

ATMOSPHERIC DYNAMICS

〔美〕郭晓岚 讲 授
朱 伯 承 整 理

大气动力学

大 气 动 力 学

[美] 郭晓岚 讲授

朱伯承 整理

江苏科学技术出版社

内 容 简 介

本书讨论了大气动力学中的一些基本理论问题。主要介绍在转动并有稳定层结及热传播的流体中,大尺度流场的普遍特征。其中包括波动的分类及其特征、涡动理论、地转适应问题、永恒性波、大气中的能量平衡、动力不稳定性理论与涡动方程的解、弱不稳定下的非线性解、积云对流与强风暴动力性观等等。

本书可供气象研究工作者、海洋研究工作者、气象与海洋专业的研究生、高等院校有关专业的教师参考。

大 气 动 力 学

〔美〕郭晓岚讲授 朱伯承整理

出版:江苏科学技术出版社

发行:江苏省新华书店

印刷:江苏新华印刷厂

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 9.75 字数 239,000

1981年3月第1版 1981年3月第1次印刷

印数:1—1,500册

书号:13196·056 定价:1.09元

责任编辑 高志一

序 言

今夏，我应中国科学院大气物理研究所之邀，在中国科学院研究生院讲授大气动力学。这本书就是由朱伯承先生根据英文讲稿整理并写成中文，再由我改正而成的。因为听众都已具有流体力学及动力气象学的基本知识，所以我在这里所讲的内容，要比历年我对芝加哥大学二年级研究生所讲的更深入一些。由于时间限制，我主要介绍在转动并有稳定层结及热传播的流体中，大尺度流场的普遍特性，而且把讨论限定在自由扰动的范围之内。

全书共分十章。为了方便起见，我们先在第一章中主要用普通物理观点讲述了转动系统及球坐标中的流体运动方程及热力学方程。在第二章中则对转动及层结流体中各种扰动，根据其基本性质进行分类。这里我们特别利用了群速代表能量传播的特性，对小扰动的性质进行了分析。接着在第三章及第四章中分别讨论了转动及层结流体系统中的涡动理论及转动系统中扰动对地转风的适应问题。第六章讨论的主题是基本流场与扰动流场间的各种能量互换公式，这些公式是能量守恒定律在不同的分配方式下的不同形式，因而对于各种不同性质的扰动，它们都要遵守。第七至九章所讨论的主题是大尺度自由扰动的成因及发展问题。这里我们是把这个问题看成基本流场对小扰动的不稳定性来讨论的。这个看法对不太强的自由扰动的成因及发展规律来讲是适用的，即使对于经常处于扰动状态的大气或海洋来说也是适用的。这个理论的纯正压及纯斜压部分，我们在第七章中作了比较详细的讨论。而在第九章中介绍了正压与斜压联合作用下的不稳定性特征。第八章讨论了二层模式在弱不稳定下的非线性解。这章的目的不仅在

于表述已知的范例，更在于展示不稳定条件下，线性小扰动解同非线性解之间的联结关系，以及求普遍问题中非线性物理解的一般可用途径。第十章以积云对流与飑线型强风暴为例来说明中小尺度大气动力学的概貌，并介绍我最近的一些工作与设想。

郭 晓 岚

1979年9月12日

目 录

序 言	1
第一章 基本方程及其简化	1
§ 1 惯性参考系与旋转参考系	1
§ 2 旋转参考系中的运动方程	4
§ 3 连续方程和热流量方程	5
§ 4 球坐标中的分量方程	7
§ 5 基本方程的简化	16
第二章 大气波动的分类及其特征	22
§ 1 大气的垂直结构	22
§ 2 基本方程组	24
§ 3 声波、惯性-重力波的频率方程	28
§ 4 不同类型波动的简单分划	32
§ 5 各种波动的特征	35
第三章 涡动理论	54
§ 1 涡度方程	54
§ 2 郭晓岚广义位涡方程	59
§ 3 位涡方程的简化及其应用	64
§ 4 准地转位涡方程	73
第四章 地转适应问题	77
§ 1 均匀不可压流体模型	77
§ 2 正压大气中的地转适应过程	81
§ 3 斜压大气中的地转适应过程	92
第五章 永恒性波	107
§ 1 非线性波的处理方法	107
§ 2 边界条件	110
§ 3 简化情况下的谐波分析	112

§ 4 接近真实大气的谐波分析	117
第六章 大气中能量的平衡	123
§ 1 大气基本状态与扰动	123
§ 2 大气扰动的能量方程	127
§ 3 基本气流的能量方程	135
§ 4 大气中的能量循环	139
第七章 动力不稳定性理论及涡动方程解	142
§ 1 东西风带对准地转扰动的不稳定性	143
§ 2 动力不稳定性的一般理论及必要条件	148
§ 3 纯正压基本流不稳定的条件及扰动流场的特征	150
§ 4 纯斜压流不稳定性条件	164
§ 5 具有恒定垂直切变斜压纬向气流的不稳定性及解	171
§ 6 二层模式下斜压不稳定性扰动的分析	180
§ 7 广泛斜压不稳定性波	196
第八章 弱不稳定下的非线性解	224
§ 1 扰动位涡方程及其边界条件	224
§ 2 二层模式下的控制方程组	228
§ 3 多时间尺度分析	230
§ 4 用小参数展开法求非线性解	235
第九章 低纬度正压与斜压联合作用下的不稳定性波	255
§ 1 二层模式下的控制方程组	255
§ 2 波动振幅方程及其边界条件	261
§ 3 双层二阶方程的特征值问题	263
§ 4 切变流产生的不稳定性波	266
§ 5 急流产生的不稳定性波	270
第十章 积云对流与强风暴动力性观	275
§ 1 云内模型与控制方程组	275
§ 2 云内平均垂直速度、位温与降水率	283
§ 3 积云对流对大气平均性质的影响	292
§ 4 飑线型强风暴动力性观	298
后 记	306

第一章 基本方程及其简化

本章从惯性参考系和旋转参考系间的关系出发,推导出旋转参考系中的大气动力学方程。接着根据角动量守恒原理推出球坐标中大气动力学方程的分量形式。最后介绍大气运动方程的几种基本简化方法。

§ 1 惯性参考系和旋转参考系

一、两种参考系中的时间全导数

设存在两个参考系 S 和 S' , 其中 S 是惯性参考系, S' 是旋转参考系(假定旋转角速度 Ω 为常矢量)。例如图 1-1 中 $o-xyz$ 为惯性参考系 S ; $o-x'y'z'$ 为旋转坐标系 S' , 且其旋转轴为 oz' 轴。

令 i, j, k 表示在惯性参考系中沿直角坐标轴的单位矢量; i', j', k' 是在旋转参考系中正交单位矢量。由此可知, i, j, k 是不依时间变化的; 而 i', j', k' 的方向则在不断变化。对于任一个矢量 A , 在这两种参考系中可表示为

$$\begin{aligned} A &= A_x i + A_y j + A_z k \\ &= A'_x i' + A'_y j' \\ &\quad + A'_z k' \end{aligned} \quad (1-1)$$

它的时间微商为

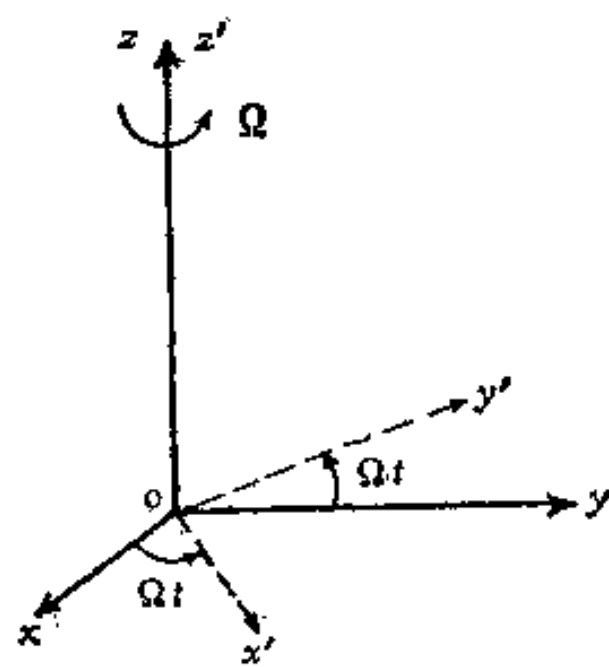


图 1-1

$$\begin{aligned}
\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} &= \mathbf{i} \frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{dt} = \\
&= \mathbf{i}' \frac{dA'_x}{dt} + \mathbf{j}' \frac{dA'_y}{dt} + \mathbf{k}' \frac{dA'_z}{dt} + \frac{d\mathbf{i}'}{dt} A'_x + \\
&+ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} A'_y + \frac{d\mathbf{k}'}{dt} A'_z
\end{aligned} \tag{1-2}$$

这里 $\frac{d}{dt}$ 可看为相对于惯性参考系的时间全导数。令 $\frac{d}{dt}$ 表示相对于旋转参考系(例如固定于地球的参考系)的时间全导数, 即为

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}' \frac{dA'_x}{dt} + \mathbf{j}' \frac{dA'_y}{dt} + \mathbf{k}' \frac{dA'_z}{dt}$$

由于 \mathbf{i}' 、 \mathbf{j}' 、 \mathbf{k}' 是单位长度位矢, 所以 $\frac{d\mathbf{i}'}{dt}$ 、 $\frac{d\mathbf{j}'}{dt}$ 、 $\frac{d\mathbf{k}'}{dt}$ 分别

为 \mathbf{i}' 、 \mathbf{j}' 、 \mathbf{k}' 的转动速度。于是

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}' \\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}' \\ \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}' \end{cases} \tag{1-3}$$

将(1-3)式代入(1-2)式可得

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \tag{1-4}$$

上式对于任何矢量 \mathbf{A} 都是成立的。

如果某变量是标量, 则相对于惯性系的时间全导数与相对于旋转系的相同。若 B 是标量, 则有

$$\frac{d_a B}{dt} = \frac{dB}{dt} \tag{1-5}$$

二、两种参考系中的速度与加速度

速度与加速度是矢量,它们都与所选的参考系有关。在两个不同参考系(一个为惯性系,一个为旋转系)中,它们间有什么关系呢?为解决这个问题,我们在(1-4)式中,令

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}$$

其中 \mathbf{r} 为空气质点的位矢,则有

$$\mathbf{v}_a \equiv \frac{d_a \mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (1-6)$$

这里 $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 为相对于旋转参考系的速度。由于地球是在旋转的,如在地球上观测到的大气运动速度为 \mathbf{v} ,则由(1-6)式可得惯性系中的速度为

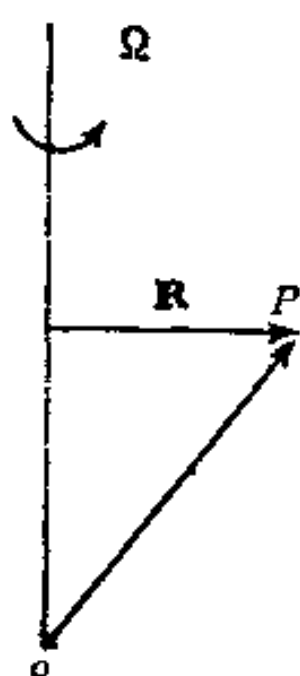
$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (1-7)$$

与此类似,对于 $\mathbf{A} = \mathbf{V}_a$,代入(1-4)式可得

$$\begin{aligned} \frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} &\equiv \text{惯性参考系中的加速度}(\mathbf{a}_a) = \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_a) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_a = \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \\ &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1-8)$$

式中 $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \mathbf{a}$ 为旋转参考系中观测到的加速度, $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \equiv \mathbf{a}_c$ 为柯里奥利加速度, $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a}_{cp}$ 为向心加速度。利用矢量叉积的公式可得

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\Omega^2 \mathbf{R} \quad (1-9)$$



其中 $\Omega = |\Omega|$, R 为垂直于转动轴的一个矢量, 其值等于物体到转动轴的距离, 如图1-2所示。

所以(1-8)式可写为

$$a_a = a + a_c + a_{cp} \quad (1-10)$$

其中 $a_c = -\Omega^2 R$

§ 2 旋转参考系中的运动方程

一、基本作用力

在惯性参考系中, 牛顿第二定律有如下简单的形式:

$$\frac{d_a v_a}{dt} = \Sigma F \quad (1-11)$$

式中 ΣF 是作用在一块流体上的合力。因此, 我们在写出大气运动方程之前, 必须要分析一下作用在流体体积元上的基本作用力。对气象有重要意义的大气运动来说, 主要涉及如下三种基本力:

① 气压梯度力 $-\frac{1}{\rho} \nabla p$

② 引力 g_m

g_m 包括由地球、月亮、太阳的吸引而产生的质量引力。其中月亮、太阳产生的引力常导致大气潮汐现象。

③ 摩擦力 f_r

在大气动力学中, 摩擦力常采用如下纳维-斯托克斯形式

$$f_r = -\nabla \left(\frac{2\mu}{3\rho} \nabla \cdot v \right) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \quad (1-12)$$

二、大气运动方程

将大气中的三种基本作用力代入 (1-11) 式可得大气运动方

程:

$$\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}_m + \mathbf{f}_r \quad (1-13)$$

由(1-8)、(1-9)与(1-13)式可得

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \Omega^2 \mathbf{R} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}_m + \mathbf{f}_r$$

将上式中柯氏加速度和向心加速度移到公式的右边, 即得

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{f}_r \quad (1-14)$$

这里 $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ 为柯氏力(视示力), 而

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_m + \Omega^2 \mathbf{R} = \text{质量重力} + \text{离心力}$$

为有效重力, 我们将在 § 4 介绍它的物理意义。(1-14) 式即为旋转参考系中的运动方程。

§ 3 连续方程和热流量方程

上节得出的运动方程(1-14)式的未知量为 p, ρ, u, v, w , 而方程只有三个(按分量而言), 因此方程组是不闭合的。为了求得大气运动方程的解, 还必须考虑连续方程和热流量方程。

一、连续方程

连续方程是由质量守恒定律推导出来的。考虑一个无限小体积 $\delta x \delta y \delta z$ (如图1-3所示), 令 ρ 为流体的密度。单位时间流入左边面上的质量为 $\rho u \delta y \delta z$, 其中 u 为 x 方向的速度分量。而从右边而上流出的质量是 $\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \delta x \right] \delta y \delta z$ 。这样, 在 x 方向上单位体积内流入和流出的质量差为 $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)$ 。在 y 方向和 z 方向的类似表达式显然成立。所以进入体积元 $\delta x \delta y \delta z$ 的质量净流入率为

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right] \delta x \delta y \delta z$$

由此,流入单位体积的质量为 $-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$, 它必须等于单位体积内质量的增加率。而单位体积内质量的增加率等于密度的局地变化, 也就是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1-15)$$

这就是连续方程。

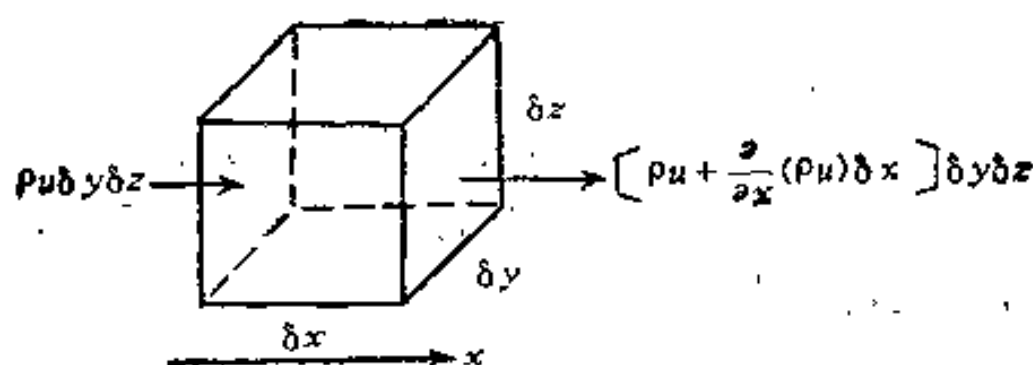


图 1-3

二、热流量方程

根据热力学第一定律,一个系统能量的变化,等于外界通过这个系统边界,向系统输送的能量。对于大气来说,热力学第一定律可写为

$$\dot{Q} dt = c_p dT - \alpha dp \quad (1-16)$$

式中 \dot{Q} 为输入热量的变化率, α 为比容, 即 $\alpha = \frac{1}{\rho}$ 。引入位温

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/c_p} \quad (1-17)$$

则(1-16)式可写为

$$c_p \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T} \quad (1-18)$$

上式常称为热流量方程。

由于连续方程和热流量方程中没有包括矢量对时间的微分，所以不管在惯性坐标系或旋转坐标系中，它们的形式是一样的，都由(1-15)式和(1-18)式所示。

§ 4 球坐标中的分量方程

一、球坐标和局地笛卡尔坐标

为了对大气运动变化过程进行理论分析，需要把矢量形式的运动方程(1-14)式写成分量形式。由于地球形状与球形的差别很小，所以我们将(1-14)式在球坐标中展成分量形式是方便的。图1-4是球坐标系的示意图。这里球坐标系的单位矢量 i, j, k 分别指 P 点向东、向北与向上的方向。球坐标由三个变量 (λ, φ, r) 组成，其中 λ 为经度、 φ 为纬度、 r 为离地心的距离。

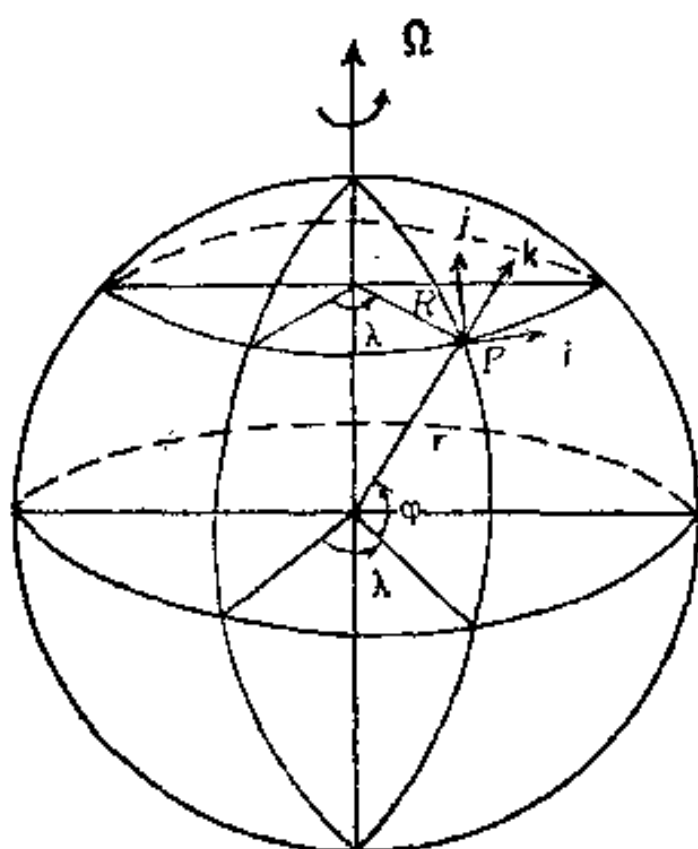


图 1-4 球坐标系

在气象中常用局地笛卡尔坐标 (x, y, z) 来代替球坐标 (λ, φ, r) 。局地笛卡尔坐标系是指以 P 点为中心的直角坐标系，这个坐标系的方向是随地点而变的。其中 x 、 y 分别为向东和向北的距离， z 为距地面的高度。局地笛卡尔坐标 (x, y, z) 和球坐标 (λ, φ, r) 之间有如下关系：

$$\begin{cases} dx = r \cos \varphi d\lambda \\ dy = r d\varphi \\ dz = dr \end{cases} \quad (1-19)$$

如果将相对于旋转坐标系的速度写为

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (1-20)$$

则由(1-19)式可得

$$\begin{cases} u = r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \\ v = r \frac{d\varphi}{dt} \\ w = \frac{dr}{dt} \end{cases} \quad (1-21)$$

我们将 $\mathbf{v}_h = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ 看为水平运动部分或固定 r 的运动，气象中有时也常用 v 表示速度的水平分量。

在局地笛卡尔坐标系中，加速度由下式计算

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = r \cos \varphi \frac{d^2 \lambda}{dt^2} & (\text{固定 } r, \varphi) \\ \frac{dv}{dt} = r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} & (\text{固定 } r) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \end{cases} \quad (1-22)$$

二、由角动量原理推导水平运动方程

1. i 方向上的角动量方程

在 i 方向上的绝对速度(即相对于惯性坐标系)分量为

$$u_a = u + \Omega r \cos \varphi \quad (1-23)$$

在 P 点(λ, φ, r)上单位质量大气关于极轴(即旋转轴)的绝对角动量为

$$M_\lambda = (u + \Omega r \cos \varphi) r \cos \varphi \quad (1-24)$$

将它对 t 求导数(注意: M_λ 是标量, 所以不管相对于惯性系或旋转系, 它的时间导数是一样的。), 可得

$$\begin{aligned} \frac{dM_\lambda}{dt} = r \cos \varphi \left[\frac{du}{dt} + \frac{u}{r} (w - v \tan \varphi) + \right. \\ \left. + 2\Omega (w \cos \varphi - v \sin \varphi) \right] \end{aligned} \quad (1-25)$$

角动量方程为

$$\frac{dM_\lambda}{dt} = (\Sigma F_\lambda) r \cos \varphi \quad (1-26)$$

这里 ΣF_λ 为作用在单位质量大气合力在 i 方向上的分量。

2. j 方向上的角动量方程

P 点(λ, φ, r)单位质量大气关于以通过地心并与 P 点所在经圈面垂直为轴的角动量为

$$M_\varphi = r v \quad (1-27)$$

将它对 t 求导数, 可得

$$\frac{dM_\varphi}{dt} = r \frac{dv}{dt} + wv \quad (1-28)$$

角动量方程为

$$\frac{dM_\varphi}{dt} = r (\Sigma F_\varphi) \quad (1-29)$$

这里 ΣF_φ 为作用在单位质量大气的合力在 φ 方向上的分量。

3. 各种作用力在球坐标中的分量形式

① 气压梯度力

$$\mathbf{F}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

其分量形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{p\lambda} = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ F_{p\varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ F_{pr} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \end{array} \right. \quad (1-30)$$

② 地球质量引力

$$\mathbf{g}_m = -g_m \mathbf{k}$$

③ 离心力

根据产生离心力的物理原因,离心力可分为两种: \mathbf{F}_{c1} 与 \mathbf{F}_{c2} , 如图 1-5 所示。 \mathbf{F}_{c1} 与 \mathbf{F}_{c2} 分别由纬向运动与经向运动所产生的。

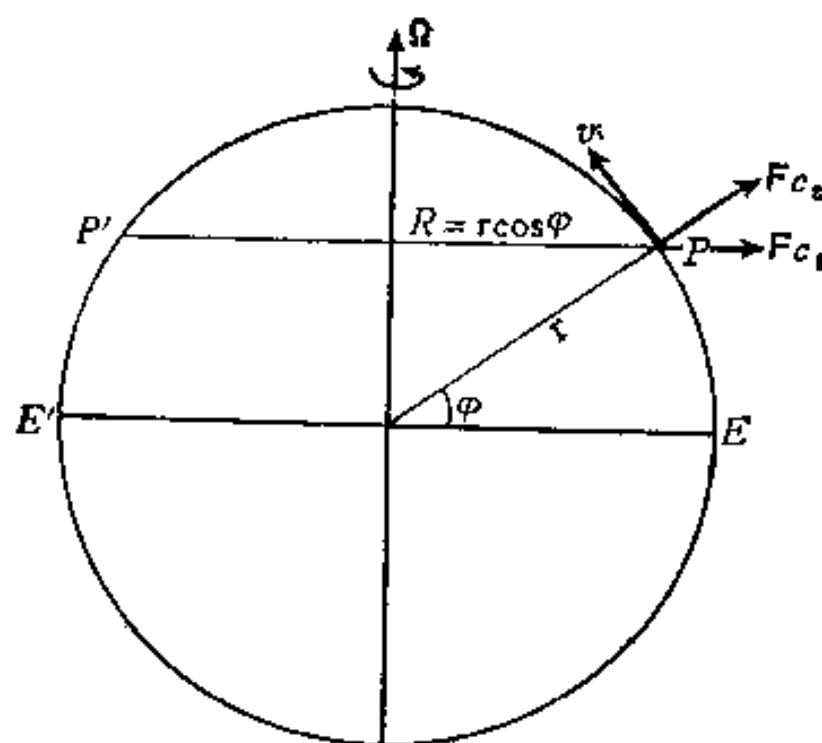


图 1-5

由于在 λ 方向的绝对角动量为 M_λ , 则 $\frac{M_\lambda}{R^2}$ 就相当于 P 点相

对于惯性坐标系绕地轴转动的角速度，所以地球自转与经圈运动产生的离心力为

$$\mathbf{F}_{c1} = \left(\frac{M_{\lambda}}{R^2} \right)^2 \mathbf{R} \quad (1-31)$$

式中 \mathbf{R} 为 $\widehat{P'P}$ 直线上，从旋转轴向外的矢量。由图 1-5 可知， \mathbf{F}_{c1} 的分量形式为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{c1\lambda} = 0 \\ \mathbf{F}_{c1\varphi} = -|\mathbf{F}_{c1}| \sin\varphi = -\left[\frac{u^2}{r} \tan\varphi + 2\Omega u \sin\varphi + \Omega^2 r \sin\varphi \cos\varphi \right] \\ \mathbf{F}_{c1r} = |\mathbf{F}_{c1}| \cos\varphi = \frac{u^2}{r} + 2\Omega u \cos\varphi + \Omega^2 r \cos^2\varphi \end{cases} \quad (1-32)$$

我们再看一下图 1-5，沿经圈运动 v ，就是绕地心 o 的圆周运动。地球自西向东转动与这个运动是不相干的，所以 v 所引起的离心力为

$$\mathbf{F}_{c2} = \frac{v^2}{r} \mathbf{k} \quad (1-33)$$

它的分量形式为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{c2\lambda} = 0 \\ \mathbf{F}_{c2\varphi} = 0 \\ \mathbf{F}_{c2r} = \frac{v^2}{r} \end{cases} \quad (1-34)$$

现在来讨论离心力对地球的作用。如图 1-5 所示， \mathbf{F}_{c1} 在 \mathbf{k} 上的分量以及整个 \mathbf{F}_{c2} 都能被地球引力所平衡，而 \mathbf{F}_{c1} 在 \mathbf{j} 方向上的分量 $\mathbf{F}_{c1\varphi} = -\Omega^2 r \sin\varphi \cos\varphi$ 未能被其他力平衡，所以它将物质向赤道迁移，使地球变为椭球体，这时地球便调整得抵消了这个向赤道的分力，如令

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_m + \mathbf{F}_{c1} \quad (\text{当 } u = 0 \text{ 时}) \quad (1-35)$$

g 便称为有效重力, 它在任何地方都垂直于水平面, 如图 1-6 所示。

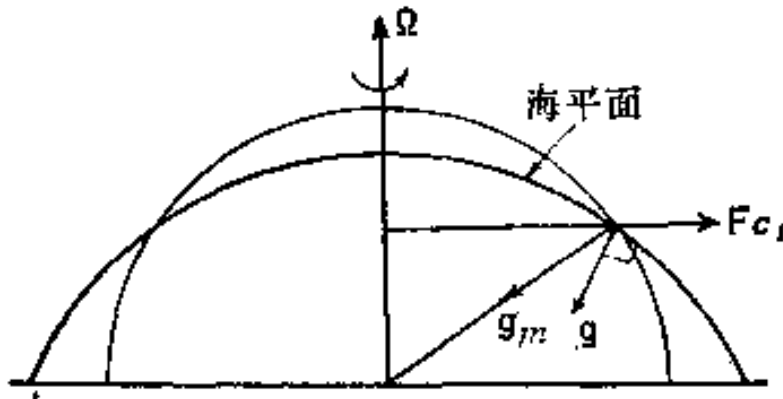


图 1-6

下面给出关于地球的一些基本数据:

自转角速度: $\Omega = \frac{2\pi}{86164} \text{秒}^{-1} = 7.292 \times 10^{-5} \text{秒}^{-1}$

平均半径: $a = \bar{r} = 6371 \text{公里}$

长半轴: $r_e = 6378 \text{公里}$

短半轴: $r_p = 6357 \text{公里}$

地球曲率: $e = \frac{r_e - r_p}{r_e} = \frac{1}{299}$

地球表面重力加速度:

$$g_0 = 980.16 [1 - 0.0026373 \cos 2\varphi + 6.0 \times 10^{-6} \cos^2 2\varphi + \dots] \text{厘米/秒}^2$$

④ 摩擦力及其他力

摩擦力及其他力的分量用 f_λ , f_φ 和 f_r 来表示。

5. 水平运动方程

将(1-30), (1-32)与(1-34)式代入(1-26)式可得

$$\frac{dM_\lambda}{dt} = r \cos \varphi \left[f_\lambda - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right] \quad (1-36)$$

由(1-25)与(1-36)两式可得: 方向的运动方程

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dt} + 2\Omega(w \cos \varphi - v \sin \varphi) - \frac{uv}{r} \tan \varphi + \frac{uw}{r} = \\ & = f_\lambda - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (1-37)$$

将(1-30)、(1-32)与(1-34)式代入(1-29)式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{dM_\varphi}{dt} = F_\varphi - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \left(\frac{u^2}{r} \tan \varphi + \right. \\ \left. + 2\Omega u \cos \varphi + \Omega^2 r \sin \varphi \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (1-38)$$

由(1-28)与(1-38)两式可得 j 方向的运动方程

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + 2\Omega u \sin \varphi + \frac{u^2}{r} \tan \varphi + \frac{wv}{r} = f_\varphi - \\ - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \Omega^2 r \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (1-39)$$

如果考虑到地球是个椭球体，离心力 F_{c1} 与质量重力 g_m 合成为有效重力 g ， g 与地面相垂直，这时离心力 F_{c1} 在 j 方向的分量 $-\Omega^2 r \sin \varphi \cos \varphi$ 在(1-39)式中不出现，所以 j 方向的运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + 2\Omega u \sin \varphi + \frac{u^2}{r} \tan \varphi + \frac{wv}{r} = \\ = f_\varphi - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1-40)$$

三、垂直运动方程

球坐标下的垂直运动方程为

$$\frac{dw}{dt} = \Sigma F_r \quad (1-41)$$

其中 ΣF_r 为作用在单位质量大气上合力在垂直方向上的分量。将(1-30)、(1-32)与(1-34)式代入(1-41)式可得

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_{c1r} + \frac{v^2}{r} - g_m = \\ &= f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u^2}{r} + 2\Omega u \cos \varphi + \Omega^2 r \cos^2 \varphi + \frac{v^2}{r} - g_m \end{aligned} \quad (1-42)$$

由于地球水平面是一个平衡面 (即 $u = v = 0$), 这时 $F_{c1r} = \Omega^2 r \cos^2 \varphi$, $F_{c1\varphi} = -\Omega^2 r \sin \varphi \cos \varphi$ 。将 k 方向的 $\Omega^2 r \cos \varphi$ 与 g_m 及 j 方向的 $-\Omega^2 r \sin \varphi \cos \varphi$ 合成有效重力 g , 并将径向方向近似作为垂直地面方向, 则垂直运动方程的球坐标形式为

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos \varphi = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g \quad (1-43)$$

(1-37), (1-40) 与 (1-43) 式就构成了球坐标系运动方程的分量形式。在这三个运动方程中, 左边与 2Ω 成正比各项为柯氏加速度在 x, y, z 各方向之分量。注意 Ω 在 x, y, z 方向之分量为:

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = \Omega \cos \varphi, \quad \Omega_z = \Omega \sin \varphi$$

因面柯氏加速度的分量亦可自下式求得:

$$2\Omega + v = 2\Omega \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$= 2\Omega[(w \cos \varphi - v \sin \varphi) i + u \sin \varphi j - u \cos \varphi k] \quad (1-44)$$

此结果与 (1-37), (1-40), (1-43) 中各柯氏加速度分量相同。这三个方程式的左边与 $\frac{1}{r}$ 成正比的各项称为曲率项。它们是由地球的曲率所引起的。这些项的量级都很小, 对于天气尺度的运动而言, 它们的量级约为 $10^{-3} \sim 10^{-6}$ 厘米/秒², 比柯氏力或气压梯度力至少小两个数量级, 因此常可略去。

四、连续方程

考虑由图 1-7 所示的流体元, 其体积为

单位时间 \rightarrow 设, 流为 $r^2 \delta r \delta \varphi \delta \lambda \cos \varphi$

在 k 方向上, 流进该体积元的质量为

$$\rho w r^2 \delta \varphi \delta \lambda \cdot \cos \varphi$$

流出的质量为

$$\left(\rho w r^2 \delta \varphi \delta \lambda + \frac{\partial (\rho w r^2)}{\partial r} \delta r \delta \varphi \delta \lambda \right) \cos \varphi$$

所以在 k 方向上单位体积质量增加率为

$$-\frac{\partial (\rho w r^2)}{\partial r} \frac{\delta r \delta \varphi \delta \lambda}{r^2 \delta r \delta \varphi \delta \lambda} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial (\rho w r^2)}{\partial r}$$

与此类似求出 i, j 方向上单位体积流体的质量增加率分别为

$$-\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial (\rho u)}{\partial \lambda} \quad \text{与} \quad -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial (\rho v \cos \varphi)}{\partial \varphi}$$

