ,才会产生降水。

若不满足上述两条件,则降水不会发生,凝结水贮存在气块中并随着气块上升。在标准的模型中, $l_{min}$  设为  $10^{-3}$  kg/kg 或令其等于局地的饱和比湿。而云的临界厚度则定义为

$$D_{CRIT} = \begin{cases} 4.0\text{km} & \text{陆地} \\ 1.5\text{km} & \text{海洋} \\ 1.0\text{km} & \text{若 } \frac{1}{2}(T_K^E + T_{K+1}^E) < 263.15\text{K} \end{cases} \quad (6.34)$$

这一规定大体上考虑到了陆地上和海洋上气溶胶的分布状况,同时也反映了当云中有冻结现象发生时就会产生降水的观测事实。

第  $K$  层上云的厚度是用对静力学方程进行垂直积分而求得:

$$D_K = \sum_{K_b}^K c_p \theta_k^E (1 + 0.61 q_K^E) \Delta \pi_k / g \quad (6.35)$$

其中  $K_b$  是云底的层次,  $\Delta \pi_k = \pi_{k-\frac{1}{2}} - \pi_{k+\frac{1}{2}}$

若满足降水的两个判据,则会产生降水。从  $K$  到  $K+1$  层云群产生的降水为:

$$P_{K+1} = (l_{K+1}^P - l_{min}) M_{K+1} / g \quad (6.36)$$

整个降水量则为从云底累积至云顶层。降水的单位为  $\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}$ 。

## 6.8 对流云底、云顶和云量

云底是饱和最早出现的最低模式层次,而云顶是最后具有浮力的层次的上边界,对流云量则由经验公式给出

$$C_{CONV} = 0.3619 + 0.06 \ln(TCW \times \Delta t) \quad (\%) \quad (6.37)$$

其中  $TCW = \sum_{K_b}^{K_t} l_k^p \Delta p_K / g$ ， $K_b$  为云底层， $K_t$  为云顶层。

$l_k^p$  则为降水前气块中的凝结水（包括液态和固态冰）， $\Delta t$  是模式的时间步长。若  $TCW < 2.402 \times 10^{-3}$  则  $C_{CONV} = 0$ 。 $C_{CONV}$  的值不能超过 1。

## 6.9 对环境的影响

积云与环境的相互影响是通过云与环境间热量、水汽以及凝结水的卷出和卷入以及云环境中的补偿下沉来进行的。环境大气中的位温、比湿的变化率可由下式给出：

$$\begin{aligned} \Delta \theta_k^E / \Delta t = & (M_k / \Delta P_k) \left\{ \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{4}} \right) \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) (\theta_{k+1}^E - \theta_k^E) \right. \\ & + \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) (\theta_k^R - \theta_k^E) + \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} (\theta_k^P - \theta_k^E) \\ & \left. - (L' / c_p) \left( \mu_k \Delta P_{K+\frac{1}{2}} + \delta_k \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \left( 1 - \mu_K \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) \right) l_k^p \right\} \quad (6.38a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta q_k^E / \Delta t = & (M_k / \Delta P_k) \left\{ \left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{4}} \right) \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) (q_{k+1}^E - q_k^E) \right. \\ & + \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) (q_k^R - q_k^E) + \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} (q_k^P - q_k^E) \\ & \left. + \left( \mu_k \Delta P_{K+\frac{1}{2}} + \delta_k \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \left( 1 - \mu_K \Delta P_{K+\frac{1}{2}} \right) \right) l_k^p \right\} \quad (6.38b) \end{aligned}$$

式中第一项  $\left( 1 + \varepsilon_{k+\frac{1}{4}} \Delta P_{k+\frac{1}{4}} \right) \left( 1 - \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) (\theta_{k+1}^E - \theta_k^E) \frac{M_k}{\Delta P_k}$ ，为补偿下沉，即

$K + \frac{1}{4}$  层在  $K$  层的卷入从而对环境造成影响，其表达式与离散化方程相同（隐含

$K + \frac{3}{4}$  层的卷入考虑是对  $K+1$  层造成影响）。第二项  $\delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) (\theta_k^R - \theta_k^E)$

为强迫卷出影响；第三项  $\mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} (\theta_k^P - \theta_k^E)$  为混合卷出的影响；第四项  $(L'/c_p)$

$$\left( \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} + \delta_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \left( 1 - \mu_k \Delta P_{k+\frac{1}{2}} \right) \right) l_k^P \cdot \frac{M_k}{\Delta P_k}$$

为云中卷出凝结水的影响。

在对流发生层，最初气块位温由  $\theta^E$  增加至  $\theta^E + S$  所需热量是从环境中取得的，则环境位温变化为

$$\Delta \theta_k^E / \Delta t = -(M_k / \Delta P_k) S \quad (6.39)$$

当对流终结时，会发生最后分裂的云片的卷出，这时对流也会引起  $K+1$  层环境位温与混合比的增加

$$\Delta \theta_{k+1}^E / \Delta t = (M_{k+1} / \Delta P_{k+1}) (\theta_{k+1}^P - \theta_{k+1}^E - (L'/c_p) \mu_{k+1}^P) \quad (6.40a)$$

$$\Delta q_{k+1}^E / \Delta t = (M_{k+1} / \Delta P_{k+1}) (q_{k+1}^P - q_{k+1}^E + l_{k+1}^P) \quad (6.40b)$$

## 6.10 相变和降水的蒸发

对流参数化方案产生的降水可以是水（雨）也可以是冰（雪），这取决于降水所通过的层次的温度，当它通过冻结/融化层（273.15 K）时就会发生相变。这里所用的临界值与决定云中降水是液态还是固态的水的临界值是不一样的（6.1.2 节）！因此，在降水从  $K$  层达到地面之前，有可能发生相变。这一过程取决于  $K$  层的环境温度。

(1) 降水中相变引起环境温度增加

$$\Delta \theta_k^E / \Delta t = \pm g(L_F / c_p \pi_k \Delta P_k) P_k \quad (6.41)$$

这里  $P_k$  是降水开始落下的层次。

(2) 通过冰冻/融解层时，从  $K+1$  层落至  $K$  层降水而引起  $K$  层环境位温的改变，则为

$$\Delta \theta_k^E / \Delta t = \pm g(L_F / C_p \pi_k \Delta P_k) J_{k+1} \quad (6.42)$$

这里  $J_{k+1}$  是由  $K+1$  层落至  $K$  层的降水

(3) 降水的蒸发

在云底下降水蒸发是要考虑的，蒸发速率与环境的饱和差（湿度）成比例，并且可通过对整层  $dz$  的降水蒸发的部分进行积分而得到

$$dJ/J = \beta(q - q_s) \rho dz / Q \quad (6.43)$$

式中  $\beta$  为常数， $\beta = 10^{-3} / s$ ， $\rho$  是空气密度， $Q$  是局地降水率，并假设其中 10% 降落在格点区域上，故  $Q = 10J_B$ ，这里  $J_B$  是云底格点区域的平均降水。

如果空气不饱和，则  $J_k$  从  $K+1$  层至  $K$  层的值为

$$J_k = J_{k+1} \exp \left\{ -\beta \Delta P_k [q_s(T_k^E) - q_k^E] / [10J_B g] \right\} \quad (6.44)$$

其中  $J_k$  的单位为  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $q$  的单位为  $\text{kg/kg}$ , 而  $\Delta P_k$  的单位为  $\text{Pa}$ 。由于蒸发作用在  $k$  层引起的混合比和位温的变化为

$$\Delta q_k^E / \Delta t = (J_{k+1} - J_k) g / \Delta P_k \quad (6.45a)$$

$$\Delta Q_k^E / \Delta t = \left( \frac{L}{c_p} \pi_k \right) \Delta q_k^E / \Delta t \quad (6.45b)$$

#### 参考文献

- [1] Gregory D, Rowntree, P. R., A mass flux convection scheme with representation of cloud ensemble characteristics and stability dependent closure. *Mon. Wea. Rev.*, 1990, 118, 1483—1506
- [2] Simpson, J, Wiggert, V., Models of precipitating cumulus towers. *Mon. Wea. Rev.*, 1969, 97, 471—48
- [3] Simpson, J., On Cumulus entrainment and one-dimensional models. *J. Atmos. Sci.*, 1971, 28, 449—455



## 第七章 陆面过程

陆面过程指的是能够影响气候变化的, 发生在地表面(包括生物圈)和土壤控制地气之间动量、热量以及水分交换的过程。这些陆面过程大多数都是次网格尺度过程, 因而在气候模式中需要对其进行参数化处理。主要由国家“九五”重中之重科技项目“中国短期气候预测系统的研究”支持, 国家气候中心发展的季节预测大气环流模式中引入了经改进的“生物圈-大气传输方案”(简称 BATS)<sup>[1]</sup>。与 Dickinson 等(1993)的方案相比, 主要有以下几点改进: (1) 土壤分层增加到 10 层; (2) 改进了土壤湿度和土壤温度的计算方案\*; (3) 为改进对雪过程的描述, 引入了简化的雪盖-大气-土壤间的输运模型(SAST)。本章主要介绍该陆面过程模型的参数化方案, 包括地表面的热量和水分交换、土壤中热量和水分的传输、生物圈-大气传输过程以及雪过程等。

### 7.1 改进的生物圈-大气传输过程模型(BATS)

陆面过程作为气候系统中重要的一个子系统, 已经越来越受到当代气候学研究的重视。同时, 大量的观测分析、理论研究以及数值模拟使人们对陆面过程及其与大气之间的相互作用过程的了解达到了一个较为详细、准确的程度。Dickinson 等<sup>[1]</sup>提出的生物圈-大气传输方案(BATS)就包括了发生在大气边界层-植被-土壤耦合系统中的各种复杂的水分、热量传输过程。BATS 方案既可以作为独立运行的模式, 也可以与大气环流模式耦合运行。其主要参数化包括: (1) 对每一模式格点分别定义陆面状况和土壤类型参数; (2) 根据地表能量平衡计算土壤、雪和海冰的地表温度; (3) 计算土壤湿度、蒸发和地表及地下水径流; (4) 依据上面定义的陆面状况参数、地面被遮挡部分和有、无蒸腾植被表面相对面积确定地表植被覆盖状况; (5) 根据土壤湿度、植被覆盖状况、雪盖(包括植被对雪的遮挡)计算地表反照率; (6) 植被水分收支计算(包括植被的叶和茎中储存的水、截留的降水和由气孔阻抗及土壤干湿状况限制的蒸腾); (7) 由总体理查逊数和植被覆盖决定的地面拖曳系数的计算; (8) 按能量平衡条件和从叶到植物冠层空气间的热量与水气通量来求算叶温。下面将分别介绍上述过程。

#### 7.1.1 土壤湿度

##### 7.1.1.1 垂直分层结构

图 7.1 为土壤垂直分层结构示意图。第  $i$  土壤层整层的深度(mm)为

$$z_i = 25(\exp(0.5(i - 0.5)) - 1) \quad (7.1)$$

\* Yang 和 Dickinson, 1999, 私人交流

每层的厚度为

$$\Delta z_i = \begin{cases} 0.5(z_1 + z_2) & i = 1 \\ 0.5(z_{i+1} - z_{i-1}) & i = 2, 3, \Lambda, m-1 \\ (z_m - z_{m-1}) & i = m \end{cases} \quad (7.2)$$

半层的深度  $z_{h,i}$  (mm) 为

$$z_{h,i} = \begin{cases} 0.5(z_i + z_{i+1}) & i = 1, 2, \Lambda, m-1 \\ z_m + 0.5\Delta z_m & i = m \end{cases} \quad (7.3)$$

其中  $z_0 = z_{h,0} = 0$ ，且  $\Delta z_1 = z_{h,1}$ 。由于浅层土壤的湿度梯度一般较大<sup>[2,3]</sup>，故为了使浅层土壤的分层多于深层土壤以便精确描述土壤湿度的变化，土壤垂直分层时采用式 (7.1) 的指数形式。

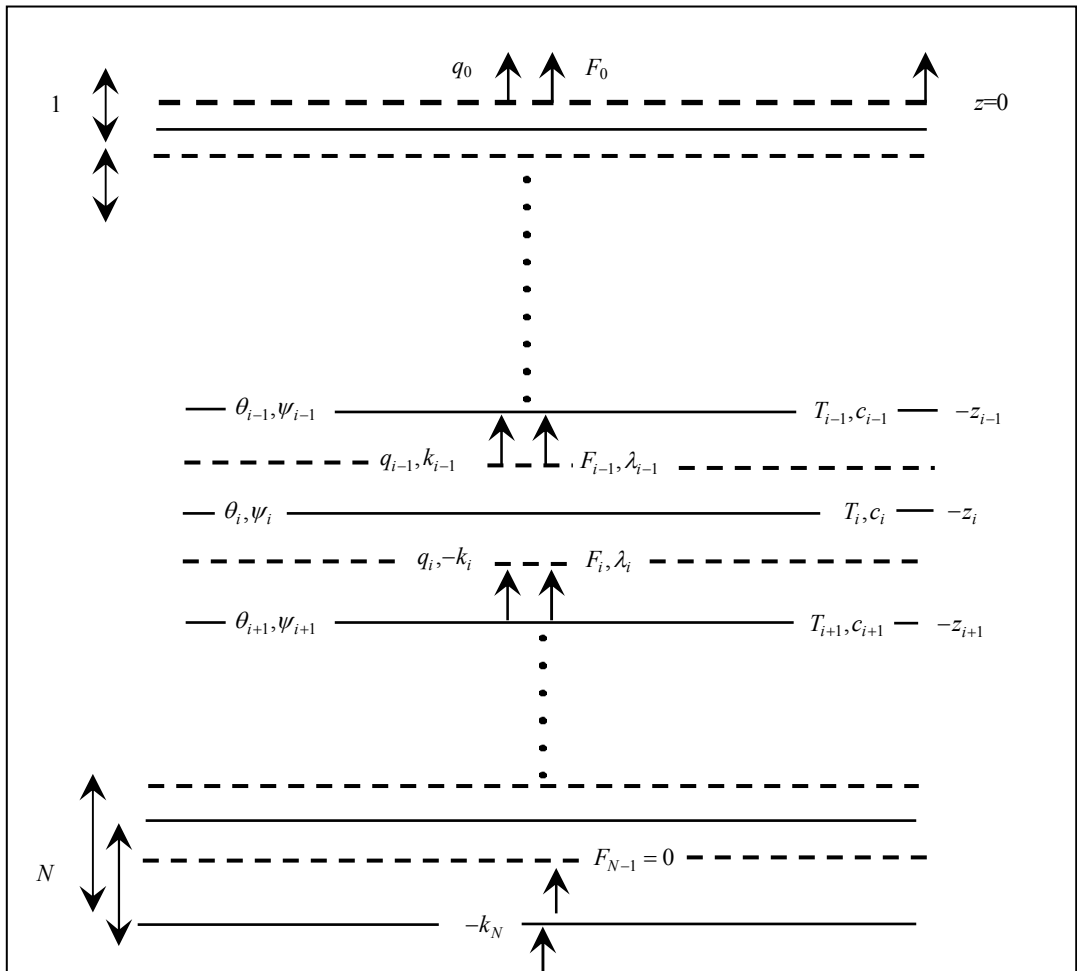


图 7.1 土壤垂直分层结构示意图 ( $N=10$ )

假设饱和和水力传导率随深度呈指数衰减, 即

$$k_{S,i} = k_S \exp(-z_{h,i} / h_k) \quad (7.4)$$

式中  $k_S$  为土壤表层的饱和水力传导率,  $k_{S,i}$  为半层  $z_{h,i}$  上的饱和水力传导率,  $h_k$  为由土壤类型和地形高度决定的长度尺度<sup>[4]</sup>。

各层中根系所占的比例为

$$f_{root,i} = \exp(-z_{h,i-1} / h_{root}) - \exp(-z_{h,i} / h_{root}) \quad (7.5)$$

其中  $h_{root}$  为根分布尺度。如果令  $h_{root} = 500$  mm,  $h_k = 500$  mm,  $k_S = 6.3 \times 10^{-3} \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ , 则对于垂直方向取 10 层的土壤分层, 各层的分层参数可由表 7.1 给出。

表 7.1 模型分层结构和参数

模式层 ( $i$ )	$z_i$ (mm)	$\Delta z_i$ (mm)	$z_{h,i}$ (mm)	$k_{S,i}$ (mm $\cdot$ s $^{-1}$ )	$f_{root,i}$
1	7.1	17.5	17.5	$6.08 \times 10^{-3}$	0.0344
2	27.9	27.6	45.1	$5.76 \times 10^{-3}$	0.0518
3	62.3	45.5	90.6	$5.26 \times 10^{-3}$	0.0794
4	119.0	75.0	166.0	$4.52 \times 10^{-3}$	0.1160
5	212.0	124.0	289.0	$3.53 \times 10^{-3}$	0.1570
6	366.0	204.0	493.0	$2.35 \times 10^{-3}$	0.1880
7	620.0	336.0	829.0	$1.20 \times 10^{-3}$	0.1830
8	1040.0	554.0	1380.0	$3.96 \times 10^{-4}$	0.1280
9	1730.0	913.0	2300.0	$6.38 \times 10^{-5}$	0.0528
10	2860.0	1140.0	3430.0	$6.57 \times 10^{-6}$	0.0091

#### 7.1.1.2 土壤湿度的计算

土壤水分在垂直方向的守恒性要求

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} \quad (7.6)$$

式中  $\theta$  为土壤的体积水含量 ( $\text{mm}^3 \cdot \text{mm}^{-3}$ ),  $t$  为时间 ( $s$ ),  $z$  为土壤表层以上的高度 (mm), 向上为正。 $q$  为土壤水通量 ( $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$ ), 向上为正, 且可以满足 Darcy 定律

$$\begin{aligned}
 q &= -k \left[ \frac{\partial(\Psi + z)}{\partial z} \right] \\
 &= -k \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial z} + 1 \right] \\
 &= -k \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + 1 \right]
 \end{aligned} \quad (7.7)$$

其中  $k$  为水力传导率 ( $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$ )， $\Psi$  为土壤的基质势 (取负值，与土壤吸势相反) ( $\text{mm}$ )。注意这里对  $z$  和  $q$  的符号与方向有多种取法，如果  $z$  和  $q$  取相同方向为正，则式 (7.6) 和 (7.7) 右端项前取负号；如果  $z$  和  $q$  取不同的方向为正，则式 (7.6) 和 (7.7) 右端项前取正号。如果定义  $z$  以土壤表面向上的方向为正，总势头为  $h_T = \Psi + z$ ；如果定义  $z$  以土壤表面向下的方向为正，则总势头为  $h_T = \Psi - z$ 。

从式 (7.6) 式中减去 (7.7)，则可得 Richard 公式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + 1 \right) \right]$$

对公式 (7.6) 可将土壤分成垂直方向平行的  $m$  层并利用数值方法求解 (见式 (7.1) ~ (7.3))，然后对各模式层进行从上向下的积分<sup>[5,6]</sup>

$$\int_{-z_{h,j}}^{-z_{h,j-1}} \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = - \int_{-z_{h,j}}^{-z_{h,j-1}} \frac{\partial q}{\partial z} dz - \int_{-z_{h,j}}^{-z_{h,j-1}} S dz \quad (7.8a)$$

其中  $i=1, 2, \dots, m$ ，从上向下增加， $S$  是土壤湿度的汇项。平均体积水含量定义为

$$\theta_i = \frac{1}{\Delta z_i} \int_{-z_{h,j}}^{-z_{h,j-1}} \theta dz \quad (7.8b)$$

