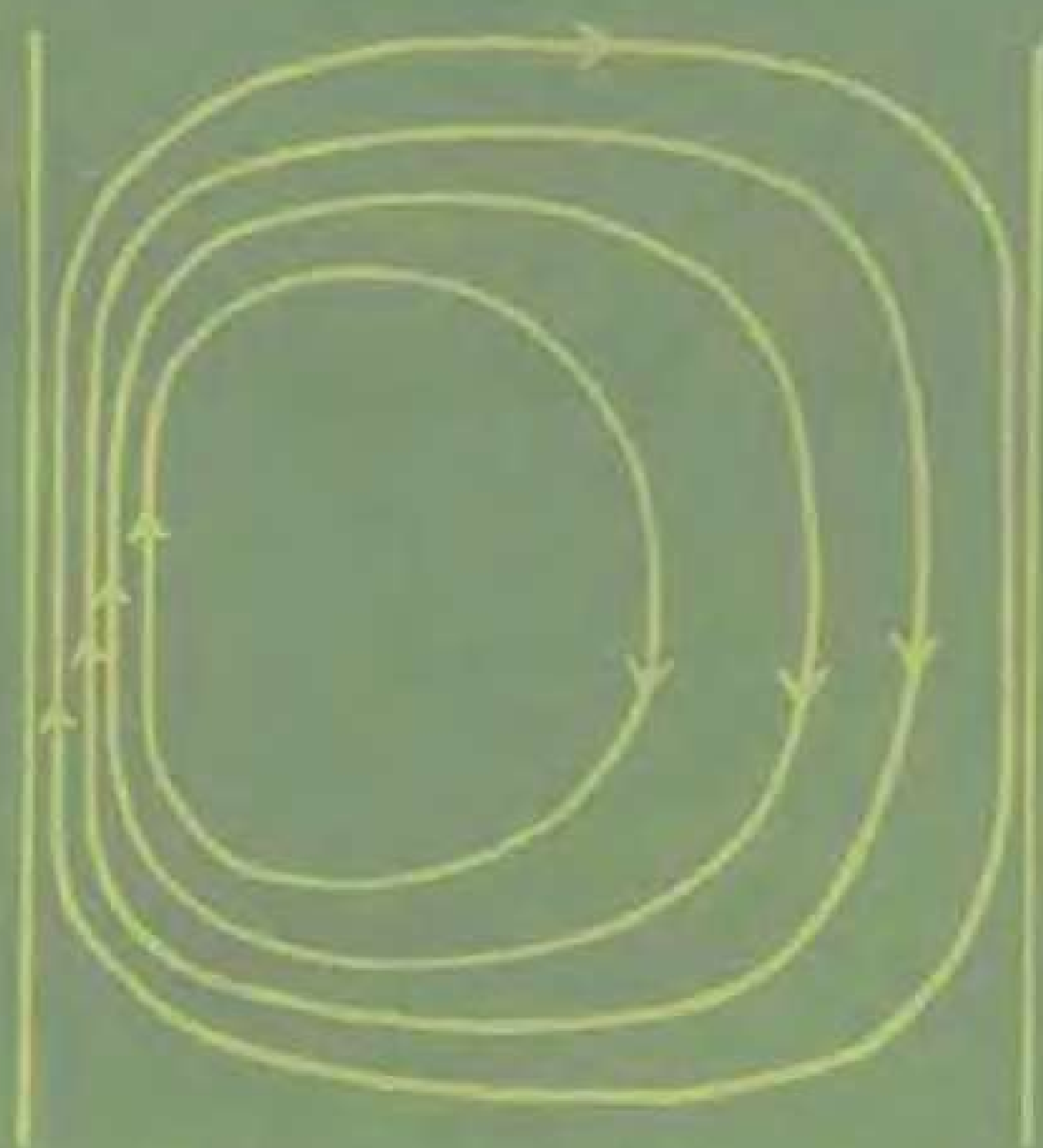


地球物理流体动力学 数学理论导论

S. 弗里德兰德 著



科学出版社

79

12

52.79
5

地球物理流体动力学 数学理论导论

S. 弗里德兰德 著

魏 毅 译

余宙文 校

科 学 出 版 社

1985

内 容 简 介

本书介绍的是地球物理流体动力学的数学理论。作者在简单论述流体动力学的基本概念之后,系统地论述了地球物理流体动力学的数学理论和物理概念,并介绍了有关理论的实验、应用和研究成果。全书共16章。第一至第三章是预备性知识;第四至第九章讨论均匀、旋转流体;第十至第十六章讨论层化、旋转流体。在附录中介绍了分析奇异摄动问题的边界层方法。书中附有习题,不但有助于概念的理解,而且对于如何应用所学理论也颇有启发。

本书可供海洋学、气象学、工程学和应用数学方面的科技工作者和大专院校师生参考。

S. Friedlander

AN INTRODUCTION TO THE MATHEMATICAL THEORY OF GEOPHYSICAL FLUID DYNAMICS

North-Holland Publishing Company, 1980

地球物理流体动力学

数学理论导论

S. 弗里德兰德 著

魏毅 译

余宙文 校

责任编辑 赵徐懿 谭卫藩

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年5月第一版 开本:787×1092 1/32

1985年5月第一次印刷 印张:6 3/8

印数:0001—3,000 字数:141,000

统一书号:13031·2903

本社书号:4053·13—15

定价: 1.50 元

中译本前言

地球物理流体动力学研究的是包括海洋和大气在内的地球上流体的大尺度运动。众所周知,海洋和大气与人类的生活是密切相关的。在人类文明高度发达的今天,海洋和大气更是有待人们进行开拓的广阔的领域。近年来,海洋和大气的和平利用以及它们在国防上的重要性日益受到世界各发达国家的重视,我国也在这些方面投入了大量的人力和物力,并把开发海洋提到了重要的议事日程上。作为一门边缘学科,地球物理流体动力学在较短的时间内发展很快。我国要迎头赶上先进国家,除了需要广大地球物理工作者结合本国实际努力探索外,还应该广泛吸取国外的先进经验。为此,我们翻译了这本地球物理流体动力学数学理论导论。希望它在有关的教学和科研中能具有一定的参考价值。

本书作者 Susan Friedlander 是美国芝加哥的伊利诺斯大学数学系教授。他在本书中侧重论述了地球物理流体动力学的数学理论,具有逻辑性强,简明易懂的特点。由于国内有关地球物理流体动力学的教材甚少,特别是缺少从数学角度系统地研究地球物理流体动力学的专著,我们特意为地球物理学科的科技工作者和大专院校师生翻译了这本书。对原书中的一些错误我们在译文中作了订正并在必要之处加了注解。

译文错误或不当之处,请读者批评指正。

译者

1984年3月于青岛

序 言

本书是根据著者在美国芝加哥的伊利诺斯大学和英国牛津大学教授的研究生课教材编写而成的。其用意不仅是作为海洋学、气象学和工程专业学生的补充读物,而且是为应用数学专业的研究生提供一本基础教材。书中假定读者熟悉流体动力学的基础知识。对渐近分析知识有所了解的读者在阅读本书时会更顺利一些。作为一门课,书中内容的选择在一定程度上反映了作者本人的偏爱。关于非线性旋转流体动力学方面的问题将不在本书中讨论。然而,为了使读者更易于掌握理论地球物理流体动力学的基本内容,书中从原理上对它们作了介绍。

L. Nachbin 教授曾细心审阅了全文; V. Barçilon, F. Busse, E. Isaacson, N. Lebovitz 和 W. Siegmann 等教授对本书提出过宝贵的意见;在写作过程中,作者还得到了牛津大学数学院的支持和美国国家科学基金会 MCS 78-01167 和 MCS 79-01718 的资助。对此一并深表谢意。

最后,作者感谢 Shirley Roper 夫人出色地完成了本书的打字工作。

S. 弗里德兰德

芝加哥伊利诺斯大学

1980年1月

目 录

引论.....	1
第一章 运动方程.....	4
第二章 位势涡度.....	9
Ertel 涡旋定理	10
习题.....	11
第三章 无量纲参数.....	13
习题.....	14
第四章 地转流.....	15
Taylor-Proudman 定理	15
Taylor 流体柱.....	16
在地球物理流体运动中的应用.....	19
β 平面近似.....	20
习题.....	23
第五章 Ekman 层.....	25
Ekman 层的数学模型.....	28
液体圆柱流动.....	31
Ekman 螺线.....	34
Ekman 层中的质量输送.....	35
旋转增强的时间尺度.....	35
茶杯实验.....	38
习题.....	39
第六章 地转型运动.....	41
球体内的地转型运动.....	42

• • •

地转自由区、地转导通区和地转阻塞区·····	44
环流·····	46
习题·····	46
第七章 惯性型运动 ·····	48
λ 是实数且 $ \lambda < 2$ ·····	49
正交性·····	51
平均环流定理·····	52
初值问题·····	53
圆筒中的惯性型运动·····	54
平面波解·····	56
习题·····	57
第八章 Rossby 波 ·····	60
斜截圆筒·····	61
β 平面问题·····	63
平面波解·····	68
习题·····	69
第九章 垂直切变层 ·····	71
$E^{1/3}$ 层·····	71
$E^{1/4}$ 层·····	73
斜截圆筒·····	79
一个大洋模型: Sverdrup 关系·····	83
习题·····	86
第十章 旋转作用与层化作用之间的相似性 ·····	88
习题·····	93
第十一章 旋转、层化流体的正规型运动问题 ·····	96
定常流动·····	99
位势涡度·····	101
习题·····	105

第十二章 旋转、层化流体内的 Rossby 波	108
位势涡度方程.....	108
层化流体中的 Rossby 波.....	110
Rossby 变形半径.....	112
习题.....	113
第十三章 旋转、层化流体内的内波	115
平面波解.....	116
有界区域中的内波.....	118
可变的 $N(z)$	125
海洋学中的研究成果.....	133
习题.....	134
第十四章 旋转、层化流体内的边界层	136
层化流体中的 Ekman 层	138
侧边界层.....	140
习题.....	146
第十五章 旋转、层化流体内的旋转减弱	149
圆筒中的旋转减弱.....	51
随时间的增长.....	156
定常解.....	157
衰减部分.....	158
几点讨论.....	161
习题.....	162
第十六章 斜压不稳定性	165
Eady 模型	166
稳定性判据.....	168
实验模型.....	173
习题.....	174
附录 边界层方法	177

奇异摄动问题.....	177
简单例子.....	179
参考文献	186
索引	191
符号表	193

引 论

许多世纪以来,为了预报周围环境中水和大气运动,人们在了解海洋和大气的属性方面做了种种尝试。在古代,这方面的知识几乎完全来源于对实际观察的记载。然而,在上个世纪中,用来研究这一重要科学分支的理论、数值方法和实验技术等各方面都得到了很大的发展。

广义地说,地球物理流体动力学研究的是地球上流体的运动。本书的宗旨则是从数学上描述其中的一类现象。在我们将研究的问题中,运动的长度尺度是足够大的,以致地球的旋转对流体的运动有显著的影响。因此,我们不准备探讨许多重要的小尺度问题(如与表面张力有关的问题),只讨论描述海洋和大气运动基本模式的数学问题。由于在这些问题中常常出现的偏微分方程具有不寻常的、重要的性质,因此我们的问题不仅与地球物理学有关,而且对数学家也颇有吸引力。

在本书中,我们通过介绍求解旋转流体运动的数学理论来研究地球物理流体动力学的有关理论问题。在后面的一些章节中讨论了海洋或大气特有的现象,即重力作用下非均匀流体的运动,这种问题显然也属于地球物理流体动力学的范畴。所以,本书前半部讨论旋转的均匀流体,而后半部则处理同时受旋转和层化作用的流体运动。

我们循序渐进地研究所涉及的数学理论。首先考虑描述最简单的物理现象的数学方程,即均匀、无粘、旋转流体偏离平衡状态时的小扰动方程。接着,我们在问题的数学模型中进一步引入有关的物理因素,从而在原来的基础上逐步增加

数学问题的复杂性。我们将在合适的章节中介绍演示旋转流体特征现象的实验室实验。由于受内容范围的限制，我们没有讨论数学在地球物理学中许多应用的细节。但是，我们将提到有关的一些问题，并对三个具有代表性的例子进行较为深入的讨论。在海洋方面的例子中，用边界层理论说明大西洋西部湾流的存在。在气象方面我们将指出：与大气受热纬向变化有关的不稳定性对气旋波的产生有着决定性的作用。我们还比较详细地介绍了天体物理学方面的一个应用问题，即合理地提出一个偏微分方程和适当的边界条件，用它们所构成的数学问题的解，阐明太阳旋转减弱这一争论已久的难题。

为了使初学者了解问题的本质，本书详细地介绍了建立每个数学模型的基本方法和过程。不仅如此，本书还为想深入探讨个别论题的读者提供了相当广泛的参考文献。在参考文献中不仅包括某些领域里新近的发展，而且包括一些基本教材、早期开创性的论文以及近来对已有成果的概括。我们列出下列基本教材供选择使用。学生们会发现，在学习地球物理流体动力学时，它们都是很好的参考书。

流体动力学	Batchelor	[5]
	Lamb	[40]
旋转流体	Greenspan	[27]
	Carrier	[8]
分层流体	Howard	[33]
	Yih	[74]
地球物理流体动力学	Pedlosky	[51], [52]
海洋学	Kamarkovich	[37]
	Krauss	[39]
	Pillips	[59]

在附录中我们简单介绍了边界层方法在研究奇异摄动问题中的应用。关于渐近分析这一分支学科的详细说明，读者可参阅文献[60]和[70]。

第一章 运动方程

我们要研究的问题之特征是地球旋转对流体运动具有显著的作用。为了了解地球旋转在地球物理学中的意义，我们来考察下列数据

$$R \sim 6 \times 10^8 \text{ 厘米} \quad (\text{地球半径}),$$

$$\Omega \sim 7.3 \times 10^{-5} \text{ 秒}^{-1} \quad (\text{角速度}).$$

由此可知，赤道地区的物体相对于地球转轴的旋转线速度之量级为 $4 \times 10^4 \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-1}$ 。这样的速度与大气中典型风速相比是非常大的（例如，飓风速度的量级是 $10^4 \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-1}$ ）。同时，由地球旋转产生的涡度（涡度是度量流体运动中流体元自转程度的物理概念）比起海洋或大气中典型的大尺度运动的涡度也是非常大的。因而，当运动的水平长度尺度可与地球半径相比时，必须考虑地球旋转的影响。

研究旋转流体的运动时，用旋转坐标系表示运动方程往往是方便的。下面，我们来简要地考察一下旋转流体的二维运动。若一平面以不变的角速度 Ω 绕 \hat{k} 轴旋转，令 $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ 表示惯性参照系的笛卡儿单位矢量， $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ 表示旋转参照系的笛卡儿单位矢量。

在 t 时刻这些单位矢量满足下列关系

$$\hat{i}' = \hat{i} \cos \Omega t + \hat{j} \sin \Omega t, \quad (1.1)$$

$$\hat{j}' = -\hat{i} \sin \Omega t + \hat{j} \cos \Omega t. \quad (1.2)$$

令 d/dt 表示跟随质点的微商^{*}， A 为一矢量并可记作

* 绝对微商。——译者注

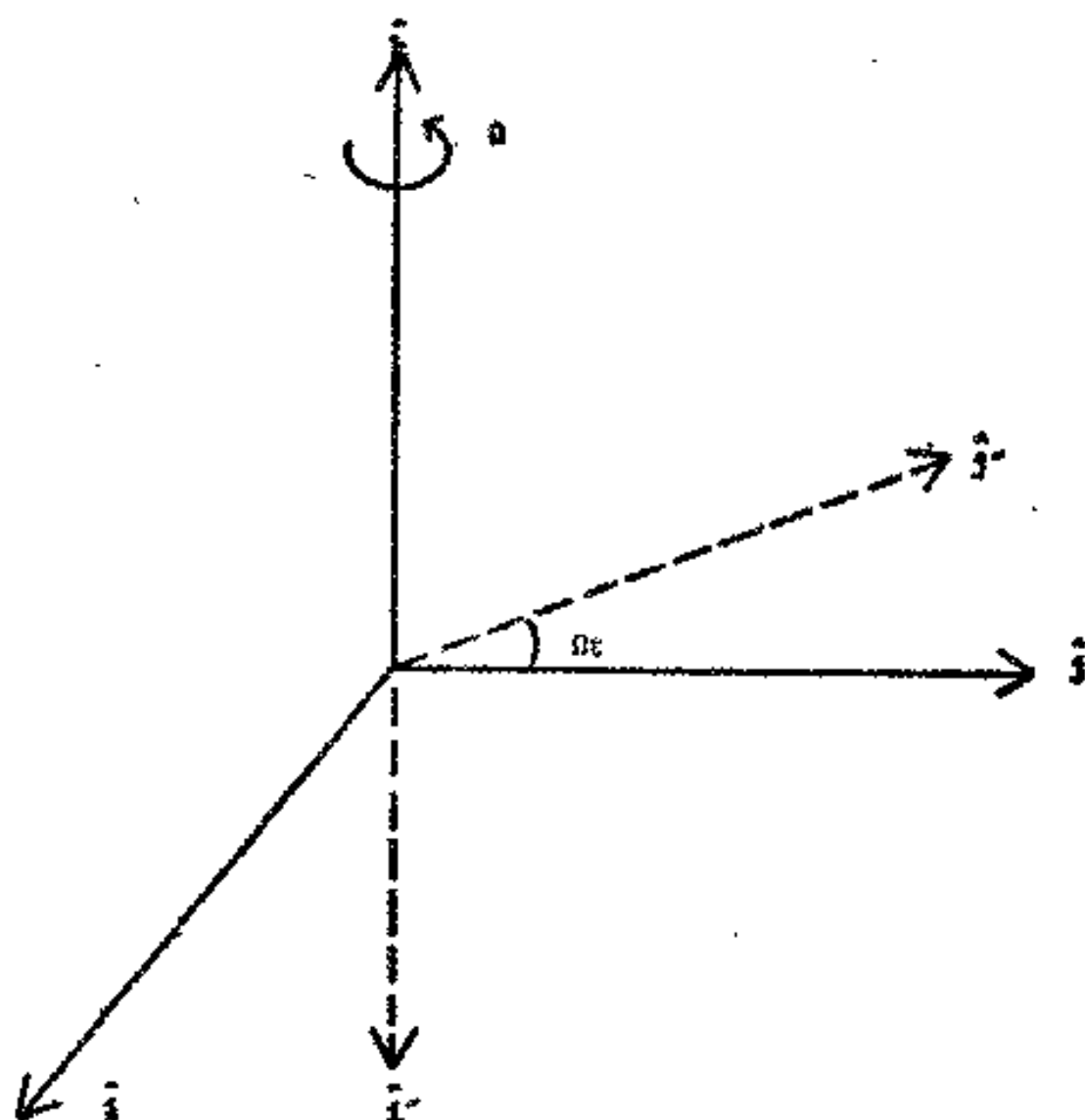


图1 惯性坐标系和旋转坐标系

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k} && \text{(惯性参照系)} \\ &= A'_1 \hat{i}' + A'_2 \hat{j}' + A'_3 \hat{k}' && \text{(旋转参照系)。} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA'_1}{dt} \hat{i}' + \frac{dA'_2}{dt} \hat{j}' + A'_1 \frac{d\hat{i}'}{dt} + A'_2 \frac{d\hat{j}'}{dt} \\ &= \frac{dA'_1}{dt} \hat{i}' + \frac{dA'_2}{dt} \hat{j}' + \Omega(A'_1 \hat{j}' - A'_2 \hat{i}'). \end{aligned}$$

在得到后一等式时利用了(1.1)和(1.2)式。特别地,若取 $\mathbf{A} = \mathbf{r}$, \mathbf{r} 是由共同坐标系原点量起的质点的矢量半径,便有

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt_1} = \frac{d\mathbf{r}}{dt_2} + \Omega \hat{k} \times \mathbf{r}.$$

其中 $\frac{d\mathbf{r}}{dt_I} = \mathbf{q}_I$ 是质点在惯性参照系中的速度, $\frac{d\mathbf{r}}{dt_R} = \mathbf{q}_R$ 是质点在旋转参照系中的速度(注意,若质点固定在旋转坐标系上,则 $\mathbf{q}_R = 0$, $\mathbf{q}_I = \Omega \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}$)。

现令 $\mathbf{A} = \mathbf{q}_I$, 可得两个参照系中加速度的关系

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_I}{dt_I} &= \frac{d}{dt_R} [\mathbf{q}_R + \Omega \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}] + \Omega \hat{\mathbf{k}} \times [\mathbf{q}_R + \Omega \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}] \\ &= \frac{d\mathbf{q}_R}{dt_R} + 2\Omega \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}_R + \Omega \hat{\mathbf{k}} \times (\Omega \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

在后一等式右边,第一项是旋转坐标系中的加速度;第二项称为科氏加速度;第三项称为向心加速度*。稍做推导,我们可以用一般曲线坐标表示(1.3)式的一般形式。

下面,让我们回忆一下支配粘性流体运动的主要方程,即 Navier-Stokes 方程和连续方程。在惯性参照系中,它们可由下列两个矢量方程表示

$$\frac{d\rho}{dt_I} + \rho \nabla \cdot \mathbf{q}_I = 0,$$

(这是质量守恒方程。它给出了下述事实的数学描述,即在没有任何源或汇的情况下,不论各个流体质点如何运动,流体的总质量保持不变。)

$$\rho \frac{d\mathbf{q}_I}{dt_I} = -\nabla P + \rho \nabla G + \mu \nabla^2 \mathbf{q}_I + \frac{\mu}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{q}_I.$$

[这是动量守恒方程。它是牛顿运动定律(力 = 质量 × 加速度)在流体系统上运用的结果]。

由此,我们可以在匀速旋转坐标系中将 Navier-Stokes 方程和连续方程表示为

$$\frac{d\rho}{dt_R} + \rho \nabla \cdot \mathbf{q}_R = 0, \quad (1.4)$$

* 原书误为离心加速度。——译者注

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{d\mathbf{q}_R}{dt_R} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}_R \right] \\ &= -\nabla P + \rho \nabla \left(G + \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right) + \mu \nabla^2 \mathbf{q}_R \\ &+ \frac{\mu}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{q}_R. \end{aligned} \quad (1.5)$$

〔这里要提醒读者注意，在惯性坐标系和旋转坐标系中，只有矢量的时间导数是不同的，标量的时间导数以及各量的空间导数(如梯度、散度)是相同的。〕上面两式中各符号的意义如下。

ρ = 密度，

P = 压强，

G = 地球引力势，

μ = 动力学粘性系数。

我们看到，离心力可用某个标量的梯度表示，因此它仅对有效引力作微小的修正。科氏力则不然。我们将说明科氏力在决定运动方程的性质方面起着相当重要的作用。为简单起见，去掉下标 R 。在下面各章里我们将利用(1.4)和(1.5)式构成的方程组，对地球物理流体动力学的问题进行研究。此方程组支配着粘性流体在以匀角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动的旋转坐标系中的运动。

为了得到封闭方程组，我们必须在上述方程中加上状态方程

$$\rho = \rho(P, T) \quad (\text{其中 } T \text{ 是温度})$$

以及由热力学第一定律导出的关于 T 的方程。在本书的前半部，仅考虑均匀流体的简单情况，即 ρ 和 T 是常量。这当然会导致方程(1.4)和(1.5)的部分简化。在后面的章节里，我们引进流体层化的作用，这对地球物理学的某些问题将产生重

要的影响。然而,考虑到所研究问题的类型,本书不采用普通的状态方程和热力学方程,而是利用最简单而合理的关系来近似表示流体(如水或空气)的这些方程。我们假设密度与温度或线性关系

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \alpha (T - T_0), \quad (1.6)$$

并设内能 e 正比于温度: $e = cT$ 。从物理上讨论可知(在流体内无热源时), T 满足方程

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{c} \nabla^2 T + \text{非线性项}, \quad (1.7)$$

其中 k 是热扩散系数。注意,在采用简单关系(1.6)和(1.7)时,忽略了流体的某些物理性质,但保留了对多数地球物理问题有意义的流体层化的特征。

第二章 位 势 涡 度

前面已经提到,在地球物理动力学中,旋转是决定性的特征,因而,涡度场 \mathbf{B} 当然地反映了流场极重要的性质 ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{q}$)。对(1.5)式取旋度可得到涡度方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q}) + 2\nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{q}) \\ = -\nabla \times \frac{\nabla P}{\rho} + \mu \nabla \times \frac{\nabla^2 \mathbf{q}}{\rho} \end{aligned} \quad (2.1)$$

(其中利用了 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla$)。再由 $\nabla \times (\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q}) = \nabla \times \left(\mathbf{B} \times \mathbf{q} + \nabla \frac{q^2}{2} \right)$ 及 $\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = 0$, 则(2.1)式可化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) + \nabla \times [(\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) \times \mathbf{q}] \\ = \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} + \mu \nabla \times \frac{\nabla^2 \mathbf{q}}{\rho} \end{aligned}$$

上式还可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) + (\mathbf{q} \cdot \nabla)(\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) \\ + (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) \nabla \cdot \mathbf{q} - (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) \cdot \nabla \mathbf{q} \\ = \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} + \mu \nabla \times \frac{\nabla^2 \mathbf{q}}{\rho} \end{aligned}$$

由(1.4)式可知, $\nabla \cdot \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ 。故涡度方程可写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}}{\rho} \right) - \left(\frac{\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}}{\rho} \right) \cdot \nabla \mathbf{q}$$

$$= \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^3} + \frac{\mu}{\rho} \nabla \times \frac{\nabla^2 \mathbf{q}}{\rho} \quad (2.2)$$

考虑无粘流体, 则 $\mu = 0$ 。再对满足 $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ 的任意标量 λ (即 λ 在运动的流体质点上守恒), 取(2.2)式与 $\nabla \lambda$ 的标积, 则有

$$\begin{aligned} \nabla \lambda \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}}{\rho} \right) &= \nabla \lambda \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}}{\rho} \right) \cdot \nabla \mathbf{q} \right] \\ &= \nabla \lambda \cdot \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^3}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

利用 $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \lambda = 0$, 经过适当的运算, 由(2.3)式可导出

$$\frac{d}{dt} \left[\nabla \lambda \cdot \left(\frac{\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}}{\rho} \right) \right] = \nabla \lambda \cdot \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^3}. \quad (2.4)$$

方程(2.4)称为 Ertel 涡旋方程。

Ertel 涡旋定理

若选择 λ 使

$$\nabla \lambda \cdot (\nabla \rho \times \nabla P) = 0, \text{ 即 } \lambda = \lambda(\rho, P), \text{ 那么,}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\nabla \lambda \cdot \left(\frac{\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}}{\rho} \right) \right] = 0. \quad (2.5)$$

也就是说, 称为位势涡度的量

$$\pi = \frac{\nabla \lambda}{\rho} \cdot (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega})$$

在运动的流体质点上守恒。我们知道, 在无粘的非旋转均匀流体中, 涡度是守恒的。现在, 对于无粘的旋转层化流体得到了相应的守恒量 π 的表达式。请注意, 导出(2.4)式时并不要

求质量守恒方程中 $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ 。因此, Ertel 涡旋定理也适用于可压缩流体。但是,在许多地球物理问题中,海洋和大气的可压缩性是可以略去不计的,即认为 $\frac{d\rho}{dt} = 0$ 。由于密度满足 $\nabla \rho \cdot (\nabla \rho \times \nabla P) = 0$, 所以在不可压缩流体中选择密度场 ρ 本身作为标量 λ 是合适的。此时 Ertel 涡旋定理变为

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\nabla \rho}{\rho} (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) \right] = 0。$$

另一特例是密度仅是压强的函数的正压流体, 即 $\rho = \rho(P)$ 。在这种情况下 $\nabla \rho \times \nabla P$ 仍然等于零, 故 Ertel 涡旋定理对任何守恒的标量 λ 均成立。

若 ρ 是常数(即流体是均匀的), 则 $\nabla \rho = 0$ 。这样, 对无粘流体, 方程 (2.2) 化为

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) - (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) \cdot \nabla \mathbf{q} = 0。 \quad (2.6)$$

由 $\mathbf{q}_{\text{惯性}} = \mathbf{q} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ 可知, $\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}$ 是惯性坐标系中的涡度。故方程 (2.6) 表明, 在无粘的均匀流体中, 若初始涡度为零, 则涡度将永远保持为零。这个结论是大家熟悉的。

我们将在以后的一些章节中应用 Ertel 涡旋定理。例如, 我们将证明对于深度为 $h(x, y)$ 的均匀流体, 物理量

$$\Pi = \frac{\hat{k}}{h(x, y)} \cdot (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega})$$

是守恒的。

习 题

- 2.1) 地球的旋转几乎是, 但又不完全是不变的, 存在微小的“振动”。若认为 $\mathbf{\Omega}$ 是时间的函数, 对位势涡度方程将

产生什么影响？导出地转角速度为 $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega(t)$ 时的无粘不可压缩流体的修正位势涡度方程，其中 $\varepsilon \ll 1$ 。

- 2.2) 确定均匀的粘性旋转流体满足的位势涡度方程。解释粘性对于涡度的产生所起的作用。

第三章 无量纲参数

我们在前面强调过，本书将讨论受旋转影响较大的流体运动。因此，为了估计在动量方程中科氏力相对重要时各物理量的大小，可将运动方程改写成另外的形式。为简单起见，我们首先对均匀、旋转流体的运动进行尺度分析。在后面几章中再加上密度层化的影响。

令 L ， Ω^{-1} 和 U 分别为运动的特征长度、特征时间和特征相对速度，并引入无量纲量

$$\mathbf{r} = L\mathbf{r}^*, \quad t = \frac{1}{\Omega} t^*, \quad \mathbf{q} = U\mathbf{q}^*, \quad P = \rho\Omega UL P^*.$$

在密度为常数时，方程 (1.4) 和 (1.5) 简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (3.1)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} + 2\Omega \times \mathbf{q} \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 P 是包括 $G + \frac{\Omega^2 r^2}{2}$ 在内的简化压强。代入无量纲量后得到

$$\begin{aligned} U\Omega \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L} (\mathbf{q}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{q}^* + U\Omega \cdot 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}^* \\ = -\Omega U \nabla^* P^* + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{U}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{q}^* \end{aligned}$$

($\hat{\mathbf{k}}$ 是旋转轴方向的单位矢量)。因此有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial t} + \varepsilon(\mathbf{q}^* \cdot \nabla^*)\mathbf{q}^* + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q}^* \\ = -\nabla^* P^* + E\nabla^{*2}\mathbf{q}^*, \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中

$$\varepsilon = \frac{U}{\Omega L} \left(\frac{\text{对流加速度}}{\text{科氏加速度}} \right), \quad \text{称为 Rossby 数;}$$

$$E = \frac{\nu}{\Omega L^2} \left(\frac{\text{粘性力}}{\text{科氏力}} \right), \quad \text{称为 Ekman 数。}$$

($\nu = \frac{\mu}{\rho}$, 为运动学粘性系数)。

在多数地球物理问题中, ε 和 E 都很小。小 Rossby 数表示流体几乎与地球一起作刚性旋转, 其偏差不大, 且科氏力在大部分区域远比非线性项重要。小 Ekman 数则意味着科氏力比粘性力大得多, 故后者一般忽略不计。我们即将介绍的一个简单实验是将茶杯里的水搅动, 实验时所用的参数为

$$L = 5 \text{ 厘米}, \quad \Omega = 2 \text{ 秒}^{-1}, \quad \nu = 0.01 \text{ 厘米}^2 \cdot \text{秒}^{-1},$$

因而 $E = 2 \times 10^{-4}$ 。

在海洋学中, 由于湍流粘性起主导作用, 对粘性系数进行估计是比较困难的。尽管如此, 充分大的尺度仍可保证 E 为小量。

习 题

- 3.1) a) 说明 Rossby 数表征对流力与科氏力之比。
b) 说明 Ekman 数表征粘性力与科氏力之比。
- 3.2) 设旋转流体中, 在特征量为 S 的表面应力作用下产生运动。导出适当的无量纲量并确定有关的无量纲参数。

第四章 地 转 流

如果略去方程(3.3)中带有 ε 或 E 的项,并假定流动是定常的 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), 我们便可得到方程

$$2\hat{k} \times \mathbf{q} = -\nabla P \quad (4.1)$$

(为方便起见将原式中星号略去), 而方程(3.1)不变, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (4.2)$$

由此可知, 动量方程化为科氏力和压强梯度力相互平衡的方程。一般称这样的平衡为地转平衡, 它是旋转流体流动的基本特征之一。当然, (4.1) 式是做了较大的物理简化后得出的, 但它很好地体现了旋转流体的基本属性。我们将以地转流为出发点, 逐步研究更复杂和更符合实际的流动。

Taylor-Proudman 定 理

假定流动处于地转平衡, 则可用方程(4.1)和(4.2)来描述运动规律。对(4.1)式取旋度并利用(4.2)式, 可得

$$(\hat{k} \cdot \nabla) \mathbf{q} = 0. \quad (4.3)$$

在笛卡儿坐标系中, 取 z 为与旋转轴平行的坐标, 则(4.3)式化为

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = 0,$$

即速度场不随 z 变化。我们把地转流的这一性质称为 Taylor-Proudman 定理。这是由于两位杰出的流体动力学专家 G. I. Taylor^[65] 和 J. Proudman^[66] 在本世纪初对这一现象作了许多

根本性的研究工作,得出很多重要的结果。

在笛卡儿坐标系中 ($\mathbf{q} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$) 将(4.1)式写成分量形式

$$\begin{cases} 2v = \frac{\partial P}{\partial x} \\ -2u = \frac{\partial P}{\partial y}, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (4.5)$$

方程(4.4)的矢量形式为

$$\mathbf{q}_H = \frac{1}{2} \mathbf{k} \times \nabla P, \text{ 其中 } \mathbf{q}_H = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}.$$

故速度场与垂直坐标 z 无关,水平速度 \mathbf{q}_H 由压强 $P(x, y)$ 的导数确定,这与我们前面得到的结论一致。但是,因为任意一个函数 $P(x, y)$ 都能满足地转平衡关系,所以单从地转方程并不能唯一地确定流动。因此我们必须引入关于 $P(x, y)$ 的方程(见第五章),以便确定哪一种二维压强分布 $P(x, y)$ 能描述特定条件下的流动。一旦确定了 $P(x, y)$, 由地转关系(4.4)即可确定水平速度。

Taylor 流体柱

Taylor 柱是一种重要的、很容易观察到的现象,它的产生可用 Taylor-Proudman 定理来解释。下面介绍实验过程。

在一封闭的、底部放有一金属小球的透明刚体圆筒中,注满含有悬浮小颗粒(如铝粉)的水,然后把圆筒置于匀速转动的转台上。经过充分长的时间后,筒中的水便作刚性旋转。这时,在不扰动流体的情况下使小球相对流体以速度 \mathbf{U} 缓慢地移动(这可利用磁化的小球和磁铁来进行)。实验时选择各

参数 Ω , ν , U 和 L , 使 $E \ll 1$ 及 $\epsilon \ll 1$, 以便产生地转流动。当用一束光照射圆筒时, 我们可以观察到流体内悬浮小颗粒的运动。其结果是, 在小球之上的整个流体柱如同附在球上一般随之运动。这一现象便是所谓的 Taylor 柱。

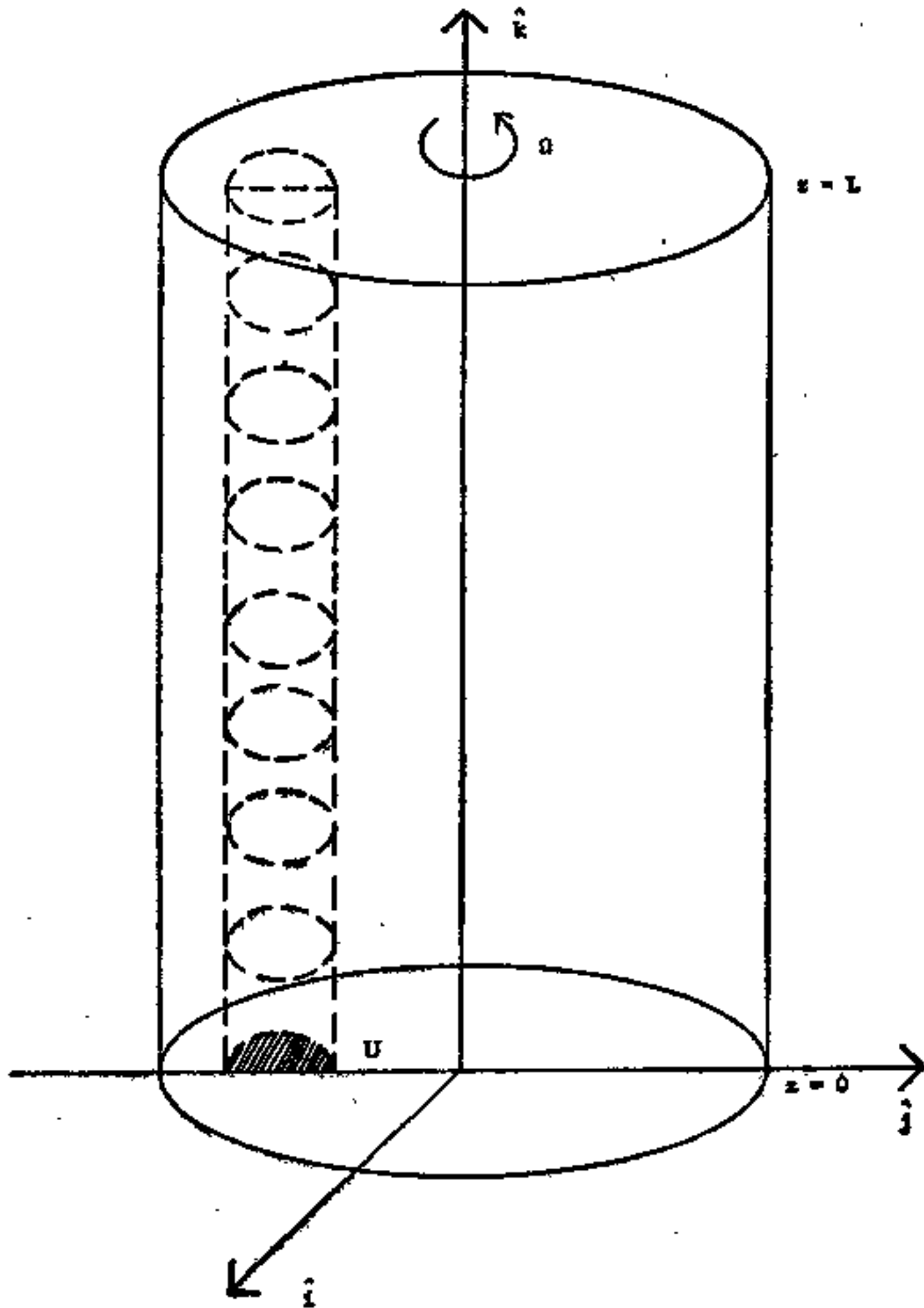


图2 Taylor 水柱

Taylor 水柱产生的原因可解释如下：由于圆筒顶盖是刚性的并与 \hat{k} 垂直，所以上表面处的流体的法向速度 w 等于零。若小球上方的流体不随小球一起运动，则必定有水流越过小球，从而有非零的速度分量 w 。但是由 Taylor-Proudman 定理可知， w 不随坐标 z 变化。所以， w 在 $z = L$ 处为零而在 $z = z_0$ 处不为零是不可能的。这就是说，球的上面不会有流体流过。在任意深度 z 都可进行同样的分析，其结果就是小球上面的流体柱将随球一道运动（参见图 2）。

如将实验稍加改变，又可看到一些有趣的现象。若沿着筒底给小球一初速度而任其自由运动，则 (a) 当流体不旋转时 ($\Omega = 0$)，球作直线运动；(b) 当流体低速旋转且 ε 未能小到地转平衡所需的量级时，球将受旋转的影响而偏离直线

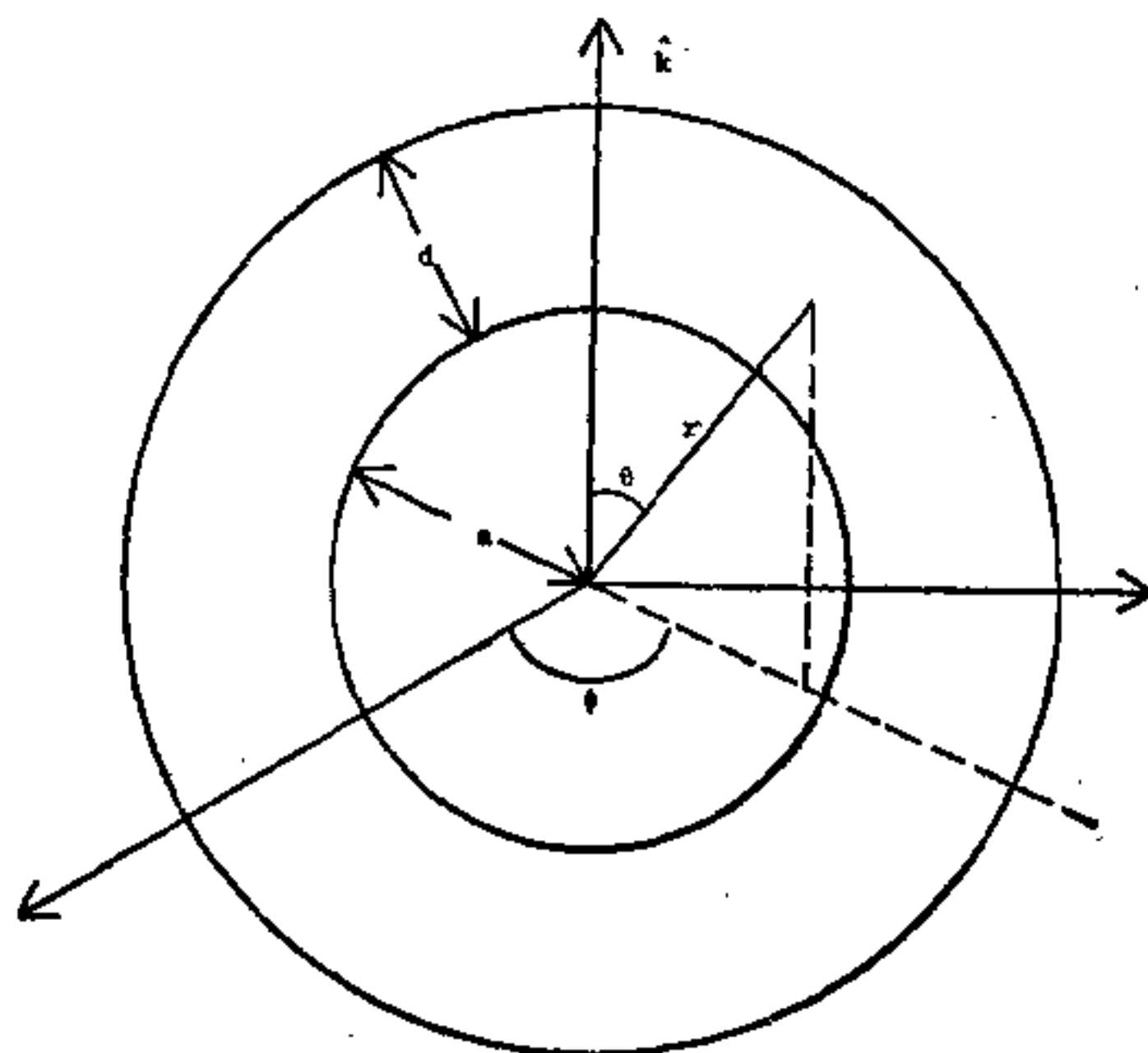


图3 球坐标系

运动；(c)当 Q 大到使 $\varepsilon \ll 1$ 时，流体运动基本上是二维的，球又作直线运动。不过这时它携带着它上方的流体柱一同运动。我们将发现，在没有外力使球继续运动的情况下，它的速度减小得很快。这是因为球的能量转移到与它同速运动的流体柱里去了。

由此可知，Taylor 柱很好地演示了旋转流动的二维特征。虽然地转方程很简单，它们却使我们理解了一种重要的而且初看之下出乎意料的流体运动现象。甚至还有人提出（见 Hide^[29]），用 Taylor 柱也许能解释木星上的“红斑”现象。不过我们应该知道这样的解释还是有争议的。人们已经提出了其他的解释。Maxworthy 提出：木星上的“红斑”、“白卵”以及其他特征，都是在强大的垂直切应力存在时，由非线性扩散波的涡旋分布造成的。

在地球物理流体运动中的应用

前面我们考虑绕垂直轴旋转的水平面上的流体，导出了地转平衡方程 (4.4)。对于地球物理问题，讨论球壳上（或部分球壳上，如海洋）的流体运动更接近于实际的情况。因此，我们在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中讨论方程 (4.1) 的分量形式，其中 θ 为纬度。我们得到下面的结果。

$$\hat{k} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta, \quad \mathbf{q} = \omega \hat{r} + v \hat{\theta} + u \hat{\phi}.$$

将引力直接表示为 $\nabla G = -g \hat{r}$ ，则分量方程为

$$-2u \sin \theta = -\frac{\partial P}{\partial r} - g, \quad (4.6)$$

$$-2u \cos \theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad (4.7)$$

$$2v \cos \theta + 2\omega \sin \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi}. \quad (4.8)$$

在海洋学和气象学中，可以合理地假定流体被限制在薄层球壳中运动，于是有 $\frac{d}{a} \ll 1$ （见图3）。由散度方程可知 $\frac{w}{v} \ll 1$ 。因此，除了 $\cos\theta \rightarrow 0$ 的赤道地区，方程(4.8)中的 $w \sin\theta$ 相对于 $v \cos\theta$ 是可以忽略的。因为流体层的厚度很薄，我们还可用球半径 a 来近似表示坐标 r 。经过这样的简化，(4.7)和(4.8)式取如下形式

$$2u \cos\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad (4.9)$$

$$-2v \cos\theta = \frac{1}{a \sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \phi}. \quad (4.10)$$

在多数问题中，水平速度项 $-2u \sin\theta$ 比地球引力项 g 小得多。故方程(4.6)可近似写为

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -g_0. \quad (4.11)$$

方程(4.9)，(4.10)和(4.11)称为球壳上的地转近似。

β 平面 近 似

球壳上地转平衡关系式与笛卡儿坐标系中相应的关系式(4.4)显然是相似的。实际上，当我们利用所谓“β平面近似”时，上述两组关系式的确是严格对应的。我们来考虑以余纬度 θ_0 为中心的大洋或一部分大气。假定在所研究的问题中纬度方向上的尺度很小，可以忽略地球曲率的影响，并可用以 θ_0 为中心的切平面来近似代替相应的一部分球面（见图4）。定义局部坐标

$$y = a(\theta_0 - \theta), \quad x = a(\phi - \phi_0) \sin\theta_0, \quad z = r - a_0.$$

记 $2 \cos\theta = f$ （称为科氏参量），并将 f 用泰勒级数表示为

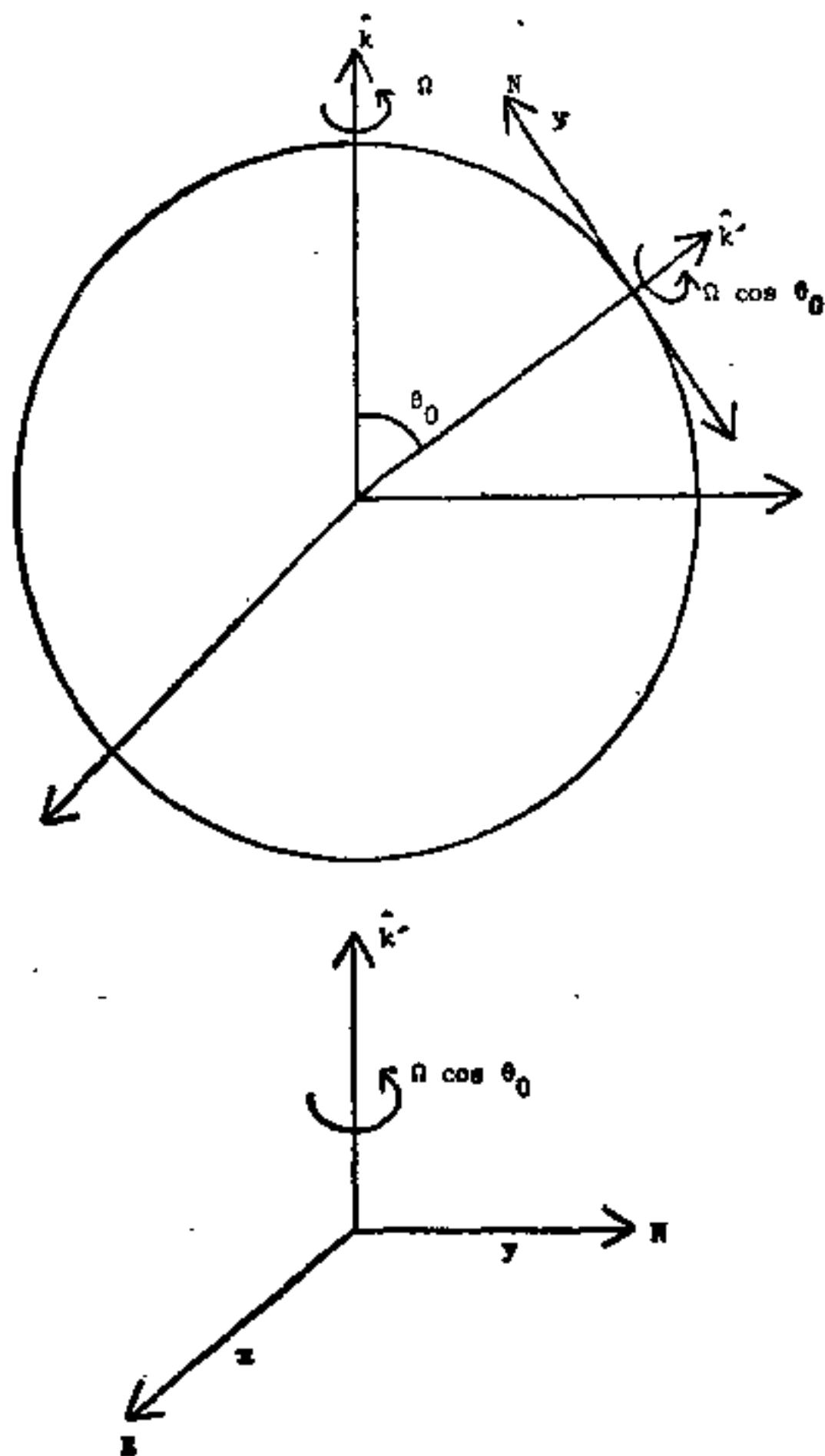


图4 以 θ_0 为中心的切平面

$$f = 2\cos\theta_0 - 2\sin\theta_0[\theta - \theta_0] + \dots$$

纬度变化不大时, f 可以近似表示为

$$f = f_0 + \beta y,$$

其中 $f_0 = 2\cos\theta_0$, $\beta = \frac{2\sin\theta_0}{a}$ 。于是,地转方程简化为

$$fu = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (4.12)$$

$$fv = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (4.13)$$

$$-g = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (4.14)$$

这样一来，我们便可利用绕 \hat{k}' 轴[对应于点 (θ_0, ϕ_0) 处的 \hat{r} 轴]旋转的平面上的流动，近似地研究海洋中的流动。但此时平面转动的角速度不再是常数，而是与 y 成线性关系的变量（注意：在此平面上 y 增加的方向是朝北的）。在后面的章节里，我们将详细讨论 f 的纬向变化对旋转流体流动特征的影响。其结果是很重要的。我们还将由此来解释所观察到的海洋现象。