所以球坐标下的连续方程为

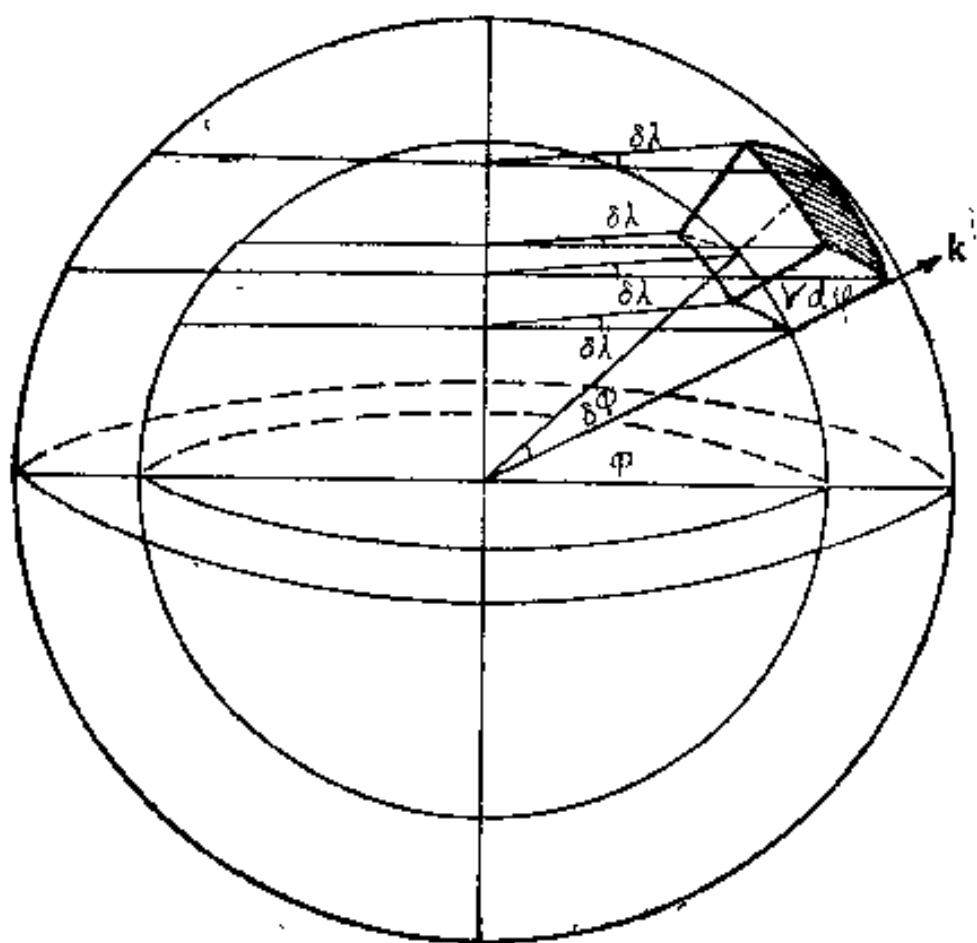


图 1-7

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial \lambda} + \frac{\partial(\rho v \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho w r^2)}{\partial r} = 0 \quad (1-45)$$

五、球坐标中的个别微商

个别时间微商 $\frac{d}{dt}$ 与局地时间微商 $\frac{\partial}{\partial t}$ 间有如下关系:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

在球坐标中, 它为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \quad (1-46)$$

六、球坐标中的热流量方程

将(1-46)式代入(1-18)式, 可得球坐标系中的热流量方程

$$\frac{\partial \ln \theta}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial \ln \theta}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial \ln \theta}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \ln \theta}{\partial r} = \frac{\dot{Q}}{c_p T} \quad (1-47)$$

§ 5 基本方程的简化

由于我们所关心的问题均有相似特征, 使前面所述的基本方程组(1-37), (1-40), (1-45), (1-47)中某些项比起各式中的主项来要小得多。所以这些项对计算结果没什么影响, 因而可以将它们略去, 使方程组得到简化。

下面来谈谈几种主要的简化方法。

一、薄层近似

因为大气位于地球表面之上，所以大气离地心的最小距离为地球半径 a ($a = 6371$ 公里)。若令 D 表示地球大气的深度，大气的高度 r 满足下式

$$a < r < a + D \quad (1-48)$$

在我们所研究的大气动力学及物理问题里，多认为具有上限，即

$$D < 50 \text{ 公里}$$

由此可知

$$D \ll a$$

所以大气可看成是薄层流体，即可在基本方程组中用 a 来代替 r ，这就称为薄层近似。

薄层近似下，局地笛卡尔坐标可以写为

$$\begin{cases} dx = a \cos \varphi d\lambda \\ dy = a d\varphi \\ dz = dr \end{cases} \quad (1-49)$$

大气运动速度为

$$\begin{cases} u = a \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \\ v = a \frac{d\varphi}{dt} \\ w = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad (1-50)$$

i, j 方向的角动量分别为

$$\begin{aligned} M_\lambda &= a \cos \varphi \left(a \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} + \Omega a \cos \varphi \right) = \\ &= a \cos \varphi (u + \Omega a \cos \varphi) \end{aligned} \quad (1-51)$$

$$M_\varphi = a v \quad (1-52)$$

离心力

$$F_{cl} = \left(-\frac{u}{R} + \Omega \right)^2 R \quad (1-53)$$

它在 j 方向上的分量为 (注意 $-\Omega^2 a \sin \varphi \cos \varphi$ 包含在有效重力 g 内)

$$F_{cl\varphi} = -\frac{u^2}{a} \tan \varphi - 2\Omega u \sin \varphi \quad (1-54)$$

在薄层近似中, 对于天气尺度的运动 $\frac{uw}{a}$, 其数量级为 10^{-6}

厘米/秒², 它们在水平运动方程中与其他项 (如 $-\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}$,

$-\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sim 10^{-1}$ 厘米/秒²) 相比小得多; $\frac{u^2 + v^2}{a}$ 的数量级为

10^{-3} 厘米/秒², $2\Omega u \cos \varphi$ 的数量级为 10^{-1} 厘米/秒², 它们与垂直

方程中其他项 (如 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ 与 $g \sim 10^3$ 厘米/秒²) 相比小得多,

所以可在运动方程中略去这些项。因此在薄层近似下, 基本方程 (1-31)、(1-40)、(1-43)、(1-45) 与 (1-47) 式可简化为

$$\frac{du}{dt} - 2\Omega v \sin \varphi - \frac{uv}{a} \tan \varphi = f_\lambda - \frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (1-55)$$

$$\frac{dv}{dt} + 2\Omega u \sin \varphi + \frac{u^2}{a} \tan \varphi = f_\varphi - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (1-56)$$

$$\frac{dw}{dt} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1-57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial \lambda} + \frac{\partial(\rho v \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \\ + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (1-58)$$

$$\frac{\partial \ln \theta}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \ln \theta}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \ln \theta}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} = \frac{\dot{Q}}{c_p T} \quad (1-59)$$

注意在(1-55)~(1-57)中的由

$$\Omega_y = \Omega \cos \varphi$$

所表示的柯氏加速度已不复存在。

二、局地切平面近似

这种近似对于大中尺度的大气运动来讲是有效的。令 $f = 2\Omega \sin \varphi$ 为柯氏参数(垂直分量), 在中纬度 $f \sim 10^{-4}$ /秒, $a = 6371$ 公里, 所以 $f a \cos \varphi \sim 10^2$ 米/秒, 而大气运动速度 $u, v \sim 10$ 米/秒, 我们可采用如下的近似:

$$u, v \ll f a \cos \varphi \quad (1-60)$$

这就称为局地切平面近似。

在(1-60)式的近似下, (1-55)与(1-56)式中的 $\frac{uv}{a} \tan \varphi$ 与 $\frac{u^2}{a} \tan \varphi$ 与柯氏加速度相比可以略去, 并且 $dx = a \cos \varphi d\lambda$ 与 $dy = a d\varphi$ 可以作为是相互独立的。所以在局地切平面近似下, 采用局地笛卡尔坐标系, 则(1-55)~(1-59)式可为

$$\frac{du}{dt} - fv = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-61)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1-62)$$

$$\frac{dw}{dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1-63)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (1-64)$$

$$-\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{\dot{Q}}{c_p T} \quad (1-65)$$

这里

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-66)$$

这几个方程式[(1-61)~(1-65)]是与以角速度为 $\frac{f}{2} = \Omega \sin \varphi$ 绕垂直轴转动的局地切平面坐标系的方程是一样的, 所以(1-60)式称为局地切平面近似。

三、有关 f 的一些近似

1. f 为常数的近似

当大气运动的经向尺度与地球半径相比是很小时, 可令 f 为常数, 即

$$f = \overline{f(\varphi)} = f_0 = \text{const} \quad (1-67)$$

这个近似在数值预报中是常用的, 它可以得到准地转形式的涡度方程, 而避免了所谓“虚假的反气旋发生”的现象。

2. 中高纬度 β -平面近似

我们将柯氏参数对纬度 ϕ_0 按泰勒级数展开

$$f = f_0 + \beta y + (\text{高次项}) \quad (1-68)$$

这里 $\beta = \frac{df}{dy} = \frac{2\Omega \cos \varphi_0}{a}$, 称为 Rossby 参数, β -平面近似包含

如下两点:

① 当 f 不被微分时, $f = f_0 = \text{const}$

② 当 f 对 y 求微分时, $\frac{df}{dy} = \beta = \text{const} \quad (1-69)$

引入 β -平面近似时,可得到在气象上具有重要意义的Rossby波。

3. 低纬度 β -平面近似

低纬度的 β -平面近似由下式给出

$$f = 2\Omega \sin\varphi \approx \beta y \quad (1-70)$$

第二章 大气波动的分类及其特征

我们熟知如下的事实：声波与重力内波能同时在具有稳定层结的可压缩流体中产生；惯性波能在均匀旋转流体中产生；当柯氏参数随纬度而变的话，会产生罗斯贝波；当流体既旋转，又是稳定层结时，所有不同种类的波动都能同时存在。地球大气就属于这种情况。这些波动有什么特点？怎样把它们区分出来呢？我们可根据流体的物理性质对这些波动进行分类。本章从大气的热力特征，即大气稳定层结的结构谈起，介绍各种波动的分类方法及其特征，说明波动的不同性质是怎样表现出来的。

§ 1 大气的垂直结构

由于地球旋转以及大气对太阳辐射所具有的特殊的反应，使得大气的温度和静力稳定度在垂直方向上分布是不均匀的。由于本章讨论的波动都是在稳定层结里产生的，因此本节介绍大气中经常出现的稳定垂直结构。

一、温度随高度变化

图 2-1 是由北半球平均所得到的温度的垂直分布。图中气温 T_0 用高度 $H = \frac{RT_0}{g}$ 来表示， H 是均质大气（气温为 T_0 ）的高度，也可作为大气的垂直尺度。图 2-1 分别列出了冬季和夏季的变化曲线。从该图中可以看出，70公里（即中间层上部）以下，冬季与夏季的层结曲线相差不大；在70公里以上，夏季温度随高度减小得远比冬季快。

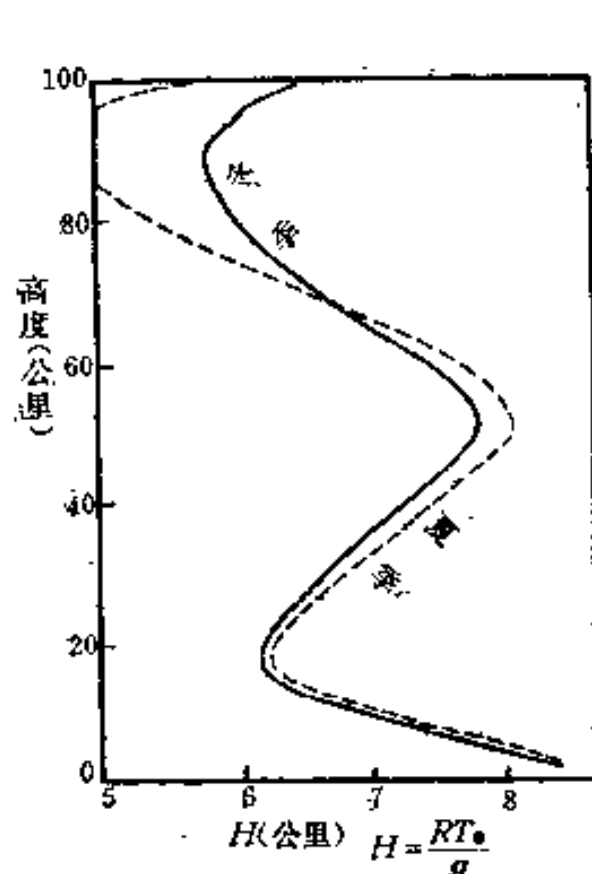


图 2-1 北半球平均温度随高度变化

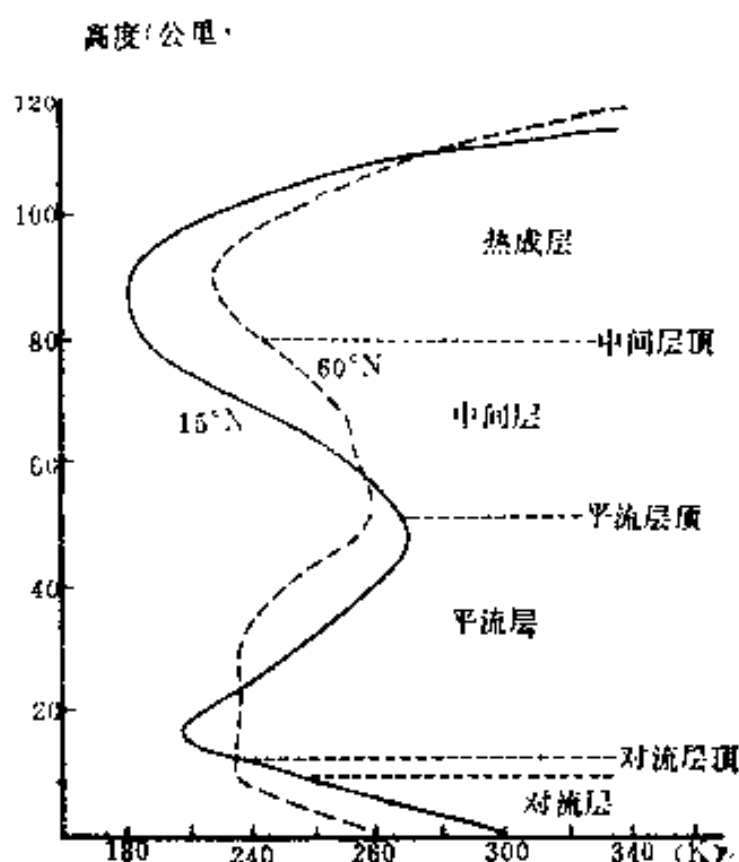


图 2-2 高纬和低纬地区平均温度随高度变化

图 2-2 表示高纬(60°N)地区与低纬(15°N)地区温度随高度的平均分布情况。从图 2-1 与图 2-2 可知,在对流层中,总的来说气温随高度的增加是降低的,这是因为对流层空气的增热主要是依靠吸收地面长波辐射。气层越靠近地面,获得的地面长波辐射越多,温度也越高;相反,离地面越远,则温度越低。对流层中层和上层受地表面的影响已大大减小,温度递减率比下层小得多。在平流层中,平均说来,下部一般是等温的,或温度随高度略有上升,上部则为逆温的。这种逆温的产生,主要是与该层内臭氧直接吸收太阳辐射有关。

二、静力稳定度随高度变化

在北半球平均情况下,静力稳定度 $N^2 = \frac{g}{\theta_0} \cdot \frac{\partial \theta_0}{\partial z}$ 随高度的变

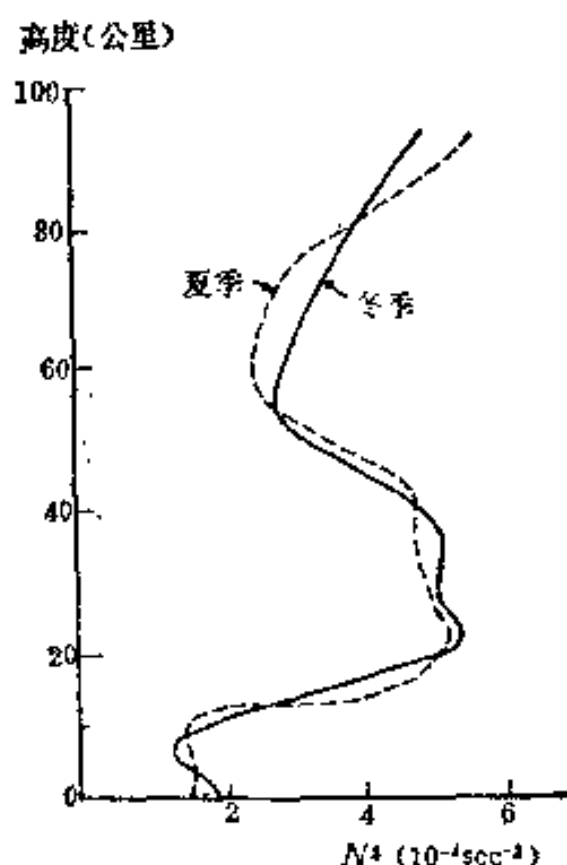


图 2-3 北半球平均稳定度随高度变化

化如图 2-3 所示，其中虚线表示夏季的情况，实线表示冬季的情况。

从图 2-3 可以看出，在对流层中，静力稳定度随高度是减小的；进入平流层后，静力稳定度随高度开始增加，到了平流层上层，稳定度随高度略有减少。图中稳定度 N^2 都大于零，这说明在平均情况下，大气层结是稳定的。

§ 2 基本方程组

一、小扰动的特征

为阐述简单起见，考虑没有基本气流的情况，即假定大气原来是静止的，我们有：

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0 \quad (2-1)$$

并假定大气基本状态(即未扰动状态)处于静力平衡，以及未扰动时的热力学参量 p_0, ρ_0, T_0 仅是高度的函数，即

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -g\rho_0 = -\frac{gp_0}{RT_0} \quad (2-2)$$

$$\theta_0 = \theta_0(z), p_0 = p_0(z), \rho_0 = \rho_0(z), T_0 = T_0(z) \quad (2-3)$$

设想在处于此状态的大气中产生一个小扰动 $u', v', w', p', \rho', T', \theta'$ 则

$$p = p_0(z) + p', \rho = \rho_0(z) + \rho', T = T_0(z) + T', \theta = \theta_0(z) + \theta',$$

$$p' \ll p_0, \rho' \ll \rho_0, T' \ll T_0, \theta' \ll \theta_0 \quad (2-4)$$

这个条件在大气中通常是能满足的。比如,对于气压来说,地面气压 $p_0(0) \sim 1000$ 毫巴,而地面气压扰动 $p' \sim 10$ 毫巴,即使在台风这样的深厚且强烈的系统中, $p' \sim 50$ 毫巴。符合(2-4)式的扰动称为小扰动。

小扰动理论的基本假设是:当扰动为零时,各基本状态变量必须满足控制方程组(本节中假定基本气流为零,所以控制方程为静力方程);扰动变量又必须足够小,以致于控制方程组中所有扰动变量的二次项都可忽略不计。

在本节所介绍的系统中(基本状态是静止的),扰动量对时间的全微商为

$$\begin{aligned} \frac{d(\quad)'}{dt} = & \frac{\partial(\quad)'}{\partial t} + u' \frac{\partial(\quad)'}{\partial x} + v' \frac{\partial(\quad)'}{\partial y} + \\ & + w' \frac{\partial(\quad)'}{\partial z} \end{aligned} \quad (2-5)$$

其中非线性项 $u' \frac{\partial(\quad)'}{\partial x} + v' \frac{\partial(\quad)'}{\partial y} + w' \frac{\partial(\quad)'}{\partial z}$ 要比线性项 $\frac{\partial(\quad)'}{\partial t}$ 小得多。这里 $(\quad)'$ 代表气象变量扰动值 $u', v', w', p', \rho', T', \theta'$ 中的任一个。所以在小扰动及无基本气流的假定下,我们可认为下式成立:

$$\frac{d(\quad)'}{dt} = \frac{\partial(\quad)'}{\partial t} \quad (2-6)$$

对位温的定义式(1-17)取对数,然后进行差商运算,可得小扰动运算中很有用的关系式:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{p_0} - \frac{T'}{T_0} = \frac{p'}{\gamma p_0} - \frac{\theta'}{\theta_0} \quad (2-7)$$

其中 $\gamma = c_p/c_v$ 。

二、扰动方程组

假定摩擦与非绝热加热对波动的影响较小,则可在运动方程中略去摩擦力,并采用绝热方程。由于未扰动时大气是静止的,而又作了小扰动的假设,所以由(1-61)~(1-64)式,并考虑(2-6)式可得

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f v' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2-8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f u' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (2-9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') - g = \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\rho_0} \end{aligned} \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \frac{\partial (\rho_0 w')}{\partial z} = 0 \quad (2-11)$$

在垂直运动方程组中,我们不希望用 ρ' , 所以利用(2-7)式把 ρ' 换掉, 得到

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\gamma} \frac{p'}{p_0} + g \frac{\theta'}{\theta_0} \quad (2-12)$$

由热流量方程(1-65)式,考虑绝热过程,则有

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + w' \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 0 \quad (2-13)$$

以上几个式子就组成了大气扰动方程组。

三、两个最简单的近似

我们从扰动方程组寻找波动的特征时,常要作些简化,以使问题较容易获得结果。进行简化时必须要注意扰动的某种特征。

在气象中常采用静力平衡近似和滞弹性(Anelastic)近似。静

力平衡适合于大尺度扰动, 即在(2-12)式中 $\frac{\partial w'}{\partial t}$ 与其他项相比很小可略去的情况, 也就是在静力平衡中, 垂直方向的运动方程为

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\gamma} \frac{p'}{\rho_0} + g \frac{\theta'}{\theta_0} = 0 \quad (2-14)$$

静力平衡能滤去在垂直方向传播的声波, 但是在静力平衡的大气中仍然可以有一种在水平方向传播的类似声波的外重力波, 通称为莱姆波。

为了要滤去声波, 又要对其他波动影响很小, 常可采用滞弹性假定, 即在(2-11)式中令 $\frac{\partial \rho'}{\partial t}$ 与其他项相比很小, 可以略去。在滞弹性假设下, 连续方程可为:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \frac{\partial (\rho_0 w')}{\partial z} = 0 \quad (2-15)$$

为了将小扰动时的未简化与简化(静力平衡或滞弹性近似)情况下的方程式统一起来, 我们引入参量 λ_1 和 λ_2 , 它们定义为

$$\lambda_1 = \begin{cases} 1 & \text{一般情况} \\ 0 & \text{静力近似} \end{cases} \quad (2-16)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} 1 & \text{一般情况} \\ 0 & \text{滞弹性近似} \end{cases} \quad (2-17)$$

这时垂直运动方程与连续方程可写为

$$\lambda_1 \frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\gamma} \frac{p'}{\rho_0} + g \frac{\theta'}{\theta_0} \quad (2-18)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \frac{\partial (\rho_0 w')}{\partial z} = 0 \quad (2-19)$$

§ 3 声波、惯性-重力波的频率方程

一、变量变换后的扰动方程组

上节介绍的(2-8), (2-9), (2-13), (2-18), (2-19)式构成扰动方程组。在等温大气中, 我们很容易证明扰动量 u' , v' , w' , 与 T'/T 正比于 $\rho_0^{-\frac{1}{2}}$, 而 p' 与 ρ' 正比于 $\rho_0^{\frac{1}{2}}$, 这种比例关系对于非等温大气也近似成立。因此我们作如下的变量变换:

$$\begin{cases} p_1 = (\rho_{0s}/\rho_0)^{\frac{1}{2}} p' \\ \rho_1 = (\rho_{0s}/\rho_0)^{\frac{1}{2}} \rho' = p_1/c^2 - q_1 \\ q_1 = (\rho_0 \rho_{0s})^{\frac{1}{2}} \theta'/\theta_0 \\ v_1 = (\rho_0 \rho_{0s})^{\frac{1}{2}} v' \\ w_1 = (\rho_0 \rho_{0s})^{\frac{1}{2}} w' \end{cases} \quad (2-20)$$

这里 ρ_{0s} 是 $\rho_0(z)$ 在地球表面的平均值, 它是常数, 与 z 无关。
 $c = (\gamma R T)^{\frac{1}{2}}$ 是拉普拉斯声速。 v' 表示水平扰动速度。

作了变量变换后, 扰动方程组(2-8), (2-9), (2-13), (2-18), (2-19)变为下列简洁的形式:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - f v_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + f u_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial y} \quad (2-22)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \Gamma p_1 + g q_1 \quad (2-23)^*$$

* 在此式右方应有一项 $\frac{1}{2} s_z p_1$, 因其数值较小, 故已舍去。否则当用 $(\theta_{0s}/\theta_0)^{1/2}$ x 代变数 x 。

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + s_z w_1 = 0 \quad (2-24)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \sigma_z w_1 = 0 \quad (2-25)$$

这里

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z}, \quad s_z = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}, \quad \Gamma = \frac{1}{2} \sigma_z - s_z = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{g}{c^2} - s_z \right) = \frac{g}{c^2} - \frac{1}{2} \sigma_z \end{aligned} \quad (2-26)$$

将(2-24)、(2-25)两式相加, 利用(2-20)式中关系

$$\rho_1 = p_1/c^2 - q_1$$

$$\text{可得 } -\frac{\lambda_2}{c^2} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \nabla_h \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z} - \Gamma w_1 = 0 \quad (2-27)$$

这是连续方程的一种变化形式, \mathbf{v}_1 为水平扰动风速, 即, $\mathbf{v}_1 = u_1 \mathbf{i} + v_1 \mathbf{j}$, ∇_h 为水平 del 算子, 即

$$\nabla_h = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$$

二、能量密度的守恒

将 u_1, v_1, w_1 分别乘 (2-21), (2-22), (2-23) 式, 然后相加可得

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{\lambda_1}{2} w_1^2 \right) &= -\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_h p_1 - \\ &- w_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} - \Gamma w_1 p_1 + w_1 g q_1 \end{aligned}$$

把它改写为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{\lambda_1}{2} w_1^2 \right) + \nabla_h \cdot (p_1 \mathbf{v}_1) + \frac{\partial}{\partial z} (p_1 w_1) &= \\ = p_1 \nabla_h \cdot \mathbf{v}_1 + p_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} - \Gamma p_1 w_1 + w_1 g q_1 \end{aligned} \quad (2-28)$$

由(2-27)式可得

$$p_1 \left(\nabla_h \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{\partial w_1}{\partial z} - \Gamma w_1 \right) = -\frac{\lambda_2}{c^2} p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (2-29)$$

由(2-24)式可得(利用 $N^2 = gs_z$)

$$w_1 g q_1 = -\frac{g^2}{gs_z} q_1 \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\frac{g^2}{2N^2} \frac{\partial}{\partial t} (q_1^2) \quad (2-30)$$

将(2-29)与(2-30)两式代入(2-28)式, 移项后得到如下的能量方程:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_h \cdot (p_1 \mathbf{v}_1) + \frac{\partial}{\partial z} (p_1 w_1) = 0 \quad (2-31)$$

这里 E 是总能量密度, 由下式定义

$$E = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_1 w_1^2 + \frac{\lambda_2}{C^2} p_1^2 + \frac{g^2 q_1^2}{N^2} \right) \quad (2-32)$$

这里 $N = \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right)^{\frac{1}{2}} = (gs_z)^{\frac{1}{2}}$ 为 Brunt-Väisälä 频率。(2-31)

是守恒方程的形式, 当将(2-31)式对固壁面 (即边界上 $\mathbf{v}_1 = 0$, $w_1 = 0$) 所围成的体积 τ 积分时, 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} E d\tau = 0 \quad (2-33)$$

即能量密度的体积分是守恒的, 不随时间而变化。对于一个孤立的体积元 τ 来说, 其能量密度 E 的变化等于气压力对 τ 所作的功, 也就是等于外部介质对 τ 所作的功。另外, 静力近似 $\lambda_1 = 0$

蕴含着垂直运动的功能 $\frac{1}{2} w_1^2$ 远比水平运动动能 $\frac{1}{2} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1$ 为小,

而可将垂直运动动能略去; 而滞弹性近似 $\lambda_2 = 0$, 蕴含着 $\frac{p_1^2}{c^2}$ 与

$\frac{g q_1^2}{s_z}$ 相比是可以略去的。这两种近似在大尺度大气运动是成立的。

三、频率方程

为要说明大气运动一些可能类型的特征，我们先考察扰动随时间的振动情况，即令

$$(u_1, v_1, w_1, p_1, q_1) = (u, v, w, p, q)e^{-i\omega t} \quad (2-34)$$

这里 ω 为扰动频率。将上式代入水平运动方程(2-21)与(2-22)式得到扰动振幅间有如下关系

$$u = -\frac{1}{D}(fp_y - i\omega p_x) \quad (2-35)$$

$$v = \frac{1}{D}(fp_x + i\omega p_y) \quad (2-36)$$

这里 $D = f^2 - \omega^2$, $p_x = \frac{\partial p}{\partial x}$, $p_y = \frac{\partial p}{\partial y}$ 。

将(2-34)式代入垂直运动方程(2-23)式与连续方程(2-27)式可得〔并利用(2-24)式〕

$$\frac{\partial p}{\partial z} + I' p = -\frac{1}{\omega}(\lambda_1 \omega^2 - N^2) w \quad (2-37)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} - I' w = -\omega \left(\frac{\nabla_h^2 p}{D} - \frac{\lambda_2 p}{c_2} \right) \quad (2-38)$$

由以上两式消去 w ，可得关于 p 的方程

$$\omega \left\{ (N^2 - \lambda_1 \omega^2) \nabla_h^2 p + (f^2 - \omega^2) \left\{ p_{xx} - \left[I'^2 + \frac{\lambda_2}{c_2^2} (N^2 - \lambda_1 \omega^2) \right] p \right\} \right\} = 0 \quad (2-39)$$

在我们这个模型里，上式的定常解 $\omega = 0$ 表示静力平衡与地转平衡下的运动。而非定常解 $\omega \neq 0$ 则表示声波与惯性-重力内波。

我们考虑(2-39)式的平面波解，即令

$$p_1 = p(x, y, z)e^{-i\omega t} = A \exp[i(k_1 x + k_2 y + mz - \omega t)] \quad (2-40)$$

这里波数 k_1 , k_2 与 m 取正或负实数，并且用上式右边表达式的

实部来表示实变量 p_1 。将平面波形式的解代入 (2-39) 式求得表示频率 ω 与波数及其他物理参数之间关系的波动频率方程:

$$m^2 + \frac{\lambda_1 \omega^2 - N^2}{\omega^2 - f^2} k^2 - \frac{1}{c^2} (\lambda_1 \lambda_2 \omega^2 - N_1^2) = 0 \quad (2-41)$$

式中 $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, $N_1 = \lambda_2 N^2 + c^2 \Gamma^2$ 。(2-41) 式是关于 ω^2 的二次代数方程式, 它既包含了高频的声波, 也包含了低频的惯性-重力内波。它的解为

$$\omega_a^2 = \frac{\omega_0^2}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{4\omega_*^4}{\omega_0^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2-42)$$

$$\omega_g^2 = \frac{\omega_0^2}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{4\omega_*^4}{\omega_0^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2-43)$$

这里

$$\omega_0^2 = (m^2 + k^2)c^2 + N_1^2 + f^2$$

$$\omega_*^2 = (N^2 k^2 + f^2 \omega^2)c^2 + f^2 N_1^2$$

注意到当 N, Γ 与 f 都为零时, $\omega_*^4 = 0$, 推得

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 (k^2 + m^2)c^2, \quad \omega_g^2 = 0 \quad (2-44)$$

所以 (2-42) 式是声波的频率方程, 而 (2-43) 式为惯性-重力内波的频率方程。

§ 4 不同类型波动的简单分划

上节介绍的频率方程 (2-41) 式包含了大气中很多类型的波动。本节介绍划分这些波动的简单方法, 即借助 $m-k$ 图、 $\omega-k$ 图来对各种波动进行分划。

一、 $m-k$ 图

$m-k$ 图主要用来描述声波和惯性重力波差异, 由图 2-4 所示。图 2-4(a) 表示 $\omega^2 > N_1^2$, 即声波的情况, 而图 2-4(b) 则表示 $N^2 > \omega^2 > f^2$, 即惯性内重力波的情况。

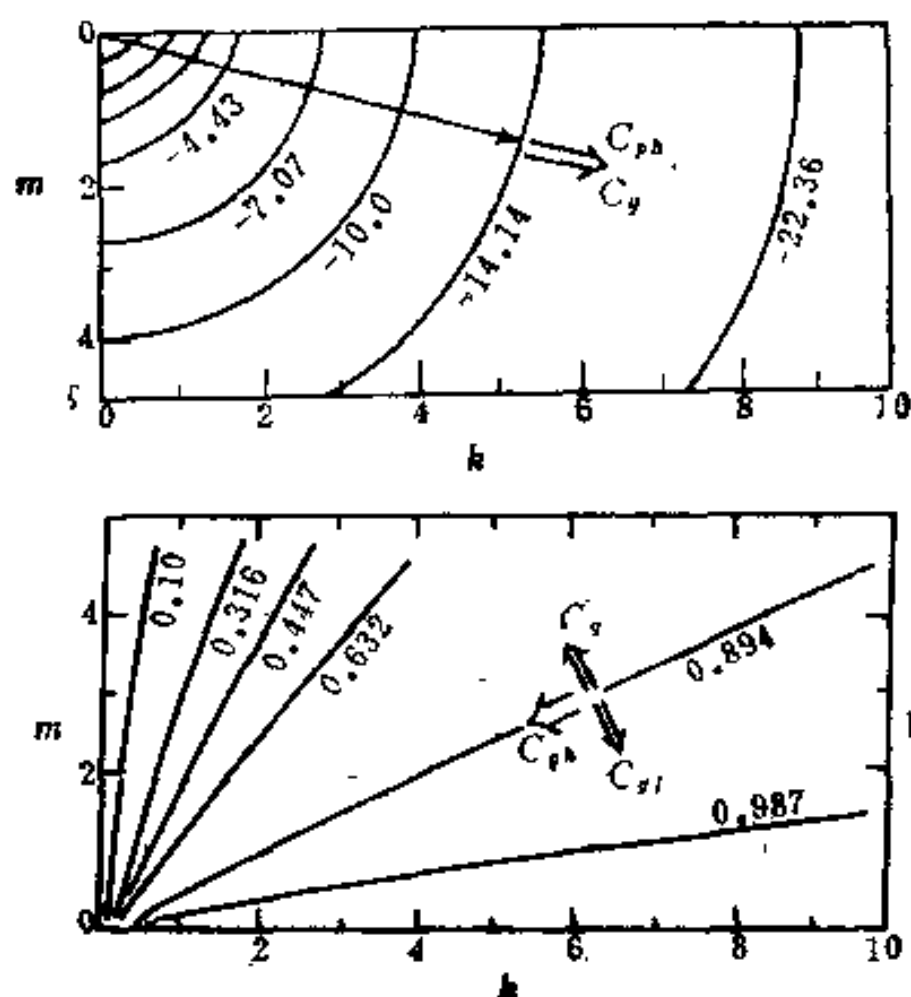


图 2-4 $m-k$ 图上的传播面

图中每条曲线上所附的数字是 ω/N 的值。为方便起见,对于声波来说,图中 ω/N 用负值表示。我们可以清楚地看出,对于声波而言, $\omega = \text{常数}$ 表示椭圆曲线,当 ω 很大时,这些椭圆的离心率很小,见图 2-4 (a)。而对于惯性-重力内波而言,这些曲线都是双曲线,如图 2-4 (b) 所示。