式中  $\Delta z_i = z_{h,i} - z_{h,i-1}$ ，与式 (7.2) 相同； $\theta_i$  为第  $i$  层的平均体积水含量，定义在该层的中间。方程 (7.8b) 可以改写为

$$\Delta z_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -(q|_{z=-z_{h,j-1}} - q|_{z=-z_{h,j}}) - S_i \quad (7.8c)$$

$S_i$  为第  $i$  层内平均的土壤湿度汇项 (即蒸发损失) ( $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$ )，同样定义在该层的中间。  
令

$$q_{i-1} = q|_{z=-z_{h,i-1}}, \quad q_i = q|_{z=-z_{h,i}}$$

带入式 (7.8c)，并对时间采用有限差分，可得

$$\frac{\Delta z_i \Delta \theta_i}{\Delta t} = q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1} - S_i \quad (7.8d)$$

其中  $\Delta \theta_i$  为土壤层  $i$  在某时间步长  $\Delta t$  内  $\theta_i$  的变化，右端项的上标表示第  $n+1$  个时步，采用隐式积分。 $q_i$  为穿过界面  $i$  的土壤水通量，同样  $q_{i-1}$  为穿过界面  $i-1$  的土壤水通量。这里，脚标  $i$  对于层平均的变量代表整层，对于通量项则代表某层的下边界。由式 (7.7) 有

$$q_i = -k_i \left[ \frac{\partial (\Psi + z)}{\partial z} \right]_i \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned}
 &= -k_i \left[ \frac{(\Psi_i + z|_{z=-z_i}) - (\Psi_{i+1} + z|_{z=-z_{i+1}})}{z|_{z=-z_i} - z|_{z=-z_{i+1}}} \right] \\
 &= -k_i \left[ \frac{(\Psi_i - z_i) - (\Psi_{i+1} - z_{i+1})}{z_{i+1} - z_i} \right] \\
 &= -k_i \left[ \frac{(\Psi_i - \Psi_{i+1}) + (z_{i+1} - z_i)}{z_{i+1} - z_i} \right]
 \end{aligned}$$

根据文献[7],  $k$  和  $\Psi$  为,

$$k = k_s \left[ \frac{\theta}{\theta_s} \right]^{2B+3} \quad (7.10a)$$

$$\Psi = \Psi_s \left[ \frac{\theta}{\theta_s} \right]^{-B} \quad (7.10b)$$

其中  $k_s$  为饱和水力传导率,  $\Psi_s$  是饱和土壤基质势,  $B$  是由土壤质地决定的常数.  $k_i$  为通过界面  $i$  的水力传导率, 取如下形式

$$k_i = k_{s,i} \left[ \frac{0.5(\theta_i + \theta_{i+1})}{\theta_s} \right]^{2B+3} \quad (7.11a)$$

$\Psi_i$  的形式为

$$\Psi_i = \Psi_s \left[ \frac{\theta_i}{\theta_s} \right]^{-B} \quad (7.11b)$$

式 (7.10a) 和 (7.10b) 广泛应用于陆面模式中. 但在土壤学界中广泛使用的表达式有所不同<sup>[8]</sup>. 方程 (7.11a) 和 (7.11b) 也可以采用其它形式. 由于通量项应用于模式层的界面上, 故其计算需要定义“界面”体积水含量 (IFVWC). Boone 和 Wetzel (1996)<sup>[6]</sup>曾总结了计算 IFVWC 的 4 种常用方法, 即:

- (1) 用相邻两层的最大体积水含量计算 IFVWC<sup>[5]</sup>;
- (2) 用周围各层水力传导率的厚度权重计算 IFVWC<sup>[9,10]</sup>, Abramopoulos 等<sup>[10]</sup>曾试验了传导率的线性和对数插值方法;
- (3) 用周围各模式层体积水含量的数学平均计算 IFVWC<sup>[11]</sup>;
- (4) 用相邻两层基质势对数的线性插值计算 IFVWC<sup>[6]</sup>.

Boone 和 Wetzel (1996)<sup>[6]</sup>指出, 方法 (1) 和 (2) 可以给出几乎相同的 IFVWC 值. 他们用其 PLACE 陆面模式分别对垂直方向为高分辨率 (50 层) 和低分辨率 (5 层) 两种情形检验了方法 (1)、(3) 和 (4). 结果表明, 高垂直分辨率情况下模拟的土壤水含量对这三种方法不敏感, 而低分辨率时则对插值方案极其敏感. 在他们的低分辨率模式中, 方法 (4) 的结果与高分辨率情形下的结果最为接近, 而方法 (1) 的结果最差, 因为初始时湿的土壤很快变干.

但是，不同的计算方法需要构造不同的差分格式。因为  $\Psi$  和  $k$  是  $\theta$  的非线性函数， $q_i$

是满足 (7.11a) 和 (7.11b) 的  $\theta_i$  和  $\theta_{i+1}$  的函数。在第  $n+1$  时步， $q_i^{n+1}$  近似为

$$q_i^{n+1} = q_i^n + \frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i + \frac{\partial q_i}{\partial \theta_{i+1}} \Delta \theta_{i+1} \quad (7.12a)$$

同样可得

$$q_{i-1}^{n+1} = q_{i-1}^n + \frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} \Delta \theta_{i-1} + \frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i \quad (7.12b)$$

从而将  $q$  对  $\partial \theta$  进行了线性化。把式 (7.12a) 和 (7.12b) 代入 (7.8) 可以得到关于  $\partial \theta$  方程组的斜三角形阵，即

$$a_i \Delta \theta_{i-1} + b_i \Delta \theta_i + c_i \Delta \theta_{i+1} = r_i, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (7.13)$$

其中，

$$a_i = -\frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} \quad (7.14a)$$

$$b_i = \frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} - \frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_i} - \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \quad (7.14b)$$

$$c_i = \frac{\partial q_i}{\partial \theta_{i+1}} \quad (7.14c)$$

$$r_i = S_i + q_{i-1}^n - q_i^n \quad (7.14d)$$

如果  $2 \leq i \leq m-1$ ,

$$q_{i-1}^n = -k_{i-1} \left[ \frac{(\Psi_{i-1} - \Psi_i) + (z_i - z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} \right] \quad (7.15a)$$

$$q_i^n = -k_i \left[ \frac{(\Psi_i - \Psi_{i+1}) + (z_{i+1} - z_i)}{z_{i+1} - z_i} \right] \quad (7.15b)$$

$$\frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} = - \left[ \frac{k_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} \right] - \frac{\partial k_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} \left[ \frac{(\Psi_{i-1} - \Psi_i) + (z_i - z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} \right] \quad (7.15c)$$

$$\frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_i} = \left[ \frac{k_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_i} \right] - \frac{\partial k_{i-1}}{\partial \theta_i} \left[ \frac{(\Psi_{i-1} - \Psi_i) + (z_i - z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} \right] \quad (7.15d)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} = - \left[ \frac{k_i}{z_{i+1} - z_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_i} \right] - \frac{\partial k_i}{\partial \theta_i} \left[ \frac{(\Psi_i - \Psi_{i+1}) + (z_{i+1} - z_i)}{z_{i+1} - z_i} \right] \quad (7.15e)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial \theta_{i+1}} = \left[ \frac{k_i}{z_{i+1} - z_i} \frac{\partial \Psi_{i+1}}{\partial \theta_{i+1}} \right] - \frac{\partial k_i}{\partial \theta_{i+1}} \left[ \frac{(\Psi_i - \Psi_{i+1}) + (z_{i+1} - z_i)}{z_{i+1} - z_i} \right] \quad (7.15f)$$

$$\frac{\partial k_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} = \frac{\partial k_{i-1}}{\partial \theta_i} = \frac{k_{i-1}(2B+3)}{\theta_{i-1} - \theta_i} \quad (7.15g)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial \theta_i} = \frac{\partial k_i}{\partial \theta_{i+1}} = \frac{k_i(2B+3)}{\theta_i + \theta_{i+1}} \quad (7.15h)$$

令

$$n_1 = -(\Psi_{i-1} - \Psi_i) - (z_i - z_{i-1}) \quad (7.16a)$$

$$n_2 = -(\Psi_i - \Psi_{i+1}) - (z_{i+1} - z_i) \quad (7.16b)$$

$$d_1 = (z_i - z_{i-1}) / k_{i-1} \quad (7.16c)$$

$$d_2 = (z_{i+1} - z_i) / k_i \quad (7.16d)$$

则式 (7.15a) — (7.15f) 可写为

$$q_{i-1}^n = n_1 / d_1 \quad (7.17a)$$

$$q_i^n = n_2 / d_2 \quad (7.17b)$$

$$\frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} = \left[ -\frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} + \frac{n_1}{k_{i-1}} \frac{\partial k_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} \right] \Big/ d_1 \quad (7.17c)$$

$$\frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_i} = \left[ \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_i} + \frac{n_1}{k_{i-1}} \frac{\partial k_{i-1}}{\partial \theta_i} \right] \Big/ d_1 \quad (7.17d)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} = \left[ -\frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_i} + \frac{n_2}{k_i} \frac{\partial k_i}{\partial \theta_i} \right] \Big/ d_2 \quad (7.17e)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial \theta_{i+1}} = \left[ \frac{\partial \Psi_{i+1}}{\partial \theta_{i+1}} + \frac{n_2}{k_i} \frac{\partial k_i}{\partial \theta_{i+1}} \right] \Big/ d_2 \quad (7.17f)$$

如果  $i = 1$ , 式 (7.8) 可写为

$$\frac{\Delta \theta_i \Delta z_i}{\Delta t} = -q_{inf\ il}^{n+1} + q_i^{n+1} - S_i \quad (7.18)$$

其中,

$$q_{inf\ il} = R_s - G_w \quad (7.19)$$

且

$$G_w = P_w - E_w + S_m + D_r / \Delta t \quad (7.20)$$

$$R_s = \max(0, f_c G_w) \quad (7.21)$$

其中  $P_w$  是被植被截获后剩余的降水,  $E_w$  为土壤表面的蒸发量,  $S_m$  是融雪量,  $D_r$  是透过植被的雨滴,  $\Delta t$  为时间步长。

如果  $G_w > 0$ ，则

$$\frac{\partial R_s}{\partial \theta_1} = f_c \frac{\partial G_w}{\partial \theta_1} = -f_c \frac{\partial E_w}{\partial \theta_1} = -f_c S_{damp} \quad (7.22)$$

如果  $G_w \leq 0$ ，则  $R_s = 0$  且  $\frac{\partial R_s}{\partial \theta_1} = 0$ 。

第  $n+1$  时步的表面渗透  $q_{\text{infil}}$  形如

$$\begin{aligned} q_{\text{infil}}^{n+1} &= q_{\text{infil}}^n + \frac{\partial q_{\text{infil}}}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 \\ &= q_{\text{infil}}^n + \left[ \frac{\partial R_s}{\partial \theta_1} - \frac{\partial G_w}{\partial \theta_1} \right] \Delta \theta_1 \\ &= q_{\text{infil}}^n + \left[ \frac{\partial R_s}{\partial \theta_1} + \frac{\partial E_w}{\partial \theta_1} \right] \Delta \theta_1 \end{aligned} \quad (7.23)$$

把式 (7.12a) 和 (7.23) 代入 (7.18) 可得到一个斜三角阵，其系数为

$$a_i = 0 \quad (7.24a)$$

$$b_i = \frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} - \left[ \frac{\Delta z_i}{\Delta t} + \frac{\partial R_s}{\partial \theta_1} + \frac{\partial E_w}{\partial \theta_1} \right] \quad (7.24b)$$

$$c_i = \frac{\partial q_i}{\partial \theta_{i+1}} \quad (7.24c)$$

$$r_i = S_i + q_{\text{infil}}^n - q_i^n \quad (7.24d)$$

其中，

$$q_i^n = n_2 / d_2 \quad (7.25a)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} = \left[ -\frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_i} + \frac{n_2}{k_i} \frac{\partial k_i}{\partial \theta_2} \right] / d_2 \quad (7.25b)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial \theta_{i+1}} = \left[ \frac{\partial \Psi_{i+1}}{\partial \theta_{i+1}} + \frac{n_2}{k_i} \frac{\partial k_i}{\partial \theta_{i+1}} \right] / d_2 \quad (7.25c)$$

如果  $i = m$ ，则下边界条件为

$$q_i = -k_b \quad (7.26)$$

方程 (7.8) 可写为

$$\frac{\Delta \theta_i \Delta z_i}{\Delta t} = -q_{i-1}^{n+1} - k_b^{n+1} - s_i \quad (7.27)$$

其中，



$$k_n = k_s \left[ \frac{\theta_{10}}{\theta_s} \right]^{2B+3} \quad (7.28a)$$

$$k_b^{n+1} = k_b^n + \frac{\partial k_b}{\partial \theta} \Delta \theta_i \quad (7.28b)$$

将以上方程及 (7.12b) 代入 (7.27) 后, 斜三角阵的系数为

$$a_i = -\frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} \quad (7.29a)$$

$$b_i = -\left[ \frac{\partial k_i}{\partial \theta_i} + \frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_i} + \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \right] \quad (7.29b)$$

$$c_i = 0 \quad (7.29c)$$

$$r_i = S_i + q_{i-1}^n + k_i^n \quad (7.29d)$$

其中,

$$q_{i-1}^n = n_1 / d_1 \quad (7.30a)$$

$$\frac{\partial k_b}{\partial \theta_i} = \frac{k_b(2B+3)}{\theta_{10}} \quad (7.30b)$$

$$\frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} = \left[ -\frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} + \frac{n_1}{k_{i-1}} \frac{\partial k_{i-1}}{\partial \theta_{i-1}} \right] / d_1 \quad (7.30c)$$

$$\frac{\partial q_{i-1}}{\partial \theta_i} = \left[ \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_i} + \frac{n_1}{k_{i-1}} \frac{\partial k_{i-1}}{\partial \theta_i} \right] / d_1 \quad (7.30d)$$

### 7.1.2 土壤温度

土壤温度的计算方案取自经改进的陆面过程模式 LSM<sup>[12]</sup>。

经典的一维热传导方程形如

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial z} \quad (7.31)$$

其中  $T$  为土壤温度 (K),  $c$  为体积土壤热容量 ( $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ),  $F$  为热通量, 且  $z$  和  $F$  都定义为向上为正。 $F$  取

$$F = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (7.32)$$

其中  $\lambda$  为热传导率 ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )。第  $i$  层的能量平衡为

$$\frac{c_i \Delta z_i}{\Delta t} (T_i^{n+1} - T_i^n) = \alpha (-F_{i-1}^n + F_i^n) + (1 - \alpha) (-F_{i-1}^{n+1} + F_i^{n+1}) \quad (7.33)$$

其中  $T_i$  为第  $i$  层平均的土壤温度,  $\Delta z_i$  与式 (7.2) 相同但单位为 m。 $\alpha$  是时间差分格式的调节系数, 取值为 0 到 1 之间。如果  $\alpha = 0$ , 时间差分格式为隐式; 如果  $\alpha = 1$ , 则差分格式为显示; 如果  $\alpha = 0.5$ , 差分格式为所谓的“Crank-Nicolson”格式。在土壤湿度的计算方案中, 脚标  $i$  对于层平均的变量代表整层, 对于通量项则代表某层的下边界。这里,  $F_i$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) 是穿过界面  $i$  的热通量, 同样  $F_{i-1}$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) 为穿过界面  $i-1$  的热通量。其计算方案为

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{-\lambda_i(T_i - T_{i+1})}{z|_{z=-z_i} - z|_{z=-z_{i+1}}} \\ &= \frac{-\lambda_i(T_i - T_{i+1})}{z_{i+1} - z_i} \end{aligned} \quad (7.34a)$$

$$\begin{aligned} F_{i-1} &= \frac{-\lambda_{i-1}(T_{i-1} - T_i)}{z|_{z=-z_{i-1}} - z|_{z=-z_i}} \\ &= \frac{-\lambda_{i-1}(T_{i-1} - T_i)}{z_i - z_{i-1}} \end{aligned} \quad (7.34b)$$

式中  $\lambda_i$  为界面上的热传导率, 由下式计算

$$\lambda_i = f_\lambda \left[ \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right] \quad (7.34c)$$

其中  $f_\lambda$  的函数形式取自 BATS<sup>[1]</sup>

$$f_\lambda(x) = r_{\text{tex}} f_c(x) \left[ \frac{2.9 \times 10^{-7} x + 4 \times 10^{-9}}{((1 - 0.6x)x + 0.09)(0.23 + x)} \right] \quad (7.34d)$$

式中  $r_{\text{tex}}$  为土壤热传导率与壤土热传导率之比<sup>[1]</sup>。 $f_c(x)$  的计算为

$$f_c(x) = (0.23 + x) 4.186 \times 10^6 \quad (7.34e)$$

式 (7.33) 中  $c_i$  为第  $i$  层的体积土壤热含量, 定义为

$$c_i = f_c(\theta_i) \quad (7.34f)$$

将式 (7.34a) 和 (7.34b) 代入式 (7.33), 可得土壤温度  $T$  的斜三角阵, 即

$$a_i T_{i-1}^{n+1} + b_i T_i^{n+1} + c_i T_{i+1}^{n+1} = r_i, \quad i = 1, 2, \Lambda, m \quad (7.35)$$

如果  $i=2, 3, \dots, m-1$ , 有

$$a_i = -(1 - \alpha) \frac{\Delta t}{c_i} \frac{\lambda_{i-1}}{\Delta z_i (z_i - z_{i-1})} \quad (7.36a)$$

$$b_i = 1 + (1 - \alpha) \frac{\Delta t}{c_i} \left[ \frac{\lambda_{i-1}}{\Delta z_i (z_i - z_{i-1})} + \frac{\lambda_i}{\Delta z_i (z_{i+1} - z_i)} \right] \quad (7.36b)$$

$$c_i = -(1-\alpha) \frac{\Delta t}{c_i} \frac{\lambda_i}{\Delta z_i (z_{i+1} - z_i)} \quad (7.36c)$$

$$r_i = T_i^n - \frac{\alpha \Delta t T_i^n}{c_i} \left[ \frac{\lambda_{i-1}}{\Delta z_i (z_i - z_{i-1})} + \frac{\lambda_i}{\Delta z_i (z_{i+1} - z_i)} \right] + \frac{\alpha \Delta t}{c_i} \left[ \frac{\lambda_{i-1} T_{i-1}}{\Delta z_i (z_i - z_{i-1})} + \frac{\lambda_i T_{i+1}}{\Delta z_i (z_{i+1} - z_i)} \right] \quad (7.36d)$$

如果  $i=1$ , 则有

$$\frac{c_i \Delta z_i}{\Delta t} (T_i^{n+1} - T_i^n) = h^{n+1} + F_i^{n+1} \quad (7.37)$$

其中  $F_i$  由式 (7.34a) 定义,  $h$  为由大气进入表层土壤的热通量, 由下式计算

$$h = R_{n,g} - H_{g,a} - LE_{g,a} \quad (7.38)$$

其中  $R_{n,g}$  为土壤表面的净辐射 (向下为正),  $H_{g,a}$  和  $LE_{g,a}$  分别为表层土壤向上的感热和潜热通量。由于  $LE_{g,a}$ ,  $H_{g,a}$  和  $R_{n,g}$  为表层土壤温度的函数,  $h$  可由下式计算

$$h^{n+1} = h^n + \frac{\partial h}{\partial T_i} (T_i^{n+1} - T_i^n) \quad (7.39)$$

将式 (7.34a) 和 (7.39) 代入式 (7.37), 可得斜三角阵的系数为

$$a_i = 0 \quad (7.40a)$$

$$b_i = 1 + \frac{\Delta t}{c_i \Delta z_i} \left[ \frac{\lambda_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{\partial h}{\partial T_i} \right] \quad (7.40b)$$

$$c_i = -\frac{\Delta t}{c_i \Delta z_i} \frac{\lambda_i}{z_{i+1} - z_i} \quad (7.40c)$$

$$r_i = T_i^n + \frac{h \Delta t}{c_i \Delta z_i} - \frac{T_i^n \Delta t}{c_i \Delta z_i} \frac{\partial h}{\partial T_i} \quad (7.40d)$$