方程 (4.12), (4.13) 和 (4.14) 显然又一次表明 u, v 与 z 无关。这里 z 是局部垂直坐标。但是，根据上述方程与散度方程

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{f} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

或

$$-\frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.15)$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 现在不为零，故得不到 $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ 的结论。换句话说，在科氏参量 f 的纬向变化近似地表为 $f = f_0 + \beta y$ 的 β 平面上，Taylor-Proudman 定理不再成立。此时 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 与 β 同量级，且有

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\beta}{f_0} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.16)$$

最后,由方程(4.12)和(4.13)可得

$$u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \text{ 即 } \mathbf{q}_H \cdot \nabla P = 0,$$

其中 \mathbf{q}_H 为水平速度。上式表明水平速度之流线与等压线平行。高空的大气运动常常可以被合理而近似地假设为满足地转平衡,所以,高空天气图上的等压线便与大气流动的流线相对应。

总的说来,当压强梯度的水平分量与科氏力近似平衡,且摩擦效应仅局限于薄的边界层内时,便产生地转运动。为了研究海洋和大气的大尺度地转运动,建议读者参阅 N. Phillips 的论文^[53]。他分别研究了两种类型的地转运动。其一是运动的水平长度尺度 L 小于地球半径;其二是 L 与地球半径同量级。第一类运动被成功地用来描述波动的稳定性、能量的垂直输送和墨西哥湾流的弯曲。第二类运动具有十分不同的性质,可用来分析海洋内部的缓慢运动。

习 题

- 4.1) 我们在正文中讨论了强旋转流动的二维运动特征,指出:具有一初速度的小球可在强旋转流体中作直线运动。但在角速度较小时,小球的运动则要受旋转的影响而发生偏转。试考虑下面几个数学问题,从中解释上述现象。

考虑一个以 $z = 0$ 和 $z = 1$ 处的水平平板为边界的 Taylor 水柱,忽略 x 和 y 方向上边界的影响。

- a) 证明作直线运动的 Taylor 水柱中的流体速度满足

线性地转方程。

b) 对满足非线性动量方程 Oseen 近似的速度, 确定量级为 $O(\varepsilon)$ 的校正项。

- 4.2) 考虑描述旋转流体运动的完整的 Navier-Stokes 方程。若想用它来解释 Taylor 水柱现象, 必须作何物理假设? 并证明在这些假设下,

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0。$$

- 4.3) 考虑在 β 平面中均匀、旋转流体运动满足的位涡方程

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}} + f) = 0。$$

假定 β 很小, 试给出此方程的线性近似形式, 并导出

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0。$$

第五章 Ekman 层

在前面的章节里,我们研究了旋转流体的基本状态,即地转平衡。由方程(4.1)和(4.2)可以直接证明,地转流中的压强场和速度场均与垂直坐标 z 无关*,并且得到水平速度的表达式为

$$\mathbf{q}_H = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla P_0.$$

不过我们也发现,由这些方程不能唯一确定压强场,即任何压强场 $P(x, y)$ 都可以满足(4.1)和(4.2)式。因此,要想确定流动的情况,必须从完整的动量方程(3.3)式入手。考虑对刚性旋转状态偏离很小的情况,此时可令 $\varepsilon = 0$ 而将方程线性化。这样,运动方程便成为(星号略去不写)

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla P + E\nabla^2 \mathbf{q}, \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (5.2)$$

下面对方程进行矢量运算,目的是将它们化简为一个关于压强 P 的方程。将(5.1)标乘 $\hat{\mathbf{k}}$ 得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E\nabla^2\right)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}) = -\frac{\partial P}{\partial z}. \quad (5.3)$$

再由 $\hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla \times (5.1)]$,并注意到 $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$,可导出

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E\nabla^2\right)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{q}) - 2\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}) = 0. \quad (5.4)$$

合并(5.3)与(5.4)两式,得

* 此处指减去了静压的简化压强(俗称动压强)。——译者注

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E\nabla^2\right)^2 (\hat{k} \cdot \nabla \times q) + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (5.5)$$

对(5.1)式取散度,有

$$2 \hat{k} \cdot \nabla \times q = \nabla^2 P. \quad (5.6)$$

再将(5.6)代入(5.5)便得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E\nabla^2\right)^2 \nabla^2 P + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (5.7)$$

可见,对均匀、旋转的粘性流体运动,压强场所满足的普遍形式的线性方程是一个含时间导数的六阶偏微分方程。

如果不完全忽略非线性项,利用 Oseen 近似(即近似取 $\varepsilon q \cdot \nabla q = \varepsilon U \cdot \nabla q$, 并假定 U 是已知的),则压强所满足的方程取如下形式

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon U \cdot \nabla - E\nabla^2\right]^2 \nabla^2 P + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

在地转近似时,

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad E = 0.$$

(5.7)式化为

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

这与地转流动时 P 与 z 无关的结论是一致的。不考虑粘性的简化方程阶数自然较低,从而无法满足关于法向速度和切向速度的边界条件*。在流体动力学问题中,要想满足关于切向速度的边界条件,就必须考虑摩擦效应。我们假定粘性参数(这里是 Ekman 数 E)很小但不为零,这样便可将摩擦效应考虑在内,从而使切向速度的边界条件得到满足。我们将运用渐

* 此句的含义是:因为方程的阶数降低了,作为定解条件的边界条件的数目也应减少。如维持原来的边界条件则解不可能存在。——译者注

近分析的标准方法求出一个近似解。此解由两个相互匹配的渐近展开式组成。一个展开式适用于在一阶近似下视为无粘的内部区域里。另一个展开式则适用于粘性边界层中。

为了了解水平边界层的厚度，我们先考虑方程(5.7)的定常形式，即

$$E^2 \nabla^2 P + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (5.8)$$

方程的第一项和第二项分别代表粘性力和科氏力。

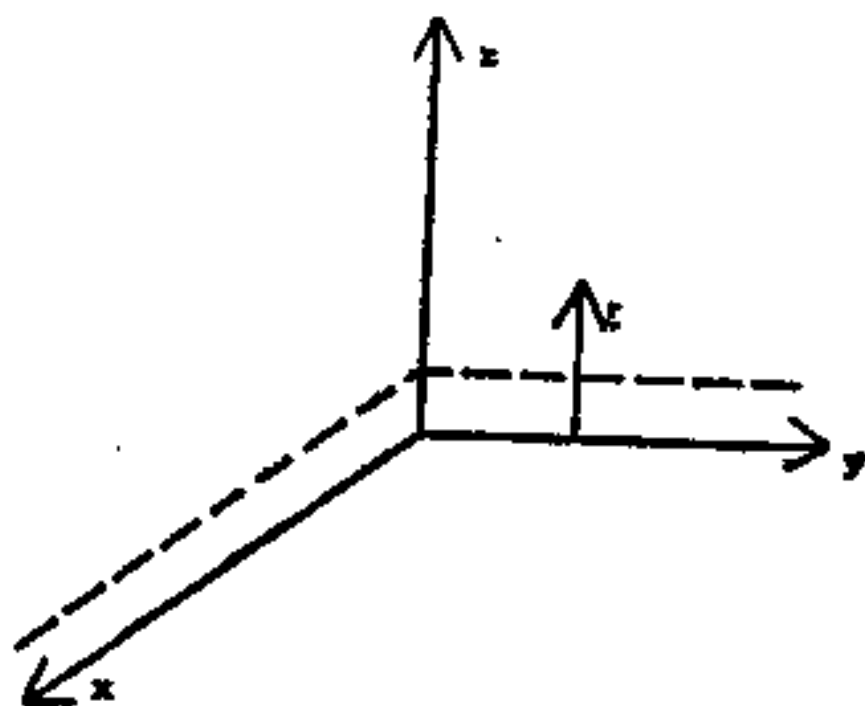


图5 Ekman 层坐标系

因为 $E \ll 1$ ，所以在大部分区域里 $E^2 \nabla^2 P$ 是很小的。但是，在边界层附近的窄小区域里， P 的导数可能很大。下面我们来讨论边界层的厚度并导出边界层内的简化方程。

令 $\underline{z} = E^\alpha \xi$ ，则

$$\frac{\partial}{\partial z} = E^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad ? \quad E^\alpha$$

方程(5.8)变为

$$E^2 \left(\nabla_H^2 + E^{-2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) P + 4 E^{-2\alpha} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0.$$

保留上式中圆括号内的主要项，而将小量级的水平拉氏算子

的部分略去,则有

$$E^{2-6\alpha} \frac{\partial^6 P}{\partial \xi^6} + 4E^{-2\alpha} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0. \quad (5.9)$$

在边界层内,(5.9)中的两项必须平衡。这就是要求

$$2 - 6\alpha = -2\alpha \text{ 或 } \alpha = \frac{1}{2}.$$

因此,称为 Ekman 层的水平边界层具有无量纲厚度 $O(E^{1/2})$,
边界层中压强满足的方程为

$$\frac{\partial^6 P}{\partial \xi^6} + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0. \quad (5.10)$$

这是个六阶偏微分方程。所以,只要预先给定在 $\xi = 0$ 和 $\xi = \infty$ 处确定三个速度分量的边界条件,边值问题便可唯一求解。应该注意,Ekman 层的特征就是 (5.10) 式所表示的粘性力与科氏力之间的平衡。另外,如果边界与旋转轴不共面,我们也可对这边界得到同样的边界层方程。考虑外法向单位矢量为 \hat{n} 的边界面,令 $\hat{n} \cdot \nabla = E^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}$ 。只要 $\hat{n} \cdot \hat{k} \neq 0$, 边界层方程即为

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\frac{\partial^4 P}{\partial \xi^4} + (\hat{n} \cdot \hat{k})^2 4P \right] = 0.$$

在后面我们将对 $\hat{n} \cdot \hat{k} = 0$ 的边界(即与旋转轴平行的边界)讨论边界层的结构。

Ekman 层的数学模型

如前所述,我们用两个相互匹配的渐近展开式之组合作为边界层问题的近似解。通常是令: 在 $\xi = 0$ 处, $q_{\text{内区}} + q_{\text{外区}} =$ 预先给定的边界条件; 当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, $q_{\text{外区}} \rightarrow 0$ 。这

也就是利用 $\xi = 0$ 处关于边界层解的边界条件修正内区解在边界上的性质。下面,以 (\wedge) 表示关于 Ekman 层的量。因为 Ekman 层无量纲厚度的量级为 $O(E^{1/2})$, 所以,将 \hat{q} 和 \hat{p} 以 $E^{1/2}$ 的幂级数形式展开:

$$\begin{aligned}\sqrt{\hat{u}} &= \hat{u}_0 + \hat{u}_1 E^{1/2} + \dots, \\ \hat{\theta} &= \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 E^{1/2} + \dots, \\ \hat{\omega} &= \hat{\omega}_0 + \hat{\omega}_1 E^{1/2} + \dots, \\ \hat{p} &= \hat{p}_0 + \hat{p}_1 E^{1/2} + \dots.\end{aligned}$$

考虑在 Ekman 层中方程 (5.1) 的定常形式,其中

$$E \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + O(E^{1/2}).$$

将上述展开式代入,可得准确至一阶的近似方程

$$\begin{aligned}-2\hat{\theta}_0 &= -\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial x} + \hat{u}_{0\xi\xi}^*, \\ 2\hat{u}_0 &= -\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial y} + \hat{\theta}_{0\xi\xi}, \\ 0 &= -E^{-1/2} \hat{p}_{0\xi 0}\end{aligned}$$

因为当 $\xi \rightarrow \infty$ 时有 $\hat{p}_0 \rightarrow 0$, 故 $\hat{p}_0 = 0$ 。同理,由散度方程 (5.2) 可得

$$\hat{\omega}_{0\xi} = 0.$$

故 $\hat{\omega}_0 = 0$ 。这样一来,Ekman 层的方程便是

$$-2\hat{\theta}_0 = \hat{u}_{0\xi\xi}, \quad (5.11)$$

$$2\hat{u}_0 = \hat{\theta}_{0\xi\xi}, \quad (5.12)$$

$$\hat{u}_{0x} + \hat{\theta}_{0y} + \hat{\omega}_{1\xi} = 0. \quad (5.13)$$

联立 (5.11) 和 (5.12) 可得

$$2i(\hat{u}_0 + i\hat{\theta}_0) = (\hat{u}_0 + i\hat{\theta}_0)_{\xi\xi} \quad (5.14)$$

($i = \sqrt{-1}$)。因为 $\lim_{\xi \rightarrow \infty} (\hat{u}_0 + i\hat{\theta}_0) = 0$, 故有

* $\hat{u}_{0\xi\xi} = \partial^2 \hat{u}_0 / \partial \xi^2$, 余类推。——译者注

$$\hat{u}_0 + i\hat{\theta}_0 = (\hat{u}_0 + i\hat{\theta}_0)_{\xi=0} \cdot e^{-(1+i)\xi} \quad (5.15)$$

下面,我们考虑这样一种特殊情况,即 $z=0$ 处的边界为刚性边界且具有外加速度(在旋转坐标系中)

$$\mathbf{Q}_H = Q_1 \hat{i} + Q_2 \hat{j}.$$

令内区速度为 $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + E^{1/2} \mathbf{q}_1 + \dots$, 于是有: $w_0 = 0$; 在

$z=0, \xi=0$ 处, $u_0 + \hat{u}_0 = Q_1$ 且 $v_0 + \hat{\theta}_0 = Q_2$ 。

另外, \mathbf{q}_0 满足地转方程,即

$$2\hat{k} \times \mathbf{q}_0 = -\nabla P_0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_0 = 0.$$

故 u_0, v_0 和 w_0 与 z 无关。因而上述边界条件意味着

$$\begin{cases} \hat{u}_0 = Q_1 - u_0(x, y) \\ \hat{\theta}_0 = Q_2 - v_0(x, y) \end{cases} \quad \text{在 } \xi=0 \text{ 处,} \quad (5.16)$$

$$w_0 = 0 \quad \text{在全流场内。}$$

将(5.16)各式代入(5.15)可得

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 + i\hat{\theta}_0 = & [(Q_1 - u_0(x, y)) \\ & + i(Q_2 - v_0(x, y))] e^{-(1+i)\xi}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

由方程(5.13)可确定 $\hat{\psi}_1$, 从而得到

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1|_{\xi=0} = & \int_0^\infty (\hat{u}_{0x} + \hat{\theta}_{0y}) d\xi \\ = & \frac{(Q_1 - u_0)_x + (Q_2 - v_0)_x}{2} \\ & + \frac{(Q_2 - v_0)_y - (Q_1 - u_0)_y}{2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

由散度方程并利用 $w_0 = 0$ 可得

$$u_{0x} + v_{0y} = 0.$$

边界的外加速度 \mathbf{Q}_H 必须同样满足 $Q_{1x} + Q_{2y} = 0$ 。故(5.18)

式化为

在 $\xi=0$ 处,

$$\dot{w}_1 = \frac{1}{2} [(Q_2 - v_0)_x - (Q_1 - u_0)_y] \quad (5.19)$$

因为 $w_0 = 0$ ，所以关于 w 的最高阶边界条件为

$$\text{在 } \xi = 0, z = 0 \text{ 处 } \dot{w}_1 + w_1 = 0。$$

因而由 (5.19) 式得到

$$\text{在 } z = 0 \text{ 处, } w_1 = -\frac{1}{2} [(Q_2 - v_0)_x - (Q_1 - u_0)_y],$$

此式的矢量形式为

$$\boxed{z = 0 \text{ 处, } w_1 = \frac{1}{2} \hat{k} \cdot \nabla \times (q_0 - Q_H)} \quad (5.20)$$

上式称为 Ekman 层抽吸条件。这是旋转流动的一个十分重要的特征。我们看到，给定的边界水平速度 Q_H 引起一个小的内区垂直速度 w_1 （它比 Q_H 小 $E^{1/2}$ 量级）。另外，关系式 (5.20) 仅含内区流场的速度，而它的导出过程却必须解边界层方程，即 Ekman 方程。由此可知，Ekman 层是个不可忽视的边界层。在确定内区运动的解时，它起着决定性的作用。我们知道，内区流动的动量方程中粘性项是 $O(E)$ 。因此，量级为 $O(E^{1/2})$ 的内区运动速度分量也满足地转平衡方程。这就意味着，不仅 u_1 和 v_1 ，而且 w_1 都与 z 无关。Ekman 层抽吸条件 (5.20) 本来是作为 $z = 0$ 处的边界条件而导出的，但因为式中的量 w_1 ， q_0 和 Q_H 都是与 z 无关的量，因此式 (5.20) 不仅在 $z = 0$ 处成立，而且实际上也必须对所有的 z 成立。我们下面就来看一个例子，以说明上述结论在确定旋转圆筒内定常流动时的作用。

液体圆柱流动

考虑一个以角速度 Ω 作刚性旋转的流体圆柱。今将底部

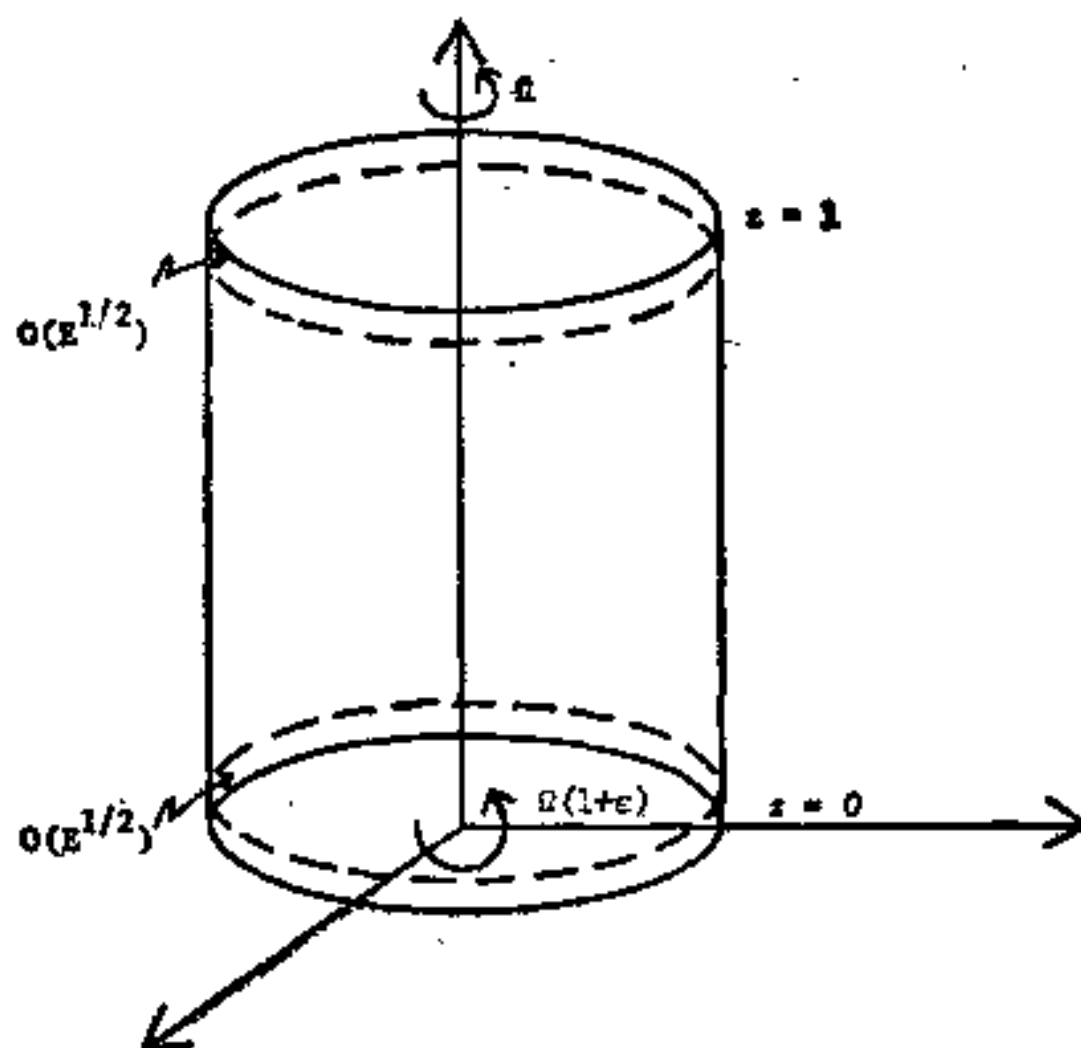


图 6

平板的角速度提高至 $\Omega(1+\varepsilon)$ ，则在旋转坐标系中以无量纲参数表示的边界条件为

$$z=0 \text{ 处, } \mathbf{q} = r\hat{\theta},$$

$$z=1 \text{ 处 } \mathbf{q} = 0.$$

在圆柱坐标系 (r, θ, z) 中将 \mathbf{q} 记作

$$\mathbf{q} = u\hat{r} + v\hat{\theta} + w\hat{k}.$$

应用 $z=0$ 处的 Ekman 层抽吸条件 (5.20), 得

$$w_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(v - r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u \right]. \quad (5.21)$$

为了分析 $z=1$ 处的 Ekman 层, 记 $1-z = \xi E^{1/2}$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = -E^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

从而可得类似的抽吸条件表达式, 只是符号有所改变, 即

在 $z=1$ 处,

$$w_1 = -\frac{1}{2} \hat{k} \cdot \nabla x(q_0 - Q_T)。$$

上式中 Q_T 是顶部表面上的外加速度。对于本例，上式化为

$$w_1 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u \right]。 \quad (5.22)$$

因为所研究的问题是轴对称的，故我们可假定解也是轴对称的，即 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ 。式(5.21)和(5.22)与 z 无关，故对任意 z 都成立。由(5.21)和(5.22)两式右边相等，我们得到

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(v - r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v。$$

因此

$$v = \frac{r}{2}。$$

将此式代入(5.22)可得

$$w_1 = -\frac{1}{2}。$$

适用于轴对称地转流动的散度方程为

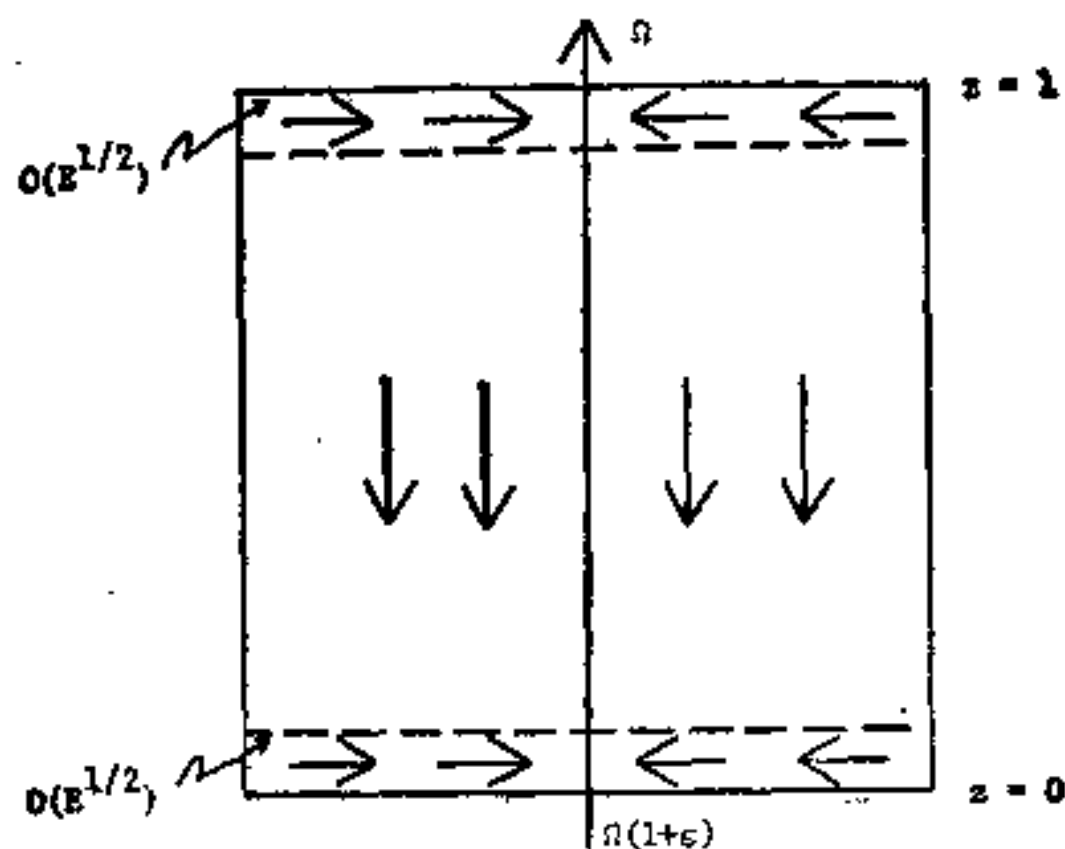


图7 由 Ekman 层抽吸产生的垂直速度分量

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u = 0,$$

故 ru 是常量。若侧边界是刚性的, 则 ru 等于零。因此, 由底部和顶部边界处的 Ekman 层条件立刻可解出一阶定常流动。我们发现; 内区角速度增加到底部和顶部边界角速度的平均值, 同时伴有一个小的不变的垂直速度。当然, 要完全解决问题必须研究侧边界层。它的存在使垂直质量通量构成循环。我们将在后面讨论这个问题。

Ekman 螺 线

在柱坐标系中, Ekman 层方程仍为

$$-2\theta = \hat{u}_{\xi\xi},$$

$$2\hat{u} = \theta_{\xi\xi}.$$

我们考虑在 $\xi = 0$ 处有 $q = r\hat{\theta}$ 的情形。假定内区流动不受影响, 则 Ekman 层中的解为

$$\hat{u} + i\theta = i r e^{-(1+i)\xi}.$$

所以,

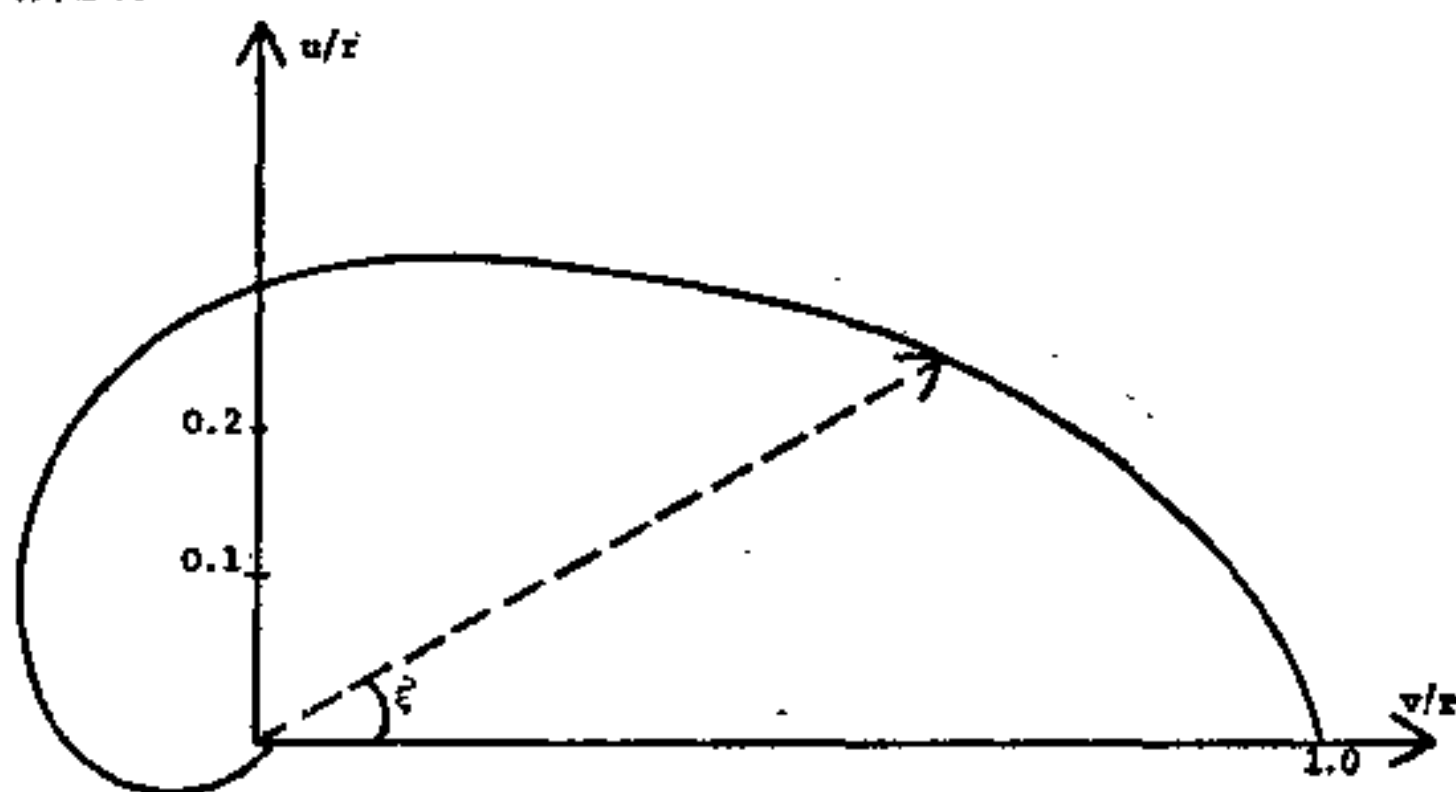


图 8 Ekman 层螺线

$$\frac{\hat{u}}{r} = e^{-\xi} \sin \xi, \quad \frac{\hat{\theta}}{r} = e^{-\xi} \cos \xi.$$

由此可以作 $\frac{\hat{u}}{r}$ 对 $\frac{\hat{\theta}}{r}$ 的速度矢端线图。它是形状独特的 Ekman 螺线, 如图 8 所示。

Ekman 层中的质量输送

Ekman 层中 $O(1)$ 量级的速度为

$$\mathbf{q} = \hat{u} \mathbf{i} + \hat{\theta} \mathbf{j} \text{ (在笛卡尔坐标系中).}$$

因此质量输送量 \hat{M} 可表为

$$\hat{M} = \mathbf{i} \int_0^\infty \hat{u} d\xi + \mathbf{j} \int_0^\infty \hat{\theta} d\xi.$$

考虑到

$$\int_0^\infty e^{-\xi} \cos \xi d\xi = \frac{1}{2} = \int_0^\infty e^{-\xi} \sin \xi d\xi,$$

并把 (5.17) 式中的 \hat{u} , $\hat{\theta}$ 代入质量输送的表达式, 便得

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \frac{\mathbf{i}}{2} [(Q_1 - u_0) - (Q_2 - v_0)] \\ &\quad + \frac{\mathbf{j}}{2} [(Q_2 - v_0) + (Q_1 - u_0)] \\ &= \frac{1}{2} [(Q_1 - q_0) + \hat{k} \times (Q - q_0)]. \end{aligned}$$

若再假定 $q_0 = 0$, 则质量输送方向与外加速度 Q 的方向成 45° 角。

旋转增强的时间尺度

前面我们讨论了内部区域和 Ekman 层内的定常流动。下面来看看达到这种定常流动所需的时间尺度。

由 (5.11) 和 (5.12) 式可得非定常的 Ekman 层方程

$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} - 2\theta_0 = \hat{u}_{0\zeta\zeta},$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} + 2\hat{u}_0 = \theta_{0\zeta\zeta}.$$

我们可以用拉普拉斯变换(见 Greenspan^[24]) 来求满足适当边界条件的上述方程的解。在求得的解中,与时间有关的部分具有 $\text{erf}(2i\zeta)^{1/2}$ 和 $\text{erfc}[(1+i)\zeta^{1/2}]$ 的形式。因此,经过 $O(1)$ 时间后,便可认为解中的时间因子消失,从而得到定常解。这一点我们也可由原方程组直接判断,只要注意到方程中的各项的量级都是 $O(1)$ 。这也就是说,流体在旋转两三周之后便在边界上形成定常的 Ekman 层。此 Ekman 层又通过抽吸作用引起的环流来修正内部区域的速度。这一过程称为旋转增强(如果边界速度相对于 Ω 减小便称为旋转减弱)。内部速度达到新的定常状态所需的时间尺度称为旋转增强时间尺度。

我们现在来讨论量级为 $O(1)$ 和 $O(E^{1/2})$ 的内区流动所满足的非定常方程

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla P, \quad (5.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (5.24)$$

由 $\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times (5.23)$ 可得

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}) - 2 \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (5.25)$$

在上、下边界产生的垂直速度之量级为 $O(E^{1/2})$ 。若上、下边界的角速度都增加的话,在 $z=0$ 和 $z=1$ 处产生的速度将具有不同的符号(请回忆一下 Ekman 层分析)。因此,表示 ω 对单位高度变化的 $\frac{\partial \omega}{\partial z}$ 具有 $O(E^{1/2})$ 量级。我们假定,初

始时流体处于刚性旋转，故 $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0$ 。在最后处于定常状态时，流体之角速度增加到与边界角速度相等。因此，按照我们使用的尺度，有 $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = O(1)$ 。由 (5.25) 式可知， $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}$ 达到 $O(1)$ 所需的时间尺度为 $O(E^{-1/2})$ ，亦即无量纲的旋转增强时间的尺度为 $O(E^{-1/2})$ 。

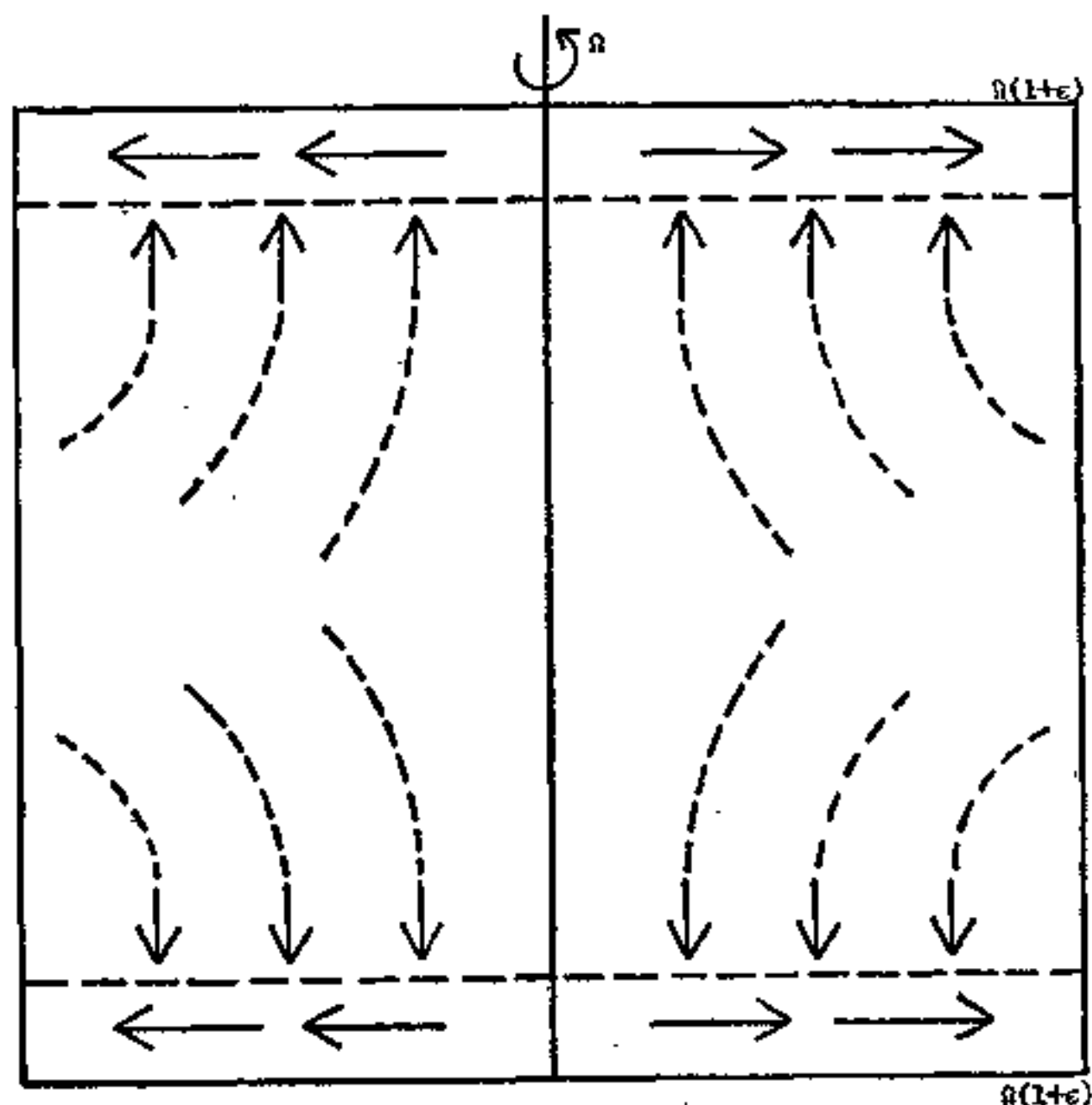


图 9 旋转增强环流

在下面这个例子中，我们可以从物理上描述旋转增强现象。考虑一个圆筒中的流体，其上、下边界的角速度由 Ω 增加到 $\Omega(1 + \epsilon)$ 。旋转两三周后，在上、下边界都形成 Ekman 层。层内流体迅速旋转着向外流，而且摩擦力使其角速度提高。此时，在内区则产生一个小的垂直速度。这样，Ekman 层吸进内区的流体来取代迅速旋转外流的流体。这一抽吸作

用引起了涡线伸屈,因而使内部区域的涡度增强(另一常见的例子是浴池放水时,地球引力引起的涡线伸展,结果在出水口处形成涡旋)。方程(5.25)是此过程的数学描述,即 w 的垂直梯度增加了涡度。一旦流体旋转增强至边界现有的角速度 $\Omega(1 + \epsilon)$, 涡度便不再改变,从而(5.25)化为其定常形式

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0。$$

这是大家在 Taylor-Proudman 定理中熟悉的结论。

因为旋转增强机制使边界条件能很快地传递到内区流动中,所以此机制及其时间尺度在地球物理流体动力学中有很重要的意义。对非旋转流体,粘性扩散是把边界条件效应传输到流体内部的唯一途径。当边界速度受一扰动时,内区重新达到稳定态所需的时间尺度是粘性扩散尺度 $O\left(\frac{L^2}{\nu}\right)$ 。而在旋转流体中,旋转增强的有量纲时间尺度是

$$O\left[\left(\frac{\nu}{\Omega L^2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{\Omega}\right] = O\left[\frac{L}{\Omega^{1/2} \nu^{1/2}}\right]。$$

由于 ν 很小,故与 $\nu^{-1/2}$ 成比例的旋转增强时间尺度要比比例于 ν^{-1} 的粘性扩散尺度小很多。

茶 杯 实 验

我们建议进行下面的简单实验来演示旋转减弱现象。取一透明的派热克斯玻璃盘,侧边最好是直的。在半盘的水中加入泡过的能沉到盘底的茶叶(未泡的茶叶将多半浮于水面)。搅动盘中的水直至达到刚性旋转状态。这时停止搅拌,在观察旋转减弱过程的同时计下时间。若把盘子置于投影仪上,并使实验情况显示于屏幕上,我们便能很容易地观察茶叶的运动。我们会看到茶叶螺旋形地转到盘的中心,同时角速

度不断减小。在 $O\left[\frac{L}{Q^{1/2}\nu^{1/2}}\right]$ 时间之后, 茶叶便停止运动。我们在此实验中观察到的运动正是前面研究过的 Ekman 层中的运动。本实验属于边界角速度相对于流体减小的情形。例如: $L = 5$ 厘米, $\Omega = 2$ 秒⁻¹, $\nu = 0.01$ 厘米²·秒⁻¹。

则旋转减弱时间尺度 $= \frac{5}{0.14} = 35$ 秒。

注: 粘性扩散时间尺度 $= \frac{L^2}{\nu} = 2500$ 秒。

这就是说, 若过程纯属于粘性扩散, 则运动停止所需的时间要长得多。

因为上述实验中的边界速度扰动并不小, 实际上 Rossby 数 $\varepsilon = 1$ 。严格说来, 非线性项不能忽略。故这一实验只是理论上的旋转减弱现象的一种近似的演示。然而, 实验得到的旋转减弱时间却与预计值十分接近。

应该注意, 在线性理论范畴内, 对初始时刻处于旋转状态的流体, 旋转增强现象和旋转减弱现象是等价的。但是, 对初始时刻处于静止的流体, 其旋转增强问题却有本质上的不同。因为在此种情况下一开始就不能由涡线伸展机制来产生涡度。从运动方程来看这也是很清楚的。若流体初始时静止, 在方程 (5.23) 中便没有科氏力项, 因而涡度方程 (5.25) 中就不再有伸展项 $\frac{\partial w}{\partial z}$, 这就失去了在旋转流体中起改变涡度作用的关键性因子。

习 题

5.1) 对下列边界条件分别导出圆筒中的一阶定常流动。

a) 在 $z = 0$ 处, $q = -r\hat{\theta}$;

在 $z = 1$ 处, $\mathbf{q} = r\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 。

b) 在 $z = 0$ 处, $\mathbf{q} = r\hat{\boldsymbol{\theta}}$;

在 $z = 1$ 处, $\mathbf{q} = r\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 。

5.2) 据说海洋学家 Ekman 是在观察到一座冰山的运动方向与风向垂直的现象之后才开始研究海洋表面的粘性边界层的。证明下面的事实并用它解释 Ekman 见到的现象: Ekman 层中的质量输送方向与表面风应力 $\boldsymbol{\tau}$ 正交。

5.3) 考虑闭曲面内的旋转、均匀粘性流体,其边界的单位外法向矢量为 $\hat{\mathbf{n}}$ 。

a) 证明除了 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ 的区域外,表面边界层都有 Ekman 层的形式。

b) Ekman 层的厚度是多大?

c) 当 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ 时为何 Ekman 层的分析不适用?