二、 $\omega-k$ 图

在以 ω 为纵坐标, k 为横坐标的图上,如能按照一定规律,将图而划成不同区域,使每个部分都表示不同类型的波动,这样就能把不同波动区分出来。下面介绍区分的方法。

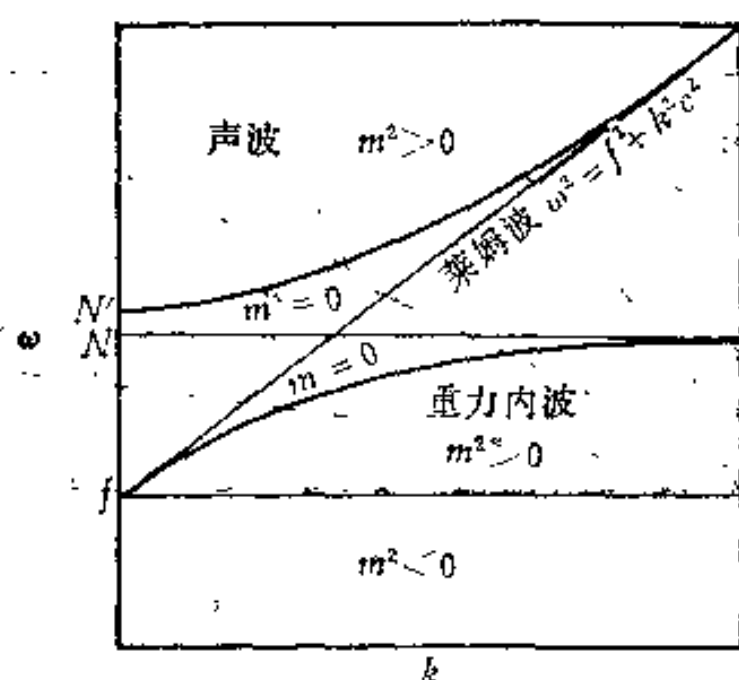
首先假定 k 永远是实数, m 的取值有如下两种情况;

- ① m 为实数,波动可在垂直方向传播;
- ② m 是虚数,则变量随高度按指数变化,即波动不能在垂直

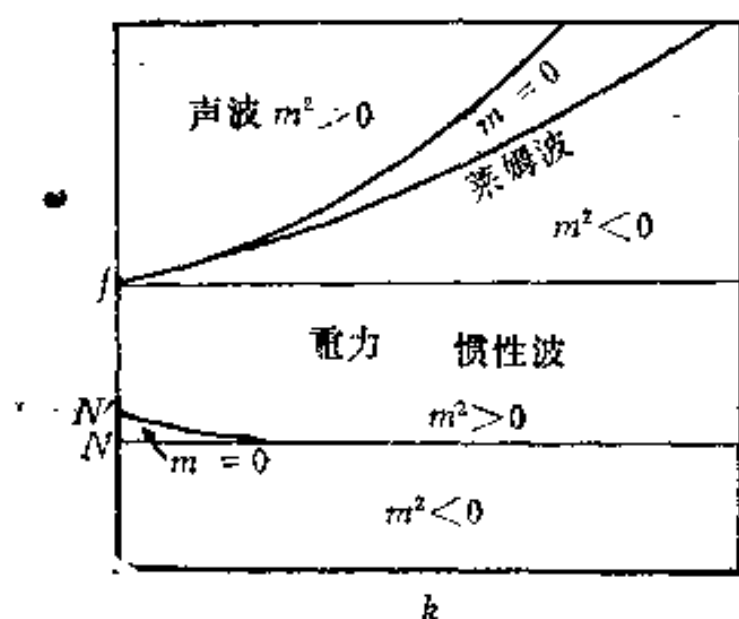
方向传播。

这样,我们可根据 $m^2 > 0$ 或 $m^2 < 0$ 区分能在垂直方向传播的波和不能在垂直方向传播的波。

在波动频率方程(2-41)式中,要 $m^2 > 0$ 成立, ω^2 必须大于 N_1^2 , 或处于 N^2 与 f^2 之间。当 ω^2 处于这些区域以外时, $m^2 < 0$, 波动只能在水平方向传播,而在垂直方向被“截住”,不能传播。我们



(a) ($N^2 > f^2$)



(b) ($N^2 < f^2$)

图 2-5 $\omega-k$ 图

(a) $N > f$, 稳定层结

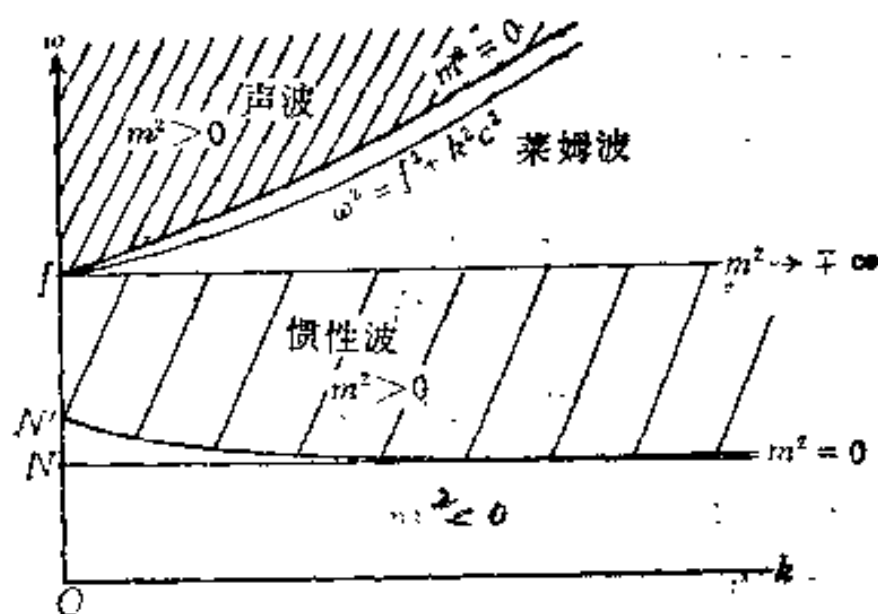


图 2-5 $\omega-k$ 图

(b) $N < f$, 接近中性层结

在 $\omega-k$ 图中, 对于 $N^2 > f^2$ 与 $N^2 < f^2$ 分别划出由频率方程(2-41)式得出的 $m^2 \gtrless 0$ 的区域, 如图 2-5 所示。

从图 2-5 中可以清楚地看出各类波动怎样由 ω , k , m 取值范围不同而区分出来。为什么会有图 2-5 中的结果, 我们将在下节进行讨论。

§ 5 各种波动的特征

上节介绍了用 $m-k$ 图与 $\omega-k$ 图将大气中各种波动区分出来的方法。本节着重阐述线性理论下, 波动分类及其主要特征。

一、各种波动的物理模型

1. 声波

纯粹的声波有如下两个基本特征:

① 声波是纵波

② 大气声波是由可压缩性引起的, 即归之于连续方程中含有密度扰动的局地变化项, 可由图 2-6 所示。

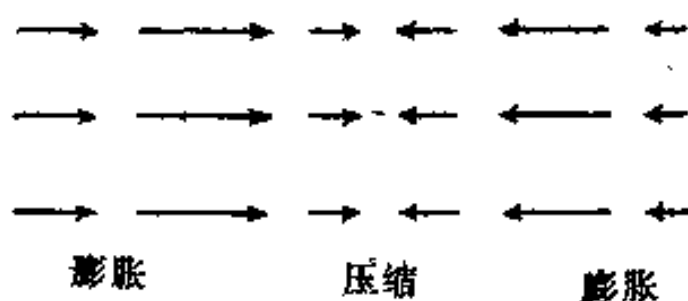


图 2-6 声波的产生

由此可知，声波的传播是由于大气中辐散场引起的绝热膨胀与压缩交替出现的结果。

在一般情况下，声波受地球自转的影响是很小的。所以在考虑声波时，一般不必使用本章 § 2 所介绍的那样复杂的扰动方程组，而采用更简化的形式（即略去地球旋转与稳定层结的影响）。

在 x 方向传播的一维声波的波动方程组为：

运动方程

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2-45)$$

连续方程

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2-46)$$

绝热方程

$$\frac{p'}{p_0} = \gamma \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) \quad (2-47)$$

由绝热方程(2-47)可将(2-46)式改写为

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2-48)$$

由(2-45)与(2-48)式消去 u' 可得

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\gamma \bar{p}}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (2-49)$$

令(2-49)式有如下的平面波解

$$P' = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (2-50)$$

代入(2-49)式可得声速公式

$$c \equiv \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{c_p}{c_v} RT \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-51)$$

有时也称(2-51)式为拉普拉斯声速公式。

对于三维声波来说, 扰动具有如下形式的平面波解

$$P' = Ae^{i(k_1 x + k_2 y + m z - \omega t)}$$

波速为

$$c \equiv \frac{\omega}{(k_1^2 + k_2^2 + m^2)^{1/2}} = \left(\frac{c_p}{c_v} RT \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-52)$$

当声波波长较长, 大于20公里, 即 $(k^2 + m^2)$ 小于 10^{-7}米^{-2} 时, 应考虑 $(N^2 + f^2 c^2)$ 对声速的影响。由(2-44)式可得声速为

$$c_a = \frac{\omega_0}{\sqrt{k^2 + m^2}} = c \left[1 + \frac{N^2 + f^2 c^2 + f^2}{c^2 (m^2 + k^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-53)$$

此式表明, 特别稳定的层结(即 N^2 很大)和快速旋转的流体中, 波长较长的声波, 其传播速度 c_a 要比拉普拉斯速度 c 要快。

2. 莱姆(Lamb)波

莱姆波是具有水平方向传播的表面重力波。它有如下几个特点:

① 纯粹水平运动, 即

$$w \equiv 0 \quad (2-54)$$

② 静力平衡

$$\frac{\partial p'_1}{\partial z} + \Gamma p'_1 = 0, \quad p'_1 = p_0 e^{-\Gamma z}, \quad \Gamma = \frac{g}{c^2} + \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (2-55)$$

③ 无位温扰动

$$\theta' = 0 \quad (2-56)$$

这是由于当 $\theta' \neq 0$, 会产生上下运动, 而莱姆波是没有垂直运动的, 所以 $\theta' = 0$ 。

④ 速度扰动 u' , v' 的振幅随高度几乎不变。

这是因为, 由静力平衡可得如下方程式

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{g}{\gamma R T_0} p' + g \frac{\theta'}{\theta_0} \rho_0 = -\frac{p'}{H_z} \quad (2-57)$$

其中

$$H_z = \frac{\gamma R T_0}{g} = \gamma H \quad (2-58)$$

H 为均质大气高度, 即 $H = RT_0/g$ 。

基本状态的静力平衡式为

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\frac{g}{RT_0} \rho_0 = -\frac{\rho_0}{H} \quad (2-59)$$

对于等温大气来说

$$p'(x, y, z, t) = p'(x, y, 0, t) e^{-z/\gamma H} \quad (2-60)$$

$$\rho_0(z) = \rho_0(0) e^{-z/H} \quad (2-61)$$

将上面两式相除得到

$$\frac{p'(z)}{\rho_0(z)} = \frac{p'(0)}{\rho_0(0)} e^{\frac{z}{H}(1-\frac{1}{\gamma})} \quad (2-62)$$

这里 $p'(z)$ 与 $p'(0)$ 分别为 $p'(x, y, z, t)$ 与 $p'(x, y, 0, t)$ 的简写。由于水平运动速度的扰动随高度的变化正比于气压扰动随高度的变化, 所以有

$$(u', v') = [u'(0), v'(0)] e^{\frac{z}{H}(1-\frac{1}{\gamma})} \quad (2-63)$$

也就是说, 速度扰动随高度子按 $e^{\frac{z}{H}(1-\frac{1}{\gamma})} = \exp(s_z z)$ 的因子增加。在大气中

$$s_z = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \frac{N^2}{g} \cong 2 \times 10^{-5} \text{米}^{-1} \quad (2-64)$$

由此可见 s_z 的值很小, 所以 u', v' 可认为不随高度而变。

由以上的物理特性，莱姆波可由以下方程组来描写

$$\left(\text{令 } \pi' = \frac{p'}{\rho} \right)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f v' = - \frac{\partial \pi'}{\partial x} \quad (2-65)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f u' = - \frac{\partial \pi'}{\partial y} \quad (2-66)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \pi'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (2-67)$$

由(2-65)与(2-66)式可得涡度扰动方程(令 f 为常数):

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -f \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = \frac{f}{c^2} \frac{\partial \pi'}{\partial t} \quad (2-68)$$

即有

$$\zeta' = \frac{f}{c^2} \pi' \quad (2-69)$$

上式给出了涡度扰动与气压扰动间的关系。

将(2-65)式对 x 、(2-66)式对 y 分别求偏导数,然后相加可得

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'_x + v'_y) = f(v'_x - u'_y) - \nabla^2 \pi' = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \pi'}{\partial t^2}$$

也就是

$$\frac{\partial^2 \pi'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \pi' = -f c^2 \zeta' \quad (2-70)$$

由(2-69)式得出如下波动方程

$$\frac{\partial^2 \pi'}{\partial t^2} + f^2 \pi' - c^2 \nabla^2 \pi' = 0 \quad (2-71)$$

这就是表面重力波方程,所以莱姆波具有表面重力波的特性。

令(2-71)式的波动方程有如下的平面波解

$$\pi' = A e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} \quad (2-72)$$

代入(2-71)式,可得莱姆波的频率方程为

$$\omega^2 = k^2 c^2 + f^2 \quad (2-73)$$

所以在图 2-5 ($\omega-k$ 图)中, 莱姆波在图中由曲线 $\omega^2 = k^2 c^2 + f^2$ 来表示, 这里 $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ 。

3. 惯性-重力内波

重力内波有如下一些特征:

① 重力内波是横波;

② 密度扰动的局地变化项的作用很不重要, 在连续方程中可以把它略去;

③ 重力内波只存在于层结稳定的介质中, 因为在层结稳定的介质中, 离开其平衡位置作垂直移动的小流块, 将受到一个使其趋于回到原来平衡位置的回复力作用, 以使气块不断振动, 产生波动。

惯性波主要是由地球转动所产生的, 它有以下两个特点:

① 柯氏力的作用较大;

② 常常要考虑三维流场。

一般情况下, 惯性波与重力内波常混在一起, 它们可由相同的物理模型来描述:

水平运动方程

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f v' = -\frac{\partial \pi'}{\partial x} \quad (2-74)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f u' = -\frac{\partial \pi'}{\partial y} \quad (2-75)$$

垂直运动方程

$$\lambda_1 \frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial \pi'}{\partial z} + g s' + \frac{N^2}{g} \pi'$$

这里 $s' = \theta' / \theta_0$, 由于上式中最后一项在惯性-重力内波中很不重要, 故把它略去, 这样垂直运动方程简化为

$$\lambda_1 \frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial \pi'}{\partial z} + g s' \quad (2-76)$$

热流量方程

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \frac{w'}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 0 \quad (2-77)$$

为简单起见连续方程采用 Boussinesq 近似

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2-78)$$

由(2-74), (2-75), (2-78)式求得扰动的涡度方程为

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -f \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = f \frac{\partial w'}{\partial z} \quad (2-79)$$

由(2-74)与(2-75)两式推出扰动的散度方程为

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = f \zeta' - \nabla_{\lambda}^2 \pi' \quad (2-80)$$

再将(2-78)式代入(2-80)式可得

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2 \partial z} = \nabla_{\lambda}^2 \pi' - f \zeta' \quad (2-81)$$

把上式对 t 求偏导数有

$$\frac{\partial^3 w'}{\partial t^2 \partial z} = \nabla_{\lambda}^2 \frac{\partial \pi'}{\partial t} - f \frac{\partial \zeta'}{\partial t} = \nabla_{\lambda}^2 \frac{\partial \pi'}{\partial t} - f^2 \frac{\partial w'}{\partial z}$$

所以有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \frac{\partial w'}{\partial z} = \nabla_{\lambda}^2 \frac{\partial \pi'}{\partial t} \quad (2-82)$$

将(2-76)式对 t 求导数, 并利用(2-77)式可得

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} + N^2 w' = - \frac{\partial^2 \pi'}{\partial t \partial z} \quad (2-83)$$

由(2-82)与(2-83)式消去 π' 或 w' 可得关于 w' 或 π' 的波动方程

$$\left\{ \left(\lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \nabla_{\lambda}^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \left(\frac{\partial \pi'}{\partial t} \right) = 0 \quad (2-84)$$

令 $\pi' = \pi e^{-i\omega t}$, 得出

$$\omega \left\{ (N^2 - \lambda_1 \omega^2) \nabla_h^2 \pi + (f^2 - \omega^2) \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} \right\} = 0 \quad (2-85)$$

令(2-84)式有如下的平面波解

$$\pi' = A e^{i(k_1 x + k_2 y + m z - \omega t)} \quad (2-86)$$

代入(2-84)式可得惯性-重力内波的频率方程

$$\omega \{ N^2 k^2 + f^2 m^2 - (\lambda_1 k^2 + m^2) \omega^2 \} = 0 \quad (2-87)$$

若有基本气流 U 时, 则上式中 ω 变为 $\omega + U k$, 常称它为多普勒相移频率。

下面我们分别讨论纯重力内波、纯惯性波以及混合的惯性-重力内波的振动频率

① 纯重力内波

为了求得纯重力内波, 假定流体不旋转, 即 $f = 0$, 这时波动的传播情况由图 2-7 所示。

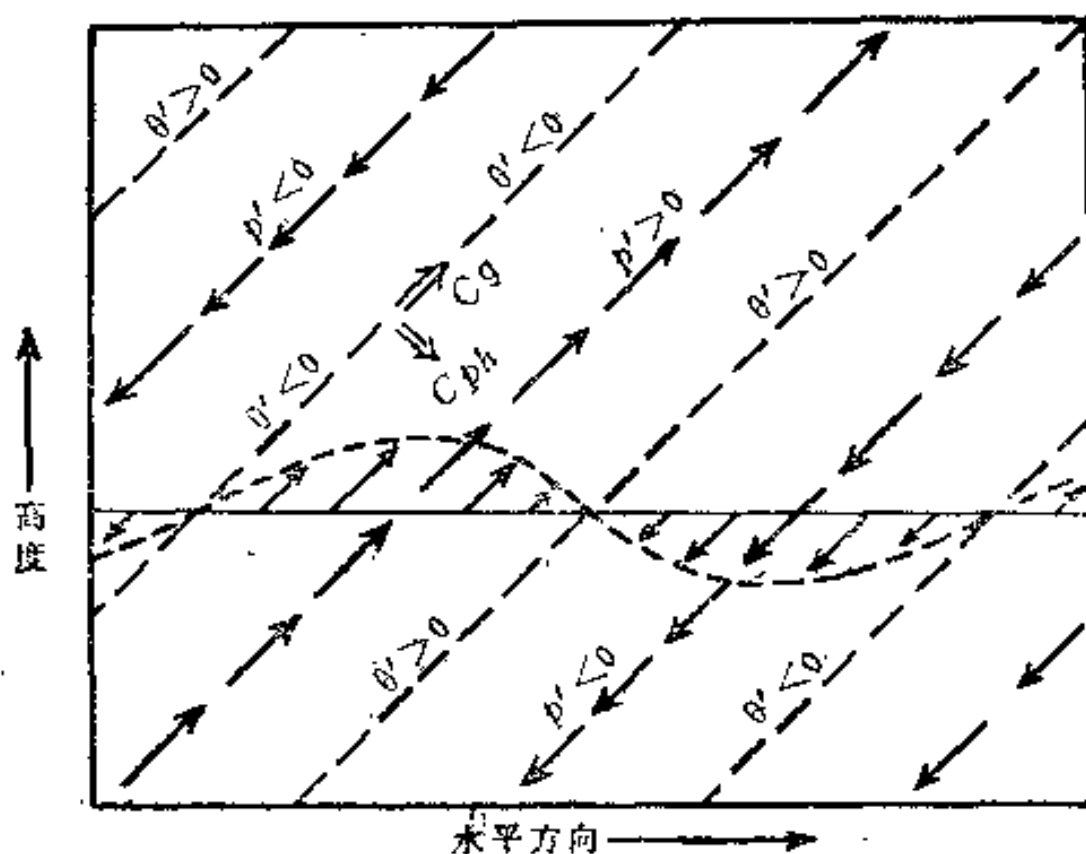


图 2-7 纯重力内波的传播

在频率方程(2-87)式中令 $f = 0$, 求得纯重力内波的频率为

$$\omega = \frac{Nk}{\sqrt{\lambda_1 k^2 + m^2}} \quad (2-88)$$

② 纯惯性波

这种波动是在旋转流体处于中性层结 ($N^2 = 0$) 的情况下产生出来的。在频率方程(2-87) 式中令 $N^2 = 0$ 可得纯惯性波的频率方程:

$$\omega = \frac{fm}{\sqrt{\lambda_1 k^2 + m^2}} \quad (2-89)$$

试比较(2-88)与(2-89)两式,发现垂直方向的变化在惯性波中的影响要比重力内波要大,这是由于惯性波频率方程中,分子式是 f 乘垂直波数,而纯重力内波的频率方程中,分子式是 N 乘以水平波数。

当大气处于静力平衡 ($\lambda_1 = 0$) 或水平方向无气压梯度,即 $\nabla_h p' \rightarrow 0$ (也就是 $k \rightarrow 0$) 时,由(2-89)式可得频率为

$$\omega = f$$

这种波动称为惯性振荡。在 $\varphi = 45^\circ$ 处,惯性振荡周期大约为17个小时。由于天气波动的周期一般是几天到一星期,所以中纬度惯性振荡的频率高于一般的天气波动频率。

惯性振荡在大气及海洋中是存在的。例如,1933年8月17~24日在波罗的海上观测到的海面流速矢端迹图呈环形,如图2-8所示,这就表明了惯性振荡的影响。

观测结果清楚地表明,惯性振荡往往是选置在向北的运动上。

③ 惯性-重力内波

在大气稳定层结与地球旋转的综合作用下,产生惯性-重力内波。

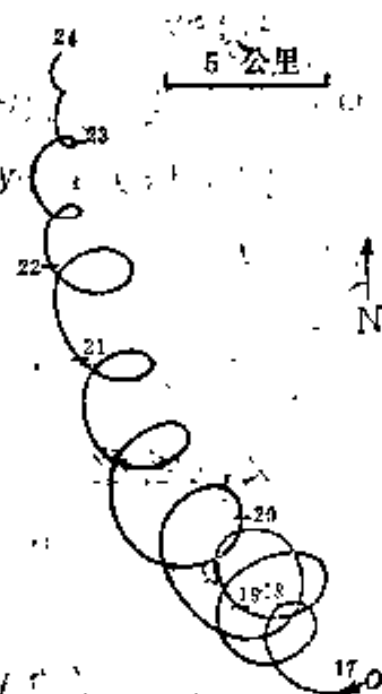


图2-8 1933年8月17~24日波罗的海上海面流速矢端迹图

其波动频率为

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2 + f^2 m^2}{\lambda_1 k^2 + m^2} \quad (2-90)$$

如果令 L_z 为垂直方向的波长, L 为水平方向的波长, 即

$$m = \frac{2\pi}{L_z}, \quad k = \frac{2\pi}{L} \quad (2-91)$$

因为大气可看为薄层流体, 假定 $m \neq 0$, 则 L_z 有一定的长度, 一般约为几公里。将(2-91)式代入(2-90)式可得频率公式为

$$\omega^2 = \frac{f^2 + N^2 L_z^2 / L^2}{1 + \lambda_1 L_z^2 / L^2} \quad (2-92)$$

由此可得出静力近似的条件:

$$L \gg L_z \quad (2-93)$$

所以静力近似对于大气长波来讲, 是很准确成立的; 对于短波来讲, 采用静力近似误差较大; 如果 $\frac{L_z}{L} \sim 1$, 更不能令 $\lambda_1 = 0$ 。这点具有重要的实际意义, 如在做小尺度数值预报时, 短波很重要, 则不能采用静力近似。

4. 罗斯贝波

这种波动主要由柯氏参量 f 随纬度的变化而产生出来的。这种波动是一种正压无辐散的水平运动, 其主要特征为:

$$\textcircled{1} \quad w \equiv 0 \quad (\text{无垂直运动})$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{无辐散})$$

所以可以定义流函数

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\textcircled{3} \quad \rho = \rho(p) = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (\text{正压流体})$$

所以有

$$\frac{1}{\rho} \nabla_h p = \nabla_h P$$

其中
$$P = \frac{p_0^\alpha p^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha)\rho_0} = \frac{p}{(1-\alpha)\rho}$$

④ β 平面近似

令基本状态为西风气流 u ，扰动由如下方程组来描述

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u' - f v' = - \frac{\partial P'}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) v' + f u' = - \frac{\partial P'}{\partial y} \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

因而涡动方程可写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta' + \beta v' = 0 \quad (2-94)$$

其中
$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \nabla_h^2 \psi'$$

$$v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad u' = - \frac{\partial \psi'}{\partial y}$$

所以得到波动方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla_h^2 \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (2-95)$$

令它有如下形式的平面波解

$$\psi' = A e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}$$

将它代入(2-95)式，得到罗斯贝波的频率公式为

$$\omega = u k_1 - \frac{\beta k_1}{k_1^2 + k_2^2} \quad (2-96)$$

二、各种波动的群速与相速间的关系

大气波动的矢量相速 c_{ph} 与群速 c_g 由下面两式给出，

$$c_{ph} = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{K^2} K \quad (2-97)$$

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial K} = i \frac{\partial \omega}{\partial k_1} + j \frac{\partial \omega}{\partial k_2} + k \frac{\partial \omega}{\partial m} \quad (2-98)$$

其中 $K = ik_1 + jk_2 + km$ 为三维波数矢量。由(2-97)可知 c_{ph} 与 K 方向相同, 而 c_g 是垂直于曲面“ $\omega = \text{常数}$ ”的方向。我们很容易在 $m-k$ 图上确定 c_{ph} 与 c_g 的方向。例如在图 2-4 中可以看出, 对于声波, c_g 与 c_{ph} 取同一方向; 对于惯性-重力波, c_g 与 c_{ph} 相互垂直。

我们知道, 相速 c_{ph} 是波动的传播速度; 而群速 c_g 表示波动能量的传播速度。大气中各种不同波动相速与群速之间具有不同的关系, 我们可把它作为波动的一个特征, 也可以根据这种不同关系对大气波动进行分类。

1. 纯声波

对于纯声波, 由(2-52)式可得

$$\omega = Kc, \quad K = (k_1^2 + k_2^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2-99)$$

将上式代入(2-97)式得到相速为

$$c_{ph} = c \frac{K}{K} \quad (2-100)$$

其中 $c = \sqrt{\gamma RT}$ 。将(2-99)式代入(2-98)式得到

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial K} = c \frac{K}{K} = c_{ph} \quad (2-101)$$

也就是说, 纯声波的群速与相速相同。

2. 纯重力内波

纯重力内波中, $f = 0$, 它的频率由(2-88)式给出, 令 $\lambda_1 = 1$, 则有

$$\omega = \frac{Nk}{K}$$

代入相速公式(2-97)得到

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{Nk}{K^3} \cdot K \quad (2-102)$$

其分量形式为

$$\begin{cases} c_{ph,x} = c_{ph} \frac{k_1}{K} = \frac{Nkk_1}{K^3} \\ c_{ph,y} = c_{ph} \frac{k_2}{K} = \frac{Nkk_2}{K^3} \\ c_{ph,z} = c_{ph} \frac{m}{K} = \frac{Nkm}{K^3} \end{cases} \quad (2-103)$$

这里 $c_{ph,x}$, $c_{ph,y}$, $c_{ph,z}$ 分别为 c_{ph} 在 x, y, z 轴上的投影。

将波动频率公式代入(2-101)式,可得群速的分量形式为

$$\begin{cases} c_{g,x} = \frac{\partial \omega}{\partial k_1} = \frac{Nm^2k_1}{K^3k} = \frac{m^2}{k^2} c_{ph,x} \\ c_{g,y} = \frac{\partial \omega}{\partial k_2} = \frac{Nm^2k_2}{K^3k} = \frac{m_2}{k^2} c_{ph,y} \\ c_{g,z} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \frac{-Nkm}{K^3} = -c_{ph,z} \end{cases} \quad (1-104)$$

由(2-103)与(2-104)两式可得

$$c_{ph} \cdot c_g = 0 \quad (2-105)$$

(2-104)与(2-105)两式概括了重力内波相速与群速相互关系的特征:

- ① 相速 c_{ph} 与群速 c_g 相互正交;
- ② 群速与相速的水平分量方向相同,垂直分量方向相反。

3. 纯惯性波

纯惯性波中 $N=0$, 其频率方程为

$$\omega = \frac{fm}{K} \quad (2-106)$$

代入相速公式(2-97)式,可得纯惯性波相速的分量形式为

$$\begin{cases} c_{ph,z} = \frac{f m k_1}{K^3} \\ c_{ph,y} = \frac{f m k_2}{K^3} \\ c_{ph,x} = \frac{f m^2}{K^3} \end{cases} \quad (2-107)$$

将(2-106)式代入群速公式(2-98),可得群速的分量形式为

$$\begin{cases} c_{g,z} = -\frac{f m k_1}{K^3} = -c_{ph,z} \\ c_{g,y} = -\frac{f m k_2}{K^3} = -c_{ph,y} \\ c_{g,x} = \frac{f k^2}{K^3} = \frac{k^2}{m^2} c_{ph,x} \end{cases} \quad (2-108)$$

由(2-107)与(2-108)可得

$$\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{c}_{ph} = 0 \quad (2-109)$$

由(2-108)与(2-109)可得到纯惯性波相速与群速间关系有如下两个特点:

- ① \mathbf{c}_{ph} 与 \mathbf{c}_g 相互正交;
- ② 相速与群速的垂直分量方向相同,水平分量方向相反。

4. 混合波(惯性-重力内波)

考虑地球转动,大气又是稳定层结时, $N \neq 0$, $f \neq 0$, 此波称为混合波。这种波动是兼具惯性波和重力内波的性质呢? 还是在某种条件下具惯性波的特征,而在另外条件下具有重力内波的状态呢?

我们先作分析。由(2-90)式(假定 $\lambda_1 = 1$)可得混合波的频率为

$$\omega = \frac{(N^2 k^2 + f^2 m^2)^{\frac{1}{2}}}{K} = G_1 K^2 \quad (2-110)$$

这里 $G_1 = \frac{\omega}{K^2} = \frac{(N^2 k^2 + f^2 m^2)^{\frac{1}{2}}}{K^3} > 0$

将(2-110)式代入相速公式(2-97)可得

$$c_{ph} = \frac{(N^2 k^2 + f^2 m^2)^{\frac{1}{2}}}{K^3} K \quad (2-111)$$

其分量形式为

$$\begin{cases} c_{ph, x} = G_1 k_1 \\ c_{ph, y} = G_1 k_2 \\ c_{ph, z} = G_1 m \end{cases} \quad (2-112)$$

将(2-110)式代入群速公式(2-98)可得其分量形式为

$$\begin{cases} c_{g, x} = G_2 k_1 m \\ c_{g, y} = G_2 k_2 m \\ c_{g, z} = -G_2 k^2 \end{cases} \quad (2-113)$$

$$\text{这里} \quad G_2 = \frac{(N^2 - f^2)m}{K^3 (N^2 k^2 + f^2 m^2)^{1/2}} \quad (2-114)$$

由(2-112)与(2-113)两式可得

$$c_g \cdot c_{ph} = 0$$

我们分两种情况讨论相速与群速间关系的特征:

① $N^2 > f^2$ (即 $G_2 > 0$)

由(2-112)与(2-113)两式可知,相速与群速的水平分量同向,而垂直分量异向。说明这种波动呈现重力内波的性质($N^2 > f^2$)。

② $N^2 < f^2$ (即 $G_2 < 0$)

由(2-112)与(2-113)两式可知,相速与群速的垂直分量同向,而水平分量异向。说明这种波动在 $N^2 < f^2$ 的情况下呈现惯性波的性质。

例:我们讨论一下背风波,即由气流经过大地形激发出来的惯性-重力内波的特性。

设想均匀气流 u 越过南北向山脉。在静力稳定的条件下,当空气被迫越过山峰移动到山脉的背风坡时,个别空气块便将离开其平衡位置作浮力振荡;加上地球转动的影响,使在山脉的背风坡,形成一个相对于地面静止的惯性-重力内波系统。如果与这种波动相联系的垂直运动足够强,而且水汽又充足,那么,在振荡中上

升气流部分将出现凝结现象，因而产生波状云。这种云在南北向很宽的山脉东侧经常出现。

由于基本气流是自西向东的，而这种波动的形状不变，所以波动传播方向一定是自东向西(与 u 相反)，抵销 u 的作用。令 c_x 为 x 方向的相速，我们有

$$c_x + u = 0 \tag{2-115}$$

所以这种波动以 $c_x = -u$ 的速度向西传播。由于能量是由气流通过这个山脉激发出来的，所以山脉就是激发波动的能源。由此可知，能量向上传播，即 c_y 有向上的分量。

综上所述，相速有自东向西的分量，群速有向上的分量。而由于对惯性-重力内波来说： $N^2 > f^2$ 呈现重力内波的性质； $N^2 < f^2$ 呈现惯性波的性质。所以分别这两种情况，Lee 波的形状也不一样。当 $N^2 > f^2$ 时， c_y 与 c_{ph} 的垂直分量相反，水平分量相同，所以

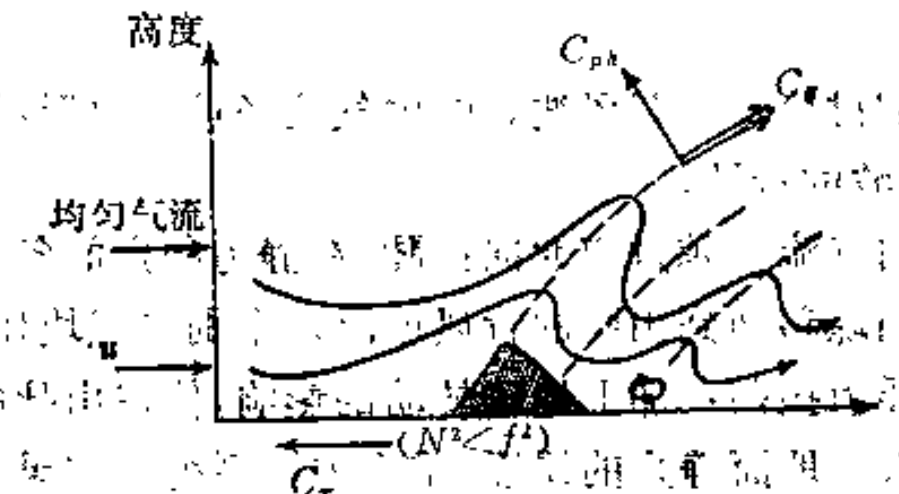
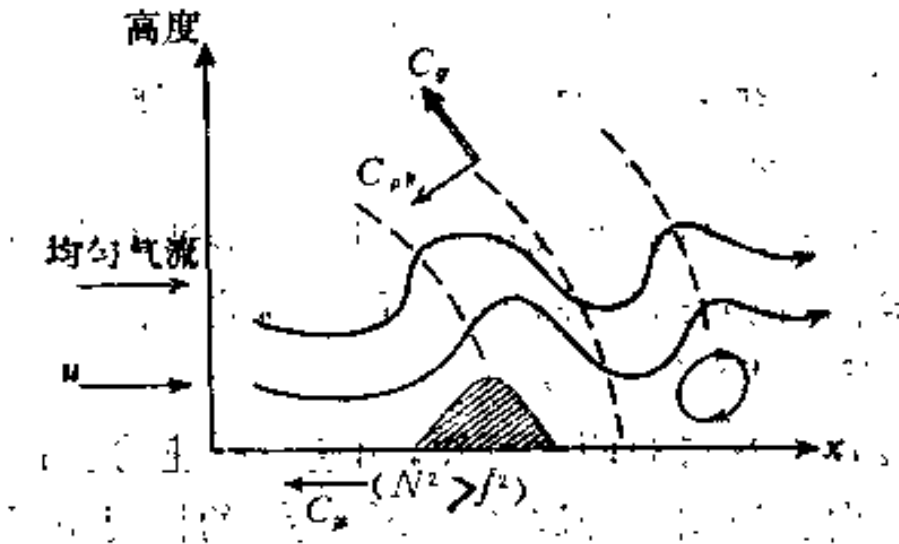