注意这里由上述方程计算得到的  $T_1$  为  $\Delta z_1 = 0.5(z_1 + z_2)$  的层平均温度。为了计算表层土壤温度, 可通过对层厚度的调整来调整热含量的计算。因此, 式 (7.40b)、(7.40c) 和 (7.40d) 中的  $\Delta z_1$  可表示成

$$\Delta z_1 = 0.5(z_1 + c_a z_2) \quad (7.40e)$$

其中  $c_a$  为可调节的系数, 在 0 到 1 之间变化, 如取  $c_a \approx 0.34$  可使  $T_1$  较好地与土壤表层日变化的分析解相吻合。需要指出的是  $c_a$  的取法与土壤的分层结构和  $\alpha$  的取值有关。

如果  $i=m$ , 假设第  $m$  层与第  $m-1$  层之间的热传导为 0, 即

$$F_{m-1} = 0 \quad (7.41a)$$

或

$$T_m = T_{m-1} \tag{7.41b}$$

因此，斜三角阵的系数为

$$a_i = -1 \tag{7.42a}$$

$$b_i = 1 \tag{7.42b}$$

$$c_i = 0 \tag{7.42c}$$

$$r_i = 0 \tag{7.42d}$$

7.1.3 陆面状况、土壤类型、植被覆盖和地表反照率

7.1.3.1 地表植被类型

Matthews<sup>[13,14]</sup>定义了 31 种自然地表植被类型，分辨率为 1°×1°。Wilson<sup>[15]</sup>也提供了 1°×1°分辨率的 53 种地表植被类型。为了 BATS 模式与大气环流模式耦合的需要，将两种地表植被分类减少为 18 种类型，见表 7.2 所示。

表 7.2 地表植被类型

序 号	类 型
1	作物及混合耕作
2	矮草
3	常绿针叶林
4	落叶针叶林
5	落叶阔叶林
6	常绿阔叶林
7	高草
8	沙漠
9	冻原
10	灌溉作物
11	半沙漠
12	冰盖及冰川
13	沼泽
14	内陆河、湖泊
15	海洋
16	常绿灌木
17	落叶灌木
18	混合树林

对这 18 种地表状况类型，又分别定义了特征参数值，列于表 7.3。



表 7.4 土壤参数 I

参 数	土质分级（从沙土（1）到重黏土（12））											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
孔隙度（土壤中孔隙所占的体积比）	0.33	0.36	0.39	0.42	0.45	0.48	0.51	0.54	0.57	0.60	0.63	0.66
土壤最小吸水深度(mm)	30	30	30	200	200	200	200	200	200	200	200	200
饱和水力传导率(mm s <sup>-1</sup> )	0.2	0.08	0.032	0.013	8.9×10 <sup>-3</sup>	6.3×10 <sup>-3</sup>	4.5×10 <sup>-3</sup>	3.2×10 <sup>-3</sup>	2.2×10 <sup>-3</sup>	1.6×10 <sup>-3</sup>	1.1×10 <sup>-3</sup>	0.8×10 <sup>-3</sup>
与壤土（6）的饱和热传导率之比	1.7	1.5	1.3	1.2	1.1	1.0	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70
Clapp 和 Hornberger <sup>[16]</sup> 定义的 B 指数	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.8	7.6	8.4	9.2	10.0	10.8
蒸腾停止时相对饱和水含量	0.088	0.119	0.151	0.266	0.300	0.332	0.378	0.419	0.455	0.487	0.516	0.542

### 7.1.3.2 土壤类型

其实, 严格地说许多陆面参数不仅是地表植被类型的函数, 也是土壤类型的函数。BATS 将土壤从颗粒很粗的砂土 (1) 到重粘土 (12) 分为 12 类, 按颜色分为 8 个级别。表 7.4, 7.5 列出了 12 类土壤的某些参数和 8 个级别颜色土壤分别在干燥和饱和状况下对波长大于  $0.7 \mu\text{m}$  及小于  $0.7 \mu\text{m}$  太阳辐射的反照率。

表 7.5 土壤参数 II

参数	土壤颜色 (从亮 (1) 到暗 (8)) 分级							
	1	2	3	4	5	6	7	8
干土反照率								
光波长 $< 0.7 \mu\text{m}$	0.23	0.22	0.20	0.18	0.16	0.14	0.12	0.10
$\geq 0.7 \mu\text{m}$	0.46	0.44	0.40	0.36	0.32	0.28	0.24	0.20
饱和土壤反照率								
光波长 $< 0.7 \mu\text{m}$	0.12	0.11	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05
$\geq 0.7 \mu\text{m}$	0.24	0.22	0.20	0.18	0.16	0.14	0.12	0.10

### 7.1.3.3 植被覆盖

植被通过遮挡太阳辐射、增加地表粗糙度影响地气间的热量、水分和动量的交换, 还通过蒸腾过程控制叶面的水分损失。

对每一模式格点区域及每积分时间步定义  $\sigma_f$  为植被覆盖率。它决定于次土壤层温度  $T_{g2}$ 、格点地表植被类型参数  $K_{VEG}$  和植被覆盖的季节变化  $\Delta\sigma_f$ , 即

$$\begin{cases} \sigma_f = \sigma_{f\text{summer}}, & T_{g2} > 298.0K \\ \sigma_f = \sigma_{f\text{summer}} - \Delta\sigma_{f\text{seasonal}}, & T_{g2} < 273.0K \\ \sigma_f = \sigma_{f\text{summer}} - [1 - F_{SEAS}(T_{g2})] \Delta\sigma_{f\text{seasonal}} \end{cases} \quad (7.43a)$$

其中

$$F_{SEAS}(T_{g2}) = 1 - 0.0016 \times (298.0 - T_{g2})^2 \quad (7.43b)$$

且  $\sigma_{f\text{summer}}$  和  $\Delta\sigma_{f\text{seasonal}}$  见表 7.3 的第一、二行。

### 7.1.3.4 植被和土壤反照率

地表反照率是影响气候变化的一个非常重要的因子。植被对太阳辐射的反射和散射又直接影响着地表反照率。由于光合作用的存在, 植被对可见光 (波长小于  $0.7 \mu\text{m}$ ) 的反照率要低于对近红外辐射 (波长大于  $0.7 \mu\text{m}$ ) 的反照率。所以表 7.3 分别列出了各类植被对可

见光和近红外辐射的反照率值。树干和树枝反照率假定为树叶的 95%，而红或棕色叶的反照率大约是绿叶的 105%。

裸地对可见光的反照率  $A_{LBG}$  为

$$A_{LBG} = A_{LBGO} + \Delta\alpha_g(S_{sw}) \quad (7.44a)$$

其中  $A_{LBGO}$  是饱和土壤反照率，

$$\Delta\alpha_g(S_{sw}) = 0.01(11 - 40S_{sw}/Z_1) \quad (7.44b)$$

这里  $S_{sw}$  是表层土壤含水量， $Z_1$  表层土壤深度。

雪面反照率的计算见 7.2.3.3 节。

## 7.1.4 地表径流

在大雨或融雪且土壤湿度很高的情况下，许多地表水不能及时渗入地下而是汇入河流中，就形成了地表径流。通常认为它与当地的历史降水有关，但仅通过洪水峰值的水文图很难把当地的水分分成地表径流和地下水径流部分。假设具有田间持水量土壤湿度情况下，地表径流较小，而饱和土壤情况下为完全地表径流，则有如下参数化形式

$$R_s = \begin{cases} (\rho_w / \rho_{wsat})^4 G & T_{g1} \geq 0^\circ C \geq \\ (\rho_w / \rho_{wsat}) G & T_{g1} < 0^\circ C < \end{cases} \quad (7.45a)$$

$$(7.45b)$$

其中  $\rho_w = \rho_{wsat}(S_1 + S_2)/2$ ， $\rho_{wsat}$  为饱和土壤水密度， $\rho_w$  为最上层的土壤水密度权重； $G$  为土壤表层净的水收支，当  $G < 0$  时，取  $R_s = 0$ 。

## 7.1.5 拖曳系数

地表与大气之间动量、热量和水分的交换都与地表拖曳系数密切相关。拖曳系数不但与大气边界层稳定度有关，还与地表状况有关。在 BATS 中，认为拖曳系数与中性稳定度情况下的拖曳系数  $C_{DN}$  和地表的总体理查逊数有关，即

$$C_D = f(C_{DN}, R_{ib}) \quad (7.46)$$

其中

$$R_{ib} = gz_1(1 - T_{g1}/T_a)/V_a^2 \quad (7.47)$$

这里  $V_a^2 = u_1^2 + v_1^2 + U_c^2$ ， $T_{g1}$  是表层土壤（或雪或冰）温度， $z_1$  是最低层模式大气的高度， $g$  是重力加速度， $u_1$ ， $v_1$  是  $z_1$  处风速， $T_a$  是  $z_1$  处的空气温度乘以  $(P_s/P_1)^k$ 。其中  $P_s$ ， $P_1$  分别为地面气压和最低层模式大气的气压， $k$  为卡门常数，取为 0.4。

$$U_c = \begin{cases} 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} & T_{g1}/T_a < 1 \\ 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} & T_{g1}/T_a > 1 \end{cases} \quad (7.48)$$

$C_D$  的具体表达式为



$$C_D = C_{DN} [1 + 24.5(-C_{DN} R_{iB})^{1/2}] \quad R_{iB} < 0 \quad (7.49a)$$

$$C_D = C_{DN} / (1 + 11.5 R_{iB}) \quad R_{iB} > 0 \quad (7.49b)$$

其中中性稳定度拖曳系数  $C_{DN}$  为

$$C_{DN} = [k / \ln(z_1 / z_0)]^2 \quad (7.50)$$

其中  $z_0$  是粗糙度长度, 对水面  $z_0 = 2.3 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 对裸地  $z_0 = 10^{-2} \text{ m}$ 。

对有植被的格点区域,  $C_{DN}$  可以认为是裸地和雪地植被拖曳系数的线性组合, 并认为雪地的拖曳系数与海面拖曳系数相同。这样, 格点区域中性拖曳系数  $C_{D, FN}$  为

$$C_{D, FN} = \sigma_f C_{FN} + (1 - \sigma_f) [S_{CV} C_{DNW} + (1 - S_{CV}) C_{DNL}] \quad (7.51)$$

这里  $C_{FN}$  是植被的局地拖曳系数, 由式 (7.50) 给出, 式中  $Z_0 = Z_{0V}$ , 表 7.3 列出不同地表植被类型的值,  $S_{CV}$  是地面被雪覆盖的比例。植被覆盖率可改成雪盖植被覆盖率

$$\sigma_f = (1 - W_T) \sigma_{f0} \quad (7.52)$$

其中  $\sigma_{f0}$  是没有雪盖的植被覆盖率

$$W_T = W_{T0} / (1 + W_{T0}) \quad (7.53)$$

取  $W_{T0}$  为雪深除以  $10z_{0V}$ , 而  $S_{CV} = S_{CVO} / (1 + S_{CVO})$ , 这里的  $S_{CVO}$  为 10 倍的雪深。雪深定义为雪的液态水含量除以雪的密度。上两式基于如下假定: 有一半的植被覆盖了  $10z_{0V}$  深度的雪, 有一半的裸地覆盖了深度为  $0.01 \text{ m}$  的雪。

模式中的海冰格点考虑了水道。认为冰间水道占海冰格点区域面积为  $a$ , 并取水温为  $1.8^\circ\text{C}$ , 饱和混合比为  $3.3 \times 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1}$ 。分别对海冰和冰间水道求拖曳系数, 然后进行线性组合计算海冰区域的总拖曳系数。 $a$  的取值如下: 对北冰洋, 纬度小于  $80^\circ\text{N}$  时取  $a=0.02$ , 纬度在  $80\sim 85^\circ\text{N}$  之间时取  $a=0.01$ , 在北极点周围  $5^\circ$  范围内取  $a=0.005$ , 对南极洲取  $a=0.04$ 。

对水面、海冰或裸地的感热和潜热通量可表示成

$$F_s = \rho_a c_p C_D V_a (T_{g1} - T_a) \rho \quad (7.54)$$

其中  $\rho_a$  为地表空气密度,  $C_D$  为热量的空气动力学拖曳系数,  $c_p$  为空气的比热,  $V_a$  为风速。相似地, 从地表向空气的水汽通量  $F_q$  为

$$F_q = \rho_a C_D V_a f_g (q_g - q_a) \quad (7.55)$$

其中,  $q_g$  是地表温度下的饱和比湿,  $q_a$  是最低层模式大气的比湿,  $f_g$  是湿度因子, 除对限制扩散的土壤表层外取值为 1.0。在限制扩散的土壤表层定义为地表实际蒸发率和可能蒸率之比, 即

$$f_g = F_q / F_{qp}$$

### 7.1.6 植被中的能量通量

植物冠层与大气之间，植物冠层内空气以及空气和叶之间、根和土壤之间的水分、热量传输过程非常复杂，在气候模式中对这些过程进行合理的参数化极为重要。

#### 7.1.6.1 叶变量的参数化

在有植被存在的单位面积地表上，定义  $L_{AI}$  为有蒸腾发生的叶面积指数， $S_{AI}$  为无蒸腾过程（包括枯死植被）的茎面积指数，二者对给定的陆面状况是常数。但  $L_{AI}$  具有季节变化，假设由次表层土壤温度决定，即

$$L_{AI} = L_{AI}^{MIN} + F_{SEAS}(T_{g2}) \times (L_{AI}^{MAX} - L_{AI}^{MIN}) \quad (7.56)$$

这里的季节因子  $F_{SEAS}(T)$  由式 (7.43b) 给定。定义  $L_{AI}$  和  $S_{AI}$  的和为叶茎面积指数  $L_{SAI}$ ，即  $L_{SAI} = L_{AI} + S_{AI}$ 。不同地表植被类型下的叶、茎面积指数由表 7.3 给出。

又定义叶面为水所覆盖的面积比为

$$\tilde{L}_w = (W_{dew} / W_{DMAX})^{2/3} \quad (7.57)$$

其中的  $W_{dew}$  是植物冠层所截留的总水量， $W_{DMAX}$  是植被冠层的最大截留水量。对茎也定义同样的面积比。

定义叶面自由蒸腾部分  $L_d$  为

$$L_d = (1.0 - \tilde{L}_w) L_{AI} / L_{SAI} \quad (7.58)$$

还需引入的参数是植被叶内的风速

$$U_{af} = V_a C_D^{1/2} \quad (7.59)$$

#### 7.1.6.2 植被截留的降水和露水

当降水发生时，在叶面滴水 and 雨水沿着茎向下流到地面之前，植被表面首先会覆盖上薄薄的一层水膜。这些水可以重新蒸发到空气中去，同时被水覆盖的叶面上的蒸腾过程受到抑制。同样，夜间露水会冷却叶面，当然也会抑制蒸腾过程。植被截留的降水中有 10% 到 50% 可以再蒸发，主要取决于降水强度。目前对湿叶面蒸腾过程的抑制方面的研究工作不多，但却十分重要。虽然叶面也能截留降雪而在表面结霜，但对叶面的水分收支作用不大。这是因为在较低的温度条件下蒸散率较小。因此可以认为植被对固态水和液态水的存贮作用一样，这样就可以不考虑初始时植被所截留的雪，也不考虑这些雪经常可能很快被风吹落，只假定水的最大存贮量为  $0.0001 \text{ m} \times L_{SAI}$ 。则有

$$\partial W_{dew} / \partial t = \sigma_f P - E_f + E_{tr} \quad (7.60)$$

如果  $W_{dew} > 0.0001 \text{ m} \times \sigma_f L_{SAI}$ ，则取  $W_{dew} = W_{DMAX}$ ，多余的叶面水将降入地表土壤中， $E_{tr}$ （蒸腾率）和  $E_f$ （单位叶面积水通量）将在下面讨论。

### 7.1.6.3 叶通量

首先考虑湿叶的蒸发  $E_f^{WET}$

$$E_f^{WET} = A_f \rho_a r_{la}^{-1} (q_f^{SAT} - q_{af}) \quad (7.61)$$

其中， $A_f = \sigma_f L_{SAI}$  表示总的湿植物冠层面积， $q_f^{SAT}$  是在叶温  $T_f$  时的饱和比湿， $q_{af}$  是冠层内空气的比湿， $r_{la}$  是对给定单位面积叶分子边界层对水分和热量通量的空气动力阻抗。

如果  $E_f^{WET}$  为负则表示叶面露水的累积。

叶的热和水汽通量传导为

$$r_{la}^{-1} = C_f \times (U_{af} / D_f)^{1/2} \quad (7.62)$$

其中  $C_f = 0.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1/2}$ ， $D_f$  是叶沿气流方向的特征尺度， $U_{af}$  是进入叶间的风速量级。

与式 (7.61) 相似，叶的热通量为

$$H_f = \sigma_f L_{SAI} r_{la}^{-1} \rho_a c_p (T_f - T_{af}) \quad (7.63)$$

对式 (7.61) 和 (7.63) 来说，叶温  $T_f$  和植物冠层内空气的水汽混合比  $q_{af}$  需进一步确定。

只有部分湿的叶面水汽通量  $E_f$  为

$$E_f = r'' E_f^{WET} \quad (7.64)$$

其中

$$r'' = 1 - \delta \left( E_f^{WET} \right) \left[ 1.0 - \tilde{L}_w - L_d \left( \frac{r_{la}}{r_{la} + r_s} \right) \right] \quad (7.65)$$

这里  $r_s$  是叶孔阻抗。当  $E_f^{WET} > 0$  时， $\delta$  取 1；而  $E_f^{WET} < 0$  时， $\delta$  取 0。假定有蒸腾和无蒸腾的叶面积相等，蒸腾率  $E_{tr}$  只发生在干叶上，且是向外的

$$E_{tr} = \delta \left( E_f^{WET} \right) L_d \left( \frac{r_{la}}{r_{la} + r_s} \right) E_f^{WET} \quad (7.66)$$

其中  $L_d$  的计算见式 (7.58)。上式忽略了干、湿叶表面可能的微小温差。

### 7.1.6.4 叶孔阻抗

叶孔阻抗是反映从叶内向外发生扩散时，叶气孔总的机械阻力。叶内水汽一般都维持或接近饱和值，否则叶肉细胞将变干，叶就枯萎了。叶气孔是蒸腾过程的主要通道。当水分从叶内向外扩散时，净阻力  $r_s$  在很大程度上与叶气孔的尺度、分布和打开程度有关。当然，当叶气孔关闭时有些水分也通过叶表皮扩散。通常叶气孔打开程度随不同的环境参数而变。