5.4) 考虑一个球壳,其上、下半球分别以角速度 $\Omega(1 + \varepsilon)$ 和 $\Omega(1 - \varepsilon)$ 旋转。试确定球内由 Ekman 层驱动的定常流动。

第六章 地转型运动

我们已经看到,在旋转流体运动中有三种重要的时间尺度: Ekman 层的形成所需的时间尺度 $O(1)$; 出现旋转增强的时间尺度 $O(E^{-1/2})$ 和出现剩余效应粘性衰减的时间尺度 $O(E^{-1})$ 。现在我们要讨论的是在 Ekman 层的旋转机制还没有使流动达到定常状态之前的瞬变运动。为此,我们假设内部区域的解可表为各种无粘型运动的叠加,即

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{Q}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{Q}_m(\mathbf{r}) e^{i\lambda_m t}, \\ P = \Phi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(\mathbf{r}) e^{i\lambda_m t}. \end{cases} \quad (6.1)$$

\mathbf{Q}_0 是对应于零本征值的零型运动。此种运动显然满足地转平衡方程,故称之为地转型运动。由于定常的地转型运动描述 $O(E^{-1/2})$ 时间尺度上的流动,故可记

$$\lambda_m = i\lambda_m + E^{1/2} r_{m0}$$

非定常的线性无粘方程为

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla P,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0.$$

故 \mathbf{Q}_0 和 \mathbf{Q}_m 满足的方程分别为

$$2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_0 = -\nabla \Phi_0, \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}_0 = 0; \quad (6.3)$$

和

$$i\lambda_m \mathbf{Q}_m + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_m = -\nabla \Phi_m, \quad (6.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}_m = 0. \quad (6.5)$$

我们将在本节中讨论封闭容器内地转型方程(6.2)和(6.3)的解。在下一章我们再来研究方程(6.4)和(6.5)的波状解,它们代表的运动称为惯性型运动。

球体内的地转型运动

我们来考虑球内流动的例子。方程(6.2)和(6.3)的边界条件为 $\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, 在球面上就是 $\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$, $\hat{\mathbf{r}}$ 为球坐标系中的单位径向矢量(要注意,对无粘运动方程不能加切向边界条件)。

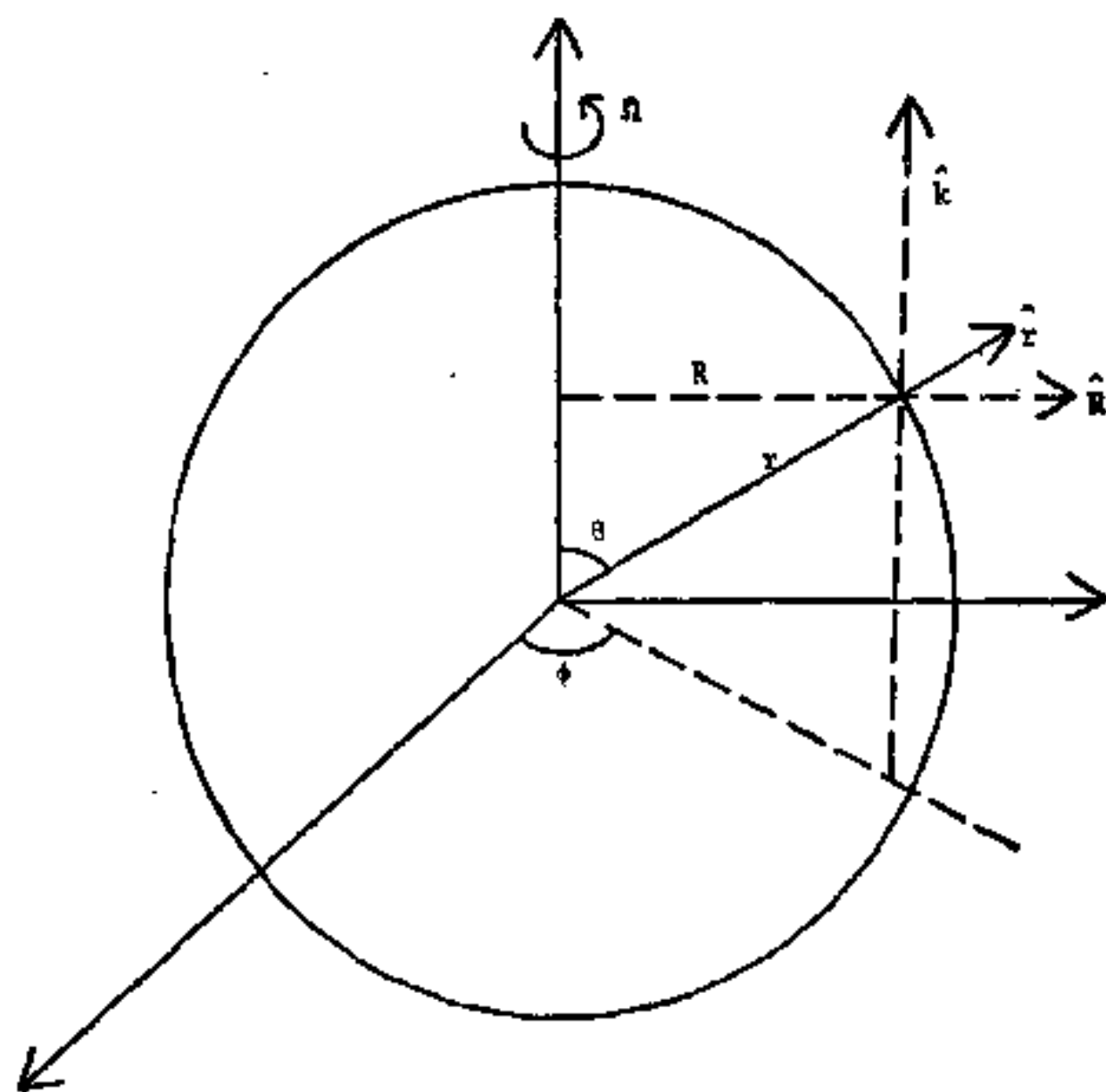


图 10 球坐标系和柱坐标系的示意图

令 (r, θ, ϕ) 为球坐标系, (R, ϕ, z) 为柱坐标系。以 $\hat{\mathbf{k}} \times$ (6.2) 得

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_0 + w \hat{\mathbf{k}}_0 \quad (6.6)$$

从而

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q}_0 &= (\hat{\mathbf{k}} \cos \theta + \hat{\mathbf{R}} \sin \theta) \\ &\cdot \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_0 + w \hat{\mathbf{k}} \right)_0 \end{aligned}$$

边界条件 $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q}_0 = 0$ 化为

$$\frac{\sin \theta}{2} \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_0 + w \cos \theta = 0,$$

即在 $r = a$ 处有

$$w = -\frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_0 \quad (6.7)$$

由地转方程可知 $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 故在 θ 和 $(\pi - \theta)$ 处 w 值必须相同。(6.7) 式说明仅当

$$w = 0 = \sin \theta \cdot \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_0 \quad (6.8)$$

时, 才有 $w|_{\theta} = w|_{\pi-\theta}$ 。记 $\sin \theta$ 为 $\frac{R}{r}$, 则 (6.8) 式表示 Φ_0 必须满足

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla R \times \nabla \Phi_0 = 0。$$

这一条件和地转型运动应满足的条件 $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0$ 表明, 在球内地转势 Φ_0 只是柱坐标中坐标 R 的函数, 即 $\Phi_0 = \Phi_0(R)$ 。因此, (6.6) 式可写为

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_0(R) = \frac{1}{2} \hat{\phi} \frac{\partial \Phi_0(R)}{\partial R} \quad (6.9)$$

所以, 在地转流动中, 流体以常速 $\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0(R)}{\partial R}$ 绕着半径为 R 的纬圈运动。在球内, 对应于一个 R 值有两个纬圈 (分别对称地分布在上、下半球)。这两个纬圈之间的垂直水柱之高度 h

是半径 R 的函数。显然,速度表达式(6.9)表明,高度为 $h(R)$ 的每个流体柱作为一个整体沿着球面上的一个圆圈运动,且在运动过程中水柱高度保持不变。我们称球面上的这种圆圈为地转迴线(见图 11)。

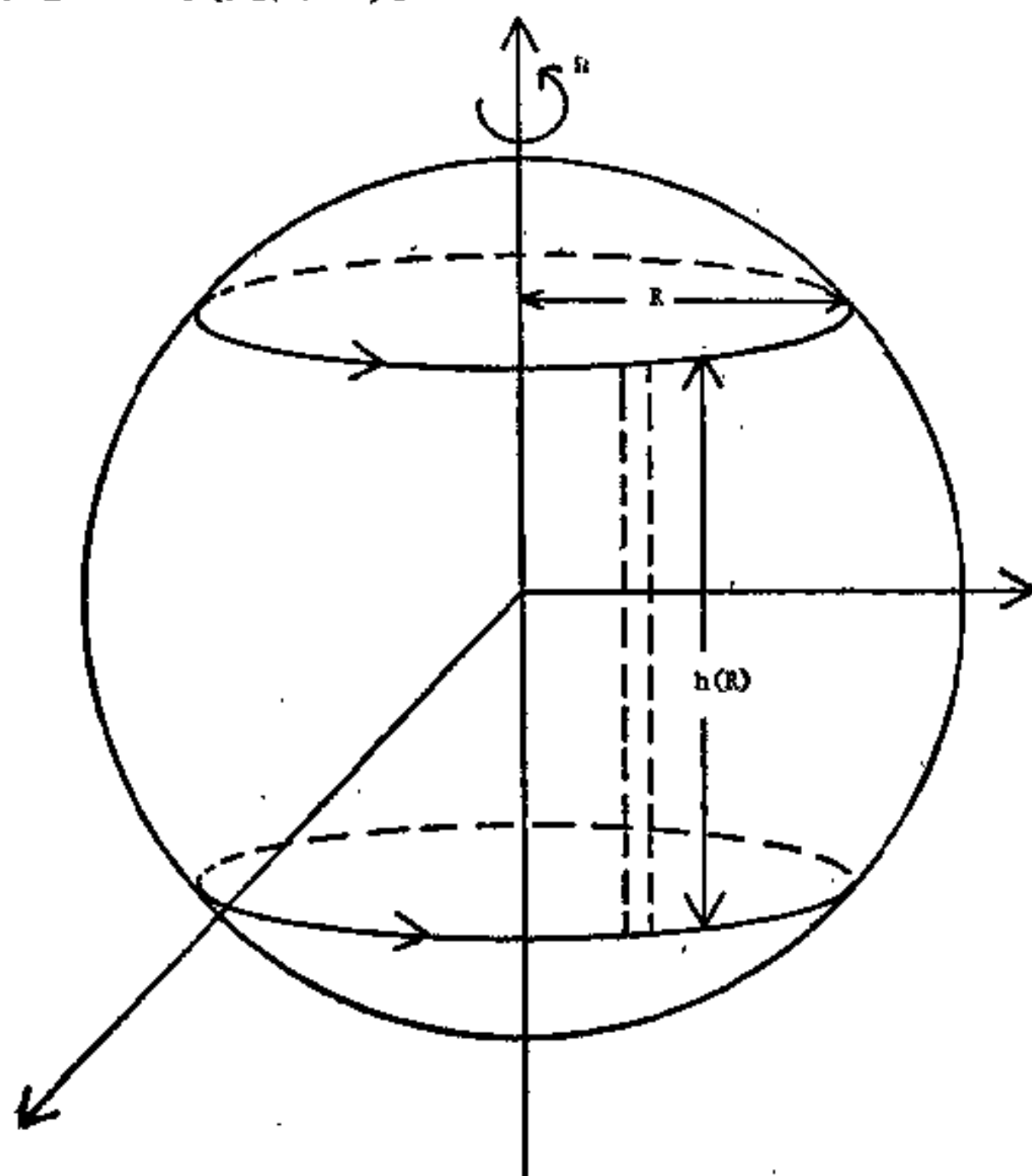


图 11 球面上的地转迴线

地转自由区、地转导通区和地转阻塞区

对于具有一般几何形状的区域,若存在如上所述的作为常高度水柱之边界的地转迴线,地转运动便能在此区域里发

生。我们可以将上一节对球内流体运动的分析推广到外壳由地转迴线所组成的任意封闭容器。Greenspan 和 Howard^[25]对此提出了普遍的数学理论,并给出了若干实验结果。对于具有任意几何形状的区域,可将区域分为三种类型(见 Howard^[36]):

(1) 自由地转区。它的上、下边界面上的每条迴线都是地转迴线。圆筒是其中一例。

(2) 地转导通区。它的边界可以用唯一的一组地转迴线来覆盖。球壳是其中一例。

(3) 地转阻塞区。区域里不存在地转迴线。例如上、下底不平行的圆筒。

圆柱水域属于地转自由区,其内的定常流动问题是比较简单的,因为上、下边界间的高度是常数。在此情况下,地转方程提供的信息很少,实际上任何压强 $\Phi(x, y)$ 都能满足地转方程。然而,我们可以用第五章中引入 Ekman 边界层的方法解决这一问题。若区域是地转阻塞区,则严格的地转平衡不存在,且定常的地转型运动转化为一系列的低频波。这些低频波就是我们将在第八章讨论的 Rossby 波。

对于地转导通区,利用类似于球内流动分析的方法,可知压强 Φ_0 仅为 h 的函数(在半径为 a 的球中 $\Phi_0 = \Phi_0(h), R^2 = a^2 - \frac{h^2}{4}$)。

速度则为

$$\mathbf{Q}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial h} \mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B, \quad (6.10)$$

其中 \mathbf{n}_T 和 \mathbf{n}_B 分别为上、下底上的单位法向矢量。 $\mathbf{n}_T \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$, $\mathbf{n}_B \cdot \hat{\mathbf{k}} = -1$ 。

环 流

现在我们来考察绕一个地转迴线的环流

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{s}_0$$

在球内的流动情形中, 由 (6.9) 可得

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \hat{\phi} \frac{\partial \Phi_0}{\partial R} \cdot \hat{\phi} R d\phi \\ &= \pi R \frac{\partial \Phi_0}{\partial R} \neq 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

因此, 地转型运动绕每一地转迴线的环流不为零。

在具有一般几何形状的地转导通区域里, 平行于地转迴线的矢量与 \mathbf{n}_T 和 \mathbf{n}_B 都正交, 故有

$$d\mathbf{s} = \frac{\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B}{|\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B|} ds_0$$

由式 (6.10) 可得

$$\Gamma = \oint_C -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial h} |\mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B| ds \neq 0. \quad (6.12)$$

因此, 地转型运动一般都有非零的环流。

习 题

- 6.1) 考虑地转导通区内的运动。设 C 为此区内的某一封闭地转曲线, Σ 为任意的一个有限面。若 Σ 上任一点相对于 C 的高度 $h(x, y)$ 为常数, 则地转流通过面 Σ 的通量将为零。试证明之。
- 6.2) 在图 12 中, 指出各标示区域的类型。即指出它们属于

地转自由区、地转导通区和地转阻塞区中的哪一类。

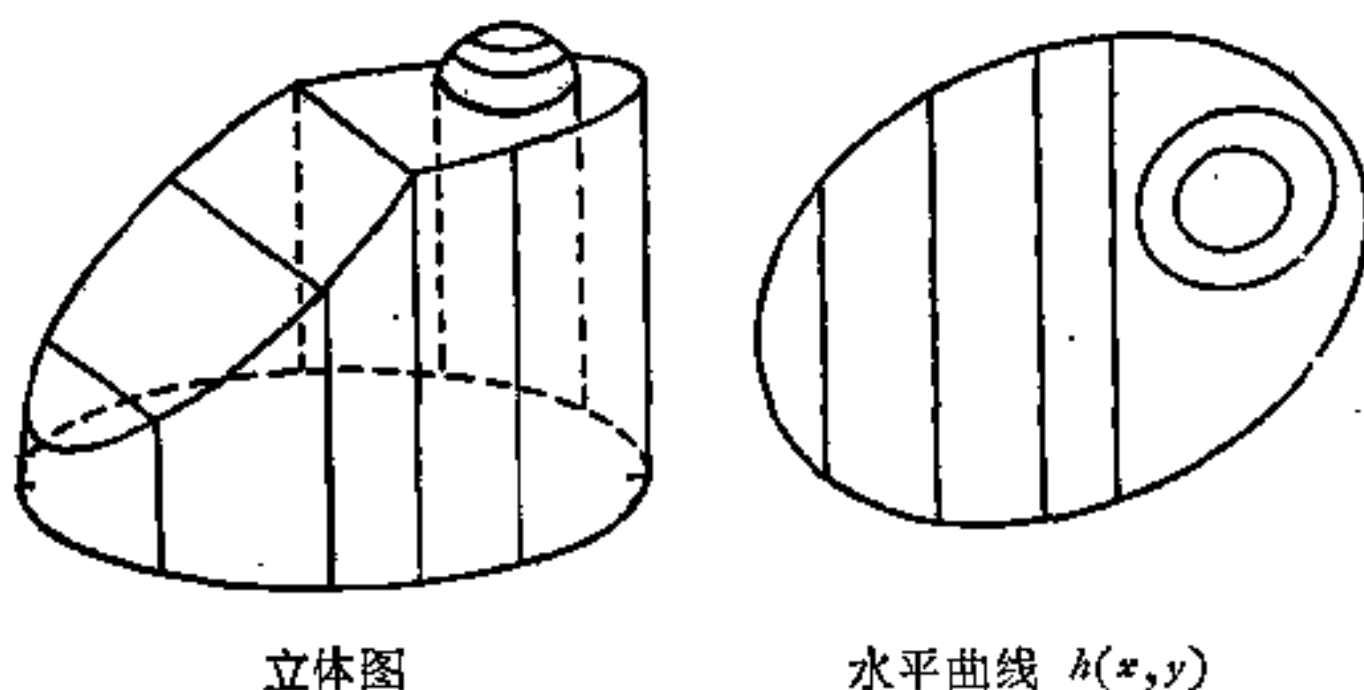


图 12

6.3) 一个地转导通容器的上、下表面的方程分别为

$$z = z_T(x, y) \text{ 和 } z = z_B(x, y),$$

Σ 为它的整个表面。记上、下表面的法向矢量为

$$\mathbf{n}_T = \hat{\mathbf{k}} - \nabla z_T, \quad \mathbf{n}_B = -(\hat{\mathbf{k}} - \nabla z_B).$$

令 C 为一条地转迴线, h 为相互联系的一对地转迴线所界的流体柱高。

a) 证明地转流动中压强 Φ_0 仅是 h 的函数。

b) 证明地转流动速度 \mathbf{Q}_0 为

$$\mathbf{Q}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial R} \mathbf{n}_T \times \mathbf{n}_B.$$

6.4) 考虑一旋转流体球, 在旋转坐标系中初始速度为 $\mathbf{Q}_* = A\hat{\mathbf{k}}$, A 为常量。试确定地转型运动。

第七章 惯性型运动

在第六章里，我们假定流动的非定常部分可表为一系列相互正交的各型运动的叠加。这些型称为惯性型，它们满足方程 (6.4) 和 (6.5)，还满足给定的初始条件及边界条件 $\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ 。在 $O(1)$ 阶的解里，流体基本上被视为无粘的，故切向边界条件仍不能满足。现利用读者业已熟悉的处理方法求出压强场 Φ_m 应满足的方程。

由 $\hat{\mathbf{k}} \cdot (6.4)$ 及 $\hat{\mathbf{k}} \times (6.4)$ 可得

$$i\lambda_m \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{Q}_m = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \quad (7.1)$$

及

$$i\lambda_m \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_m + 2[\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{Q}_m - \mathbf{Q}_m] = -\hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_m. \quad (7.2)$$

将 (6.4) 和 (7.1) 式代入 (7.2) 式，有

$$\begin{aligned} & \frac{i\lambda_m}{2} [i\lambda_m \mathbf{Q}_m - \nabla \Phi_m] \\ & + 2 \left[-\frac{\hat{\mathbf{k}}}{i\lambda_m} \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} - \mathbf{Q}_m \right] = -\hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_m. \end{aligned} \quad (7.3)$$

因为 $\nabla \cdot \mathbf{Q}_m = 0$ ，对 (7.3) 式取散度便得

$$-\frac{i\lambda_m}{2} \nabla^2 \Phi_m - \frac{2}{i\lambda_m} \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} = 0. \quad (7.4)$$

因而 Φ_m 满足的方程为

$$\boxed{\nabla^2 \Phi_m - \frac{4}{\lambda_m^2} \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} = 0}, \quad (7.5)$$

此方程称为 Poincaré 方程。

我们以后将证明 λ 是实数且 $|\lambda| < 2$, 故方程 (7.5) 是双曲型的。但是, 容器封闭边界面 Σ 上的边界条件 $\mathbf{Q}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ 一般与椭圆型方程相联系, 所以, 一般说来 Poincaré 方程与 Σ 上的边界条件 $\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ 是不协调的。但对特殊的本征值 λ_m , 问题的解是存在的。这一性质自然可用来确定 λ_m 。

对于预先给定边界条件的初值问题进行严格分析, 其中包括研究作为粘性解极限的无粘谱, 也包括确定正交型的完备性, 这些都是非常困难的。此处不拟对此进行讨论。但是我们可以指出各正交型运动的某些简单性质。

λ 是实数且 $|\lambda| < 2$

令 \mathbf{Q}_m^* 为 \mathbf{Q}_m 的共轭复数, 则由 [(6.4) · \mathbf{Q}_m] 得

$$i\lambda_m |\mathbf{Q}_m|^2 + 2\mathbf{Q}_m^* \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_m = -\mathbf{Q}_m^* \cdot \nabla \Phi_m. \quad (7.6)$$

在整个流场对 (7.6) 式作体积分, 得

$$\begin{aligned} i\lambda_m \int_V |\mathbf{Q}_m|^2 dV + 2 \int_V \mathbf{Q}_m^* \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_m dV \\ = - \int_V \mathbf{Q}_m^* \cdot \nabla \Phi_m dV. \end{aligned} \quad (7.7)$$

利用斯托克斯定理

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{Q}_m^* \cdot \nabla \Phi_m dV = - \int_V \Phi_m \nabla \cdot \mathbf{Q}_m^* dV \\ + \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{Q}_m^* \Phi_m dS \end{aligned}$$

并考虑到 $\nabla \cdot \mathbf{Q}_m^* = 0$ 及边界上 $\mathbf{Q}_m^* \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, (7.7) 式变为

$$\lambda_m = 2i \frac{\int_V \mathbf{Q}_m^* \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_m dV}{\int_V |\mathbf{Q}_m|^2 dV}. \quad (7.8)$$

若记 $\mathbf{Q}_m = \mathbf{A} + i\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}_m^* = \mathbf{A} - i\mathbf{B}$, 则

$$\lambda_m = 4 \frac{\int \hat{k} \cdot (A \times B) dv}{\int (A^2 + B^2) dv}.$$

因为

$$\begin{aligned} & 2 \int \hat{k} \cdot (A \times B) dv \\ & \leq 2 \int |A| |B| dv \leq \int (A^2 + B^2) dv, \end{aligned}$$

所以 λ_m 是实数且 $|\lambda_m| \leq 2$ 。

下面我们用反证法证明 $\lambda \neq 2$ 。假定 $\lambda = 2$ 是本征值，则对应的本征函数满足

$$iQ + \hat{k} \times Q = -\frac{1}{2} \nabla \phi. \quad (7.9)$$

以 Q^* 矢乘 (7.9) 式可得

$$\begin{aligned} & iQ^* \times Q + \hat{k} |Q|^2 - (Q^* \cdot \hat{k}) Q \\ & = -\frac{1}{2} Q^* \times \nabla \phi. \end{aligned} \quad (7.10)$$

由此可得

$$\begin{aligned} & i\hat{k} \cdot Q^* \times Q + |Q|^2 - |Q \cdot \hat{k}|^2 \\ & = -\frac{1}{2} (\hat{k} \times Q^*) \cdot \nabla \phi. \end{aligned} \quad (7.11)$$

取 (7.10) 的共轭表达式并利用 $\nabla \cdot Q^* = 0$ 可导出

$$\hat{k} \times Q^* \cdot \nabla \phi = -\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + i \nabla \cdot (Q^* \phi). \quad (7.12)$$

联立 (7.11) 和 (7.12) 并在体积 V 上积分得

$$\begin{aligned} & \int_V [i\hat{k} \cdot Q^* \times Q + |Q|^2] dV \\ & = \int_V \left[\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + |Q \cdot \hat{k}|^2 \right] dV. \end{aligned} \quad (7.13)$$

利用(7.8)式在 $\lambda_m = 2$ 时的结果, 可知(7.13)式的左端等于零。因此

$$\nabla\Phi = 0 \text{ 且 } Q \cdot \hat{k} = 0。$$

从而(7.10)式化为

$$iQ + \hat{k} \times Q = 0,$$

结合散度方程则有

$$\nabla \cdot Q = 0 \text{ 和 } \nabla \cdot \hat{k} \times Q = 0。$$

因为 $Q \cdot \hat{k} = 0$, 故可将 Q 记为 $Q = u\hat{i} + v\hat{j}$ 。由上述结果可知对任一确定的 z , u 和 v 是 x, y 的解析函数。故 Q 满足方程

$$\nabla^2 Q = 0。 \text{ 且在 } \Sigma \text{ 上有 } Q \cdot \hat{n} = 0。$$

这样的定解问题有唯一解 $Q \equiv 0$ 。所以当 $\lambda = 2$ 时, 相应的本征函数是平凡解。

正 交 性

令 (Q_m, λ_m) 和 (Q_n, λ_n) 为不同的本征函数和本征值。

Q_m^* 和 Q_n 都满足(6.4)式, 故有

$$\text{和 } i\lambda_n Q_m^* \cdot Q_n + 2Q_m^* \cdot \hat{k} \times Q_n = -Q_m^* \cdot \nabla\Phi_n, \quad (7.14)$$

$$-i\lambda_m Q_n \cdot Q_m^* + 2Q_n \cdot \hat{k} \times Q_m = -Q_n \cdot \nabla\Phi_m^*。 \quad (7.15)$$

将(7.14)与(7.15)相加并在体积 V 上积分得

$$\begin{aligned} & i(\lambda_n - \lambda_m) \int_V Q_n \cdot Q_m^* dv \\ & = - \int_V [Q_m^* \cdot \nabla\Phi_n + Q_n \cdot \nabla\Phi_m^*] dv。 \end{aligned} \quad (7.16)$$

因为 $\nabla \cdot Q_m^* = \nabla \cdot Q_n = 0$, 且在 Σ 上 $\hat{n} \cdot Q_m^* = \hat{n} \cdot Q_n = 0$, 所以, 对上式应用斯托克斯定理便得到

$$\int_V Q_n \cdot Q_m^* dv = 0, \quad m \neq n。$$

即不同的本征函数是正交的。

再考虑 $\lambda_n = 0$ 的情况, 正交性的证明就完整了。对此情况, 在(7.16)表示的能量内积的意义上, 地转型与每一惯性型都正交。

平均环流定理

我们在第六章里已经证明, 地转型流动绕地转迴线积分所得的环流 Γ 不等于零。现在我们来证明对深度平均后的惯性型流动之环流为零。这表明初始运动具有的全部环流都集中在地转型的流动上。

令 $\langle Q_m \rangle$ 为深度平均后的惯性型速度

$$\langle Q_m \rangle = \int_{z_B}^{z_T} Q_m dz,$$

其中 $z = z_T$ 和 $z = z_B$ 分别表示容器的顶端和底部。将(6.4)式对 z 由顶端到底部积分, 可得

$$\begin{aligned} i\lambda_m \langle Q_m \rangle + 2\hat{k} \times \langle Q_m \rangle \\ = -\nabla \int_{z_B}^{z_T} \Phi dz + \Phi_T \mathbf{n}_T + \Phi_B \mathbf{n}_B. \end{aligned} \quad (7.17)$$

从而有

$$i\lambda_m \nabla \times \langle Q_m \rangle = \nabla \times (\Phi_T \mathbf{n}_T + \Phi_B \mathbf{n}_B). \quad (7.18)$$

其中利用了 $\nabla \cdot \langle Q_m \rangle = 0$ 和 $\frac{\partial}{\partial z} \langle Q_m \rangle = 0$ 。设 C 为容器表面上的一个地转迴线, 以此迴线为界的容器表面是一个帽状曲面, 将(7.18)式在此帽状曲面上进行面积分, 并利用高斯积分定理, 便得

$$i\lambda_m \oint \langle Q_m \rangle \cdot d\mathbf{s} = \oint (\Phi_T \mathbf{n}_T + \Phi_B \mathbf{n}_B) \cdot d\mathbf{s}. \quad (7.19)$$

我们在第六章中说过, 平行于地转迴线的矢量与 \mathbf{n}_T 和 \mathbf{n}_B 正

交。因此, $\mathbf{n}_T \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{n}_B \cdot d\mathbf{s} = 0$, 从而 (7.19) 式表示当 $\lambda_m \neq 0$ 时, $\oint \langle \mathbf{Q}_m \rangle \cdot d\mathbf{s} = 0$ 。因此, 只有对深度平均的地转型运动才能有环流。

初 值 问 题

假定函数集合 $\{\mathbf{Q}_m\}$ 具有完备性, 那么, 对于边界全由地转曲线组成的旋转容器, 我们至少可以在原则上写出初值问题的解。我们可将试解表示成傅里叶级数, 并使其系数比例于彼此正交的 \mathbf{Q}_m (惯性型) 和 \mathbf{Q}_0 (地转型)。即

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{r}) + \sum A_m \mathbf{Q}_m(\mathbf{r}) e^{i\lambda_m t} + O(E^{1/2}).$$

令初始条件为 $\mathbf{q} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$, 则利用各型流动之间的正交性可得

$$A_m = \frac{\int \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_m^* d\mathbf{v}}{\int |\mathbf{Q}_m|^2 d\mathbf{v}}.$$

由平均环流定理可知

$$h \oint_C \mathbf{Q}_0 \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \langle \mathbf{u} \rangle \cdot d\mathbf{s},$$

其中 C 为地转迴线。这再次说明 \mathbf{Q}_0 是唯一具有初始时深度平均流动之环流的地转流动。换句话说, 这便是这种初始问题所具有的一种特点。利用这一点, 我们可以从所有为容器所允许的地转压强场中确定唯一的地转流动的解 $\Phi(h)$ 。

现在我们回过头来看具有地转自由边界(如圆筒)的区域中的流动。这时在上、下边界上的任一对闭合迴线都是地转迴线。由此可知在这样的区域中, 必须知道每一迴线上的初始环流。在单连域中, 这等价于必须知道初始涡度的垂直分量。这就是说, 必须对初始资料加上更强的要求才能得到唯

一的解。由上所述,再回忆第六章中的有关结果,我们得到了如下的结论: 虽然在计算地转导通区定常流动问题中,地转的概念是有用的,然而当流体受到两种约束时,这一概念就不那么起作用了。在区域之几何形状和旋转的影响这两种约束下,可能的流动模式受到严格的限制。但是,若两种约束一致的话(在圆筒中便是如此),由地转分析得到的不多的信息能直接确定问题的解。

圆筒中的惯性型运动

我们在前面已经说明,运动的初值问题可以利用以惯性型和地转型表示的傅里叶级数来解决。但是,确定本征函数就是要求出满足零法向速度边界条件的 Poincaré 方程的解。一般说来,这是很困难的。到目前为止,只对几何形状非常简单的几种区域求得了问题的解。Aldridge 和 Toomre 已经对球内和球状容器内的流动求得了通用的多项式解。在球形区域里,还可计算流体粘性对运动衰减的效应(见 Greenspan^[26])。计算结果与实验数据十分符合。因为球面上的运动与地球物理现象类似,所以人们相当注意对它的研究。

作为简单区域中流动的数学分析的例子之一,我们下回来计算圆筒内流动的正交型解。首先研究这一问题的是 Relvin^[33]。他的理论最近又得到了不少补充。在边界条件

$$z = 0, 1 \text{ 处 } \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0;$$

$$r = a \text{ 处 } \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$$

下,我们利用柱坐标系 (r, θ, z) 来解方程

$$\nabla^2 \Phi - \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (7.20)$$

由(7.1)式可将边界条件用 Φ 表示,即由

$$\hat{k} \cdot Q = -\frac{1}{i\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

得到

$$\text{在 } z=0, 1 \text{ 处 } \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (7.21)$$

另外, 惯性模式满足动量方程 (6.4), 其中水平分量方程为

$$i\lambda \hat{r} \cdot Q - 2\hat{\theta} \cdot Q = -\frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

$$i\lambda \hat{\theta} \cdot Q + 2\hat{r} \cdot Q = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

因此在 $r=a$ 处的边界条件为

$$i\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0. \quad (7.22)$$

下面我们通过分离变量来求满足边界条件 (7.21) 和 (7.22) 的方程 (7.20) 的解。记

$$\Phi = F(r) e^{ik\theta} \cos n\pi z,$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots, n = 1, 2, \dots.$$

(在 $z=0$ 和 $z=1$ 处的边界条件表明傅里叶级数中仅应包含余弦项。) 将它代入方程 (7.20) 得

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} F + \left(\frac{4}{\lambda^2} - 1 \right) n^2 \pi^2 F = 0. \quad (7.23)$$

由此可知, $F = J_{|k|} \left(\frac{\alpha r}{a} \right)$ 。其中 α 满足方程

$$\lambda = 2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2 \pi^2 a^2} \right)^{-1/2},$$

而 $J_{|k|}$ 是 $|k|$ 阶贝塞尔函数。由边界条件 (7.22) 可得 α 所满足的超越方程, 即

$$i\lambda \frac{\alpha}{a} J'_{|k|}(\alpha) + \frac{2}{a} ik J_{|k|}(\alpha) = 0.$$

所以, $\alpha = \xi_{mnk}$ 是方程

$$\frac{\alpha/2}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2 \pi^2 a^2}\right)^{1/2}} J'_{|k|}(\alpha) + k J_{|k|}(\alpha) = 0$$

的第 m 个正的零点。于是本征值 λ 为

$$\lambda_{mnk} = 2 \left(1 + \frac{\xi_{mnk}^2}{n^2 \pi^2 a^2}\right)^{-1/2},$$

它组成一个具有无限元素的三维集合。

至此我们清楚地看到, 既使在圆筒这种相当简单的区域内, 给出惯性型解的本征函数也是相当复杂了。

平 面 波 解

在本节中我们通过求无界流体中的平面波解来讨论惯性波 (注意, 在无界流体中, 关于 $\lambda \approx 2$ 的证明不再成立)。现用

$$q = \operatorname{Re} Q e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)}$$

$$P = \operatorname{Re} \Phi e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)}$$

作为 Poincaré 方程的解, 其中 $\mathbf{k} = k_1 \hat{i} + k_2 \hat{j} + k_3 \hat{k}$ 为波矢量, λ 为波的频率。在无限流体中无边界条件限制, 故 Q 和 Φ 可视为常量。将上述平面波解代入 Poincaré 方程可得

$$\lambda^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - 4k_3^2 = 0$$

或

$$\lambda = \pm \frac{2k_3}{|\mathbf{k}|} = \pm \frac{2\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|}. \quad (7.24)$$

这就是说, 波动频率取决于传播方向而与波矢量的模的大小无关。波动的相速度 \mathbf{C}_p 是 $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - \lambda t) = \text{常量}$ 所代表的面的移动速度, 而群速 \mathbf{C}_g 则是波动能量传播的速度。

相速度为

$$\mathbf{C}_p = \frac{\lambda}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} = \frac{2k_3}{|\mathbf{k}|^2} \hat{\mathbf{k}}. \quad (7.25)$$

故波是弥散波,其相速与波矢量之模成反比。由此可知,长波比短波传播得快。在这一点上惯性波与表面波一致。

群速度为 $\mathbf{C}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \cdot \lambda$,

因而

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_g &= -\frac{2k_3}{|\mathbf{k}|^3} (k_1 \hat{\mathbf{i}} + k_2 \hat{\mathbf{j}} + k_3 \hat{\mathbf{k}}) + \frac{2}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{2}{|\mathbf{k}|} \left(\hat{\mathbf{k}} - \frac{k_3}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} \right) \\ &= \frac{2}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} - \mathbf{C}_{p0} \end{aligned} \quad (7.26)$$

要指出的是

$$\mathbf{C}_p \cdot \mathbf{C}_g = \frac{2k_3}{|\mathbf{k}|^2} \left(\frac{2k_3}{|\mathbf{k}|^2} - \frac{2k_3}{|\mathbf{k}|^2} \right) = 0.$$

这表示能量的转移方向与位相的移动方向垂直。这是惯性波的特性之一。惯性波还有一个更不寻常的特性(见 Phillips^[54]),这就是它在反射时不遵守 Snell 定律。入射波与旋转轴的交角等于反射波与旋转轴的交角,而与实际反射面的方向无关。

习 题

7.1) 对不可压缩的无粘旋转流体,平面波解

$$\mathbf{q} = \text{Re } \mathbf{Q} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)}$$

满足条件 $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{k} = 0$, 试证明之。在更一般的情况下这种结论还成立吗?

7.2) 若 \mathbf{p} 是与 \mathbf{k} 正交的任意矢量,证明

$$\mathbf{Q} = \pm \mathbf{k} \times \mathbf{p} + i\mathbf{p}_0.$$

7.3) 在上题中让 \mathbf{p} 与 \mathbf{k} 和 $\hat{\mathbf{n}}$ 共面, $\hat{\mathbf{n}}$ 为一无界平面的法向

单位矢量。证明当此平面为反射面时，入射波与反射波关于旋转轴 \hat{k} 的夹角相同。

- 7.4)* 群速为 \mathbf{C}_g 的惯性波在 xz 平面内的楔形边界 $z = x \tan \gamma$ 之间来回反射(见图 13)。若 $AB = l$, $BC = l'$, 试证明

$$\frac{l}{|\mathbf{C}_g|} = \frac{l'}{|\mathbf{C}'_g|}.$$

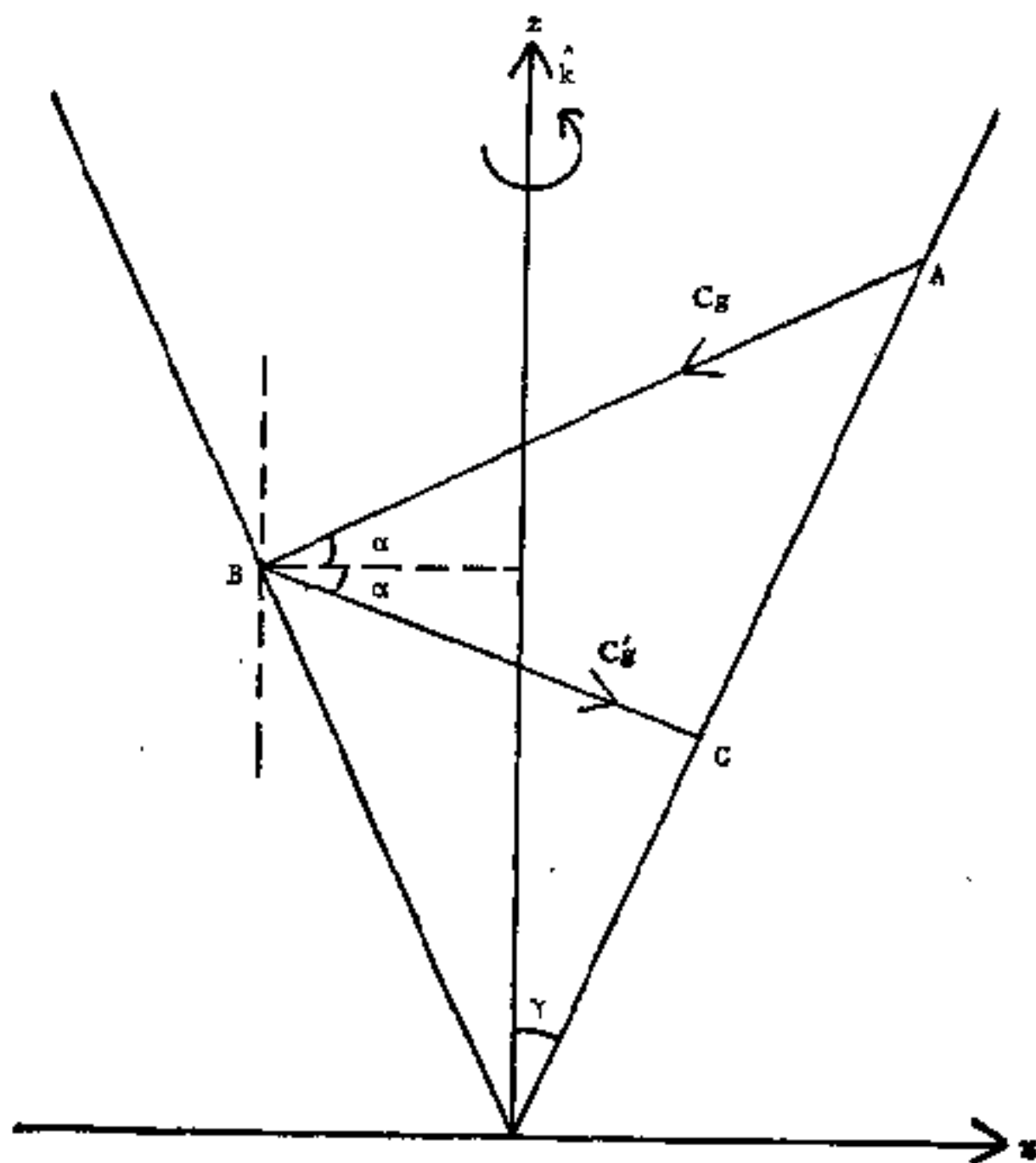


图 13

[标有星号的习题取自麻省理工学院数学系的旋转流体动力学教程。]

- 7.5) 对于球内的惯性型运动讨论 Poincaré 问题。

a) 在柱坐标系中写出方程(7.5)及在 $r^2 + z^2 = a^2$ 处的边界条件 $\mathbf{Q}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ 。

b) 引入扁球坐标系 (μ, η) , 其定义如下

$$r = \left[\frac{4}{4 - \lambda^2} - \eta^2 \right]^{1/2} (1 - \mu^2),$$

$$z = \left[\frac{4}{\lambda^2} - 1 \right]^{1/2} \eta \mu.$$

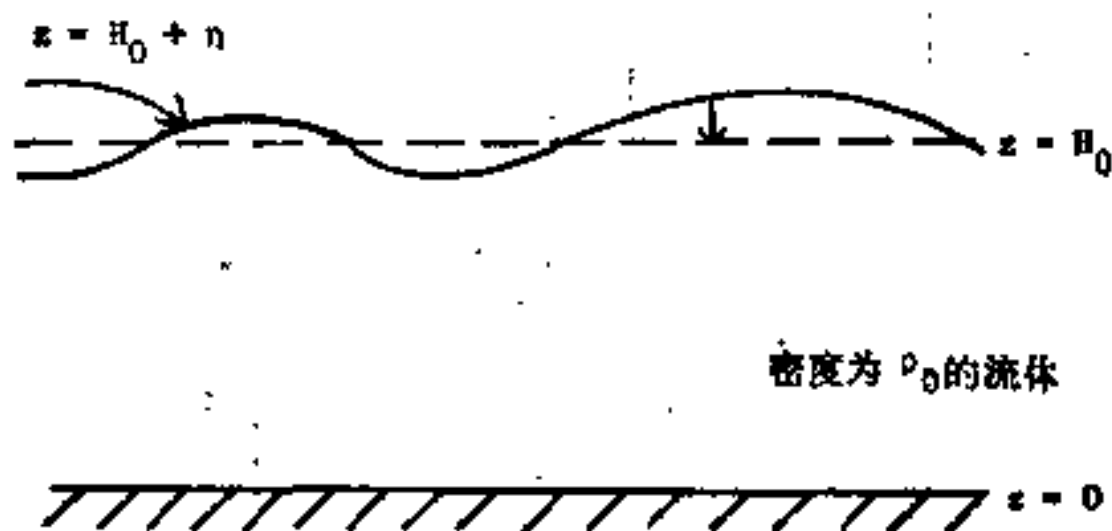
c) 用分离变量法求出 Φ 的解

$$\Phi_{mnk} = P_n^k \left(\frac{\eta}{\alpha_{mnk}} \right) P_n^k(\mu) e^{ik\varphi},$$

$$\alpha_{mnk} = \left(1 - \frac{\lambda_{mnk}^2}{4} \right)^{-1/2}$$

d) 求出确定本征值 λ_{mnk} 的超越方程。

7.6) 对于 $z = 0$ 处为固壁, $z = H_0$ 处为自由表面的区域 (见图 14) 中之均匀流体, 求惯性波的频率。



注: $\eta(x, y, t)$ 为从静止水面算起的自由表面高度。在 $z = H_0 + \eta(x, y, t)$ 处的边界条件为

$$\omega = \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ 和 } \phi = -\rho_0 g \eta.$$

第八章 Rossby 波

前面我们讨论了地转型的运动。它们是在具有一定条件的区域里存在的。这些区域之边界可由地转迴线覆盖，例如球和椭球，圆筒则是其中的一种退化情形。下面来讨论另一种区域（斜截圆筒）里的流动问题，这种区域内没有地转迴线（见 Pedlosky 和 Greenspan^[49]）。

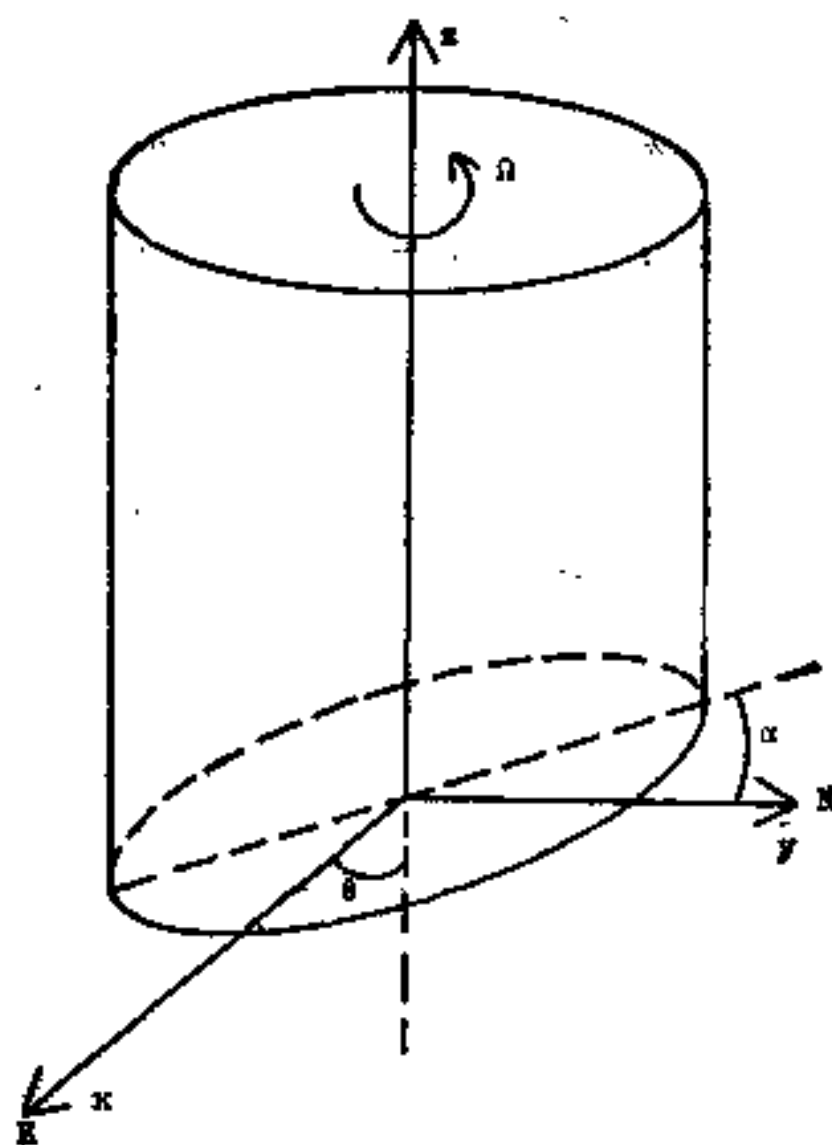


图 15 斜截圆筒

在这样的区域内，不存在流体柱能绕它运动而又能保持柱高不变的迴线，因此就不再存在地转型的运动了（见图 15）。然而，我们已证明惯性型运动是不具有环流的。因此若初始流

动具有平均环流，那么就一定会在这种区域里产生一种与惯性型运动不同的另一种类型的运动。我们将证明，当地转迴线不存在时，初始流动的环流将由一种低频波携带。这种低频波称为 Rossby 波。

斜 截 圆 筒

假定截角 α 不大，我们取 α 为扰动参量进行小参数展开。无粘运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2 \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} &= -\nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0.\end{aligned}$$

边界条件为

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0.$$

取振动解为

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} e^{i\lambda t}, \quad P = \Phi e^{i\lambda t}.$$

其中 λ , \mathbf{Q} 和 Φ 可表为 α 的幂级数

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_1 \alpha + \cdots, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 \alpha + \cdots, \\ \Phi &= \Phi_0 + \Phi_1 \alpha + \cdots.\end{aligned}$$

因为要研究的是 α 角对地转型运动的影响，所以我们令 $\lambda_0 = 0$ 。

将此试解代入运动方程，并令 α 的各次幂之系数相等，可得 $O(1)$ 阶的方程及边界条件

$$2 \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_0 = -\nabla \Phi_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{Q}_0 = 0. \quad (8.1)$$

$$\text{在 } z = 0, 1 \text{ 处 } \mathbf{Q}_0 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0,$$

$$\text{在 } r = a \text{ 处 } \mathbf{Q}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0.$$

由此可知， \mathbf{Q}_0 具有地转型的特性。

$O(\alpha)$ 阶的方程和边界条件为

$$i\lambda_1 \mathbf{Q}_0 + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q}_1 = -\nabla\Phi_1, \quad \nabla \cdot \mathbf{Q}_1 = 0. \quad (8.2)$$

$$\text{在 } r=a \text{ 处 } \mathbf{Q}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0, \quad (8.3)$$

$$\text{在 } z=1 \text{ 处 } \mathbf{Q}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0, \quad (8.4)$$

$$\text{以及在 } z = \operatorname{tg} \alpha y = \alpha y \text{ 处 } (\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 \alpha) \cdot (-\hat{\mathbf{k}} + \alpha \hat{\mathbf{j}}) = 0.$$

由于

$$\mathbf{Q}_0(x, y, \alpha y) = \mathbf{Q}_0(x, y, 0) + \alpha y \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Q}_0 + \dots,$$

所以准确至 $O(\alpha)$ 阶的下边界条件为

$$\mathbf{Q}_0 \cdot \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \left(\mathbf{Q}_1 + y \frac{\partial \mathbf{Q}_0}{\partial z} \right) = 0, \quad \text{在 } z=0. \quad (8.5)$$

为了自 (8.2) 式求出压强方程, 我们仍然采用常见的方法: 取 (8.2) 式的旋度得

$$i\lambda_1 \nabla \times \mathbf{Q}_0 - 2 \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial z} = 0. \quad (8.6)$$

因为 $\frac{\partial \mathbf{Q}_0}{\partial z} = 0$, 我们将 (8.6) 式对 z 进行积分得

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{i\lambda_1}{2} (z-1) \nabla \times \mathbf{Q}_0 + \mathbf{A}(x, y).$$

由边界条件 (8.4) 可知 $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$. 从而

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{Q}_1 = \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{i\lambda_1}{2} (z-1) \nabla \times \mathbf{Q}_0. \quad (8.7)$$

将 (8.7) 式代入 (8.5) 式有

$$\mathbf{Q}_0 \cdot \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \cdot \left(\frac{i\lambda_1}{2} \nabla \times \mathbf{Q}_0 - y \frac{\partial \mathbf{Q}_0}{\partial z} \right) = 0. \quad (8.8)$$

我们知道 \mathbf{Q}_0 满足地转方程, 因此

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_0}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{Q}_0 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla \Phi_0(x, y).$$

于是 (8.8) 式化为

$$\nabla^2 \Phi_0(x, y) + \frac{2}{i\lambda_1} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial x} = 0. \quad (8.9)$$

这便是 Rossby 波所满足的方程。它是利用 $z=0$ 处 \mathbf{Q}_0 与 $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{Q}_1$ 之间的关系导出的。可是,注意到(8.9)式与 z 无关,故此方程在 $0 \leq z \leq 1$ 中均成立。

在解决旋转流体运动问题时,上述方法是比较典型的。读者可将它与第五章中介绍的 Ekman 层分析方法作一类比。后者是通过边界条件的分析来获取内区流动方程的。由此看来,通过高阶解的边界条件来得到第一阶解靠的是 Taylor-Proudman 定理。所以,当 Taylor-Proudman 定理成立时,我们就应该用这种方法进行尝试。这应能有效地解决问题。

β 平面问题

我们已经导出了 Rossby 波满足的方程。在斜截圆筒中 Rossby 波取代了地转型流动。下面我们来说明,讨论 β 平面上的低频波运动时,可以得到完全相同的方程。这就是说,在高度随水平坐标变化的容器内和科氏力随纬度变化的 β 平面上,波动具有动力学的等价性。在第四章里,我们导出了一个近似描述旋转球上薄层流体运动的地转方程。如用矢量写出(4.12)和(4.13)式,则有

$$f\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla P_0. \quad (8.10)$$

其中 $f = f_0 + \beta y$ [北为 y 的正方向(见图 3)]。

在第二章中我们还证明了位势涡度为守恒量。在 β 平面上我们显然可以按照证明 Ertel 定理的同样步骤得到

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\nabla \lambda}{\rho} \cdot (\mathbf{B} + f\hat{\mathbf{k}}) \right] = 0. \quad (8.11)$$

其中 λ 为具有性质 $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ 的任意标量。我们下面将选取一个特定的 λ 。考虑一薄层流体,其下界为海底,流体高度

$H(x, y)$ 是可变的。下面来证明 $\left(\frac{L-z}{H}\right)$ 为守恒量, 因而适于作为前面所述的 λ 。

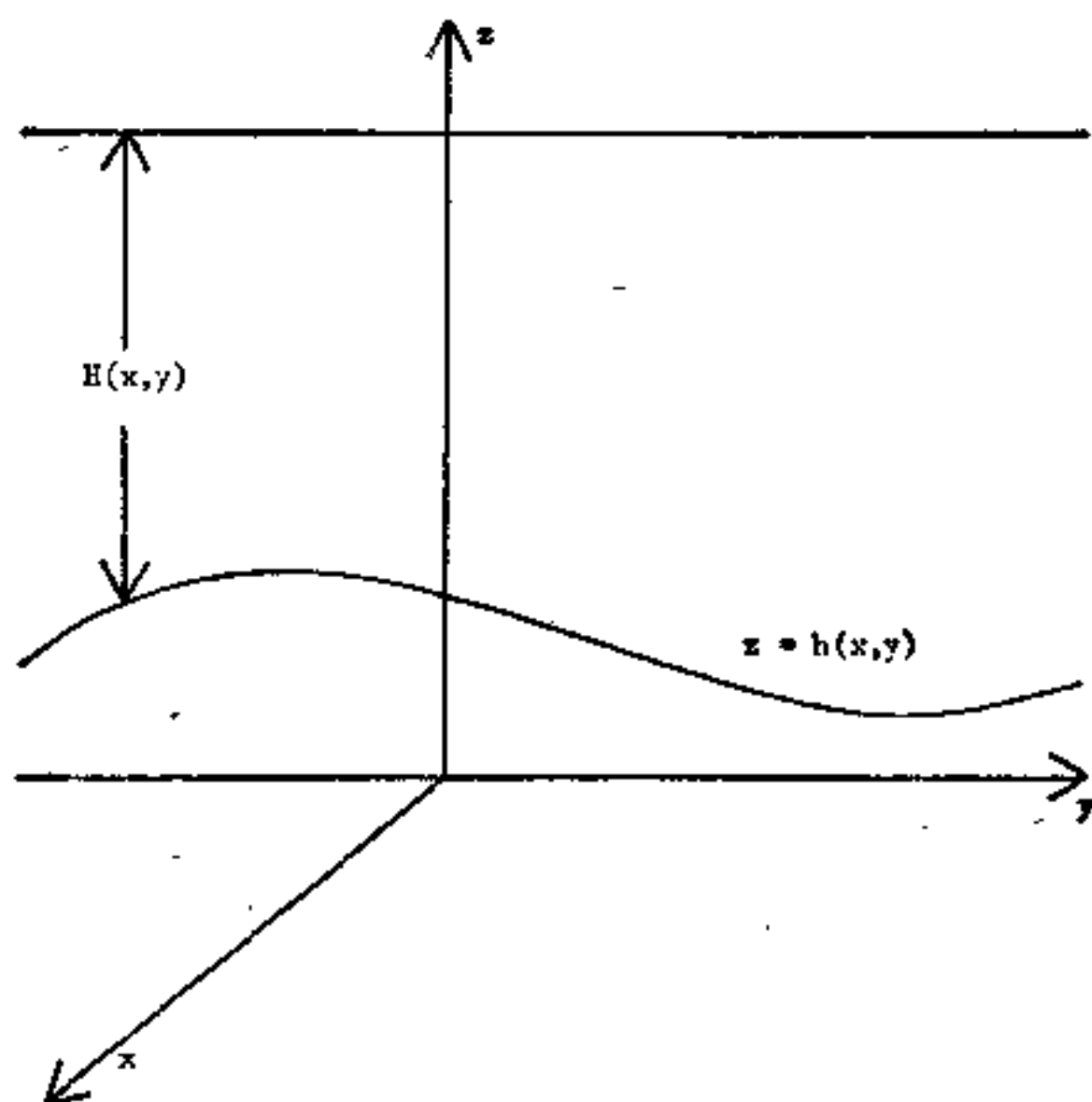


图 16 深度变化的海洋

令 $z = h(x, y)$ 表示底面, $z = L$ 表示水平表面, 高 $H(x, y)$ 等于 $L - h(x, y)$, 如图 16 所示。由散度方程有

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -(u_x + v_y). \quad (8.12)$$

在 $z = h$ 处,

$$w = uh_x + vh_y. \quad (8.13)$$

因为是地转流动, 故 $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ 。由此利用边界条件 (8.13) 式, 可对 (8.12) 式积分, 得到

$$w = (h - z)(u_x + v_y) + uh_x + vh_y. \quad (8.14)$$

在上表面 $z = L$ 处 $w = 0$, 所以

$$u_x + v_y = \frac{uh_x + vh_y}{H}.$$

因此, (8.14) 式可写作

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{L-z}{H} \right) (uh_x + vh_y) \\ &= \left(\frac{L-z}{H} \right) (uH_x + vH_y). \end{aligned}$$

由此可得到 $\frac{d}{dt} \left(\frac{L-z}{H} \right) = 0$ 的结论。

我们在导出 β 平面近似时, 假定流动是在一薄球壳中, 因此速度的水平分量 u 和 v 的量级比垂直分量 w 的量级大。旋度 \mathbf{B} 约等于

$$\hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

从而位势涡度

$$\pi = \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{L-z}{H} \right) \cdot \hat{\mathbf{k}} \left(f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

是守恒量。在密度均匀的流体中, 上述结论化为

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}{H} \right] = 0. \quad (8.15)$$

由此方程可导出由可变的 f 或可变的 H 所维持的 Rossby 波所满足的方程。

例 1) 令 H 为常量, $f = f_0 + \beta y$ 。将 (8.15) 式线性化可得

$$\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{H} v \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (8.16)$$

利用 (8.10) 式, 将上式中的 u, v 用 P 表示, 则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 P + \beta \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (8.17)$$

记 $P = \Phi(x, y)e^{i\lambda t}$ 便可得到波动方程

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\beta}{i\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (8.18)$$

它与 (8.9) 式所表示的 Rossby 波动方程是等价的。

例 2) 视 f 为常量, 并令 $H = L - \alpha y$ 。同样由 (8.15) 式可得线性化方程

$$\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{f}{H^2} v \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (8.19)$$

再如例 1 所示利用地转关系, 可得 P 满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 P + \frac{f}{H} \alpha \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (8.20)$$

这仍为 Rossby 波动方程。

从上述结果可以看出, 斜截圆筒可以模拟大洋流动的动力学属性。在斜截圆筒和大洋中都存在 Rossby 波。在作类比时, 图 15 中斜截圆筒较浅的一侧相当于大洋中的北面。这显然与科氏参数 f 在北方向上增大相对应。通过分析 (8.15) 式, 我们也发现当圆筒内流体高度 H 的减小方向指定为北方向时, 斜截圆筒模型与 β 平面具有动力学的对应关系。从实验的观点来看, 利用斜截圆筒来模拟大洋当然是非常方便的。要提醒读者注意的是, 在这种坐标系中, 我们主要考虑的是大洋的动力学性质, 而不是它的地理特征。

在一般情况下, 科氏参数 f 是纬度的函数, 水深 $H(x, y)$ 也是由海洋底形决定的变量。此时 (8.15) 式的线性化方程具有波状解。这些波更加复杂, 但其基本结构与例 1 和例 2 中的 Rossby 波相同。普遍情况的压强方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{f}{H} \left[\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} \right] = 0. \quad (8.21)$$

和地转型运动一样, Rossby 波具有非零的平均环流, 且与所有惯性型流动正交。Rossby 波的这些性质之所以成立, 是因为 $O(1)$ 阶的流场满足地转平衡关系(8.1)。当科氏参数或水深可变时, 我们可以用地转型和惯性型求得初值问题的解。但当地转迴线不存在时, 初始环流将引起 Rossby 波而不是地转型流动。要指出的是, 在边界具有地转迴线时, Rossby 波也可能产生。例如, 令 $H(x, y) = L - \alpha(x^2 + y^2)^{1/2}$, 在这样的区域中地转型流动和 Rossby 波可同时存在。不过, 所有的初始环流都由地转型流动携带。

下面我们来讨论斜截圆筒中 Rossby 波动方程(8.9)的解。边界条件为

$$\text{在 } r = a \text{ 处 } \Phi_0 = 0。$$

作试解 $\Phi_0 = A(x, y)e^{-\frac{x}{\lambda_1}}$ 代入(8.9)式, 便得 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{A}{\lambda_1^2} = 0, \quad (8.22)$$

其边界条件为

$$\text{在 } r = a \text{ 处 } A = 0。$$

本征函数可由下面给出的函数族表示, 即

$$A_{mn} = \cos m\theta J_m\left(k_{mn} \frac{r}{a}\right), \quad \sin m\theta J_m\left(k_{mn} \frac{r}{a}\right),$$

其中 k_{mn} 是 J_m 的第 n 个正零点。本征值为

$$\lambda_{1mn} = \pm \frac{a}{k_{mn}}。$$

所以,

$$\begin{aligned} P_0 = \sum_{mn} e^{i\lambda_{1mn}t - \frac{x}{\lambda_{1mn}}} [c_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta] \\ \times J_m\left(\frac{k_{mn} r}{a}\right). \end{aligned} \quad (8.23)$$

平 面 波 解

Rossby 波动方程的平面波解显示了 Rossby 波的一种特征,即存在以速度 $\alpha\lambda_1^2$ 向西传播的波动(见图 15)。考虑如下形式解

$$P = e^{i\alpha\lambda_1^2 t} \Phi_0(x, y),$$

其中 $\Phi_0 = ce^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_1x + k_2y$ 。将此试解代入(8.9)式便得弥散关系

$$\lambda_1 = -\frac{2k_1}{k_1^2 + k_2^2}. \quad (8.24)$$

从而可得相速度

$$\mathbf{C}_p = \frac{2k_1}{(k_1^2 + k_2^2)^{3/2}} \alpha \hat{\mathbf{k}}.$$

由此可见, Rossby 波的位相朝负 x 轴方向移动,或者说在 β 平面上朝西移动。Pedlosky 和 Greenspan^[49] 描述了变速旋转的斜截圆筒中 Rossby 波向西传播。

平面波的群速为

$$\mathbf{C}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \alpha\lambda_1(k) = \frac{2\alpha}{(k_1^2 + k_2^2)^2} [(k_1^2 - k_2^2)\hat{\mathbf{i}} + 2k_1k_2\hat{\mathbf{j}}].$$

所以,当 $k_1^2 > k_2^2$ 时,能量向东传播;当 $k_2^2 > k_1^2$ 时,能量向西传播。Longuet-Aiggins 在[43]中证明了在西边界上 $k_2^2 > k_1^2$ 的入射波反射后有 $k_1^2 > k_2^2$ (在东边界上反之亦然)。还可以证明(见 Pedlosky^[40]), $k_1^2 \gg k_2^2$ 的波动受到粘性作用的强烈耗散。因此, $k_2^2 > k_1^2$ 的波动中的能量在西边界反射后将受到粘性的耗散。这样,一部分能量经过反射后便回不到内部区域。这部分能量用来产生粘性边界层。象这样以“捕获”能量来建立西部边界层的过程,在大洋动力学中具有重要意义,因为强

大的大洋西边界层流正是由此产生的。大西洋的湾流和太平洋的黑潮就是其中的两个例子。

习 题

- 8.1) (a) 在具有水平顶 $z = L$ 和抛物面底 $z = \alpha(x^2 + y^2)$ 的圆筒中讨论 Rossby 波(见图 17)。求 Rossby 波动方程的解。
- (b) 在这样的容器内存在地转型流动吗?
- (c) 哪一型的运动携带初始环流?