图 2-9 均匀气流通过大地形时激发出重力-惯性内波

等位相线随高度是向西倾斜的；当 $N^2 < f^2$ 时， c_g 与 c_{ph} 的垂直分量相同，水平分量相反，所以等位相线随高度是向东倾斜的。（由图 2-9 所示）

5. 罗斯贝波

在给出罗斯贝波相速与群速的关系之前，我们介绍沿坐标轴的相速概念。若 ω 为波动频率，则令

$$\begin{cases} c_x = \frac{\omega}{k_1} = \frac{K^2}{k_1^2} c_{ph,x} \\ c_y = \frac{\omega}{k_2} = \frac{K^2}{k_2^2} c_{ph,y} \\ c_z = \frac{\omega}{m} = \frac{K^2}{m^2} c_{ph,z} \end{cases} \quad (2-116)$$

分别为沿 x, y, z 轴的相速。从定义式中可以看出， c_x, c_y, c_z 与相速 c_{ph} 在 x, y, z 轴上的分量 $c_{ph,x}, c_{ph,y}, c_{ph,z}$ 是不同的。它们间的差别可由图 2-10 表示出来。图中所示的是二维流场。设想波阵面 \widehat{OO} 经过单位时间 ($\tau = 1$) 传播到波阵面 $\widehat{O'O'}$ 。图中 $\overline{AA'}$ 是波矢 k 的方向。由于两波阵面间时间间隔相差一个单位，所以 $\overline{AA'} = c_{ph}$ 。 \overline{AB} 平行于 x 轴， \overline{AC} 平行于 y 轴，所以 $\overline{AB} = c_x$ ， $\overline{AC} = c_y$ 。因为 k 垂直波阵面，所以一般而言， $c_x > c_{ph,x}$ ， $c_y > c_{ph,y}$ 。而 $c_{ph,x}$ 与 $c_{ph,y}$ 是 c_{ph} 在 x, y 轴上的投影，在图 2-10 中由 $\overline{AB_1}$ 与 $\overline{AC_1}$ 所示。由此可见 $c_{ph,x}$ 与 c_x ， $c_{ph,y}$ 与 c_y 是相差很远的，它们的比

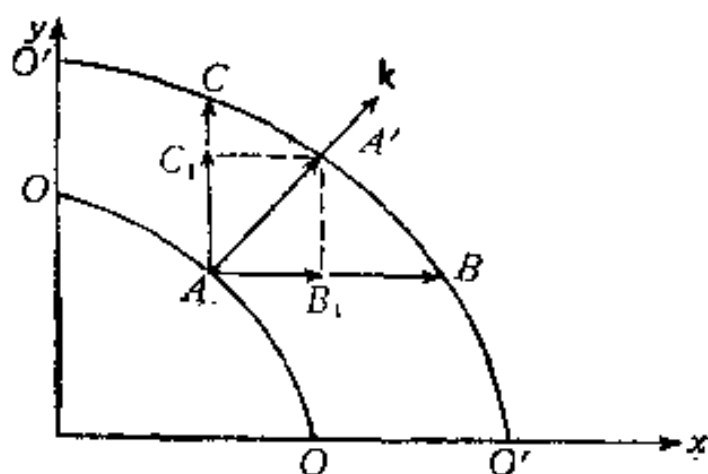


图 2-10 相速、沿坐标轴相速与相速在坐标轴上的分量

例如(2-116)所示。

罗斯贝波的频率由(2-96)式所示,代入(2-116)式可得沿 x 轴与沿 y 轴的相速如下:

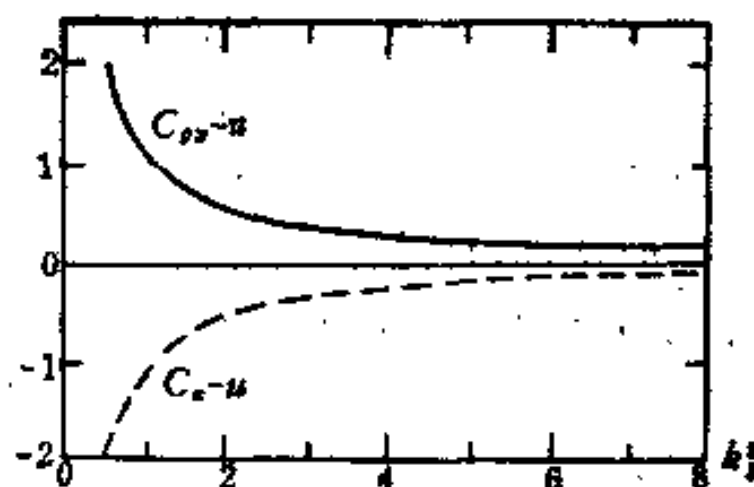
$$c_x = u - \frac{\beta}{k^2} \quad (2-117)$$

$$c_y = \frac{k_1}{k_2} \left(u - \frac{\beta}{k^2} \right) = \frac{k_1}{k_2} c_x \quad (2-118)$$

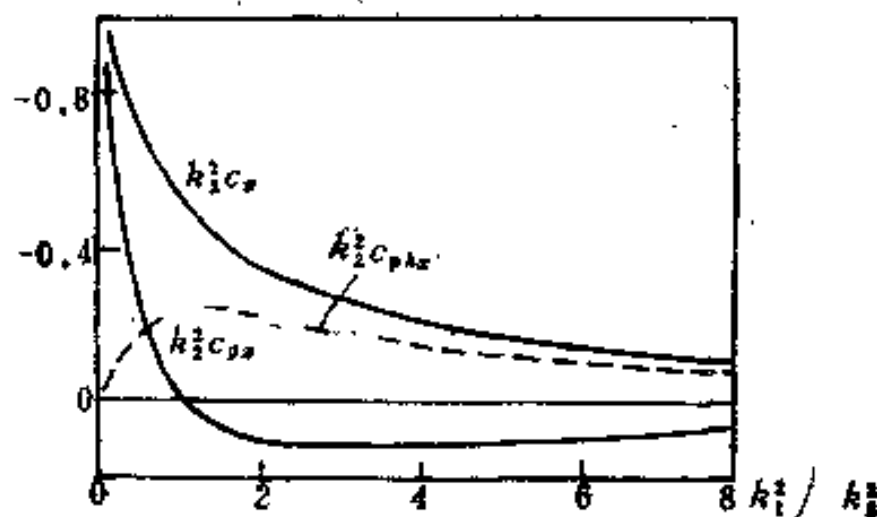
$c_x > 0$ 表示波动向东传播,反之表示波动向西传播。

将(2-96)式代入(2-98)式可得群速的分量形式

$$c_{gx} = u - \frac{\beta}{k^4} (k_2^2 - k_1^2) \quad (2-119)$$



(a) $k_2 = 0$ (即 $L_2 = \infty$) + 表示向东



(b) $k_2 \neq 0$ $u = 0$

图 2-11 罗斯贝波相速与群速的关系

$$c_{gv} = \frac{2\beta k_1 k_2}{k^4} \quad (2-120)$$

当 $k_1^2 > k_2^2$ 时, $c_{gv}-u$ 是指向东方的, 与 c_x-u 的方向相反。

当 $k_1^2 < k_2^2$ 时, $c_{gv}-u$ 是指向西方的, 与 c_x-u 的方向相同。

罗斯贝波群速与通用相速及矢量相速投影的关系可由图 (2-11) 所示。从该图 (a) 中可见, 当 $k_2 = 0$ 时, 波动能量向东传播得比 u 快; 而波动向东传播比 u 慢。从该图 (b) 中可知, 对于短波, c_{gx} 向东传播; 对于长波, c_{gx} 向西传播 (注意图 2-11 (b) 中基本气流为零)。所以短波系统常在下游产生新的扰动。

(2-120) 式表明, 如等位相线对西风带讲为导式时, 即 k_1 与 k_2 同符号, 因此等位相线呈东南到西北向时, 则罗斯贝波将波动能量自南向北传播。如 k_1 与 k_2 异号, 即等位温线呈西南到东北向的曳式波时, 则罗斯贝波将波动能量自北向南传播。

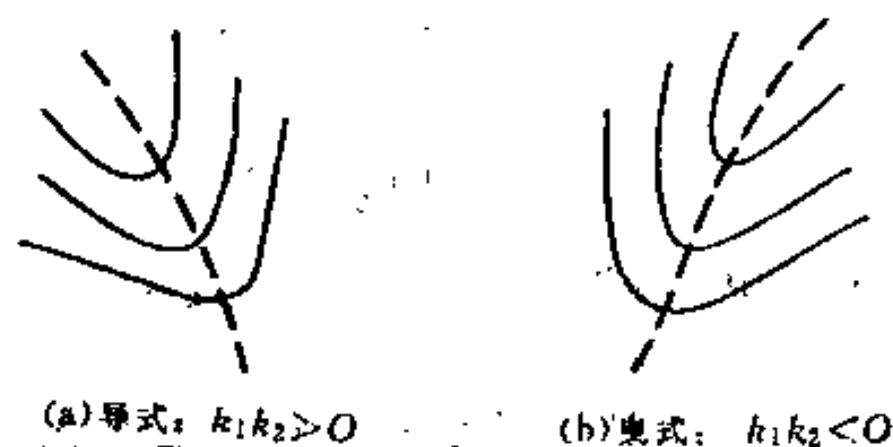


图 2-12 西风带等位相线的型式

参 考 文 献

Eckart, Carl, (1960). *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres*, pergamon press, New York, New York, 290 pp.

Kuo, H.L. (1977). *Pure and Appl. Geophys.* 115 (4), 915-936.

第三章 涡 动 理 论

由于地球旋转的缘故,使旋转系中的流体(如地球上的大气及海洋),除了产生普通波动外,还产生大大小小的以涡旋场为主的运动,如台风、气旋、反气旋等都是大气中较大的涡旋。本章介绍旋转系流体的涡动理论,并以富有热力活动的大气为对象。我们首先从涡度方程出发,推得多种形式的位涡方程;再利用绝对位涡守恒方程讨论非均匀加热与大地形对大气大尺度运动的作用;最后介绍准地转位涡方程。

§1 涡 度 方 程

一、涡度方程的推导

在旋转坐标系中,我们把速度矢量 \mathbf{v} 的旋度

$$\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (3-1)$$

定义为相对涡度,简称涡度。涡度 \mathbf{q} 是个矢量,它的三个分量为 q_x 、 q_y 、 q_z 。在气象学中主要考虑涡度的垂直分量,有时也常将它称为涡度,用 ζ 表示,即

$$q_z = \zeta$$

令 ϕ 为重力位势,它由下式定义

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} = -\nabla\phi \quad (3-2)$$

即

$$\phi = gz \quad (3-3)$$

我们把摩擦力采用纳维-斯托克斯形式〔见(1-12)式〕,重力用位势形式表示;并将由传运所产生的速度变率项写为

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{q} \quad (3-4)$$

因而在转动坐标系中, 运动方程的矢量形式可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega}) = & -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(-\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \phi \right. \\ & \left. + \frac{2\mu}{3\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3-5)$$

注意这里 \mathbf{v} 是三维流场, 即

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

为推导涡度方程, 常要利用如下 4 个矢量分析中的公式:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (3-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (3-7)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (\boldsymbol{\Omega} \text{ 为常矢量}) \quad (3-8)$$

$$\nabla \times (\nabla e) = 0 \quad (e \text{ 为标量}) \quad (3-9)$$

我们将 $\nabla \times ()$ 的运算作用于(3-5)式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \nabla \times [\mathbf{v} \times (\mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega})] = & -\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) - \\ & -\nabla \times \nabla \left(-\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \phi + \frac{2\mu}{3\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \nabla \times \left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (3-10)$$

为了求得上式左边第二项, 令

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{Q} = \mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega} \\ e_1 = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \phi + \frac{\mu}{3\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad e_2 = p \end{cases} \quad (3-11)$$

式中 \mathbf{Q} 称为绝对涡度。由(3-7)与(3-8)两式可得

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = \nabla \cdot (\mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad (3-12)$$

利用(3-6)式与(3-11)式可得

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times (\mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega})] = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{Q}) - \mathbf{Q}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q} + (\mathbf{Q} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (3-13)$$

由(3-12)式得到

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times (\mathbf{q} + 2\boldsymbol{\Omega})] = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q} - \mathbf{Q}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{Q} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (3-14)$$

利用(3-9)与(3-14)两式, 将(3-10)式化为

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q} + \mathbf{Q}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{Q} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{q} \quad (3-15)$$

这里 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 作为常数。

$$\text{令} \quad \mathbf{n} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p \quad (3-16)$$

\mathbf{n} 为密度与气压组成的力管项。考虑

$$\frac{d}{dt} \dots = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

(3-15)式可写成如下的形式

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \mathbf{Q}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{Q} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{n} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3-17)$$

上式项数太多, 不容易进行讨论, 得出结果, 所以需作进一步的演算。

考虑连续方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3-18)$$

将 $\frac{1}{\rho}$ 乘(3-17)式加上 \mathbf{Q} 乘(3-18)式, 然后相加得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{Q}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{Q}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \frac{\mathbf{n}}{\rho} + \frac{\nu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{q} \quad (3-19)$$

这就是我们所要求的涡度方程。有的学者也将(3-17)式称为涡度方程。

二、一些简单结论

为了对涡度方程(3-19)式进行讨论, 我们考虑如下特殊情况,

① 正压无摩擦流动,即

$$\rho = \rho(p), \quad \nu = 0 \quad (3-20)$$

由 $\rho = \rho(p)$ 可推出

$$n = 0$$

② 考虑 xy 平面内的纯二维流动,即

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (3-21)$$

并且考虑二维速度 \mathbf{v} 不随高度而变化的特殊情形,也就是

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0 \quad (3-22)$$

所以绝对涡度取如下近似形式:

$$\mathbf{Q} = \zeta \mathbf{k} \quad (3-23)$$

这时

$$(\mathbf{Q} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \zeta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0 \quad (3-24)$$

由(3-20)与(3-24)两式的结论,可将(3-19)式化为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{Q}}{\rho} \right) = 0 \quad (3-25)$$

因此,对于任一个空气块来讲, $\frac{\mathbf{Q}}{\rho}$ 在纯水平流动中是守恒的。

如果参考系是惯性系,即

$$\boldsymbol{\Omega} = 0$$

那么(3-25)式则可写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{\rho} \right) = 0 \quad (3-26)$$

根据上式我们可以得到这样的结论:凡正压无摩擦二维运动的流体,若其初始时刻无旋(即 $t = 0$ 时, $\mathbf{q} = 0$),将永远保持无旋。

三、泰勒-普拉特曼(Taylor-Proudman)效应

1. 泰勒-普拉特曼效应的由来

对于均匀无摩擦流体的缓慢定常运动（并不限于水平运动），下面一些关系式成立：

$$\rho = \text{常数}, \quad v = 0 \quad (\text{均匀无摩擦}) \quad (3-27)$$

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial t} = 0, \quad (\quad) \text{为任一变量。} (\text{定常运动}) \quad (3-28)$$

$$q \ll 2\Omega \quad (\text{缓慢运动}) \quad (3-29)$$

并假定地球旋转角速度是个常矢量，即

$$\Omega = \text{常矢量}$$

由于流体处于定常运动，下式成立

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial q}{\partial t} + (v \cdot \nabla)Q = (v \cdot \nabla)q \quad (3-30)$$

根据流体的均匀性(3-27)式可得

$$n = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p = 0 \quad (3-31)$$

由以上各式，可将(3-19)式化为

$$\frac{dQ}{dt} = (Q \cdot \nabla)v = (2\Omega \cdot \nabla)v \quad (3-32)$$

由(3-30)式可得

$$(v \cdot \nabla)q = (2\Omega \cdot \nabla)v \quad (3-33)$$

对于缓慢运动来讲， v 是个小量。上式的右边是关于 v 的1阶小量，而左边却是关于 v 的2阶小量。所以(3-33)式又可简化为

$$(\Omega \cdot \nabla)v = 0 \quad (3-34)$$

由此导出著名的泰勒-普拉特曼效应：“在均匀无摩擦流体的缓慢定常运动中，流体运动速度在其旋转方向上大致保持不变。”

这个效应可由泰勒实验进行验证。

2. 泰勒实验

泰勒设计了如下的实验：在圆柱形容器中注满均质流体（如水），并将容器放在一个转盘上，使其绕中心轴旋转，角速度为 Ω 。

在容器的底部放一块小物体，这块小物体能不断释放出烟粒或其他染色微粒。整个实验装置如图 3-1 所示。

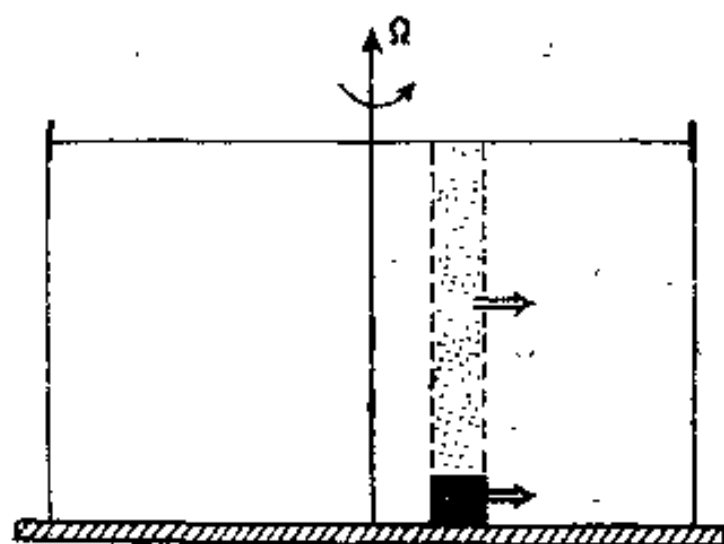


图 3-1 泰勒实验的示意图

设法使物体相对于流体在水平方向有相对运动。利用直接观测或照像的方法可发现此物体上面流体柱按如下规律运动：

① 当流体不旋转，($\Omega = 0$)，水平方向缓慢移动物体时，物体上方的流体并不随物体运动。

② 当流体旋转，($\Omega \neq 0$)，水平方向上以速度 v 缓慢移动小物体时，该物体上方的流体柱以同样速度移动。这时，该流体柱就如同固体一样运动。

这个实验结果证实泰勒-普拉特曼效应，即证明(3-34)式的准确性。

§ 2 郭晓岚广义位涡方程

一、推导线涡方程的目的

由涡度方程(3-19)式，绝对涡度与密度的比值的个别时间变化是由如下一些因素造成的：

① 大气斜压作用 $\frac{\mathbf{n}}{\rho}$

② 摩擦作用 $\frac{\nu}{\rho} \nabla^2 q$

③ 非均匀流场的旋转效应 $\left(\frac{\mathbf{Q}}{\rho} \cdot \nabla\right) \mathbf{v}$

其中最后一项在实际工作中难以应用。这是因为在一般情况下,不容易对此项进行讨论;只有在本章 § 1 所述泰勒-普拉特曼效应那样简单条件下,才能进行讨论而得出较明确的物理结果来。所以我们必须对(3-19)式进行改造,得到物理意义更为明确,便于讨论的形式,这就是位涡方程。

二、矢量的“梯度”

任一矢量

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

的“梯度”表示为并矢的形式,并矢是一个二阶张量。也就是

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{B} = & \frac{\partial B_x}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{i} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{j} + \frac{\partial B_z}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{k} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{i} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{j} + \\ & + \frac{\partial B_z}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{k} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{i} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{j} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3-35)$$

写成矩阵形式是

$$\nabla B = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

任一矢量

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

与基底并矢的点乘规则如下:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{i}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i}, \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{j}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j}, \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{k}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \cdots \quad (3-37)$$

$$(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{i}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{A}), \quad (\mathbf{j}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{j}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}), \quad (\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) \cdots \quad (3-38)$$

由以上两式可知, 矢量左乘并矢与右乘并矢的结果不一样的。

\mathbf{A} 右点乘 $\nabla \mathbf{B}$ 可得

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{i} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{j} + \frac{\partial B_z}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{k} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{i} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial B_y}{\partial z} \mathbf{j} \mathbf{k} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{i} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{j} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{k} \right) \cdot \\ &\quad \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} A_x + \frac{\partial B_y}{\partial x} A_y + \frac{\partial B_z}{\partial x} A_z \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} A_x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial B_y}{\partial y} A_y + \frac{\partial B_z}{\partial y} A_z \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} A_x + \frac{\partial B_y}{\partial z} A_y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial B_z}{\partial z} A_z \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3-39)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} A_x + \frac{\partial B_y}{\partial x} A_y + \frac{\partial B_z}{\partial x} A_z \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} A_x + \frac{\partial B_y}{\partial y} A_y + \frac{\partial B_z}{\partial y} A_z \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} A_x + \frac{\partial B_y}{\partial z} A_y + \frac{\partial B_z}{\partial z} A_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-40)$$

A 左点乘 $\nabla \mathbf{B}$ 可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{i} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{j} + \frac{\partial B_z}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{k} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{i} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{j} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{k} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{i} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial B_y}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{j} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{k} \right) = \\
 &= \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + \right. \\
 &\quad \left. + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \right. \\
 &\quad \left. + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \quad (3-41)
 \end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) &= [A_x \ A_y \ A_z] \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3-42)
 \end{aligned}$$

比较(3-39)与(3-41)、(3-40)与(3-42)可以发现

$$(\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \neq \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) \quad (3-43)$$

三、郭晓岚广义位涡方程

在推导位涡方程时,需利用热力学第一定律。对于有热作用的

流体来说, 其比熵为:

$$s = c_p \ln \theta + \text{常数} \quad (3-44)$$

所以热流量方程(1-18)式可写成

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = \frac{\dot{Q}}{T} \quad (3-45)$$

式中 \dot{Q} 为单位质量流体的加热率。对(3-45)式两边施以梯度运算, 得到

$$\frac{\partial \nabla s}{\partial t} + \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla s) = \nabla \left(\frac{\dot{Q}}{T} \right) \quad (3-46)$$

利用并矢的运算规律, 我们有如下关系式

$$\nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla s) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla s + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \nabla s \quad (3-47)$$

将(3-47)式代入(3-46)式得到

$$\frac{\partial \nabla s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla s + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \nabla s = \nabla \left(\frac{\dot{Q}}{T} \right) \quad (3-48)$$

令 s 是 p 与 ρ 的函数, 即 $s = s(p, \rho)$, 则有

$$\nabla s = \frac{\partial s}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial s}{\partial \rho} \nabla \rho \quad (3-49)$$

∇s 与力管项 \mathbf{n} 是正交的, 即

$$(\nabla s) \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial s}{\partial \rho} \nabla \rho \right) \cdot \left[\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p \right] = 0 \quad (3-50)$$

将 ∇s 点乘涡度方程(3-19)式, $\frac{\mathbf{Q}}{\rho}$ 点乘(3-48)式, 然后相加, 并利用(3-50)式的结果可得郭晓岚广义位涡方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla s}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla s \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla \mathbf{q})] + \frac{\mathbf{Q}}{\rho} \cdot \nabla \left(\frac{\dot{Q}}{T} \right) \quad (3-51)$$

式中 $\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla s}{\rho}$ 定义为绝对位涡, 右端 $\frac{1}{\rho} \nabla s \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla \mathbf{q})]$ 表示摩擦作

用, 而 $\frac{Q}{\rho} \cdot \nabla \left(\frac{\dot{Q}}{T} \right)$ 为非均匀加热作用, 它是运动方程、连续方程与热流量方程的综合。

由(3-51)式可得如下厄台尔(Ertel)位涡定理。

厄台尔位涡定理:

绝热、无摩擦流体的绝对位涡守恒。即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Q \cdot \nabla s}{\rho} \right) = 0 \quad (3-52)$$

由于上式仅表示在绝热无摩擦流动中, 绝对位涡的个别时间变化为零, 所以对于通常非地转流动, 单独使用(3-52)与单独使用绝热方程一样, 并不能给出流场。然而上式能作为诊断分析的工具。由厄台尔位涡定理知道流体在运动过程中绝对位涡保持不变, 我们可以从连续几张天气图上从绝对位涡的分布中了解到流体是从什么地方运动过来的, 它将向哪个方向移动, 由此可作出预报。

§ 3 位涡方程的简化及其应用

一、绝对位涡的简化形式

考虑具有较高理查逊(Richardson)数的稳定层结及大尺度流场中(如通常情况下的大气与海洋)绝对位涡的简化形式。

在大气中, Brunt-Väisälä 频率

$$N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}$$

(θ_0 为位温的平而平均值)代表垂直方向的扰动频率, 它是随高度而变化的:

对流层中
平流层中

$$N^2 \approx 1 \times 10^{-4} \text{秒}^{-2}$$

$$N^2 \approx 5 \times 10^{-4} \text{秒}^{-2}$$

全球大气平均起来 $N^2 \approx 1 \sim 2 \times 10^{-4} \text{秒}^{-2}$
而风随高度变化率的数量级为

$$\frac{\partial v}{\partial z} \approx 1 \sim 2 \times 10^{-3} \text{秒}^{-1}$$

由此得出理查逊数的量级为

$$R_i = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \cong 50 \sim 100 \gg 1 \quad (3-53)$$

现在先来简化绝对涡度 \mathbf{Q} 的水平分量 \mathbf{Q}_h ，即简化

$$\mathbf{Q}_h = 2\Omega \cos\varphi \mathbf{j} + \mathbf{k} \times \left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} - \nabla_h w \right) \quad (3-54)$$

式中

$$\begin{cases} 2\Omega \cos\varphi \sim 10^{-4} \text{秒}^{-1} \\ \frac{\partial v_h}{\partial z} \sim 10^{-3} \text{秒}^{-1} \\ |\nabla_h w| \ll \left| \frac{\partial v_h}{\partial z} \right| \end{cases} \quad (3-55)$$

上式中第三个式子是由于如下两个原因造成的：

① 垂直速度 w 远小于水平速度 v_h ，即

$$w \ll v_h$$

② 水平方向的变化 $\nabla_h(\quad)$ 又比垂直方向的变化 $\frac{\partial(\quad)}{\partial z}$ 要小。

由(3-55)式可知，(3-54)式中右端 $\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z}$ 要比其他项的数值大得多，所以绝对涡度的水平分量可简化为

$$\mathbf{Q}_h \cong \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} \quad (3-56)$$

由热成风关系，可将上式进一步化为

$$Q_h \cong -\frac{g}{f\theta} \nabla_h \theta \quad (3-57)$$

下面我们利用通常理查逊数远大于1.0公律来简化绝对位涡。绝对位涡可写为：

$$\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla s}{\rho} = \frac{c_p}{\rho\theta} \left[Q_s \frac{\partial \theta}{\partial z} + Q_h \cdot \nabla_h \theta \right] \quad (3-58)$$

利用(3-57)式，上式便化为

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla s}{\rho} &= \frac{c_p}{\rho} \left[\frac{f+\zeta}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{f}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{c_p}{\rho} \frac{f+\zeta}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[1 - \frac{f}{f+\zeta} \frac{1}{R_i} \right] \end{aligned} \quad (3-59)$$

由(3-53)式可得简化的绝对位涡：

$$\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla s}{\rho} \cong \frac{c_p}{\rho\theta} (f+\zeta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3-60)$$

二、绝对位涡的物理意义

我们根据简化形式的绝对位涡〔即(3-60)式〕来讨论其物理意义。对于没有外来加热(即绝热过程)的可压缩流体，等位温面定常，即原来在等位温面上的流体质点，以后一直在该等位温面上。也就是说可以把等位温面看成物质面。

由于大尺度运动存在静力平衡关系，绝热过程中 θ 为常数，所以有

$$\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla s}{\rho} \cong \frac{c_p}{\rho\theta} (f+\zeta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \sim \frac{f+\zeta}{\rho \frac{\Delta z}{\Delta \theta}} = \frac{f+\zeta}{\frac{\Delta p}{\theta_2 - \theta_1}} \quad (3-61)$$

式中 Δp 为两等位温面间的气压差，如图3-2所示。

由于 $\theta_2 - \theta_1$ 是常数, 所以有

$$\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla s}{\rho} \sim \frac{f + \zeta}{\Delta p} \quad (3-62)$$

这里 Δp 可看为两等位温面间, 用气压差表示的垂直距离。

所以实质上位涡在某些方面总是绝对涡度与涡度有效厚度比值的一个度量。

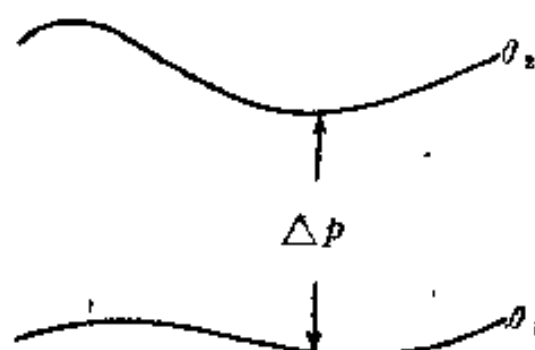


图 3-2 两等位温面间的垂直“距离”

三、位涡方程的简化形式

将(3-60)式代入(3-51)式可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f + \zeta}{\rho \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} v \nabla^2 \zeta + \frac{f + \zeta}{c_p \rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{Q}}{T} \right) \quad (3-63)$$

在 p 坐标中, 上式可写为

$$\frac{d}{dt} \left[(f + \zeta) \frac{\partial \theta}{\partial p} \right] = v \frac{\partial \theta}{\partial p} \nabla^2 \zeta + \frac{f + \zeta}{c_p} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q} \theta}{T} \right) \quad (3-64)$$

采用位温微扰的假定, 即

$$\theta = \theta_0(p) + \theta'(x, y, p, t), \quad \theta' \ll \theta_0 \quad (3-65)$$

式中 $\theta_0(p)$ 为平均位温的垂直分布。

将(3-64)式左边乘积对 t 的微分进行展开, 并将不在微分号下的 $\frac{\partial \theta}{\partial p}$ 近似地用 $\frac{\partial \theta_0}{\partial p}$ 来代替, 得到

$$\frac{d}{dt} (f + \zeta) + \frac{f + \zeta}{\frac{\partial \theta_0}{\partial p}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) = v \nabla^2 \zeta + \frac{f + \zeta}{c_p \frac{\partial \theta_0}{\partial p}} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q} \theta}{T} \right) \quad (3-66)$$

对于绝热无摩擦流体来说, 有

$$-\frac{d}{dt}\left[(f+\zeta)\frac{\partial\theta}{\partial p}\right]=0 \quad (3-67)$$

四、由简化位涡方程得出的定性结果

我们主要讨论非均匀加热与大地形对大气大尺度运动的作用。

1. 垂直方向上非均匀加热的影响

位温对气压的偏导数 $\frac{\partial\theta_0}{\partial p}$ 能表示大气垂直稳定度,我们有

$\frac{\partial\theta_0}{\partial p} < 0$, 则层结稳定, 且 $\left|\frac{\partial\theta_0}{\partial p}\right|$ 越大, 稳定度也越大;

$\frac{\partial\theta_0}{\partial p} > 0$, 则层结不稳定, 且 $\left|\frac{\partial\theta_0}{\partial p}\right|$ 越大, 不稳定度也越大。

$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dot{Q}\theta}{T}\right)$ 表示垂直方向上的非均匀加热性, 由于 p 是随高度减小的, 所以我们有

$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dot{Q}\theta}{T}\right) > 0$, 表示大气下层比上层加热快;

$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dot{Q}\theta}{T}\right) < 0$, 表示大气上层比下层加热快。

所以 $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dot{Q}\theta}{T}\right) > 0$, 会减小静力稳定度, 即使原来稳定的层结变得不太稳定, 也就是使两等位温面间的距离增大, 从而使 $\left|\frac{\partial\theta}{\partial p}\right|$ 小, 如图 3-3 所示。

大气上层比下层加热快, 即 $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\dot{Q}\theta}{T}\right) < 0$ 会得到相反的效应。

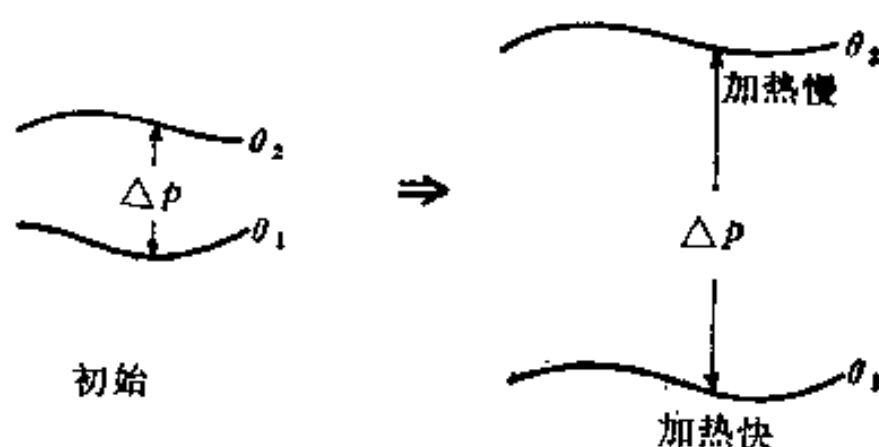


图 3-3 $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q}_T \theta}{T} \right) > 0$ 增大两等位温面的距离

考虑在初始时刻($t = 0$)大气垂直方向有非均匀加热, $t > 0$ 系统保持绝热、无摩擦。问大气运动状态有什么变化?