阻抗系数可采用如下形式进行计算

$$r_s = r_{s \min} \times R_f \times S_f \times M_f \times V_f \quad (7.67)$$

Jarvis<sup>[17]</sup>和 Hinckley 等<sup>[18]</sup>曾对右边各项进行过讨论。 $R_f$  表示  $r_s$  对太阳辐射的依赖关系。Hinckley 等<sup>[18]</sup>、Watts<sup>[19]</sup>以及 Denmead 和 Millar<sup>[20]</sup>的工作研究了  $r_s$  与可见光辐射通量的关系, 表明当辐射通量为全部太阳辐射的 10% (树) 到全部太阳辐射 (小麦) 之间时,  $r_s$  取最小值  $r_{s \min}$ 。全部太阳可见光入射通量大约相当于  $500 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  ( $\lambda < 0.7 \mu\text{m}$ )。另外, 系数  $R_f$  为

$$R_f = (1 + f) / (f + r_{s \min} / r_{s \max}) \quad (7.68a)$$

其中  $r_{s \max}$  为  $5000 \text{ s m}^{-1}$ ,  $f = F_v / F_{vc}$ ,  $F_v$  为可见光通量,  $F_{vc}$  为当  $R_f$  是它最小值两倍时的可见光太阳辐射通量。在本模型中, 对树取  $F_{vc} = 30 \text{ W m}^{-2}$ , 对草地和作物取  $F_{vc} = 100 \text{ W m}^{-2}$ 。气孔阻抗与水气压的关系为

$$V_f = 1 / \max(0.1, 1 - 0.025 v_{pd}) \quad (7.68b)$$

其中  $v_{pd}$  为叶边界层中水气压与饱和值的差, 可以用下式进行估计

$$v_{pd} = (1 - r'') (q_s - q_{af}) (1000 / 0.622) \quad (7.68c)$$

在式 (7.67) 中, 季节温度因子  $S_f = 1 / F_{SEAS}(T_f)$ , 湿度因子  $M_f$  取决于土壤湿度和植物根系从土壤中吸收水的能力。 $M_f$  的初始值取 1, 当植物的蒸腾超过最大值 (此值决定于土壤湿度) 时,  $M_f$  就会增大使蒸腾维持最大值。最后需要指出的是, 当  $r_s$  超过  $r_{s \max}$  时, 取  $r_s$  等于  $r_{s \max}$ 。

#### 7.1.6.5 根系的阻抗

在每一土壤层, 植物根系从土壤中吸水并向上传输可由土壤和叶的水势差除以一有效阻抗计算得到。有效阻抗决定于单位面积上根系的总长度和单位长度根系的植物内部阻抗。设  $E_{trmx}$  为植物的最大有效蒸腾率, 则

$$E_{trmx} = r_{ro} \sum_i R_{ii} (1 - W_{LT}^i) \quad (7.69)$$

其中  $r_{ro}$  是植物所能维持的最大蒸腾率。下标  $i$  表示各土壤层,  $R_{ii}$  是给定第  $i$  层土壤中根系的比例;  $W_{LT}^i$  是土壤的干燥 (或植物的枯萎) 因子。模式中取  $r_{ro} = 2 \times 10^{-4} \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1} \times \sigma_f \times S_{EASB}$ , 其中  $S_{EASB}$  在植物生长期取 1, 在土壤结冻期为 0。对于典型的植被, 取  $\sigma_f = 0.8$ , 接近田间持水量。

$$W_{LT}^i = \frac{S_i^{-B} - 1}{S_w^{-B} - 1} \quad (7.70)$$

其中  $S_i$  是第  $i$  层土壤水,  $S_w$  是当蒸腾为 0 时的土壤水, 模式中设  $S_w=0.125$ 。通常粘土的  $S_w$  要高于砂土。  $W_{LT}^i$  随湿度的变化规律是: 在饱和时取 0, 在永久凋萎点时取 1。

#### 7.1.6.6 植物冠层和土壤中的能量平衡

假定植物冠层内空气的热容量可以忽略不计, 那么植物冠层到大气的热通量  $H_a$  等于叶面到大气的热通量  $H_f$  加上地表到大气的热通量  $H_g$ , 即

$$H_a = H_f + H_g \quad (7.71)$$

其中,  $H_f$  见式 (7.63), 而

$$H_a = \rho_a \sigma_f c_p C_D V_a (T_{af} - T_a) \quad (7.72)$$

式中  $c_p$  是空气定压比热,  $V_a$  是冠层顶的大气风速,  $C_D$  为冠层与其上层大气之间的总体空气动力学传导系数, 并假定热量和水分的传导系数与动量相同。故有

$$H_g = \rho_a c_p [C_{SOILC} \sigma_f U_{af}] (T_{g1} - T_{af}) \quad (7.73)$$

其中  $C_{SOILC}$  取为 0.004, 即冠层空气与其下土壤之间的传导系数。由式 (7.71) ~ (7.73) 可得  $T_{af}$

$$T_{af} = (c_A T_a + c_F T_f + c_G T_{g1}) / (c_A + c_F + c_G) \quad (7.74)$$

其中

$$c_A = \sigma_f C_D V_a \quad (7.75)$$

$$c_F = \sigma_f L_{SAI} r_{la}^{-1} \quad (7.76)$$

$$c_G = C_{SOILC} \sigma_f U_{af} \quad (7.77)$$

分别是冠层顶、叶和地面向大气的热量传输。与热量相似, 认为冠层内空气对水分的存贮为 0, 则水气通量为

$$E_a = E_f + E_g \quad (7.78)$$

这里  $E_a$  为植物冠层向大气的水汽通量,  $E_f$  与  $E_g$  分别为叶与地面向大汽的水气通量。其中

$$E_a = \rho_a c_A (q_{af} - q_a) \quad (7.79)$$

$$E_g = \rho_a c_G f_g (q_{g,s} - q_{af}) \quad (7.80)$$

式中  $q_{g,s}$  是饱和土壤水含量;  $f_g$  是湿因子, 定义为地面实际蒸发和可能蒸发之比。求解式 (7.78) ~ (7.80) 可得叶间空气水汽混合比  $q_{af}$ , 即

$$q_{af} = (c_A q_a + c_v q_f^{SAT} + c_G f_g q_{g,s}) / (c_A + c_v + f_g c_G) \quad (7.81)$$

其中  $c_v = r'' c_F$ , 是叶对水汽通量的平均传导率。

### 7.1.6.7 叶温

为求解植被的蒸腾率，总的收支方程为叶能量守恒方程，即

$$R_n(T_f) = LE_f(T_f) + H_f(T_f) \quad (7.82)$$

式中  $R_n$  为叶吸收的净辐射。对上式用 Newton-Raphson 迭代法可求解叶温  $T_f$ 。模式中假定地面和叶面的放出长波辐射相同，叶的热容量为 0，而且光合作用和呼吸作用的能量传输可以忽略。冠层向地面的红外长波辐射近似为  $4\sigma T_{g1}^3(T_f - T_{g1})$ ，冠层向大气的净辐射为  $4\sigma(1 - \sigma_f)T_{g1}^3(T_f - T_{g1}) + F_{RLNK}$ 。其中  $F_{RLNK} = \sigma[\sigma_f T_f^4 + (1 - \sigma_f)T_g^4] - F_{LW}$ ，表示地表向大气的净长波辐射。单位面积植被吸收的净辐射  $F_{RAD}$  为

$$F_{RAD} = S_{F1} - 4\sigma\sigma_f T_{g1}^3 T_f \quad (7.83)$$

其中

$$S_{F1} = \sigma_f(S_{qf} - F_{RLNK} + 4\sigma T_{g1}^4) \quad (7.84)$$

式中  $S_{qf}$  为吸收的太阳辐射。在此需指出的是，式 (7.63) ~ (7.64) 中的向大气的感热通量和蒸散项  $E_f$  因与叶温、饱和比湿  $q_f^{SAT}$  有关而需重新估算，即

$$H_f^{N+1} = H_f^N + \delta H(T_f^{N+1} - T_f^N) \quad (7.85)$$

$$E_f^{N+1} = E_f^N + \delta E(T_f^{N+1} - T_f^N) \quad (7.86)$$

其中，

$$\delta H = \frac{\partial H_f^N}{\partial C_D} \cdot \frac{\partial C_D}{\partial T_f} \quad (7.87)$$

$$\delta E = \frac{\partial E_f^N}{\partial q_f^{SAT}} \frac{\partial q_f^{SAT}}{\partial T_f} + \frac{\partial E_f^N}{\partial C_D} \frac{\partial C_D}{\partial T_f} \quad (7.88)$$

其中  $q_f^{SAT}$  的计算与所有饱和比湿  $q^{SAT}$  的计算公式一样，则

$$q^{SAT} = \frac{0.622 \times p^{SAT}}{p - 0.378 p^{SAT}} \quad (7.89)$$

且

$$p^{SAT} = 611 \exp \left[ \frac{A(T - T_m)}{T - B} \right] \quad (7.90)$$

其中

$$A = \begin{cases} 21.874, & T \leq T_m \\ 17.269, & T > T_m \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 7.66, & T \leq T_m \\ 35.86, & T > T_m \end{cases}$$

取  $T_m = 273.16$ ，因有

$$\frac{\partial q_f^{SAT}}{\partial T_f} \approx \frac{A(T_m - B)}{(T_f - B)^2} q_f^{SAT} \quad (7.91)$$

最后, 求  $T_f$  的迭代关系式为

$$T_f^{N+1} = \frac{S_f + \rho_a c_p C_H (c_A T_a + c_G T_g) + L_v (T_f^N \delta E - E^N)}{4\sigma\sigma_f T_g^3 + \rho_a c_p C_H (c_A + c_G) + L_v \delta E} \quad (7.92)$$

取  $C_H = c_F / (c_A + c_F + c_G)$ 。由于中性稳定条件下对  $C_D$  求导的不连续性可能会发生迭代不收敛, 因而假定如果在两次迭代过程中稳定性完全相反, 就采用中性稳定度拖曳系数  $C_{DN}$ 。

在一次迭代中限制  $T_f$  不超过  $1^\circ\text{C}$ , 设

$$\Delta^{N+1} = T^{N+1} - T^N$$

$$\tilde{\Delta} = \max(\Delta^{N+1}, \Delta^N)$$

那么当  $\tilde{\Delta} < 0.01$  时进行 2 次以上的迭代计算,  $LE_f$  的变化  $< 0.1/\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$  或迭代次数大于 40 次就停止迭代, 求得  $T_f$ 。

有了  $T_f$  后就有

$$\Delta T_{a,f} = T_a - T_{af}$$

$$\Delta q_{a,f} = q_a - q_{af}$$

用它们可求得向大气的感热和潜热通量, 通过加上叶蒸散与叶向大气的水汽通量之差来重新计算叶的水分收支。这样, 叶水分可能会因露的形成而增加, 也可能因蒸发而变小。

#### 7.1.6.8 无植被部分的地表通量

无植被部分的地表感热和潜热通量为

$$F_{BARE} = W_G (T_{g1} - T_S) \quad (7.93a)$$

$$Q_{BARE} = W_G (q_g - q_S) \quad (7.93b)$$

$$W_G = C_D (1 - \sigma_f) \{ (1 - \sigma_f) V_a + \sigma_f [X_B U_{af} + (1 - X_B) V_a] \} \quad (7.94)$$

其中

$$X_B = \min(1, R_{ROUGH})$$

## 7.2 简化的雪盖-大气-土壤间的输运模型 (SAST)

本节介绍与陆面过程模式相耦合的简化雪盖-大气-土壤输运模型。它分别刻划了 3 个预报量: 比焓、雪水当量及雪盖深度。该模型在当今包含细致复杂物理过程方案的基础上, 作出了以下实质性的简化及改进。第一, 在对水蒸气扩散及相变效应对雪盖物理过程作用分析的基础上, 忽略了水蒸气组分对于雪盖质量平衡的影响; 它对热输运的贡献虽不能忽略, 但可以用包含了水蒸气扩散过程贡献的简化方程中的有效热传导系数来描述, 从而大大地简化

了水蒸气扩散及相变的处理, 节省计算量。第二, 用比焓代替温度来建立能量平衡方程, 这样简化了由于相变计算带来的复杂性, 使能量平衡方程更简洁。第三, 该模型是一个不多于 3 层的分层模型; 在分层厚度设计上, 该模型经过试验发现分层方案的好坏, 对于提高模型性能是十分重要的; 进而提出了符合物理本质的分层方案, 提高了模拟的精度。第四, 由于模型是高度非线性的, 该模型在研究雪物理过程的基础上提出了一套简单有效的计算方案, 即单步试探法。该模型已被用来进行了大量的敏感性试验和验证试验, 结果发现该模型的模拟能力和性能很好。目前, 该模型已实现了与国外著名的陆面过程模式 (BATS 及 SSIB) 的耦合运行<sup>[21-23]</sup>。

## 7.2.1 引言

雪盖对于水分循环及大气过程具有极其重要的影响。雪盖通过表面不同的反照率和湍流通量, 对陆面-大气间的能量交换进行调制, 极大地影响大气中的非绝热加热过程。另外, 雪盖对其下垫面来说是一个很重要的水分源, 因而对陆面水文过程起着十分重要的作用。

雪盖是引起不同尺度大气变化的活跃因子之一<sup>[24]</sup>。已有许多学者研究了雪盖过程本身及其与大气间的相互作用<sup>[25-33]</sup>。虽然雪盖的作用在气候研究中十分重要, 但现在许多全球大气环流模式 (GCM) 中雪盖物理过程参数化方案却相当简单, 这对于正确预报雪盖-大气-土壤之间的相互作用是十分不够的。例如, 在许多 GCM 模型中只用一个简单方案去考虑雪盖质量平衡以计算雪盖深度, 而且在热力作用方面对雪盖与其下面土壤之间物理性质的差异不作区分, 只用一个简单的表面能量方程来计算表面温度, 并以此来计算雪盖的升华及融解过程。

当然, 也有许多复杂的从物理基础出发建立的雪盖模型, 仔细地考虑了雪盖内部的质量及能量平衡以及雪面与大气的相互作用, 如 Anderson (1976)<sup>[34]</sup>、Jordan (1991)<sup>[35]</sup>、Loth 和 Graf (1993)<sup>[36]</sup>。这类模型都对雪盖内部的三相变化作用, 雪盖内部液态水的运动, 雪盖的压实及雪粒的尺度成长等均作了十分精细的描述。由于这些复杂精细的模型大多数是分层多而且细, 因而在气候研究中需耗费很多计算机时, 并不适合气候研究的需要。不过, 由 Anderson (1976)<sup>[34]</sup>及 Jordan (1991)<sup>[35]</sup>所提出的雪盖的物理过程及相关的参数化方案为发展适用于 GCM 研究目的的雪面模型提供了良好的知识准备。由 Loth 和 Graf (1993)<sup>[36]</sup>提出的用于气候研究的一维雪模式, 虽然在质量及能量平衡概念的基础上包括了较详细的三相变化及运动的详细描述以及其它一些复杂的物理过程, 而且分层也多于 3 层, 但是该模型提出的简化而有效的液态水输运方案, 对于处理冰融水的运动 (出流、入渗及径流) 是很有借鉴意义的。

本节所介绍的简化雪盖-大气-土壤输运模型 (以后简称 SAST, 有时也称 3 层模型), 其目的是应用于气候研究及水文研究。不同于现有多数 GCM 中简单的雪盖质量平衡方案, 该模型把雪盖与土壤不同的热力作用区分开来。该模型包含了与气候研究有关许多物理过程, 如雪盖融化及压缩、雪盖内部热传导等。该模型所采用的经验性雪面反照率方案可能比较适合于全球尺度的气候研究。该模型已经减少了雪盖的分层, 提出小于或等于 3 层的分层方案, 这对于利用 GCM 模式进行长时间积分, 减少计算时间是十分重要的。该模型借鉴了以往的复杂精细模式, 但又作了本质上的简化与改进。目前该模型已经实现了与世界上 2 个著名的陆面过程模式 (BATS<sup>[1]</sup>及 SSIB<sup>[37]</sup>) 的耦合, 以改善这 2 个陆



面过程模式中对雪盖过程描述,并取得了良好的结果。关于土壤的物理过程,目前该模型仍是沿用常规的计算方案。

## 7.2.2 基本控制方程

这部分将主要介绍模型的质量及能量控制方程,它们预报在太阳辐射及大气条件的驱动下雪盖的变化。

### 7.2.2.1 能量平衡方程

雪盖的能量变化与太阳辐射、雪盖与大气之间的潜热及感热通量、雪盖与地表面的热通量、雪盖内部的热传导以及相变过程的能量变化有关。由于水的三相变化产生能量交换,使雪盖内部的能量交换过程变得很复杂。在该模型中,采用比焓( $H$ )代替温度( $T$ )作为预报变量,并定义融点温度下的液态水比焓为 0 来建立能量方程。这样,雪盖中温度总为融点温度的液态水输运(流出或流入界面或有关径流)并不引起能量流动,比焓控制方程中就不必处理因液态水流动所输送的能量,使方程简洁、程序编制简化,并节省计算时间。由于定义在 273.6K 时水的体积比焓  $H=0$ ,则比焓控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left( K \frac{\partial T}{\partial Z} - R_s(Z) \right) \quad (7.95)$$

其中  $K$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) 为有效热传导系数,包括考虑蒸气相变及扩散产生的热效应。由于雪对于太阳辐射是透明的,雪盖内部太阳辐射通量  $R_s$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) 遵循 Beer 定律

$$R_s(Z) = R_s(0) \times (1 - \alpha) \times \exp(-\lambda Z) \quad (7.96)$$

其中  $\alpha$  为雪面反照率,  $\lambda$  ( $1/\text{m}$ ) 为消光系数,有很多方案去估计它的值<sup>[11,35,36]</sup>。该模型中采用 Jordan (1991)<sup>[35]</sup>的方案。比焓与温度间有以下关系

$$H = C_V \times (T - 273.16) - f_i \times L_{ii} \times W \times \rho_i \quad (7.97)$$

其中  $L_{ii}$  ( $\text{J}/\text{kg}$ ) 为冰融化成水的相变热,  $\rho_i$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) 为水的固有比重 ( $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ ),  $W$  为体积雪水当量,  $f_i$  为总雪质量中干冰的质量比数,其变化在 0 (融化水态) 及 1 (干雪态) 之间。  $C_V$  ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ ) 为平均体积热容,原则上可由各相质量比数及其相应比热计算而得。在许多情况下,可为常数<sup>[36,38]</sup>,或采用经验公式计算<sup>[11,39,40]</sup>。该模型中采用 Verseggy 提出的公式

$$H = C_V \times (T - 273.16) - f_i \times L_{ii} \times W \times \rho_i \quad (7.98)$$

其中  $\rho_s$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) 为雪的体积密度,  $\rho_i$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) 为冰的固有比重 ( $920 \text{ kg}/\text{m}^3$ )。在复杂精细的模式中,对三相变化及水气相扩散对能量及质量平衡方程的影响给予了详细的考虑,但造成方程组十分复杂,并增加了很大计算量。目前在许多方案中采用有效热传导系数来考虑水气相变及运动对能量平衡的影响,它们有的采用常数<sup>[38,39]</sup>,有的采用经验公式<sup>[11,34,40,41,42]</sup>或半经验公式<sup>[35]</sup>。SAST 采用有效热传导系数  $K = k_v + k_s$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),其中  $k_s$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )

为温差引起的热传导系数，而  $k_v$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) 是水汽相变及扩散引起的热传导系数。附录将详细介绍简化计算方案的推导。

方程 (7.95) 及 (7.97) 包含了 3 个变量  $H$ ,  $T$  及  $f_i$ ，必须补充一个附加物理条件限制使  $H$ ,  $T$  及  $f_i$  具唯一性。下面提出的实际存在的雪盖状态是以下 3 种可能状态中的一种，就是一个补充的必要限制条件。3 种可能状态为

a)  $T < 273.16$ ,  $f_i = 1.0$ ;

b)  $T = 273.16$ ,  $0.0 < f_i < 1.0$ ;

c) 由于时间步长过长，雪层全部融化。能量方程的具体求解方法，请参见文献[43]。

### 7.2.2.2 质量平衡方程

质量平衡方程控制总的雪水当量变化，它等于液态水及气态水质量之和。在附录中，将论证气态水运动对水当量的贡献很小，故在此加以忽略。雪层的水当量变化仅由降雪、降雨、雪内部融化液态水流进流出、径流及雪表面蒸发所引起。在该模型中，整个雪盖分层不超过 3 层（实际分层数多少取决于雪盖总厚度）。定义第  $j$  层厚度为  $D_{z_j}$ ，该层中雪水当量为  $w_j$ ，则表层 ( $j=1$ ) 雪水当量变化方程为

$$\frac{\partial(w_1 D_{z_1})}{\partial t} = p_{\text{snow}} + IF_0 - IF_1 - RF_1 - E_0 \quad (7.99)$$