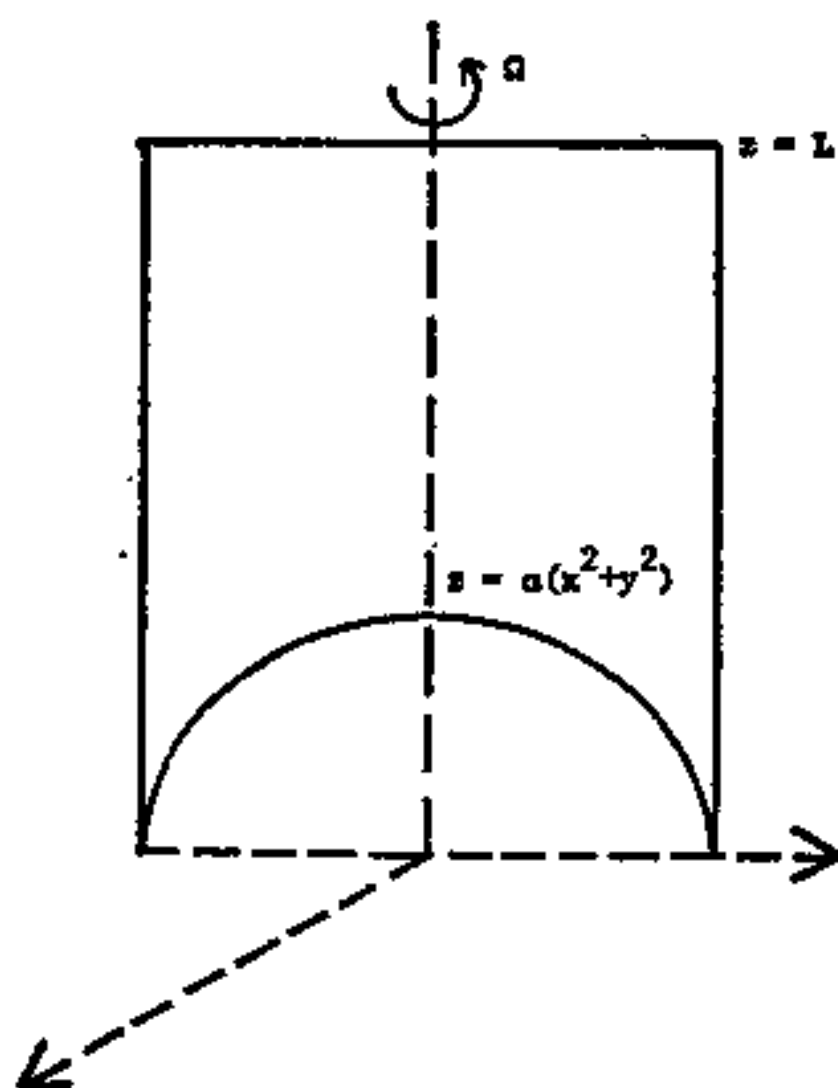


图 17

- 8.2) (a) 在南半球讨论 β 平面问题。分析南半球大洋中 Rossby 波的相速和群速之方向。
- (b) 边界层在西边界产生、还是在东边界产生?

(c) 利用你对上述问题的答案，解释南半球大洋中的强边界流。

8.3)* (a) 在两个半径分别为 r_1 和 r_2 并以角速度 Ω_1 和 Ω_2 旋转的无限长同轴圆筒之间的环形区域里，流体怎样流动？（流体为不可压缩的粘性流体。）

(b) 若圆筒两端的水平边界对流动影响不大，可不可以用速度的变化模拟 β 平面效应？（换句话说，可不可以用垂直置于旋转圆台上的圆筒之不同转速模拟 β 效应。）

第九章 垂直切变层

我们在第五章里讨论了旋转圆筒中的有关流动问题。在那里,我们说明了可以用 Ekman 层抽吸效应来确定 $O(1)$ 阶的内区运动。现在,我们再来看图 7 中介绍的情况。当圆筒底面的角速度增加时,Ekman 层的抽吸作用便产生了 $O(E^{1/2})$ 量级的负垂直质量通量。同样,在一般的情况下,我们可以预计内区将存在小的垂直质量通量。此通量显然要经过某一渠道进行循环,这就要求我们讨论由旋转流体维持的垂直切变层。

首先,我们考虑垂直圆筒中的流动。由粘性流体定常运动方程

$$2\hat{k} \times \mathbf{q} = -\nabla P + E\nabla^2 \mathbf{q}, \quad (9.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (9.2)$$

出发,我们在第五章中得到了压强方程

$$E^2 \nabla^6 P + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (9.3)$$

$E^{1/3}$ 层

为了讨论侧边界层的结构,记

$$xE^{\alpha} = r - a_0$$

故

$$\frac{\partial}{\partial r} = E^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x}.$$

对方程(9.3)进行上述代换后,忽略高阶小量,可得

$$E^{2-6\alpha} \frac{\partial^6 P}{\partial x^6} + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (9.4)$$

由方程中两项的平衡关系可导出

$$\alpha = \frac{1}{3}.$$

也就是说,存在无量纲厚度为 $O(E^{1/3})$ 的垂直切变层。

下面来求 \bar{q} 和 \bar{P} 的渐近展开式 [$(-)$ 表示 $E^{1/3}$ 层中的量]。因为这一边界层必须使 $O(E^{1/3})$ 量级的垂直质量通量得以循环,若记速度垂直分量 $\bar{w} = O(E^a)$, 则有

$$E^{a+1/3} = E^{1/2}, \text{ 进而 } a = \frac{1}{6}.$$

我们现在讨论的问题是轴对称的,故可假定 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ 。于是散度方程可表为

$$E^{-1/3} \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (9.5)$$

由此可知

$$\bar{u} = O(E^{1/2}).$$

动量方程的各分量为

$$-2\bar{v} = -E^{-1/3} \bar{P}_x + E^{1/3} \bar{u}_{xx}, \quad (9.6)$$

$$2\bar{u} = E^{1/3} \bar{v}_{xx}, \quad (9.7)$$

$$0 = -\bar{P}_z + E^{1/3} \bar{w}_{xz}. \quad (9.8)$$

由(9.7)和(9.8)可得

$$\bar{v} = O(E^{1/6}) \text{ 及 } \bar{P} = O(E^{1/2}).$$

所以,我们可将速度分量和压强渐近地表示成 $E^{1/6}$ 的幂级数

$$\bar{u} = E^{1/2} \bar{u}_2 + \cdots,$$

$$\bar{v} = E^{1/6} \bar{v}_1 + \cdots,$$

$$\bar{w} = E^{1/6} \bar{w}_1 + \cdots,$$

$$\bar{P} = E^{1/2} \bar{P}_3 + \dots$$

从而高阶近似的方程为

$$\bar{u}_{3x} + \bar{w}_{1z} = 0, \quad (9.9)$$

$$-2\bar{v}_1 = -\bar{P}_{3x}, \quad (9.10)$$

$$2\bar{u}_3 = \bar{v}_{1xx}, \quad (9.11)$$

$$0 = -\bar{P}_{3z} + \bar{w}_{1xz}. \quad (9.12)$$

$E^{1/4}$ 层

我们已经找出了量级为 $O(E^{1/3})$ 的垂直切层。此边界层中垂直速度分量的量级使相应的垂直质量通量与内区流动的垂直通量量级相同,均为 $O(E^{1/3})$ 。但是,注意到切向速度分量 \bar{v} 的量级为 $O(E^{1/6})$,而具有一般侧边界条件的内区中速度量级为 $O(1)$,所以不可用此边界层来匹配内区(内区速度 v 是由 Ekman 层抽吸条件确定的,并不一定要满足侧边界条件)。由于这一缘故,我们必须寻求另一个速度分量量级为 $O(1)$ 的垂直切变层。

在此切变层中,记

$$\eta E^\beta = r - a, \quad \beta \approx \frac{1}{3}.$$

故

$$\frac{\partial}{\partial r} = E^{-\beta} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

以 (\sim) 表示此边界层中的有关量,则压强方程(9.3)经尺度分析后化为

$$E^{2-6\beta} \frac{\partial^6 \tilde{P}}{\partial \eta^6} + 4 \frac{\partial^3 \tilde{P}}{\partial z^3} = 0. \quad (9.13)$$

对 $\beta > \frac{1}{3}$ 的情形,此方程化为

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial \eta^2} = 0。$$

然而,此方程没有非平凡解,因为其非平凡解不能满足速度分量 \tilde{v} 的边界条件,并保证

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{P} = 0。$$

因此 β 必须小于 $\frac{1}{3}$ 。于是,方程(9.13)简化为

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} = 0。 \quad (9.14)$$

动量方程的各分量为

$$-2\tilde{v} = -E^{-\beta} \tilde{P}_{,\eta} + E^{1-2\beta} \tilde{w}_{,\eta\eta}, \quad (9.15)$$

$$2\tilde{u} = E^{1-2\beta} \tilde{v}_{,\eta\eta}, \quad (9.16)$$

$$0 = -\tilde{P}_{,z} + E^{1-2\beta} \tilde{w}_{,\eta\eta}。 \quad (9.17)$$

轴对称的散度方程为

$$E^{-\beta} \tilde{u}_{,\eta} + \tilde{w}_{,z} = 0。 \quad (9.18)$$

注意到 $\tilde{v} = O(1)$, 则由(9.16)可得

$$\tilde{u} = O(E^{1-2\beta})。$$

再由(9.18)有

$$\tilde{w} = O(E^{1-3\beta})。$$

因为 $\beta < \frac{1}{3}$, 故方程(9.15)右边的两项中 $E^{-\beta} \tilde{P}_{,\eta}$ 量级较大。

由 $E^{-\beta} \tilde{P}_{,\eta}$ 与 $2\tilde{v}$ 的平衡关系可知

$$\tilde{P} = O(E^{\beta})。$$

从而(9.17)式化为 $\tilde{P}_{,z} = 0$ 。再加上垂直质量通量为 $O(E^{1/2})$ 这一条件,可得

$$E^{1-3\beta} E^{\beta} = E^{1/2}。$$

故

$$\beta = \frac{1}{4}。$$

因此,第二个切变层的无量纲厚度为 $O(E^{1/4})$ 。切变层内各量可表为以 $E^{1/4}$ 为幂的渐近级数

$$\tilde{u} = \tilde{u}_2 E^{1/2} + \dots,$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \dots,$$

$$\tilde{w} = \tilde{w}_1 E^{1/4} + \dots,$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_1 E^{1/4} + \dots。$$

高阶近似的方程为

$$\tilde{u}_{2\eta} + \tilde{w}_{1z} = 0, \quad (9.19)$$

$$-2\tilde{v}_0 = -\tilde{p}_{1\eta}, \quad (9.20)$$

$$2\tilde{u}_2 = \tilde{v}_{0\eta\eta}, \quad (9.21)$$

$$0 = \tilde{p}_{1z0} \quad (9.22)$$

由(9.22)式可知,在 $E^{1/4}$ 层里 Taylor-Proudman 定理近似成立。我们还知道, $E^{1/3}$ 层内的运动方程与内区运动方程明显不同。 $E^{1/3}$ 层具有明显的垂直结构,即在垂直方向上具有较大的变化。这样,由没有垂直结构的内区开始,到 \tilde{u} 和 \tilde{v} 与 z 无关而 \tilde{w} 与 z 线性相关的 $E^{1/4}$ 层[见方程 (9.19)–(9.22)],进而到具有更复杂垂直结构的 $E^{1/3}$ 层,这就是侧边界层的模型。

上述垂直切变层也称为 Stewartson 层。在流动的任何局部不连续处都存在这种切变层。例如,在 Taylor 柱的柱面上有此内切变层;在圆筒的侧面附近也有此切变层。

下面进一步讨论与 $E^{1/4}$ 层有关的方程。我们希望解出具有适当边界条件的方程 (9.19)–(9.22)。因为 Ekman 层比 $E^{1/4}$ 层薄得多,故其抽吸作用在 $E^{1/4}$ 层中依然存在。于是,边界条件为

$$\text{在 } z = 0, 1 \text{ 处 } E^{1/4}\tilde{w}_1 = \pm \frac{E^{1/2}}{2} \cdot E^{-1/4} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{v}_0 - v_B),$$

其中 v_B 为圆筒的顶边界和底边界之速度。由 $v_B = v_B(r)$ 有

$$\frac{\partial}{\partial \eta} v_B(r) = \frac{\partial}{\partial \eta} v_B(E^{1/4}\eta + a) = O(E^{1/4}).$$

所以,上述边界条件经量级比较后化为

$$\tilde{w}_1 = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{v}_0, \text{ 在 } z = 0, 1 \text{ 处。} \quad (9.23)$$

侧边界条件为

$$\text{在 } \eta = 0, \tilde{v}_0 = v_w - v_l(a), \quad (9.24)$$

其中 v_w 为侧边界速度, v_l 为内区速度。后者可用第五章中介绍的方法确定。

由方程 (9.12) 和 (9.21) 可得

$$\tilde{v}_{0\eta\eta\eta} + 2\tilde{w}_{1z} = 0. \quad (9.25)$$

因为 (9.20) 和 (9.22) 表明 \tilde{v}_0 与 z 无关, 故由 (9.25) 及 (9.23) 得

$$\tilde{w}_1 = -\frac{1}{2} \tilde{v}_{0\eta\eta} \left(z - \frac{1}{2} \right). \quad (9.26)$$

再利用边界条件 (9.23), 可得到 \tilde{v}_0 满足的方程, 即

$$\tilde{v}_{0\eta} = \frac{1}{2} \tilde{v}_{0\eta\eta\eta}. \quad (9.27)$$

由此解得

$$\tilde{v}_0 = [v_w - v_l(a)] e^{-\sqrt{2}\eta}. \quad (9.28)$$

上述解中利用了边界条件 (9.24) 式。将 \tilde{v}_0 的解代入方程 (9.19) 和 (9.21), 得到如下方程

$$u_1 = [v_w - v_l(a)] e^{-\sqrt{2}\eta}, \quad (9.29)$$

$$w_1 = -\sqrt{2} \left(z - \frac{1}{2} \right) [v_w - v_l(a)] e^{-\sqrt{2}\eta}. \quad (9.30)$$

由此便得到 $E^{1/4}$ 层中速度分量的解。如此得到的 $E^{1/4}$ 层满足水平速度分量的边界条件。然而其中的垂直质量通量却为零。即

$$M = \int_0^1 dz \int_0^\infty -\sqrt{2} \left(z - \frac{1}{2} \right) (v_w - v_l) e^{-\sqrt{2}\eta} d\eta = 0.$$

所以,必须存在量级为 $O(E^{1/3})$ 的更薄的侧边界层,通过它来循环内区的垂直质量通量。

下面再来讨论一下 $E^{1/3}$ 层。其运动方程为(9.9)–(9.12)。由(9.9)和(9.11)可得

$$-2\bar{\omega}_{1z} = \bar{v}_{1xx} \quad (9.31)$$

再由(9.10)和(9.12)有

$$2\bar{v}_{1z} = \bar{\omega}_{1xx}, \quad (9.32)$$

从而

$$\frac{\partial^6 \bar{\omega}_1}{\partial x^6} + 4\bar{\omega}_{1xx} = 0. \quad (9.33)$$

从这里我们发现,方程(9.31)和(9.32)与描述 Ekman 层的一对方程相似,只是对水平方向和垂直方向作了交换。我们可以用涡度的产生来解释这些方程。涡度写成分量形式就是

$$\nabla \times \mathbf{q} = \mathbf{B} = X\hat{\mathbf{r}} + Y\hat{\boldsymbol{\theta}} + Z\hat{\mathbf{k}}.$$

在高阶近似时有

$$Y = -\bar{\omega}_{1x} \text{ 及 } Z = \bar{v}_{1x}.$$

故(9.31)和(9.32)可写作

$$-2\bar{\omega}_{1z} = Z_{xx} \quad (9.34)$$

和

$$-2\bar{v}_{1z} = Y_{xx}. \quad (9.35)$$

由此看出,垂直速度在 x 方向的变化(或流线的延伸)产生垂直涡度分量。后者确定了水平速度的环流。而水平速度在 x 方向的变化(或流线的倾斜)则产生水平涡度分量。后者确定了垂直速度的环流。

在确定边界条件时,注意 Ekman 层比 $E^{1/3}$ 层薄得多,故 Ekman 层抽吸条件依然成立。因而上、下边界条件就是

$$\bar{\omega}_1 = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E^{1/6} \bar{v}_1 - v_W(a + E^{1/3}x)),$$

$$\text{在 } z = 0, 1 \text{ 处。} \quad (9.36)$$

在图 6 所示的例子中, 在 $z = 0$ 处 $v_w \sim r$; 在 $z = 1$ 处 $v_w = 0$ 。于是, 高阶近似的边界条件为

$$\text{在 } z = 0, 1 \text{ 处 } \bar{w}_1 = 0。 \quad (9.37)$$

下面我们就在边界条件 (9.37) 下求如下方程的解。

$$\frac{\partial^6 \bar{w}_1}{\partial x^6} + 4 \bar{w}_{1zz} = 0。$$

可利用的其他条件为通量守恒条件

$$a \int_0^1 \int_0^\infty \bar{w}_1 dx dz = \int_0^z r w_{\text{内区}} dr$$

和 $x = 0$ 处 $\bar{v}_1 = 0$, $x \rightarrow \infty$ 则 $\bar{w}_1 \rightarrow 0$ 。

结果是

$$w_1 = e^{-mx} \sin \frac{m^3}{2} (z - 1),$$

其中

$$\frac{m^3}{2} = -n\pi, \text{ 故有 } m = |2n\pi|^{1/3} \left[\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \right]。$$

因为对每一整数 n 有两个实部为正的 eigenvalue, 这就可能同时满足通量 $\int_0^\infty \bar{w}_1 dx$ 的边界条件及速度 \bar{v}_1 的边界条件。从而确定方程的解。

至此, 我们研究了两个侧边界层的结构。它们不仅保证了内区垂直质量通量的循环, 而且满足了边界条件及内区与侧边界的衔接条件。但是, 关于侧边界层结构还有其他的理论。当涉及质量注入现象时, 就必须考虑更复杂的边界条件及边界几何结构。这样一来就必须利用 $E^{1/12}$ 或 $E^{1/5}$ 或 $E^{1/7}$ 的渐近幂级数展开式。一般说来, 当边界的法向矢量与旋转轴正交时 (即 $\hat{n} \cdot \Omega = 0$), 边界层问题比较难解决。在与球面有关的问题中, 赤道区域是比较难办的。在那里, 关于 Ekman

层的分析不再成立。Stewartson^[62] 研究了赤道区域的边界层。他的研究结果表明,在赤道附近纬度带宽为 $O(E^{1/5})$ 的区域里,边界层的厚度为 $O(E^{2/5})$ 。在分析同心球壳之间的流动时,Stewartson 证明,在内球赤道面上还需要一个量级为 $O(E^{1/2})$ 的边界层,以保证水平速度不出现奇异现象。由此可见,在分析旋转流体的垂直边界层时,将涉及到相当复杂的渐近分析方法。

斜 截 圆 筒

现在我们来讨论斜截圆筒中的 $E^{1/2}$ 层。我们知道,在这种区域里不存在地转迴线,流动的特征显然不同于上、下底与侧面正交的圆筒中的流动特性。下面我们将说明,在这两种不同的区域中,垂直切变边界层也是不同的。

斜截圆筒没有轴对称性质,因此在运动方程中 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 项不为零。于是, $E^{1/2}$ 层的方程为

$$-2\bar{v}_1 = -\bar{P}_{3x}, \quad (9.38)$$

$$2\bar{u}_3 = -\frac{1}{a}\bar{P}_{3\theta} + \bar{v}_{1xx}, \quad (9.39)$$

$$0 = -\bar{P}_{3z} + \bar{w}_{1xz}, \quad (9.40)$$

$$\bar{u}_{3x} + \frac{1}{a}\bar{v}_{1\theta} + \bar{w}_{1z} = 0. \quad (9.41)$$

边界条件一般仍为在筒顶和筒底 $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ 。但是,在斜截圆筒上,截面的法线矢量与旋转轴 $\hat{\mathbf{k}}$ 不平行。由图 15 可知,在底边界上 $r = a$ 处

$$z = \alpha y = \alpha a \sin \theta \quad (\text{对小角度 } \alpha).$$

故有 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} = -\bar{w}_1 + \alpha \cos \theta \bar{v}_1$ 。

在侧边界 $x = 0$ 处, \bar{v}_1 仍需满足一定的边界条件; 而 \bar{w}_1 则还必须满足流量 $\int_0^\infty \bar{w}_1 dx$ 与内区垂直流量相等的条件。当离开边界进入内区时, 各边界层量都趋于零。即

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有 $\bar{v}_1 \rightarrow 0$ 和 $\bar{w}_1 \rightarrow 0$ 。

由方程 (9.39) 和 (9.41) 中消去 \bar{u}_3 , 可得

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a} \bar{P}_{3\theta} + \bar{v}_{1xx} \right)_x + \frac{1}{a} \bar{v}_{1\theta} + \bar{w}_{1z} = 0。$$

再以 (9.38) 式代入后得

$$-\frac{1}{a} \bar{v}_{1\theta} + \frac{\bar{v}_{1xxx}}{2} + \frac{1}{a} \bar{v}_{1\theta} + \bar{w}_{1z} = 0。$$

即

$$\bar{v}_{1xxx} = -2\bar{w}_{1z}。 \quad (9.42)$$

由 (9.38) 和 (9.40) 可得如下方程

$$\bar{w}_{1xxx} = 2\bar{v}_{1z}。 \quad (9.43)$$

由此可见, (9.42) 和 (9.43) 这一对关于 \bar{w}_1 和 \bar{v}_1 的方程在轴对称和非轴对称情况下都成立。

因此, 我们必须解方程

$$\frac{\partial^6 \bar{w}_1}{\partial x^6} + 4 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial z^2} = 0。 \quad (9.44)$$

边界条件为

$$z = 1 \text{ 处 } \bar{w}_1 = 0,$$

$$z = 0 \text{ 处 } -\bar{w}_1 + \alpha \cos \theta \bar{v}_1 = 0 \text{ (当 } \alpha \text{ 很小时),}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ 则 } \bar{w}_1 \rightarrow 0,$$

$$x = 0 \text{ 处 } \bar{v}_1 = 0,$$

和 $\int_0^\infty \bar{w}_1 dx$ 已知。

方程的解仍具有如下形式

$$\begin{cases} \bar{w}_1 = A e^{-mx} \sin \frac{m^3}{2} (z-1), \\ \bar{v}_1 = A e^{-mx} \cos \frac{m^3}{2} (z-1). \end{cases} \quad (9.45)$$

下边界条件要求

$$\operatorname{tg} \frac{m^3}{2} = \alpha \cos \theta_0.$$

条件 $x \rightarrow \infty$ 则 $\bar{w}_1 \rightarrow 0$ 意味着 $\operatorname{Re} m > 0$ 。故当 m 很小时有

$$\begin{cases} m = |2\alpha \cos \theta|^{1/3}, \text{ 当 } \cos \theta > 0 \text{ 时;} \\ m = |2\alpha \cos \theta|^{1/3} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \right), \text{ 当 } \cos \theta < 0 \text{ 时。} \end{cases} \quad (9.46)$$

但是,为了同时满足 $x=0$ 处 \bar{v}_1 的边界条件和通量 $\int_0^\infty \bar{w}_1 dz$ 为定值的条件, m 必须是双值的。由此看来,仅在 $\cos \theta$ 小于零的地方才有解。为了以此来解释海洋中的现象,我们以斜截圆筒作为 β 平面(见图 4)上海洋的动力学模型。从而可以预计,在北半球海洋中,仅在西边界存在上述的边界层。这正是人们所观察到的现象。大洋内部的环流正是通过西边界的窄边界层进行循环的。因为边界层非常狭窄,所以边界层中海流的速度是很高的。在大西洋中,这样的一支海流称为墨西哥湾流,在太平洋中则为黑潮。正如我们在第八章结束时所说的,边界流的能量可以来源于 Rossby 波奇妙的反射特征。

下面,我们把斜截角 α 写成 E 的幂函数,进一步研究斜截圆筒中侧边界流的性质。记 $\alpha = E^\gamma$ 。我们将讨论 γ 变化时边界层方程的形式。首先,在 $\gamma > \frac{1}{2}$ 的情况下,圆筒底部扰动的量级小于 Ekman 层的厚度。因此,倾斜底面不会透过 Ekman 层。在一阶近似下,前面关于侧边界层的结构分析依然成立。

其次,考虑 $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ 的情况。由方程(9.45)和(9.46), 我们知道边界层各参量与边界层坐标 $x = E^{-1/3}(\gamma - \alpha)$ 的关系具有如下形式

$$e^{-|x \cos \theta|^{1/3} E^{1/3} E^{-1/3}(\gamma - \alpha)}.$$

因此,侧边界层的厚度为 $O(E^{(1-\gamma)/3})$ 。在倾斜底面, Ekman 层抽吸条件可写作

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \mathbf{q} &= -\bar{w}_1 + E^\gamma \cos \theta \bar{v}_1 \\ &= E^{1/2} E^{-(1-\gamma)/3} \frac{1}{2a} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9.47)$$

上式中各项的量级取决于 γ 。当 $\gamma < \frac{1}{4}$ 时,边界条件便是

$$\hat{n} \cdot \mathbf{q} = -\bar{w}_1 + E^\gamma \cos \theta \bar{v}_1 = 0.$$

这一条件与前面所得到的 α 很小时的条件是一样的。当 $\gamma > \frac{1}{4}$, 边界条件变成

$$-\bar{w}_1 = E^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{3}} \frac{1}{2a} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}.$$

这一条件是表征 $E^{1/4}$ 侧边界层的边界条件[见(9.23)式], 而不是表征 $E^{1/3}$ 层的边界条件。

我们现在将讨论结果作如下总结。设想圆筒底面的斜率连续增大。当斜角 α 小于 $O(E^{1/2})$ 时,它对侧边界层不产生影响。 α 增大到 $O(E^{1/2}) < \alpha < O(E^{1/4})$ 时,侧边界层具有 $E^{1/4}$ 层的结构。当 α 增至 $O(E^{1/4}) < \alpha < 1$, 侧边界层的厚度便为 $O[(E/\alpha)^{1/3}]$, 且仅在圆筒的西边有此侧边界层。在过渡点 $\alpha = O(E^{1/4})$, 侧边界层的厚度为 $O(E^{1/4})$, 上述两种边界层一致。

一个大洋模型: Sverdrup 关系

我们来讨论一个由表面应力驱动的大洋环流模式, 从中得到海洋学中关于大洋内部北向质量输送的著名公式。这一大洋质量输送的循环需要一个边界层。我们在前面的分析中已证明, 此边界层位于大洋的西边界。大洋环流西向强化的问题与西边界层的形成有着密切的关系。

在大洋内部, β 平面上的运动方程和连续方程为

$$\begin{cases} f\hat{k} \times \mathbf{q} = -\nabla P \\ \nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \end{cases} \quad (9.48)$$

其中 $f = f_0 + \beta y$, $\mathbf{q} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ 。

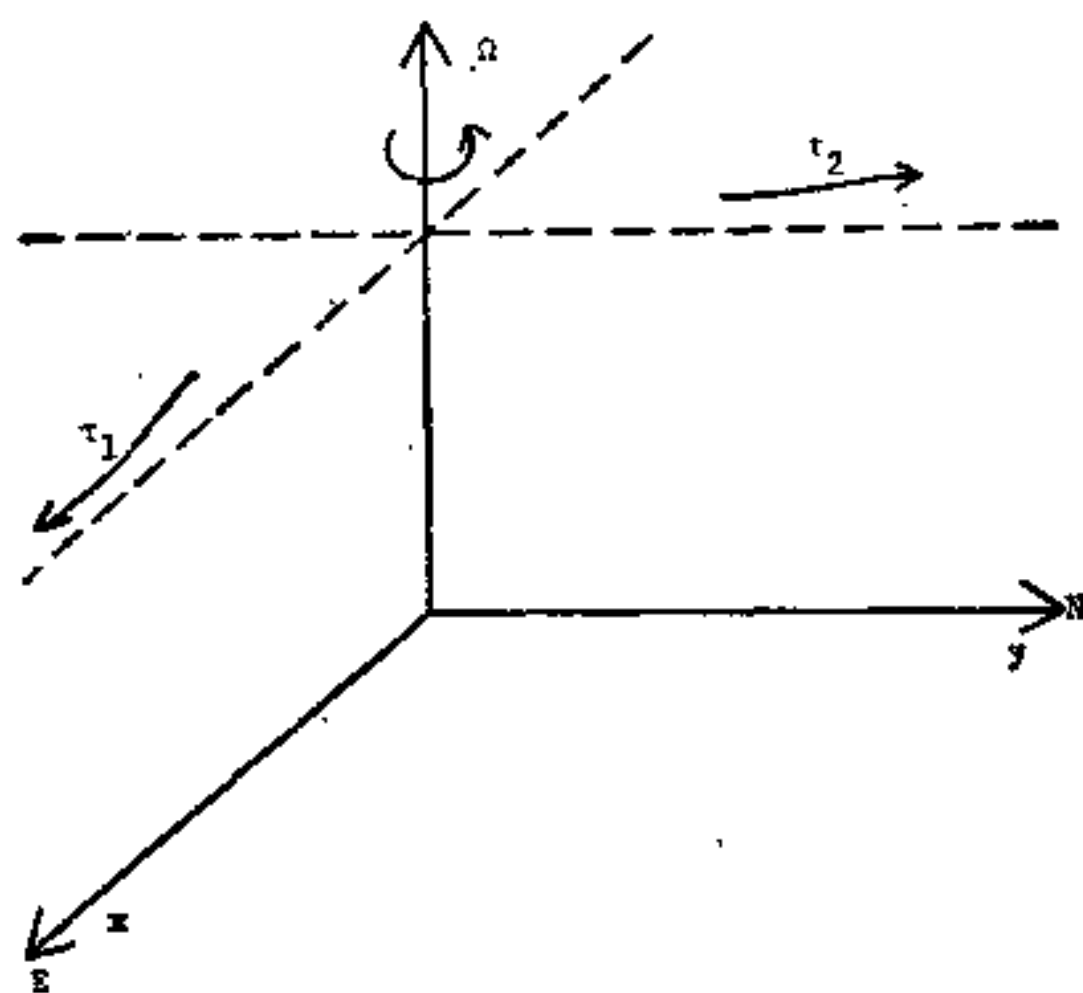


图 18 大洋表面的风应力分量

边界条件为

$$\text{在 } z=0 \text{ 处 } w=0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = E^{-1/2}\tau_1, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = E^{-1/2}\tau_2;$$

$z = 1$ 处 $u = v = w = 0$ 。

$[E^{-1/2}(\tau_1, \tau_2)]$ 为无量纲表面风应力的分量。]

由方程 (9.18) 可得到我们熟悉的内区运动性质

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (9.49)$$

以及

$$f \frac{\partial w}{\partial z} = \beta v_0 \quad (9.50)$$

在上 Ekman 层, 记

$$E^{1/2} \xi = 1 - z,$$

则方程 (9.48) 化为

$$-f\theta = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2},$$

$$f\hat{u} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2},$$

$$E^{-1/2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

且有, 在 $\xi = 0$ 处, $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = -\tau_1$, $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -\tau_2$, $\hat{w} + w = 0$ 。由

此可得风应力驱动的大洋中 Ekman 层抽吸条件的表达式

$$z = 1 \text{ 处 } w = E^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_2}{f} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_1}{f} \right]. \quad (9.51)$$

而 Ekman 层中北向质量输送为

$$\begin{aligned} E^{1/2} \int_0^\infty \theta d\xi &= E^{1/2} \int_0^\infty -\frac{1}{f} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} d\xi \\ &= \frac{E^{1/2}}{f} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\frac{\tau_1}{f} E^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.52)$$

我们再来看大洋内部的流动解。注意到 w 的量级为 $O(E^{1/2})$ 或更小 [见 (9.51) 式], 而 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 也有同样的量级。所

以, (9.50) 式告诉我们 v 的量级也是 $O(E^{1/2})$ 。因为下 Ekman 层只能产生量级为 $O(E^{1/2})$ 但小于 v 的抽吸, 所以相对地它是不重要的。这样一来, 内区的流动问题就由方程 (9.50) 连同边界条件 (9.51) 和条件 $w|_{z=0} = 0$ 所给定。利用 $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, 将 (9.48) 式积分得到

$$w = \frac{\beta v}{f} z_0$$

将其代入边界条件 (9.51) 可得

$$v = \frac{f}{\beta} E^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_2}{f} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_1}{f} \right]. \quad (9.53)$$

利用 (9.52) 和 (9.53) 可得总的北向质量输送为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 v dz + \int_0^\infty w d\xi \\ &= E^{1/2} \left[\frac{1}{\beta} \frac{\partial \tau_2}{\partial x} - \frac{f}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_1}{f} - \frac{\tau_1}{f} \right] \\ &= \frac{E^{1/2}}{\beta} \left[\frac{\partial \tau_2}{\partial x} - \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \right] \\ &= \frac{E^{1/2}}{\beta} \hat{k} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (9.54)$$

这就是关于北向质量输送的 Sverdrup 关系。风应力 $\boldsymbol{\tau}$ 的旋度一般不为零, 所以在具有侧边界的大洋中必存在侧边界层, 以此来循环北向质量输送。我们已经证明, 这样的边界层仅在大洋西岸产生。图 19 是 Stommel 构造的大洋模型的流线示意图。其中用于计算的风应力 $\boldsymbol{\tau}$ 是实际风应力的合理近似。

大洋环流的 β 平面模式和斜截圆筒中的流动模式具有动力学的相似性。这一点促使人们进行了大量的实验工作。Maxworthy 和 Brawand^[44] 回顾了过去十年中人们所研究的最

重要的一些实验室模型。他们还对这些模型在模拟海洋现象时所取得的成就和局限性作了讨论，并指出了有关实验仪器的复杂性。

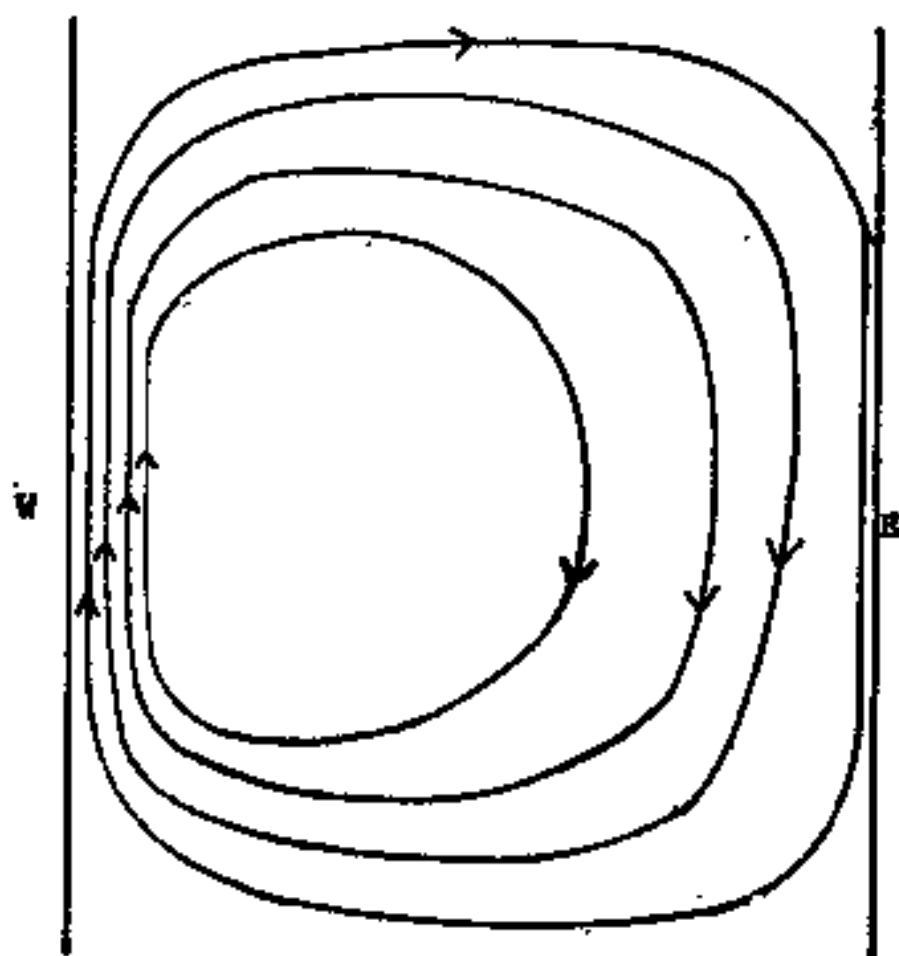


图 19 Stommel 的大洋环流模型中表明西边界流存在的流线图

习 题

- 9.1) 讨论形成垂直边界层所需的时间尺度。
- 9.2) 在同时考虑底形变化和科氏力随纬度变化的情况下，讨论侧边界层的结构。

记 $f = f_0 + \beta y$ ，且底面 $z = \alpha_1 y + \alpha_2 x$ 。其中 α_1, α_2 和 β 都是小参数。

对下列情况进行分析。

- 1) 某个小参数取决定性作用的情形。
- 2) 各小参数量级相同的情形。

如果你发现位于北半球的湖中存在东边界层，你能解释吗？

9.3) 对于圆筒中的定常流动, 导出垂直边界层中各高阶近似项。边界条件如下:

a) $z=0$ 处 $q = -r\hat{\theta}$, $z=1$ 处 $q = r\hat{\theta}$,

$r=a$ 处 $q=0$ 。

b) $z=0$ 处 $q = r\hat{\theta}$, $z=1$ 处 $q = r\hat{\theta}$,

$r=a$ 处 $q=0$ 。

c) $z=0$ 处 $q = r\hat{\theta}$, $z=1$ 处 $q=0$,

$r=a$ 处 $q = r\hat{\theta}$

9.4) 讨论深度为常数的矩形海盆 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 中的流动。假定表面风应力为 $\tau = -A \cos \frac{\pi y}{b} \hat{i}$ 。计算

a) 总的北向质量输送。

b) Ekman 层中的北向质量输送。

c) 进入 Ekman 层的总的向上输送。

假设 $x=a$ 处 $q \cdot \hat{i} = 0$ 。是否能计算东向质量输送? 画出总的质量输送示意图。

9.5)* 将浸没于旋转流体柱中的水平圆盘缓慢升起。当圆盘升到流体的上、下边界之间的中间位置时, 描述流体的准定常运动。

第十章 旋转作用与层化作用 之间的相似性

我们在第三章至第九章研究了均匀、旋转流体的流动问题。现在，我们来分析旋转流体中的层化作用。海洋和大气都是由密度变化的流体构成的，所以层化作用在许多地球物理问题中显然是很重要的。例如，在大洋中，太阳辐射造成了垂直密度梯度。不均匀的海水盐度也造成了不均匀的密度场。

方程(1.4)和(1.5)是描述密度不均匀的旋转流体运动的 Navier-Stokes 方程。要得到封闭的方程组，还需加上温度场 T 满足的方程(当层化由温度引起时)和流体的状态方程。在状态方程中，密度表示为温度和压强的函数。我们假定流体的热力学状态方程可用简单的近似方程来描述，即假定密度是温度的线性函数

$$\rho = \bar{\rho} - \bar{\rho}\alpha(T - \bar{T}). \quad (10.1)$$

其中 α 为热膨胀系数。温度 T 满足如下方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{\nu}{\rho c_p} \left[\nabla^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + 2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{q}) \right. \\ \left. \times \mathbf{q} - 2 \mathbf{q} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \times \mathbf{q} \cdot \nabla \times \mathbf{q} \right. \\ \left. - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{q})^2 \right] + \frac{\beta}{\rho c_p} \nabla^2 q, \end{aligned} \quad (10.2)$$

其中 ν 和 β 分别为运动学粘性系数和运动学体积粘性系数。 κ 是热扩散系数。

首先，我们来寻求流体处于静态平衡时(即 $\mathbf{q} = 0$ 时)的

定常解。此时,方程(1.5)和(10.2)化为

$$-\nabla P + \rho \nabla \left(G + \frac{Q^2 r^2}{2} \right) = 0 \quad (10.3)$$

和

$$\nabla^2 T = 0. \quad (10.4)$$

由 $\nabla \times (10.3)$ 得

$$\nabla \rho \times \nabla \left(G + \frac{Q^2 r^2}{2} \right) = 0.$$

故

$$\rho = \rho \left(G + \frac{Q^2 r^2}{2} \right). \quad (10.5)$$

我们来讨论 $G = gz$ 的情形。这时由方程(10.5)可写出

$$\rho = \rho \left(z + \frac{Q^2 r^2}{2g} \right).$$

因此,由方程(10.1)可知 $T = T \left(z + \frac{Q^2 r^2}{2g} \right)$ 。但是,拉普拉斯方程(10.4)不存在具有这种函数形式的非平凡解。由此得到的结论是,无运动时的定常解不存在,若存在定常解,流体就一定要有对流。不过,在多数地球物理问题中

$$\frac{Q^2 r^2}{2g} \ll z_0.$$

即地球引力远大于离心力。所以,忽略离心力的贡献 $\frac{Q^2 r^2}{2}$ 而近似地用 gz 表示引力势是合理的。作了这样的简化后,离心力引起的对流也就忽略了,从而存在一个静力学平衡的状态。这一近似的初态可表为

$$\mathbf{q} = 0, \quad \rho = \rho_0(z), \quad T = T_0(z).$$

在这样的平衡中隐含着如下假定:层化是稳定的,下层流体的密度大于上层流体的密度。

为了导出无量纲线性方程组,我们考虑对近似平衡状态

的小扰动。如果无扰动时流体只具有刚性旋转速度，则速度扰动的量级可表为 εQL ，其中 L 为长度特征量， $\frac{1}{Q}$ 为时间特征量。密度和温度可认为是下述三部分的和：① 平均值，② 因铅直层化引起的依赖于 z 的部分，③ 由速度扰动（量级为 $O(\varepsilon QL)$ ）引起的偏差部分（量级为 $O(\varepsilon)$ ）。因此，我们可写出

$$\begin{aligned}\rho &= \bar{\rho} + \Delta\rho\rho_0(z) + \varepsilon \frac{Q^2 L^2}{g} \bar{\rho}\rho', \\ T &= \bar{T} + \Delta TT_0(z) + \varepsilon \frac{\Delta T}{\Delta\rho} \cdot \frac{Q^2 L^2}{g} \bar{\rho}T', \\ \mathbf{q} &= \varepsilon QL\mathbf{q}', \\ P &= \bar{P} + \bar{\rho}gL P_0 + \varepsilon \bar{\rho}Q^2 L^2 P'.\end{aligned}$$