根据(3-67)式, $(f + \zeta) \frac{\partial \theta}{\partial p}$ 是个守恒量。所以初始时刻

$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q}_T \theta}{T} \right) > 0$ 会减小静力稳定度。即使初始时刻稳定层结(即 $\frac{\partial \theta_0}{\partial p} < 0$)的稳定度减小,即 $\left| \frac{\partial \theta}{\partial p} \right|$ 必须减小,由此 ζ 必须增加。相反,对于初始时刻, $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q}_T \theta}{T} \right) < 0$, 会使 ζ 减小。

反,对于初始时刻, $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q}_T \theta}{T} \right) < 0$, 会使 ζ 减小。

这样我们得到初始时刻垂直方向上非均匀加热影响大气运动状态的二点定性结论:

① 初始时刻 $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q}_T \theta}{T} \right) > 0$, 能使大气变得层结相对不稳定, 并使相对涡度 ζ 增大。

② 初始时刻 $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q}_T \theta}{T} \right) < 0$, 能使大气变得层结稳定, 并使相对涡度 ζ 减小。

如由(3-64)式直接推论, 则应该

$$-\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q}\theta}{T} \right) \geq 0$$

的直接影响是使 $(f + \zeta) \frac{\partial \theta}{\partial p}$ 的负值变小, 但它使 $\frac{\partial \theta}{\partial p}$ 有较大的变化, 因而导致 $(f + \zeta)$ 的相应变化, 以使结果如上面所述。

2. 南北向大山脉对气流的影响

为了便于讨论, 我们考虑如下简单情况:

① 介于两等位温面 θ_1 与 θ_2 之间的均匀流体;

② 介于两等位温面 θ_1 与 θ_2 之间可压缩流体的绝热无摩擦流动 (即 $v = 0, \dot{Q} = 0$)。

令两等位温面 θ_1 与 θ_2 之间的厚度为 H , 对于这两种简单情况中的任一个, (3-67) 式变为

$$-\frac{d}{dt} \left(-\frac{f + \zeta}{H} \right) = 0 \quad (3-68)$$

对于一个流体柱来讲, 上式可写为

$$\frac{f + \zeta}{H} = \frac{f_0 + \zeta_0}{H_0} = \text{常数} \quad (3-69)$$

令

$$f = f_0 + \beta(y - y_0) \quad (3-70)$$

这里 f_0 是参考纬度 y_0 的柯氏参数, 将上式代入 (3-69) 式使得

$$\zeta = -\beta(y - y_0) + f_0 \left(\frac{H}{H_0} - 1 \right) + \frac{H}{H_0} \zeta_0 \quad (3-71)$$

此式便是我们讨论南北向大山脉影响大尺度气流的依据。

① 西风气流

图 3-4 (a) 为气流的垂直剖面图。假设山脉迎风面上为均匀的西风气, 即 $\zeta_0 = 0$, 这时我们可用下式来讨论

$$\zeta = -\beta(y - y_0) + f_0 \left(\frac{H}{H_0} - 1 \right) \quad (3-72)$$

如果气流是绝热的, 则位于等位温面 θ_0 与 θ_1 之间每个气柱爬越山

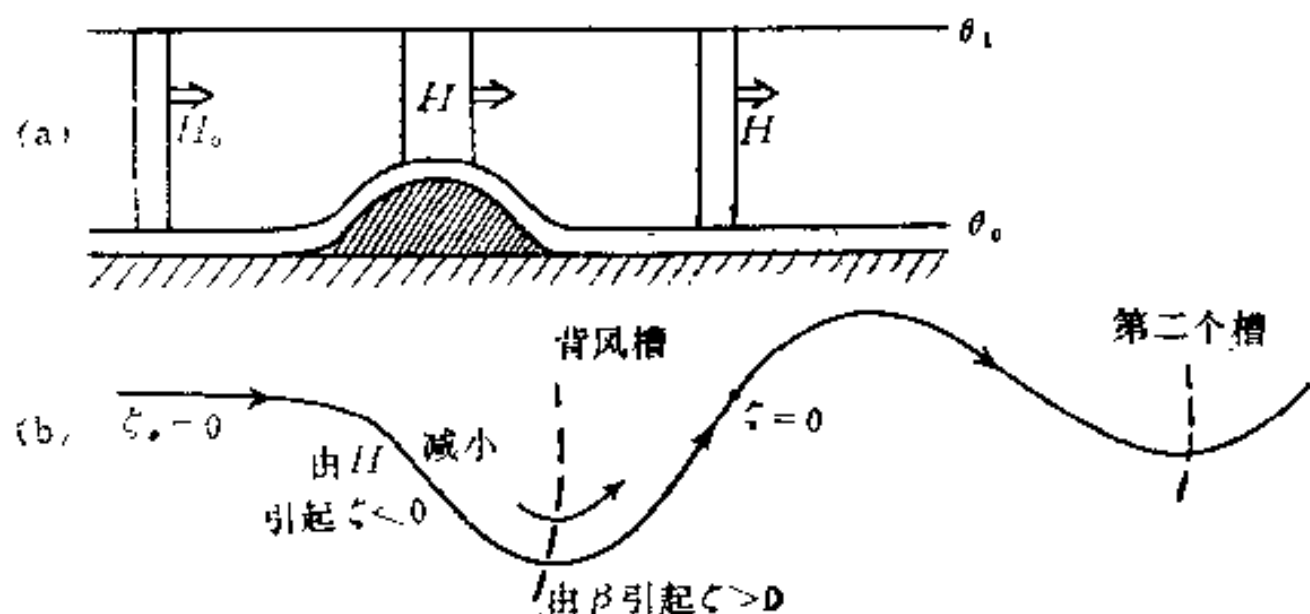


图 3-4 南北向山脉对西风气流的影响

脉时，其顶部与底部总保持在原来这两个面上。所以靠近地面的位温面 θ_0 必然与地面高度分布接近重合，而大气高层的等位温面 θ_1 受地形的影响并不大。因此，在气柱开始爬越山脉时，厚度减小。由(3-72)式可以看出，为了使位涡守恒，其相对涡度 ζ 必然为负值。因而，从水平方向来看，空气便将获得反气旋性的涡度而向南移动，如图 3-4 (b) 所示。当气块越过了山脉并使气柱恢复到原来的厚度时，气块位于原纬度以南，即 $y < y_0$ ，由(3-72)式可知，此时相对涡度 ζ 必须为正值，即其轨迹必然具有气旋性曲率。当气块再回到它原来纬度时，仍具有向北的风速分量而继续北移。这时 $y > y_0$ ， $H = H_0$ ，由(3-72)式可得 $\zeta < 0$ ，即气块逐渐获得反气旋性曲率，直到它的经向运动反向为止。因此气块沿着水平面上的波形轨迹向下游移动，其位涡保持不变。所以当定常西风越过南北向山脉时，在山脉的东侧立即形成第一个槽(背风槽)，接着在它的下游交替出现一系列的脊与槽。例如，美国落基山东侧常形成背风槽，而在美国东海岸产生第二个槽。

② 东风气流

当东风气流接近南北向山脉时，情况就完全不同了。假设气流未到达山脉以前是均匀气流。气柱从东面爬越山脉时，气柱厚

度减小;为了保持位涡守恒,必将获得反气旋性曲率。因此,从水平面上来看,气块轨迹将向北弯向高纬度而使 f 变大。此时为保持位涡守恒,将迫使相对涡度的负值更大,结果使气块折回向东。这样便建立了非定常流动,如图 3-5 所示。

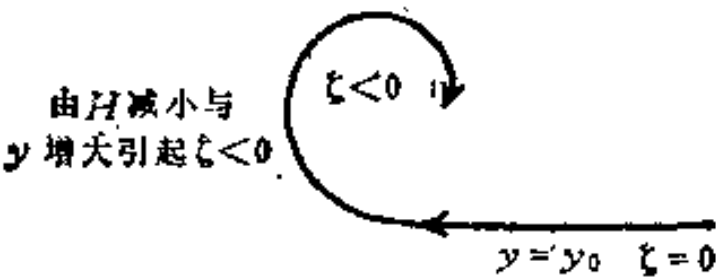


图 3-5 东风气流爬越山脉在水平面上产生的非定常流动

正因为这个原因,东风气流与西风气流的不同点是:它必须在到达山脉以前就受到山脉的影响。正如图 3-6 所示的那样,向西移动的气柱,在到达山脉以前,由前面气块折回的影响,就先呈现气旋性弯曲,即 $\zeta_0 > 0$ 。这样得到的正相对涡度抵销了 f 的减小,因而位涡守恒。当气柱移到山顶时,从水平方向来看,气块仍继续向赤道移动,因而气柱厚度的减小被 f 的减小平衡了。后来,气柱顺山坡而下并向西移动,其过程便反过来了。结果在下游若干距离

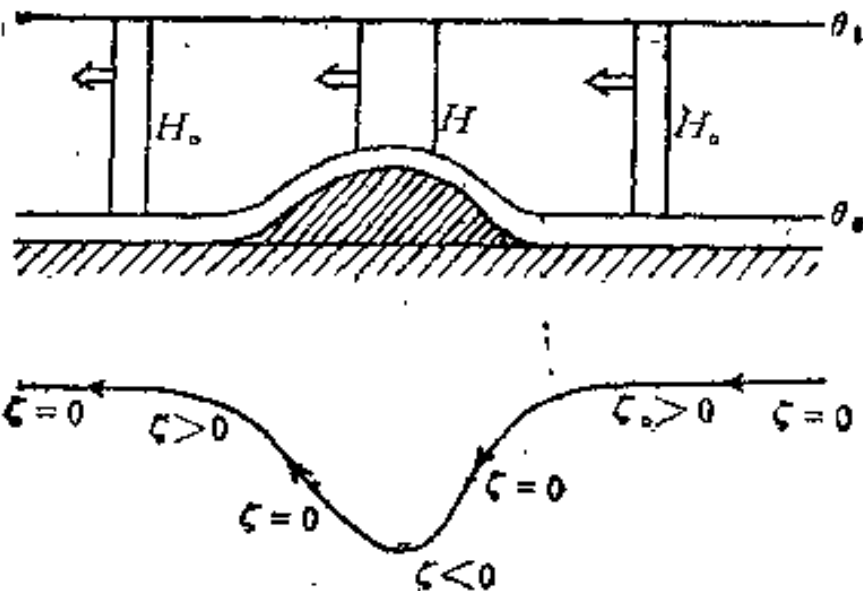


图 3-6 南北向山脉对东风气流的影响

处，气柱又回到它原来的纬度，而继续西移。这就是说，东风气流爬越山脉并不在下游产生波动。

由以上讨论可知，山脉对西风气流与东风气流的影响是完全不同的。西风气流爬越山脉后，能在下游产生波动（背风槽）；而东风气流爬越山脉后，并不产生波动，气流离开山脉后，地形对东风气流的影响并不明显。

中国的青藏高原似呈扁圆形，南北向不长，西风气流受它影响会分成两支，产生绕流现象。

§ 4 准地转位涡方程

上节得出的简化位涡方程(3-66)式并不能解决实际问题。因为式中包含了很多未知量，如涡度 ζ ，位温 θ 以及涵含在 $\frac{d}{dt}$ 中的 v ，所以单凭(3-66)式根本不可能把涡度 ζ 解出来。为此，本节利用地转风关系，将位涡方程(3-66)式化为只含一个变量的方程，称为准地转位涡方程。这样，方程变为闭合的，我们能求解得出结果。

一、位温微扰与静力平衡的应用

采用(3-65)式所示的位温微扰假定，热流量方程变为

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{D\theta'}{Dt} + \omega \frac{\partial \theta_0}{\partial p} = \frac{\dot{Q}\theta}{c_p T} \quad (3-73)$$

这里

$$\omega = \frac{dp}{dt}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_A \cdot \nabla_A \quad (3-74)$$

这样可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{\partial \theta_0}{\partial p}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) &= \frac{1}{\frac{\partial \theta_0}{\partial p}} \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial p} \right) + \omega \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial p^2} \right] = \\
&= \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\theta'}{\frac{\partial \theta_0}{\partial p}} \right) \right] + \\
&\quad + \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right)^{-2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial p^2} \left(\frac{D\theta'}{Dt} + \omega \frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right) = \\
&= \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\theta'}{\frac{\partial \theta_0}{\partial p}} \right) \right] + \\
&\quad + \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right)^{-2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial p^2} \left(\frac{\dot{Q}\theta}{c_p T} \right) \quad (3-75)
\end{aligned}$$

根据静力平衡,有如下关系式:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\frac{RT'}{p} = -\frac{\theta'}{\rho_0 \theta_0} \quad (3-76)$$

这里

$$T' = T \frac{\theta'}{\theta_0} \quad (\text{在等压面上})$$

(3-76)式可写为

$$\frac{\theta'}{\left(\frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right)} = -\rho_0 \theta_0 \frac{1}{\left(\frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right)} \frac{\partial \phi'}{\partial p} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \quad (3-77)$$

式中 σ 为 p 坐标系中的静力稳定度, 即

$$\sigma = -\frac{1}{\rho_0 \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial p} \quad (3-78)$$

将(3-77)式代入(3-75)式有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(\frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) &= \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] + \\
&\quad + \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right)^{-2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial p^2} \left(\frac{\dot{Q}\theta}{c_p T} \right) \quad (3-79)
\end{aligned}$$

将上式代入(3-66)式得到如下方程式:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(f+\zeta) + f \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] = \\ = \nu \nabla^2 \zeta + \frac{f}{c_p} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q} \theta}{T \frac{\partial \theta_0}{\partial p}} \right) \end{aligned} \quad (3-80)$$

$$\text{令} \quad \tilde{q} = f + \zeta + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f}{\sigma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \quad (3-81)$$

\tilde{q} 为包含热力作用项 $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f}{\sigma} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right)$ 的位涡, 这样(3-80)式便化为

$$\frac{D \tilde{q}}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta + \frac{f}{c_p} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q} \theta}{T \frac{\partial \theta_0}{\partial p}} \right) \quad (3-82)$$

二、地转近似的应用

(3-82)式还没有达到我们的要求。下面利用地转近似来完成这个使命。

准地转近似包含如下一些内容:

① 水平面上的速度 v_h 由地转风 v_g 来代替, 即:

$$v_h \cong v_g = \mathbf{k} \times \nabla_h \psi \quad (3-83)$$

式中 ψ 为流函数, 所以 v_h 与 ζ 都可由流函数 ψ 表示如下:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3-84)$$

$$\zeta = \nabla_h^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (3-85)$$

② 等压面位势高度与流函数成正比

$$\psi = \frac{p}{f\rho} = \frac{\phi'}{f} \quad (3-86)$$

将(3-84)~(3-86)代入(3-81)式可得绝对位涡为

$$\tilde{q} = f + \nabla_h^2 \psi + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \quad (3-87)$$

代入(3-82)式得出位涡方程为

$$-\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + J(\psi, \tilde{q}) = \nu \nabla^2 (\nabla_h^2 \psi) + \frac{f}{c_p} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{Q} \theta}{T} \frac{\partial \theta_0}{\partial p} \right) \quad (3-88)$$

这里 $J(\psi, \tilde{q})$ 为雅可比行列式, 即

$$J(\psi, \tilde{q}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} \quad (3-89)$$

(3-88)式称为准地转位涡方程。式中除了非均匀加热项外, 其他各项都能由流函数表示。如果加热项是给定的, 或没有加热项(绝热过程), 则只要知道流函数 ψ 的初值便能以后各时刻 ψ 的值求出来。可以说, (3-88)式是大尺度天气预报较简单的公式。当然在数值预报中, 现在已很少有人直接利用此式来作预报, 可是大尺度流场大多数可由此式进行讨论。

参 考 文 献

Charney, J.G., and M. Stern(1962). *J. Atmos. Sci.*, 19, 159-172.

Ertel, H., (1942). *Z. Meteorol.*, 59, 277-281.

Kuo, H. L. (1972). *Pure and Appl. Geophys.*, 96, 171-175,

_____ (1973). *Advances in Appl. Mech.*, 13, 248-330.

Pedlosky, J. (1964). *J. Atmos. Sci.*, 21, 201-219.

第四章 地转适应问题

自转系统内的大尺度大气或海洋流场的最主要特点是运动的准地转性，这个现象已成功地应用到研究大气动力学和实际天气预报的一系列重大问题中去。如果初始时刻气压场与风场之间并不符合地转关系，我们就有这种非地转扰动是如何向地转风适应的问题。本章简要地回答这个问题。我们从均匀不可压流体的简单模型出发，利用变形半径的概念，考虑扰动尺度，对初始时刻主要表现为速度扰动或气压扰动分别进行讨论。

§ 1 均匀不可压流体模型

一、流体模型的描述

我们把大气或海洋设想成为均匀不可压流体。其厚度由 H 代表。假设大气受到扰动，扰动后自由表面上任一点的高度为 h ，扰动后增加(或减小)的高度为 h' ，如图 4-1 所示。

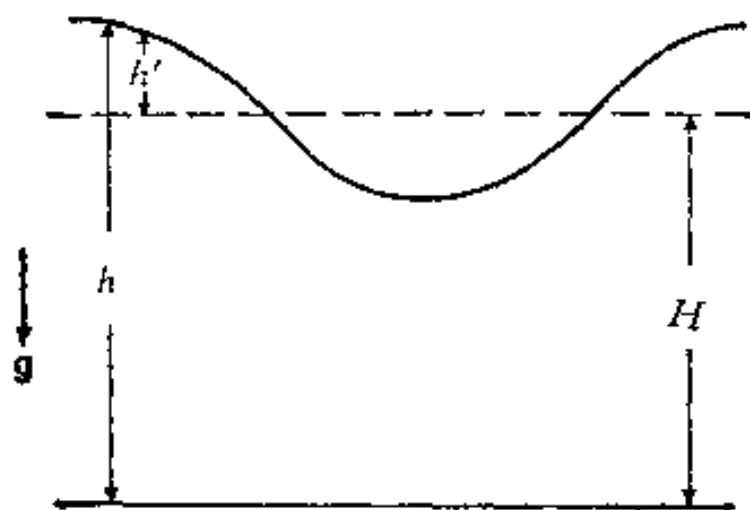


图 4-1 大气的扰动

从图 4-1 中可以看出下列关系式成立:

$$h' = h - H = h'(x, y, t) \quad (4-1)$$

令
$$\pi = \frac{h'}{H}, \quad c_1^2 = gH \quad (4-2)$$

并假定流场的扰动并不太大, 基本方程可以线性化, 以及设

$$f = \text{常数 (即没有罗斯贝波)} \quad (4-3)$$

这时, 利用静力平衡关系(将气压用 π 表示), 可将线性化的运动方程与连续方程写为

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - f v = -c_1^2 \frac{\partial \pi}{\partial x} \quad (4-4)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -c_1^2 \frac{\partial \pi}{\partial y} \quad (4-5)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4-6)$$

这里 u, v 分别为 x, y 方向的速度分量。

由于我们对这个流体模型的运动未作任何限制, 所以流场与气压场并不一定符合地转平衡关系。下面介绍如何把基本方程(4-4)~(4-6)式化成易于讨论的形式。

二、流场的分解

从(4-4)~(4-6)式得知, 在我们所采用的模型中, 流体只有水平运动, 而没有垂直运动。在这种情况下, 如果初始扰动局限在一个区域里, 以后扰动逐渐向外传播。如果扰动强度随距离的衰减比 $\frac{1}{r}$ 快, 其中 r 为离扰动区域中心的距离, 那么水平流场可以分为无辐散项与无旋项两个部分。前者可借助流函数 ψ 表示出来, 而后者则用速度势 φ 来表示。所以速度分量可写为

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad (4-7)$$

由上式可得涡度(指涡度的垂直分量)和散度(指水平散度)为:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla_{\lambda}^2 \psi \quad (4-8)$$

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla_{\lambda}^2 \varphi \quad (4-9)$$

由此可以看出, 涡度 ζ 与散度 D 分别由 ψ 与 φ 的二维拉氏算子来表示。

三、表面重力波的产生

将(4-9)式代入(4-6)式, 连续方程取如下形式:

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla_{\lambda}^2 \varphi = 0 \quad (4-10)$$

(4-5)式对 x 求偏导数减去(4-4)式对 y 求偏导数得到涡度方程:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -fD = -f\nabla_{\lambda}^2 \varphi \quad (4-11)$$

将(4-8)式代入(4-11)式, 涡度方程变为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\lambda}^2 \psi + f\nabla_{\lambda}^2 \varphi = 0 \quad (4-12)$$

利用(4-10)式可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\lambda}^2 \psi - f \frac{\partial \pi}{\partial t} = 0 \quad (4-13)$$

上式也可写为

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\lambda}^2 \psi - f\pi) = 0 \quad (4-14)$$

对时间 t 求积分得到

$$\nabla_{\lambda}^2 \psi - f\pi = \nabla_{\lambda}^2 \psi_0 - f\pi_0 = F(x, y) \quad (4-15)$$

这里

$$\psi_0 = \psi(x, y, 0), \quad \pi_0 = \pi(x, y, 0) \quad (4-16)$$

为 ψ 与 π 的初始值。

我们从 (4-15) 式可以看出, 对于空间固定点 (x, y) 来说, $\nabla_h^2 \psi - f\pi$ 永远保持不变。可是我们从该式还不能得出任何关于流场与气压场能否达到平衡态, 及如何达到平衡态的结论。因为 $\nabla_h^2 \psi - f\pi$ 由两项组成, 虽然它为恒量, 但其中每一项 $\nabla_h^2 \psi$ 与 $f\pi$ 都可随时间而变, 即

$$\psi = \psi(x, y, t), \quad \pi = \pi(x, y, t) \quad (4-17)$$

怎样分析 ψ 与 π 随时间的变化规律呢? 这时我们必须把方程化为只含一个变量的形式。涡度方程 (4-12) 式可改写为

$$\nabla_h^2 \left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} + f\varphi \right) = 0 \quad (4-18)$$

将 (4-4) 式对 x 求偏数加上 (4-5) 式对 y 求偏导数可得如下散度方程:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - c_1^2 \nabla_h^2 \pi \quad (4-19)$$

利用 (4-8) 与 (4-9) 两式, 可将上式化为

$$\nabla_h^2 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - f\psi + c_1^2 \pi \right) = 0 \quad (4-20)$$

假定变量 ψ, φ, π 都是有限的, 并且在 (x, y) 平面上没有线性变化部分。(4-18) 与 (4-20) 两式中在 $\nabla_h^2 ()$ 里的函数 $f_1 = \frac{\partial \psi}{\partial t} +$

$f\varphi$ 与 $f_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - f\psi + c_1^2 \pi$ 是 (x, y) 平面上的调和函数。根据假定,

初始扰动局限在一个有限的区域里, 扰动强度的衰减要比 $\frac{1}{r}$ 快, 所

以我们有

$$f_1|_r=0, \quad f_2|_r=0 \quad (4-21)$$

其中 Γ 为无穷远边界。由调和函数的极值原理(调和函数只能在边界 Γ 上达到极大值与极小值)可推出:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} + f\varphi = 0 \quad (4-22)$$

与

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - f\psi + c_1^2 \pi = 0 \quad (4-23)$$

将上式对 t 求微商, 并利用(4-10)与(4-22)两式消去 π 与 ψ 得到

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + f^2 \varphi - c_1^2 \nabla_h^2 \varphi = 0 \quad (4-24)$$

我们很容易看出, 上式便是表面重力波方程。由此可见, 在我们所考虑的流体模型中, 初始时刻的非地转扰动的能量是通过表面重力波传播的。

§ 2 正压大气中的地转适应过程

如果大气中某区域存在非地转的初始扰动, 问这扰动在大气中是不是向地转平衡状态过渡? 是如何向平衡状态适应的? 为回答上述问题, 我们可采用两种不同的途径: 第一, 将表面重力波方程(4-24)式作为柯西问题(即初值问题)进行求解; 第二, 用最终平衡态的简单趋近方法。

一、柯西问题

如果初始扰动如下式所示:

$$\psi_0 = \psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y) \quad (4-25)$$

$$\varphi_0 = \varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \quad (4-26)$$

$$\pi_0 = \pi(x, y, 0) = \pi_0(x, y) \quad (4-27)$$

由(4-23)式可得

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = f\psi_0 - c_1^2 \pi_0 \quad (4-28)$$

我们将波动方程(4-24)式与初始条件(4-26)、(4-28)两式合起来看成是解一个波动方程的柯西问题。由双曲型方程的理论可知,方程(4-24)式的柯西问题有唯一解

$$\varphi = \varphi(x, y, t) \quad (4-29)$$

在解得 $\varphi(x, y, t)$ 后, 将其代入(4-22)式, 使该式变为关于 ψ 的一阶偏微分方程。此方程在初值条件(4-24)式下有唯一解

$$\psi = \psi(x, y, t) \quad (4-30)$$

将 $\varphi(x, y, t)$ 代入(4-10)式, 使该式变为关于 π 的一阶偏微分方程, 此方程在初值条件(4-27)式下有唯一解

$$\pi = \pi(x, y, t) \quad (4-31)$$

将(4-29)与(4-30)两式代入(4-7)式可得速度场为

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t) \quad (4-32)$$

这样, 我们已求出流场与气压场的解, 根据解的性质, 可以直接讨论扰动是如何传播的, 并怎样向地转适应。

二、最终平衡态的简单趋近

1. 变量的平衡态与非定常部分

令初始扰动限制在一个给定的区域里, 我们的任务是找出: 当充分长的时间过去后, 在该区域中扰动已平定下来接近于平衡态时, 将会发生什么事情? 为了解决这个问题, 我们把变量 ψ , φ , π 分成不随时间而变的渐近定常部分(即平衡态)与非定常部分。即

$$\begin{cases} \psi(x, y, t) = \bar{\psi}(x, y) + \psi'(x, y, t) \\ \varphi(x, y, t) = \bar{\varphi}(x, y) + \varphi'(x, y, t) \\ \pi(x, y, t) = \bar{\pi}(x, y) + \pi'(x, y, t) \end{cases} \quad (4-33)$$

由于非定常部分是没有平衡态的, 所以

$$\begin{cases} \overline{\psi'}(x, y, t) = 0, & \overline{\psi'_t}(x, y, t) = 0 \\ \overline{\varphi'}(x, y, t) = 0, & \overline{\varphi'_t}(x, y, t) = 0 \\ \overline{\pi'}(x, y, t) = 0, & \overline{\pi'_t}(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (4-34)$$

式中下标 t 表示对 t 求偏导数。这样划分的优点是不必求解波动方程(4-24)式, 用简单方法便可得到各个变量平衡态间的关系。

由(4-22)可得

$$\varphi = -\frac{1}{f}\psi_t = -\frac{1}{f}(\overline{\psi}_t + \psi'_t) = -\frac{1}{f}\psi'_t \quad (4-35)$$

求上式中各变量的平衡态, 利用(4-34)式可得

$$\overline{\varphi} = -\frac{1}{f}\overline{\psi'_t} = 0 \quad (4-36)$$

这就是说, 速度势 φ 没有平衡态, 只有非定常部分, 即

$$\varphi = \varphi'(x, y, t) \quad (4-37)$$

将它代入(4-35)式便得

$$\psi'_t + f\varphi'_t = 0 \quad (4-38)$$

将(4-36)与(4-38)两式代入(4-23)式, 我们发现处于定常状态的平衡函数 $\overline{\psi}$ 与 $\overline{\pi}$ 满足下列地转关系:

$$f\overline{\psi} = c_1^2\overline{\pi} \quad (4-39)$$

而非定常部分满足与(4-23)式相同的方程

$$\varphi'_t - f\psi' + c_1^2\pi' = 0 \quad (4-40)$$

由于方程(4-15)式右边是与时间 t 无关的, 所以当时间超过达到平衡态所需时间时, 它必须等于方程式左边与时间无关的部分, 即

$$\nabla_h^2\overline{\psi} - f\overline{\pi} = \nabla_h^2\psi_0 - f\pi_0 = F_0(x, y) \quad (4-41)$$

由上式可得如下结论

$$\nabla_h^2\psi' - f\pi' = 0 \quad (4-42)$$

将地转关系(4-39)式代入(4-41)式, 得出有关平衡函数 $\overline{\psi}(x, y)$ 的方程:

$$\nabla_h^2 \bar{\psi} - \frac{1}{\lambda^2} \bar{\psi} = \nabla_h^2 \psi_0 - f\pi_0 = F_0(x, y) \quad (4-43)$$

这里

$$\lambda = \frac{c_1}{f} = \frac{\sqrt{gH}}{f} \quad (4-44)$$

具有长度的量纲,称为均匀流体模型的罗斯贝变形半径。由(4-43)式可知,平衡态 $\bar{\psi}$ 的解随初始值 $F_0(x, y)$ 与变形半径 λ 而变。由于 λ 是固定参数, $F_0(x, y)$ 是个已知函数,求解(4-43)式便可得到平衡状态。这就是说,我们可不必求解波动方程(4-24)式而得到平衡态。

然而在研究适应过程时,需讨论变量 ψ, φ, π 是怎样达到平衡态的。这时,我们必须考虑这些变量的非定常部分 ψ', φ' 与 π' 是如何变化的。根据(4-10), (4-38), (4-40)与(4-42)这四个公式,我们发现非定常变量 ψ', φ' 与 π' 都满足表面重力波方程

$$\chi'_{tt} + f^2 \chi' - c_1^2 \nabla_h^2 \chi' = 0 \quad (4-45)$$

这里 $\chi' = \psi', \varphi', \pi'$ 。这就说明了在讨论适应过程时,必须要考虑表面重力波的作用。

下面我们把注意力集中到最终的平衡态上来,为此我们对变形半径的概念再作一番讨论。

2. 变形半径

变形半径是讨论地转适应过程的重要参量。它由(4-44)式定义。 λ 的数值与我们所考虑的流体模型有关。在我们这个模型里,变形半径与波速 c_1 与柯氏参数 f 有关。这里介绍中纬度变形半径的两个常用的数值:① 对于表面重力波来说, $c_1 = 270$ 米/秒, $f = 10^{-4}$ /秒,所以 $\lambda = 2700$ 公里;② 对于重力内波来说, $c_1 = 100$ 米/秒, $f = 10^{-4}$ /秒,得出 $\lambda = 1000$ 公里。

如果扰动尺度 $L > \lambda$,则称为大尺度扰动;

如果扰动尺度 $L < \lambda$,则称为小尺度扰动。

我们将可看到,变形半径在地转适应中的重要作用。

3. 趋于地转平衡的各种方式

在讨论这个问题时，我们总先假定系统经过一段时间 T 后是一定会趋于平衡态的。在关于平衡函数 $\bar{\psi}$ 的方程(4-43)式中，

$$\pi_0 = \frac{\Phi_0}{c_1^2} \quad (4-46)$$

这里 $\Phi_0 = g\delta h_0$ ，为初始位势高度，它表示初始气压场。

下面我们对平衡方程(4-41)或(4-43)两式进行讨论。假定初始时刻的波长与以后波长都一样，则这两个平衡方程式中的变量可写成如下波动形式：

$$\begin{cases} \bar{\psi}(x, y) = \text{Re} \{ \bar{\psi} e^{i(k_1 x + k_2 y)} \} \\ \psi_0(x, y) = \text{Re} \{ \psi_0 e^{i(k_1 x + k_2 y)} \} \\ \Phi_0(x, y) = \text{Re} \{ \Phi_0 e^{i(k_1 x + k_2 y)} \} \\ \pi_0(x, y) = \text{Re} \{ \pi_0 e^{i(k_1 x + k_2 y)} \} \end{cases} \quad (4-47)$$

这里波幅 $\bar{\psi}$, ψ_0 , Φ_0 与 π_0 都是随 (x, y) 缓慢变化的函数，因此有如下近似关系式：

$$\begin{cases} \nabla_h^2 \bar{\psi} = -k^2 \bar{\psi} \\ \nabla_h^2 \psi_0 = -k^2 \psi_0 \end{cases} \quad (4-48)$$

这里 $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ 。将(4-47)式代入(4-43)式，考虑(4-48)式的结果，可得下式

$$\bar{\psi} = \frac{k^2 \psi_0 + \frac{1}{\lambda^2 f} \Phi_0}{k^2 + \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{\psi_0 + \frac{1}{k^2 \lambda^2} \frac{\Phi_0}{f}}{1 + \frac{1}{k^2 \lambda^2}} = \frac{k^2 \lambda^2 \psi_0 + \frac{\Phi_0}{f}}{k^2 \lambda^2 + 1} \quad (4-49)$$

上式便是我们讨论的依据。

由于扰动的尺度对地转适应影响很大，所以按扰动尺度的大小分别进行讨论。

① 小尺度扰动

小尺度扰动可用下式表示

$$k^2 \lambda^2 \gg 1 \quad (4-50)$$

这说明扰动的水平尺度远小于变形半径 λ 。

这时还可分如下两种情况分别讨论：

(i) 初始时刻主要是速度场的扰动，即

$$|\psi_0| > \frac{\Phi_0}{f} \quad \text{或} \quad \Phi_0 = 0 \quad (4-51)$$

利用(4-49)式可得

$$\overline{\psi} = \psi_0 \quad (4-52)$$

并由(4-39)式得到

$$\overline{\pi} = \frac{f}{gH} \overline{\psi} \quad (4-53)$$

由上面两式可以看出，流场变化不大，而气压场变化很大，气压场被调整得与流场建立地转平衡关系；又知初始时刻的扰动动能中只有很少一部分被频散掉，大部分都保持在流场里。

(ii) 初始时刻主要是气压场的扰动，即

$$\psi_0 = 0 \quad \text{或} \quad |\psi_0| \ll \frac{\Phi_0}{f} \quad (4-54)$$

由(4-49)式可得

$$\overline{\psi} = \frac{\Phi_0}{k^2 \lambda^2 f} = \frac{f \pi_0}{k^2} \quad (4-55)$$

由(4-39)式得到

$$\overline{\pi} = \frac{f \overline{\psi}}{gH} = \frac{\pi_0}{k^2 \lambda^2} \ll \pi_0 \quad (4-56)$$

从以上两式可见：最终建立的速度场很微弱，并被调整得与气压场建立地转平衡关系；只有很少一部分的初始气压场被保留下来，初始场的大部分位能都被重力波频散掉了。在适应过程中，流场变化不大（因为最终速度场很微弱），而气压场有很大变化，衰减很快。这种情况正如在河面上丢了一块小石子，随着波的传播，水面扰动很快就消失了（即 $\overline{\pi} \ll \pi_0$ ）。

综上所述,在小尺度扰动中,主要是气压场向风场适应。

(2) 大尺度扰动

大尺度扰动由下式表示:

$$k^2 \lambda^2 \ll 1 \quad (4-57)$$

这说明扰动尺度远大于变形半径。

这时亦有如下两种情况:

(i) 初始时刻主要是气压场的扰动, 即

$$\psi_0 = 0 \quad \text{或} \quad |\psi_0| \ll \frac{\Phi_0}{f}$$

这时, 由(4-49)式可得

$$\overline{\psi} = -\frac{\Phi_0}{f} \quad (4-58)$$

并由(4-39)式得到

$$\overline{\pi} = \frac{f}{gH} \overline{\psi} = -\frac{\Phi_0}{gH} = \pi_0 \quad (4-59)$$