而表层之下各层 ( $j=2, 3$ ) 的方程则为

$$\frac{\partial(w_j D_{z_j})}{\partial t} = IF_{j-1} - IF_j - RF_j \quad (7.100)$$

其中  $E_0$  ( $\text{m/s}$ ) 是雪盖表面的蒸发量。 $RF_j$  为从每一层下界面处流出径流量率， $IF_j$  ( $\text{m/s}$ ) 为液态水在每一层上界面实际入渗速率， $p_{\text{snow}}$  为干降雪降到表面堆积在表层的速率， $IF_0$  则为降雨产生下渗到表层速率。

尽管雪盖也是一种多孔介质，但是其内液态水流动行为与土壤中的水流动行为很不相同，其中毛细作用对流动的影响小于重力及粘性作用，所以当液态水超过某一量时，其下流速度由于重力影响迅速增大；反之，当小于某一量时，由于粘性作用，其下流速度变得很慢。为简化模型，我们引进一个临界值，称为持水能力 ( $C_r$ )（它为雪密度的函数，将在 7.2.3.2 节中讨论）。于是，单位时间内下流速率 ( $wf_j$ ) 等于总的液态水的质量比数减去持水能力值。液态水体积质量比数  $f_l = 1.0 - f_i$ 。

由于各雪层垂直方向上的密度分布不同，从上层液态水流出量并不一定等于能够渗透下层的入渗量。该模型引用 Jordan (1991) [35] 提出的由在重力作用下饱和入渗速率  $IF_p$  来估算潜在下渗速率的方法

$$IF_p = 4.2129 \times 10^5 \times d^2 \times \exp(-CE) \quad (7.101)$$

其中， $CE = 7.8 \times 10^{-3} \gamma_i$ ， $\gamma_i$  为干雪的体积密度， $d$  为雪粒的直径（见 7.2.3.1 节）。真正的入渗速率为  $IF = \min(IF_p, wf, \text{avs})$ ，其中 avs 为下层能够容纳入渗水的有效空间。而径流速

率为  $RF_j = (wf_j - IF_j)$ 。入渗至下一层的液态水是重新冻结（或部分冻结），还是继续流动则取决于下一层的物理条件。

### 7.2.2.3 雪盖压实及雪密度变化速率

干雪降落到地面后便开始压实过程。雪层压缩过程包括三方面，即破坏性变形压缩（主要是在新雪的情况下发主），雪重量产生的压缩以及由于冰融化成水而出流产生的雪层变薄。对于变形压缩，模型中采用 Anderson (1976) [34] 提出的经验公式

$$\left[ \frac{1}{Dz} \frac{\partial Dz}{\partial t} \right]_m = -2.778 \times 10^6 \times C3 \times C4 \times \exp(-0.04(273.16 - T)) \quad (7.102)$$

式中，

$$C3 = 1 \quad \text{if } \gamma_i \leq 150 \text{ kg/m}^3;$$

$$C3 = \exp(-0.06(\gamma_i - 150)) \quad \text{if } \gamma_i \geq 150 \text{ kg/m}^3;$$

$$C4 = 2 \quad \text{if } \gamma_1 > 0 \text{ kg/m}^3; \quad C4 = 1 \quad \text{if } \gamma_1 = 0 \text{ kg/m}^3。$$

其中， $\gamma_i$  ( $\text{kg/m}^3$ ) 及  $\gamma_l$  ( $\text{kg/m}^3$ ) 为雪层中冰及水的体积比重，为经验常数，可由实验测定。

当雪盖经过初始破坏性压实阶段之后，重量荷载使雪盖以较慢速率压实，压实速率与雪层重量压力成正比，表达式为

$$\left[ \frac{1}{Dz} \frac{\partial Dz}{\partial t} \right]_w = -\frac{P_s}{\eta} \quad (7.103)$$

由于本模型分层少，雪层中雪的自重也会产生重量压实的作用，故总的重量压力  $P_s$  ( $\text{N/m}^2$ ) 应为

$$P_s = P_{top} + P_{self} \quad (7.104)$$

其中  $P_{top}$  为雪层上表面荷载压强，而  $P_{self} (= 4.9g \times \rho_s \times Dz)$  为本层雪自重产生的附加压强， $\eta$  为与雪密度有关的粘滞系数。由 Anderson (1976) [34] 工作，有

$$\eta = \eta_0 \times \exp(CA) \quad (7.105)$$

其中  $\eta_0 = 3.6 \times 10^6$  ( $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ )； $CA = C_5(273.15 - T) + C_6 \times \rho_s$ ， $C_5 = 0.08$  ( $1/\text{K}$ )， $C_6 = 0.021$   $\text{m}^3 \cdot \text{kg}$ 。总的压缩速率 CR1 为

$$CR1 = \left[ \frac{1}{Dz} \frac{\partial Dz}{\partial t} \right]_m + \left[ \frac{1}{Dz} \frac{\partial Dz}{\partial t} \right]_w \quad (7.106)$$

而雪层中雪的密度由于压实过程所产生的变化速率则为

$$\frac{d\rho_s}{\rho_s dt} = -CR1 \quad (7.107)$$

冰的融化并不能改变雪密度，但因融化的液态水流走而减少雪层厚度，其层厚减小的速率  $CR2$  为

$$\left[ \frac{1}{Dz} \frac{\partial Dz}{\partial t} \right]_{ml} = -\frac{dh_i}{h_i} = CR2 \quad (7.108)$$

其中  $h_i$  是融化前层内干雪的质量，而  $dh_i$  为层中融化被流走的干雪质量。所以，总的压实速率  $CR$  为

$$CR = CR1 + CR2$$

$$\left[ \frac{1}{Dz} \frac{\partial Dz}{\partial t} \right] = CR \quad (7.109)$$

对于表层，它的总厚度由于压实而减小，但也因为降雪而增加。

## 7.2.3 有关参数的确定

在该模型中，涉及到许多重要参数，除了有效热传导数要专门在附录中分析外，这里给出有关雪粒直径、雪面反照率及持水能力的估计方案。

### 7.2.3.1 雪粒直径 ( $d$ (m))

雪粒直径对融化水的潜在入渗速率及太阳辐射传输的消光系数有直接影响。该模型中应用 Anderson (1976) [34] 建议的公式

$$\begin{aligned} d &= 0, & \text{当 } \gamma_i > 920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; \\ d &= 2.796 \times 10^{-3}, & \text{当 } 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \leq \gamma_i \leq 920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; \\ d &= 1.6 \times 10^{-4} + 1.1 \times 10^{-13} \gamma_i^4, & \text{当 } \gamma_i < 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \end{aligned} \quad (7.110)$$

### 7.2.3.2 持水能力 ( $C_r$ )

持水能力定义为该雪层中能够存储液态水量与总的干雪质量之比。利用 Loth 和 Graf (1993) [36] 建议的公式

$$\begin{aligned} C_r &= C_{\min} & \text{if } \gamma_i \geq \gamma_e \\ C_r &= C_{\min} + (C_{\max} - C_{\min})(\gamma_e - \gamma_i)/\gamma_e & \text{if } \gamma_i \leq \gamma_e \end{aligned} \quad (7.111)$$

其中  $C_{\min} = 0.03$ ,  $C_{\max} = 0.10$ ,  $\gamma_e = 200 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ 。

### 7.2.3.3 雪面反照率 (ALB)

雪面反照率对于决定雪盖能量平衡过程是一个至关重要的参数，它对决定雪面温度、雪面上的湍流通量及雪面融化消失时间等都有极大的影响<sup>[44]</sup>。现各种方案，有用常数的<sup>[35,38,39]</sup>，有用经验公式的<sup>[11,41]</sup>。在该模型中，对雪深  $< 25 \text{ cm}$  的浅雪<sup>[45]</sup>及  $> 25 \text{ cm}$  的深雪<sup>[11]</sup>采用了不同方案。首先规定了晴空下雪面的反照率  $ALB0$  为雪龄的函数

$$\begin{cases} ALB0(t) = 0.5 + (ALB0(t-1) - 0.5) \exp[-0.01 \exp(t/3600)] & \text{深雪} \\ ALB0(t) = ALB0(t-1) - 0.071/86400 \Delta t & \text{融化中浅雪} \\ ALB0(t) = ALB0(t-1) - 0.006/86400 \Delta t & \text{未融化浅雪} \end{cases} \quad (7.112)$$

然后，实际反照率  $ALB$  又要受到云量及太阳高度角的修正。修正方案采用 Siemer (1988) [40] 的方案，为

$$ALB = ALB0 + ALB0^3(1 - ALB0)F(N, AG) \quad (7.113)$$

$$F(N, AG) = N^2 + \exp[1 - (1 - \sin(AG))^2] - 1.3N^2 \times \exp[1 - (1 - \sin(AG))^2] \quad (7.114)$$

其中  $N$  为空中云量,  $AG$  取太阳高度角及  $\pi/3$  中的小值。由于降新雪会迅速提高表面反照率, 该模型规定表层每增厚 1.0 cm 新雪即增加反照率 0.1。但最大  $ALB$  不得超过 0.92。该方案曾利用俄罗斯的实测数据进行了对比, 发现计算值与实测值吻合得较好。

## 7.2.4 上边界条件

对于表面能量平衡, 雪盖吸收太阳辐射通量及来自降雨所带来的能量、雪面与大气间潜热与显热通量是根据莫宁-奥布可夫的理论计算的。

### 7.2.4.1 潜热与显热通量

潜热 ( $I_{sen}$ ,  $W/m^2$ ) 与显热 ( $I_{lat}$ ,  $W/m^2$ ) 通量由下式确定<sup>[35,47]</sup>

$$I_{sen} = (H_0 + \rho_a \times C_a \times C_h \times U) \times (T_s - T_a) \quad (7.115)$$

$$I_{lat} = \frac{p}{0.622} \left( E_0 + 100 \times \frac{L_{vi}}{R_w T_a} \times C_e \times U \right) \times (q_s(T_s) - q_a) \quad (7.116)$$

其中  $p$  为大气压强,  $\rho_a$ ,  $q_a$ ,  $T_a$  及  $C_a$  分别为空气的密度、相对比湿、温度及热比容,  $T_s$  为雪面温度,  $U$  为大气风速, 而  $q_s(T_s)$  为冰面在温度  $T_s$  下的相对比热湿,  $C_h$  及  $C_e$  分别为潜热与显热的总体输运系数。  $R_w$  为水蒸汽的气体常数,  $L_{vi}$  为冰升华热,  $H_0$  ( $2.0 \pm 0.5 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ ) 与  $E_0$  ( $2.0 \pm 0.5 W \cdot m^{-2} \cdot hPa^{-1}$ ) 为用于雪面经验的自由对流输运系数, 由实际情况而定, 本文取自 Jordan (1991) <sup>[35]</sup> 的经验值。

### 7.2.4.2 降雨带来的热能 $H_f(0)$

液态水带来的能量通量  $H_f(0)$ , 只存在于雪表面。对于雪盖内部融化水, 由于它们温度恒为 273.16 K, 又由于定义在 273.16 K 时的水能量为 0, 所以内部融化水的流动形式上不会引起任何能量的输运, 这就体现了该模型这种规定的优越性。至于在雪表面, 由于雨温可以高于 273.16 K,  $H_f(0)$  ( $J m^{-2} s^{-1}$ ) 为

$$H_f(0) = \rho_1 \times C_1 \times (T_{rain} - 273.16) \times IF_0 \quad (7.117)$$

其中  $C_1$  ( $J/(kg \cdot K)$ ) 为水的热比容,  $\rho_1$  为水的固有密度, 雨温 ( $T_{rain}$ ) 可与气温不同,  $IF_0$  是降雨进入雪表层的入渗速率。

### 7.2.4.3 长波辐射

来自空气的向下长波辐射在雪表面被完全吸收, 而雪表面则按 Stefan-Boltzmann 规律向上发出长波辐射。

## 7.2.5 雪盖的分层方案

雪盖模型是一组非线性动力学方程组, 不存在解析解。为得到数值解, 雪盖必需分层。分层方案 (包括分几层及每层厚度安排) 对于解的精度是十分关键的。该模型提出不多

于 3 层的方案，并且提出各层厚度的建议。在分析雪盖内部物理过程特征基础上得出：

(1) 雪面温度与整个雪盖的平均温度有很大差别。雪面与雪底温度之差可超过  $10^{\circ}\text{C}$ ，由于雪盖的单层模型只能给出整个的雪盖平均温度，这就造成雪面温度的估计很不正确。而雪面表层温度对于决定显热、潜热及雪盖融化过程是至关重要的，所以除雪盖很薄的情况外，必须有多于一层方案以突出表面层的作用。

(2) 为了给出雪面温度变化合理的计算方案，雪表层厚度应小于日温度波能够穿透雪盖的深度。鉴于雪是很好的绝热体，日温度波能够穿透雪盖的深度仅为  $10\text{ cm}$  量级，所以该模型规定雪表层厚度应不大于  $2\text{ cm}$ 。

(3) 由于雪盖热力学性质的日变化大都体现在  $15\sim 20\text{ cm}$  范围内，此外雪表层底部热传导对其热力学性质有很大影响。过厚的次表层将会使次表层的日变化特征变得很小，却大大降低了表层与次表层之间热通量交换的准确度，进而为表层热力学平衡的计算带来很大误差。所以，雪内部物理过程的特征及模拟试验的结果都表明，次表层的厚度不应超过  $20\text{ cm}$ 。

(4) 因为雪盖底部层还存在与其下垫面表面层之间的相互作用，所以如果当雪盖较厚时，有理由将底层与其它层分离开来。试验采用 3 层、7 层及 10 层的分层方案，并将计算结果与 Jordan (1991)<sup>[35]</sup>模型的精细分层方案结果进行比较，发现不多于 3 层的方案能够很好地重现 Jordan 精细分层方案的结果，另外 3 层方案不但分层减少，而且时间步长可大大增大，节约了计算时间。还利用俄罗斯及法国的长时间、不同地点的观测数据，检验了该模型 (SAST) 的物理及计算方案，结果显示 3 层方案具备很好的重现性。而同为 SAST 模型但用单层方案却出现较大误差。Loth 和 Graf (1993)<sup>[36]</sup>也指出，即使是 2 层模型在许多情况下也不能计算出精确的结果。

研究表明，模型分层的多少以及如何分层，对雪盖物理过程的模拟是十分关键的。例如，SAST 有不多于 3 层、层数可变的方案，且表层及次表层厚度都分别要求较薄及不能太厚。曾利用 SAST 模型不同的次表层厚度方案（但均为 3 层），对美国 Mammoth 的厚雪观测数据（雪盖深达  $6\text{ m}$ ）进行模拟试验，发现过厚的次表层会大大低估表层下界面的热通量，从而造成雪表温度计算的不正确，对能量平衡的计算带来误差，并导致雪盖融化消失时间的计算出现错误。

## 附录 雪盖内部过程中水汽相的贡献估计

雪内部的热传导对于能量及质量平衡有重要贡献。SAST 用一个有效热传导系数来包含水汽的相变对能量平衡的贡献。为了理解所作简化的物理内含的合理性，在此作定量的分析。蒸气的扩散通量为

$$U_v = -D_e \times \frac{\partial \rho_{v,sat}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial Z} \quad (\text{A.1})$$

其中  $D_e$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) 为蒸气有效的扩散系数，为温度及压强的函数(在通常情况下，为  $10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$ )， $\partial \rho_{v,sat} / \partial T$  为饱和蒸气压相对于温度  $T(\text{K})$  的梯度，约为  $10^{-4}\text{ kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$ 。如果取  $\partial T / \partial Z = 10\text{ K/m}$ ， $U_v$  仅为  $10^{-7}\text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ ，相当于  $0.01\text{ mm/d}$ 。此外， $\partial T / \partial Z$  一天内会有符号变化，对  $U_v$  日平均的实际贡献将会更小。因此，相对于蒸发而言，它的贡献甚小，故 SAST 在质量平衡方程中不考虑这种影响。

对于热力作用, 内部热通量由二部分组成, 即由于蒸气相变及扩散产生的热通量  $Q_v$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) 和由于热传导产生的热通量  $Q_t$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ), 为

$$Q_v = L_{vi} \times U_v = -L_{vi} \times D_e \times \frac{\partial \rho_{v, \text{sat}}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial Z} = -k_v \frac{\partial T}{\partial Z} \quad (\text{A.2})$$

$$Q_t = -k_s \frac{\partial T}{\partial Z} \quad (\text{A.3})$$

其中,  $L_{vi}$  ( $\text{J}/\text{kg}$ ) 为冰的升华相变热, 而  $k_v$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) 及  $k_s$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) 分别为代表由蒸气密度梯度及由温度梯度引起的热传导的热传导系数。综合上二式, 则有

$$Q = -(k_s + k_v) \frac{\partial T}{\partial Z} = -K \frac{\partial T}{\partial Z} \quad (\text{A.4})$$

其中  $K$  就是总的有效热传导系数,  $K = k_v + k_s$ 。通过以下的分析, SAST 得出  $k_v$  的重要性程度并提出一个简化的计算方案。 $k_v$  是温度及压强的函数, 它与大气压成反比。由 Jordan (1991) [35] 的方程, 可得出  $k_v$  在一个不大的范围内变动。根据公式计算, 压强为 1000 hPa (500 hPa) 条件下, 当温度从 253.16 K 增至 273.16 K 时,  $k_v$  从 0.014 (0.028) 增至 0.10 (0.2)  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。而利用 Jordan (1991) [35] 提出的方程

$$k_s = k_a + (7.75 \times 10^{-5} \times \rho_s + 1.105 \times 10^{-5} \times \rho_s^2) \times (k_i - k_a) \quad (\text{A.5})$$

其中  $k_i$  为冰热传导系数 ( $2.29 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $k_a$  为空气热传导系数 ( $0.023 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $\rho_s$  为雪的体积密度。表 7.6 给出不同雪体积密度时的该热传导数值。从表中可以看出, 在雪密度不太大的情况下 (新雪密度在  $50 \text{ kg}/\text{m}^3$  左右) 或者压强很低的情况下,  $k_v$  与  $k_s$  的大小是同一量级的, 所以  $K = k_v + k_s$  值对有效热传导系数贡献应保留。

根据大量的计算结果, 鉴于  $k_v$  随温度变化并不很大, SAST 给出一个简单的拟合公式, 即为  $k_v$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )

$$k_v = \left( a + \frac{b}{T + c} \right) \times \left( \frac{1000}{p} \right) \quad (\text{A.6})$$

这里,  $p$  为雪表面气压 (hPa),  $a = -0.06023$ ,  $b = -2.5425$ ,  $c = -289.99$ 。公式 (A.6) 的计算值与 Jordan (1991) [35] 基于物理规律的复杂公式得出的计算值吻合得很好。

表 7.6  $k_s$  与  $\rho_s$  关系

$\rho_s (\text{kg}/\text{m}^3)$	~50	~100	~300	~500	~917 (冰)
$k_s (\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}))$	~0.037	~0.063	~0.256	~0.72	~2.20

## 参考文献

- [1] Dickinson, R. E., A. Henderson-Sellers, and P. J. Kennedy, Biosphere Atmosphere Transfer Scheme (BATS) version 1e as coupled to the NCAR community climate model, NCAR Technical Note, NCAR/TN-387+STR, 72pp (1993).
- [2] Deardorff, J. W., Efficient prediction of ground surface temperature and moisture, with inclusion of a layer of vegetation. *J. Geophys. Res.*, 83, 1889—1903 (1978).