将上面各式代入方程 (1.4), (1.5) 和 (10.2) 并利用 (10.1) 式，忽略了 $O(\varepsilon^2)$ 项后，便可得到线性化的扰动方程。由简单的状态方程 (10.1) 式出发，我们可取 Boussinesq 近似，这样密度扰动量便仅在与引力有关的项里出现。Spiegel 和 Veronis^[61] 对 Boussinesq 近似作了系统的介绍。于是，对 Boussinesq 流体有如下无量纲线性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (10.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla P + T\hat{\mathbf{k}} + E\nabla^2 \mathbf{q}, \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + N^2 \mathbf{q} \cdot \nabla T_0 = \frac{E}{\sigma} \nabla^2 T \quad (10.8)$$

（为方便起见，已将撇号“'”略去不写）。引入新的无量纲量

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa} \quad (\text{Prandtl 数}) \quad (10.9)$$

和

$$N^2 = \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g}{L} \cdot \frac{1}{Q^2} \quad (\text{无量纲 Brundt-Vaisala 频率或浮力频率})$$

(N^2 也可用温度梯度表示为 $N^2 = \alpha \Delta T \frac{g}{L} \cdot \frac{1}{Q^2}$, 其中热膨胀系数 $\alpha = \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \cdot \frac{1}{\rho}$)。参数 N^2 是层化强度的度量, 也可表示为 $\frac{1}{f_R^2}$, 其中 f_R 称为内 Froude 数。在我们要讨论的许多问题中, N^2 被认为是常量。然而, 在实际的地球物理问题中, N^2 经常是随深度变化的。

为简单起见, 下面我们暂时令平衡温度场 T_0 与引力势 gz 成正比。于是在无量纲坐标系中有 $\nabla T_0 = \hat{k}$ 。

在对旋转、层化流体的流动方程组进行较仔细的研究之前, 我们先来分析旋转和层化这两种约束之间的相似性。Veronis^[68] 讨论了这一重要的性质, 我们在这里将他的研究作一总结。

考虑不旋转的层化流体, 它的近似层化情况与前面介绍的相同。因为不再有特征速度 QL , 我们需要用密度梯度 $\Delta \rho$ 的特征量对各参量进行尺度分析。这样便可得到无科氏力时与方程 (10.6)–(10.8) 等价的方程组

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (10.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\nabla P + T \hat{k} + R \nabla^2 \mathbf{q}, \quad (10.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \hat{k} = \frac{R}{\sigma} \nabla^2 T, \quad (10.12)$$

其中 $R = \frac{\nu}{\left[g \frac{\Delta \rho}{\rho_0} L^3 \right]^{1/2}}$ 。

下面用导出压强场位涡方程时所用的老办法对这一方程组作适当的变换。由 $\hat{k} \cdot (10.11)$ 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - R \nabla^2 \right) \omega = -\frac{\partial P}{\partial z} + T. \quad (10.13)$$

由 (10.12) 中解出 ω 并将它代入 (10.13), 可得

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial}{\partial t} - R \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{R}{\sigma} \nabla^2 \right) T \\
& = - \frac{\partial P}{\partial z} + T_0.
\end{aligned} \tag{10.14}$$

再由 $\nabla \cdot (10.11)$ 有

$$\nabla^2 P = \frac{\partial T}{\partial z}. \tag{10.15}$$

这样,将 (10.14) 对 z 求偏导数,并利用 (10.15) 式便得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - R \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{R}{\sigma} \nabla^2 \right) \nabla^2 P + \nabla_H^2 P = 0. \tag{10.16}$$

回忆无层化的旋转流体中的位涡方程 (5.7) 式,即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E \nabla^2 \right)^2 \nabla^2 P + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \tag{10.17}$$

显然,在二维运动 $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0 \right)$ 中,层化流体和旋转流体在下述两种情况下是完全类似的: ①在定常、线性的流动中,②在 Prandtl 数 $\sigma = 1$ 的流动中。在这两种条件下,方程 (10.16) 和 (10.17) 是等价的。所不同的只是 x 坐标和 z 坐标彼此相互交换。

请读者注意,我们前面讨论的旋转流体的许多性质都是由位涡方程 (10.17) 导出的。所以,可以期望由层化方程 (10.16) 也能导出类似的结果。Yih^[76] 介绍了层化流体的一般运动现象。下面,我们将讨论三个例子,它们都表示出二维层化流动和均匀、旋转流动之间的等价性。

(1) 与 Taylor 柱对应,层化流体中存在堵塞现象,即与 y 轴平行的无限长流体柱运动时就象水平的长条形刚体一样作整体运动。

(2) 层化提供维持波动的一种恢复力。在二维运动中,

由此产生的波动与惯性波类似，并称为内重力波。其平面波解为

$$P = \mathcal{P} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x + k_2 y.$$

其中 λ 满足

$$\lambda = \pm \frac{k_1}{|\mathbf{k}|}. \quad (10.18)$$

这一关系与(7.24)式表示的惯性波的弥散关系是等价的。只是坐标轴进行了交换。

(3) 显然，使用方程(10.16)和(10.17)的定常形式可以进行同样的边界层分析。在二维层化的流体中，在 $x = 0, 1$ 处有与 Ekman 层等价的垂直边界层；在 $z = 0, 1$ 处有与 Stewartson 层等价的水平边界层。在二维层化流体中还有与旋转增强类似的“热增强”问题。当外加垂直温度梯度突然增加时，由垂直边界层抽吸作用产生的环流便对内区流体产生热增强现象。

在三维运动问题中，旋转流体与层化流体之间不再具有相似性。主要原因是，旋转效应本身使流体趋向于“水平的”二维流动，三维运动不受限制的层化流体作二维运动时并不存在占优势的“水平方向”。

在后面各章中，我们将讨论旋转和层化都起重要作用的运动。特别要研究层化效应对均匀旋转流体运动性质的影响。

习 题

- 10.1) 由方程(10.10)–(10.12)导出层化流体中内波压强所满足的方程。
- 10.2) 假定上题得到的方程的解具有形式

$$P = \Phi(r)e^{i\lambda t}.$$

- a) 证明在边界上法向速度为零的封闭区域里本征值 λ 必须是实数。
 - b) 对应于不同本征值的本征函数是正交的。
 - c) 将上述结果与第七章中旋转流体内惯性波的相应结果比较。
- 10.3) 你估计在层化流体中有与 Rossby 波类似的低频波存在吗？叙述你的理由。
- 10.4) a) 对层化流体，导出 $x = 0$ 处垂直边界层内二维流动满足的方程。
- b) 导出 $x = 0$ 处内区流动应满足的且类似于 Ekman 层抽吸条件的条件。
- c) “热增强”时间尺度有多大？
- 10.5) 在给定边界条件下（图 20）解层化流体中一阶近似的定常内区流动和定常边界层流动。

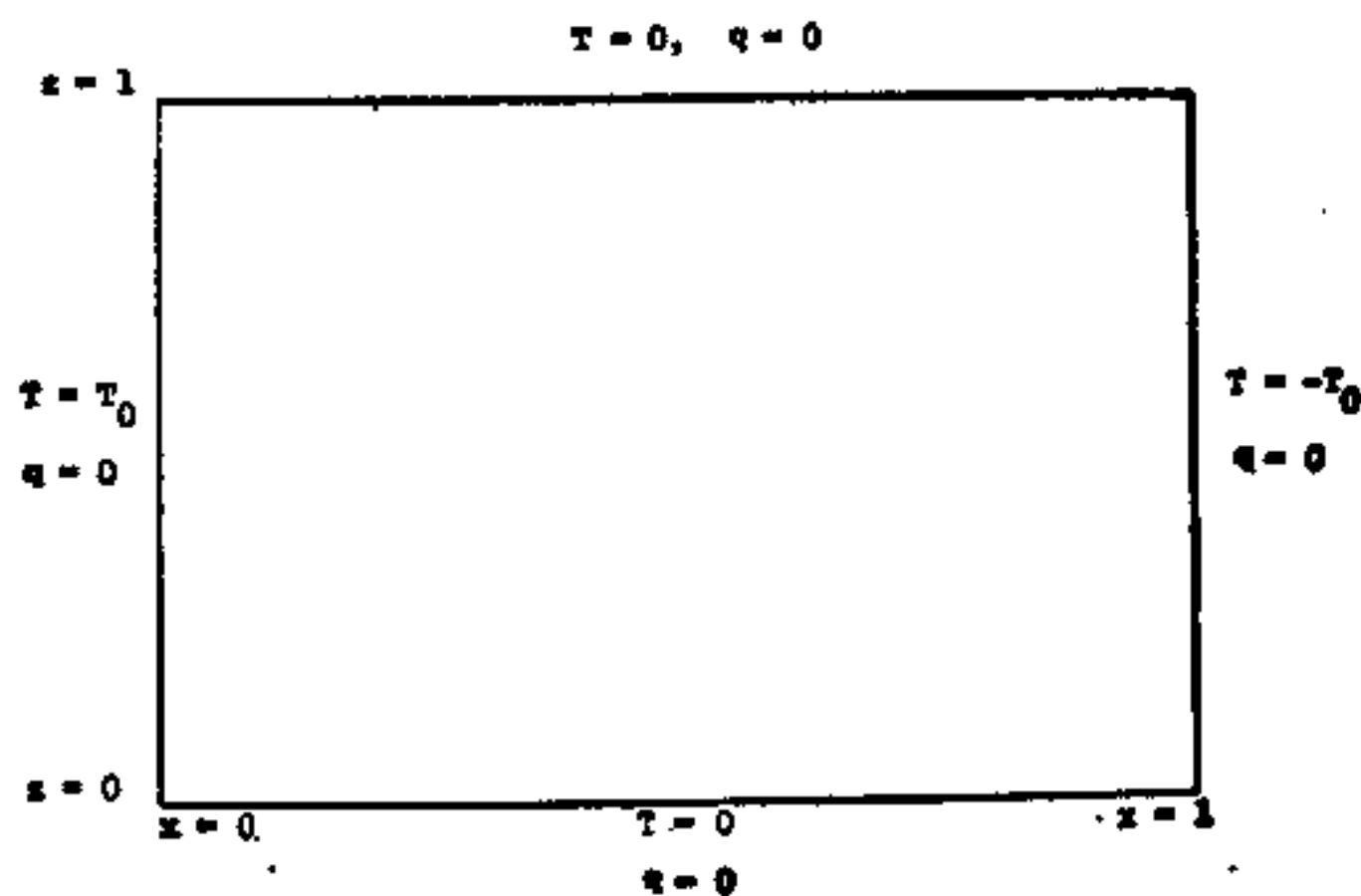


图 20

假定流动是二维的。

情况一: T_0 为常数。

情况二: $T_0 = T_0(x)$ 。

第十一章 旋转、层化流体的 正规型运动问题

在第七章里，我们讨论了均匀、旋转流体流动的初值问题，证明了由地转型和惯性型组成的集合具有正交性，还证明了地转型运动具有全部深度平均的初始环流。假定上述正交型集合具有完备性，我们就可用容器的固有运动之叠加，表示流动初值问题的正规型解。Howard 和 Siegmund^[35] 把这一方法推广到重力场中的可压缩旋转流体情形。他们利用无耗散旋转、层化流体的线性化的运动方程，导出了这种流动的某些普遍性质。即使流体是可压缩的，这些普遍性质仍然成立。下面我们就来讨论他们研究过的几个重要的问题。

仍然由运动方程 (1.4) 和 (1.5) 出发。对无耗散流体，当基态受到一小扰动时，线性化的无量纲运动方程化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{q}) = 0, \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2 \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \frac{\rho}{\rho_0} \nabla G = 0, \quad (11.2)$$

其中 $\rho_0(G)$ 为基态的密度场， $G(\mathbf{r})$ 为无量纲的引力势。温度 T 的方程 (10.2) 化为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla T_0 = 0. \quad (11.3)$$

其中 $T_0(G)$ 为基态温度场。流体的状态方程就是其密度与压强和温度之间的联系，即 $\rho = f(T, P)$ 。对于小扰动，密度的扰动量满足线性关系式

$$\rho = f_T T + f_P P \quad (11.4)$$

[最简单的状态方程为(10.1), 即 $f_P = 0$, $f_T = -\alpha$].

边界条件为在容器边界 Σ 上, $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ 。其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 为边界的外法向单位矢量。这样的条件适用于固体容器内的无耗散流动。在初值问题中, $t = 0$ 时刻的 \mathbf{q} , ρ 和 T 都是已知的。

对方程(11.1)–(11.4)进行运算处理后可得如下“能量”方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left[|\mathbf{q}|^2 \rho_0 + \frac{f_P}{\rho_0} P^2 - \frac{f_T}{\frac{dT_0}{dG}} \cdot T^2 \right] + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) \\ = 0. \end{aligned} \quad (11.5)$$

将方程(11.5)在容器内作积分, 并利用高斯定理和 Σ 上 $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ 的边界条件, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_V \left[\rho_0 |\mathbf{q}|^2 + \frac{f_P}{\rho_0} P^2 - \frac{f_T}{\frac{dT_0}{dG}} \cdot T^2 \right] dv \\ = 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

积分的第一项为流动之动能, 后两项为流动之势能。所以, 方程(11.6)说明流动能量关于时间是守恒的。一般情况下,

$$f_P \geq 0, \quad f_T \left(\frac{dT_0}{dG} \right)^{-1} < 0$$

(即静力学稳定状态)。这时, 二次型 E 是正定的。 E 的表达式启发我们定义能量内积 $E_{1,2}$ 如下:

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= \langle \mathbf{q}_1, P_1, T_1; \mathbf{q}_2, P_2, T_2 \rangle \\ &= \int_V \left[\rho_0 \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2^* + \frac{f_P}{\rho_0} P_1 P_2^* - \frac{f_T}{\frac{dT_0}{dG}} T_1 T_2^* \right] dv. \end{aligned} \quad (11.7)$$

同样由(11.1)–(11.4)出发, 通过适当的运算, 可证明

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{1,2} = 0. \quad (11.8)$$

利用此结果,我们来证明具有时间因子 $e^{i\lambda t}$ 的运动模型的下列普遍性质。

(1) 频率 λ 是实数。

在特殊情况

$$(q_1, p_1, T_1) = (q_2, p_2, T_2) = e^{i\lambda t}(Q, \phi, \tau)$$

下,讨论(11.8)式的特殊形式。由(11.7)和(11.8)可得

$$(\lambda - \lambda^*) \int_V \left[\rho_0 |Q|^2 + \frac{f_P}{\rho_0} |\phi|^2 - \frac{f_T}{\frac{dT_0}{dG}} |\tau|^2 \right] dv = 0. \quad (11.9)$$

因为被积函数是正的,所以由(11.9)式可知 $\lambda = \lambda^*$ 。这就是说, λ 是实数。

(2) 不同频率的正规型运动是正交的。

$$\text{令 } (q_1, p_1, T_1) = (Q_1, \phi_1, \tau_1) e^{i\lambda_1 t},$$

$$(q_2, p_2, T_2) = (Q_2, \phi_2, \tau_2) e^{i\lambda_2 t}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

由方程(11.7)和(11.8)可得

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_V \left[\rho_0 Q_1 \cdot Q_2 + \frac{f_P}{\rho_0} \phi_1 \phi_2 - \frac{f_T}{\frac{dT_0}{dG}} \tau_1 \tau_2 \right] dv = 0. \quad (11.10)$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故上式中积分等于零。这就是说, 在内积(10.7)的意义下, 两不同型运动是正交的。

(3) 初值问题的解是唯一的。

记 $(\bar{q}, \bar{p}, \bar{T})$ 为初值问题的两个解之差。因为运动方程是线性的, 故 $(\bar{q}, \bar{p}, \bar{T})$ 也是方程的一个解。它满足边界条件和零初值条件。相应的量 \bar{E} 满足(11.6)式和初值条件 $\bar{E}(0) = 0$ 。因此对任何时刻 t 都有

$$\bar{E} = \int \left[\rho_0 |\bar{q}|^2 + \frac{f_P}{\rho_0} \bar{P}^2 - \frac{f_T}{\frac{dT_0}{dG}} \bar{T}^2 \right] dv = 0。$$

因为被积函数的各项都是正的,所以只能有

$$\bar{q} = 0, \bar{P} = 0, \bar{T} = 0。$$

这就是说,初值问题的两个解是相同的。

对于具有初值条件和边值条件的方程(11.1)–(11.4),要证明其解的存在性是非常困难的。Friedland 和 Siegmann^[22]对于特殊几何形状容器内的不可压缩层化旋转流体求得了正规型运动的精确表达式,从而证明了这特殊情况下解的存在性。

定 常 流 动

在前面研究均匀、旋转流体时,我们看出对应于频率 $\lambda = 0$ 的定常运动或地转型运动是特别重要和有意义的。对于层化流体,这一点也是对的。我们将证明,边界的性质对地转型运动起着决定性的作用。另外,象第六章里所作的,我们还将把流动区域划分成三种不同的类型。不过,对层化流体,地球引力势是划分区域的重要因素。

方程(11.1)–(11.4)的定常形式为

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{q}) = 0, \quad (11.11)$$

$$2 \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \frac{\rho}{\rho_0} \nabla G = 0, \quad (11.12)$$

$$\mathbf{q} \cdot \nabla T_0 = 0, \quad (11.13)$$

$$\rho = f_T T + f_P P。 \quad (11.14)$$

用 ∇G 矢乘(11.12)式可得

$$2 \left[\hat{\mathbf{k}} \mathbf{q} \cdot \nabla G - \mathbf{q} \frac{\partial G}{\partial z} \right] + \frac{1}{\rho_0} \nabla G \times \nabla P = 0。 \quad (11.15)$$

由于基态温度 T_0 仅仅是引力势 G 的函数, 故由 (11.13) 有

$$\mathbf{q} \cdot \nabla G = 0. \quad (11.16)$$

即速度场平行于 G 的等值面。由 (11.15) 和 (11.16) 有

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2\rho_0 G_z} \nabla G \times \nabla P. \quad (11.17)$$

以 (11.17) 式代入 (11.12) 式可得

$$\frac{1}{\rho_0 G_z} [\nabla G \cdot P_z - G_z \nabla P] + \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \frac{\rho}{\rho_0} \nabla G = 0.$$

所以

$$\rho = -\frac{P_z}{G_z}. \quad (11.18)$$

方程 (11.17) 和 (11.18) 是地转方程在可压缩旋转流体中的等价形式。显然, 对于定常流动, 一旦压强 P 已知, 利用 (11.17), (11.18) 和状态方程 (11.19), 就可确定速度场、温度场和盐度场。因此, 问题的关键是要知道地转压强场满足什么样的条件。以 (11.17) 式代入 (11.11) 式可得

$$\nabla \cdot \left[\frac{\nabla G \times \nabla P}{G_z} \right] = 0.$$

此式可化为

$$\nabla P \cdot \nabla G \times \nabla G_z = 0. \quad (11.19)$$

若 $\nabla G \times \nabla G_z = 0$, 则对 P 不存在约束条件。任何函数 P 都可满足方程 (11.11)–(11.14)。这与圆筒中均匀流体的地转流动类似。在那里, 单由容器的几何形状无法唯一确定流动的解。正因为有这样的类似关系, Haward 和 Siegmann 将 $\nabla G \times \nabla G_z = 0$ 的区域称为地转自由区。

在非地转自由区, 可以作出 $\nabla G \times \nabla G_z$ 的积分曲线, 这种曲线称为地转曲线。地转曲线穿过边界的区域称为地转阻塞区。若区域之边界为地转曲线所覆盖且这些地转曲线与边界不相交, 则称此区域为地转导通区域。在地转阻塞区和地转

导通区, 方程 (11.19) 要求 P 在地转曲线上为常数。这时, 方程 (11.17) 化为

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{1}{2\rho_0 G_z} \nabla G \times \nabla P(G, G_z) \\ &= \frac{1}{2\rho_0 G_z} \frac{\partial P}{\partial G_z} \nabla G \times \nabla G_z. \end{aligned} \quad (11.20)$$

所以, 速度矢量平行于地转曲线。在讨论地转导通区 (如球) 内的均匀流体运动时, 我们也得到过类似的结论。对一个给定的容器, 其特定的地转型运动必然具有 (11.20) 的形式并满足边界条件

$$\text{在 } \Sigma \text{ 上 } \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (11.21)$$

在地转导通区中, 向量 $\nabla G \times \nabla G_z$ 与边界平行, 故由 (11.20) 式得到的速度自动满足边界条件 (11.21)。另外, 在给定的地转曲线上, \mathbf{q} 的模与 $|\nabla G \times \nabla G_z|$ 成正比, 对于地转阻塞区, 由边界条件 (11.21) 式与 (11.20) 式可知, 在地转曲线的某点上有

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla G \times \nabla G_z) = 0.$$

所以, 速度 \mathbf{q} 之模与 $|\nabla G \times \nabla G_z|$ 的比例常数为零。因此, 对定常流动, 地转速度矢量为零。这与斜截圆筒中均匀流体的流动是类似的。当 $\mathbf{q} = 0$ 时, 方程 (11.12) 化为

$$\nabla P + \rho \nabla G = 0, \quad (11.22)$$

从而有 $\nabla G \times \nabla P = 0$ 。所以这时 P 不仅在地转曲线上为常数, 在 G 的等值面 ($G = \text{常数}$) 上也是常数。

位 势 涡 度

我们在第二章里曾说过, 涡度的概念可以自然地推广到旋转、层化流体的流动中。我们还得到了位势涡度 Π 的表达

式并证明在无耗散流体中位势涡度是守恒的。在前面的各章中,我们多次利用了这一概念和性质来解旋转、均匀流体的流动问题。下面,我们来导出任意引力场中旋转、可压缩流体位势涡度的特殊形式。在这种情况下,运动方程近似地由线性化方程(11.1)–(11.4)表示。

因为基态参量仅是 G 的函数,所以,方程(11.3)可写作

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla G \frac{dT_0}{dG} = 0. \quad (11.23)$$

将(11.2)式矢乘 ∇G 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{q} \times \nabla G) - 2\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{q} \cdot \nabla G) + 2\mathbf{q}G_z \\ + \frac{\nabla P}{\rho_0} \times \nabla G = 0. \end{aligned} \quad (11.24)$$

由(11.23)得到 $\mathbf{q} \cdot \nabla G$ 并代入上式便得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{q} \times \nabla G + \frac{2T}{\frac{dT_0}{dG}} \hat{\mathbf{k}} \right] + 2\mathbf{q}G_z \\ + \frac{\nabla P}{\rho_0} \times \nabla G = 0. \end{aligned} \quad (11.25)$$

因而有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_0}{G_z} \left[\mathbf{q} \times \nabla G + \frac{2T}{\frac{dT_0}{dG}} \hat{\mathbf{k}} \right] + 2\rho_0 \mathbf{q} \\ = - \frac{\nabla P \times \nabla G}{G_z}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

对(11.26)式取散度并利用(11.1)式便得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \cdot \left[\frac{\rho_0}{G_z} \left(\mathbf{q} \times \nabla G + \frac{2T}{\frac{dT_0}{dG}} \hat{\mathbf{k}} \right) \right] - 2\rho \right\} \\ = - \frac{\nabla P}{G_z^2} \cdot \nabla G \times \nabla G_z. \end{aligned} \quad (11.27)$$

在地转自由区里(其内有 $\nabla G \times \nabla G_z = 0$), 方程(11.27)表明

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \left[\frac{\rho_0}{G_z} \left(\mathbf{q} \times \nabla G + \frac{2T}{dT_0} \hat{\mathbf{k}} \right) \right] - \frac{2\rho}{\rho_0} = \Pi \quad (11.28)$$

处处守恒。这个量的作用与位势涡度类似。

在地转导通区或地转阻塞区, 相应的守恒量要复杂一些。

Howard 和 Siegmund 证明, 在地转导通区内, 量

$$\Pi(\Gamma) = \int_{\Gamma} G_z^2 |\nabla G \times \nabla G_z|^{-1} \Pi ds \quad (11.29)$$

满足

$$\frac{d}{dt} \Pi(\Gamma) = 0. \quad (11.30)$$

其中 Γ 是封闭的地转曲线。在地转阻塞区里, 对所有水平面上有一恒量, 这个量是 $\Pi(\Gamma)$ 和 Π 的进一步修正。

在某些特殊问题中, 位势涡度是容易得到的。首先, 我们来讨论一个实验室模型, 其中引力势为 $G = gz$ 。假定 ① Boussinesq 近似成立, ② $f_p = 0$, $f_r = -\alpha$ (常数)。这样, 线性化的无量纲运动方程就是第十章中导出的 (10.6) — (10.8) 式。对无粘流体, 这些方程化为

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (11.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} + \nabla P - T\hat{\mathbf{k}} = 0, \quad (11.32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + N^2 \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0, \quad N^2 = \frac{\alpha g \Delta T}{Q^2 L}. \quad (11.33)$$

因为 G_z 等于常数, 故 $\nabla G \times \nabla G_z = 0$ 。运动是地转自由的。利用方程 (11.31) — (11.33) 中各量的无量纲形式来表示位势涡度, 则由 (11.28) 式可得

$$\Pi = \nabla \cdot \left(\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{k}} + \frac{2T}{N^2} \hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$= \hat{k} \cdot \nabla \times \mathbf{q} + \frac{2}{N^2} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (11.34)$$

〔这时 $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$, 故 (11.27) 中 $\frac{\partial}{\partial t}(2\rho) = 0$ 。〕

地转型流动或定常流动满足方程 (11.31)–(11.33), 且 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 。所以, 地转流动由如下方程决定

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \hat{k} \times \nabla P, \quad (11.35)$$

$$T = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (11.36)$$

方程 (11.35) 等价于地转平衡, 方程 (11.36) 称为流体静力平衡。将此两式代入 (11.34) 式, 可得地转流动的位势涡度

$$\Pi_z = \frac{1}{2} \left(\nabla_H^2 P + \frac{4}{N^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \quad (11.37)$$

在第十二章和第十三章中, 我们将研究引力场为 $G = gz$ 的旋转、层化流体中的波动。我们将发现由第二章中的 Ertel 定理导出的位势涡度与 (11.34) 式是等价的。

另一简单而重要的例子是球壳内 Boussinesq 流体的流动, 其中引力势为 $G = gr^2$, 即引力场是径向的。这可以作为一个引力径向朝内的天体的简单模型。我们仍假定 $f_r = 0$, $f_r = -\alpha$ 。于是, 无量纲线性运动方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (11.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\hat{k} \times \mathbf{q} + \nabla P - 2T\mathbf{r} = 0, \quad (11.39)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + 2N^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (11.40)$$

因为 $\nabla G = 2g\mathbf{r}$, $G_z = 2gz$, 所以

$$\nabla G \times \nabla G_z = (2g)^2 \mathbf{r} \times \hat{k} \quad (11.41)$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。因此，流动不是地转自由的。地转曲线是同心球上的纬线。由此可知， $r = 1$ 的球壳也为地转曲线所覆盖，故流动是地转导通的。用无量纲量表示的位势涡度为

$$\Pi = \nabla \cdot \left[\frac{1}{z} \left(\mathbf{q} \times \mathbf{r} + \frac{T}{N^2} \hat{\mathbf{k}} \right) \right]. \quad (11.42)$$

对轴对称流动 $\left(\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \right)$ ，位势涡度可写成

$$\Pi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (\mathbf{q} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}) + \frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{T}{z} \quad (11.43)$$

[(r, θ, ϕ) 为球坐标]。地转型的流动满足

$$2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} + \nabla P - 2T\mathbf{r} = 0. \quad (11.44)$$

故地转流动的速度和温度可用压强表示为

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{1}{2r \cos \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (\text{地转平衡}), \quad (11.45)$$

$$T = \frac{1}{2z} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (\text{流体静力平衡}). \quad (11.46)$$

将 (11.45) 和 (11.46) 式代入 (11.43) 可得地转位势涡度

$$\Pi_g = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z^2} \frac{\partial P}{\partial z} \right]. \quad (11.47)$$

Howard 和 Siegmann^[35] 研究了有关的初值问题。他们证明，位涡守恒性质提供了流动中地转流动部分的全部特征。前面得到了初值、边值问题解的定常部分 (\mathbf{q}_g, P_g, T_g)，这一部分正是与初始流动具有同样位势涡度的唯一地转流动。

习 题

11.1) 利用方程 (11.1)~(11.4) 证明

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left[|\mathbf{q}|^2 \rho_0 + \frac{f_P}{\rho_0} p^2 - \frac{f_T}{\frac{dT_0}{dG}} T^2 \right] + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0.$$

11.2) 考虑圆筒中的流动, 引力势为 $G = gz$, 初值条件为 $\mathbf{q}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{r}); T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r})$ 。

a) 地转压强场满足的方程是什么?

b) 边界条件可证明为

$$\text{在 } r = a \text{ 处 } \int_0^{2\pi} \frac{\partial P}{\partial r} d\theta = \int_0^{2\pi} \mathbf{Q}_0 \cdot \hat{\theta} d\theta,$$

$$\text{在 } z = 0, 1 \text{ 处 } \frac{\partial P}{\partial z} = T_0,$$

在 $r = a, z = \text{常数}$ 时, $P = \text{常数}$ 。

设初值条件是轴对称的, $\mathbf{Q}_0 = v(r, z)\hat{\theta}, T_0 = T_0(z)$ 。

(可设解也是轴对称的), 试确定地转流动。

11.3) 证明 11.2) 题中初值问题的解是唯一的。

11.4) 考虑球壳中的流动问题, 引力势为 $G = -\frac{ga^2}{r}$ 。

a) 描述地转迴线。

b) 设 Boussinesq 近似成立, 且 $f_P = 0, f_T = -\alpha$ 。假定第十章中的无量纲量仍适用, 求作为速度和温度的函数的位势涡度。

c) 将地转流动的位势涡度表为地转压强的泛函。

11.5) 研究 $G = gr^2$ 时的球内运动。考虑粘性修正时, 运动方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} + \nabla P - 2T\mathbf{r} = E\nabla^2 \mathbf{q},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + 2N^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = \frac{E}{\sigma} \nabla^2 q \quad (\sigma \text{ 是 Prandtl 数}).$$

a) 证明由这些方程可导出

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(\mathbf{q}, T, N^2) = EF(\mathbf{q}, T, N^2 \sigma)。$$

b) 确定位势涡度改变 $O(1)$ 所需的时间尺度。这一尺度与 σ 的大小有关吗?

第十二章 旋转、层化流体内的 Rossby 波

位势涡度方程

我们已经遇到过许多例子，它们说明位势涡度在表征旋转流体运动性质方面有很重要的作用。在第十一章里，我们导出了任意引力场中旋转、可压缩流体位势涡度的普遍表达式。下面再回到第二章中得到的旋转、层化流体的位势涡度表达式

$$\Pi = \frac{\nabla \lambda}{\rho} \cdot (\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}), \quad (12.1)$$

其中 $\lambda = \lambda(P, \rho)$ 是具有性质 $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ 的任意标量。在第八章我们曾利用无粘流体中位涡守恒原理来研究旋转、均匀流体中的 Rossby 波。下面我们将用这一原理来研究旋转、层化流体中的 Rossby 波。

设有一层化、不可压流体 $\left(\frac{d\rho}{dt} = 0\right)$ 。显然密度本身可以作为位势涡度表达式中的标量 λ 。按照第十章所用的分析方法，并假设对平衡态的扰动是很小的，则线性化的位涡守恒方程化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla\right] \left[(\mathbf{B} + 2\mathbf{\Omega}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}\right] = 0. \quad (12.2)$$

为了研究层化流体中的 Rossby 波，我们考虑 β 平面上的运动，并记

$$2\Omega = 2\Omega \cos\theta \hat{\mathbf{k}} \doteq \Omega(f_0 + \beta y)\hat{\mathbf{k}}.$$

如在第十章所做, 进行无量纲化和线性化 (并利用 β 平面修正), 可将密度场写为

$$\frac{\nabla \rho}{\rho_0} = \hat{\mathbf{k}} + \frac{\varepsilon}{N^2} \nabla \rho' \quad (12.3)$$

(为方便起见, 取平衡态的层化比例于 z)。所以, 无量纲的线性化位势涡度为

$$\Pi = (\varepsilon \mathbf{B}' + f \hat{\mathbf{k}}) \cdot \left(\hat{\mathbf{k}} + \frac{\varepsilon}{N^2} \nabla \rho' \right). \quad (12.4)$$

其中

$$f = f_0 + \beta y.$$

方程 (12.2) 的线性形式为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \frac{f_0}{N^2} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} (f_0 + \beta y) = 0 \quad (12.5)$$

(为简单起见, 扰动量的标记“'”略去不写)。当科氏参量 f 为常数时, 前式中 Π 的表达式与 (11.34) 式等价。

下面讨论引力势 $G(r) = gz$ 的情况。准确至一阶时, 无量纲扰动速度和密度满足方程 (10.7) 的定常、无粘形式。即

$$f \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla P + \rho \hat{\mathbf{k}}. \quad (12.6)$$

所以

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{f_0} \nabla_H^2 P, \quad (12.7)$$

且

$$\rho = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (12.8)$$

将 (12.7) 和 (12.8) 式代入方程 (12.5), 便得到线性位涡方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla_H^2 P + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] + \beta \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (12.9)$$

这就是描述层化流体中 Rossby 波的方程。

层化流体中的 Rossby 波

在求方程(12.9)的波状解时,记

$$P = \Phi(z) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)}. \quad (12.10)$$

其中 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x + k_2 y$ 。函数 $\Phi(z)$ 表示出层化产生的垂直结构。取边界条件为

$$\text{在 } z = 0 \text{ 和 } z = h \text{ 处 } w = 0. \quad (12.11)$$

设平衡场有 $\nabla T_0 = \hat{\mathbf{k}}$, 则对无粘流体,由方程(10.8)可得

$$w = -\frac{1}{N^2} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (12.12)$$

由(10.1)和流体静力平衡方程(10.8)可得

$$T = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (12.13)$$

由(12.11), (12.12)及(12.13)可得关于 $\Phi(z)$ 的边界条件

$$\text{在 } z = 0 \text{ 和 } z = h \text{ 处 } \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (12.14)$$

将(12.10)代入 Rossby 波动方程(12.9)得

$$-\lambda \left[-(k_1^2 + k_2^2) \Phi + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] + \beta k_1 \Phi = 0.$$

所以, Φ 满足边界条件(12.14)及方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{N^2}{f_0^2} \left[\frac{\beta k_1}{\lambda} + k_1^2 + k_2^2 \right] \Phi = 0. \quad (12.15)$$

此本征值问题的解为

$$\Phi_n = \cos \frac{n\pi z}{h}. \quad (12.16)$$

其中

$$\left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 = \frac{N^2}{f_0^2} \left(\frac{\beta k_1}{\lambda_n} + k_1^2 + k_2^2 \right),$$

解得

$$\lambda_n = \frac{\beta k_1}{\left(k_1^2 + k_2^2 + \frac{f_0^2 \pi^2 n^2}{N^2 h^2}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.17)$$

与 $n = 0$ 对应的本征值为

$$\lambda_0 = \frac{\beta k_1}{k_1^2 + k_2^2}, \quad (12.18)$$

而本征函数为 $\Phi_0 = \text{常数}$ 。显然,这一型的运动对应于均匀流体中的 Rossby 波。它不受层化的影响,被称为正压 Rossby 波。由于此型的运动与 z 无关,故由边界条件可知在全流场中其垂直速度 w 恒等于零。所以,正压 Rossby 波的质点速度是纯水平的。流体元在运动中不穿越密度跃层,故也就不受层化效应的影响。

层化流体中 Rossby 波的垂直结构体现在 $n = 1, 2, \dots$ 的各型运动中。这些型的运动也叫做斜压 Rossby 波,其中压强为

$$P_n = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda_n t)} \cos \frac{n\pi z}{h}.$$

由地转平衡关系 (11.6) 式可得水平速度分量为

$$u_n = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial P_n}{\partial y} = -\frac{ik_2}{f_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda_n t)} \cos \frac{n\pi z}{h},$$

$$V_n = \frac{1}{f_0} \frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{ik_1}{f_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda_n t)} \cos \frac{n\pi z}{h}.$$

再由 (12.12) 和 (12.13), 可得垂直速度为

$$w_n = \frac{i\lambda_n}{N^2} \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda_n t)} \sin \frac{n\pi z}{h}.$$

由此看出,高阶型的运动有明显的垂直结构,其中各速度分量是按照 $\sin z$ 的形式变化的。另外,与均匀流体的情形(即任意 z 处 w_n 均为零)不一样,垂直速度并不是对所有的 z 都为零。事实上,只有在 $z = mh/n$ 时 ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

w_n 才为零。显然, w_n 为零的点也正是水平速度最大的点。

Rossby 变形半径

考虑 n 阶斜压 Rossby 波的弥散关系 (12.17) 式。它可改写成

$$\lambda_n = \frac{\beta k_1}{k_1^2 + k_2^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{f_0^2 \pi^2 n^2}{N^2 h^2} \cdot \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2)}}。$$

其中层化效应体现在因子

$$\frac{f_0^2 \pi^2 n^2}{N^2 h^2} \cdot \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2)}$$

上。显然, 仅当

$$\frac{f_0^2 \pi^2 n^2}{N^2 h^2} \cdot \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2)} > O(1)$$

时, 本征值 λ_n 才会与本征值 λ_0 [见 (12.18) 式] 有明显的差别。所以, 对于每一型的运动来说, 仅当下述准则成立时, 层化效应才是重要的。此准则为

$$\frac{n^2 \pi^2 f_0^2}{N^2 h^2} > (k_1^2 + k_2^2)。 \quad (12.19)$$

由于 $(k_1^2 + k_2^2)$ 是水平波数的平方, 故

$$O(k_1^2 + k_2^2) = O(n^2 \pi^2 L^{-2}),$$

其中 L 为运动的水平长度尺度。这样, 层化准则 (12.19) 可写为

$$L > \frac{Nh}{f_0}。 \quad (12.20)$$

参量 $\frac{Nh}{f_0} = L_R$ 称为 Rossby 变形半径。由此得到的结论是, 对一定的层化强度 N 和水深 h , 仅当 Rossby 波的水平尺度超

过 Rossby 变形半径时,波动才明显受层化作用的影响。在大气和海洋中,典型的 L_R 分别为 1000 公里和 60 公里。它们是研究大气和海洋运动时经常遇到的长度尺度。

以上我们从地球物理学的角度介绍了 Rossby 波的理论。自从 1939 年 Rossby^[57] 首先开始研究这种波动以来,人们对它的研究有了相当大的进展。为了说明 Rossby 波在解释海洋和大气大尺度扰动方面的重要性,人们做了一些有益的工作。Dickinson^[41] 介绍了这方面最基本和最新的成果。

特别要提一下的是 Dickinson 对本章中所讨论的问题的若干推广。首先,在地球物理问题中,流体深度 h 一般不为常数。若考虑变化的深度,则相应地在位涡方程中就需要引入一项新的因子 [见第八章及方程 (8.21)]。在此情况下,将 B 推广到平均位涡梯度是有利于讨论的。其次,参量

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

也不是常数。实际上,海洋的垂直结构相当复杂, N 在垂直方向上变化很大。可以证明,第一阶斜压型运动 ($n=1$) 与 N^2 的结构有很大的关系。所以,要对 Rossby 波进行符合实际的研究就必须涉及变系数的位涡方程。

习 题

12.1) 在层化流体中, Rossby 波的方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla^2 P + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] + \beta \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

求封闭圆筒中形为

$$P = A(x, y, z) e^{-\frac{\pi}{H} z} e^{i\beta \lambda t}$$

的解。此解应满足上述方程和如下边界条件:

在 $z = 0, 1$ 处 $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$,

在 $r = a$ 处 $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ 。

12.2) 上题得到的 Rossby 波与第八章中讨论的正压 Rossby 波有何不同?

12.3) 在有关海洋的模式里, 自由表面的存在使边界条件有所改变。因此, 试考虑如下的波动问题:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla^2 P + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] + \beta \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

边界条件为

$$z = 0 \text{ 处 } w = g \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$z = -h \text{ 处 } w = 0。$$

a) 求形为

$$P = \Phi(x) e^{i(k_1 x + k_2 y)}$$

的平面波解。

b) 此解与具有刚盖的容器中之 Rossby 波有何不同?

第十三章 旋转、层化 流体内的内波

层化作用可产生一种恢复力,并导致内波的存在[见习题(10.2)]。由于旋转和层化具有动力学相似性(见第十章),我们可以预见,重力内波与旋转作用产生的惯性波将具有类似的性质。事实正是如此(见 Yih^[76])。本章要讨论的是旋转作用和层化作用同时存在时流体中的内波。

对无粘流体线性运动方程组

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{q} = -\nabla P + T\hat{\mathbf{k}},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + N^2 \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0,$$

我们来求它的波状解。在上面的方程中已假定 Boussinesq 近似是有效的,平衡温度场满足 $\nabla T_0 = \hat{\mathbf{k}}$ 且线性状态方程为 $\rho = -\alpha T$ (见第十章)。将 $(\mathbf{q}, P, T) = (\mathbf{Q}, \Phi, S)e^{i\lambda t}$ 代入上面的方程,便得到

$$i\lambda \mathbf{Q} + 2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q} = -\nabla \Phi + S\hat{\mathbf{k}}, \quad (13.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (13.2)$$

$$i\lambda S + N^2 w = 0. \quad (13.3)$$

利用这些方程可得压强场 Φ 满足的方程。具体步骤如下。由 $\hat{\mathbf{k}} \cdot (13.1)$ 得到

$$i\lambda w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + S. \quad (13.4)$$

由(13.3)和(13.4)得

$$w = \frac{i\lambda}{\lambda^2 - N^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (13.5)$$

再由 $\hat{k} \times (13.1)$ 可得

$$i\lambda(\hat{k} \times \mathbf{Q}) + 2(w\hat{k} - \mathbf{Q}) = -\hat{k} \times \nabla \Phi. \quad (13.6)$$

由 $\nabla \cdot (13.6)$ 可得

$$i\lambda \nabla \cdot (\hat{k} \times \mathbf{Q}) + 2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (13.7)$$

利用 (13.1) 和 (13.3) 式, 上式可化为

$$\frac{i\lambda}{2} \left(-\nabla^2 \Phi - \frac{N^2}{i\lambda} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (13.8)$$

以 (13.5) 代入上式便得压强方程

$$\nabla^2 \Phi + \frac{N^2 - 4}{\lambda^2 - N^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (13.9)$$

当没有层化作用时 ($N^2 = 0$), 此方程便化为惯性波的 Poincaré 方程 (7.5)。

平 面 波 解

对无界水体, 我们来求方程 (13.9) 的平面波解。记 $\Phi = \Phi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, 其中 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x + k_2 y + k_3 z$ 。将上式代入 (13.9) 可得

$$-|\mathbf{k}|^2 + \frac{N^2 - 4}{\lambda^2 - N^2} (-k_3^2) = 0.$$

由此得到弥散关系

$$\lambda^2 = \frac{4k_3^2 + N^2(k_1^2 + k_2^2)}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (13.10)$$

当 $N^2 = 0$ 时, 上式显然又化为惯性波的弥散关系 (7.24) 式。要注意的是, 对 $N^2 \neq 0$ 的层化流体, 内波频率不仅与波向有关, 而且与波矢量的模也有关。

内波的相速度 $C_p = \frac{\lambda}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}}$ 为

$$C_p = \frac{[4k_3^2 + N^2(k_1^2 + k_2^2)]^{1/2}}{|\mathbf{k}|^2} \hat{\mathbf{k}}。 \quad (13.11)$$

波动是弥散的,长波比短波传播得快。

内波的群速度为 $\mathbf{C}_g = \nabla_k \lambda$ 。稍加运算可求得

$$\mathbf{C}_g = \frac{(4 - N^2)k_3}{|\mathbf{k}|[4k_3^2 + N^2(k_1^2 + k_2^2)]^{1/2}} \left[\hat{\mathbf{k}} - \frac{k_3}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{k}} \right]。 \quad (13.12)$$

值得一提的是,对任意的 N^2 , 下式恒成立,即

$$\mathbf{C}_g \cdot \mathbf{C}_p = \frac{(4 - N^2)k_3}{|\mathbf{k}|^3} \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} - \frac{k_3}{|\mathbf{k}|} \right) = 0。$$

所以,层化效应不论有多强,内波能量的传播方向都与其相速度方向垂直。这与惯性波完全一致。Garrett 和 Munk^[24] 指出,上述结论意味着波包沿海岸运动。Mowbray 和 Rarity 在实验室中演证了这一性质(见[45])。

将形式为

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

的平面波速度矢量代入散度方程 $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$, 我们得到

$$\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{k} = 0。$$

由此可知,不仅群速与波矢量正交,流体元的运动速度 \mathbf{q}_0 也与波矢量正交。

弥散关系(13.10)式可记为

$$\lambda^2 = 4 \sin^2 \gamma + N^2 \cos^2 \gamma。 \quad (13.13)$$

其中 γ 角满足

$$\operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{k_3^2}{k_1^2 + k_2^2}。$$

当频率 λ 接近 2 时(惯性频率), γ 角近于直角;当频率 λ 接近于 N 时(浮力频率), γ 角近于零。图 21 分别给出了上述两种情况下的示意图。

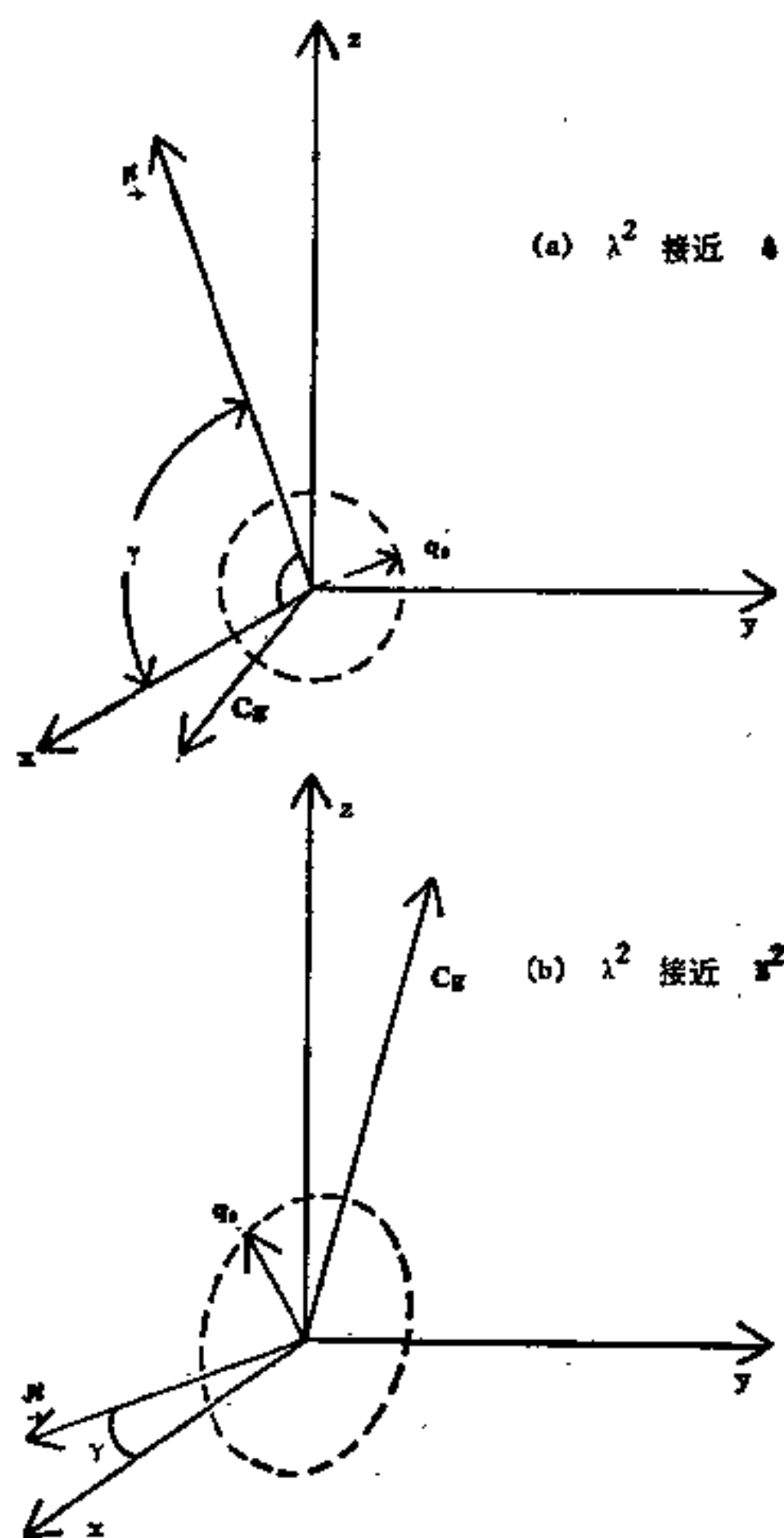


图 21 k, q_0 和 C_F 示意图

有界区域中的内波

在前一节里，我们讨论了方程 (13.9) 的平面波解的弥散

关系。不过,任何实际的内波问题都要求研究有界区域中的内波。例如,海岸线构成了大洋的水平边界,使之成为有界区域。我们可以用矩形盒或圆筒来粗略地模拟大洋形状。大气运动的区域则可用同心球间的环状区域来模拟。另外,在实验室中研究内波也必须利用有界区域。

对于旋转、层化的流体,我们前面在建立内波的数学模式时忽略了流体粘性和热扩散作用。因此,方程(13.1)—(13.3)的合适的边界条件就是边界上法向速度为零,即

$$\text{在边界}\Sigma\text{上, } \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0_q$$

利用运动方程,我们可将此边界条件以压强场 Φ 表示为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi - \frac{2}{i\lambda} (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \nabla \Phi \\ + \left(\frac{N^2 - 4}{\lambda^2 - N^2} \right) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (13.14)$$

当层化参数 N^2 为零时,我们曾经证明频率 λ 满足 $|\lambda| < 2$,从而压强方程总是双曲型的。下面我们来求 N^2 不为零时关于 $|\lambda|$ 的约束。

将 $\mathbf{Q}^* \cdot (13.1)$ 在整个容器域内进行体积分,便可得到能量积分式,其中 \mathbf{Q}^* 是 \mathbf{Q} 的复共轭量。结果为

$$\begin{aligned} i\lambda \int_V |\mathbf{Q}|^2 dv + 2 \int_V \mathbf{Q}^* \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q} dv \\ = - \int_V \mathbf{Q}^* \cdot \nabla \Phi dv - \frac{N^2}{i\lambda} \int_V |\omega|^2 dv. \end{aligned} \quad (13.15)$$