这就是说气压场没有变化,而速度改变很大,并向气压场适应。这时候大部分扰动位能还保持在原来的地方。

(ii) 初始时刻主要是速度场的扰动, 即

$$\Phi_0 = 0 \quad \text{或} \quad |\psi_0| \gg \frac{\Phi_0}{f}$$

由(4-49)式可得

$$\overline{\psi} = k^2 \lambda^2 \psi_0 \ll \psi_0 \quad (4-60)$$

由(4-39)式得到

$$\overline{\pi} = \frac{k^2 \psi_0}{f} \quad (4-61)$$

这说明流场衰减很快, 只有一小部分初始运动场被保留下来, 而大部分的扰动动能被表面重力波频散掉了; 最终建立的气压场与流场呈地转平衡关系, 由于大尺度扰动中 k^2 很小, 所以平衡气压场很微弱, 即气压场变化不大。

综上所述,在大尺度扰动中,主要是风场向气压场适应。

4. 地转适应的例子

这里介绍圆对称涡动流场与气压场的相互适应例子,也称为奥布霍夫解。

在我们的例子中,考虑表面重力波的频散作用,取变形半径 $\lambda = 2700$ 公里,扰动半径 $R = 500$ 公里,由于 $\frac{R}{\lambda} = 0.0516 \ll 1$,所以是小尺度扰动。

我们考虑如下两种情况:

① 初始时刻没有气压场,只有轴对称涡动流场,即

$$\begin{cases} \pi_0 = 0 \\ \psi_0 = \psi_0(r) = A \left[2 + \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{r^2}{2R^2}}, \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad (4-62)$$

式中 $A < 0$, 它的单位为米²/秒。令 $\xi = \frac{r}{R}$, 由上式求得初始圆周运动的速率为

$$v_0(r) = \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = -\frac{A}{R} \xi \left[4 + \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 - \xi^2 \right] e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (4-63)$$

关于 $\bar{\psi}$ 的方程(4-43)式可写为

$$\nabla_{\lambda}^2 \bar{\psi} - \frac{1}{\lambda^2} \bar{\psi} = \nabla_{\lambda}^2 \psi_0 = \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dr} \quad (4-64)$$

将(4-62)式代入上式可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\psi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\psi}}{dr} - \frac{1}{\lambda^2} \bar{\psi} = & -\frac{2A}{R^2} \left\{ 4 + \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \left[4 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 \right] \xi^2 + \frac{\xi^4}{2} \right\} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \end{aligned} \quad (4-65)$$

上式的解为

$$\bar{\psi} = A (2 - \xi^2) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (4-66)$$

将它代入(4-39)式得到

$$\bar{\pi} = \frac{f}{gH} \bar{\psi} = \frac{A}{f\lambda^2} (2 - \xi^2) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (4-67)$$

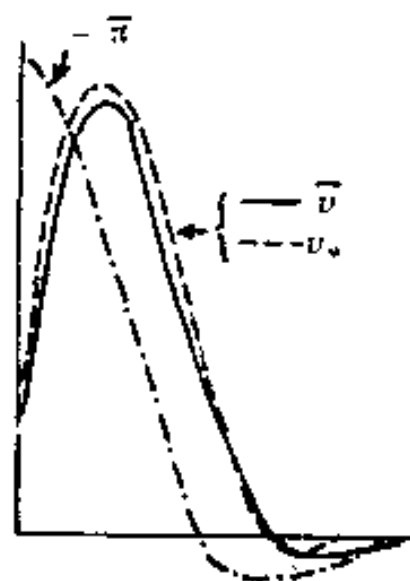
由 $\bar{\psi}$ 可求得达平衡状态时的速度

$$\bar{v} = \frac{d\bar{\psi}}{dr} = -\frac{A}{R} \xi (4 - \xi^2) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (4-68)$$

由(4-68)与(4-63)两式求出

$$\bar{v} - v_0 = \frac{AR}{\lambda^2} \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (4-69)$$

上式表明流场没有多少改变。初始流场分布与达平衡状态的流场、气压场的分布由图 4-2 所示。从图中可以看出 \bar{v} 与 v_0 差异不大,而气压场有很大改变以适应流场,达到地转平衡。



为看出平衡气压场是怎样建立起来的,我们可根据初始条件求出表面重力波方程的解 $\pi(r, t)$,令 $r=0$ 得出在中心轴处气压 $\pi(0, t)$ 。

图 4-2 v_0 , v 与 π 的分布

将计算结果画成图来表示。由于奥布霍夫的原图有误,图 4-3 给出中国科学院大气物理研究所曾庆存先生利用格林函数计算的结果。图中可明显看出气压随时间呈衰减性的振荡。

② 初始时刻没有流场,只有涡旋型气压场。即

$$\begin{cases} \psi_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0 \\ \pi_0 = A^* \left[2 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 - \left[4 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 \right] \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{4} \right] e^{-\frac{\xi^2}{2}} \end{cases} \quad (4-70)$$

这里 $A^* = \frac{A}{f\lambda^2}$, 初始气压场 π_0 的数值接近上例中的平衡气压场。

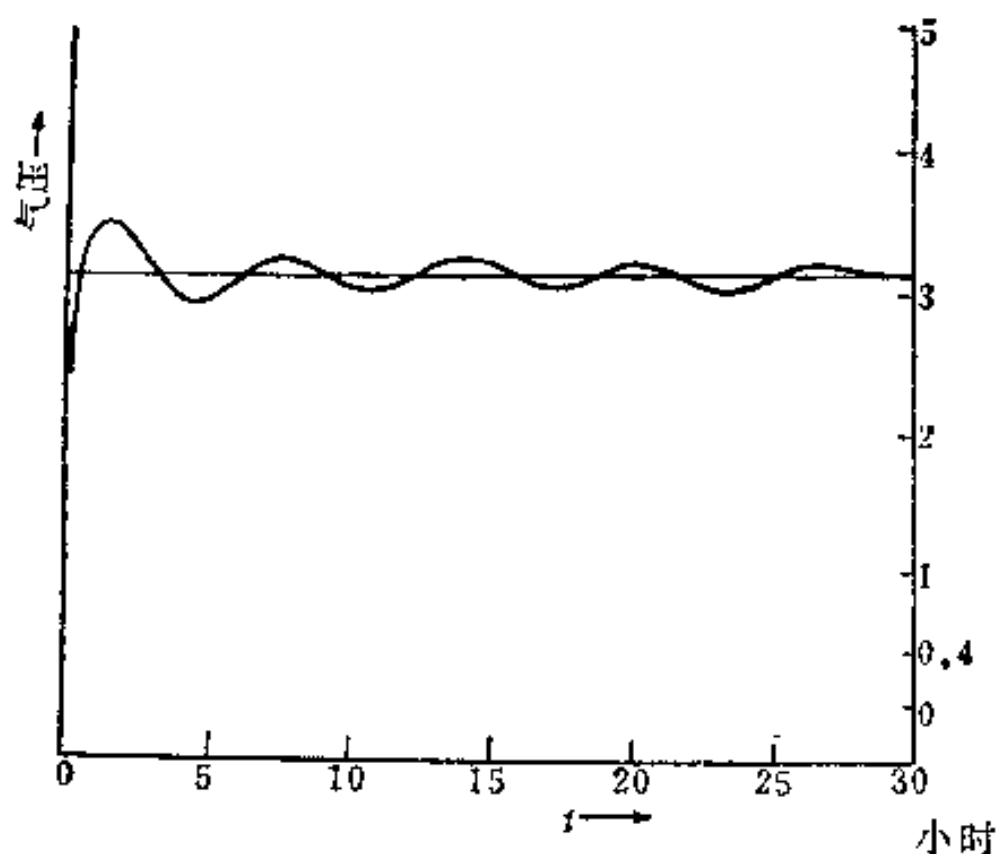


图 4-3 平衡气压场的建立过程

与上例相类似的推导过程，求得平衡状态的解为

$$\bar{\psi} = \frac{4^* R^2 f}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{2} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{A}{2} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 \left[1 - \frac{\xi^2}{2} \right] e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (4-71)$$

$$\bar{\pi} = A^* \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 \left(1 - \frac{\xi^2}{2} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \ll \pi_0 \quad (4-72)$$

$$-\bar{v} = -\frac{A^* f R}{2} \xi \left(\frac{\xi^2}{2} - 2 \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{A}{2} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 \frac{\xi}{R} \left(\frac{\xi^2}{2} - 2 \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (4-73)$$

比较(4-69)与(4-73)两式发现这里的 \bar{v} 与上例中 $\Delta \bar{v}$ 是很接近的。这说明本例中平衡流场是很微弱的，即与初始流场(为零)差异不大；由(4-72)式可知，初始气压场有很大的衰减。图 4-4 给出了初始气压场与平衡气压场分布。从图中也可看出气压场有很大变化的结论。

5. 达到平衡所需的时间

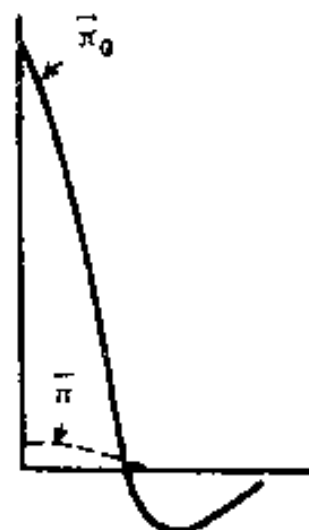


图 4-4 π_0 与 $\bar{\pi}$ 的分布

如果要精确求出达到平衡所需的时间，则必须要解表面重力波方程(4-24)的柯西问题，得到解 $\varphi = \varphi(x, y, t)$ ，然后再求得 $\psi(x, y, t)$ 及 $\pi(x, y, t)$ ，并考察上述函数，得出有关 t 的一个界限 T 。当 $t < T$ 时， $\psi(x, y, t)$ 随 t 变化较剧烈；当 $t > T$ 时， $\psi(x, y, t)$ 几乎取相同的数值。这个 T 便是我们所要求的达到平衡所需的时间。这种方法比较复杂，需求解偏微分方程。下面给出近似估计方法。

初始非地转扰动是通过表面重力波的频散过程，将有限空间内的气压场与风场间不平衡的能量，散布到了整个空间，于是单位空间中的不平衡能量变为零，这时不平衡现象消失，达到地转平衡。由此可见，达到平衡所需的时间是与传播表面重力波能量的速度——群速有关。所以我们可根据群速对达到平衡所需时间 T 作估计。

令表面重力波的波长为 L ，它相当于扰动半径，由(4-45)式所示表面重力波的频率为

$$\omega^2 = k^2 c_1^2 + f^2 = \frac{4\pi^2 c_1^2}{L^2} + f^2 \quad (4-74)$$

由上式求得群速为

$$c_g = \frac{c_1}{\left(1 + \frac{L^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{k}{k} \quad (4-75)$$

则 T 可由下式估计

$$T \sim \frac{L}{|c_g|} = \frac{\lambda}{c_1} \mu \sqrt{1 + \mu^2} = \frac{\mu}{f} \sqrt{1 + \mu^2} \quad (4-76)$$

其中 $\mu = \frac{L}{\lambda}$ 。若令 $T_0 = \frac{1}{f}$ 为惯性周期，则上式可写为

$$T \sim T_0 \mu \sqrt{1 + \mu^2} \quad (4-77)$$

从上式可看出：如果扰动尺度 L 很大，则 T 也就很大，如果扰动尺

度 L 较小, 则 T 相应变小。

在中纬度 $\frac{1}{f} \sim 18$ 小时, 在刚才所举的例子中, $\frac{L}{\lambda} \sim \frac{1}{6}$, 由 (4-77) 式可得 $T \sim 3$ 小时, 这与图 4-3 所示的结果大致是一样的。

§ 3 斜压大气中的地转适应过程

上节中我们以正压流体模型为例介绍了均匀流体地转适应问题的一般机制。然而, 真实大气是斜压的, 它与正压大气是有明显区别的。正压大气是纯水平运动, 而斜压大气却要考虑三维运动; 正压大气适应过程是通过表面重力波完成的; 而斜压大气是由重力内波来完成的。正因为有这些差异, 斜压大气的地转适应过程具有自己的特点。本节介绍斜压大气的适应过程。

一、基本模型

本节中利用斜压性这个术语表示正常大气是层结稳定的。当我们仅考虑水平尺度 L_h 比垂直尺度 L_v 要大得多的扰动时, 可以采用静力近似。大气中扰动的线性化运动方程、静力方程、绝热方程和连续方程组成的基本方程组由下列诸式给出:

$$\mathbf{v}_t^* + f\mathbf{k} \times \mathbf{v}^* = -\nabla_p p^* \quad (4-78)$$

$$p_z^* + \Gamma p^* = gq^* \quad (4-79)$$

$$q_t^* + s_z w^* = 0 \quad (4-80)$$

$$c^{-2} p_t^* + u_z^* + v_z^* + w_z^* - \Gamma w^* = 0 \quad (4-81)$$

式中的下标表示偏微商, 并且有

$$\begin{cases} (\mathbf{v}^*, w^*, q^*, p^*) = \rho_0^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{v}', w', \frac{\theta'}{\theta_0}, \frac{p'}{\rho_0} \right) \\ \rho_0^{-\frac{1}{2}} \rho' = \rho^* = c^{-2} p^* - q^* \end{cases} \quad (4-82)$$

$$\text{而 } s_z = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \frac{N^2}{g}, \quad \Gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{c^2} - s_z \right), \quad c^2 = \frac{c_p}{c_v} RT \quad (4-83)$$

为方便起见,将 \mathbf{v}^* 分解为由无辐散分量 \mathbf{v}_d^* 与无旋分量 \mathbf{v}_r^* 组成。即 \mathbf{V}^* 可由流函数 ψ 与速度势 ϕ 来表示:

$$\mathbf{v}^* = k \times \nabla \psi + \nabla \phi \quad (4-84)$$

由(4-79)~(4-81)诸式消去 w^* 与 q^* , 并利用下式

$$u_z^* + v_y^* = \nabla^2 \phi \quad (4-85)$$

可得 p^* 与 ϕ 之间的关系为:

$$\left[\left(\Gamma^2 + \frac{N^2}{c^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] p_i^* + N^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (4-86)$$

对(4-78)式作旋度和散度的运算,并且利用(4-84)式,可得如下形式的涡度方程和散度方程:

$$\nabla^2(\psi_t + f\phi) = 0 \quad (4-87)$$

$$\nabla^2(\phi_t - f\psi + p^*) = 0 \quad (4-88)$$

如果我们假定 ψ 、 ϕ 与 p^* 中并不包含 x 与 y 的线性函数项,则由(4-87)与(4-88)两式可得:

$$\psi_t + f\phi = 0 \quad (4-89)$$

$$\phi_t - f\psi + p^* = 0 \quad (4-90)$$

将(4-90)式对 t 求偏导数,并与(4-86)、(4-89)式中消去 ψ 与 p^* , 可得出关于 ϕ 的三维惯性重力波方程:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\Gamma^2 + \frac{N^2}{c^2} \right) \right] \phi + N^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (4-91)$$

这里我们把 N^2 作为常数。容易证明, 变量 ψ 、 p^* 、 q^* 与 w^* 也满足形如上式的波动方程。由于对 q^* 来讲, 很容易写出上、下边界条件(这在后面我们要加以说明), 因此我们用关于 q^* 的三维惯性重力波方程进行讨论:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\Gamma^2 + \frac{N^2}{c^2} \right) \right] (q_{it}^* + f^2 q^*) + N^2 \nabla^2 q^* = 0 \quad (4-92)$$

如果把地表面看成是平坦的水平面, 则下边界条件为

$$w^*|_{z=0} = 0 \quad (4-93)$$

由此可得

$$w_t^*|_{z=0} = 0 \quad \text{与} \quad q_t^*|_{z=0} = 0 \quad (4-94)$$

上式中第一式是直接由(4-93)式推出, 第二式由(4-80)与(4-93)两式得出。

假定在地表面 q^* 的初始值为零, 则由(4-94)式可知, 在任何时刻地表面 q^* 都等于零。因此利用(4-79)与(4-80)两式可得如下边界条件:

$$q^*|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial z} + \Gamma p^* = 0 \quad (4-95)$$

对于大气上界, 则采用下列边界条件:

$$\text{当 } z \rightarrow \infty, \quad p^*, q^*, \psi, \phi, w^* \text{ 有限(或趋于零)} \quad (4-96)$$

二、斜压大气平衡状态的方程及其解

由涡度方程式(4-87)式与连续方程(4-86)式消去 $\nabla^2 \phi$ 可得下列位涡方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla^2 \psi + \frac{f}{N^2} \left[\frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} - \left(\Gamma^2 + \frac{N^2}{c^2} \right) p^* \right] \right\} = 0 \quad (4-97)$$

将上式对 t 求积分可得:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi + \frac{f}{N^2} \left[\frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} - \left(\Gamma^2 + \frac{N^2}{c^2} \right) p^* \right] &= \nabla^2 \psi_0 + \\ &+ \frac{f}{N^2} \left[\frac{\partial^2 p_0^*}{\partial z^2} - \left(\Gamma^2 + \frac{N^2}{c^2} \right) p_0^* \right] \end{aligned} \quad (4-98)$$

这里 ψ_0 与 p_0^* 是 ψ 与 p^* 的初始值。

为了方便起见, 对斜压流体而言, 我们将垂直坐标以 $\frac{1}{L}$ 为单位, 而水平坐标以最大变形半径 λ_0 为单位来表示。这里 λ_0 由下

式来定义:

$$\lambda_0 = \frac{N}{fT} \quad (4-99)$$

这样无量纲坐标 (x, y, z) 与原坐标 (x', y', z') 的关系为

$$x' = \lambda_0 x, \quad y' = \lambda_0 y, \quad z' = \frac{z}{T} \quad (4-100)$$

由于(4-98)式右端是位涡的初始值,与时间无关,因此该式的左端也与时间无关。当大气达到平衡态时,满足如下的地转关系:

$$\overline{p^*} = f\overline{\psi} \quad (4-101)$$

将(4-100)与(4-101)两式代入(4-98)式可得

$$\frac{\partial^2 \overline{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{\psi}}{\partial z^2} - l^2 \overline{\psi} = \Omega_0(x, y, z) \quad (4-102)$$

这里

$$\Omega_0(x, y, z) = \nabla^2 \psi_0 + \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 p_0^*}{\partial z^2} - l^2 p_0^* \right), l^2 = 1 + \frac{N^2}{T^2 c^2} \quad (4-103)$$

(4-102)式便是平衡状态方程。

由(4-101)、(4-95)与(4-96)三式可得关于 $\overline{\psi}$ 的上、下边界条件:

$$\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial z} + \overline{\psi} = 0, \quad \text{当 } z = 0 \quad (4-104)$$

$$\overline{\psi} \rightarrow 0, \quad \text{当 } z \rightarrow \infty \quad (4-105)$$

对任意初始扰动 $\Omega_0(x, y, z)$,在边界条件(4-104)、(4-105)下,方程(4-102)式的解可由如下积分形式来表示:

$$\psi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \Omega_0(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4-106)$$

这里 Ω_0 不等于零, 三重积分是对整个空间进行的, G 是该问题的格林函数。由于 G 表示为点 (ξ, η, ζ) 上的单位点源对 $\bar{\psi}$ 在点 (x, y, z) 上的作用, 因此 G 必须是这两个点 (x, y, z) 与 (ξ, η, ζ) 间距离 r 的函数。这样, 如令 G 仅为 r 的函数, 那么它必须满足如下方程

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dG}{dr} - k^2 G = 0 \quad (4-107)$$

此方程具有一个当 r 无穷增大时趋于零的解:

$$G_1 = \frac{1}{r} e^{-kr} \quad (4-108)$$

这里

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad (4-109)$$

此外格林函数还必须满足下列两个条件:

$$\text{当 } z = 0, \quad G_z + G = 0 \quad (4-110)$$

$$\text{当 } z \rightarrow \infty, \quad G \rightarrow 0 \quad (4-111)$$

我们可用镜象法求得满足上述这两个条件的格林函数 G (见郭晓岚 1953, 1956), 也就是在地表面以下的镜象点 $(\xi, \eta, -\zeta)$ 上附加一个点源, 而在镜象点到 $(\xi, \eta, -\infty)$ 的直线上附加一个线源, 因此 G 有如下的形式:

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{e^{-kr}}{r} + a \frac{e^{-kr'}}{r'} + \int_0^\infty \frac{b(\beta) e^{-kr'(\beta)}}{r'(\beta)} d\beta \quad (4-112)$$

这里

$$r'^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2 \quad (4-113)$$

$$r'(\beta)^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \beta)^2 \quad (4-114)$$

很容易看出:

$$\text{当 } z = 0, \quad r = r'$$

我们把这个值记为 r_0 。将 (4-112) 式代入 (4-110) 式可得:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} &= (1-a)\zeta \left(-\frac{l}{r_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r_0^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-lr_0} + \\
&\quad + \int_{\zeta}^{\infty} b(\beta) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-lr'(\beta)}}{r'(\beta)} \right) \right]_{z=0} d\beta = \\
&= (1-a)\zeta \left(-\frac{l}{r_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r_0^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-lr_0} + \\
&\quad + \int_{\zeta}^{\infty} b(\beta) \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{e^{-lr'(\beta)}}{r'(\beta)} \right) \right]_{z=0} d\beta = \\
&= (1-a)\zeta \left(-\frac{l}{r_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r_0^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-lr_0} - b(\zeta) \frac{e^{-lr_0}}{r_0} - \\
&\quad - \int_{\zeta}^{\infty} \left(\frac{e^{-lr'(\beta)}}{r'(\beta)} \right)_{z=0} \frac{db}{d\beta} d\beta = -G \Big|_{z=2} = \\
&= -(1+a) \frac{e^{-lr_0}}{r_0} - \int_{\zeta}^{\infty} b(\beta) \left[\frac{e^{-lr'(\beta)}}{r'(\beta)} \right]_{z=0} d\beta
\end{aligned} \tag{4-115}$$

由于这个方程对 r_0 与 ζ 的所有值都要成立, 因此 r_0 的同次幂必须相等, 同时两个线积分也要相等, 即有

$$a=1, \quad b(\zeta)=1+a=2, \quad \frac{db}{d\beta}=b \tag{4-116}$$

由上式可得

$$b(\beta)=2e^{(\beta-\zeta)} \tag{4-117}$$

将这些结果代入(4-112)式可得

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{e^{-lr}}{r} + \frac{e^{-lr'}}{r'} + 2e^{-\zeta} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-lr'(\beta)+\beta}}{r'(\beta)} d\beta \tag{4-118}$$

这里 $r, r', r'(\beta)$ 与 l 由(4-109)、(4-113)、(4-114)与(4-103)诸式计算。这样, 对任意初始扰动 Ω_0 , 函数 $\bar{\psi}$ 可由这个格林函数 G 由(4-106)式计算而得。对于 Ω_0 的某些简单形式, $\bar{\psi}$ 可由(4-102)式直接解出。

三、惯性重力内波的解

为了讨论斜压大气中的地转适应过程，我们必须在给出 q^* 的初始与边界条件下，求解惯性重力波方程(4-92)式。为方便起见，我们借助于如下关系

$$x' = \lambda_0 x, \quad y' = \lambda_0 y, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad t' = \frac{t}{f} \quad (4-119)$$

将(4-92)式写为无量纲形式。这里 (x', y', z', t') 表示有量纲坐标与时间。

经过由(4-119)式所示的变量代换后，(4-92)式变为如下无量纲形式：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 1 \right) \left(\frac{\partial^2 q^*}{\partial z'^2} - l^2 q^* \right) + \nabla'^2 q^* = 0 \quad (4-120)$$

边界条件为：

$$\text{当 } z = 0 \text{ 与 } z \rightarrow \infty, \quad q^* = 0 \quad (4-121)$$

而初始条件为

$$q^*(x, y, z, 0) = q_0^*(x, y, z) \quad (4-122)$$

$$\left. \frac{\partial q^*}{\partial t} \right|_{t=0} = q_1^*(x, y, z) \quad (4-123)$$

由于(4-79)式表示 q^* 与 p^* 之间的静力平衡关系，而(4-86)式给出 p^* 与 ϕ 间的关系，因此， q^* 能借助 p^* 与 ϕ 的初始值表示出来。

为了求出方程(4-120)式在边界和初始条件(4-121)~(4-123)式下的解，首先对(4-120)式进行拉普拉斯变换。在变换中要用到如下关系式

$$e^{-st} \frac{\partial^2 q^*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{-st} \left(\frac{\partial q^*}{\partial t} + s q^* \right) \right] + s^2 e^{-st} q^* \quad (4-124)$$

q^* 的拉氏变换为

$$Q(x, y, z; s) = \int_0^{\infty} e^{-st} q^*(x, y, z; t) dt \quad (4-125)$$

利用(4-124)式, 可将(4-120)式写为

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + (1+s^2) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - l^2 Q \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - l^2 \right) (s q_0^* + q_1^*) \quad (4-126)$$

由 Q 的定义(4-125)式与 q^* 的边界条件, 可得 Q 的边界条件为

$$\text{当 } z=0 \text{ 和 } z \rightarrow \infty, \quad Q=0 \quad (4-127)$$

方程(4-126)式在边界条件(4-127)式下的解为:

$$Q(x, y, z; s) = -\frac{1}{4\pi} \iiint G^*(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; s) \left[s v_0(\xi, \eta, \zeta) + v_1(\xi, \eta, \zeta) \right] d\xi d\eta d\zeta \quad (4-128)$$

这里

$$\begin{cases} v_0(\xi, \eta, \zeta) = \left(l^2 - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) q_0^*(\xi, \eta, \zeta) \\ v_1(\xi, \eta, \zeta) = \left(l^2 - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) q_1^*(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \quad (4-129)$$

这里 G^* 是(4-126)与(4-127)两式组成系统的格林函数, 因此它满足如下方程:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{G}^*}{\partial \widetilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{G}^*}{\partial \widetilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{G}^*}{\partial z^2} - l^2 \widetilde{G}^* = 0 \quad (4-130)$$

这里

$$\widetilde{x} = (1+s^2)^{\frac{1}{2}} x, \quad \widetilde{y} = (1+s^2)^{\frac{1}{2}} y \quad (4-131)$$

由于 G^* 是作用点 (ξ, η, ζ) 与点 (x, y, z) 间距离的函数, 因此可把(4-130)式写为

$$\frac{d^2 \widetilde{G}^*}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{d\widetilde{G}^*}{dr} - l^2 \widetilde{G}^* = 0 \quad (4-132)$$

式中

$$\begin{cases} r_1^2 = \rho^2(1+s^2) + (z-\zeta)^2 \\ \rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \end{cases} \quad (4-133)$$

由于 G^* 必须满足边界条件(4-127)式, 所以它由下式给出

$$G^*(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; s) = \frac{e^{-lr_1}}{r_1} - \frac{e^{-lr_1'}}{r_1'} \quad (4-134)$$

式中

$$r_1'^2 = \rho^2(1+s^2) + (z+\zeta)^2 \quad (4-135)$$

(4-134)式中的第二项表示镜象点 $(\xi, \eta, -\zeta)$ 的作用。因为 r_1 与 r_1' 在地表面相等, 所以

$$\text{当 } z=0 \text{ 时, } G^*=0$$

为了要找出 G^* 的逆变换, 我们令

$$\alpha^2 = 1 + \frac{(z-\zeta)^2}{\rho^2}, \quad \alpha'^2 = 1 + \frac{(z+\zeta)^2}{\rho^2} \quad (4-136)$$

因此有

$$r_1^2 = \rho^2(s^2 + \alpha^2), \quad r_1'^2 = \rho^2(s^2 + \alpha'^2) \quad (4-137)$$

将上式代入(4-134)式, 有

$$G^*(s) = \frac{e^{-l\rho(s^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}}{\rho(s^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{e^{-l\rho(s^2+\alpha'^2)^{\frac{1}{2}}}}{\rho(s^2+\alpha'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4-138)$$

这个函数的逆变换是由(4-120)、(4-121)、(4-94)、(4-95)诸式组成的原始系统的格林函数(见 Doetsch, 1943; Churchill, 1958), 即

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } 0 \leq t \leq l\rho \\ \frac{1}{\rho} \left[J_0 \left(r \sqrt{\frac{t^2}{\rho^2} - l^2} \right) - J_0 \left(r' \sqrt{\frac{t^2}{\rho^2} - l^2} \right) \right], & \text{当 } t > l\rho \end{cases} \quad (4-139)$$

这里 J_0 是零阶贝塞尔函数, 而

$$r^2 = \rho^2 + (z - \zeta)^2 = \rho^2 \alpha^2 \quad (4-140)$$

$$r'^2 = \rho^2 + (z + \zeta)^2 = \rho^2 \alpha'^2 \quad (4-141)$$

由于 $G^*(s)$ 是 G 的拉氏变换, 即

$$G^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(t) dt \quad (4-142)$$

因此有

$$\frac{\partial G^*}{\partial t} = \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{\partial G}{\partial t} - sG \right) dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial G}{\partial t} dt - sG^* = 0 \quad (4-143)$$

也就是说 sG^* 的逆变换为 $\frac{\partial G}{\partial t}$ 。由此关系, 取 (4-128) 式的逆变换, 可得

$$\begin{aligned} q^*(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left(\frac{\partial G}{\partial t} v_0 + G v_1 \right) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left(\frac{\partial G_0}{\partial t} q_0^* + G_0 q_1^* \right) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (4-144)$$

这里 G, v_0 与 v_1 分别由 (4-139)、(4-129) 式所示, 而

$$G_0 = \left(l^2 - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) G \quad (4-145)$$

在推得 (4-144) 式中, 我们利用了 G, q_0^* 与 q_1^* 在地面都为零的条件。

四、斜压扰动调整至平衡态的定性讨论

1. 波动形式的解

与正压大气相类似, 假定初始时刻的波长与以后的波长都一样, 则初始扰动与平衡态变量都可写成如下的波动形式:

$$\begin{cases} \psi_0(x, y, z) = R_e \{ \psi_0 e^{i(k_1 x + k_2 y + m z)} \} \\ p_0^*(x, y, z) = R_e \{ p_0^* e^{i(k_1 x + k_2 y + m z)} \} \\ \bar{\psi}(x, y, z) = R_e \{ \bar{\psi} e^{i(k_1 x + k_2 y + m z)} \} \\ \bar{p}^*(x, y, z) = R_e \{ \bar{p}^* e^{i(k_1 x + k_2 y + m z)} \} \end{cases} \quad (4-146)$$

将上式波动形式的解代入(4-102)式, 如不用下边界条件(4-104)式, 则有如下关系式:

$$\bar{\psi} = \frac{k^2 \psi_0 + \frac{(l^2 + m^2) p_0^*}{f}}{(k^2 + l^2 + m^2)} \quad (4-147)$$

上式便是我们讨论的依据

2. 小尺度扰动

小尺度扰动可用

$$k^2 \gg l^2 + m^2$$

来表示, 由 l 的定义可得扰动尺度小于如下的变形半径:

$$\lambda_m = \frac{N}{f \sqrt{l^2 + N^2 c^{-2} + m^2}} \quad (4-148)$$

这时可分如下两种情况分别讨论:

① 初始时刻主要是速度场的扰动, 即

$$|\psi_0| \gg \frac{p_0^*}{f} \quad \text{或} \quad p_0^* = 0 \quad (4-149)$$

利用(4-147)式可得

$$\bar{\psi} = \psi_0, \quad \bar{p}^* = f \psi_0 \quad (4-150)$$

由上式可以看出, 流场变化不大, 而气压场变化很大, 气压场被调整得与流场建立地转平衡关系; 又知初始时刻的扰动动能中只有很少一部分被频散掉, 大部分都保持在流场里。

② 初始时刻主要是气压场的扰动, 即

$$\psi_0 = 0 \quad \text{或} \quad |\psi_0| \ll \frac{p_0^*}{f} \quad (4-151)$$

由(4-147)式可得

$$\overline{\psi} = -\frac{(l^2 + m^2)p_0^*}{fk^2}, \quad \overline{p^*} = \frac{l^2 + m^2}{k^2} p_0^* \ll p_0^* \quad (4-152)$$

由上式可见, 只有很小一部分初始气压场被保留下来, 而初始扰动的大部分位能被频散掉了。

综上所述, 在小尺度扰动中, 主要是气压场向风场适应。

3. 大尺度扰动

大尺度扰动可用

$$k^2 \ll l^2 + m^2$$

来表示, 也就是扰动尺度大于变形半径 λ_m 。

这时也有如下两种情况:

① 初始时刻主要是气压场的扰动, 即

$$\psi_0 = 0 \quad \text{或} \quad |\psi_0| \ll \frac{p_0^*}{f} \quad (4-153)$$

则由(4-147)式可得

$$\overline{\psi} = \frac{p_0^*}{f}, \quad \overline{p^*} = p_0^* \quad (4-154)$$

这就是说气压场没有变化, 而速度场改变很大, 并向气压场适应。这时大部分扰动位能还保持在原来的地方。

② 初始时刻主要是速度场的扰动, 即

$$p_0^* = 0 \quad \text{或} \quad |\psi_0| \gg \frac{p_0^*}{f} \quad (4-155)$$

由(4-147)式可得

$$\overline{\psi} = \frac{k^2 \psi_0}{l^2 + m^2} \ll \psi_0, \quad \overline{p^*} = \frac{fk^2 \psi_0}{l^2 + m^2} \quad (4-156)$$

这说明流场衰减很快, 只有一小部分初始运动场被保留下来, 而大部分的扰动动能被内重力波频散了。最终的气压场与流场呈地转平衡关系。由于大尺度扰动中 k^2 很小, 所以平衡气压场很微弱,

即气压场变化不大。

综上所述, 在大尺度扰动中主要是风场向气压场适应。

4. 几点讨论

① 从上面的讨论可知, 斜压大气的适应过程与正压大气的结论大致相同, 有差别的只是变形半径不一样。斜压大气的变形半径 λ_m 由(4-148)式所示, 它比由(4-44)式所定义的正压大气变形半径 λ 要小。所以, 当水平尺度小于 λ 而大于 λ_m 时, 斜压模式中的气压场比正压模式容易维持。

② 应当指出, 方程(4-102)式的解(4-147)式不符合下边界条件(4-104)式。若要求出满足上、下边界条件(4-104)与(4-105)两式的解, 我们在(4-146)式中用 $\cos mz$ 代替 e^{mz} , 并求形如 $A \exp(-lz)$ 的解, 得出:

$$\bar{\psi} = \frac{k^2 \tilde{\psi}_0 + (l^2 + m^2) \tilde{p}_0^*}{k^2 + l^2 + m^2} \left(\frac{e^{-az}}{a-1} + \cos mz \right) \quad (4-157)$$

$$\text{这里 } (\bar{\psi}_0(x, z), \tilde{p}_0^*(x, y)) = (\tilde{\psi}_0, \tilde{p}_0^*) \exp[i(k_1 x + k_2 y)] \quad (4-158)$$

$$a^2 = l^2 + k^2 \quad (4-159)$$

这样, 我们可根据(4-157)式作类似讨论, 也可得出相同的定性结果。

参 考 文 献

- Bolin, B. (1953). *The adjustment of a non-balanced velocity field towards geostrophic equilibrium in a stratified fluid*. *Tellus*, 5, 373-378.
- Blumen, E. (1967). *J. Atmos. Sci.*, 24, 325-332.
- _____ (1972) *Rev. of Geophys. and Space Phys.*,

10, No. 2, 485-528.