- [3] Dickinson, R. E., Modeling evapotranspiration for three-dimensional global climate models. *Climate Processes and Climate Sensitivity, Geophysical Monograph 29, Maurice Ewing Volume 5*, J. E. Hansen and T. Takahashi, Eds., American Geophysical Union, Washington, D.C., 58—72 (1984) .
- [4] Famiglietti, J. S. and E. F. Wood, Application of multiscale water and energy balance models on a tallgrass prairie. *Water Resour. Res.*, 30, 3079—3093 (1994) .
- [5] Mahrt, L. and H. Pan, A two-layer model of soil hydrology. *Bound.-Layer Meteor.*, 29, 1—20 (1984) .
- [6] Boone, A. and P. J. Wetzel, Issues related to low resolution modeling of soil moisture: experience with the PLACE model. *Global and Planetary Change*, 13, 161—181 (1996) .
- [7] Clapp, R. B. and G. M. Hornberger, Empirical equations for some soil hydraulic properties. *Water Resour. Res.*, 14, 601—604 (1978) .
- [8] van Genuchten, M. Th., A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer.Proc.*, J., 44, 892—898 (1980) .
- [9] Sellers, P. J., Y. Mintz, Y. C. Sud, A. Dalcher, A simple biosphere model (SiB) for use within general circulation models. *J. Atmos. Sci.*, 43, 505—531 (1986) .
- [10] Abramopoulos, F., C. Rosenzweig, and B. Choudhury, Improved ground hydrology calculations for global climate models(GCMs): Soil water movement and evapotranspiration. *J. Clim.*, 1, 921—941 (1988) .
- [11] Verseghy, D. L., CLASS - A Canadian Land Surface Scheme for GCMS. Part I: Soil Model. *Int. J. Climatol.*, 11, 111—133 (1991) .
- [12] Bonan, G. B., A Land Surface Model (LSM version 1.0) for ecological, hydrological, and atmospheric studies: technical description and user's guide, NCAR Technical Note. NCAR/TN-417+STR, Boulder, Colorado, 150 pp (1996) .
- [13] Matthews, E., Global vegetation and land use: New high-resolution data bases for climate studies. *J. Climate Appl. Meteor.*, 22, 474—487 (1983) .
- [14] Matthews, E., Prescription of land-surface boundary conditions in GISS GCM II and vegetation, land-use and seasonal albedo data sets: Documentation of archived data tape. NASA Technical Memos 86096 and 86107, NASA, Goddard Institute for Space Studies, New York, NY, 20pp. and 9pp. (1984) .
- [15] Wilson, M. F., The construction and use of land surface information in a general circulation climate model. Unpublished Ph.D. thesis, University of Liverpool, United Kingdom, 346 pp (1984) .
- [16] Clapp, R. B. and G. M. Hornberger, Empirical equations for some soil hydraulic properties. *Water Resources Research*, 14, 601—604 (1978) .
- [17] Jarvis, P. G., The interpretation of the variations in leaf water potential and stomatal conductance found in canopies in the field. *Philos. Trans. Roy. Soc.*, London, Ser. B, 273, 593—610 (1976) .
- [18] Hinckley, T. M., J. P. Lassoie and S. W. Running, Temporal and spatial variations in the water status for forest trees. *Forest Science Monograph*, 20, Society of American Foresters, 72 pp (1978) .
- [19] Watts, W. R., Field studies of stomatal conductance. In *Environmental Effects in Crop Physiology*. J. J. Landsberg and C. V. Cutting, eds., Academic press, New York, NY, 388 pp (1977) .
- [20] Denmead, O. T. and B. D. Millar, Field studies of the conductance of wheat leaves and transpiration. *Agron. J.*, 68, 307—311 (1976) .
- [21] Xue, Y., F. J. Zeng and C. A. Schlosser, SSIB and its sensitivity to soil properties: a case study using HAPEX-



- Mobilhy data. *Global and Planetary Change*, 13, 183—194 (1996c) .
- [22] Jin, J., X. Gao, S. Sorooshian, Z.-L. Yang, R. Bales, R. E. Dickinson, S.-F. Sun and G.-X. Wu, One-dimensional snow water and energy balance model for vegetated surfaces. *Hydrology Processes*, 13, 2467—2482 (1999) .
- [23] Jin, J., X. Gao, Z.-L. Yang, R. C. Bales, S. Sorooshian, R. E. Dickinson, S. F. Sun and G. X. Wu, Comparative analyses of physically based snowmelt models for climate simulations. *Journal of Climate*, 12, 2643—2657 (1999) .
- [24] Walsh, J. E., W. H. Jasperson and B. Ross, Influence of snow cover and soil moisture on monthly air temperature. *Monthly Weather Review*, 113, 756—768 (1985) .
- [25] Williams, J., The influences of snow cover on the atmospheric circulation and its role in climate change: an analysis based on results from the NCAR global circulation model. *Journal of Applied Meteorology*, 14, 137—152 (1975) .
- [26] Barnett, T. P., L. Dumenil, U. Schlese, E. Roeckner and M. Latif, The effect of Eurasian snow cover on regional and global climate variations. *Journal of Atmospheric Science*, 46, 661—685 (1989) .
- [27] Cohen, J. and D. Rind, The effect of snow cover on the climate. *Journal of Climate*, 4, 689—706 (1991) .
- [28] Vernekar, A. D., J. Zhou and J. Shukla, The effect of Eurasian snow cover on the Indian monsoon. *Journal of Climate*, 8, 248—266 (1995) .
- [29] Liston, G. E., Local advection of momentum heat, and moisture during the melt of patchy snow covers. *Journal of Applied Meteorology*, 34, 1705—1715 (1995) .
- [30] Yang, Z. L., E. R. E. Dickinson, A. Robock and K. Y. Vinnikov, Validation of the snow submodel of the biosphere-atmosphere transfer scheme with Russian snow cover and meteorological observation data. *Journal of Climate*, 10(2), 353-373 (1997) .
- [31] Schlosser, C. A., A. Robock, K. Y. Vinikov, N. A. Speranskaya and Y. Xue, 18-year land-surface hydrology model simulations for a midlatitude grassland catchment in Valdai, Russia. *Monthly Weather Review*, 125, 3279—3296 (1997) .
- [32] Douville, H., J. F. Royer and J. F. Mahfouf, A new snow parameterization for the Meteo-France climate model, Part I: Validation in stand-alone experiments. *Climate Dynamics*, 12, 21—31 (1995) .
- [33] Sud, Y. C. and D. M. Mocko, New Snow-Physics to Complement SsiB, Part I: Design and Evaluation with ISLSCP Initiative I Datasets. *Journal of Meteorology Society of Japan*, 77 (1) , 335—348 (1999) .
- [34] Anderson, E. A., A point energy and mass balance model of a snow cover. NOAA Technical Report NWS, 19, Office of Hydrology, National Weather Service, Silver Spring, MD (1976) .
- [35] Jordan, R., A one-dimensional temperature model for a snow cover. CRREL, Special Report, 91—1b (1991) .
- [36] Loth, B. and H. F. Graf, Snow cover model for global climate simulation. *Journal of Geophysical Research*, 98 (D6) , 10451—10464 (1993) .
- [37] Xue, Y., P. J. Sellers, J. L. Kinder III and J. Shukla, A Simplified Biosphere Model for Global Climate Studies. *Journal of Climate*, 4, 345—364 (1991) .
- [38] Marshall, S., Snow hydrology in a general circulation model. *Journal of Climate*, 7, 1251—1268 (1994) .
- [39] Kondo, J. and T. Yamazaki, A prediction model for snowmelt, snow surface temperature and freezing depth using a heat balance method. *Journal of Applied Meteorology*, 29, 375—384 (1990) .
- [40] Lynch-Stieglitz, M., The development and validation of a simple snow model for the GISS GCM. *Journal of*

*Climate*, 7, 1842—1855 (1994) .

- [41] Loth, B. and H. F. Graf, Modeling the snow cover for climate studies. Report No.190, Max-Planck-Institute für Meteorologie, 1—30 (1996) .
- [42] Yen, Y. C., Review of thermal properties of snow, ice and sea ice. CRREL Report 81-10, USA Cold Regions and Engineering Laboratory (1981) .
- [43] Sun, S., J. Jin and Y. Xue, A simple snow-atmosphere-soil transfer (SAST) model. *J.G.R.*, 104 (D16) , 19587—19597 (1999) .
- [44] Loth, B. and H. F. Graf, Modeling the snow cover in climate studies, 1: Long term integration under different climatic conditions using a multilayered snow-cover model. *Journal of J.G.R.*, 103 (D10) , 11313—11327 (1998) .
- [45] Gray, D. M. and P. G. Landine, Albedo model for shallow prairie snow covers. *Canadian Journal of Earth Science*, 23, 1760—1768 (1987) .
- [46] Siemer, A. H., One dimensional EBM of a snow cover taking into account liquid water transmission. Ber. Inst. Meteorol, Klimatol, Univ. Hannover, 34, 126 (1988) .
- [47] Andress, E. L. and B. Murphy, Bulk transfer coefficients for heat and momentum over leads and polynyas. *Journal of Physical Oceanography*, 16 (11) , 1875—1883 (1986) .

## 第八章 边界层过程的参数化

### 8.1 垂直扩散

边界层中的湍流交换过程影响温度、速度和水汽等物理量的空间分布,在原 ECMWF (T63) 模式中,考虑了垂直方向上的扩散。其计算由子程序 VDIFF 完成,本节是关于对 VDIFF 改进说明。

#### 8.1.1 原 理

守恒量  $\psi$  的垂直扩散方程可写成为:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho K_{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (8.1)$$

其中  $K_{\psi}$  为湍流交换系数,在 T63 说明书中用  $K_{m,h}$  表示。下标  $m$  代表动量,下标  $h$  代表标量。在原 VDIFF 中  $K_{\psi}$  根据相似原理,采用一阶闭合方式,其表达式是诊断的,

$$\begin{cases} K_m = l_m^2 \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| f_m(R_i) \\ K_h = l_h^2 \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| f_h(R_i) \end{cases} \quad (8.2)$$

其中  $l_{m,h}$  为混合长,  $f_{m,h}$  为 Richardson 数的函数,一阶闭合的优点是形式简单、计算量小,其缺点是反映湍流强度的变化;当边界层充分混合,  $\left| \frac{\partial V}{\partial z} \right|$ ,  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$  等量接近零时,  $K_{m,h}$  和通

量  $-K_{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z}$  的计算都会遇到困难。高阶闭合,如二阶闭合,因计算量大,尚难以在业务模式中采用。本修正方案是采用 TKE (Turbulent Kinetic Energy) 闭合,是当前较为可行的折衷方案<sup>[1]</sup>。TKE 闭合又称一阶半闭合,因其阶数高于一阶闭合式 (8.2),但又不够二阶闭合。

TKE 方程为:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \frac{g}{\theta} \overline{w'\theta'} - \frac{\partial [\overline{w'(p'/\rho + \bar{e})}]}{\partial z} - \varepsilon \quad (8.3)$$

其中  $\bar{e} = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  为湍流动能。

方程 (8.3) 右端第 1, 2 项表示风速切变对湍流动能生成的贡献,它永远是正的,称为切变生成项。第 3 项为浮力的贡献,在不稳定大气中其值为正,稳定大气中其值为负。第

4 项实际上为两部分，一部分是湍流动能在垂直方向上的输送，它本身对湍流动能的生成无作用，只起到重新分布的作用；另一部分为压力涨落对湍流动能分布的影响，对湍流动能生成也不起作用。方程最后一项是耗散项，它永远是负的。

在方程 (8.3) 中，实际上还略去了湍流动能的平流项  $-\bar{U} \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial \bar{e}}{\partial y}$ ，这两项与生成相比是很小的，特别是在大尺度中。按尺度分析，它的量级为，

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} \quad \bar{U} \frac{\Delta \bar{e}}{L} \sim 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \times 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} / (10^6 \text{ m}) \sim 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$$

其中， $L$  为水平尺度， $10^3 \text{ km}$ 。而切变生成项为

$$\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \sim u_*^2 U / \Delta Z \sim 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} / (10^3 \text{ m}) \sim 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$$

其中  $u_*$  为摩擦速度， $\Delta Z$  为边界层垂直尺度。分析表明平流项比生成项小两个量级。

在湍流动能的局地变化中，只考虑最重要的生成项与耗散项。它们的参数化表达式分别为，

$$-\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = K_m \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (8.4)$$

$$\frac{g}{\theta} \overline{w'\theta'} = -\frac{g}{\theta} K_h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (8.5)$$

$$\varepsilon = C_E \bar{e}^{3/2} / l \quad (8.6)$$

其中  $C_E$  为系数， $l$  为混合长，其表达式为

$$l = \frac{kz}{1 + kz/l_\infty} \quad (8.7)$$

其中  $l_\infty$  为混合长的最大值。

$K_{m,h}$  可表示成为

$$K_m = C_k l \bar{e}^{1/2} \quad (8.8)$$

$$K_h = \alpha_1 K_m \quad (8.9)$$

其中  $C_k$  为系数， $\alpha_1$  为湍流 Prandtl 数的倒数。

根据文献[1]，取  $C_k = 0.5$ ， $C_E = 0.125$ ， $\alpha_1 = 1.35$ 。

## 8.1.2 修正的 VDIFF 子程序说明

修正的 VDIFF 中增加了预报变量，即湍能  $\bar{e}$ ，用 Q (JL, JK) 表示。在程序中增加了 Q 的预报方程，即 TKE 方程。TKE 预报方程中各项的表达式，尽量利用原来 VDIFF 子程序中的各变量参数。其修正如下。

在 3.2 COMPUTATION OF BASIC QUANTITIES: WIND SHEAR, RICHARDSON NUMBER, SQUARED MIXING LENGTHS, UNSTABLE AND STABLE CASE COMMON FACTORS AND NEUTRAL CASE COMMON PART OF THE COEFFICIENTS.

DO 321 JL = 1, NOLON

...

321 CONTINUE 中插入下面语句, 用于湍流动能的预报方程

ZCFNC(JL) = ZCONS7\*APHMI (JL, JK+1)/((GEOM1 (JL, JK) -GEOM1 (JL,JK +1)))\*  
(TM1 (JL, JK) \* (1.+VTMPC 1\*QMI(JL, JK))+  
TM1 (JL,JK+1)\*(1.+VTMPC1\*QM1 (JL,JK+1)))/G

(注:  $ZCFNC(JL) = \alpha \rho_{k+\frac{1}{2}} \frac{2\Delta t g}{|\Delta z|_{k+\frac{1}{2}}}$ )

ZCFNC 为压力厚度 (Pressure thickness)  $\Delta P_{k+\frac{1}{2}}$  与时间步长  $\Delta t$  的乘积

ZCMF 和 ZCFH 分别为动量和热量交换系数  $K_m$  和  $K_n$

ZCFM (JL, JK) = ZCFM (JL, JK) / ZCFNC (JL)

ZCFH (JL, JK) = ZCFH (JL, JK) / ZCFNC (JL)

(注:  $(K_{m,h})_{K+\frac{1}{2}} = (K_{m,h}^*)_{K+\frac{1}{2}} / (\alpha \rho_{k+\frac{1}{2}} \frac{2\Delta t g}{|\Delta z|_{K+\frac{1}{2}}})$ )

$K_{m,h}^*$  为带有压力厚度因子的交换系数

DZ = (GEOM1 (JL,JK) -GEOM1 (JL,JK+1)) / G

( $\Delta z = z_K - z_{K+1}$ )

DZ 为高度增量  $\Delta z$

DUDZ2 = ZDU2/DZ/DZ

( $(\Delta u^2 + \Delta v^2) / (\Delta z)^2$ )

DUDZ2 为风切变的平方

DT = ZTVD - ZTVU

( $\Delta \theta = \theta_K - \theta_{K+1}$ )

DT 为位温增量

DTDZ = DT/DZ,

( $\frac{d\bar{\theta}}{dz}$ )

DTDZ 为位温梯度

DTDZ = G / (ZTVD + ZTVU) \* 2. \* DTDZ

( $\frac{g}{\theta} \frac{d\bar{\theta}}{dz}$ )

ZALM = SQRT (ZALM2 (JL))

(混合长  $l$ )

ZALM2 为混合长的平方  $l^2$ , 在原模式中已有计算

Q(JK, JK) = Q(JL, JK) + ZCFM (JL, JK) \* DUDZ2 \*

ZTMST \* 0.5 - ZCMH (JL, JK) \* DTDZ \* ZTMST \* 0.5

- Q(JL, JK) \* 1.5 \* CE / ZALM \* ZTMST \* 0.5

$$(\text{注: } \bar{e}(t + \Delta t) = \bar{e}(t) + \left\{ K_m \left[ \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{g}{\theta} K_h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \varepsilon \right\} \Delta t)$$

湍流动能的积分迭代

在 3.3 DIMENSIONLESS COEFFICIENTS MULTIPLIED BY PRESSURE THICKNESSES FOR MOMENTUM AND HEAT EXCHANGE

DO 331 JL = 1, NLO

.....

.....