因为 $\nabla \cdot \mathbf{Q}^* = 0$ 以及在边界 Σ 上 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{Q} = 0$,由高斯定理可知

$$\int_V \mathbf{Q}^* \cdot \nabla \Phi dv = 0.$$

于是,方程(13.15)化为

$$- \lambda^2 \int_V |\mathbf{Q}|^2 dv + N^2 \int_V |\omega|^2 dv$$

$$= -2i\lambda \int_V \mathbf{Q}^* \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q} dv. \quad (13.16)$$

若将 \mathbf{Q} 写成分量形式

$$\mathbf{Q} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}},$$

其中 u 和 v 可写成实部与虚部之和, 即

$$u = u_R + iu_I, \quad v = v_R + iv_I,$$

我们便得到

$$\mathbf{Q}^* \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{Q} = -2i(u_R v_I - v_R u_I).$$

于是方程 (13.16) 变为

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int_V |\mathbf{Q}|^2 dv + 4\lambda \int_V (u_I v_R - v_I u_R) dv \\ - N^2 \int_V |w|^2 dv = 0. \end{aligned} \quad (13.17)$$

方程 (13.17) 是 λ 的二次方程, 其判别式为

$$\begin{aligned} \left[4 \int_V (u_I v_R - v_I u_R) dv \right]^2 \\ + 4N^2 \left(\int_V |\mathbf{Q}|^2 dv \right) \left(\int_V |w|^2 dv \right). \end{aligned}$$

此判别式是非负的。因此, 本征值 λ 是实数。本征解是没有指数增长的纯波动。

为了得到关于 $|\lambda|$ 的上界, 将 (13.17) 写成

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int_V (|u|^2 + |v|^2) dv + 2\lambda \int_V 2(u_I v_R - u_R v_I) dv \\ + (\lambda^2 - N^2) \int_V |w|^2 dv = 0. \end{aligned} \quad (13.18)$$

此方程具有如下形式:

$$\lambda(\lambda P + 2Q) + (\lambda^2 - N^2) \int_V |w|^2 dv = 0, \quad (13.19)$$

其中 $P \geq 0, |Q| \leq P$ 。

情况 a) $N < 2$:

若 $\lambda^2 \geq 4 > N^2$, 方程 (13.19) 的两项都大于零, 其和不可能为零。所以 λ^2 不可能大于 4, λ 的可能的解必须满足 $\lambda^2 \leq N^2$ 。

情况 b) $N > 2$:

若 $\lambda^2 \geq N > 4$, 方程 (13.19) 的两项仍然都大于零, 故 λ 的可能的解将满足 $\lambda^2 \leq 4$ 。

综上所述可知, $|\lambda|$ 的上界是两个无量纲频率 N 和 2 中的较大者。然而, $|\lambda|$ 的下界却不由 N 和 2 中的较小者确定。这样, 对满足

$$0 < \lambda^2 < \max(N^2, 4)$$

的 λ , 我们都可以寻求本征值问题的解。此时确定压强的方程 (13.19) 可能是双曲型的, 也可能是椭圆型的。下面将证明, 带有边界条件 (13.14) 的方程 (13.19) 具有两类波状解。对于第一类波, 对空间坐标的关系是振荡的, 其频率介于 $\max(N, 2)$ 和 $\min(N, 2)$ 之间, Φ 的方程是双曲型的。第一类波与纯转动或纯层化作用下的内波相类似。然而, 我们将证明第二类波有明显不同的性质, 其频率低于 $\min(N, 2)$ 从而 Φ 的方程是椭圆型的。因为第二类波与研究浅水边缘波时出现的 Kelvin 波类似, Krauss 便将其称为内 Kelvin 波。

在“理论海洋学方法和成果第二卷, 内波”^[39]一文中, Krauss 编列了两类内波的本征函数。他用直角坐标系表示这些函数, 并利用其复杂的叠加形式得到矩形区域里内波的本征函数。

下面我们来求圆筒中内波的本征函数 Φ 及本征值 λ 的性质。考虑由固体边界 $z = 0, 1$ 和 $r = a$ 限制的旋转、层化流体。在柱坐标中, 方程 (13.19) 和边界条件 (13.14) 取如下形式:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\lambda^2 - 4}{\lambda^2 - N^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (13.20)$$

$$z = 0, 1 \text{ 处 } \left(\frac{\lambda^2 - 4}{\lambda^2 - N^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (13.21)$$

$$r = a \text{ 处 } i\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0. \quad (13.22)$$

当 λ^2 之值在 $\max(N^2, 4)$ 和 $\min(N^2, 4)$ 之间时, 方程 (13.20) 是双曲型的。事实上, 此定解问题与旋转、均匀流体中之内波问题是很相似的。后者由方程 (7.20) 和边界条件 (7.21)、(7.22) 给定。因此, 我们可直接写出第一类内波的解, 即

$$\Phi = e^{ik\theta} \cos n\pi z J_{|k|}(\gamma_{mnk} r). \quad (13.23)$$

其中 $J_{|k|}$ 为第一类 $|k|$ 阶贝塞尔函数, γ_{mnk} 满足

$$\gamma_{mnk}^2 = n^2 \pi^2 \left[\frac{\lambda_{mnk}^2 - 4}{N^2 - \lambda_{mnk}^2} \right]. \quad (13.24)$$

边界条件 (13.22) 要求 γ_{mnk} 是超越方程

$$\gamma_{mnk}^2 = \frac{\gamma_{mnk}^2 N^2 + 4n^2 \pi^2}{\gamma_{mnk}^2 + n^2 \pi^2} \quad (13.25)$$

的第 m 个正根。显然, 当旋转或层化作用为零时 ($N^2 = \infty$ 或 $N^2 = 0$), 第一类内波都能存在。其解的形式可参照第七章中的有关结果而得到。当旋转和层化作用同时存在时, 第一类内波可视为经层化修正后的旋转流体内波 (或经旋转修正后的层化流体内波)。

下面讨论 $|\lambda|$ 小于 $\min(2, N)$ 的情况。此时参数 $\frac{(\lambda^2 - 4)}{(\lambda^2 - N^2)}$ 大于零, 方程 (13.20) 是椭圆型的。我们来求形如

$$\Phi = e^{ik\theta} \cos n\pi z G(r)$$

的解, 其中 $G(r)$ 满足

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G}{\partial r} - \left[\frac{k^2}{r^2} + \alpha^2 \right] G = 0, \quad (13.26)$$

$$\alpha^2 = n^2 \pi^2 \left(\frac{\lambda^2 - 4}{\lambda^2 - N^2} \right). \quad (13.27)$$

由此可知, $G(r) = I_k(\alpha r)$ 。这里 I_k 为虚宗量第一类 k 阶贝塞尔函数。边界条件 (13.22) 式化为

$$\lambda \alpha a I_k'(\alpha a) + 2k I_k(\alpha a) = 0 \quad (k > 0, n > 0, \alpha \neq 0)。 \quad (13.28)$$

因为虚宗量贝塞尔函数是指数型而不是振荡型的, 所以方程 (13.27) 和 (13.28) 不会有无穷多个解。确切地说, 可以证明这一对方程至多存在一个解。读者可在 Friedlander 和 Siegmann 的书^[22] 中找到关于下述结论的细节。他们证明了对正值 K , 至多存在一个负的本征值。因此, 波动将绕着圆筒传播。其方向与 θ 的正方向一致。本征值 $|\lambda|$ 可由两条曲线

$$y_1(\lambda) = \frac{2 + |\lambda|}{2 - |\lambda|} \quad (13.29)$$

$$y_2(\lambda) = \frac{I_{k-1}(\alpha a)}{I_{k+1}(\alpha a)} \quad (13.30)$$

的交点来确定。

为了方便起见, 我们将 $N^2 > 4$ 和 $N^2 < 4$ 的两种情况分开来讨论。图 22 表示在这两种情况下曲线 $y_1(\lambda)$ 和 $y_2(\lambda)$ 的形状。通过分析这些曲线可以得到如下结论: 在第一种情况下, 我们求 $0 < |\lambda| \leq 2 < N$ 的解。可以证明, 若存在满足 $\frac{N^2 - 4}{4} = \frac{n^2 \pi^2 a^2}{k(k+1)}$ 的整数 n 和 k , 则有一个 $\lambda = -2$ 的解。

它对应的运动是两类波动之间的过渡型运动。而对满足关系

$$\frac{N^2 - 4}{4} < \frac{n^2 \pi^2 a^2}{k(k+1)} \quad (13.31)$$

的整数 n 和 k , 则存在唯一的本征值 λ_{nk} , 并有 $0 < |\lambda_{nk}| < 2$ 。当波数使不等式 (13.31) 反向时, 波动无解。在第二种情况下, 我们求 $0 < |\lambda| \leq N < 2$ 的解。图 22 表明不存在过渡型 $\lambda = -N$ 。然而, 对一切整数 n 和 k 都存在唯一的 λ_{nk} , 并有 $|\lambda_{nk}| < N$ 。

$N = 2$ 是一种重要的退化情形。在这种情况下, 所有第

一类内波都简化为 $\lambda^2 = N^2 = 4$ 的单一型, 此时压强梯度为零。而第二类内波(内 Kelvin 波)的频率 λ_{nk} 则为

$$\lambda_{nk} = -2 \left| \frac{I_{k-1}(n\pi a) - I_{k+1}(n\pi a)}{I_{k-1}(n\pi a) + I_{k+1}(n\pi a)} \right|。$$

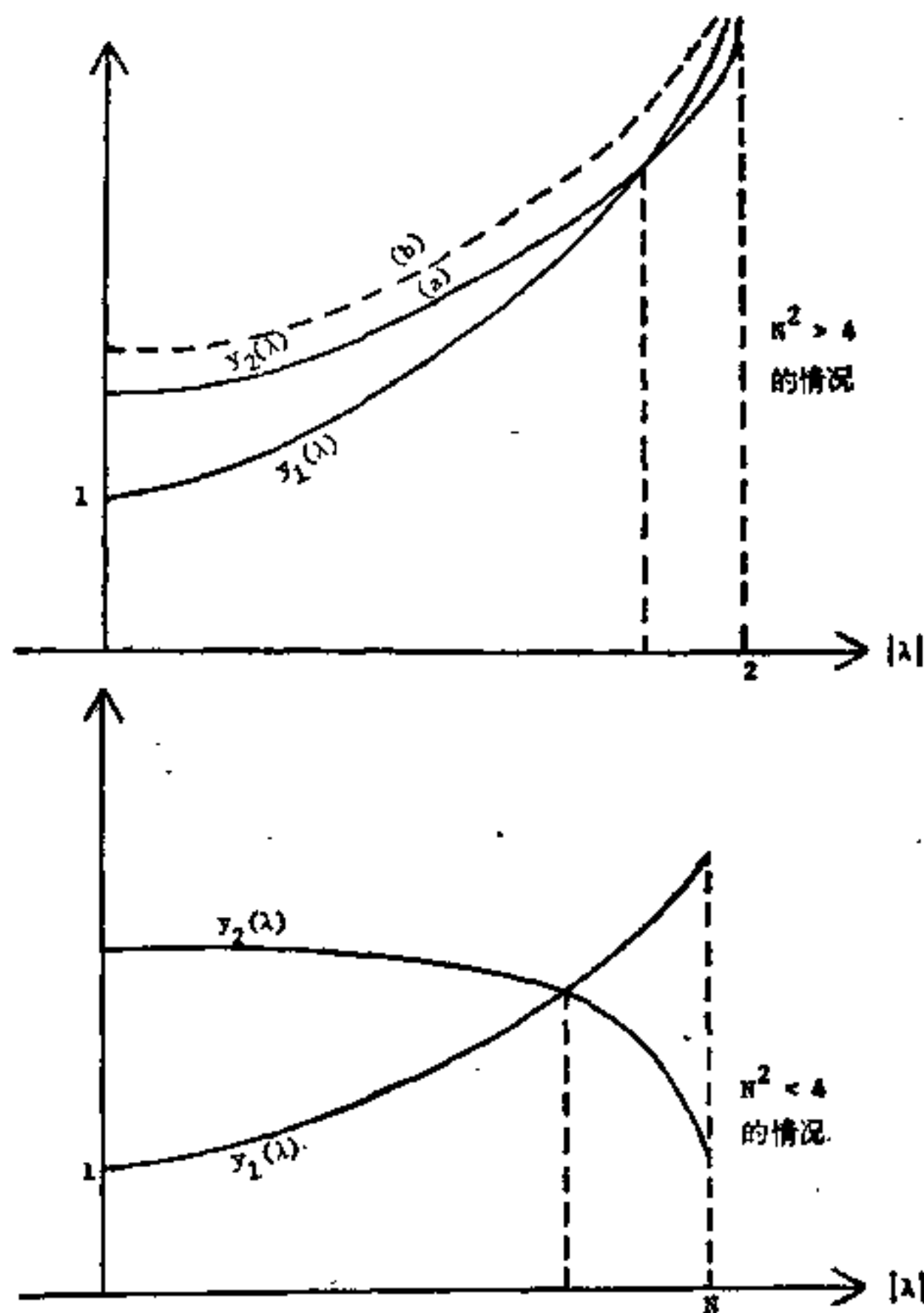


图 22 曲线 $y_1(\lambda)$ 和 $y_2(\lambda)$

对于球上的内波, 我们可利用球坐标求得以 Legendre 多项式表示的方程 (13.9) 的解, 并由此得到与前面类似的结果

(见 Friedlander 和 Siegmund^[22])。第一类波的本征值 λ_{mnk} 同样存在并组成三维无穷集合,其上、下界由下式确定

$$\min(N^2, 4) < \lambda_{mnk}^2 < \max(N^2, 4)。$$

当 $N^2 = 4$ 时, λ_{mnk} 的集合就只包含一个本征值。这些内波与纯旋转或纯层化流体中的内波是相似的。对某些波数 n 和 k , 同样存在内 Kelvin 波。其中 λ_{nk} 取负值, 且有 $\lambda_{nk}^2 \leq \min(N^2, 4)$ 。内 Kelvin 波在同时有旋转和层化作用的情况下才存在。

在许多海洋问题中, 无量纲浮力频率 N 远大于 4。所以, 波动以第一类内波为主。但在深水区, N 值较小并接近 4。故在研究大洋深处的问题时, 内 Kelvin 波可能是重要的。

可变的 $N(z)$

我们在前面说过, 海洋或大气中浮力频率 N 并不是常量, 它多半是深度 z 的函数, 在温跃层处变化很大。图 23 是与观察资料一致的 $N(z)$ 曲线示意图。当 N 为变量时, 压强方程就成了变系数的偏微分方程。重新推导 (13.9) 式可得

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N^2 - 4}{\lambda^2 - N^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0。 \quad (13.32)$$

下面, 我们在一个矩形区域里讨论这个变系数方程。区域之边界为 $x = 0, L$, y 方向是无界的。由法向速度为零的边界条件, 可得 Φ 的边界条件

$$\text{在 } x = 0, L \text{ 处 } i\lambda\Phi_x + 2\Phi_z = 0, \quad (13.33)$$

$$\text{在 } z = 0, 1 \text{ 处 } \frac{\lambda}{\lambda^2 - N^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0。 \quad (13.34)$$

我们来求具有如下形式的方程 (13.32) 的解, 即

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (\lambda^2 - N^2) A(x, z) e^{iky}。$$

由此可得关于 $A(x, z)$ 的方程和边界条件如下:

$$A_{xx} - k^2 A + \frac{\lambda^2 - 4}{\lambda^2 - N^2} A_{zz} = 0, \quad (13.35)$$

$$x = 0, L \text{ 处 } \lambda A_x + 2kA = 0, \quad (13.36)$$

$$z = 0, 1 \text{ 处 } A = 0. \quad (13.37)$$

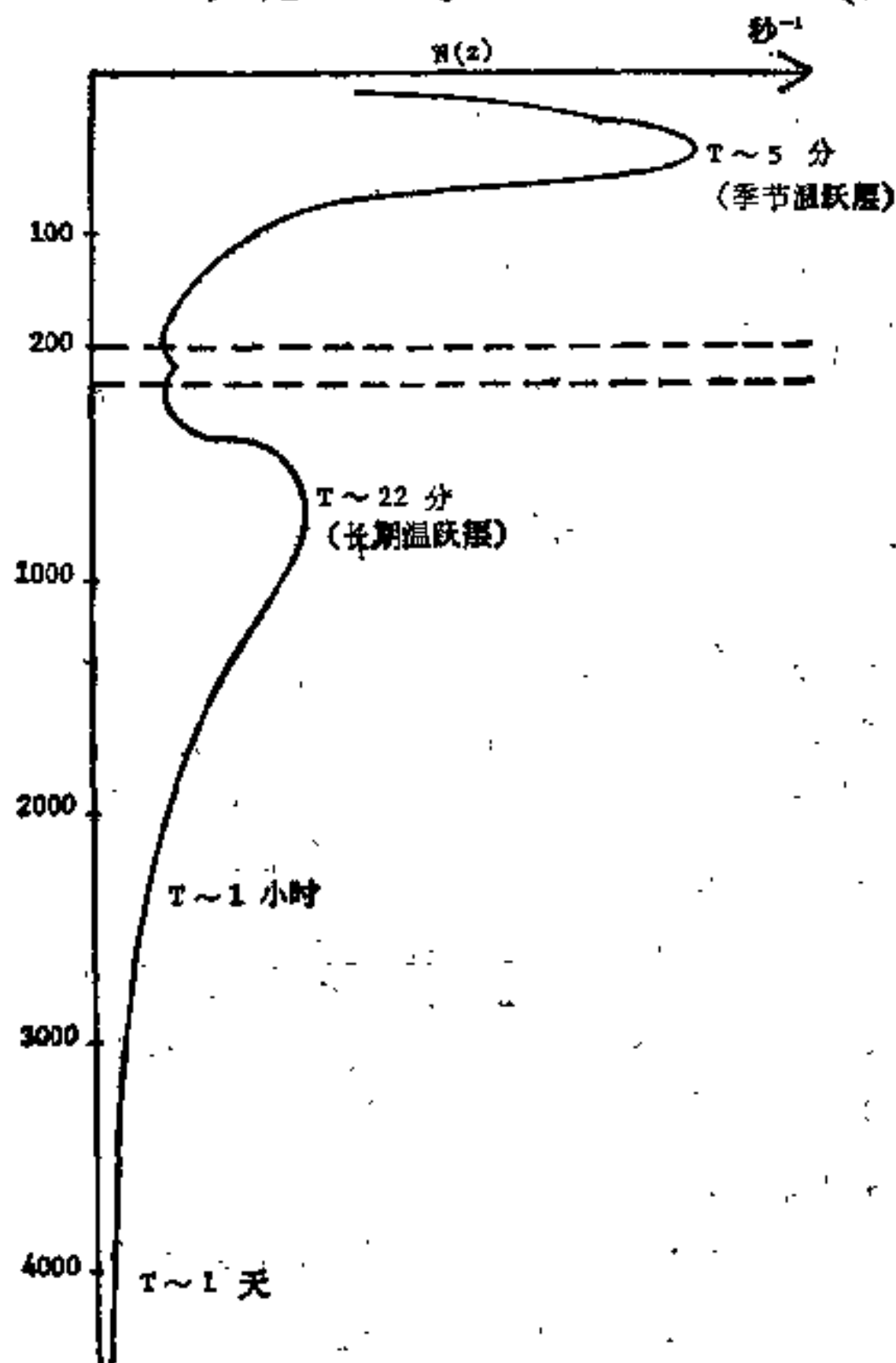


图 23 海洋中 $N(z)$ 随深度的变化曲线。周期 $T = 2\pi/N$ 。

此定解问题可用分离变量法来解。记

$$A = F(x)G(z),$$

便有
$$F_{xx} - k^2 F = -\gamma F \quad (13.38)$$

和
$$G_{xx} = -\gamma \left[\frac{N^2(x) - \lambda^2}{\lambda^2 - 4} \right] G. \quad (13.39)$$

其中 γ 为分离常数。

带有边界条件 (13.36) 的方程 (13.38) 有两类解, 第一类解与第一类内波对应, 第二类解与内 Kelvin 波对应。第一类解为

$$F(x) = 2k \sin \frac{m\pi}{L} x - \lambda \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi}{L} x, \quad (13.40)$$

$$\gamma = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + k^2.$$

此时 $G(x)$ 的定解问题变为

$$G_{xx} = - \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + k^2 \right] \left(\frac{N^2 - \lambda^2}{\lambda^2 - 4} \right) G, \quad (13.41)$$

$$x = 0, 1 \text{ 处 } G = 0.$$

第二类解在 x 方向不呈现简谐变化, 其表达式为

$$F_K(x) = \text{ch} \frac{2k}{\lambda} x - \text{sh} \frac{2k}{\lambda} x, \quad (13.42)$$

$$\gamma = \frac{k^2}{\lambda^2} (\lambda^2 - 4).$$

此时, $G(x)$ 的定解问题变为

$$G_{Kxx} = -k^2 \left(\frac{N^2 - \lambda_k^2}{\lambda_k^2} \right) G_K, \quad (13.43)$$

$$x = 0, 1 \text{ 处 } G_K = 0$$

(下标 K 表示与内 Kelvin 波对应)。

定解问题 (13.41) 和 (13.43) 都可写成标准的 Sturm-Liouville 问题。记 $\omega^2 = \frac{1}{\lambda^2 - 4}$, 则 (13.41) 式化为

$$G_{xx} + \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + k^2 \right] [(N^2 - 4)\omega^2 - 1] G = 0, \quad (13.44)$$

$z = 0, 1$ 处 $G = 0$ 。

记 $\mu^2 = \frac{1}{\lambda_k^2}$, 则(13.43)式化为

$$G_{Kxx} + k^2[N^2\mu^2 - 1]G_K = 0, \quad (13.45)$$

$z = 0, 1$ 处 $G_K = 0$ 。

当 $N^2(z) > 4$ 时, 方程 (13.44) 和 (13.45) 都是形如下式的 Sturm-Liouville 方程

$$\frac{d}{dz} p(z) \frac{dX(z)}{dz} + [q(z) + \lambda r(z)]X(z) = 0.$$

其中 $p > 0, r > 0$ 。所以, 关于 Sturm-Liouville 方程的所有理论 (Morse 和 Feshbach^[46]) 都可用来研究内波的垂直特性。由于方程 (13.44) 和 (13.45) 具有相同的形式, 所不同的仅是方程中的系数。所以, 只要研究 $G(z)$ 的问题就够了, 而关于 $G_K(z)$ 的结果可参照 $G(z)$ 的结果直接写出。

进一步分析可知, 方程 (13.44) 和 (13.45) 实际上都具有如下一维 Schrödinger 方程的形式

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dz^2} + [E - V(z)]u = 0.$$

这一点是 Eckart 在研究无旋转流体中的内波时首先提出的 (见[16])。现在我们看到, 对于旋转、层化流体中的两类内波, 它仍然成立。因此, 我们可以利用量子力学的有关结果来研究上述内波问题。

对于 (13.44) 给出的定解问题, 利用 Sturm-Liouville 理论可导出如下结果:

1) 存在一个离散的无穷本征值系列 ω_{mk_n} , 且满足

$$\omega_{mk_n}^2 > \frac{1}{N_{\max}^2 - 4} \text{ 和 } \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{mk_n}^2 \rightarrow n^2.$$

其中 $N_{\max}^2 = \max N^2(z)$ 。利用定义 $\omega^2 = \frac{1}{\lambda^2 - 4}$, 我们得

到频率关系

$$N_{\max}^2 > \lambda_{mk_0}^2 > \lambda_{mk_1}^2 > \cdots > \lambda_{mk_n}^2 \rightarrow 4. \quad (13.46)$$

2) 存在完备的本征函数集 G_{mk_n} , 其中不同的本征函数带权 $[N^2(z) - 4]$ 正交。

对于 (13.45) 给出的定解问题, (G_K, μ) 具有类似的性质。其频率系列 λ_{Kk_n} 满足关系

$$N_{\max}^2 > \lambda_{Kk_0}^2 > \lambda_{Kk_1}^2 > \cdots > \lambda_{Kk_n}^2 \rightarrow 0. \quad (13.47)$$

本征函数 G_{Kk_n} 构成完备集且带权 $N^2(z)$ 相互正交。

用同样方式可以讨论 $N^2(z) < 4$ 的情况。这时频率 $\lambda_{mk_n}^2$ 满足关系

$$N_{\min}^2 < \lambda_{mk_0}^2 < \lambda_{mk_1}^2 < \cdots < \lambda_{mk_n}^2 \rightarrow 4. \quad (13.48)$$

而关于 (G_K, λ_K) 的结论不变。对于某些深度上出现 $N^2(z) = 4$ 的情形 (大洋深处可能出现此情况), 方程 (13.44) 不再是标准的 Sturm-Liouville 型, 从而要用更复杂的方法来研究。图 24 画出了这种情况下频率系列的情况。

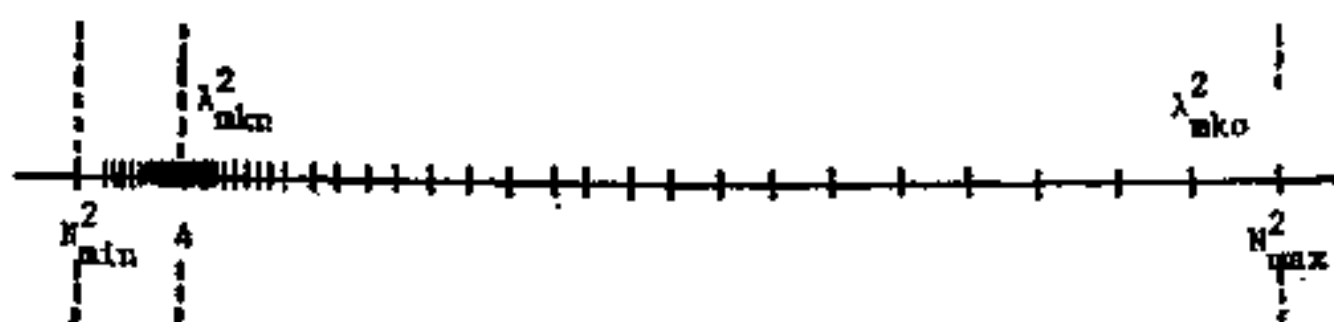


图 24 在 $N_{\min}^2 < 4 < N_{\max}^2$ 情况下, m, K 不变时的
频率系列 $\lambda_{mk_n}^2$

本征值从两个方向上向 4 处聚集

用 W.K.B.* 方法可以近似地估计方程 (13.44) 和 (13.45) 的本征函数的特点。在这种方法中假定变系数微分方程的解是振荡解, 振荡变化比方程系数的变化快得多。当波数

* W. K. B. 是提出这一近似方法的三人 (Wentzel, Kramer 和 Brillouin) 名字之字首。——译者注

$$\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + k^2\right]$$

很大时,方程 (13.44) 的解 $G(x)$ 随 x 变化很快。这时便可用 W. K. B. 方法求形为

$$G = \exp\left[\gamma\phi_0(x) + \phi_1(x) + \frac{1}{\gamma}\phi_2(x) + \dots\right]$$

的解。其中 $\gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + k^2$ 。将此近似的形式解代入方程 (13.44), 合并 γ 的同幂项, 可得 $\phi_0(x)$ 和 $\phi_1(x)$ 满足的方程, 并由此解得

$$G(x) \sim \frac{e^{\pm i\gamma x} \int [\omega^2(N^2 - 4) - 1]^{1/2} dx}{[\omega^2(N^2 - 4) - 1]^{1/2}} \quad (13.49)$$

方程 (13.49) 仅当 $[\omega^2(N^2 - 4) - 1]$ 大于零时才有振荡解, 这对运用 W. K. B. 方法产生了一定的限制。我们称满足

$$\omega^2(N^2 - 4) - 1 = 0$$

的 x 值为方程 (13.44) 的转折点。从频率 λ^2 来看, 当

$$\frac{N^2 - 4}{\lambda^2 - 4} = 1 \quad \text{即} \quad N^2(x) = \lambda^2$$

时, 方程 (13.44) 具有转折点。所以, 对于频率系列 (13.46) 中的某一给定频率 λ , 其对应的波动的垂直结构在浮力频率 N 等于 λ 的深度上不再具有振动形式。在 $N^2(x)$ 小于 λ^2 的水域部份, 波动与深度的关系呈现指数形式。在离开转折点且 $N^2 > \lambda^2$ 的水域, W. K. B. 近似 (13.49) 是有效的。而在转折点附近, 可以近似地认为 (13.44) 中 G 的系数是 x 的线性函数。这样得到的近似方程的解可用 Airy 函数表示。此近似解必须与振荡解 (13.49) 相匹配。关于 W. K. B. 方法 (有时也称 W. K. B. J. 方法) 的详细介绍可参看 Murray 的著

作⁽⁴⁷⁾。

用同样的方法可以讨论(13.45)表示的内 Kelvin 波问题。当 k 很大时有

$$G_K \sim \frac{e^{\pm ik} \int (\mu^2 N^2 - 1)^{1/2} dz}{(\mu^2 N^2 - 1)^{1/2}}。$$

由于 $|k| < \min(2, N_{\min})$, 所以 $(\mu^2 N^2 - 1)$ 恒不为零。这就不存在转折点问题。

对于小的水平波数 m 和 k , W. K. B. 近似给出的渐近结果不适用, 但仍然可以定性地分析本征函数的特点。将(13.44)写成积分形式

$$\frac{dG}{dz} = -r_{mk}^2 \int [(N^2 - 4)\omega^2 - 1] G dz, \quad (13.50)$$

其中 $\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + k^2\right]$ 用 r_{mk}^2 表示。我们来研究 $k = 0, m = 1$ 的最低型解。方程(13.50)具有无穷多个本征值 ω_{10n}^2 和本征函数 G_{10n} , 最小本征值为 ω_{100}^2 。本征函数 G_{10n} 满足 $G_{10n}(0) = G_{10n}(1) = 0$ 。若 $[(N^2 - 4)\omega^2 - 1]$ 恒小于零, 则 $G_{10n}(z)$ 显然不满足上述要求。因为此时(13.50)表示 G 的导数随 G 增大而增大, G 不可能在区间的两端具有相同的值。这就要求

$$(N_{\max}^2 - 4)\omega_{100}^2 > 1,$$

$$\omega_{100}^2 > \frac{1}{N_{\max}^2 - 4}$$

(这等价于 $\lambda_{100}^2 < N_{\max}^2$)。实际上, ω_{100}^2 必须远大于 $\frac{1}{N_{\max}^2 - 4}$, 以保证 $z = 1$ 处 $\frac{dG_{100}}{dz}$ 变为零和 $G_{100}(z)$ 曲线在 $z = 1$ 处与

z 轴相交。第二个本征值 ω_{101}^2 要远大于 ω_{100}^2 , 以保证 $G_{101}(z)$ 曲线在 $(0, 1)$ 区间上跨越 z 轴一次并在 $z = 1$ 处与 z 轴相交。对于 $n = 2, 3, \dots$ 的各型函数, 我们可以依次进行定性分析

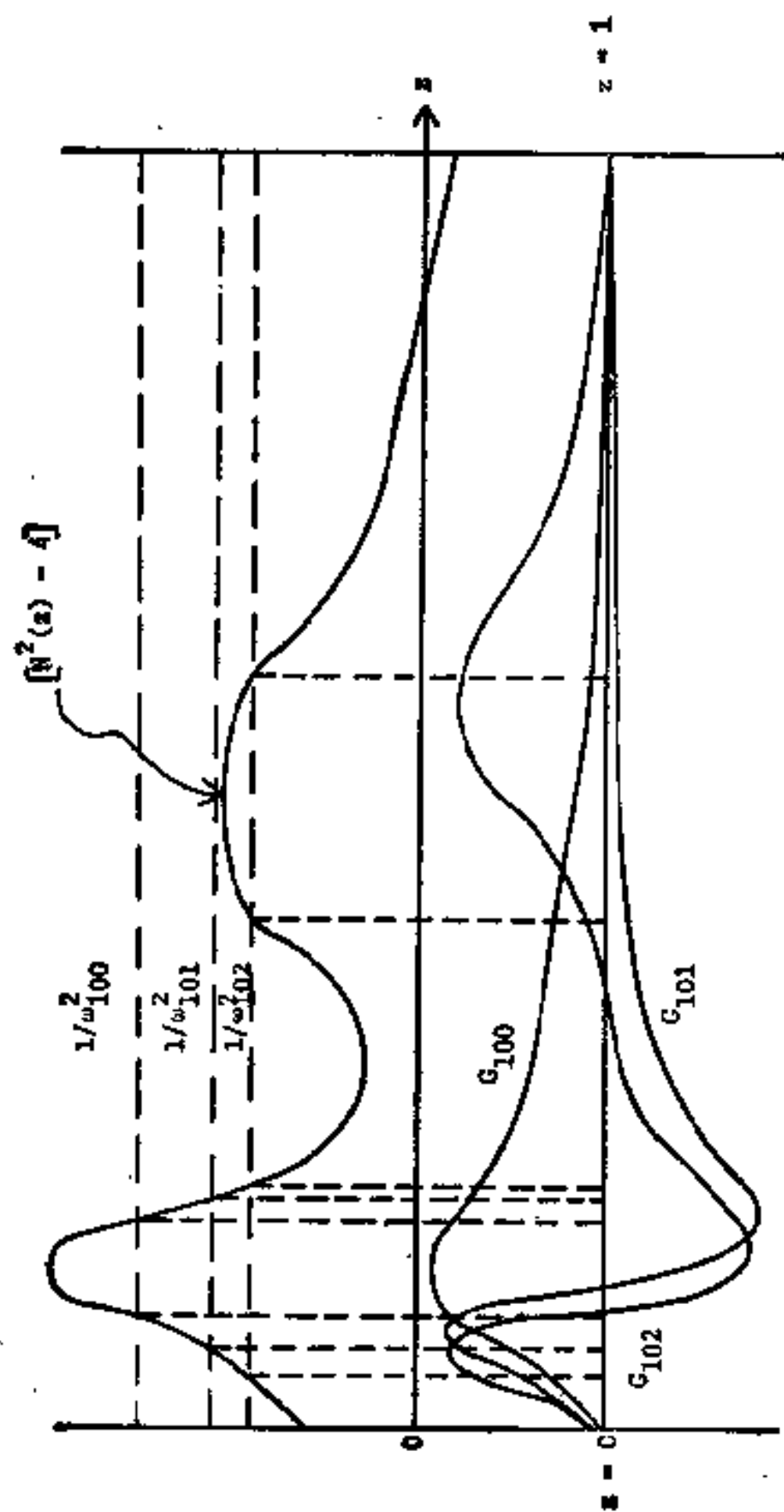


图 25 上面的曲线为 $[N^2(z) - 4]$ 。下面的曲线为前三型的曲线

(参看图 25)。

海洋学中的研究成果

自从 1893 年挪威探险家 Fridtjof Nansen 首次报道了海洋中的内波现象以来,海洋内波的研究有了许多进展。在 *Journal of Geophysical Research* (1975) 的第 80 卷里,刊载了不少新近的有关成果。这本杂志收集了一些关于海洋内波的论文,其中包括 Briscoe 作的历史性介绍^[4] 和 Thorpe 作的综述^[46]。Thorpe 在其文章中综述了影响大洋深处内波产生、耗散和相互作用的物理过程的理论研究成果。他还介绍了地形、降水、鱼等因素对内波产生的影响。Wunsch 的论文^[74] 评论了内波的观测现状并提出了许多重要的问题。这些问题推动了人们对内波的进一步研究。Garret 和 Munk 在 1979 年的一篇评论文章^[24] 中评述了现在流行的能量谱研究方法。他们研究了海洋内波的实验资料,并试图建立一个关于内波能量在波数、频率空间内分布的符合实际的模式。Le Blond 和 Mysak^[41] 对海洋波动理论作了较全面的介绍,并对新的研究成果进行了更详细的说明。他们还考虑了有限振幅的效应和非线性相互作用。特别有意义的是关于尚未解决的问题的介绍,其中包括非线性表面波,潮汐耗散,激发大洋长波的能源和各种拦获波 (trapped waves)。

LeBlond 和 Mysak 简要地总结了海洋中各种类型的经典波动。对此感兴趣的读者可以在 Phillips 的著作^[53] 和 Krauss 的著作^[59] 中找到有关细节。Kamenkovich 在最近的著作^[37] 中对无界的旋转、层化海洋中的各类波动给出了统一的研究方法。他利用两个不同的波动问题 H 和 V 的本征值曲线的交点,确定海洋中自由振荡的频率。在问频 H 和 V 中,前者仅明

显地涉及地转效应和地球表面曲率的影响,后者仅明显地涉及层化效应的影响。经过这样的处理,我们就可以在运动方程中分别考虑旋转和层化效应了。

习 题

- 13.1) 在均匀流体中,惯性波对于旋转轴的人射角与反射角相等(见习题 7.3)。引入层化作用会改变内波的这种反射特性吗?
- 13.2) 由方程(13.1)和(13.3),证明边界条件 $\mathbf{Q} \cdot \hat{n} = 0$ 可写成

$$\hat{n} \cdot \nabla \Phi - \frac{2}{i\lambda} (\hat{n} \times \hat{k}) \cdot \nabla \Phi + \left[\frac{N^2 - 4}{\lambda^2 - N^2} \right] (\hat{n} \cdot \hat{k}) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

- 13.3) 对于具有刚性边界 $z = 0, H; x = 0, L$ 而 y 方向无界的区域,确定旋转、层化流体中的内波的解。其中 Φ 的定解问题如下:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\lambda^2 - f^2}{\lambda^2 - N^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

$$z = 0, H \text{ 处 } \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$x = 0, L \text{ 处 } i\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} + f \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

(N^2 视为常量)。

- a) 导出两类波的本征值和本征函数。
- b) 对固定的 z 值,画出一个第一类波的本征函数和一个第二类波的本征函数(作为 x 的函数)。
- c) 将你得到的解与本章中圆筒问题里得到的解作比

较。

13.4) 当浮力频率 $N(z)$ 是深度 z 的函数时, 导出 $\Phi(r)$ 满足的方程。

13.5) 考虑方程

$$G_{zz} + \gamma^2[(N^2(z) - 4)\omega^2 - 1]G = 0。$$

对大的参量 γ 用 W. K. B. 方法求形为

$$G = \exp\left[\gamma\phi_0(z) + \phi_1(z) + \frac{1}{\gamma}\phi_2(z) + \dots\right]$$

的解。由原方程中 γ^{-1} 的系数组成的等式导出 $\phi_0(z)$ 和 $\phi_1(z)$ 满足的方程。由此证明 (13.49) 是原方程的近似解。

第十四章 旋转、层化流体 内的边界层

假定运动是定常的(或准定常的),我们来研究旋转、层化的粘性流体。在(10.6)——(10.8)中令 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 和 $\nabla T_0 = \hat{k}$, 即得所需的运动方程

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (14.1)$$

$$2\hat{k} \times \mathbf{q} = -\nabla P + T\hat{k} + E\nabla^2 \mathbf{q}, \quad (14.2)$$

$$w = \frac{E}{N^2\sigma} \nabla^2 T_0. \quad (14.3)$$

在利用这些方程分析边界层的结构之前,我们先来讨论无量纲参量 E 和 $N^2\sigma$ 的相对大小,因为它们的相对大小对问题的求解有很大影响。若热扩散远大于粘性扩散 ($\kappa \gg \nu$) 或者层化参量 N^2 很小,则有 $O(N^2\sigma) < O(E)$ 。在这种情况下,准确至一阶的方程(14.3)可写为

$$\nabla^2 T = 0。$$

所以,在适当的边界条件下解拉普拉斯方程,就能确定温度场,再利用方程(14.1)和(14.2),便可解出速度 \mathbf{q} 。(14.1)和(14.2)式与旋转的均匀流体的运动方程是等价的,所不同的只是加上了非均匀项 $T\hat{k}$ 。因此,当 $O(N^2\sigma) < O(E)$ 时,温度场和速度场的求解可以相互独立进行。

我们将在 $N^2\sigma$ 大于 E 的情况下讨论方程(14.1)——(14.3)的特点和有关的边界层。这时,层化是不可忽略的,但它的精确效应仍与 $N^2\sigma$ 和 E 的比值有关。为了解边界层怎样随 E 和 $N^2\sigma$ 的相对比值而改变,可记 $N^2\sigma = E^*$ 。下面,我们来分析当

• 从 1 开始减小时可能产生的边界层。

为了将方程 (14.1), (14.2) 和 (14.3) 简化为压强 P 满足的单一方程, 我们仍采取老办法。由 (14.3) 和 $\hat{k} \cdot (14.2)$ 可得

$$w = \frac{E}{N^2\sigma} \nabla^2 \left[\frac{\partial P}{\partial z} - E \nabla^2 w \right]. \quad (14.4)$$

利用 $\nabla \cdot (14.2)$ 和 $\hat{k} \cdot \nabla \times (14.2)$, 可分别得到

$$-2\hat{k} \cdot \nabla \times q = -\nabla^2 P + \frac{\partial T}{\partial z} \quad (14.5)$$

和

$$-2 \frac{\partial w}{\partial z} = E \nabla^2 \hat{k} \cdot \nabla \times q. \quad (14.6)$$

将 (14.5) 代入 (14.6) 便有

$$4 \frac{\partial w}{\partial z} = E \nabla^2 \left(-\nabla^2 P + \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (14.7)$$

以 (14.3) 式中的 $\nabla^2 T$ 代入上式便得

$$(4 - N^2\sigma) \frac{\partial w}{\partial z} = -E \nabla^4 P. \quad (14.8)$$

再由 (14.4) 和 (14.8) 式就可得到

$$\begin{aligned} \nabla^2 [E^2 \nabla^4 P + N^2\sigma \nabla_H^2 P + 4P_{zz}] &= 0 \\ \left(\nabla_H - \nabla - \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (14.9)$$

这个八阶偏微分方程描述了层化粘性流体中的定常运动。方程中的第一项代表粘性扩散效应, 第二项代表浮力效应, 而第三项代表科氏力。在满足关于温度、切向速度和法向速度的边界条件时, 这一方程的解就是上述定常线性化流动问题的精确解。当然, 要解带有一般边界条件的八阶偏微分方程是十分困难的。我们将利用边界层方法求一个渐近解。

层化流体中的 Ekman 层

记 $N^2\sigma = E^\alpha$, $z = E^\alpha \xi$, $\frac{\partial}{\partial z} = E^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi}$ 。我们来研究水平表面的边界层。由方程 (14.9) 可知, 保留边界层方程中量级最高的各项后, 得

$$E^{2-4\alpha} \frac{\partial^4 P}{\partial \xi^4} + E^\alpha \nabla_H^2 P + 4 E^{-2\alpha} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0. \quad (14.10)$$

若 $\alpha > -1$, 则当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 相应的方程变为

$$\frac{\partial^4 P}{\partial \xi^4} + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0. \quad (14.11)$$

由此可见, 当 $N^2\sigma$ 小于 $O(E^{-1})$ 时, 层化流体中的 Ekman 层与均匀流体中的 Ekman 层有相同的动力学特性。若层化增强, 以至 $N^2\sigma > O(E^{-1})$, 则这样的 Ekman 层结构便被破坏。

还有一点需要注意。层化问题中方程 (14.3) 要求 $w = O(E^{1-\alpha})$, 而在第五章已经说明, 由 (14.11) 表征的 Ekman 层引起的内区垂直速度为 $w = O(E^{1/2})$ 。所以, 从 Ekman 层作用的角度上, 又有 $N^2\sigma$ 的另一个临界值, 即 $N^2\sigma = O(E^{1/2})$ 。当 $N^2\sigma$ 大于此临界值时 (即 $\alpha < \frac{1}{2}$), 层化便阻止 Ekman 层的抽吸作用。这时称 Ekman 层为无发散的。当 $N^2\sigma < O(E^{1/2})$ 时, Ekman 层对内区流动的驱动作用与均匀流体的情况一致。

为了更进一步分析 Ekman 层, 我们利用 $E^{1/2}$ 为幂进行渐近展开。其中量级最高的零阶量满足大家已熟悉的方程

$$-2\theta = \hat{u}_{\xi\xi}, \quad (14.12)$$

$$2\hat{u} = \theta_{\xi\xi}, \quad (14.13)$$

$$\hat{u}_x + \theta_y + \hat{\omega}_\xi = 0. \quad (14.14)$$

且有 $\hat{u} = O(1)$, $\theta = O(1)$, $\hat{\omega} = O(E^{1/2})$ 。设边界条件为:外加水平速度为 \mathbf{Q}_H , 法向速度为零, 温度场为零。由(14.12)–(14.14)可得 $\xi = 0$ 处的 Ekman 抽吸条件

$$\hat{\omega} = \frac{E^{1/2}}{2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times (\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_H). \quad (14.15)$$

然而, 方程 (14.3) 意味着对于内区流动应有 $\omega = O(E^{1-\sigma})$ 。

所以, 若 $\sigma < \frac{1}{2}$, 则法向速度为零的边界条件必须由 Ekman

层本身来满足。因此, 准确至一阶的抽吸条件(14.15)退化为

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times (\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_H) = 0, \quad \omega = O(E^{1-\sigma}).$$

这就是说, 当 $O(E^{1/2}) < N^2\sigma < O(E^{-1})$ 时, 旋转、层化流体中的水平边界层具有 Ekman 层形式。不过, 由于层化妨碍了 Ekman 层的抽吸作用, 使其无法在内区引起 $O(E^{1/2})$ 的垂直速度, 所以这时的 Ekman 层是不太重要的。

为了分析 $N^2\sigma > O(E^{-1})$ 的情况, 我们仍可利用(14.10)式得到平衡方程

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \nabla_H^2 P = 0 \quad (14.16)$$

和

$$\alpha = \frac{2 - \sigma}{6}.$$

只要交换水平方向和垂直方向, 方程 (14.16) 便与方程 (9.4) 相似, 后者是旋转、均匀流体中侧边界的 $E^{1/3}$ 边界层的方程。实际上, 当层化足够强以至 $N^2\sigma > O(E^{-1})$ 时, 边界层的结构便由层化所决定。正如我们在第十章中所提到的, 这时水平边界层便与垂直的 Stewartson 边界层相似。

侧 边 界 层

在分析与旋转轴平行的侧边界层时,我们记

$$\frac{\partial}{\partial r} = E^{-\beta} \frac{\partial}{\partial x}$$

保留方程(14.9)中量级最高的各项,可得方程

$$E^{2-6\beta} \frac{\partial^6 P}{\partial x^6} + E^{2-2\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 4P_{zz} = 0. \quad (14.17)$$

边界层方程仍由 α 的大小来决定。

$$1) \alpha > \frac{2}{3}.$$

这时,边界层方程化为

$$\frac{\partial^6 P}{\partial x^6} + 4P_{zz} = 0, \quad (14.18)$$

且有 $\beta = \frac{1}{3}$ 。故当层化很弱以至 $N^2\sigma < O(E^{2/3})$ 时,边界层仍具有均匀流体中 $E^{1/3}$ 层的形式。

$$2) \alpha < \frac{2}{3}.$$

这时可能有两种边界层。一种是粘性力和浮力平衡产生的浮力边界层,即

$$\frac{\partial^6 P}{\partial x^6} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, \quad (14.19)$$

此平衡要求 $\beta = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}$, 从而边界层的厚度为

$$O\left(\frac{E^{1/2}}{(N^2\sigma)^{1/4}}\right).$$

另一种边界层称为流体静力边界层,在这一层中浮力和科氏力互相平衡,即

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 4P_{xx} = 0. \quad (14.20)$$

此平衡要求 $\beta = \frac{a}{2}$, 从而边界层的厚度为 $O((N^2\sigma)^{1/2})$ 。此厚度并不明显地依赖于 E 。

若 $a < \frac{1}{2}$, 则方程 (14.17) 化为均匀流体 $E^{1/4}$ 边界层的方程, 即

$$P_{xx} = 0. \quad (14.21)$$

因而, 我们可以想象, 当 $N^2\sigma < O(E^{1/2})$ 时, $E^{1/4}$ 层的作用是使给定的边界速度与内区的水平速度相匹配。

下面我们来分析 $N^2\sigma$ 由零开始逐渐增大时所带来的变化。在 $N^2\sigma$ 达到 $N^2\sigma = O(E^{1/2})$ 之前, $E^{1/4}$ 层基本上是不变的。不过, 在 $N^2\sigma = O(E^{2/3})$ 之前, $E^{1/3}$ 层就发生了变化。当 $N^2\sigma = O(E^{2/3})$ 时, $E^{1/3}$ 层被厚度为 $O\left(\frac{E^{1/2}}{(N^2\sigma)^{1/4}}\right)$ 的浮力边界层和厚度为 $O((N^2\sigma)^{1/2})$ 的流体静力边界层所取代。随着 $N^2\sigma$ 继续增大, 浮力边界层不断变薄而流体静力边界层不断增厚。当 $N^2\sigma = O(E^{1/2})$ 时, 流体静力边界层厚度达到 $O(E^{1/4})$, 与 $E^{1/4}$ 边界层重合。在这之后, 这一边界层仍随 $N^2\sigma$ 的增大而变厚。当 $N^2\sigma$ 大到 $O(1)$ 时, 此边界层变为影响内区运动的粘性扩散区域之一部分。图 26 画出了 $N^2\sigma$ 不同时边界层的各种特性。Barcilon 和 Pedlosky 在 [3] 中详细讨论了这一点。