Cahn, A. (1945). *An investigation of the free oscillations of a simple current system*, *J. Meteorol.* 4, 135-163.

Chen, C-S. (1963). *Acta Meteorol. Sinica*, 33, 51-63; 153-162.

Dickinson, R. E. (1969). *Rev. Geophys. Space Phys.*, 7, 483-514.

Fischer, G. (1963), *Bericht d. Wetterdienstes* 12, No. 87.

Kibel, I. A., (1955) *Dok Akad. Nauk SSSR* 104, 60-63.

_____ (1963) *An introduction to the hydrodynamic methods of short period weather forecasting*, Pergamon Press, New York, 375 pp.

Kuo, H. L. (1953). *Geophysical Research papers* No. 24, *AF CRC Tech Report*, 53-35.

Kuo, H. L. (1956). *Tellus* 3, 373-383.

Kuo H. L. (1973) *Advances in Appl Mechanics*, Vol. 13, 248-330, Academic Press.

Obukhov, A. K. (1949) *Bull. Acad. Sci. USSR, Geogr. -Geophys. Ser.*, 13, 281-306.

Okland, H., (1970) *Mon. Weather Rev.*, 98, 271-279.

Raethjen, P. (1950) *Arch. Met. Geoph. u. Biok. Ser. A*, 2, 207-222.

Rossby, C-G. J. *Mar. Res.* 1, (1) (1937) 15-28; (2) (1938) 239-263.

_____ (1945) *J. Meteorol.* 187-204.

Tseng, C. T. (1963) *Acta Met. Sinica*, 2, 163-173; 3, 281-289.

_____ (1978) *Sci. Atmos. Sinica* 2, 1-14.

Yeh, T.C. (1957) *J. Met. Soc. Japan*, 130-134.

Yeh, T.C. and M.S. Li (1965) *Adjustment problems in the Atmosphere*, Sci. publish. Soc.

Veronis, G. (1956) *Deep sea Res.*, 3, 157-177.

第五章 永恒性波

在沿纬圈的方向上,大气的东西风带存在着定常的不均匀性。在高空表现为常定的或存在甚久的槽脊,在低空表现为半永久性低压和高压。例如,1月份中高纬度有三个平均槽脊,7月份有四个平均槽脊;7月份低纬度高空在太平洋、大西洋与北非大陆都有明显的高压中心。这些现象是大气动力学讨论的重要课题之一。

本章并不涉及这些现象的成因,只是讨论大气中为什么会保持这种半永恒性的流场。我们从考虑 β 效应的准地转位涡方程出发,利用永恒性波波形不变的特征,把它化为非线性波动方程,求得非线性永恒性波解。发现这种永恒性波解和西风带平均槽脊、低纬副热带高压分布有某些相似之处。这说明具有 β 效应的旋转流体中是存在有限振幅的永恒性波。

§1 非线性波的处理方法

一、准地转位涡方程

由于永久性波是大尺度的运动,并且这种运动随时间的变化是很缓慢的,所以可采用静力近似与准地转近似。在这种运动中,流场的变化可以由准地转位涡方程(3-88)式来表示。由静力近似,垂直方向由 P 坐标表示。由于运动尺度较大,需考虑地球球形的影响,因此采用球坐标系 (λ, φ, p, t) 来描写流体的运动。

令 q 表示相对位涡,由(3-87)式得知,在球坐标系中下式成立:

$$q = \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \equiv \Delta^2 \psi \quad (5-1)$$

其中 ∇^2 为球面拉普拉斯算子, 它为

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{1-\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1-\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \quad (5-2)$$

式中 a = 地球半径

$$\eta = \sin \varphi \quad (5-3)$$

考虑绝热无摩擦流动, 位涡方程(3-88)式为

$$\frac{\partial(f+q)}{\partial t} + J(\psi, f+q) = 0 \quad (5-4)$$

考虑 f 随纬度的变化, 并把上式用球坐标表示, 则得

$$a^2 \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial q}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial q}{\partial \lambda} + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0 \quad (5-5)$$

此式便是我们讨论永久性波的基本方程。

谈到波动, 人们很自然会联想到本书第二章中的微扰方法。早在1939年, 罗斯贝考察了具有 β 效应的纯二维无辐散运动, 假定大气在经向范围是无穷的, 利用线性化涡度方程的解, 来研究永久性波的传播。霍维兹(Haurwitz 1940)将这结果推广到侧向范围有限的球形大气中。以后不少气象学者如厄台勒(Ertel 1943)、克累厄(Craig 1945)、奈姆顿(Neamtan 1946)等认为涡度方程的线性化是不必要的, 因为线性化后方程的解也适合原来的非线性涡度方程。汤姆生(Thompson 1948)还指出, 在某些特殊类型的运动中, 非线性涡度方程能还原成线性方程。作者(郭晓岚 1959)考虑地球球形影响, 研究了分层斜压大气中的三维绝热运动, 并求出其永久性波。他将准地转位涡方程(5-5)式作为基本方程, 经过特殊处理, 将它化为有关 ψ 的线性偏微分方程。

二、非微扰线性方程

为了求得位涡方程(5-5)式的非线性永久性波解, 我们先来分析一下永久性波的特征。永久性波的特征是其波形不变, 而以恒定的角相速度 α 移动。这样, 这种波动可由如下一般关系式表示

出来:

$$\psi(\lambda, \eta, p, t) = \psi(\lambda - \alpha t, \eta, p) \quad (5-6)$$

这里

$$\alpha = i \text{ 方向的角相速度} = \text{常数} \quad (5-7)$$

目前,我们还不知道 ψ 的具体函数形式,但由(5-6)式可得如下关系式

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (5-8)$$

将(5-6)式代入(5-5)式得到

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial q}{\partial \eta} + 2\Omega \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + a^2 \alpha \right) \frac{\partial q}{\partial \lambda} = 0 \quad (5-9)$$

作如下变量代换

$$\begin{cases} \Psi(\lambda, \eta, p, t) = \psi + a^2 \alpha \eta \\ G(\lambda, \eta, p, t) = \Delta^2 \psi + 2\Omega \eta = q + 2\Omega \eta \end{cases} \quad (5-10)$$

由上式我们可得

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, & \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + a^2 \alpha, \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda} = \frac{\partial q}{\partial \lambda}, & \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\partial q}{\partial \eta} + 2\Omega \end{cases} \quad (5-11)$$

这样, (5-9)式便变为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 \quad (5-12)$$

上式实际上是以 λ, η 为自变量,关于 Ψ, G 的雅哥比行列式。由(5-12)式可知, Ψ 与 G 之间不是相互独立的,而是存在着某种函数关系,即

$$G = F(\Psi) \quad (5-13)$$

这里 F 表示任意函数。这就是说, G 只要是 Ψ 的任意函数,则(5-9)式便可成立。可是这个普遍形式的解没能给我们带来具体有用的结果。我们必须从中取一个特殊函数进行讨论,看它能否得

到与实际较为接近的结果。

最简单的情况,是取 F 为线性函数,即令

$$G = -\frac{\mu}{a^2} \Psi \quad (5-14)$$

式中 μ 为待定常数。本章主要讨论在(5-14)式成立的条件下,非线性波动方程的解是什么形式。

将(5-10)式代入(5-14)式得出有关流函数 ψ 的线性方程式:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \frac{\mu}{a^2} \psi = -(2\Omega + \mu\alpha)\eta \quad (5-15)$$

为方便起见,我们在垂直方向上采用 ξ -坐标,即令

$$\xi = \frac{p}{p_b} \quad (5-16)$$

式中 p_b 为地表面气压。令 ξ 坐标下的静力稳定度函数(假定它仅与 ξ 有关)为

$$\sigma^* = -\frac{T}{\bar{T}} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \ln \theta}{\partial \xi} = \sigma^*(\xi) \quad (5-17)$$

比较 σ 与 σ^* 的定义可得

$$\sigma = \frac{R\bar{T}}{p_b^2} \sigma^* \quad (5-18)$$

将它代入(5-15)式得到 ξ 坐标下 ψ 的线性方程式

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{f^2}{R\bar{T}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\sigma^*} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\mu}{a^2} \psi = -(2\Omega + \mu\alpha)\eta \quad (5-19)$$

§2 边界条件

为了要求解(5-19)式,我们还必须对边界条件作一番讨论。关于函数 ψ ,我们先作如下假定:对于任意的 λ , η 与 ξ , ψ 总保持有限。

由于我们考虑球坐标中的流场,所以在水平方向上没有边界,只有在垂直方向上有上、下边界。下面我们分别讨论这两个边界条件。

一、地面边界条件

我们忽略地形作用,即假设地表面是平的,则地表面大气的垂直速度为零,也就是

$$\omega|_{\xi=1} = 0 \quad (5-20)$$

由于(5-19)式是有关 ψ 的方程式,所以我们必须把(5-20)式化为有关 ψ 的边界条件,为此我们要用热流量方程。

在压力坐标系中,我们有

$$\omega \equiv \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z}$$

所以下式成立

$$\omega_b = \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\xi=1} \quad (5-21)$$

式中 ω_b 表示 ω 在地表面的值。在静力平衡下,位势高度 Φ 可由流函数 ψ 来表示,即

$$\Phi = f\psi$$

由此,在地面上的热流量方程可写为

$$\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \xi} + S \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \lambda} = 0, \quad (\xi=1) \quad (5-22)$$

其中

$$S = - \frac{\partial \ln \theta_s}{\partial \xi} \quad (5-23)$$

代表地表面附近的静力稳定度。

如果 ψ 满足下式

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -s\psi, \quad (\xi = 1) \quad (5-24)$$

则 ψ 也满足(5-22)式, 所以我们将上式作为地面边界条件。由于在通常情况下 s 的数值较小, 因此上式所示的边界条件可简化为

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = 1) \quad (5-25)$$

二、大气上界边界条件

由于本章考虑的是大尺度运动, 所以成立地转关系。在地转关系中, ψ 与气压 p 成正比, 与密度 ρ 成反比, 即

$$\psi = \frac{p}{f\rho} = \frac{RT}{f} \quad (5-26)$$

由上式可知, 虽然当 $z \rightarrow \infty$ (即 $\xi \rightarrow 0$) 时, p 与 ρ 都趋于零, 但它们之比却是有限值, 与大气上界的温度成正比, 而温度不可能趋于无穷。由此, 大气上界的边界条件可写为

$$\text{当 } \xi \rightarrow 0, \psi \text{ 为有限值} \quad (5-27)$$

§ 3 简化情况下的谐波分析

一、两个简化假定

为了便于求得方程(5-19)式在上节介绍的边界条件下的解, 我们设想如下的简单情况:

① 在相对涡度 $q = \Delta^2 \psi$ 的计算中, 令柯氏参数为常数, 即

$$f = f_0 = \text{常数} \quad (5-28)$$

② 由于在对流层中静力稳定度随高度的变化不太显著, 所以将平均值 $\bar{\sigma}^*$ 来代替 $\sigma^*(\xi)$, 即

$$\sigma^* = \bar{\sigma}^* = \text{常数} > 0 \quad (5-29)$$

在上述两个简化条件下, (5-19)式便化为

$$\nabla^2 \psi + \frac{f_0^2}{RT \sigma^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\mu}{a^2} \psi = -(2\Omega + \eta\alpha)\eta \quad (5-30)$$

二、谐波分析

由于

$$\psi_n = -\frac{2\Omega + \mu\alpha}{\mu - 2} \eta$$

是(5-30)式的一个特解, 所以我们把(5-30)式的解写成如下的波动形式

$$\psi(\lambda, \eta, \xi, t) = \sum_j \sum_{m=0}^{n_j} A_{n_j}^m W_{n_j}^m(\eta) N_j(\xi) e^{im(\lambda - \alpha t)} - \frac{(2\Omega + \mu\alpha)\eta}{\mu - 2} \quad (5-31)$$

这里 m 为纬圈上的波数, $A_{n_j}^m$ 为 (m, n_j) 分量的振幅, $W_{n_j}^m(\eta)$ 与 $N_j(\xi)$ 分别为 j 与 k 方向上的特征函数, 并由下列两个方程式给出:

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dW_{n_j}^m}{d\eta} \right] + \left[n_j(n_j + 1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] W_{n_j}^m = 0 \quad (5-32)$$

$$\frac{d^2 N_j}{d\xi^2} = \overline{\sigma^*} l_j^2 N_j \quad (5-33)$$

这里 n_j 是正整数或零, l_j 是 k 方向上的特征值, 它与 n_j 之间满足下列关系式:

$$l_j^2 = \frac{RT}{f_0^2 a^2} [n_j(n_j + 1) - \mu] \quad (5-34)$$

由此可见(5-32)式便是缔合勒让德方程, 所以该方程的解为

$$W_{n_j}^m = P_{n_j}^m(\eta) \quad (5-35)$$

这里 $P_{n_j}^m(\eta)$ 为缔合勒让德多项式。

下面求方程(5-33)式的解。由于函数 ψ 已写成由(5-31)式所示的谐波形式，所以简化的地面边界条件(5-25)式及大气上界边界条件(5-27)式便为：

$$\begin{cases} \text{当 } \xi = 1, \frac{dN_j}{d\xi} = 0 \\ \text{当 } \xi = 0, N_j \text{ 为有限值} \end{cases} \quad (5-36)$$

我们发现：当 j 是整数时，函数

$$N_j(\xi) = \cos j\pi\xi \quad (5-37)$$

满足边界条件(5-36)式，并当

$$-\pi^2 j^2 = \overline{\sigma} * l_j^2 \quad (5-38)$$

成立时，(5-37)式便是方程(5-33)式的解。从(5-34)与(5-38)两式中消去 l_j ，可得

$$n_j(n_j + 1) = \mu - \frac{\pi^2 a^2 f_0^2}{R \overline{T} \overline{\sigma} *} j^2 \quad (5-39)$$

式中 j 是正整数或零。这样，由上式可以把待定常数 μ 确定出来。

由于本章考虑的是非线性波动，它与线性波动有很多不同之处。非线性永久性波动的特征为：

① 在线性波动中，可有无穷多个态相互迭加，即表示各态的序号 j 可由零加到无穷大；而本节所述的非线性波动中， j 只能取几个使(5-39)式成立的数值，而不是象线性波动中， j 可从零取到无穷大。

② 如果 μ 取某一个值，找不到正整数或零(n_j 与 j)能使(5-39)式成立，那么这个 μ 值并不是我们所要求的待定常数，应把它换掉，另考虑其他数值。如果对于某一个 μ ，只有一个 j 与 n_j (都为正整数或零)能使(5-39)式成立，那么只有一个波解。如果对于同一个 μ 值，同时有好几个 j 与 n_j 满足(5-39)式，那么这些解(j, n_j)可以线性迭加起来。对应于不同 μ 值的波解不能迭加。这就是说，永久性波解由 μ 进行分类，对应相同 μ 值的波动解归为同一

类,对应不同 μ 值的波动解应属于不同的类别。属于同一类的波动解能线性迭加起来,属于不同类别的波动解不能迭加。

这里我们再要指出的是,(5-31)式的最后一项表示水平流场的刚性转动部分,即

$$\overline{\omega} = -\frac{1}{a^2} \frac{e \overline{\psi}}{\partial \eta} = \frac{2\Omega + \mu\alpha}{\mu - 2} = \text{平均角速度} \quad (5-40)$$

所以扰动的角相速度由下列霍维兹公式给出

$$\alpha = \overline{\omega} - \frac{2}{\mu} (\Omega + \overline{\omega}) \quad (5-41)$$

当我们取 $j = 0$ 时,由(5-37)式可知

$$N_0(\xi) \equiv 1$$

这说明波动不随高度而变化,所以它代表纯粹正压波解。在这种情况下, n_j 只能取一个值 n_0 ,由(5-39)式可得

$$n_0(n_0 + 1) = \mu \quad (5-42)$$

这时波动解可写成如下形式

$$\psi_0 = \sum_{m=0}^{n_0} A_{n_0}^m P_{n_0}^m(\eta) \sin m(\lambda - \alpha t + \varepsilon_m) \quad (5-43)$$

当 $j \geq 1$,由(5-37)式可知,波动随高度 ξ 而变,所以表现为斜压波的形式。

三、谐波分析的例子

若取 $\mu = 156$, $\overline{\sigma}^* = \frac{1}{3}$, $\overline{T} = 290\text{K}$,这时我们有

$$\begin{cases} j = 0, n_0 = 12; & j = 1, n_1 = 3 \\ l_1^2 = \frac{R\overline{T}}{f_0^2 a^2} [n_1(n_1 + 1) - \mu] = -144 \frac{R\overline{T}}{f_0^2 a^2} < 0 \end{cases} \quad (5-44)$$

对于这种波解,在北半球范围内分析等 ψ 线,可以看出流场的流

动情况。图 5-1 与图 5-2 分别给出在 $f = 2\Omega\eta$ 不为常数时， $m = 3$ 与 $m = 6$ 的波动解。在 $f = f_0$ 为常数时的波动解大致与此相似。

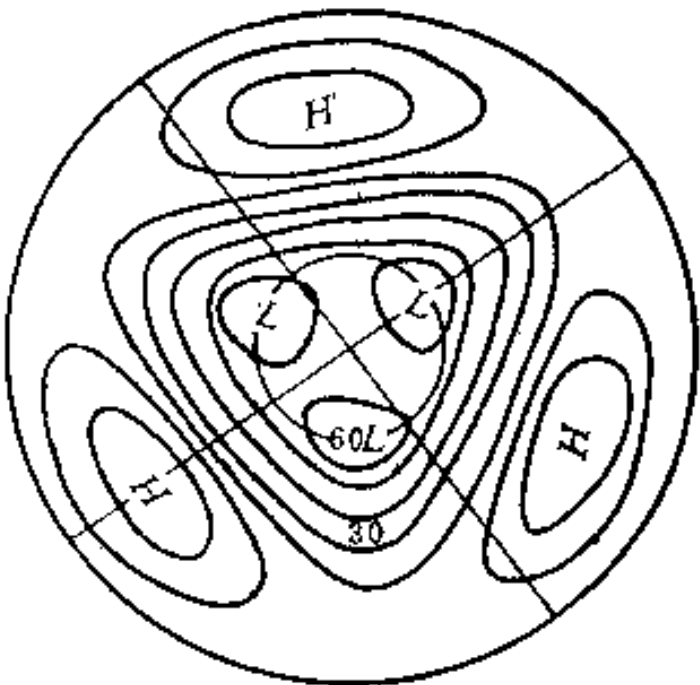


图 5-1 水平流线型($m = 3$)

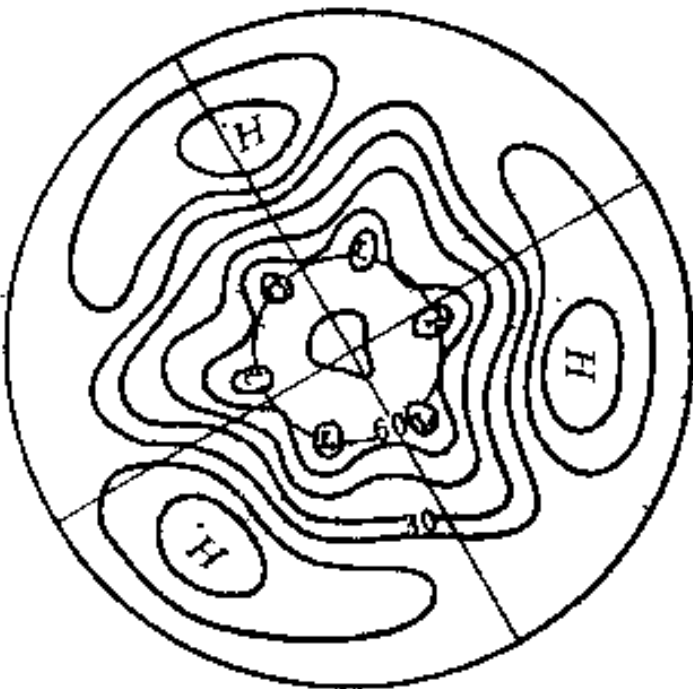


图 5-2 水平流线型($m = 6$)

从图 5-1 可以看出中高纬度有三个大槽，极地附近有三个低压中心，低纬存在三个高压中心，这与有代表性的平均天气图上的流场相象。

§ 4 接近真实大气的谐波分析

上节是在(5-28)与(5-29)式所示的两个简化条件下进行谐波分析的。为了更符合大气中的真实情况,本节介绍不用这些假定而进行的谐波分析。分别就静力稳定度随高度变化与柯氏参数随纬度变化进行讨论。

一、静力稳定度随高度变化时的垂直振幅函数

这里我们假定

$$f = f_0 = \text{常数}$$

1. 静力稳定度的垂直分布

在大气中静力稳定度是随高度而变的,特别是在穿过对流层顶到平流层顶这个范围内,变化尤为明显。图 5-3 给出 z 坐标下的静力稳定度因子

$$\Gamma = -T \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = -\frac{p\sigma}{R} \quad (5-45)$$

随高度 z 的变化情况,式中 σ 为 p 坐标系中的静力稳定度。

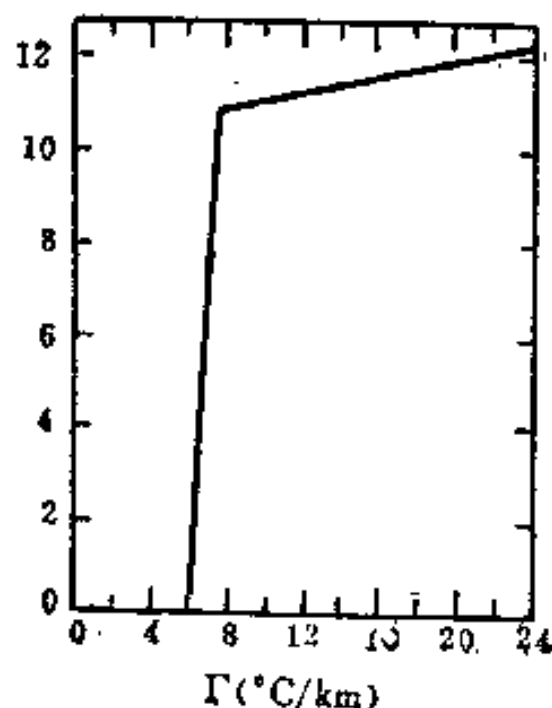


图 5-3

从图 5-3 可以看出, 在对流层中 Γ 几乎不随高度变化, 而当穿过对流层顶时, Γ 随高度增加很快, 变得几乎不连续。在平流层中, Γ 又变为高度的连续函数。为了要考虑静力稳定度的不连续性所产生的动力影响, 我们必须把大气进行分层, 每一层中 σ 都是高度的连续函数, 而不同层次 σ 的函数形式是不一样的。为简单起见, 我们根据对流层 ($\xi = 1$ 到 $\xi = \xi_t$) 中 Γ 几乎为常数, 平流层 ($\xi = \xi_t$ 到 $\xi = 0$) 中几乎为等温这样一些特点, 将稳定度因子表示为

$$\sigma_k = \frac{c_k}{T_k(\xi + \alpha_k)^2} \quad (5-46)$$

这里 $k = 1$ 表示对流层, $k = 2$ 表示平流层。 $c_1 = 100\text{K}$, $\alpha_1 = 0.5$ 能得到对流层的稳定度值 Γ , 而 $c_2 = 50\text{K}$, $\alpha_2 = 0$ 能作为等温平流层的代表。

2. 垂直方向的振幅函数 $N^{(k)}(\xi)$

由于静力稳定度是高度 ξ 的函数, 且在对流层与平流层各取不同的形式, 当将波动形式解(5-31)式代入(5-19)式, 可得垂直方向振幅函数满足下式

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\sigma_k^*} \frac{dN_j^{(k)}}{d\xi} \right) = I_j^2 N_j^{(k)} \quad (5-47)$$

这里 $N_j^{(k)}$ 中的上标 $k = 1$ 表示对流层, $k = 2$ 表示平流层。

令

$$\begin{cases} N_j^{(k)}(\xi) = (\xi + \alpha_k)^{-\frac{1}{2}} R_j^{(k)}(\xi) \\ q_k(\xi) = \ln \left[\left(\frac{1 + \alpha_k}{\xi + \alpha_k} \right) K_k \right] \\ K_1 = 1, \quad K_2 = \left(\frac{1 + \alpha_1}{\xi_t + \alpha_1} \right)^{\xi_t} \end{cases} \quad (5-48)$$

则(5-47)式变为

$$\frac{d^2 R_j^{(k)}}{dq_k^2} + [b_j^{(k)}]^2 R_j^{(k)} = 0 \quad (5-49)$$

这里

$$\begin{cases} [b_j^{(k)}]^2 = \frac{Rc_k}{f^2 a^2} \Delta\mu - \frac{1}{4} \\ \Delta\mu = \mu - n_j(n_j + 1) = -\frac{f_0^2 a^2}{RT} l_j^2 \end{cases} \quad (5-50)$$

地面边界条件(5-24)式可写为

$$\frac{dR_j^{(1)}}{dq_1} + hR_j^{(1)} = 0, \quad q_1 = 0 \quad (5-51)$$

这里 $h = 0.5 + \frac{\partial \ln \theta_s}{\partial \xi} \approx \frac{1}{2}$

大气上界边界条件为

$$R_j^{(2)} = \xi^{\frac{1}{2}} N_j^{(2)} \text{ 为有限, } \xi = 0 \quad (5-52)$$

上式也表示大气上界的能量密度为有限。

所以当 $[b_j^{(k)}]^2$ 是正数时, 则垂直方向的振幅函数(为简单起见, 略去下标 j)为

$$N_1(\xi) = A(\xi + \alpha)^{-\frac{1}{2}} \left(\sin b_1 q - \frac{b_1}{h} \cos b_1 q \right),$$

$$\text{当 } 0 \leq q \leq q_1 = \ln \left(\frac{1 + \alpha}{\xi_1 + \alpha} \right) \quad (5-53)$$

$$N_2(\xi) = \xi^{-\frac{1}{2}} (A_2 \sin b_2 q + B_2 \cos b_2 q),$$

$$\text{当 } q_1 \leq q \leq \infty \quad (5-54)$$

利用对流层顶处振幅函数的连续性, 即

$$\begin{cases} N^{(1)} = N^{(2)} \\ \frac{dN^{(1)}}{d\xi} = \frac{dN^{(2)}}{d\xi} \end{cases} \quad (\xi = \xi_1) \quad (5-55)$$

可将待定系数 A_2 与 B_2 由 A 表示出来, 所以在(5-53)与(5-54)两式中只有 A 是任意常数。我们从这两个公式中很容易看出, 当 $\Delta\mu$ 很小时, 在对流层中 $N(\xi)$ 随高度的变化很小; 当 $\Delta\mu$ 很大时, $N(\xi)$ 表现为通常重力内波的形式。

除此以外，方程(5-49)式在边界条件(5-51)与(5-52)式下存在另外一种类型的解。这个解本身在对流层顶是连续的，但具有不连续的导数，即

$$\begin{cases} N^{(1)} = N^{(2)} \\ \frac{dN^{(1)}}{d\xi} \neq \frac{dN^{(2)}}{d\xi} \end{cases} \quad (\xi = \xi_t) \quad (5-56)$$

由于对流层顶是稳定度因子的不连续面，很明显也是温度的不连续面。当我们考虑扰动通过对流层顶时，具有温度与风的垂直切变这样不连续的情况，并假定这种扰动是准永久性的并由位涡方程所控制，这时(5-49)式中的 $[b_j^{(k)}]^2 < 0$ ，所以解为

$$N^{(1)}(\xi) = \frac{A}{(\xi + \alpha)^{\frac{1}{2}}} [(\beta_1 - h)e^{\beta_1 q} + (\beta_1 + h)e^{-\beta_1 q}],$$

当 $0 \leq q \leq q_1$ (5-57)

$$N^{(2)}(\xi) = \frac{B}{\xi^{\frac{1}{2}}} \exp[-\beta_2(q - q_1)],$$

当 $q_1 \leq q \leq \infty$ (5-58)

这里

$$\begin{cases} B = A [(\beta_1 - h)e^{\beta_1 q_1} + (\beta_1 + h)e^{-\beta_1 q_1}] \left(\frac{\xi_t}{\xi_t + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \beta_1^2 = \frac{Rc_1}{f_0^2 a^2} [n_j(n_j + 1) - \mu] + \frac{1}{4} \\ \beta_2^2 = \frac{Rc_2}{f_0^2 a^2} [n_j(n_j + 1) - \mu] + \frac{1}{4} \end{cases} \quad (5-59)$$

由(5-57)与(5-58)两式所示垂直方向的振幅函数由图 5-4 所示，图中给出两种不同 $\Delta\mu$ 值的函数曲线。可以看出，它们与大气中通常观测到的大尺度流动的垂直分布是很相象的。

二、柯氏参数随纬度变化时的经向振幅函数

考虑柯氏参数随纬度变化，则

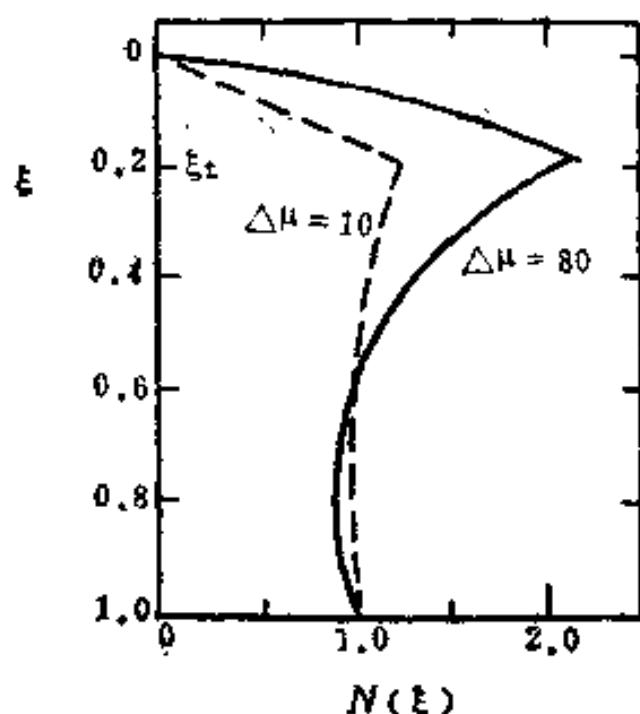


图 5-4 垂直振幅函数 N 随高度的变化

$$f = 2\Omega\eta = \text{常数} \quad (5-60)$$

将波动形式解(5-31)式代入 (5-19) 式可得经向方向的振幅函数 $w_{n_j}^m$ 满足如下方程式

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dw_{n_j}^m}{d\eta} \right] + \left[\mu + \frac{4\Omega^2 a^2 l_j^2}{RT} \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] W_{n_j}^m = 0 \quad (5-61)$$

对于满足

$$-1 \leq \eta \leq 1$$

的所有 η 来说, $W_{n_j}^m(\eta)$ 为有限, 而 l_j^2 是(5-47)式中的特征值。(5-61)式是二阶常微分方程, 但它不是缔合勒让德方程, 所以此方程的解不能用缔合勒让德函数 $P_{n_j}^m(\eta)$ 来表示。我们可用变量变换, 使方程中自变量 η 不在分母中出现, 然后把未知函数展成幂级数, 从而得到 $W_{n_j}^m$ 的解。具体解法请参阅: “郭晓岚: 1959 *J. of. Mot.* p524—p534。”

参 考 文 献

- Blinova, E.N.* (1943) *Compus Rendus (doklady) de l'Academic des sciences de l'URSS*, 39, No. 7.
- Craig, R.A.* (1945). *J. Meteorol.*, 2, 173-178.
- Ertel, H.* (1943) *Z. Meteorol.*, 60, 332-334.
- Haurwitz, B.* (1940). *J. Mer. Res.* 3, 254-267.
- Kuo, H.L.* (1959). *J. Meterol.*, 16, 524-534.
- Niemtan, S.M.* (1946). *J. Meterol.*, 3, 53-56.
- Rossby, C-G.* (1939). *J. Mer, Res.*, 2, 38-55.