331 CONTINUE 中插入下面语句, 用于计算动量和热量交换系数的参数化表达式

ZALM = SQRT (ZALM2(JL)) (混合长  $l$ )

ZCFM(JL, JK) = CK\*SQRT(Q(JL, JK))\*ZALM ( $K_m = C_K l e^{1/2}$ )

动量交换系数  $K_m$  的参数化表达式

ZCFH(JL, JK) = ALF\*ZCFM(JL, JK) ( $K_h = \alpha_1 K_m$ )

热量交换系数  $K_h$  的参数化表达式, ALF 为参数  $\alpha_1$

ZCFM(JL, JK) = ZCFNC(JL)\*ZCFM(JL, JK)

ZCFH(JL, JK) = ZCFNC(JL)\*ZCFH(JL, JK)

$$(\text{注: } (k_{m,h}^*)_{k+\frac{1}{2}} = (k_{m,h})_{k+\frac{1}{2}} \cdot a \rho_{k+\frac{1}{2}} \frac{2\Delta t g}{|\Delta z|_{k+\frac{1}{2}}})$$

将动量和热量交换系数  $K_m$  和  $K_h$  乘以压力厚度因子变为  $K_m^*$  和  $K_h^*$ , 代入垂直扩散方程中, 而扩散方程的计算仍采用原模式中的计算方法

## 8.2 重力波波阻的参数化

### 8.2.1 原 理

地形重力波垂直动量输送引起的地形阻力称为波阻。它在全球大气动量平衡以及温度、气压分布有重要影响。在 T63 模式中, 采用 Miller 和 Palmer 等人<sup>[2]</sup>的参数化方法表达地形波阻,

$$D_0 = k \rho_0 \sigma_h^2 N_0 U_0 \quad (8.10)$$

其中  $\sigma_h^2$  为地形高度方差,  $\rho_0$ ,  $N_0$  和  $U_0$  分别为近地面附近的空气密度、浮力频率和平均风速,  $k$  为经验常数。在此表达式中未考虑大气要素随高度的变化。

桑建国等<sup>[3]</sup>利用二层模式求解线性化的大气动力学方程组, 得出了二维地形的波阻解析表达式,

$$D_S = k \rho_0 \sigma_h^2 \frac{(N_1^2 / U_1^2)(N_2 / U_2)}{(N_1^2 / U_1^2) \cos^2(N_1 / U_1 \cdot h) + (N_2^2 / U_2^2) \sin^2(N_1 / U_1 \cdot h)} U_1^2 \quad (8.11)$$

其中  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  分别为下层和上层大气的浮力频率和平均风速,  $h$  为下层大气厚度。显然, 如果上下层大气是均匀一致的,  $N_1 = N_2 = N_0$ ,  $U_1 = U_2 = U_0$ , 表达式(8.11)就退化式为(8.10)。在 T63 中, 如果低层大气是中性或不稳定的, 则  $D_0 = 0$ , 于是排除了白天大多数情况下, 有波动阻力的可能。

在实际中性或不稳定的边界层大气中, 如果有足够强的扰动, 无论是动力的或热力的, 都有可能在其上部稳定层中激发出重力内波。Kershaw<sup>[4]</sup>得出了对流活动在自由大气中激发重力波及动量传输的表达式。但地形引起的重力波则未见报导。

桑建国等在同一文章中<sup>[3]</sup>, 也给出了低层不稳定时的波阻表达式,

$$D_u = k\rho_0\sigma_h^2 \frac{(N_1/U_1)^2 N_2/U_2}{(N_1/U_1)^2 \cosh^2(N_1/U_1 \cdot h) + (N_2/U_2)^2 \sinh^2(N_1/U_1 \cdot h)} U_1^2 \quad (8.12)$$

其中  $\frac{d\theta_1}{dz} < 0$ , 取  $N_1^2 = -\frac{g}{\theta} \frac{d\theta_1}{dz} > 0$ 。

在表达式(8.11)和(8.12)中的参数, 用典型的大气条件代入, 得到不稳定边界层中  $D_u$  的值比稳定边界层中  $D_s$  的值要小, 但基本属同一量级, 不应该忽略不计。

在稳定和不稳定边界层中三维地形波阻的表达式也都分别得出<sup>[5]</sup>, 但形式更为复杂。波阻的参数化的改进表达式主要依据二维形式(8.11)和(8.12)。

在上述工作基础上, 我们对 T63 中波阻参数化程序 GWDRAG 做了修正。加入了低层  $\frac{d\theta}{dz} > 0$  或  $\frac{d\theta}{dz} < 0$  的判断语句。当  $\frac{d\theta}{dz} > 0$ , 采用原方案计算; 当  $\frac{d\theta}{dz} < 0$ , 波阻按式(8.12)计算。

## 8.2.2 修正的 GWDRAG 子程序说明

Subroutine GWDRAG 的修改版说明, 仍然参考“Research Manual 3, ECMWF Forecast model, Physical Parameterisation, 3.4 CODE: Subroutine GWDRAG”

每个修改的段落以

\$\$\$\$ REVISION \$\$\$\$\$\$ 开始, 以 \$\$\$\$ END OF REVISION \$\$\$\$\$\$ 结束。

第一段修改加入了不稳定边界中参数 N1 的计算, 其增加部分如下:

2.2 BRUNT-VAISALA FREQUENCY AND DENSITY AT HALF LEVELS

.....

C \$\$\$\$ REVISION \$\$\$ .....

IF (Z STAB(JL, NLEVP1). LT. 0.) THEN

ZUSTAB (JL, NLEVP1) = -ZSTAB (JL, NLEVP1)

ELSE

ZUSTAB(JL, NLEVP1) = 0

END IF

C \$\$\$\$ END OF REVISION \$\$\$\$\$\$

其中 ZSTAB 为最低层(近地面处)的  $N^2$ ,  $N$  是 Brunt-Vaisala 频率,

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g^2}{C_{pd} \bar{T}} (1 - C_{pd} \rho \Delta T / \Delta p) \\ &= \frac{g}{\bar{T}} \left( \frac{g}{C_{pd}} + \Delta T / \Delta p \right) \\ &= \frac{g}{\bar{T}} \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned}$$

如果  $N^2 < 0$  (即  $\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$ ), 低层大气处于不稳定状态。取  $N_1^2 = -N^2$ ,  $N_1^2$  用 ZUSTAB(JL,

NLEVP1)表示。

如果  $N^2 \geq 0$ , 则取 ZUSTAB = 0。

第二段修改加入了不稳定边界层中波动应力的计算, 其增加部分如下:

#### 2.4 LOWEST LEVEL STRESS

.....

C \$\$\$\$ REVISION \$\$\$\$\$\$

IF (ZUSTAB(JL, NLEVP1). NE.0.) THEN

ZUH = SQRT(ZUSTAB(JL, NLEVP1))\*600./ZVPH(JL, NLEVP1)

ZUST = ZUSTAB(JL, NLEVP1)\*SQRT(ZSTAB(JL, JKCM1))/(ZUSTAB(JL,  
NLEVP1)\*COSH(ZUH)\*\*2+ZSTAB(JL, JKCM1)\*SINH(ZUH)\*\*2)

ZVAR = VAR(JL, ISECT(JL))

ZTAU(JL, NLEVP1) = ZRHO(JL, NLEVP1)\*ZKDRAG\*ZUST  
\*ZVAR\*ZVPH(JL, NLEVP1)

ELSE

C \$\$\$\$ END OF REVISION \$\$\$\$\$\$

其中 ZUH 为  $(N_1/U_1 \cdot h)$ ,  $N_1^2$  用 ZUSTAB 表示,  $h$  设为 600 m,  $U_1$  为低层的平均风速, 用

ZVPH 表示。ZSTAB(JL, JKCM1)为 JKCM1 = NLEV-3 层的 Brunt-Vaisala 频率,  $N_2^2$ 。

$$\text{ZUST 为 } \frac{N_1^2 N_2 \cdot U_1}{N_1^2 \cosh^2(N_1 / U_1 \cdot h) + N_2^2 \sinh^2(N_1 / U_1 \cdot h)}$$

见 8.2.1 中的表达式 (8.12), 其中假设  $U_1 = U_2$ 。ZTAU 为低层波阻, 即表达 (8.12) 中的  $D_u$ 。

#### 参考文献

- [1] Therry, G., Lacarrere P. Improve the eddy kinetic energy model for planetary boundary layer description .  
Boundary- Layer Meteorol, 1983, 25, 63~88
- [2] Miller, M. T., Palmer, T. N., Swinbank, R., Parameterization and influence of subgridscale orography in general  
circulation and numerical weather prediction models. *Meteorol. Atmos. Phys.*, 1989, 44, 84-109



- [3] 桑建国, 刘辉志, 洪钟祥. 二维地形的地形阻力. 大气科学, 1998, 22, 243~246
- [4] Kershaw, R. Parameterization of momentum transport by convectionally generated gravity waves. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1995, 121, 1023~1040
- [5] 桑建国. 三维地形的波动阻力. 应用气象学报, 1997, 8 卷增刊, 36~42

## 第九章 模式程序结构和运行

在研制国家气候中心大气环流模式的过程中对模式的源程序结构也作了较大的改动。总的原则是使源程序更加标准化、模块化。同时为了适应并行计算机的发展增加了采用 MPI 并行界面的若干子程序。为方便用户使用和修改源程序采用 MAKEFILE 管理和维护程序。

### 9.1 模式程序结构简介

#### 9.1.1 源程序结构

整个大气环流模式包含在如下几个子目录之下：

- t63/src0/ ——模式的主体程序。
- t63/rpl/ ——模式动力框架的修改方案：参考大气方案。
- t63/mass/ ——模式动力框架的修改方案：质量守恒方案。
- t63/mpisrc/ ——模式基于 MPI 的并程序。
- t63/radmor/ ——模式物理过程的修改方案：Mocrotte 辐射方案。
- t63/radwang/ ——模式物理过程的修改方案：K—分布辐射方案。
- t63/ukconvect/ ——模式物理过程的修改方案：Gregory 对流方案。
- t63/post/ ——模式后处理程序。
- t63/inidat/ ——模式的初始资料部分。
- t63/makefiles/ ——运行不同方案的 Makefile 文件。
- t63/rundir/ ——模式的运行目录。

t63/src0/目录下包含了由 ECMWF(cycle28)中期预报模式发展而成的 T63 模式的主体部分。该模式水平分辨率为 1.875（赤道附近约 208 km），垂直分辨率为 16 层（模式层顶：约 25 hPa，模式层底：约 996 hPa），参考气压为 1013.25 hPa，积分时间步长是 22.5 分钟。在时间积分方案选择上，散度、温度和地面气压方程采取半隐式时间格式，为防止计算波的虚假增长而引进了时间滤波；涡度与水汽方程的纬向平流项采用了半隐式格式，并在模式中对某些选择性短波加以阻尼。模式垂直方向离散化为 16 层，表 9.1 给出了其参数 A、B 系数的取值。在水平方向上，模式的高斯纬度相对于赤道对称，故表 9.2 仅给出了北半球的高斯纬度值。

表 9.1 定义模式垂直坐标的参数

$k$	$A_{k+1/2}$	$B_{k+1/2}$
0	0.0000000000	0.0000000000
1	5000.0000000000	0.0000000000
2	9890.5186890000	0.0017207627
3	14166.3065830000	0.0131976225
4	17346.0649530000	0.0422171110
5	19121.1510120000	0.0937616374
6	19371.2356180000	0.1695713413
7	18164.4733470000	0.2680156969
8	15742.1849450000	0.3842748702
9	12488.0521520000	0.5108308287
10	8881.8249070000	0.6382682033
11	5437.5409260000	0.7563849029
12	2626.2576520000	0.8556124814
13	783.2965880000	0.9287462571
14	0.0000000000	0.9729851852
15	0.0000000000	0.9922814815
16	0.0000000000	1.0000000000

表 9.2 北半球高斯纬度表

序号	纬度	序号	纬度
1	88.57216851	25	43.83345858
2	86.72253095	26	41.96822027
3	84.86197029	27	40.10297930
4	82.99894164	28	38.23773599
5	81.13497684	29	36.37249059
6	79.27055903	30	34.50724334
7	77.40588808	31	32.64199444
8	75.54106145	32	30.77674406
9	73.67613231	33	28.91149237
10	71.81113211	34	27.04623950
11	69.94608065	35	25.18098558
12	68.08099099	36	23.31573073
13	66.21587211	37	21.45047504
14	64.35073041	38	19.58521861
15	62.48557052	39	17.71996153
16	60.62039593	40	15.85470387
17	58.75520927	41	13.98944571
18	56.89001260	42	12.12418712
19	55.02480754	43	10.25892817
20	53.15959537	44	8.39366891
21	51.29437714	45	6.52840940
22	49.42915370	46	4.66314971
23	47.56392575	47	2.79788988
24	45.69869388	48	0.93262997

另外, t63/src0/目录下还包含如下的物理过程参数化方案:

#### (1) 辐射方案:

该辐射方案比较详细地考虑了云和辐射的相互作用。方案允许在模式的任何层次上存在有部分云盖, 云分为 4 种: 对流云和高、中、低层云, 对流云可出现于任何模式层, 层云限制它的厚度不超过一个层次。另外, 辐射方案还考虑了多层云对辐射的散射作用。气体的作用是通过传输函数指数和的拟合来考虑的, 各整层边界上的温度则由以  $P$  作权重将  $T$  插值到半层上得到。模式气溶胶仅随高度变化。模式中,  $\text{CO}_2$  含量为 345 ppmv\*;  $\text{O}_3$  的混合比随高度、纬度、经度和季节而变化。

辐射加热率可由净辐射通量  $F$  的散度来计算:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)_{rad} = -\frac{g}{C_{pd}(1+(\delta-1)q)} \frac{\partial F}{\partial p}$$

$$\delta = \frac{C_{pv}}{C_{pd}}$$

其中, 从辐射传输方程求解辐射通量  $F$  很费计算机机时, 所以, 每 3 小时每 4 个格点计算一次。在做全辐射计算时, 把全辐射分成两部分, 即来自太阳的短波辐射和地面、大气本身发射的长波辐射。

#### (2) 垂直扩散:

模式用垂直扩散过程来模拟垂直方向的涡动通量, 即热量、动量和水汽在地表的湍流交换以及这些量在模式最低层的湍流传输。与大气稳定度有关的地面通量和扩散系数由 Monin-Obukhov 相似理论决定。

#### (3) 重力波拖曳:

模式的重力波拖曳参数化采用 Palmer(1986)方案的修改型, 用以表示稳定层结气流经过不规则地形时所激发的次网格尺度重力波引起的动量输送过程。

#### (4) 积云对流:

积云对流采用 Kuo(1974)方案, 对流层被定义为条件不稳定层, 既其中的绝热及湍流过程的作用是由水汽的净辐合造成的。对流性云底(即抬升高度)为近地面层, 其顶为无浮力层。

#### (5) 层状云降水:

简单地将水汽从过饱和层形成降水, 根据 Kessler(1969)的建议, 在降水达到云的干燥层时, 会出现重新蒸发。

#### (6) 土壤层的处理:

在陆面上用一个三层模式来描述土壤过程, 各层厚度分别为 7.2 cm、43.2 cm 和 43.2 cm。植被对地面蒸发的作用加以考虑, 加进了与雪盖有关的感热通量的作用。模式最低层地温用气候值, 雪盖为预报量。

## 9.1.2 源程序的运行流程

模式主程序名为 MASTER, 它调用子程序 CONTROL, 启动整个系统。<sup>1</sup>

\* ppmv 表示体积分数为  $10^{-6}$

子程序 CONTROL 首先调用了几个定义模式常数、定义缺省值及逻辑变量的子程序。CONTROL 调用的第一个子程序为 INISDS, 读入模式运行控制参数并存入数据块 COMSDS 中, 子程序 INICOM 调用若干子程序, 对大多数公用块预赋常数, 最后调用子程序 INILEG, 计算勒让德变换所需的勒让德函数。

根据当前的作业, 究竟是前一中断作业的继续, 还是新起始运行, CONTROL 调用相应的重新启动子程序 RESTART 或起始运行子程序 INITIAL。这些程序的主要功能是读入初始资料, 建立工作文件。但是, 如果计算需要的话, 子程序 INITIAL 还可进行资料的正规初值化处理, 这需要对模式积分若干步以求得非绝热倾向。CONTROL 最后调用子程序 STEPON, 该子程序控制了模式的实际运行。

子程序 STEPON 主要组织对资料扫描。这里我们介绍模式运行采用的二次扫描结构。STEPON 还调用其它一些子程序进行谱空间的计算 (半隐式调整及水平扩散部分), 该子程序还累进时间步, 进行时间积分, 并检查运行的完成情况。

模式的计算大体分为五类:

#### (1) 格点计算

这主要包括: 非线性动力学项、非绝热过程的参数化, 某些虽可在谱空间计算但较费内存的线性项 (时间滤波、与半隐式格式有关的  $t$  与  $t - \Delta t$  时刻的各变量值的线性组合)。

#### (2) 傅里叶变换

运用快速傅里叶变换技术 (Temperton, 1983) 进行变量在格点空间与傅里叶空间之间的正逆变换。

#### (3) 傅里叶空间计算

包括纬向导数项的计算以及与涡度和温度的半隐式处理有关的一些项的计算。

#### (4) 勒让德变换

傅里空间与谱空间之间的正逆变换, 主要包括经向导数和拉普拉斯算子的计算。

#### (5) 谱空间计算

包括谱形式方程组的最后求解, 并完成半隐式格式的积分计算。水平扩散也在谱空间中计算。

将各种空间分布形式的所有资料都存在计算机内存中是不可能的。因此必须将资料存放在第二内存 (磁盘或固态存储装置) 中, 对此资料库进行扫描, 只把必需的那部分资料存放在中央内存中。

格点和傅里叶空间计算可按纬圈依序一次完成, 因此可在这二种空间形式中选其中一种在磁盘上存放资料, 模式存放的是傅里叶系数。但当资料要用球谐函数表示时 (我们称之为谱空间), 计算需要全部的谱系数。因此谱空间形式的资料必须全部保存在中央内存中。在现行模式中, 子程序 NNSC1 按纬圈逐行读入资料。NNSC1 处理格点和傅里叶空间的计算, 然后进行勒让德正变换以积累谱系数。为了更有效地进行勒让德变换, 有必要计算按赤道的对称分布与反对称分布的傅里叶系数, 因此对纬度的扫描不是按从北极到南极的自然顺序, 而是对北半球和南半球交替扫描。因此奇数行为北半球资料, 从北极到赤道排列; 偶数行则是南半球资料, 从南极到赤道排列。

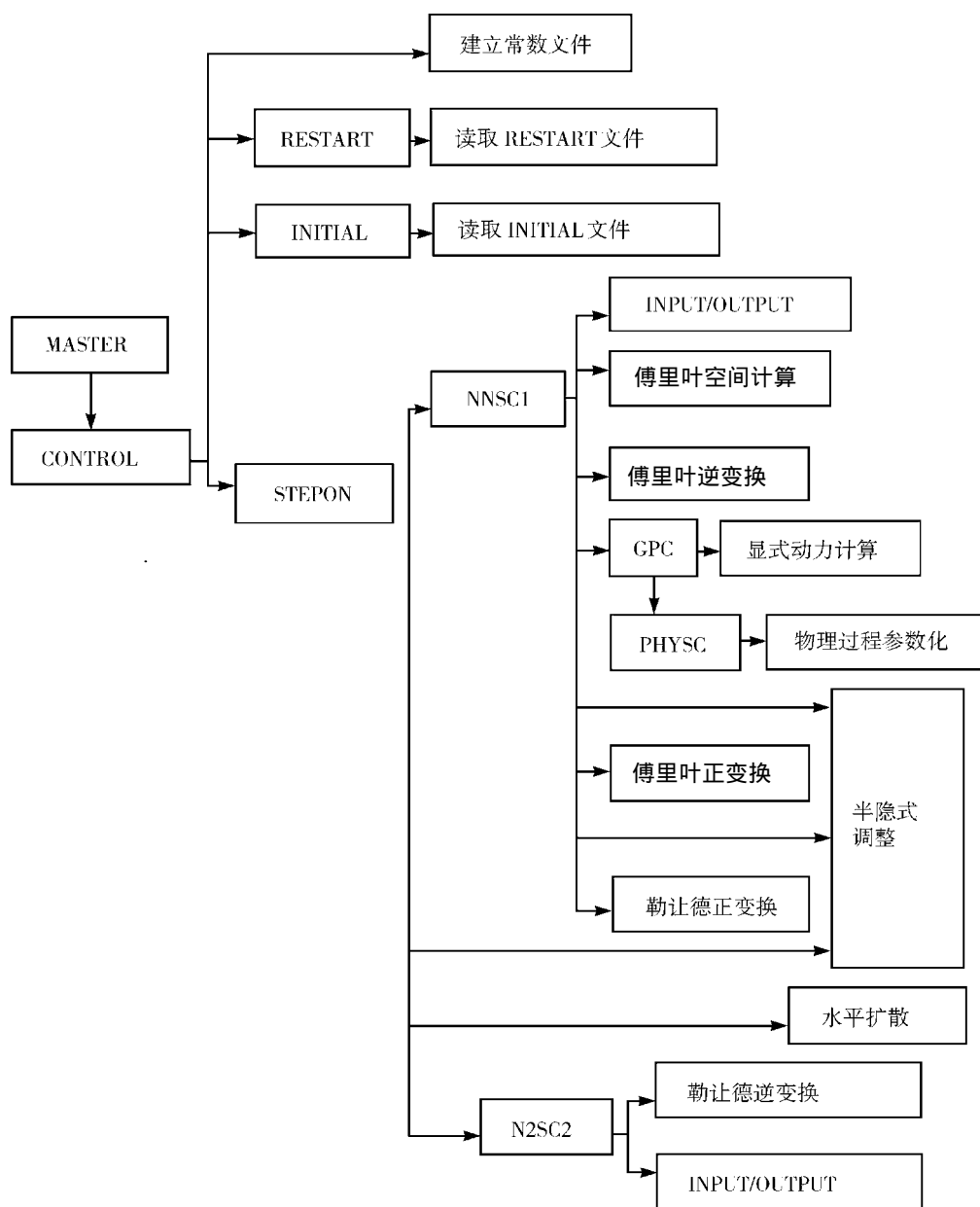


图 9.1 模式程序简易流程

另外，NNSC1 还调用了一些诊断子程序（FILMASK，DIAPOIN，DIAPRNT）及有关辐射（PRERAD）和统计诊断（PRESTAT）的预备子程序，以及打印一些输出结果的子程序（POSTRAD，POSTATP，POSTATD）。