下面我们进一步分析当 $O(E^{2/3}) < N^2\sigma < O(E^{1/2})$ 时侧边界层的运动方程。

(I) 厚度为 $O\left(\frac{E^{1/2}}{(N^2\sigma)^{1/4}}\right)$ 的浮力边界层。

记

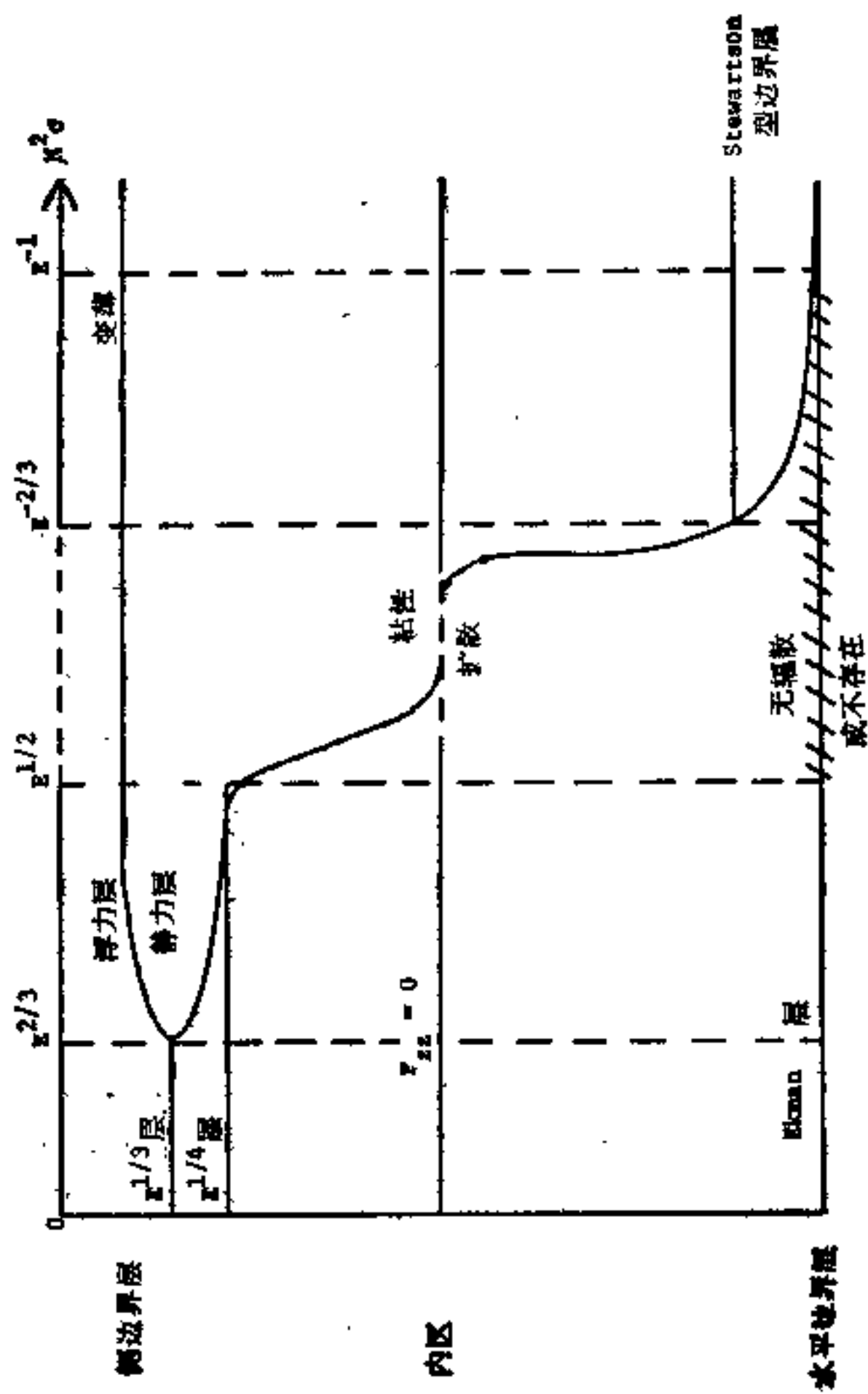


图 26 $N^2\sigma$ 增大时边界层之特性 (V. Barcilon 赠)

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{(N^2\sigma)^{1/4}}{E^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x},$$

其中 $r - a = \left[\frac{E^{1/2}}{(N^2\sigma)^{1/4}} \right] x$ 。量纲分析表明,在此边界层中有

$$u = E^{1/2} \bar{u},$$

$$v = \frac{E^{1/2}}{(N^2\sigma)^{1/2}} \bar{v},$$

$$w = (N^2\sigma)^{1/4} \bar{w},$$

$$T = (N^2\sigma)^{3/4} \bar{T}。$$

我们在上面已令 w 的量级为 $O((N^2\sigma)^{1/4})$ 。因此,在这浮力边界层内的垂直质量通量为 $O(E^{1/2})$ 。这一量值是符合实际情况的,因为 $N^2\sigma > O(E^{2/3})$ 时,浮力边界层取代了 $E^{1/3}$ 层,而后者的作用正是在 $N^2\sigma < O(E^{1/2})$ 的情况下回送 Ekman 层引起的 $O(E^{1/2})$ 的内区垂直通量。

准确至一阶时,此边界层的方程为

$$-2\bar{v} = -\bar{P}_x, \quad (14.22)$$

$$2\bar{u} = \bar{v}_{xx}, \quad (14.23)$$

$$0 = \bar{T} + \bar{w}_{xx}, \quad (14.24)$$

$$\bar{u}_x + \bar{w}_x = 0, \quad (14.25)$$

$$\bar{w} = \bar{T}_{xx0} \quad (14.26)$$

方程(14.24)和(14.26)与 Ekman 层方程(14.12)和(14.13)类似,不同的只是用 \bar{w} 和 \bar{T} 取代了 \hat{u} 和 $\hat{\theta}$ 。可以证明,侧边界层的作用与 Ekman 层的作用类似,因为侧边界层也可以产生小的径向速度 \bar{u} , 其方向与侧边界层垂直。

方程(14.22)~(14.26)中各项间的平衡表明,在此边界层中旋转和层化作用都是重要的。边界层的有量纲厚度为

$$\delta = L \cdot \frac{\nu^{1/2}}{Q^{1/2}L} \left(\frac{\epsilon}{\nu} \right)^{1/4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot \frac{g}{L} \cdot \frac{1}{Q^2} \right)^{1/4}} = \left[\frac{\kappa\nu\bar{\rho}L}{\Delta\rho g} \right]^{1/4}$$

(上式中代入了第十章给出的 N^2 和 σ 以及第三章给出的 E)。由此可见,边界层厚度与旋转角速度 Ω 之大小无关。无量纲参数 $\mathcal{R} = \frac{g\Delta\rho L^3}{\kappa\nu\rho}$ 称为 Rayleigh 数。利用它可将边界层厚度记为

$$\delta = \frac{L}{\mathcal{R}^{1/4}}.$$

(II) 厚度为 $O((N^2\sigma)^{1/2})$ 的静力边界层。
记

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{(N^2\sigma)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial y},$$

其中 $r - a = (N^2\sigma)^{1/2}y$ 。利用量纲分析可导出此边界层中有关系的相对量级,于是可写出

$$\begin{aligned} u &= E^{1/2}\bar{u}, \\ v &= N^2\sigma E^{-1/2}\bar{v}, \\ w &= (N^2\sigma)^{-1/2}E^{1/2}\bar{w}, \\ T &= (N^2\sigma)^{1/2}E^{-1/2}\bar{T}. \end{aligned}$$

上面把 w 的量级选为 $(N^2\sigma)^{-1/2}E^{1/2}$, 所以垂直质量通量为 $O(E^{1/2})$ 。边界层方程为

$$-2\bar{v} = -\bar{P}_y, \quad (14.27)$$

$$2\bar{u} = \bar{v}_{yy}, \quad (14.28)$$

$$0 = -\bar{P}_z + \bar{T}, \quad (14.29)$$

$$\bar{u}_y + \bar{w}_z = 0, \quad (14.30)$$

$$\bar{w} = \bar{T}_{yy}. \quad (14.31)$$

这一组方程与浮力边界层的方程有所不同,即垂直运动方程不同。将(14.29)与(14.24)进行比较,我们可以看出静力边界层的垂直结构比浮力边界层的垂直结构复杂,变化较大。因而,上述方程不再与 Ekman 层的方程类似。在临界值 $N^2\sigma = O(E^{1/3})$ 处,垂直运动方程中的三项具有同样量级,于是有

$$0 = -\bar{p}_x + \bar{T} + \bar{w}_{xx0} \quad (14.32)$$

这时, 浮力边界层和静力边界层在厚度为 $O(E^{1/3})$ 的层内是重合的。

〈III〉 $E^{1/4}$ 边界层。

我们在前面介绍过, 当 $N^2\sigma$ 小于 $O(E^{1/2})$ 时, Ekman 层的抽吸对内区环流起着重要的驱动作用。另外, 还存在一个 $E^{1/4}$ 边界层, 其中径向速度量级为 $O(1)$ 。 $E^{1/4}$ 层的动力学特性与均匀流体中的 $E^{1/4}$ 层类似。记

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{E^{1/4}} \frac{\partial}{\partial \eta}。$$

根据 $E^{1/4}$ 边界层中各量的量级, 可写出

$$u = E^{1/2}\tilde{u},$$

$$v = \tilde{v},$$

$$w = E^{1/4}\tilde{w},$$

$$T = N^2\sigma E^{-1/2}\tilde{T}。$$

其中速度的量级与均匀流体中的情况是一致的。引入层化可影响量级为 $O(N^2\sigma E^{-1/2})$ 的二阶量, 并能确定温度场的数值。边界层方程为

$$-2\tilde{v} = -\tilde{p}_\eta, \quad (14.33)$$

$$2\tilde{u} = \tilde{v}_{\eta\eta}, \quad (14.34)$$

$$0 = -\tilde{p}_x, \quad (14.35)$$

$$\tilde{u}_\eta + \tilde{w}_x = 0, \quad (14.36)$$

$$\tilde{w} = \tilde{T}_{\eta\eta}。 \quad (14.37)$$

由此可见, $E^{1/4}$ 层的垂直结构较简单, 其中温度场和速度场可分别解出。利用方程(14.33)–(14.37)和边界条件, 我们便可解出 \tilde{u} , \tilde{v} 和 \tilde{w} 。这些边界条件包括在上, 下边界处由 Ekman 层给出的条件和侧边界处速度的 v 分量的匹配条件 (见第九章)。一旦求得速度 \tilde{w} , 我们便可由(14.37)式解出温度场 \tilde{T} 。

最后,我们再指出关于旋转、层化流体中边界层的一个特点。在均匀流体中,侧边界层比 Ekman 层厚得多[厚度比值为 $O(E^{1/4})$, $O(E^{1/3})$ 与 $O(E^{1/2})$ 之比]。因此,Ekman 层的条件可以应用于侧边界层的流动中,这和应用于内区流动的情形是一样的。考虑层化时, $O((N^2\sigma)^{1/2})$ 的静力层和 $E^{1/4}$ 层仍然比 Ekman 层厚得多。但当 $N^2\sigma = O(1)$ 时, $O(E^{1/2}/(N^2\sigma)^{1/4})$ 的浮力层之厚度却与 Ekman 层的厚度接近。这时,在浮力层与 Ekman 层相交的区域里,粘性力、浮力和科氏力具有同样量级。这样的区域需要更细致的分析。

在下一章里,我们将利用本章介绍的边界层分析求解旋转、层化流体中的一个准定常流动问题。

习 题

14.1) 对旋转、层化流体,描述 $N^2\sigma = O(1)$ 时的边界层。

14.2) 证明在浮力边界层中

$$w + iT = A(x)e^{-(\frac{1+i}{2})x}。 \quad (\text{假定轴对称})$$

14.3) 考虑方程(14.22)–(14.26),边界条件为

在 $r = a$, $x = 0$ 处

$$\begin{cases} \bar{w} = 0 \\ (N^2\sigma)^{3/4}\bar{T} + T_I = \tau(x)。 \end{cases}$$

其中 T_I 为内区温度, $\tau(x)$ 为边界上的外加温度。在此问题中 $N^2\sigma = O(1)$ 。试确定用 τ 和 T_I 表示的函数 \bar{w} 和 \bar{T} 。

14.4) 在上题的条件中加上

$$r = a \text{ 处 } \bar{u} + u_I = 0。$$

证明内区速度 u_I 满足“浮力层抽吸条件”

$$u_1 = \frac{E^{1/2}}{(N^2\sigma)^{3/4}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (T_1 - \tau), \text{ 当 } r = a.$$

14.5) 记 $N^2\sigma = E^*$ 。a 在什么范围内, 旋转、层化流体的特征基本上等价于

- a) 旋转的均匀流体?
- b) 层化的非旋转流体?

对你的答案进行分析。

14.6) 分析 $N^2\sigma > O(E^{-1})$ 时水平边界层的动力学特性。在

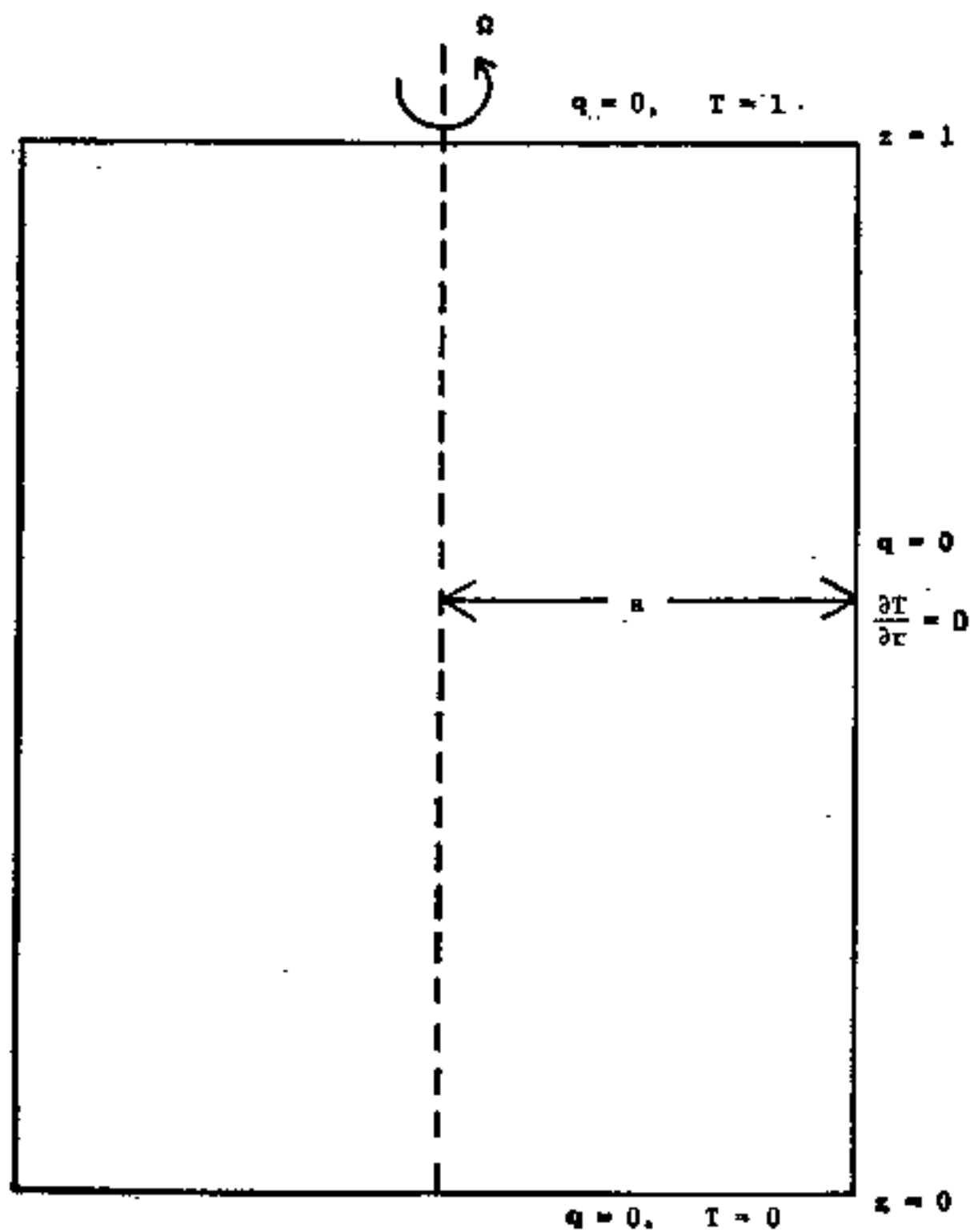


图 27

这情况下,驱动内区流动的重要机制是什么?

- 14.7) 对圆筒中的旋转、层化流体,确定准确至一阶的定常流动。相对于旋转坐标系而言,侧边界是刚性的和固定不动的。另外,侧边界还是绝热的。上边界温度为 $T = 1$, 下边界温度为 $T = 0$ 。让参数 $N^2\sigma$ 由零开始增加,并讨论你的解。参见图 27。

第十五章 旋转、层化流体内的旋转减弱

在第五章,我们讨论了旋转、均匀流体中旋转减弱(或增强)现象的机制。我们还指出, Ekman 层的抽吸作用使速度的边界条件与内区流动联系起来;由这一抽吸过程决定的均匀流体旋转增强(或减弱)的时间尺度为 $O(E^{-1/2})$,这一时间尺度比粘性增强的时间尺度 $O(E^{-1})$ 短得多。然而,对于旋转、层化的流体,这一问题就不那么简单了。这时,为了使 Ekman 层驱动的流程能构成循环的形式,流体质点必须穿越密度梯度层。此梯度将产生恢复力,阻碍质点的运动。在讨论层化 Ekman 层时,我们已注意到内区不存在 $O(E^{1/2})$ 的垂直速度。由此可见,层化效应减小了 Ekman 层对内区流动的驱动作用。实际上,关于层化旋转减弱的定义也还没有被人们普遍接受。在 Buzyna 和 Veronis 的文章^[7]中,读者可以找到关于这一术语含义的详细讨论。他们分析了层化流体中流体质点角速度产生明显变化所需的时间尺度,并发现这一尺度介于均匀流体旋转减弱时间尺度 $O(E^{-1/2})$ 和粘性扩散时间尺度 $O(E^{-1})$ 之间。

关于层化旋转减弱的概念仍存在一些争论。Pedlosky 认为(见[50]),层化阻止了 Ekman 层环流在侧边界层中的闭合。但 Walin (见[69])和 Sakurai (见[58])却各自证明了 Pedlosky 的观点并不正确。他们认为,虽然层化妨碍了 Ekman 层的环流,但它并不完全阻止此环流。最近, Benton 和 Clark 对此论题作了评论^[6]。

人们之所以对层化旋转减弱问题感兴趣，其中一个特殊的原因就是关于太阳扁率的争论。Dicke 推测（见 [12]），太阳内部的旋转角速度可能比我们观测到的外层角速度快 20 倍。如果确实如此的话，由此产生的太阳扁率就会使太阳引力场产生足够大的畸变。这样便能解释水星近日点的进动现象。但是，许多人不赞成这一理论，其中包括 Howard, Moore 和 Spiegel（见 [34]）。他们提出，某种形式的旋转减弱过程会使角速度较小的外层对流区和辐射的内部区域充分耦合，因此，即使假定初始时角速度不连续，这种不连续也不能长期存在。Dicke 对此作了反驳^[13]。他认为，太阳中心处的密度梯度很大，而太阳本身的尺寸又很大，这就否定了 Ekman 层环流的作用。因此，太阳中心各层角速度的差异可以在相当长的时间内存在。Dicke 将他的这一观点概括为“太阳决不是茶杯”。也就是说，第五章介绍的茶杯实验中的旋转减弱效应是不能照搬到太阳上的。此外，人们还提出了一些关于太阳旋转减弱问题的数学模式，其中包括 Friedlander^[20,21] 给出的模式以及 Sakurai, Clark 和 Clark^[59] 给出的模式。这些模式表明，Dicke 假定的角速度不连续经过 $O(N^2\sigma E^{-1})$ 时间尺度后将消失。这一尺度称为 Eddington-Sweet 时间尺度。对于太阳来说，参数 N^2 相当大。但由于辐射热扩散系数 κ 也很大，故 $\sigma \left(= \frac{\nu}{\kappa} \right)$ 非常小。结果， $N^2\sigma E^{-1}$ 介于 $E^{-1/2}$ 和 E^{-1} 之间。

这样，旋转减弱时间尺度便介于均匀流体旋转减弱时间尺度和粘性扩散时间尺度之间。其实，用无量纲量表示的话，太阳旋转减弱时间尺度的量级为 10^9 年，这正好比太阳的年龄小。当时间尺度小于 $O(10^9)$ 年时，太阳表面应力的作用将不会完全透入内部区域，所以太阳核心部分的角速度可以比其周围太阳物质的角速度大得多。但是，当时间尺度接近太阳现

在的年龄时，太阳中心快速旋转的部分已变得很小，从而不能产生足够大的扁率来解释水星近日点的进动。Howard, Moore 和 Spiegel^[34] 进一步指出，更加符合实际的作法是把边界层看作湍流边界层。这样，旋转减弱时间尺度将缩短很多。总之，旋转、层化流体的旋转减弱现象的分析表明，Dicke 对于简单太阳模型的假设是难以接受的。

圆筒中的旋转减弱

下面我们来介绍怎样求解圆筒中旋转、层化流体的准定常流动，并用所求得的分析太阳旋转减弱问题。至于其中的细节可参阅 Friedlander^[20]。我们用作用在水平边界上的定常应力 $\tau(r)$ 来表示太阳外层对内核的粘性耦合作用。为简化起见，可以认为边界是绝热的，侧边界是刚性、无质量的并可随流体一起自由运动。这样，我们便可在近似的边界条件下对方程(10.6)–(10.8)进行求解（假定 $\nabla T_0 = \hat{k}$ ）。为了读者阅读方便，我们将上述方程重写在下面：

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (15.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\hat{k} \times \mathbf{q} = -\nabla P + T\hat{k} + E\nabla^2 \mathbf{q}, \quad (15.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + N^2 \mathbf{q} \cdot \hat{k} = \frac{E}{\sigma} \nabla^2 T_0. \quad (15.3)$$

边界条件为

$z = 0, 1$ 处

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = \pm \tau(r), & \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & w = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (15.4)$$

和 $r = a$ 处

$$\begin{cases} v = V, u = 0, w = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \end{cases} \quad (15.5)$$

其中 $\mathbf{q} = u\hat{r} + v\hat{\theta} + w\hat{k}$ 。因为边界条件是对称的,故我们可假定长时间后的准定常解也满足 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ 。这一假定便排除了波状解。

对方程 (15.1)–(15.3) 进行分析,可知内区流动具有如下量级:

$$\begin{aligned} u &= Eu_2 + \cdots, \\ v &= v_0 + E^{1/2}V_1 + EV_2 + \cdots, \\ w &= Ew_2 + \cdots, \\ T &= T_0 + E^{1/2}T_1 + ET_2 + \cdots. \end{aligned}$$

量级最高的内区运动方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_2) + \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0, \quad (15.6)$$

$$v_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial P_0}{\partial r}, \quad (15.7)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = E \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_0 - E \cdot 2u_2, \quad (15.8)$$

$$T_0 = \frac{\partial P_0}{\partial z}, \quad (15.9)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{E}{\sigma} \nabla^2 T_0 - E \cdot N^2 w_2. \quad (15.10)$$

方程 (15.7) 和 (15.9) 表明,内区的零阶流动具有地转平衡关系和流体静力学平衡关系。而方程 (15.8) 和 (15.10) 则表明,在短的时间尺度上 v_0 和 T_0 与时间无关。实际上我们将看到,在短的时间尺度上,不存在 $O(1)$ 的定常流动。所以,我们将讨论长时间尺度上的流动状态。

$z = 0$ 和 $z = 1$ 处的边界条件可以通过 Ekman 层得到满足。除了应力边界条件带来的部分修正外,本章问题的分析与第十四章中介绍的情况类似。至于本问题中的 Ekman 层抽吸条件如何导出,我们留作习题请读者自己解决。可以证明,在 Ekman 层中 $w = O(E)$ 。由 Ekman 抽吸条件可导出 w_2 和 v_0 之间的关系为在 $z = 0, 1$ 处

$$w_2 = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} \pm \tau(r) \right). \quad (15.11)$$

准确至一阶时, Ekman 层不影响热边界条件,故

$$\text{在 } z = 0, 1 \text{ 处 } \frac{\partial T_0}{\partial z} = 0. \quad (15.12)$$

除了绝热边界条件带来一些必要的修正外,侧边界层的分层也与第十四章中讨论的情况类似。可以证明,在侧边界层中 $\bar{u} = O(E)$, 而 u_2 和 T_0 满足的关系为

$$\text{在 } r = a \text{ 处 } u_2 = -\frac{1}{N^2 \sigma} \frac{\partial^2 T_0}{\partial r \partial z}. \quad (15.13)$$

速度边界条件仍为

$$r = a \text{ 处 } v_0 = V. \quad (15.14)$$

因为外加表面应力的力矩等于流体角动量的变化率,由此可以算出不变的侧边界速度 V 。

下面我们希望用一个变量的微分方程来描述我们的问题。为此,取(15.2)式的旋度 $\nabla \times$ (15.2)并以(15.3)式代入,得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\hat{k} \cdot \nabla \times \mathbf{q} + \frac{2}{N^2} \frac{\partial T}{\partial z} \right] \\ & = E \nabla^2 \left[\hat{k} \cdot \nabla \times \mathbf{q} + \frac{2}{N^2 \sigma} \frac{\partial T}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (15.15)$$

这是粘性流体的位势涡度方程。再代入(15.7)和(15.9)给出的 v_0 和 T_0 , 我们便得到用 P_0 表示的内区方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla_H^2 P_0 + \frac{4}{N^2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} \right] \\ & = E \nabla^2 \left[\nabla_H^2 P_0 + \frac{4}{N^2 \sigma} \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (15.16)$$

这是量级为 $O(1)$ 的内区压强方程 (∇_H^2 为水平拉氏算符)。

当时间尺度小于 $O(N^2 \sigma E^{-1})$ 时, 方程 (15.16) 化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla_H^2 P_0 + \frac{4}{N^2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} \right] = 0.$$

Howard 和 Siegmann^[35] 证明, 对于预先给定的初始条件和前面介绍的边值条件, 此方程有唯一解 [见习题 (11.2) 和 (11.3)]。因此, 若初始扰动速度和温度皆为零, 则在小于 $O(N^2 \sigma E^{-1})$ 的时间尺度内, 上述定解问题的唯一解为

$$P_0 = 0.$$

从而有 $v_0 = 0$, $T_0 = 0$ 。这就是说, 在小于 $O(N^2 \sigma E^{-1})$ 的时间尺度上不存在定常流动。因此, 我们来研究长时间尺度上的流动问题。记

$$t = N^2 \sigma E^{-1} t'.$$

位势涡度方程可写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2 \sigma} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\nabla_H^2 P_0 + \frac{4}{N^2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} \right] \\ & = \nabla^2 \left[\nabla_H^2 P_0 + 4 \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (15.17)$$

下面我们来导出 P_0 的边界条件。在这样的长时间尺度上, 由方程 (15.10) 可得

$$w_2 = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\nabla^2 T_0}{\sigma} - \frac{1}{N^2 \sigma} \frac{\partial T_0}{\partial t'} \right). \quad (15.18)$$

因此, Ekman 层抽吸条件 (15.11) 化为

在 $z = 0, 1$ 处

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \left[\frac{1}{N^2 \sigma} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \right] \frac{\partial P_0}{\partial z} \\ & = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial r \partial z} \pm \tau(r) \right]. \end{aligned} \quad (15.19)$$

热边界条件 (15.12) 给出

$$\text{在 } z = 0, 1 \text{ 处 } \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} = 0. \quad (15.20)$$

在长时间尺度上, 由 (15.8) 有

$$u_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_0 - \frac{1}{N^2 \sigma} \frac{\partial v_0}{\partial t'} \right].$$

这样, 由 (15.13) 式和 (15.17) 式可得 $r = a$ 处的边界条件

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N^2 \sigma} \frac{\partial}{\partial t'} - \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right] \frac{\partial P_0}{\partial r} \Big|_{r=a} \\ & = \frac{4}{N^2 \sigma} \frac{\partial^3 P_0}{\partial r \partial z^2} \Big|_{r=a}. \end{aligned} \quad (15.21)$$

由 (15.14) 式可知

$$\text{在 } r = a \text{ 处 } \frac{\partial P_0}{\partial z} = 2V. \quad (15.22)$$

至此, 我们完整地提出了关于 P_0 的边值问题, 即方程 (15.17) 和边界条件 (15.19)–(15.22)。从方程和边界条件的复杂形式我们便可看出此方程是不易求解的。尽管如此, 通过边界层的分析, 我们已将粘性扩散方程组 (15.1)–(15.3) 和边界条件 (15.4), (15.5) 化为 $O(1)$ 的内区压强 P_0 的边值问题。此边值问题的微分方程对空间是四阶的, 并含有对时间的偏导数。边界条件含有 P_0 对时间和空间的导数。在旋转、层化的粘性流体的流动问题中, 上述数学模型的复杂性是典型的。处理这样的方程和边界条件的方法之一是求数值解。在 Williams 的著作^[70,71]中介绍了这方面的内容。

在我们讨论的特殊问题里，若将解对时间的依赖形式作某种假定，则可得到 P_0 的显式解，它是应力 $\tau(r)$ 的函数。因此，假定流动可分解为三部分，一是随时间 t' 线性增长的部分，二是定常流动，三是可用指数函数的和表示的衰减流动。于是，我们可写出

$$P_0 = t'P^0(r, z) + P^0(r, z) + \sum \mathcal{P} e^{-\lambda t'}. \quad (15.23)$$

因为不变的应力将增加流体的角动量，从而有一部分随时间线性增加的速度。所以，假定解具有上述形式是合理的。另外，在这种假定之下求得的结果与用数值方法求得的结果非常一致，这也说明选取形如 (15.23) 的解是合理的。

将 (15.23) 式代入方程 (15.17) 及其边界条件 (15.19) — (15.22)，则由 t' 的系数组成的等式中，我们可得关于 P^0 , P^1 和 \mathcal{P} 的定解问题。它们都具有显式解(见 Friedlander^[20])。 P^0 满足齐次偏微分方程，其解代表刚性旋转的简单情形。 P^1 满足的偏微分方程是非齐次的，解起来要困难得多。利用标准的方法可求得 P^0 的解是 Bessel 函数表示的级数，级数的系数由应力边界条件的 Bessel 变换确定。最后，对 \mathcal{P} 的本征值问题进行分析表明， P_0 解中的 $\sum \mathcal{P} e^{-\lambda t'}$ 部分是纯衰减的，当 $N^2\sigma \ll 1$ 时最小的本征值大于 $O(1)$ 。所以，当 t' 的尺度大于 $O(1)$ ，即 t 的尺度大于 $O(N^2\sigma E^{-1})$ 时， P_0 中的指数时间衰减部分便消失了。剩下的流动便称为准定常流动。

随时间的增长

关于 P^0 的定解问题为

$$\nabla^2 \left[\nabla_H^2 P^0 + \frac{4}{N^2\sigma} P_{zz}^0 \right] = 0, \quad (15.24)$$

$$\begin{cases} P_{zz}^0 = 0 \\ -\nabla^2 P_z^0 = \frac{N^2 \sigma}{4} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P_z^0}{\partial r}, \end{cases} \text{ 在 } z = 0, 1; \quad (15.25)$$

$$\begin{cases} P_r^0 = 2V^0 \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) P_r^0 = 0, \end{cases} \text{ 在 } r = a_0. \quad (15.26)$$

在导出上面的方程和边界条件时，我们曾假定侧边界速度也有与 P_0 类似的展开式，即

$$V = t' V^0 + V^1 + \sum \mathcal{V} e^{-\lambda t'}.$$

方程 (15.24), (15.25) 和 (15.26) 的解为

$$P^0 = \frac{V^0 r^2}{a}. \quad (15.27)$$

由 (15.27)、(15.7) 和 (15.9) 可导出

$$V^0 = \frac{V^0 r}{a} \text{ 和 } T^0 = 0. \quad (15.28)$$

所以，解 (15.23) 中随时间线性增长的这一部分纯粹代表刚性旋转时的解。

定 常 解

关于 P^0 的定解问题为

$$\nabla^2 \left[\nabla_H^2 P^1 + \frac{4}{N^2 \sigma} \frac{\partial^2 P^1}{\partial z^2} \right] = \frac{4V^0}{a} \cdot \frac{1}{N^2 \sigma}, \quad (15.29)$$

$$\begin{cases} P_{zz}^1 = 0 \\ \frac{4}{N^2 \sigma} \nabla^2 P_z^1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} P_z^1 = \pm \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau(r), \end{cases} \text{ 在 } z = 0, 1; \quad (15.30)$$

$$\begin{cases} P_r^1 = 2V^1 \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) P_r^1 = \frac{2V^0}{N^2 \sigma}, \end{cases} \text{ 在 } r = a_0. \quad (15.31)$$

这一问题的解比较复杂。在边界 $r = a$ 和边界 $z = 0$ 或 $z = 1$ 交界的角区,应用边界条件时要特别小心。我们可以这样处理:使流入角 Ekman 层的质量通量与从角 Ekman 层流出的质量通量互相耦合。 P^1 的解为 Fourier-Bessel 级数,级数的每一项都包含形如 $\text{Cosh } r_n \left(z - \frac{1}{2} \right)$ 的 z 的函数 (见习题 15.4)。在参数 $N^2\sigma$ 很小时 (与太阳的情况对应),此解可表为 $N^2\sigma$ 的幂级数

$$P^1 = \left(\frac{V^1}{a} - \frac{V^0 a}{8N^2\sigma} \right) r^2 + \frac{V^0 r^4}{16aN^2\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8J_0(\alpha_n r) \int_0^a J_0'(\alpha_n r) r \tau(r) dr}{a^2 \alpha_n^3 J_0^2(\alpha_n a)} \quad (15.32)$$

其中 $J_0'(\alpha_n a) = 0$, V^1 由初始条件决定。由 (15.7) 和 (15.9) 可解出 $O(1)$ 的定常速度和温度。显然速度与 z 无关,温度为零。

在侧边界上,应满足条件

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \bigg|_{r=a} dz = 0。$$

由此条件可确定侧边界速度 V 的随时间线性增长的部分,即可确定刚性旋转的速度 V^0 。容易验证, P^0 自动满足上面的条件。将 (15.32) 表示的 P^1 代入上式便得

$$\frac{V^0}{N^2\sigma} = \frac{16}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n J_0(\alpha_n a)} \int_0^a J_0'(\alpha_n r) r \tau(r) dr \quad (15.33)$$

这样就求出 V^0 。它是表面应力力矩与流体角动量变化率平衡的结果。

衰 减 部 分

P_0 的衰减部分中的 \mathcal{P} 之定解问题为

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda}{N^2\sigma}\left[\nabla_H^2\mathcal{P} + \frac{4}{N^2}\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial z^2}\right] \\
& = \nabla^2\left[\nabla_H^2\mathcal{P} + \frac{4}{N^2\sigma}\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial z^2}\right], \tag{15.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \mathcal{P}_{,zz} = 0 \\ \frac{\lambda}{N^2\sigma}\left(\frac{4}{N^2}\mathcal{P}_{,z}\right) + \frac{4}{N^2\sigma}\nabla^2\mathcal{P}_{,z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{P}_{,z} = 0, \end{cases} \\
& \text{在 } z = 0, 1; \tag{15.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \mathcal{P}_r = 2\mathcal{V} \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\mathcal{P}_r = -\frac{2\lambda\mathcal{V}}{N^2\sigma}, \end{cases} \quad \text{在 } r = \pi_0. \tag{15.36}
\end{aligned}$$

以 \mathcal{P} 的复共轭乘 (15.34) 式并在圆筒内积分, 我们便得到能量积分。利用边界条件 (15.35) 和 (15.36), 通过分部积分可得

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{N^2\sigma}\int_V\left[\left|\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r}\right|^2 + \frac{4}{N^2}\left|\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial z}\right|^2\right]dV \\
& = \int_V\left[\left|\nabla_H^2\mathcal{P}\right|^2 + \frac{4}{N^2\sigma}\left|\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial z^2}\right|^2\right. \\
& \quad \left.+ \left(1 + \frac{4}{N^2\sigma}\right)\left|\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial r\partial z}\right|^2\right]dV - 8|\mathcal{V}|^2. \tag{15.37}
\end{aligned}$$

由此可知, λ 必须是实数。而且至少在 $\mathcal{V} \neq 0$ 的情况下, λ 是大于零的。在 $\mathcal{V} = 0$ 的情况下, 对定常解进行分析后仍可证明本征值 λ 也是大于零的。所以, 在形如 (15.23) 的解中, 指数部分是纯衰减的。应该看到的是, 因为我们寻求的是长时间尺度上的解, 流体中主要的平衡关系为地转平衡 (15.7) 和静力平衡 (15.9), 所以, 在我们一开始提出问题的时候就已把振动解排除在外了。

可以证明(见 Friedlander^[20]), 有三组解满足方程 (15.34) 和边界条件 (15.35), (15.36)。第一组是正压型的解, 它

是由非零的初始侧边界速度引起的,相应的本征值量级为 $O(N^2\sigma)$, 衰减的时间尺度为 $O(E^{-1})$ 。第二组解的本征函数与 r 无关,它是由侧边界上非零的初始温度引起的,相应的本征值量级为 $O(N^2)$, 衰减的时间尺度为 $O(\sigma E^{-1})$ 。这正是热扩散的时间尺度。然而,我们最感兴趣的是侧边界上既没有初始温度也没有初始速度时所存在的第三组解。前两组解是具有侧边界的圆筒区域所固有的,虽然它们适用于研究某些问题,但与太阳旋转减弱问题联系不上。

第三组解称为自由型的解。它是由应力边界条件引起的,其方程和边界条件仍为 (15.34)–(15.36), 但应令 $\mathcal{V} = 0$ 。这组解可表为 Fourier-Bessel 级数

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) J_0(\alpha_n r), \text{ 其中 } J'_0(\alpha_n a) = 0 \text{ 且} \\ A_n(z) &= F_1 \cosh a(\lambda_n) \left(z - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + F_2 \cosh b(\lambda_n) \left(z - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + G \sinh a(\lambda_n) \left(z - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + G_2 \sinh b(\lambda_n) \left(z - \frac{1}{2} \right). \quad (15.37)\end{aligned}$$

系数 $a(\lambda_n)$ 和 $b(\lambda_n)$ 是四次方程

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 \left[\lambda_n + \alpha_n^2 \left(1 - \frac{N^2\sigma}{4} \right) \right] \\ + \alpha_n^2 \left(\frac{N^2\sigma}{4} \alpha_n^2 - \lambda_n \right) = 0 \quad (15.38)\end{aligned}$$

的非共轭根。应用边界条件(15.35)可确定本征值 λ_n 。这样,我们得到了关于 $a(\lambda_n)$ 和 $b(\lambda_n)$ 的两个超越方程,它们各自有无穷多个解。这两个无穷解集分别对应于表面应力引起的

奇函数解和偶函数解。本征值 λ_n 依赖于 $N^2\sigma$ 的值,其量级为 $O(1)$ [见方程 (15.38)]; 故解的这些部分的衰减时间尺度为 $O(N^2\sigma E^{-1})$ (注意 $t = N^2\sigma E^{-1}t'$)。

在侧边界没有初始温度和速度的情况下,解的衰减部分经过 $O(N^2\sigma E^{-1})$ 的时间尺度后便衰减掉了,剩下的准定常流动为

$$v = Et \frac{r}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \int_0^a J_0'(\alpha_n r) r \tau(r) dr}{a^3 \alpha_n J_0(\alpha_n a)} + \frac{1}{2} \frac{\partial P^1}{\partial r}. \quad (15.39)$$

其中 P^1 由(15.32)式确定。从上式可看出,经过 $O(E^{-1})$ 的时间后,上式中与时间成正比的项才具有 $O(1)$ 的量级。而对太阳,有不等式

$$E^{-1/2} \ll N^2\sigma E^{-1} \ll E^{-1}.$$

所以,当时间在 $O(N^2\sigma E^{-1})$ 和 $O(E^{-1})$ 之间时,流动近于定常,速度约为 $\frac{1}{2} \frac{\partial P^1}{\partial r}$ 。这一定常流动速度并不是刚性旋转速度,但在内核与外层之间也不存在 Dicke 假设的那样大的速度不连续。我们说过,若内核与外层具有不同的初始角速度,则经过 $O(N^2\sigma E^{-1})$ 时间后角速度也将趋于相同。对于太阳来说,这一时间尺度为 $O(10^9)$ 年。这与太阳的年龄接近。当然, 10^9 年也很可能是太阳旋转减弱时间尺度的上限。

几点讨论

我们已经说明了如何用研究旋转、层化流体的数学方法求解地球物理(在这里也许应该说天体物理)问题,并得到了解析解。我们也简要地提到,有些研究者曾用数值方法模拟旋转、层化流体的运动。Williams 的论文^[70,71,72,73] 对于这方面的工作作了很好的说明。数值模拟这一领域对地球物理流体

动力学的研究是极为重要的，因为问题的数学描述常常是很复杂的、不是非数值方法所能解决的。在本世纪四十年代，Von Neumann 带着 Charney 到普林斯顿的高级研究院研究大气环流的数学模式。在求解这些数学模式的过程中，数值方法得到了发展，同时也推动了现代高速计算机的研制。Charney 和 Elrassen^[11] 介绍了有关的数值方法。显然，即使作了许多简化之后，有关海洋和大气运动的数学模式仍是十分复杂的。在许多情况下，即使要得到部分的结果也必须使用计算机。然而，我们应该注意到，对数学模式的基本性质进行分析处理是很有价值的。它能帮助我们建立数值计算的模式，能帮助我们数值解的结果进行合理的解释。不过，对数值方法的更进一步讨论已超出本书的范围。

在这里，我们也应该提一下研究地球物理流体力学问题的第三种方法，即实验方法。关于这一课题的许多早期研究工作完全是实验方面的。它们为数学模式的建立奠定了基础。Ekman 本人是个海洋学家，他对海洋的观察（见[17]）促进了他后来对海洋有关现象进行的数学研究。当然，实验工作可以是直接对海洋和大气进行观测和测量，也可以对特定的物理现象进行实验室实验。通过实验，可以了解一些难以实际观测的现象，可以为进一步研究指出方向，还可对理论研究进行验证。关于这后一方面有一个很好的例子，这就是 Linden^[42] 最近对同心球间旋转、层化流体流动的研究。

习 题

- 15.1) 对于方程 (15.1)–(15.3) 和边界条件 (15.4) 描述的旋转、层化流体，导出水平表面处的 Ekman 层抽吸条件。
- 15.2) 当流体运动满足方程 (15.1)–(15.3) 和边界条件

(15.5) 时, 讨论 $r = a$ 处侧边界层的性质。若 $N^2\sigma = O(1)$, 试分析 $O(E^{1/2})$ 边界层并导出 $r = a$ 处内区流动的关系式 (15.13), 即

$$u_z = -\frac{1}{N^2\sigma} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z}, \text{ 在 } r = a.$$

当 $N^2\sigma$ 很小时这一关系还成立吗?

15.3) a) 利用应力力矩与流体角动量变化率相等的关系, 求出解的时间线性增长部分中出现的常速 V^0 。

b) 在由不变应力驱动的流动中, 决不会有比例于 t^n 而增长的流动 ($n \geq 2$), 试证明之。

15.4) a) 证明方程 (15.29) 及边界条件 (15.30) 和 (15.31) 的解 P^1 为

$$\begin{aligned} P^1 = & \left(\frac{V^0}{a} - \frac{V^0 a}{8N^2\sigma} \right) + \frac{V^0 r^4}{16a} + A_0 + B_0 \left(z - \frac{1}{2} \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 J_0(\alpha_n r)}{a^2 J_0'(\alpha_n a)} \cdot \frac{\cosh \alpha_n \left(z - \frac{1}{2} \right)}{\alpha_n^2 \cosh \frac{\alpha_n}{2}} \\ & - \frac{\cosh \frac{(N^2\sigma)^{1/2}}{2} \alpha_n \left(z - \frac{1}{2} \right)}{\frac{N^2\sigma \alpha_n^2}{4} \cosh \frac{(N^2\sigma)^{1/2} \alpha_n}{4}} \\ & \times \frac{\int_0^a J_0'(\alpha_n r) r \tau(r) dr}{\tanh \frac{\alpha_n}{2} - \frac{8}{(N^2\sigma)^{3/2}} \tanh \frac{(N^2\sigma)^{1/2} \alpha_n}{4}}, \end{aligned}$$

其中 $J_0'(\alpha_n a) = 0$ 。

b) 证明当 $N^2\sigma$ 很小时, 上式化为 (15.32) 式。为何此时 $O(1)$ 的温度为常数?

c) 当 $N^2\sigma$ 很大时, 说明速度和温度的特点。

15.5) a) 证明(15.23)式中衰减部分的本征值 λ 满足方程

$$\frac{\tanh \frac{a}{2}}{\tanh \frac{b}{2}} = \frac{a^3}{b^3} \text{ 或 } \frac{\tanh \frac{a}{2}}{\tanh \frac{b}{2}} = \frac{b^3}{a^3}.$$

其中 $a(\lambda)$ 和 $b(\lambda)$ 为方程(15.38)的非共轭根。

b) 在 $N^2\sigma \ll 1$ 的情况下, 由(15.38)式求 $a(\lambda)$ 和 $b(\lambda)$ 的近似表达式, 并由此求得最小本征值的上界和下界。然后, 求出最大本征值的渐近表达式。

第十六章 斜压不稳定性

对所有与流体有关的问题来说，研究流动的稳定性的很重要的。Chandrasekhar^[9] 对流体动力学稳定性进行了很好的探讨，从而为研究流动的稳定性的提供了极好的参考文献。下面，我们来讨论一种很有意义的特殊形式的不稳定性，即可发生在旋转、层化流体中的斜压不稳定性。关于这一问题的研究极大地增加了我们对大气特性的了解。我们之所以对斜压不稳定的机制感兴趣，一方面是由于它在地球物理学中有很大的实用价值，另一方面是因为它具有奇特的动力学特性和数学特性。最早研究这一课题的人有数位，其中包括 Eady^[10]，Charney^[11]，Sutcliffe^[64] 和 Fjortoft^[18]。我们将按 Eady 对此问题的数学分析进行介绍。

在第十二章和第十三章，我们介绍了旋转、层化流体中的波动，其中包括大气中可观察到的西向传播的 Rossby 波。我们下面将证明，由于太阳对地球赤道和两极提供的热量不等，大气始终是不稳定的。斜压不稳定性使得基本定常流动中的小扰动能够引起大尺度的波动，如大气中的旋风。产生斜压不稳定性的必要充分条件是旋转、层化和存在水平温度梯度 $\frac{\partial T_0}{\partial y}$ 。

在层化流体中，一种简单形式的不稳定性就是密度大的水体位于密度小的水体之上时的不稳定性。例如，在从底部加热一盒水，底部受热而变轻的流体上升，同时上层较冷而重的流体下降，从而产生称为 Bénard 对流的流动。不过，这

并不是斜压不稳定性的基本原理。在我们要讨论的问题中，流体的初始状态总是上面密度小，下面密度大。对于我们将要讨论的斜压不稳定性，基态流动的“势能”^{*}来自水平温度梯度 $\frac{\partial T_0}{\partial y}$ 。我们将证明，对于不稳定的运动来说，这种能量可产生波动。

Eady 模 型

我们来介绍一种能体现斜压不稳定性基本特征的最简单的模型。考虑一个矩形盒，它在 x 方向是无界的，刚性边界为 $x=0$, $x=1$ 和 $y=0$, $y=1$ 。为了模拟太阳在地球赤道和极地的不同加热效果，在流体的基态中取南北方向上的温度梯度 $\frac{\partial T_0}{\partial y}$ 为常数 c 。由于基态的定常流动处于地转平衡和静力平衡，故定常、无粘时 (10.7) 式给出

$$u_0 = -\frac{1}{f} \frac{\partial P_0}{\partial y}, \quad (16.1)$$

$$T_0 = \frac{\partial P_0}{\partial z}. \quad (16.2)$$

对斜压不稳定性的机制来说，科氏力随纬度的变化并不是基本的因素，所以在现在这种简单的模型中取 f 为常数。这样，由 (16.1) 和 (16.2) 可得

$$-\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{1}{f} \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{c}{f}.$$

所以，

^{*} 此处及后面说到的势能 (potential energy) 不是一般的重力势能，而是指可供利用的、潜在的热能。——译者注

$$-u_0 = \frac{c}{f} z_0 \quad (16.3)$$

让我们考虑对定常状态的小扰动，并由此来研究流动的稳定性问题。因为基态是非静止的，我们可按照第十章中介绍的方式将问题线性化。记

$$\begin{cases} q = \frac{c}{f} z \dot{t} + \varepsilon q', \\ T = cy + \varepsilon T', \\ P = cz\gamma + \varepsilon P'. \end{cases} \quad (16.4)$$

在第十一章我们曾得到无粘、旋转、层化流体的位势涡度。而适于我们这个简单模型的位势涡度为(11.37)式。所以，位涡守恒方程为

$$\frac{d}{dt} \left[\nabla_H^2 P + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (16.5)$$

将(16.4)式代入并保留 $O(\varepsilon)$ 的各项，可得上述方程的线性化形式

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{f} z \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\nabla_H^2 P' + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 P'}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (16.6)$$

通过以下分析可将边界条件用 P' 表示。假定上、下边界都是刚性的，故

$$\text{在 } z=0 \text{ 和 } z=1 \text{ 处 } w' = 0. \quad (16.7)$$

实际上，把问题的讨论推广到包含自由表面和非水平边界的情形并不很困难。Hide^[31] 在讨论行星大气时总结了这一点。在定常状态下，无粘温度方程(10.8)的线性化形式为

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{cz}{f} \frac{\partial T'}{\partial x} + v'c + N^2 w' = 0. \quad (16.8)$$

和第十二章推定位涡方程时的假定保持一致，我们仍假定 $O(\varepsilon)$ 的扰动流场是准地转的，故有

$$u' = \frac{1}{f} \frac{\partial P'}{\partial y}, \quad v' = -\frac{1}{f} \frac{\partial P'}{\partial x}, \quad w' = 0,$$

且

$$T' = \frac{\partial P'}{\partial z}. \quad (16.9)$$

于是,由(16.8), (16.9) 和边界条件(16.7) 可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{c}{f} \frac{\partial P'}{\partial x} = 0, \text{ 在 } z = 0 \text{ 处}; \quad (16.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{f} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{c}{f} \frac{\partial P'}{\partial x} = 0, \\ \text{在 } z = 1 \text{ 处。} \quad (16.11)$$

为简单起见,假定 $y = 0, 1$ 处的边界为刚性边界,则有

$$v' = 0, \text{ 在 } y = 0, 1 \text{ 处。}$$

这意味着

$$\frac{\partial P'}{\partial x} = 0, \text{ 在 } y = 0, 1 \text{ 处。} \quad (16.12)$$

当然,这样的边界条件是不现实的,因为大气中并不存在与纬线平行的刚性侧边界。不过,我们只是想说明斜压不稳定性的基本机制,为此尽量避免其他物理因素带来的数学上的复杂化。

稳 定 性 判 据

按照稳定性分析的一般方法,我们来求满足方程(16.6)和边界条件(16.10), (16.11), (16.12)的解。设此解具有如下形式:

$$P' = F(x) e^{ikx} e^{-i\lambda t} \sin \frac{n\pi y}{L}. \quad (16.13)$$

在本征值 λ 为实数的情况下,流体的运动是纯波状的运动。然而,复本征值所对应的运动却可能是随时间指数增长的,我们称这一类的运动为不稳定的运动。

将解(16.13)代入方程(16.6) 便得

$$i \left[-\lambda + \frac{czk}{f} \right] \left[- \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) F + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right] = 0。$$