谱空间计算完成后，N2SC2 子程序逐纬圈进行勒让德逆变换并按纬圈顺序存放傅里叶系数，存放的具体形式采用如上所述的交替形式。

## 9.2 模式初始资料和边界资料

大气环流模式的初始资料和边界资料目录下包含有如下几个资料:

t63/inidat/NMLIST	——模式的 NAMELIST 文件。
t63/inidat/NSDS1	——模式 I/O 通道控制参数文件。
t63/inidat/NSDSINI	——模式做初始运行时使用的模式 I/O 通道控制参数文件。
t63/inidat/NSDSRES	——模式做 restart 运行时使用的模式 I/O 通道控制参数文件。
t63/inidat/NSP	——模式做初始运行时的初始谱系数文件。
t63/inidat/NGP	——模式做初始运行时的格点值文件。
t63/inidat/TSTDWD.CL	——模式气候下边界条件, 包括表面温度, 深层土壤温度和深层土壤湿度。
t63/inidat/VAR.IEEE	——重力波拖曳参数化使用的次网格尺度地形的方差。

NSDS1 为模式运行控制参数文件。模式首先读到的是模式运行控制参数文件 (SDS), 它含有 INITIAL 运行或 RESTART 运行的必备信息以及模式用到的所有文件的信息。文件中的数据是在子程序 INSDS 中读入的。由于 NSDS1 文件为二进制文件, 所以预先生成了两个模式运行控制参数文件 NSDSINI 和 NSDSRES, 分别对应于模式的 INITIAL 运行或 RESTART 运行, 当运行模式时, 用 NSDSINI 或 NSDSRES 替换 NSDS1 即可。

## 9.3 模式的运行

在模式运行之前, 首先必须根据用户的需求修改 Namelist 文件 NMLIST 中的参数值 (参见表 9.3)。该文件在目录 inidat 下, 下面列出了 NMLIST 文件中一些控制模式运行的最关键的参数的说明。

NSTOP	——为正值时, 为模式运行时间的步数; 为负值时, 为模式运行时间的天数。
NRESUM	——模式做 INITIAL 运行时, 为 0; 模式做 RESTART 运行时, 为模式 RESTART 运行的开始步数。
NWFRQ	——为 0 时, 模式结果的输出依赖于参数 NWTIME 和 NPTIME 的定义值。 ——为非 0 时, 表示模式输出的频率 (即每隔 NWFRQ 时间步模式输出一次结果)。
NWTIME	——NWFRQ 为 0 时, 该参数定义模式的输出步 (最多可定义 100 个输出时间步, 0 表示无定义)。
NPTIME	——同参数 NWTIME。
DTIME	——模式积分时间步长。
NSPINUP	——等于 1 时, 模式海温为年循环的月平均的气候海温; 不等于 1 时, 模式海温为实际观测的月平均海温。
NSSTFRQ	——模式海温更新的时间步长。

由于模式有不同的改进方案，而且不同的模式改进方案源代码程序存放于不同的子目录下，所以，模式在选择不同方案时要选择不同的编译连接说明文件（makefile 文件，不同的方案 makefile 文件均放在目录 t63/makefiles/下）。当编译连接模式源代码程序并生成可执行代码后，才可运行模式。

表 9.3 模式运行控制文件 NMLIST

```
&RUNCTL NEXNUM=0, NEXID=0, NVERS=31, NRESUM=0, NWFRQ=64, NTASKS=1, NSCANS=2,
NCBASE=31669, NTBASE=43200, NSPACE1=8000000, NSPACE2=500000, NSTOP=64, NWRITE=64,
NWPTR=1, NWTIME= 100*0, NWLAG=0, NPLAG=1, NPTR=1, NPTIME= 100*0, NPP=-99, DTIME=1350.,
LINTPP=.FALSE., LTSTAT=.FALSE., LINITRQ=F, LLZA=.TRUE., LWUNIN=.FALSE., LWINIT=F,
LSSDWF=.FALSE., LSCRWF=.FALSE., LSCRLEG=.TRUE., LEXTATT=.TRUE., LSSDFF=.FALSE.,
LSSDGF=.FALSE., LSVPCTL=.FALSE., LMULTSK=.FALSE., LSSDIF=.FALSE., LSTRACE=.FALSE.,
LMTRACE=.FALSE., LCHKW=.FALSE., LCHKR=.FALSE., LDEBUG=.FALSE.,
LFCHECK=10*.FALSE., LGCHECK=10*.FALSE., LSCHECK=10*.FALSE., LBCHECK=10*.FALSE.,
LOCKLTD=.FALSE.
/
&DYNCTL NDIADFR=1, NDIAVFR=1, NTRN=56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 9*63, NLVSTD1=2,
NLVSTD2=5, LSIMDT=.TRUE., LSIMZQ=.TRUE., LVTMPC1=.TRUE., LVTMPC2=.TRUE.,
LUMAX=.TRUE., LDRAG=.TRUE., VCRIT=85., HDAMP=10., ENSTDIF=1., EPS=0.1,
DIFVO=2.E+15, DIFD=5.E+15, DIFT=2.E+15, DIFQ=2.E+15, CDLAG=1209600.
/
&NMICTL NITNINI=2, NDIFFST=8, NVM=5, DTINIT=60., DTDIFF=1350., PHYFIL=11., LINITRQ=F,
LLDIFF=F, LLROSS=.FALSE., LLPROJ=.FALSE., LLZA=.FALSE., LLPSRS=F, LLTEND=F, LLDIAB=F,
LLFILT=F, LLNOFC=.FALSE., LCONOMO=F
/
&PHYSCTL LPHYS=.TRUE., LVDIFF=.TRUE., LKUO=.FALSE., LCOND=T, LQNEGAT=T, LSURF=T,
LSCV=T, LKUO0=T, LESFT=T, LGWDRAG=T, LEVAP=T, LSNRN=T, LRESETP=F, LMASK=.FALSE.,
LZLS=.TRUE., ALONE=999., 31*0., ALONW=999., 31*0., ALATN=999., 31*0., ALATS=999., 31*0.,
NFRMSK=1, NFRMSKP=1, NMASKA=1, NFRZLS=1, NDIAPFR=32, NABLPFR=0, ABLPLL=48., 35.,
20., 0., 2., 270., 0., 300., WSMAX=2.E-2
/
&RADCTL LRAD=T, LDIUR=T, NRADFR=8, NRPART=8, NRINT=4, NRPARTI=2, NRADPFR=4,
NRADPLA=15
/
```



续表

```

&SDSCTL NLENSDS=512, NSDSINT=500, NSDSNXT=0, NSDSNIS=1, NSDSTNS=2, NSDSWNS=501,
NSTART=0, NSTEP=0, NTWODT=2700000, NEPS=100, NSCANS=2, NUMGWF=4, NUMFWF=4,
NFCHR=0, NFCHR0=0, NF1A=41, NF1B=51, NF2A=42, NF2B=52, NF3A=43, NF3B=53, NF4A=44,
NF4B=54, NF5A=45, NF5B=55, NF6A=46, NF6B=56, NF7A=47, NF7B=57, NF8A=48, NF8B=58,
NG1A=61, NG1B=65, NG2A=62, NG2B=66, NG3A=63, NG3B=67, NG4A=64, NG4B=68, NDF1=59,
NDF2=60, NDIAFI=50, NL1A=75, NITD1=95, NITD2=94, NTSTATS=99, IRESTEP=1, NUSP=71,
NUGP=72, NISP=73, NIGP=74, NIVC=78, NHF1=81, NHF2=82, NHF3=83, NHF4=84, NHG1=85,
NHG2=86, NHG3=87, NHG4=88, NSDS=70, HOXID=251658240, HOSVP=285212678,
HOTIME=343597661346, HOTRUN=24471, HONLEV=0, LRES=.FALSE., LRESW=.FALSE., LINITRQ=F,
LACCTEN=.FALSE., LSSDWF=.FALSE., LSCRWF=.FALSE., LSCRLEG=.FALSE., LEXTATT=.TRUE.,
LOPSTYP=F, LRESW1=.FALSE., LLZA=.TRUE.
/
&CLICCTL NSPINUP=1, NSSTFRQ=64
/

```

## 9.4 模式的后处理

模式的后处理包括把模式变量从模式输出的傅里叶系数场变换到模式格点场、模式变量的水平和垂直插值、模式诊断量的计算以及模式物理量的平均计算。

首先，模式后处理程序把模式输出的傅里叶系数场变换到模式格点场，并在垂直方向上由模式的混合坐标变换到等压面坐标。生成两个文件 FORT.17 和 FORT.19。FORT.17 为多层场网格点文件，FORT.19 为地面场非插值文件。其变量由后处理程序的 Namelist 文件 NAMELJJ 中的参数来决定。模式后处理控制文件 NNAMELJJ 的参数意义如下：

- ISTOP —— 模式后处理时次。
- NLATO —— 输出的纬向格点个数。
- NLONO —— 输出的经向格点个数。
- GNLAT —— 输出网格北边界的纬度。
- NTIN —— 谱变换三角形截断的截断波数。
- NTOUT —— 输出谱系数的三角形截断的截断波数。
- NVINT —— 垂直插值代码。
- NMFD —— 多层场的个数。

- NFDML ——多层场的具体代码。  
 NMLV ——多层场的层数。  
 NLVML ——多层场的具体层次。  
 NSFD ——单层场的个数。  
 NFDSL ——单层场的具体代码。  
 NLVSL ——单层场的具体层次  
 N2D ——非插值场的个数。  
 NGPCL ——非插值场的具体代码和层次。

表 9.4 模式后处理控制文件 NAMELJJ

```
&JJEND  istop = 128
/
&POSTIN NLATO=73,NLONO=144,GNLAT=90,NTIN=63,NTOUT=63,NVINT=1,NMFD=7,
NFDML=1,2,3,4,5,7,29,43*0, NMLV=17, NLVML= 1000, 2000, 3000, 5000, 7000, 10000, 15000,
20000, 25000, 30000, 40000, 50000, 60000, 70000, 85000, 92500, 100000, NSFD=2, NFDSL=6,
24, 48*0, NLVSL=100000, 100000, 48*0, N2D=26, NGPCL=6, 1, 11, 2, 12, 3, 13, 4, 14, 5, 15, 6,
16, 7, 18, 8, 19, 9, 23, 10, 36, 11, 37, 12, 38, 13, 39, 14, 40, 15, 43, 16, 48, 17,
49, 18, 50, 19, 51, 20, 52, 21, 53, 22, 54, 23, 56, 24, 67, 25, 68, 26, 52*0,
LDIA=.FALSE., LALC=.TRUE., LMAXPPN=.FALSE., LPOSTINM=.FALSE.
/
```

其中, NAMELJJ 文件中, 参数 NFDML 的具体意义由表 9.5 给出, 而参数 NGPCL 的具体意义由表 9.6 给出。一般而言, 表 9.5 给出的是上文提到的模式输出文件 FORT.17 的变量, 其水平方向的分辨率为 144x73, 垂直方向为 17 层等压面; 表 9.6 给出的是模式输出文件 FORT.19 的变量, 其水平方向的分辨率为 192x96。

表 9.5 多层的后处理场代码

```
1 geopotential
2 temperature
3 u-velocity
4 v-velocity
5 specific humidity
7 vertical velocity
10 vorticity
27 divergence
29 relative humidity
```

表 9.6 单层的后处理场代码 (\*表示从预报开始累积的场)

6	surface pressure
11	surface temperature
12	surface soil wetness
13	snow depth
14	large scale rain*
15	convective rain*
16	snow fall*
18	surface sensible heat flux*
19	surface latent heat flux*
23	pressure at mean sea level
36	cloud cover
37	10 M U
38	10 M V
39	2m temperature
40	2m dew point temperature
43	deep soil wetness
48	surface solar radiation*
49	surface thermal radiation*
50	top solar radiation*
51	top thermal radiation*
52	u-stress*
53	v-stress*
54	evaporation*
56	climatological deep soil wetness
67	latitudinal component of gravity wave stress*
68	meridional component of gravity wave stress*

## 9.5 与海洋模式的耦合

### 9.5.1 耦合过程的设计原理

对于单独的海洋或大气模式，在它们的上边界或下边界，通常都使用观测的大气或海洋变量作为恢复性的边界条件，任何误差都很容易被控制在一定的范围内，因此一般不存在

气候漂移的问题。一旦它们耦合起来，彼此就采用对方模式输出的变量作为边界条件，因此由大气或海洋模式内在的缺陷及耦合方案的不完善所产生的任何误差都可能通过相互作用而被放大，最终使得模式结果明显偏离观测的气候状态，这就是所谓的“气候漂移”。为了抑制耦合模式的气候漂移，人们往往在海气相互作用过程中引入人为的强迫项，例如在 T63 海洋大气耦合模式中，我们就采用日通量距平耦合（DFA）的方法。简单地说，这个方案是让大气和海洋模式彼此交换相对于某种参考状态的距平而不是这些变量本身，有关它的详细介绍可以参看文献[1]。耦合模式的大气和海洋模式分量与单独的大气和海洋模式完全一致，它们的模式原理在其它章节或书籍中已有详细的描述。

## 9.5.2 耦合模式的结构

耦合模式所有的程序、数据及其模式的运行都在目录“Prediction”下，该目录包括如下几个子目录：

(1) **agcm\_src**: T63 大气环流模式的源程序以及 makefile 文件，除了个别程序因为耦合的缘故已被改动，其它的文件均与原始的 T63 大气环流模式的程序完全一致，详细的介绍见本章的前面几节。

(2) **ogcm\_src**: T63 大气环流模式的源程序，除了个别程序因为耦合的缘故已被改动，其它的文件均与原始的海洋环流模式的程序完全一致，详细的介绍见有关海洋模式的说明。

(3) **cgcm\_src**: 耦合模式的子程序，存放着为海气耦合而新增加的子程序，主要有：

**CGCM\_INIT.f** : 耦合模式初始化。

**OGCM\_INIT.f** : 海洋模式初始化。

**OGCM\_CORE.f**: 海洋模式时间积分循环主体。

**SST\_ANOMALY.f**: 计算逐日的 SST 距平。

**FLUX\_ANOMALY.f**: 计算逐日的海表热通量和动量通量（注意：不是距平）。

**WRITE\_NHG5.f**: 把海表温度、热通量和动量通量写到文件“NHG5”。

(4) **inidat**: 大气和海洋模式积分时所需要的初始资料和一些不随时间变化的变量，如地形、气候的 SST（供计算 SST 距平时使用）等。

(5) **rundir**: 模式运行所在的子目录。

(6) **post**: 模式后处理子目录。

由于大气与海洋模式耦合在一起，因此模式中出现了一些与耦合有关的变量。表 9.7 给出了这些变量的名字及其所代表的意义。

表 9.7 模式变量表（仅限于因海气耦合而新增加的变量，其余所有的变量都与单独的海洋或大气模式一致）

公用块名	变量名	意义（单位）
CGCM1	SSTU	单独海洋模式平衡时的多年逐月平均 SST。（℃）
CGCM1	SSTF	由月平均 SSTU 插值到模式当前时刻的 SST。（℃）
CGCM1	SSTA	海洋模式预报的日平均 SST 距平。（℃）
CGCM2	SUU	累加到当前时刻的纬向风应力。（ $N \cdot m^{-2} \cdot s$ ）。
CGCM2	SVV	累加到当前时刻的经向风应力。（ $N \cdot m^{-2} \cdot s$ ）。
CGCM2	HEAT	累加到当前时刻的净向下热通量。（ $W \cdot m^{-2} \cdot s$ ）。

续表

公用块名	变量名	意义 (单位)
CGCM2	SUUP	累加到前一天的纬向风应力。 ( $N \cdot m^{-2} \cdot s$ )。
CGCM2	SVVP	累加到前一天的经向风应力。 ( $N \cdot m^{-2} \cdot s$ )。
CGCM2	HEATP	累加到前一天的净向下热通量。 ( $W \cdot m^{-2} \cdot s$ )。
CGCM2	DU	当前时刻日平均纬向风应力。 ( $N \cdot m^{-2}$ )
CGCM2	DV	当前时刻日平均经向风应力。 ( $N \cdot m^{-2}$ )
CGCM2	DH	当前时刻日平均净向下热通量。 ( $W \cdot m^{-2}$ )
CGCM4	SUMON	观测的多年气候平均纬向风应力。 ( $N \cdot m^{-2}$ )
CGCM4	SVMON	观测的多年气候平均经向风应力。 ( $N \cdot m^{-2}$ )
CGCM4	HEATMON	由单独海洋模式从 Haney 公式诊断出的气候热通量。 ( $W \cdot m^{-2}$ )
CGCM5	ICGCM	耦合模式的海陆指标场。

### 9.5.3 耦合模式的运行和源程序维护

#### 9.5.3.1 模式运行描述

在 UNIX 操作系统下, 在大气模式源程序子目录 “agcm\_src” 下, 运行 make 命令, 就可以通过 makefile 文件对源程序进行优化编译, 生成的可执行文件名为 T63\_AOGCM, 将自动地被放在 “rundir” 子目录下。

当大气模式运行时, 每天调用一次海洋模式, 并与海洋模式通过公用块交换海气之间的通量。

与单独的大气环流模式一样, 在 “rundir” 目录下运行 csh 批处理文件 “run” 或 “restart”, 分别意味着模式从给定的初始状态开始积分或在上一次积分基础上继续积分。模式开始运行后, 单独大气和海洋原有的屏幕输出信息仍旧保留, 也没有增加新的屏幕输出内容。利用这些屏幕输出信息, 可以对模式运行情况进行监控, 包括各种参数的设定、能量守恒情况等。可将其储存在任一给定的文件中, 以便于事后需要时, 对模式的运行过程进行分析检查。

#### 9.5.3.2 模式输入参数

除了控制海洋模式积分时间长度的参数外, 其它所有在单独的海洋和大气模式起作用的参数在耦合模式中仍然起相同的作用。注意, 控制大气模式积分时间长度的参数对整个耦合模式都是有效的。

#### 9.5.3.3 模式结果输出

凡是在单独的大气或海洋模式输出的变量和文件, 在耦合模式中维持原样输出。此外, 耦合模式增加了一个输出文件 “NHG5”, 海气界面上的热通量、动量通量和海表温度 SST 都被保存在这个文件当中。

所有模式结果输出都存放在子目录 “rundir” 下, 除 “NHG5” 是新增加的文件外, 其它文件与单独的大气或海洋模式完全一致。。

#### 9.5.3.4 连续运行步骤

模式启动时初始场的设定，与单独的大气模式完全一致，可分为两种情况：

（1）从给定的初始场启动，在子目录“**rundir**”下运行 csh 文件“**run**”即可。

（2）在以前积分的基础上继续积分，首先在子目录“**rundir**”下运行可执行文件“**restart\_pre**”，然后执行 csh 文件“**run**”即可。（注意：可执行文件“**restart\_pre**”是在子目录“**agcm\_src**”下由文件“**restart\_pre1.f**”及其相应的子程序编译而成。这里“**restart\_pre1.f**”与单独大气模式的“**restart\_pre.f**”不同，因为“**restart\_pre1.f**”能够读入“**NHG5**”再生成“**NRESG5**”）

#### 参考文献

- [1] Zhang X H, Shi G Y, Liu H, and Yu Y Q (Editors). IAP Global Ocean-Atmosphere-Land System Model, Beijing: Science Press, 2000, 252pp.