一般情况下, $\lambda \neq \frac{czk}{f}$, 故 F 满足如下形式的方程:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \alpha_n^2 F = 0。 \quad (16.14)$$

这意味着

$$F = A e^{\alpha_n z} + B e^{-\alpha_n z}, \quad (16.15)$$

其中 $\alpha_n^2 = \frac{N^2}{f^2} \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)$ 。常数 A 和 B 可由边界条件(16.10)

和(16.11) 确定。将(16.15) 式代入上述两个边界条件可得

$$\begin{aligned} A \left(\frac{ck}{f} + \lambda \alpha_n \right) + B \left(\frac{ck}{f} - \lambda \alpha_n \right) &= 0, \\ A \left[\frac{ck}{f} + \alpha_n \left(\lambda - \frac{ck}{f} \right) \right] e^{\alpha_n} \\ &+ B \left[\frac{ck}{f} - \alpha_n \left(\lambda - \frac{ck}{f} \right) \right] e^{-\alpha_n} = 0。 \end{aligned}$$

当且仅当 λ 满足本征值方程

$$\begin{aligned} &\left[(1 + \alpha_n) \left(\frac{ck}{f} \right)^2 + \lambda \frac{ck}{f} \alpha_n^2 - \lambda^2 \alpha_n^2 \right] e^{-\alpha_n} \\ &- \left[(1 - \alpha_n) \left(\frac{ck}{f} \right)^2 + \lambda \frac{ck}{f} \alpha_n^2 - \lambda^2 \alpha_n^2 \right] e^{\alpha_n} = 0 \quad (16.16) \end{aligned}$$

时, 常数 A 和 B 才有非零解。因此, λ 由方程

$$\lambda^2 - \lambda \frac{ck}{f} + \left(\frac{ck}{f} \right)^2 \left(\frac{\alpha_n \coth \alpha_n - 1}{\alpha_n^2} \right) = 0$$

确定。由此得到 λ 的两个根

$$\lambda = \frac{ck}{2f} \left[1 \pm \frac{2}{\alpha_n} (\alpha_n^2 - 4\alpha_n \coth \alpha_n + 4)^{1/2} \right]。 \quad (16.17)$$

在

$$\alpha_n^2 - 4\alpha_n \coth \alpha_n + 4 \geq 0$$

的情况下,运动显然是稳定的和纯波状的。在

$$\alpha_n^2 - 4\alpha_n \coth \alpha_n + 4 < 0$$

的情况下,则可得到振幅随时间指数增长的不稳定波动。上述稳定性判据还可简化。利用

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 - 4\alpha_n \coth \alpha_n + 4 \\ = \left(\alpha_n - 2 \tanh \frac{\alpha_n}{2} \right) \left(\alpha_n - 2 \coth \frac{\alpha_n}{2} \right), \end{aligned}$$

并注意到第一个括号恒大于零,于是可知,当

$$\frac{\alpha_n}{2} \geq \coth \frac{\alpha_n}{2}$$

时,系统是稳定的;而当

$$\frac{\alpha_n}{2} < \coth \frac{\alpha_n}{2}$$

时,系统可能是不稳定的。 α 的临界值 α_c 满足

$$\frac{\alpha_c}{2} = \coth \frac{\alpha_c}{2}.$$

由此可得

$$\alpha_c \doteq 2.399.$$

这样,我们就证明了当

$$\alpha_n = \frac{N}{f} \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{1/2} < \alpha_c$$

时,将发生不稳定的扰动。所以,若

$$\frac{N}{f} \cdot \frac{\pi}{L} < \alpha_c, \quad (16.18)$$

则至少存在一种类型的不稳定波动 ($k=0, n=1$)。若

$\frac{N}{f} \cdot \frac{\pi}{L}$ 大于 α_c , 则对基态的所有小扰动都是稳定的。

下面,我们来进一步讨论在 $\frac{N\pi}{fL} < \alpha_c$ 的情况下产生的不稳定运动所具有的特性。由 (16.17) 式可知,不稳定波动的

“相速度”为

$$C_F = \frac{\lambda}{k} = \frac{c}{2f} [1 \pm 2ig(\alpha_n)],$$

其中 $g(\alpha_n)$ 为 α_n 的实值函数。因此,不稳定扰动以速度 $c/2f$ 传播,这速度等于基态流动的平均速度。扰动压强为

$$P' = [Ae^{\alpha_n y} + Be^{-\alpha_n y}] \sin \frac{n\pi y}{L} e^{ik(x - \frac{c}{2f}t) \pm \frac{c}{f}k(\alpha_n)t}.$$

上式代表在平均流动方向上传播的不稳定波动。常数 $c = \frac{\partial T_0}{\partial y}$ 代表温度的平均“切变”强度。所以,不稳定扰动的传播速度和振幅增长率都随此平均切变强度的增加而增大。实际上,这一水平温度梯度为不稳定性的发展提供能源。Pedlosky^[51] 对水平温度梯度的这种“势能”转化为扰动动能的问题进行了研究,他说明了这种转化的机制,也说明了这种转化发生的区域。

稳定性判据(16.18)式可以用 Rossby 变形半径来表示。在第十二章里我们曾说明,当层化强度 N 和流体深度 h 一定时,如果有量纲水平运动尺度 $L^*(=hL)$ 大于 $L_h = Nh/f$, 则 Rossby 波仅受层化作用的影响。斜压不稳定性判据 (16.18) 式要求

$$\frac{Nh}{f} \cdot \frac{\pi}{L^*} < \alpha_c$$

或

$$L^* > \left(\frac{\alpha_c}{\pi}\right)^{-1} L_h = \left(\frac{2.399}{\pi}\right)^{-1} L_{h0}.$$

所以,在运动水平尺度 L^* 大于 Rossby 变形半径 L_h 的情况下,不稳定的波动可能产生,而且这种 Rossby 波仅受垂直层化作用的影响。我们已经看到,由于斜压不稳定性,在原来无波动的基态流动中可以发展出不稳定的波动。我们又用

Rossby 变形半径解释了这种波动的判据。上面的这种分析与实际观察到的情况是一致的，即在大气中最常见的波动的长度尺度与 Rossby 变形半径具有同一量级 (~ 1000 公里)。

为了进一步讨论不稳定性判据 (16.18)，我们注意到 N/f 是浮力频率与旋转角速度之比，而浮力频率是表示稳定重力层化强度的参量。因此，垂直层化的增强将使流动趋于稳定。我们还记得，水平层化是斜压不稳定性的基础。等密度面的斜率可表为

$$-\frac{\partial \rho_0}{\partial y} / \frac{\partial \rho_0}{\partial z}。$$

所以，仅当质点的典型轨迹满足如下两条件时才能产生不稳定性。

(I) 斜率 θ 大于零。这样才能有助于发展不稳定性的

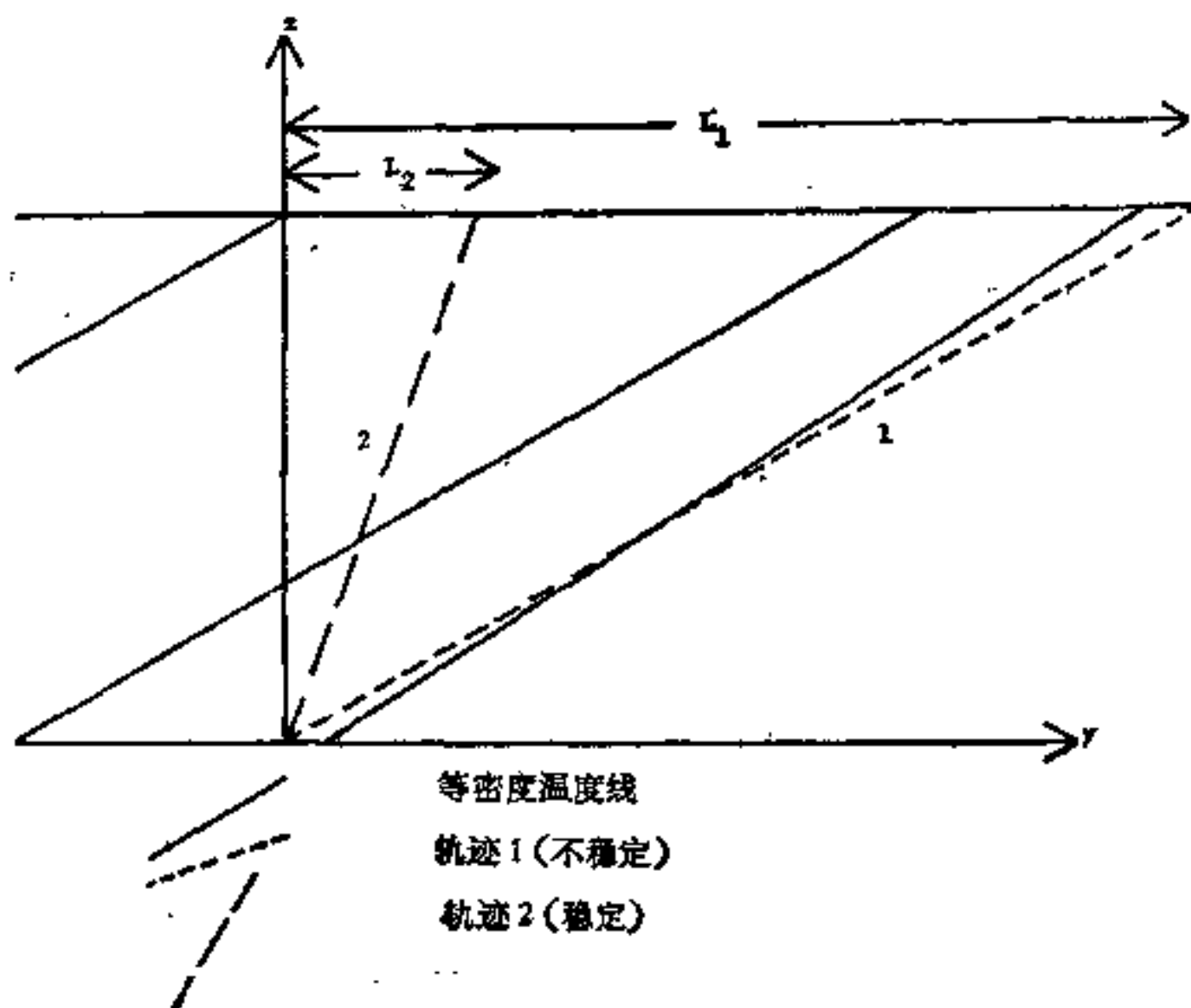


图 28

“势能”。

(II) 斜率 θ 小于 $\left(-\frac{\partial \rho_0}{\partial y} / \frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)$ 。这样, 水平密度的不稳定性作用才能克服垂直密度梯度的稳定性作用。

也就是说, 不稳定性要求如下条件:

$$0 < \theta < \left(-\frac{\partial \rho_0}{\partial y} / \frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right). \quad (16.19)$$

图 28 解释了这种条件。轨迹 1 满足不稳定性的两个条件, 因而不是稳定的。相应的水平长度尺度 L_1 满足

$$\frac{N\pi}{fL_1} < 2.399.$$

轨迹 2 是稳定的。相应的水平长度尺度 L_2 满足

$$\frac{N\pi}{fL_2} > 2.399.$$

实 验 模 型

前面我们讨论了表示斜压不稳定性主要特征的简单模型。为了研究大气中的大尺度运动, 对这一问题还进行了许多探讨。通过前面的介绍我们知道, 即使是很简单的模型也可使我们对问题有所了解。不过, 在物理上, 大气系统要比我们前面描述的复杂得多。因此, 有必要将 Eady 对斜压不稳定性的简单分析加以推广。实验室的实验正是为了这一推广而作的基本工作。实验室里研究的是圆套筒中的均匀旋转流体。在内筒和外筒加上不同的温度, 由此便可产生水平温度梯度。内筒温度低于外筒, 因此内、外筒可分别代表极地和赤道 (见图 29)。这种实验是由 Hide^[20] 和 Fultz^[21] 首先进行的。在实验中通常是改变角速度 Ω 或改变温度梯度 $T_0 - T_1$ 。随着 Ω (或 $T_0 - T_1$) 的增大, 流体运动状态也不断改变。当

角速度不大时,流动呈定常的螺旋状。当角速度增加到临界值[见(16.18)]时,便发生不稳定性现象,并出现波数为2的斜压型运动。随着角速度的继续增大,斜压型运动的波数也继续变大,同时水平长度尺度不断变小。当角速度足够大时,定常的运动部分也会变得不稳定。若在此之后角速度继续增加,则发生不规则的流动并形成湍流涡旋。上述实验结果显然与稳定性判据一致,即仅当

$$\frac{N}{2\Omega} \cdot \frac{\pi}{L_1} < \alpha_c$$

时,才能产生斜压不稳定性。

前面介绍的实验结果不仅符合由简单数学模型推导出的斜压不稳定性理论,还可用来讨论非线性效应。这非线性效应对不稳定的流动和不规则的流动是特别重要的。在前面的简单数学模型中,我们忽略了粘性作用。Barcilon^[2]和Hide^[30]讨论了边界层在稳定性问题中的作用。实验方法有助于我们了解粘性作用是如何影响稳定性曲线的。Fowlis和Hide的文章^[19]系统地研究了粘性作用怎样使轴对称流动过渡到非轴对称流动。Hide和Mason^[32]继续研究了这一问题,他们特别地分析了由于粘性和位涡梯度影响斜压波动而产生的滞后现象。

Hide在参考文献[30]中总结了斜压不稳定性的实验结果及其在大气环流理论中的应用。此书也是关于这一问题的最好的参考文献之一。

习 题

16.1) 考虑在斜压不稳定性问题中引入小的粘性作用产生的影响。

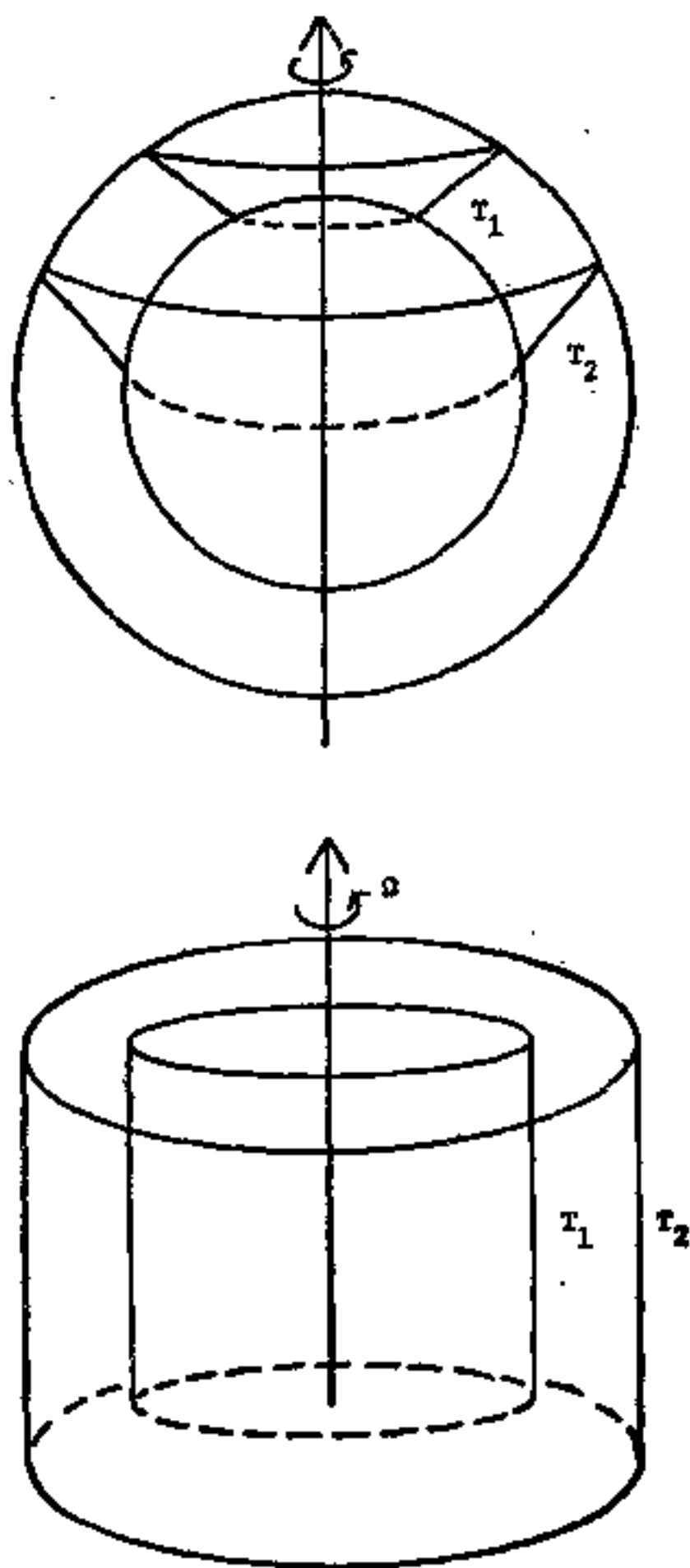


图 29 大气受热随纬度变化的实验模型

- a) 假定在上、下刚性表面 $z = 0, 1$ 存在 Ekman 层，导出边界条件 (16.10) 和 (16.11) 的修正形式。
- b) 利用得到的修正边界条件，求方程 (16.6) 的形如 (16.13) 的解。

- c) 非零的 Ekman 参数对稳定性判据产生什么影响?
(Barcilon 在参考文献[2]中详细讨论了这一问题)
- 16.2) 我们在本章中提出了斜压不稳定性的两个判据, 即 (16.18) 和 (16.19) 式。按照下面给的步骤, 证明这两个判据是等价的。
- 将速度用密度梯度表示为 $u_0 = \frac{1}{f} \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \cdot z_0$
 - 利用有量纲的浮力频率 $N^2 = - \frac{g}{\rho L} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}$ (第十章)。
 - 定义轨迹的斜率 θ 为 $\theta = \frac{W'}{V'}$ 。其中 (W', V') 为 (w', v') 的均方根值。
 - 用速度分量 (u', v', w') 表示位涡方程 (16.6)。
 - 对此方程中的主要项取平均, 从而证明 (16.18) 和 (16.19) 的等价性。

附录 边界层方法

在讨论地球物理流体动力学问题时，我们曾利用边界层方法近似分析粘性流体的运动。对流体动力学中的某些奇异摄动问题，边界层方法也是典型的研究手段。这里，我们为不熟悉这方面内容的读者简要介绍一下边界层方法。其详细内容可参见 M. Schlichting^[66] 和 V. VanDyke^[7]。

Prandtl 首先提出，对于粘性不大的流体，在狭窄边界层外的空间各处均可将它视为无粘流体。这种处理方法称为“内外展开法”。最近的文献中还将它称为“匹配渐近展开法”。虽然人们还未能证明这种方法对各种问题都适用，但已证明它在解 Navier-Stokes 方程方面是极为重要的。一般说来，可以认为边界展理论是近似成立的。

奇异摄动问题

首先，我们来说明奇异摄动的含义。对许多描述物理问题的偏微分方程，其无量纲形式都包含一些无量纲的小(或大)参数。我们现在所关心的是不可压缩流体的 Navier-Stokes 运动方程。我们知道，在惯性坐标系中，此方程的无量纲形式为

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} = -\nabla P + \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{q}, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (\text{A.2})$$

方程中有两个无量纲参数 R 和 ε 。 R 称为 Reynolds 数，它的倒数是粘性力相对大小的度量； ε 是非线性对流项相对大小的

度量[在旋转坐标系中, $\frac{1}{R}$ 由 Ekman 数 E 取代, 而 ϵ 则称为 Rossby 数]。在很多重要的流体运动问题里, 参数 $\frac{1}{R}$ 和 ϵ 都很小。

在解微分方程时, 小参数被称为摄动量或摄动参量。方程解的渐近展开式可表为摄动参量的幂级数。这一近似解的精确度将随摄动参量趋于零而提高。这样的幂级数并不一定收敛。不过, 在许多问题中, 幂级数的前几项能对精确解给出良好的近似。若在方程的整个定义域中, 幂级数的前几项均能对精确解给出良好的近似(对足够小的摄动参量), 则称此问题为正则摄动问题。然而, 若在方程定义域中的某些区域, 幂级数不能给出合理的近似解, 则称此问题为奇异摄动问题。当我们利用 $\frac{1}{R}$ (或 E) 的渐近展开式求 Navier-Stokes 方程的近似解时, 所遇到的正是奇异摄动问题。在这个问题中, 无粘基态流动的摄动解(即 $\frac{1}{R} \rightarrow 0$ 情况下的解)仅在边界外的区域适用, 而在边界附近不适用。因此, 必须附加一个适用于边界附近的渐近展开式。这后一渐近展开式适用的区域称为边界层。这两个渐近展开式(有时称为外解和内解)在边界层和内区相接之处必须相互匹配。这就是“匹配渐近展开法”的由来。

通过分析代表作用力的方程(A.1)中的各项, 我们可以看出粘性边界层必然存在。表示粘滞力的 $\frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{q}$ 是方程中微分阶数最高的一项, 而无粘基态流动 \mathbf{q}_0 满足 $1/R \rightarrow 0$ 条件下的简化运动方程。因为简化方程的阶数低于方程(A.1)的阶数, 所以 \mathbf{q}_0 满足的边界条件只有法向速度的边界条件。因此, 最高阶项为 \mathbf{q}_0 的渐近展开式一般不满足关于切向速度分

量的边界条件(即无滑动条件)。也就是说,这种渐近解在流动区域内并不是处处适用的。要使法向速度和切向速度的边界条件都得到满足,我们必须考虑包含最高阶微分项的运动方程,即含有粘性项 $\frac{1}{R}\nabla^2 \mathbf{q}$ 的方程。对旋转流体的流动作渐近分析时已证明,这样的方程所描述的正是粘性边界层里的运动。第五章所讨论的 Ekman 层就是一例。由此可知,满足所有边界条件的渐近解是由内区解和边界层解组成的。

Navier-Stokes 方程 (A.1) 和 (A.2) 还含有另一个小参数 ε , 它在方程中是非线性项的系数。在某些问题中,我们可以利用 ε 作为小参数来寻求渐近解。一般说来这些问题也是奇异摄动问题。因而我们必须考虑适于非线性边界层的另一个以 ε 为幂的渐近级数解。不过,本书主要研究的是粘性边界层。

简 单 例 子

我们不考虑描述流体运动的复杂的偏微分方程,而考虑具有奇异摄动问题基本特征的简单得多的常微分方程。Friedrichs 提出的具有启发意义的例子如下:

方程为

$$\varepsilon u_{xx} + u_x = a, \quad (\text{A.3})$$

边界条件为

$$u(0) = 0, u(1) = 1. \quad (\text{A.4})$$

将方程 (A.3) 积分一次得到

$$u_x = a + c e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

再积分一次便有

$$u = ax + c_1 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + c_2.$$

利用边界条件 (A.4) 确定积分常数 c_1 和 c_2 便得到精确解

$$u = ax + (1-a) \left(\frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - 1}{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1} \right), \quad (\text{A.5})$$

下面考虑 $\varepsilon \ll 1$ 的情况, 并求方程的渐近级数解。记

$$u = u_0 + \varepsilon^\alpha u_1 + \varepsilon^{2\alpha} u_2 + \cdots, \quad (\text{A.6})$$

其中 $\alpha > 0$ 是待定参量。将 (A.6) 代入方程 (A.3), 合并 ε 的同次幂并令其系数等于零, 便得到 u_0, u_1, u_2, \cdots 的方程。含有 ε^0 的各项给出

$$u_{0x} = a, \quad (\text{A.7})$$

故

$$u_0 = ax + b_{00}$$

因为简化方程 (A.7) 的阶数低于原方程 (A.3), 故在解 u_0 中仅含有一个积分常数。这就使 u_0 不可能同时满足两个边界条件 $u_0(0) = 0$ 和 $u_0(1) = 1$ 。同时, 究竟用哪个边界条件来确定常数 b_0 也是个问题。从表面上看, 似乎可以任选其中的一个, 但实际上应该满足的条件是 $u_0(1) = 1$ 。下面我们就来证明这一点。

当利用条件 $u_0(1) = 1$ 时, 方程 (A.7) 的解为

$$u_0 = ax + 1 - a. \quad (\text{A.8})$$

我们注意到, 对于小参数 ε , 除了 x 的量级为 $O(\varepsilon)$ 的区域外, 线性解 (A.8) 是很接近精确解 (A.5) 的。而在 $x = 0$ 附近的区域, 方程 (A.3) 和 (A.4) 的解不能用 (A.8) 近似表示, 我们把这一区域称为边界层。为了进一步研究这一边界层内的运动, 我们引入边界层坐标 η 。记

$$x = \eta \varepsilon^\alpha, \quad u(x, \varepsilon) = \bar{u}(\eta, \varepsilon). \quad (\text{A.9})$$

这一坐标变换把 x 为 $O(\varepsilon^\alpha)$ 的区间伸展成 η 为 $O(1)$ 的区间。在这一特殊问题中, 不难得到精确解 (A.5)。我们已经知道, 除了量级为 $O(\varepsilon)$ 的边界层外, 精确解 (A.5) 可用内区解 (A.8) 来近似表示。所以, 在这一问题中, 可认为 α 等于 1。

不过,在许多问题中,不可能求得精确解,从而无法导出决定厚度的参数 α 。下面我们用另一种方法来确定 α ,从中可对普适的方法有所了解。

通过坐标变换 (A.9), 原方程和边界条件化为

$$\varepsilon^{1-2\alpha}\bar{u}_{\eta\eta} + \varepsilon^{-\alpha}\bar{u}_{\eta} = a \quad (\text{A.10})$$

(I) (II) (III)

和

$$\bar{u}(0) = 0, \bar{u}(\varepsilon^{-\alpha}) = 1. \quad (\text{A.11})$$

在方程 (A.10) 中有 (I), (II) 和 (III) 三项, 它们分别具有量级 $O(\varepsilon^{1-2\alpha})$, $O(\varepsilon^{-\alpha})$ 和 $O(\varepsilon^0)$ 。我们将选择 α , 使得微分阶数最高的 (I) 项成为方程的支配项, 至少与方程中的一项相平衡。当 (I) 与 (II) 平衡时, 有

$$1 - 2\alpha = -\alpha, \text{ 即 } \alpha = 1.$$

此时 (I) 和 (II) 的量级为 $O(\varepsilon^{-1})$, 它们与 $O(\varepsilon^0)$ 的 (III) 项相比具有较高的量级。当 (I) 与 (III) 平衡时, 则要求

$$1 - 2\alpha = 0, \text{ 即 } \alpha = \frac{1}{2}.$$

此时 (I) 和 (III) 的量级为 $O(\varepsilon^0)$ 而 (II) 的量级为 $O(\varepsilon^{-1/2})$, 故 (II) 是方程的支配项。因此, 我们只能选择 $\alpha = 1$, 使得 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时能保留 (I) 项。这样, 边界层方程就化为

$$\bar{u}_{\eta\eta} + \bar{u}_{\eta} = \varepsilon a, \quad (\text{A.12})$$

其中 $x = \eta\varepsilon$ 。

至此, 我们确定了渐近级数解中的待定参数 α 。于是内区展开式可表为

$$u_1 = ax + 1 - a + \varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \cdots. \quad (\text{A.13})$$

边界层展开式为

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1 + \varepsilon^2 \bar{u}_2 + \cdots. \quad (\text{A.14})$$

将 (A.14) 代入边界层方程 (A.12), 并利用 ε 的同次幂组成

的等式,可得 $O(1)$ 量级的方程

$$\bar{u}_{0\eta\eta} + \bar{u}_{0\eta} = 0. \quad (\text{A.15})$$

要得到有关 \bar{u}_0 的边界条件,我们来寻求原问题解的组合渐近展开式。记 $u(x, \varepsilon)$ 为 \bar{u}_0 与 u_1 之和,并要求它在 $x = 0$ 或 $\eta = 0$ 处满足原方程的边界条件。于是,

$$\text{在 } \eta = 0 \text{ 处, } \bar{u}_0 + (1 - a) = 0. \quad (\text{A.16})$$

这就是 \bar{u}_0 应满足的边界条件之一。因为关于 \bar{u}_0 的方程 (A.15) 仅在边界层内成立,所以我们可以得到关于 \bar{u}_0 的第二个边界条件

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \bar{u}_0 = 0. \quad (\text{A.17})$$

这就是说,随着 η 的变大,边界层展开式对解 $u(x, \varepsilon)$ 的贡献趋于零。

满足方程 (A.15) 和边界条件 (A.16), (A.17) 的解为

$$\bar{u}_0 = -(1 - a)e^{-\eta}. \quad (\text{A.18})$$

因此,对小参数 ε , 原方程的一阶近似解为

$$u(x, \varepsilon) \doteq ax + (1 - a)(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}). \quad (\text{A.19})$$

此解为精确解的良好近似。图 30 画出了内解、外解及精确解,由此可比较近似解与精确解。

对渐近展开式的另一种常用表示法是写出一个适用于边界层外部的解和一个适用于边界层内部的内解,而不是写成组合表达式。在边界层与内区交接处,利用匹配原理使外解和内解在相应的精度范围内相互匹配。另外,使边界层解在 $\eta = 0$ 处满足适当的边界条件。如果使用这种表示法, (A.3) 和 (A.4) 的一阶近似解可写成

$$u(x, \varepsilon) \doteq \begin{cases} ax + (1 - a), & \varepsilon \rightarrow 0, \text{ 对固定的 } x > 0; \\ (1 - a)(1 - e^{-\eta}), & \varepsilon \rightarrow 0, \text{ 对固定的 } \eta = \frac{x}{\varepsilon}. \end{cases}$$

然而,我们寻求渐近展开式的解时,通常都采用由内展开式和

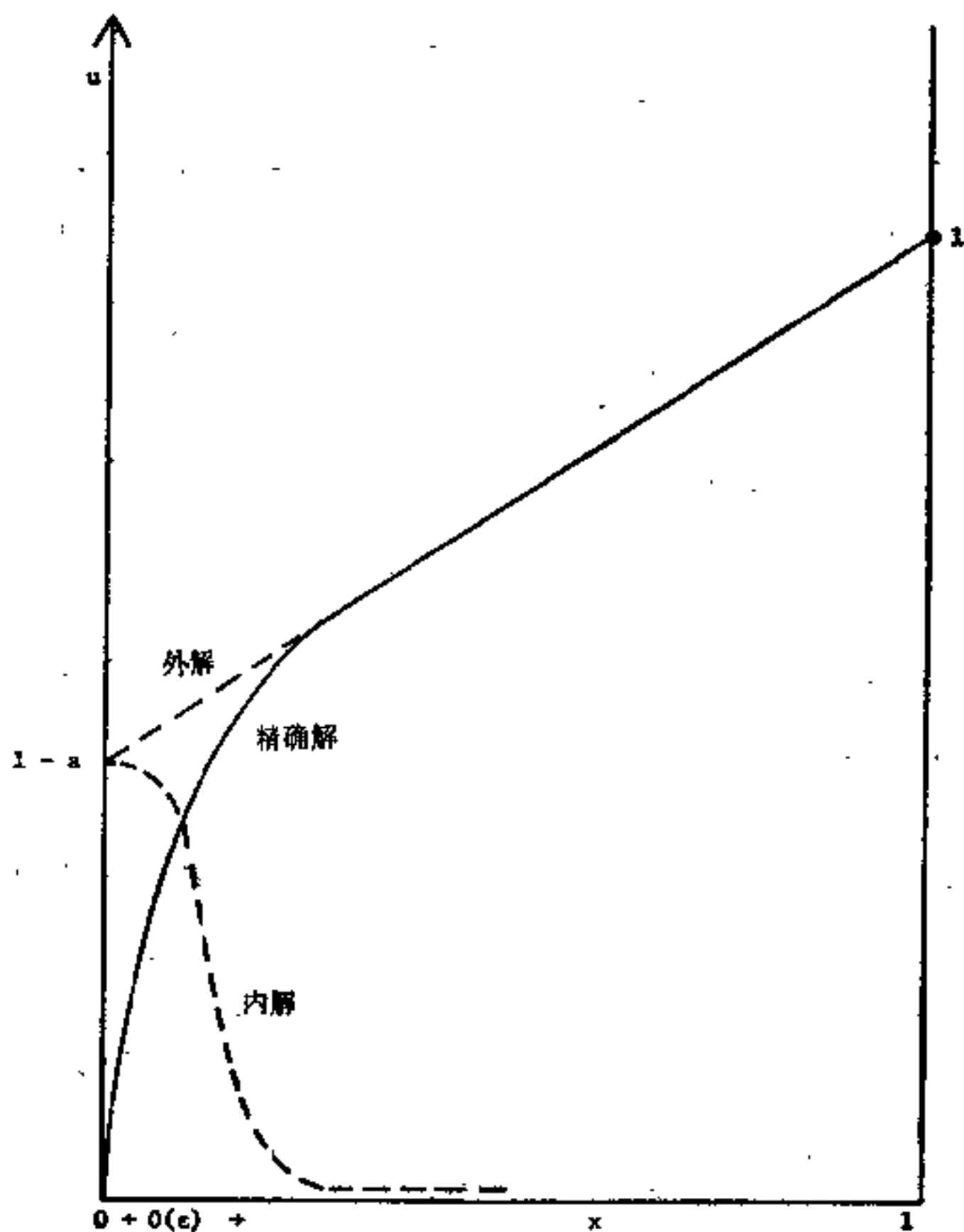


图 30 外解—内解~精确解 $[u_1 + (-\bar{u}_0) \sim u(x, \epsilon)]$

外展开式构成的组合形式。

Cole 对组合展开式给出了如下的定义：对于任一级数，当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时，如果用外变量作渐近展开则此级数简化为外展开式；如果用内变量作渐近展开则此级数简化为内展开式，那么此级数便称为组合展开式。

在我们利用边界层方法求方程 (A.3) 和 (A.4) 的一阶近似解的过程中, 我们令外解满足 $x = 1$ 处的边界条件, 并在 $x = 0$ 附近建立一个边界层以便满足另一个边界条件。我们能否采取相反的做法, 也就是说能否在 $x = 1$ 的附近建立边界层呢? 图 30 中精确解的形式给出了否定的回答。因为从 $x = 1$ 到 $x = 0$ 附近, 精确解的图形几乎是条直线; 而当 $x \rightarrow 0$ 时, 精确解以指数的形式趋于零。这正说明边界层只能在此区间的一端, 即在 $x = 0$ 处存在。

若我们当初不知道精确解, 而试图在 $x = 1$ 处构造一个边界层, 则得到的边界层方程为

$$\hat{u}_{\xi\xi} - \hat{u}_{\xi} = \varepsilon a,$$

其中 $1 - x = \varepsilon\xi$ 。因而, 边界层量 \hat{u} 的渐近展开式的第一项必然具有形式

$$\hat{u}_0 = c e^{+\xi}.$$

当 ξ 增大而从边界层深入到内区时, 这样的项是以指数的方式增大的, 因而不可能是 $u(x, \varepsilon)$ 组合展开式的一部分。由此我们可以得出结论: 在 $x = 1$ 处不可能存在边界层。作为练习, 我们建议读者用边界层方法求如下问题的一阶近似解 (对小参数 ε), 即

$$\varepsilon u_{xx} - u_x = a,$$

$$u(1) = 1, u(0) = 0.$$

在前面几章中, 我们经常使用匹配渐近展开法。这种方法使我们得到了各种情况下 Navier-Stokes 方程的近似解。我们讨论过的边界层都是粘性边界层, 在这些边界层中粘滞力起着重要的作用。其中一个最简单而且也许最重要的边界层就是 Ekman 层。在 Ekman 层中, 粘滞力与科氏力相平衡, 相应的方程为

$$E^{\frac{1}{2}} \nabla^6 P + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{A.20})$$

以前我们是用一个外展开式(或称内区展开式)和一个内展开式(或称边界层展开式)来求解这一方程的。令

$$P_1 = P_0 + E^\alpha P_1 + \cdots, \quad (\text{内区展开式})$$

$$\hat{P} = \hat{P}_0 + E^\alpha \hat{P}_1 + \cdots. \quad (\text{边界层展开式})$$

其中边界层坐标为 $\xi = E^{-\alpha} z$ 。我们正是以本章介绍的方式, 采用匹配展开法求得了第五章中给出的结果。

参 考 文 献

- [1] Aldridge, K.D. and Toomre, A., Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container, *J. Fluid Mech.* 37 (1969), 307-323.
- [2] Barcilon, V., Role of the Ekman layers in the stability of the symmetric region obtained in a rotating annulus, *J. Atmospheric Sci.* 21 (1964), 291-299.
- [3] Barcilon, V. and Pedlosky, J., A unified linear theory of homogeneous and stratified rotating fluids. *J. Fluid Mech.* 29 (1967), 609-621.
- [4] Briscoe, M.G., Internal waves in the ocean, *Rev. Geophys. Space Phys.* 13 (1975), 591-598.
- [5] Batchelor, G.K., Introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, 1967.
- [6] Benton, E.R. and Clark, A., Spin-up, *Annual Review of Fluid Mech.* 6 (1974), 257-280.
- [7] Buzyna, G. and Veronis, G., Spin-up of a stratified fluid: theory and experiment, *J. Fluid Mech.* 50 (1971), 579-608.
- [8] Carrier, G.F., Phenomena in rotating fluids, *Proc. 11th Int. Congress Appl. Mech.* (1964).
- [9] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability. The Clarendon Press, Oxford. (1961).
- [10] Charney, J.G., The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, *J. Meteorology* 4 (1947), 135-162.
- [11] Charney, J.G. and Eliassen, A., A numerical model for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies, *Tellus* 1 (1949), 38-54.
- [12] Dicke, R.M., The sun's rotation and relativity, *Nature* 202 (1964), 432.
- [13] Dicke, R.M., The solar spin-down problem, *Astrophys. J.* 149 (1967), L121-L127.
- [14] Dickinson, R., Rossby waves - long period oscillations of oceans and atmospheres. *Annual Review of Fluid Mech.* 10 (1978), 159-195.

- [15] Eady, E.T., Long waves and cyclone waves. *Tellus* 1 (1949), 33-52.
- [16] Eckart, C., Internal waves in the ocean, *Physics of Fluids* 4 (1961), 791-799.
- [17] Ekman, V.W., On the influence of the earth's rotation on ocean currents, *Ark. Mat. Astr. Fys.* 2 (1905), 1-52.
- [18] Fjortoft, R., Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex. *Geofys. Publ. Norske Vid.-Akad. Oslo* 17 (1950), 1-52.
- [19] Fowles, W.W. and Hide, R., Thermal convection in a rotating fluid annulus: effect of viscosity on the transition between axisymmetric and non-axisymmetric flow regions, *J. Atmospheric Sci.* 22 (1965), 541-558.
- [20] Friedlander, S., Spin-down in a rotating stratified fluid: Part 1, *Studies in App. Math.* 111, No. 2 (1974), 111-133.
- [21] Friedlander, S., Quasi-steady flow of a rotating stratified fluid in a sphere, *J. Fluid Mech.* 76, (1976), 209-228.
- [22] Friedlander, S. and Siegmund, W., Internal waves in a contained rotating stratified fluid, to appear.
- [23] Fultz, D., Developments in controlled experiments on large scale geophysical problems, *Advances in Geophysics* 7 (1961), 1-103.
- [24] Garret, C. and Munk, W., Internal waves in the ocean, *Annual Rev. of Fluid Mech.* 11 (1974), 339-369.
- [25] Greenspan, H.P. and Howard, L.N., On time dependent motion of a rotating fluid, *J. Fluid Mech.* 17 (1963), 385-404.
- [26] Greenspan, H.P., On the transient motion of a contained rotating fluid, *J. Fluid Mech.* 21 (1964), 673-696.
- [27] Greenspan, H.P., The theory of rotating fluids, Cambridge University Press, New York. (1968).
- [28] Hide, R., Some experiments on thermal convection in a rotating fluid, *Quart. J. R. Met. Soc.* 79 (1953), 161.
- [29] Hide, R., Origin of Jupiter's great red spot, *Nature* 190 (1961), 895-896.
- [30] Hide, R., Some laboratory experiments on free thermal convection in a rotating fluid subject to a horizontal temperature gradient and their relation to the theory of the global atmospheric circulation, In: The Global circulation of the atmosphere, Royal Met. Soc., London (1969).

- [31] Hide, R., Planetary atmospheres and interiors, In: Mathematical problems in the geophysical sciences I, lectures in App. Math. 11, A.M.S. (1971), 229-353.
- [32] Hide, R. and Mason, P.J., On the transition between axisymmetric and non-axisymmetric flow in a rotating liquid annulus subject to a horizontal temperature gradient, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* 10 (1978), 121-156.
- [33] Howard, L.N., Fundamentals of the theory of rotating fluids, *J. Appl. Mech.* (1963).
- [34] Howard, L.N., Moore, D.W., and Spiegel, E.A., Solar spin-down problem, *Nature* 214 (1967), 1297-1299.
- [35] Howard, L.N. and Siegmann, W.L., On the initial value problem for rotating stratified flow, *Studies in App. Math.* 48 (1969), 153.
- [36] Howard, L.N., Rotating and stratified flows, In: Mathematical problems in the geophysical sciences I, lectures in App. Math. 13 A.M.S. (1971), 121-137.
- [37] Kamenkovich, V.M., Fundamentals of ocean dynamics, Elsevier oceanography series, 16, Elsevier Scientific Publishing Company, (1977).
- [38] Kelvin, Lord, Vibrations of a columnar vortex, *Phil. Mag.* 10 (1880), 155-168.
- [39] Krauss, W., Methoden und ergebnisse der theoretischen ozeanographie I und II. Gerbruder Borntraeger, Berlin (1966).
- [40] Lamb, H., Hydrodynamica, Cambridge University Press, (1932).
- [41] LeBlond, P.H. and Mysak, L.A., Ocean waves: a survey of some recent results, *S.I.A.M. Review* 21 (1979), 289-328.
- [42] Linden, P., The flow of a stratified fluid in a rotating fluid annulus, *J. Fluid Mech.* 79 (1977), 435-477.
- [43] Longuet-Higgins, M.S., Planetary waves in a rotating sphere, *Proc. Roy. Soc. A* 279 (1964), 446-473.
- [44] Maxworthy, T. and Browand, F.K., Experiments in rotating and stratified flows, *Annual Review of Fluid Mech.* 7 (1975), 273-305.
- [45] Mowbray, D.E. and Rarity, B.S.M., A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified fluid, *J. Fluid Mech.* 28 (1967), 1-16.

- [46] Morse and Feshbach, Methods of theoretical physics, McGraw-Hill, New York (1953).
- [47] Murray, J.D., Asymptotic Analysis, Oxford University Press, London (1974).
- [48] Pedlosky, J., A note on the western intensification of the oceanic circulation, *J. Mar. Res.* **23** (1965), 207-209.
- [49] Pedlosky, J. and Greenspan, H., A simple laboratory model for the oceanic circulation. *J. Fluid Mech.* **27** (1967), 291-304.
- [50] Pedlosky, J., The spin-up of a stratified fluid, *J. Fluid Mech.* **28** (1967), 463-480.
- [51] Pedlosky, J., Geophysical fluid dynamics, In: Mathematical problems in the geophysical sciences I, Lectures in App. Math. **13** A.M.S. (1971), 1-60.
- [52] Pedlosky, J., Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York, (1979).
- [53] Phillips, N.A., Geostrophic motion, *Rev. Geophys.* **1** (1963), 123-176.
- [54] Phillips, O.M., Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves, *Phys. Fluids* **6** (1963), 513-520.
- [55] Phillips, O.M., The dynamics of the upper ocean, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge (1977).
- [56] Proudman, J., On the motion of solids in liquids possessing vorticity, *Proc. Roy. Soc. A* **92** (1926), 408-424.
- [57] Rossby, G.G., Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of the action. *J. Mar. Res.* **2** (1939), 38-155.
- [58] Sakurai, T., Spin-down of a rotating stratified fluid in thermally insulated circular cylinders, *J. Fluid Mech.* **37** (1969), 689-699.
- [59] Sakurai, T., Clark, A. and Clark, P., Spin-down of a Boussinesq fluid of small Prandtl number in a circular cylinder, *J. Fluid Mech.* **49** (1971), 753-773.
- [60] Schlichting, H., Boundary layer theory. McGraw-Hill, New York (1955).
- [61] Spiegel, E.A. and Veronis, G., On the Boussinesq approximation for a compressible fluid, *Astrophys. J.* **131** (1960), 442-447.

- [62] Stewartson, K., On almost rigid rotations; Part 2, J. Fluid Mech. 26 (1966), 131-144.
- [63] Stommel, M., The Gulf Stream, University of California Press, Berkeley, (1960).
- [64] Sutcliffe, R.C., The quasi-geostrophic advective wave in a baroclinic zonal current, Quart. J.R. Met. Soc. 77 (1951), 226-234.
- [65] Taylor, G.I., Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. Proc. Roy. Soc. A 104 (1923), 213-218.
- [66] Thorpe, S.A., The excitation, dissipation and interaction of internal waves in the deep ocean, J. Geophys. Res. 80 (1975), 328-338.
- [67] VanDyke, M., Perturbation methods in fluid mechanics, Academic Press, New York (1964).
- [68] Veronis, G., The analogy between rotating and stratified fluids, Annual Rev. of Fluid Mech. 2 (1970), 37-66.
- [69] Walin, G., Some aspects of time dependent motion of a stratified rotating fluid, J. Fluid Mech. 36 (1969), 289-307.
- [70] Williams, G.P., Thermal convection in a rotating annulus 1: The basic axisymmetric flow, J. Atmospheric Sci. 24 (1967), 144-161.
- [71] Williams, G.P., Thermal convection in a rotating annulus 2: Classes of axisymmetric flows, J. Atmospheric Sci. 24 (1967), 162-174.
- [72] Williams, G.P., Thermal convection in a rotating annulus 3: Suppression of the frictional constraint on lateral boundaries, J. Atmospheric Sci. 25 (1968), 1034-1045.
- [73] Williams, G.P., Numerical integration of the three-dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flow. J. Fluid Mech. 37 (1969), 727-750.
- [74] Wunsch, C., Geographical variability of the internal wave field: a search for sources and sinks. J. Phys. Oceanogr. 6 (1976), 471-485.
- [75] Yih, C.S., Dynamics of non-homogeneous fluids, MacMillan Co., New York (1965).
- [76] Yih, C.S., Stratified Flows, Annual Rev. of Fluid Mech. 1 (1969), 73-110.

索引

- β 平面近似 20
- Bénard 对流 163
- Boussinesq 近似 90
- Brunt-Vaisala 频率 90
- Eady 模型 166
- Ekman 层 25
- Ekman 层抽吸条件 31
- Ekman 层质量输送 35
- Ekman 数 14
- Ekman 螺旋线 34
- Ertel 定理 10
- Friedrich 的奇异扰动问题简例 179
- Helmholtz 方程 67
- Navier-Stokes 方程 6
- Poincaré 方程 48
- Prandtl 数 90
- Rossby 波 60
- β 平面 63
 - Rossby 波的平面波状解 68
 - 地形产生的 Rossby 波 64
 - 斜截圆筒中的 Rossby 波 60, 66
- Rossby 变形半径 112, 171
- Rossby 数 14
- Schrödinger 方程 128
- Stewartson 边界层 75
 - $E^{1/2}$ 边界层 71
 - $E^{1/4}$ 边界层 73
 - 层化流体中的 Stewartson 边界层 139
 - 斜截圆筒中的 Stewartson 边界层 79
- Stommel 模型 85
- Sverdrup 关系 83
- Taylor-Proudman 定理 15
- Taylor 柱 16
- 无粘型运动 41
- 太阳旋转减弱 150
- 匹配原理 182
- 内区展开和边界层展开 181
- 平均环流定理 52
- 平衡态 89
- 正交性 51
- 正则扰动 178
- 西边界层 68, 84
- 地转平衡 15
- 地转自由、地转导通和地转阻塞区 44
- 地转型运动 41
- 地转螺旋线 44
- 地球引力势 7
- 压强方程 26
- 边界层坐标 180
- 初值问题 53, 98
- 状态方程 7
- 位势涡度 9
- 层化流体中的 Rossby 波 110
- 层化流体中的 Ekman 层 138
- 层化流体中的旋转减弱 151
- 层化流体中的堵塞现象 92
- 环流 46
- 奇异扰动 177
- 侧边界层随参量 $N^2\sigma$ 的变化 141
- 茶杯实验 38
- 科氏力 6
- 相速度 56
- 重力内波 115
 - 内 Kelvin 波 121
 - 可变的 $N(z)$ 125

有界区域中的内波 118
 涡线伸展 38
 浮力边界层 141
 海洋学中的研究成果 133
 离心力 6, 89
 捕获能量 68
 热平衡方程 8
 圆套筒模型 173
 能量方程 97
 深度平均惯性型运动速度 52
 粘性扩散时间尺度 38
 旋转坐标系 4
 旋转层化流体中的流动
 旋转层化流体中的正规型运动
 问题 96
 旋转层化流体中的地转曲线 100

旋转层化流体中的位势涡度 101
 旋转层化流体中的定常流动 99,
 108
 旋转增强时间尺度 35
 斜压不稳定性 165
 惯性型运动
 圆筒中的惯性型运动 54
 惯性波的反射 57
 惯性型运动中的本征值 49
 惯性型运动的平面波解 56
 群速度 56
 静力边界层 144
 稳定性判据 168
 墨西哥湾流 23
 薄层球壳近似 20

符 号 表

Ω	角速度矢量
\hat{k}	旋转轴方向上的单位矢量
r	位置矢量
(x, y, z)	笛卡儿坐标系
(r, θ, ϕ)	球坐标系
q	速度矢量
(u, v, w)	速度分量
t	时间
P	压强
T	温度
G	重力势能
ρ	密度
L	长度尺度
μ	粘性系数
ν	运动学粘性系数
κ	热扩散系数
B	涡度矢量
Π	位势涡度
E	Ekman 数
σ	Prandtl 数
f	科氏参量
N	Brunt-Vaisala 频率
R	Reynolds 数

R	Rayleigh 数
τ	应力矢量
κ	波数矢量
Φ	压强本征函数
λ	频率

006512