第六章 大气中能量的平衡

空间范围很大、变化时间又很长的大气大尺度运动的基本特征是准水平性和准地转平衡。当然大气不可能完全处于平衡状态,还会不断地产生扰动,我们在前面几章已经介绍了大尺度扰动的一些基本特征。本章首先将大气分为基本流场与扰动流场,接着分别求出基本流场与扰动流场的动能与有效位能的变化方程,最后讨论对流层大气中能量是如何循环的。

§ 1 大气基本状态与扰动

一、基本状态与扰动的划分

大气中的基本流场(即大气环流)通常是指气流经空间、或时间,或同时经空间、时间平均后所得到的那些运动分量。由于大气中平均流场最显著的特征是表现为东西风带,所以我们把 $u(x, y, z, t)$ 沿整个纬圈的平均

$$\bar{U} = \bar{U}(y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y, z, t) d\lambda \quad (6-1)$$

作为基本流场。我们也可用其他方式求平均,有可能得出经向的平均气流,可是这种气流很微弱,所以我们总假定基本流场是东西风带。由此可见,真正观测到的流场是平均纬向气流与扰动气流迭加而成,即

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = \bar{U}(y, z, t) + u'(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) = v'(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) = w'(x, y, z, t) \end{cases} \quad (6-2)$$

这里 u, v, w 是真实气流, u', v', w' 为扰动的气流。由上式可知, 经向与垂直方向均无基本流场, 即

$$\begin{cases} \bar{V}(y, z, t) = 0 \\ \bar{W}(y, z, t) = 0 \end{cases} \quad (6-3)$$

将其他各种气象要素绕纬圈求平均得基本状态, 所以气象变量的真实状态也可分成基本状态与扰动:

$$\begin{cases} p(x, y, z, t) = p_0(y, z, t) + p'(x, y, z, t) \\ \rho(x, y, z, t) = \rho_0(y, z, t) + \rho'(x, y, z, t) \\ T(x, y, z, t) = T_0(y, z, t) + T'(x, y, z, t) \\ \theta(x, y, z, t) = \theta_0(y, z, t) + \theta'(x, y, z, t) \end{cases} \quad (6-4)$$

式中 $p_0, \rho_0, T_0, \theta_0$ 为基本状态, p', ρ', T', θ' 为扰动。

令 A 为任一个气象变量, 其沿整个纬圈的平均为

$$\bar{A} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A d\lambda = \frac{1}{L} \int_0^L A dx \quad (6-5)$$

由(6-2)与(6-4)两式可知, 扰动变量的纬圈平均值为零, 即

$$\bar{A}' = 0 \quad (6-6)$$

A' 为扰动变量 $u', v', w', p', \rho', T', \theta'$ 中的任一个。

由纬圈平均的定义可知

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = \frac{1}{2\pi a \cos \phi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial A}{\partial \lambda} d\lambda = 0 \quad (6-7)$$

二、大气扰动所满足的控制方程组

为了使控制方程组具有比较简单而便于积分的形式, 先作如下的变量变换

$$\begin{cases} u^*, v^*, w^* = \rho_0^{\frac{1}{2}}(u', v', w') \\ p^*, \rho^* = \rho_0^{-\frac{1}{2}}(p', \rho') \\ s^* = \rho_0^{\frac{1}{2}} \frac{\theta'}{\theta_0} \\ (\dot{Q}^*, f_x^*, f_y^*) = \rho_0^{\frac{1}{2}}(\dot{Q}, f_x, f_y) \end{cases} \quad (6-8)$$

令

$$s_{0y} = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial y}, \quad s_{0z} = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \quad (6-9)$$

并假定

$$\Gamma = -\frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} - s_{0z} \doteq -\frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (6-10)$$

利用第二章 § 2 中所述的小扰动方法, 可将扰动的控制方程组写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) u^* + (\bar{U}_v - f) v^* + w^* \bar{U}_z = -\frac{\partial p^*}{\partial x} - f_x^* \quad (6-11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) v^* + f u^* = -\frac{\partial p^*}{\partial y} - f_y^* \quad (6-12)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} + \Gamma p^* = g s^* \quad (6-13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) s^* + v^* s_{0y} + w^* s_{0z} = \frac{\dot{Q}^*}{c_p T} \quad (6-14)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} - \Gamma w^* = 0 \quad (6-15)$$

其中(6-11)与(6-12)两式为水平方向运动方程, (6-13)式为静力平衡方程, (6-14)式为扰动热流量方程, (6-15)式为滞弹性假设下的连续方程。 \bar{U}_v 与 \bar{U}_z 分别表示基本纬向气流的经向与垂直方向的切变, 即

$$\bar{U}_y = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}, \quad \bar{U}_z = \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \quad (6-16)$$

如果在(6-11)~(6-15)式中令基本气流 \bar{U} 为零, 则可得到第二章方程式(2-8)~(2-13)式。

三、大气基本状态所满足的控制方程组

由于基本气流是东西风带, 也就是没有经向与垂直方向的分量, 所以我们只需求出 i 方向上基本气流所满足的运动方程。

真实气流在 i 方向上的运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - f_{ox} \quad (6-17)$$

两边乘以 ρ_0 得到

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_0 v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho_0 w \frac{\partial u}{\partial z} - f \rho_0 v = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_0 f_{ox} \quad (6-18)$$

将(6-2)与(6-4)式代入上式, 并对整个纬圈求平均, 利用(6-6)式的结论, 可得

$$\frac{\partial(\rho_0 \bar{U})}{\partial t} = -\frac{\partial(\overline{u^* v^*})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{u^* w^*})}{\partial z} - \bar{f}_{ox} \quad (6-19)$$

其中

$$\bar{f}_{ox} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_0 f_{ox} d\lambda \quad (6-20)$$

为平均纬向摩擦作用。

真实大气的热流量方程为

$$\frac{\partial \ln \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \ln \theta = \frac{\dot{Q}}{c_p T} \quad (6-21)$$

两边乘以纬向平均密度 ρ_0 可得

$$\rho_0 \frac{\partial \ln \theta}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \ln \theta = \frac{\rho_0 \dot{Q}}{c_p T} \quad (6-22)$$

连续方程乘以 $\ln \theta$ 得到

$$\ln \theta \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \ln \theta \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (6-23)$$

将(6-22)与(6-23)两式相加,并令

$$s = \ln \theta \quad (6-24)$$

可得

$$\frac{\partial(\rho_0 s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 u s)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 v s)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0 w s)}{\partial z} = \frac{\rho_0 \dot{Q}}{c_p T} \quad (6-25)$$

将上式沿纬圈平均,利用(6-7)式的结果得到

$$\frac{\partial(\rho_0 \bar{s})}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{v}^* s^*}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}^* s^*}{\partial z} + \frac{\rho_0 \bar{\dot{Q}}}{c_p T} \quad (6-26)$$

§ 2 大气扰动的能量方程

在基本纬向气流上能经常产生扰动,或原来的扰动能逐渐消失而恢复到基本纬向气流,这都与扰动的能源和能汇是休戚相关的。为了要了解流场处于什么情况下会使扰动增大,扰动能量的变化与什么因素有关,扰动气流的动能与位能间是怎样转化的,我们必须首先求出大气扰动的动能方程和位能方程。在求出这两个方程以前,我们给出总体平均的概念。

一、气象变量的总体平均值

假定大气被限制在 β 平面的纬向的通道 τ 里, $y = y_1$ 与 $y = y_2$ 是这个通道的南北边界; $z = H$ (H 也可 ∞) 与 $z = 0$ 为这个通道的上、下边界(垂直方向),这个通道环绕纬圈一周。我们假定这个通道是刚性的,并认为地面是平的,大气的高度为 H ,由大气上界能量密度为零而推得大气上界($z = H$)的垂直速度为零。即

$$\begin{cases} v = 0, & \text{当 } y = y_1 \text{ 与 } y = y_2 \\ w^* = 0, & \text{当 } z = 0 \text{ 与 } z = H \end{cases} \quad (6-27)$$

对于任一个有限气象变量 $A(x, y, z, t)$, 若对这个通道 τ 求平均称为 A 的总体平均, 记为 $\langle \bar{A} \rangle$, 即

$$\langle \bar{A} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\tau} A dx dy dz \quad (6-28)$$

式中 V 为通道 τ 的体积。

符号 $\langle \bar{A} \rangle$ 中的“ $-$ ”表示对整个纬圈求平均, 而 $\langle \rangle$ 表 (y, z) 平面上的平均值。所以总体平均可看为将纬圈平均值再在 (y, z) 平面上求平均, 也可以看为 (y, z) 平面上平均值再求纬向平均。由(6-6)与(6-7)两式可得

$$\begin{cases} \langle \bar{A}' \rangle = 0 \\ \left\langle \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right\rangle = 0 \end{cases} \quad (6-29)$$

由(6-27)式还可以得到总体平均值的另一个性质, 若 B 为任一有限标量, 则有

$$\left\langle \frac{\partial (\bar{u}^* B)}{\partial x} \right\rangle = 0, \left\langle \frac{\partial (\bar{v}^* B)}{\partial y} \right\rangle = 0, \left\langle \frac{\partial (\bar{w}^* B)}{\partial z} \right\rangle = 0 \quad (6-30)$$

将它们合起来可得

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}^* B) \rangle = 0 \quad (6-31)$$

二、扰动动能方程

我们根据(6-11)~(6-15)式来推导扰动动能方程。令

$$K_e = \frac{u^{*2} + v^{*2}}{2} = \frac{\rho_0 (u'^2 + v'^2)}{2} \quad (6-32)$$

它为单位体积扰动动能。

将 u^* 乘(6-11)式加上 v^* 乘(6-12)式可得

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)K_e = -\nabla \cdot (\mathbf{v}^* p^*) + g\overline{w^* s^*} - \bar{U}_y \overline{u^* v^*} - \bar{U}_z \overline{u^* w^*} - \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{f}^* \quad (6-33)$$

对上式求总体平均，并利用

$$\left\langle \bar{U} \frac{\partial K_e}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{U} K_e}{\partial x} \right\rangle = 0 \quad (6-34)$$

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}^* p^*) \rangle = 0 \quad (6-35)$$

得到

$$\frac{d K'}{dt} = \langle \overline{g w^* s^*} \rangle - \langle \bar{U}_y \overline{u^* v^*} \rangle - \langle \bar{U}_z \overline{u^* w^*} \rangle - \varepsilon' \quad (6-36)$$

式中 $K' \equiv \langle \bar{K}_e \rangle$ 为平均扰动动能。因为 $\langle \bar{K}_e \rangle$ 与 x, y, z 均无关，所以偏微商 $\frac{\partial}{\partial t}$ 变为 $\frac{d}{dt}$ 。上式便是扰动动能方程。

三、影响扰动动能的因素

1. 摩擦耗散作用

(6-36)式中

$$\varepsilon' \equiv \langle \overline{v^* \cdot f^*} \rangle > 0 \quad (6-37)$$

表示摩擦耗散作用。摩擦作用是扰动流场的能汇，它只能使扰动动能减小。

2. 扰动有效位能转化为扰动动能

令

$$\{P', K'\} \equiv \langle \overline{g w^* s^*} \rangle \quad (6-38)$$

它表示扰动有效位能与扰动动能之间的转化。如果平均而言，垂直速度为正 ($w^* > 0$) 的地方，位温大于其平均值 ($s^* > 0$)；垂直速度为负的地方，位温小于其平均值，则有

$$\langle \overline{g w^* s^*} \rangle > 0 \quad (6-39)$$

由(6-36)式可知,扰动位能便转化为扰动动能。从物理上来看,这种相关性,代表了暖空气上升,冷空气下沉的情况。显然,它具有使质量中心降低,即使扰动位能减少的趋势。

3. 基本流场动能与扰动动能间的转换

令

$$\{K', \bar{K}\} \equiv \langle \bar{U}_y \overline{u^* v^*} \rangle + \langle \bar{U}_z \overline{u^* w^*} \rangle \quad (6-40)$$

它表示扰动动能与基本流场动能间的转换。因为 \bar{U} 与 x 无关,即 $\bar{U}_x = 0$, 所以我们将(6-40)式右边看成是 \bar{U} 的梯度与纬向扰动动量输送间的点积, 即

$$\langle \nabla \bar{U} \cdot \overline{u^* \mathbf{v}^*} \rangle = \langle \bar{U}_y \overline{u^* v^*} \rangle + \langle \bar{U}_z \overline{u^* w^*} \rangle \quad (6-41)$$

从上式可知,如果平均地看来,当纬向扰动动量传输方向与 $\nabla \bar{U}$ 的方向间夹角 $\alpha < 90^\circ$ 时,扰动动能减少;当 $\alpha > 90^\circ$ 时,扰动动能增大,如图 6-1 所示。

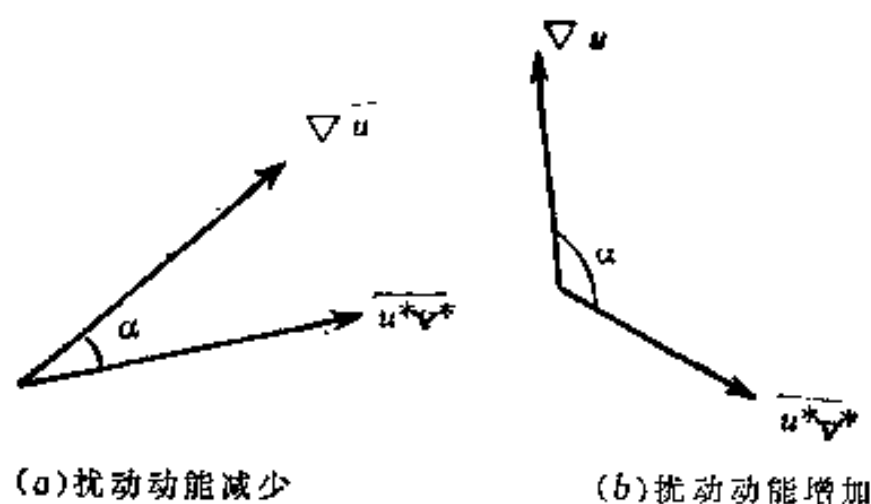


图 6-1

这就是说,若纬向扰动动量向着基本气流速度减小方向输送时,基本流场的动能转化为扰动动能,而使扰动动能增大。

注意: 如果我们在计算个别时间微商时,略去垂直方向的变化(正如我们在准地转位涡方程中所处理的那样),即

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h = \frac{D}{Dt} \quad (6-42)$$

那么 $-\langle \bar{U}_z \overline{u^* w^*} \rangle$ 在(6-36)式中不出现。

利用(6-38)与(6-40)式所定义的符号, 将扰动动能方程 (6-36) 式写为

$$\frac{dK'}{dt} = \{P', K'\} - \{K', \bar{K}\} - \varepsilon' \quad (6-43)$$

四、扰动有效位能方程

将 s^* 乘以(6-14)式得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{s^{*2}}{2} + v^* s^* s_{0y} + w^* s^* s_{0z} = \frac{\dot{Q} s^*}{c_p T} \quad (6-44)$$

令

$$E_e \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{g s^*}{N_0} \right)^2 = \frac{g s^{*2}}{2 s_{0z}} \quad (6-45)$$

为单位体积扰动有效位能, 式中

$$N_0^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = g s_{0z} > 0 \quad (6-46)$$

用 $\frac{g}{s_{0z}}$ 乘(6-44)式, 求总体平均值, 利用

$$\left\langle \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g s^*}{2 s_{0z}} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \bar{U} \frac{g s^*}{2 s_{0z}} \right\rangle = 0 \quad (6-47)$$

可得

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{E}_e \rangle = - \langle g \overline{w^* s^*} \rangle - \left\langle g v^* s^* \frac{s_{0y}}{s_{0z}} \right\rangle + \left\langle g \frac{\dot{Q}^* s^*}{c_p T s_{0z}} \right\rangle \quad (6-48)$$

由于 $\langle \bar{E}_e \rangle$ 与 x, y, z 无关, 仅是 t 的函数, 所以把 $\frac{\partial}{\partial t}$ 换成 $\frac{d}{dt}$,

令

$$P' \equiv \langle \bar{E}_e \rangle$$

则(6-48)式可写为

$$\frac{dP'}{dt} = -\langle g \overline{w^* s^*} \rangle - \left\langle g v^* s^* \frac{s_{0y}}{s_{0z}} \right\rangle + \left\langle g \frac{\dot{Q}^* s^*}{c_p T s_{0z}} \right\rangle \quad (6-49)$$

这就是扰动有效位能方程。

五、影响扰动有效位能的因素

1. 基本气流有效位能转化为扰动有效位能

令

$$\{P, P'\} = \{\bar{P}, P'\}_1 + \{\bar{P}, P'\}_2 = -\langle g \overline{w^* s^*} \rangle - \left\langle g v^* s^* \frac{s_{0y}}{s_{0z}} \right\rangle \quad (6-50)$$

式中

$$\begin{cases} \{P, P'\}_1 = -\langle g \overline{w^* s^*} \rangle = -\{P', K^1\} \\ \{\bar{P}, P'\}_2 = -\left\langle g v^* s^* \frac{s_{0y}}{s_{0z}} \right\rangle \end{cases} \quad (6-51)$$

$\{\bar{P}, P'\}_1$ 表示与扰动垂直运动有关的转化；而 $\{\bar{P}, P'\}_2$ 表示与扰动经向运动有关的转化。我们对这两种形式分别进行讨论。

① $\{\bar{P}, P'\}_1$

如果平均而言，垂直速度为正 ($w^* > 0$) 的地方，位温小于其平均值 ($s^* < 0$)；垂直速度为负的地方，位温大于其平均值，则有

$$\{\bar{P}, P'\} = -\langle g \overline{w^* s^*} \rangle > 0$$

由(6-49)式可知，扰动有效位能便增加。从物理上来看，这种相关性代表了暖空气下沉，冷空气上升的情况。显然具有使质量中心升高，即使扰动有效位能增加的趋势。由(6-51)式可以看出，由基本有效位能转化来的这部分扰动有效位能 $\{\bar{P}, P'\}_1$ 可以转化为扰动动能。

② $\{\bar{P}, P'\}_2$

由(6-46)式可知， $s_{0z} > 0$ ， s_{0y} 为基本状态位温的经向梯度，一般说来基本状态的位温在北半球是向北递减的，所以

$$s_{\theta y} = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial y} < 0$$

如果平均说来, 位温大于平均值($s^* > 0$)的气块向北扰动($v^* > 0$), 位温小于平均值($s^* < 0$)的气块向南扰动($v^* < 0$), 也就是说扰动向北输送暖空气, 向南输送冷空气, 则基本气流的有效位能转化为扰动有效位能, 如图 6-2 所示。

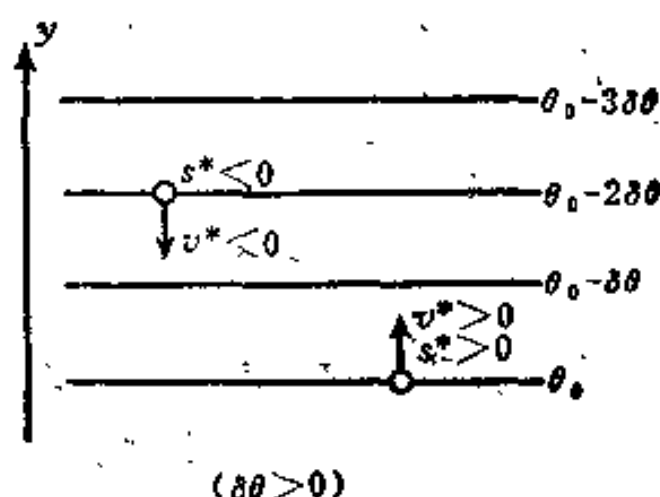


图 6-2

由 $s_{\theta y}$ 、 $s_{\theta z}$ 的定义可推出下式

$$\frac{s_{\theta y}}{s_{\theta z}} = - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\theta_0} < 0 \quad (6-52)$$

这里 $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\theta_0}$ 可以看为等位温面在 z 方向上的斜率。所以(6-50)式可写为

$$\{\bar{P}, P'\} = \left\langle g \overline{v^* s^*} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\theta_0} \right\rangle - \{P', K'\} \quad (6-53)$$

2. 非绝热作用

令

$$\{P', R'\} \equiv - \left\langle g \frac{\dot{Q}^* s^*}{c_p T s_z} \right\rangle \quad (6-54)$$

它表示非绝热加热对扰动有效位能的影响。

如在扰动流场中, 平均而言, 位温大于平均值($s^* > 0$)的地

方,有非绝热增热($\dot{Q}^* > 0$);在位温小于平均值($s^* < 0$)的地方,有非绝热降温,则有

$$\left\langle g \frac{\dot{Q}^* s^*}{c_p \bar{T} s_z} \right\rangle > 0 \quad (6-55)$$

由(6-49)式可知,在此情况下非绝热能量转变为扰动有效位能;而 $\{P', R'\}$ (< 0)也可看为扰动中非绝热能量的散失。

考虑相反情况,即平均而言,位温大于平均值($s^* > 0$)的地方,有非绝热冷却($\dot{Q}^* < 0$);在位温小于平均值($s^* < 0$)的地方,有非绝热增热($\dot{Q}^* > 0$)。则有

$$\left\langle g \frac{\dot{Q}^* s^*}{c_p \bar{T} s_z} \right\rangle < 0 \quad (6-56)$$

由(6-49)式可知,此时扰动有效位能将因非绝热作用而消失。而 $\{P', R'\}$ (> 0)可看为非绝热作用使扰动有效位能的增加。

根据(6-50)与(6-54)两式中所定义的符号,可将(6-49)式写为

$$\frac{dP'}{dt} = \{\bar{P}, P'\} - \{P', R'\} \quad (6-57)$$

六、扰动总能量的变化

扰动动能加上扰动有效位能($K' + P'$)称为扰动总能量。将(6-43)与(6-57)两式相加,得到扰动总能量变化的方程:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(K' + P') = & -\{K', \bar{K}\} + \{\bar{P}, P'\} + \{P', K'\} - \\ & -\varepsilon' - \{P', R'\} = -\langle \bar{U}_y \bar{u}^* \bar{v}^* \rangle - \langle \bar{U}_z \bar{u}^* \bar{w}^* \rangle + \\ & + \left\langle g \bar{v}^* s^* \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\theta_0} \right\rangle - \langle \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{f}^* \rangle + \left\langle g \frac{\dot{Q}^* s^*}{c_p \bar{T} s_z} \right\rangle \end{aligned} \quad (6-58)$$

由上式可知,扰动总能量是来自基本气流及南北方向的热量输送

的，并由摩擦作用及扰动中的辐射衰减而耗失。

§ 3 基本气流的能量方程

由上节得知，基本气流能量可以转化为扰动能量。为了看出基本气流是如何维持的，其动能与有效位能的来源是什么，我们必须研讨基本流场的能量方程。

一、基本气流的动能方程

令

$$K_0 = \frac{\rho_0 \bar{U}^2}{2} \quad (6-59)$$

为单位体积基本气流的动能。

将 \bar{U} 乘(6-19)式，并求其总平均值可得

$$-\frac{d}{dt} \langle \bar{K}_0 \rangle = -\langle \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \overline{u^* v^*} \rangle - \langle \bar{U} \frac{\partial}{\partial z} \overline{u^* w^*} \rangle - \langle \bar{U} \bar{f}_{ox} \rangle \quad (6-60)$$

对上式中右边第一、二项分别进行分部积分法可得(因为总体平均就是求体积分的过程)

$$-\langle \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \overline{u^* v^*} \rangle = -\langle \frac{\partial}{\partial y} \bar{U} \overline{u^* v^*} \rangle + \langle \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \overline{u^* v^*} \rangle \quad (6-61)$$

$$-\langle \bar{U} \frac{\partial}{\partial z} \overline{u^* w^*} \rangle = -\langle \frac{\partial}{\partial z} \bar{U} \overline{u^* w^*} \rangle + \langle \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \overline{u^* w^*} \rangle \quad (6-62)$$

由(6-30)式可得

$$-\langle \bar{U} \frac{\partial}{\partial y} \overline{u^* v^*} \rangle = \langle \bar{U}_y \overline{u^* v^*} \rangle \quad (6-63)$$

$$-\langle \bar{U} \frac{\partial}{\partial z} \overline{u^* w^*} \rangle = \langle \bar{U}_z \overline{u^* w^*} \rangle \quad (6-64)$$

将这两个公式代入(6-60)式，并令

$$\bar{K} = \langle \bar{K}_0 \rangle$$

则得

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \langle \bar{U}_y \overline{u^* v^*} \rangle + \langle \bar{U}_z \overline{u^* w^*} \rangle - \langle \bar{U} \bar{f}_{0x} \rangle \quad (6-65)$$

二、影响基本气流动能的因素

1. 扰动动能转化为基本气流的动能

根据(6-40)式定义的符号, (6-65)式中第一、二项为

$$\{K', \bar{K}\} = \langle \bar{U}_y \overline{u^* v^*} \rangle + \langle \bar{U}_z \overline{u^* w^*} \rangle$$

它表示扰动动能转化为基本气流的动能。与本章 § 2 相似的讨论得知, 若纬向扰动动量向着基本气流速度增大的方向传播, 则扰动动能转化为基本气流的动能。

2. 摩擦耗散作用

在(6-65)式中, 令

$$\bar{\varepsilon} \equiv \langle \bar{U} \bar{f}_{0x} \rangle > 0 \quad (6-66)$$

表示摩擦耗散作用, 它对基本气流只起了能汇的作用, 它只能使基本气流的动能减小。

将(6-40)与(6-66)两式所定义的符号代入(6-65)式可得

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \{K', \bar{K}\} - \bar{\varepsilon} \quad (6-67)$$

三、基本气流的位能方程

将 $\frac{g\bar{s}}{s_{0x}}$ 乘以(6-26)式, 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g\bar{s}^2}{2s_{0x}} \right) = - \frac{g\bar{s}}{s_{0x}} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v^* s^*} - \frac{g\bar{s}}{s_{0x}} \frac{\partial}{\partial z} \overline{w^* s^*} + \frac{g\rho_0 \bar{Q} s}{c_p T s_{0x}} \quad (6-68)$$

令

$$E_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{g\bar{s}}{N_0} \right)^2 = \frac{g\bar{s}^2}{2s_{0z}} \quad (6-69)$$

为单位体积基本气流的有效位能，式中 N_0 由 (6-46) 式所示。对 (6-68) 式求总体平均得到

$$\frac{1}{g} \frac{d}{dt} \langle \bar{E}_0 \rangle = - \left\langle \frac{\bar{s}}{s_{0x}} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v^* s^*} \right\rangle - \left\langle \frac{\bar{s}}{s_{0z}} \frac{\partial}{\partial z} \overline{w^* s^*} \right\rangle + \left\langle \frac{\rho_0 \dot{Q} \bar{s}}{c_p T s_{0z}} \right\rangle \quad (6-70)$$

对上式右边第一、二项分别进行分部积分法可得

$$\begin{aligned} - \left\langle \frac{\bar{s}}{s_{0x}} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v^* s^*} \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \frac{\bar{s}}{s_{0z}} \overline{v^* s^*} \right\rangle + \left\langle \frac{\overline{v^* s^*}}{s_{0z}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial y} \right\rangle = \\ &= - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \frac{\bar{s}}{s_{0z}} \overline{v^* s^*} \right\rangle + \left\langle \overline{v^* s^*} \frac{s_{0y}}{s_{0z}} \right\rangle \end{aligned} \quad (6-71)$$

$$\begin{aligned} - \left\langle \frac{\bar{s}}{s_{0z}} \frac{\partial}{\partial z} \overline{w^* s^*} \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \frac{\bar{s}}{s_{0x}} \overline{w^* s^*} \right\rangle + \left\langle \frac{\overline{w^* s^*}}{s_{0z}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} \right\rangle = \\ &= - \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \frac{\bar{s}}{s_{0x}} \overline{w^* s^*} \right\rangle + \left\langle \overline{w^* s^*} \right\rangle \end{aligned} \quad (6-72)$$

由 (6-30) 式可得

$$- \left\langle \frac{\bar{s}g}{s_{0y}} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v^* s^*} \right\rangle = \left\langle g \overline{v^* s^*} \frac{s_{0y}}{s_{0z}} \right\rangle \quad (6-73)$$

$$- \left\langle \frac{\bar{s}g}{s_{0z}} \frac{\partial}{\partial z} \overline{w^* s^*} \right\rangle = \left\langle g \overline{w^* s^*} \right\rangle \quad (6-74)$$

令

$$\bar{P} = (\bar{E}_0)$$

为基本气流的有效位能，所以基本气流的位能公式为

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \left\langle g \overline{v^* s^*} \frac{s_{0y}}{s_{0z}} \right\rangle + \left\langle g \overline{w^* s^*} \right\rangle + \left\langle \frac{\rho_0 \dot{Q} \bar{s}}{c_p T s_{0z}} g \right\rangle \quad (6-75)$$

四、影响基本气流有效位能的因素

1. 扰动有效位能转化为基本气流有效位能

由(6-50)式可知, (6-75)式右边第一、二项为

$$-\{\bar{P}, P'\} = \langle g \overline{w^* s^*} \rangle + \overline{\left\langle g v^* s^* \frac{s_{\theta y}}{s_{\theta z}} \right\rangle} \quad (6-76)$$

它由两部分组成, 即

$$-\{\bar{P}, P'\}_1 = \langle g \overline{w^* s^*} \rangle, \quad -\{\bar{P}, P'\}_2 = \overline{\left\langle g v^* s^* \frac{s_{\theta y}}{s_{\theta z}} \right\rangle} \quad (6-77)$$

我们对这两部分分别进行讨论。

① $-\{\bar{P}, P'\}_1$

如果平均地来说, 暖空气上升, 冷空气下沉, 即

$$\langle g \overline{w^* s^*} \rangle > 0$$

它具有使质量中心降低, 即使扰动有效位能减少的趋势。从(6-75)式可以看出, 增加了基本气流的有效位能。

② $-\{\bar{P}, P'\}_2$

由(6-52)式可得

$$-\{\bar{P}, P'\}_2 = -\overline{\left\langle g v^* s^* \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\theta_0} \right\rangle} \quad (6-78)$$

如果平均地来说, 位温大于平均值($s^* > 0$)的气块向南($v^* < 0$)扰动, 位温小于平均值($s^* < 0$)的气块向北($v^* > 0$)扰动, 也就是向北输送冷空气, 向南输送暖空气, 如图 6-3 所示, 则扰动有效位能转化为基本气流有效位能。

2. 非绝热作用

令

$$\{\bar{R}, \bar{P}\} = \left\langle \frac{\rho_0 \bar{Q} \bar{s}}{c_p T s_{\theta z}} g \right\rangle \quad (6-79)$$

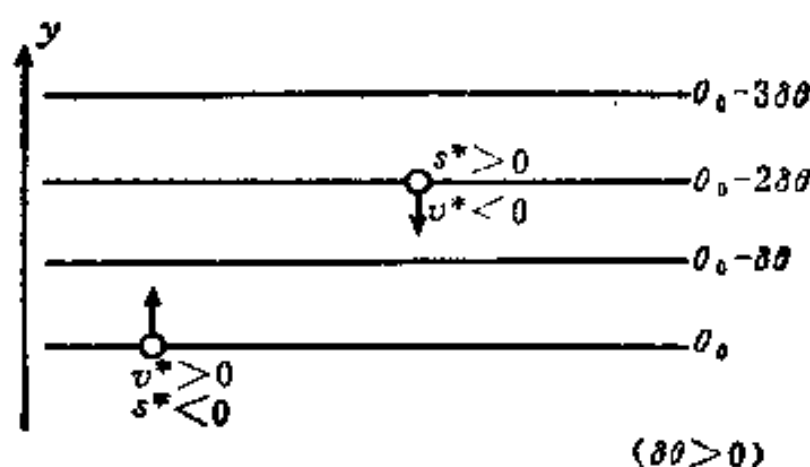


图 6-3

它表示平均增热作用产生基本气流的有效位能。它是大气运动的主要来源。

根据(6-76)与(6-79)所定义符号，得到基本气流的位能方程为

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = -\{\bar{P}, P'\} + \{\bar{R}, \bar{P}\} \quad (6-80)$$

§ 4 大气中的能量循环

一、能量循环方程组

(6-43), (6-57), (6-67)与(6-80)四个式子就组成了大气中能量循环方程组

$$\begin{cases} \frac{dK'}{dt} = \{P', K'\} - \{K', \bar{K}\} - \varepsilon' \\ \frac{dP'}{dt} = \{\bar{P}, P'\} - \{P', R'\} \\ \frac{d\bar{K}}{dt} = \{K', \bar{K}\} - \bar{\varepsilon} \\ \frac{d\bar{P}}{dt} = -\{\bar{P}, P'\} + \{\bar{R}, \bar{P}\} \end{cases} \quad (6-81)$$

式中 $\{\bar{P}, P'\}$ 由两部分组成

$$\{\bar{P}, P'\} = \{\bar{P}, P'\}_1 + \{\bar{P}, P'\}_2 \quad (6-82)$$

其中 $\{\bar{P}, P'\}_1$ 与垂直扰动有关, $\{\bar{P}, P'\}_2$ 与经向扰动运动有关。并且有

$$\{\bar{P}, P'\} = \{P', K'\} \quad (6-83)$$

二、对流层中能量的循环方式

我们已经讨论了大气中基本气流与扰动气流中能量来源及维持方式, 并得出了能量循环方程组(6-81)式。根据能量循环方程与大气中实际观测资料, 可得出对流层中能量循环的大致图案, 如图 6-4 所示。图中的箭头表示通常情况下或长时期平均的能量输送方向。应当指出, 这并不单单由循环方程组就能推出, 还需依靠观测资料而定。

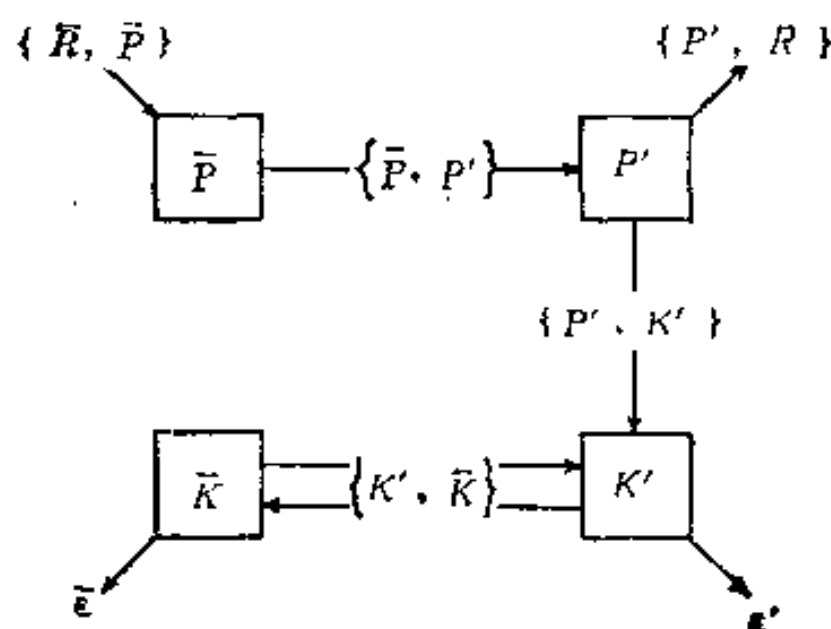


图 6-4

这种能量循环可定性概括为:

① 通过热带增热, 极地冷却, 非绝热作用产生了纬向基本气流的有效位能。

② 斜压经向扰动向北输送暖空气, 向南输送冷空气; 以及暖空气下沉, 冷空气上升的垂直运动, 把基本气流有效位能转化为扰动有效位能。

③ 与此同时,这种垂直扰动运动又把扰动有效位能转化为扰动动能。

④ 纬向基本气流的动能主要是由 $\langle u^* v^* \rangle$ 与 $\langle u^* w^* \rangle$ 的相关而引起扰动动能转化而维持的。

⑤ 能量是通过扰动与基本气流中地面摩擦、内摩擦及扰动中的辐射衰减而耗失。

三、两 点 注 意

在结束本章以前,我们提出以下两点请读者注意:

① 本章为方便起见,在推导能量方程时是采用线性化后的方程。但这不是必须的,用非线性系统可得到同样的能量方程。

② 在本章给出的模型中,平均纬向气流的动能与有效位能之间是没有转换的。实际上这两者可以转化,但转化数量很小,可以忽略。

参 考 文 献

Kuo, H. L. (1951) *Tellus*, 3, 205-207.

_____ (1959) *Beitr. Phys. Atmos.*, 39, 189-199

_____ (1973) *Adv. Appl. Mech.*, 13, 248-330

Lorenz, E. N. (1955) *Tellus*, 7, 157-167.

Saltzman, B. (1957) *J. Meteor.*, 14, 513-523.

Van Mieghem (1956) *Beitr. Phys. Atmos.*, 29, 129-142.

第七章 动力不稳定性理论 及涡动方程解

在第六章中我们讨论了沿纬圈的基本气流与扰动气流之间存在能量转换关系。基本气流的能量可以转化为扰动能量，以使扰动不断增大；相反，扰动能量也可以转化为基本气流的能量，以使扰动逐渐消失，而恢复到基本纬向气流。可是这种能量的转化是有条件的，只有在一定的条件下，基本纬向气流的能量才能转化为扰动能量；这个条件是基本气流必须为动力不稳定的；否则，即使基本气流中有很多有效位能与动能，也不能被小扰动所利用。

我们从中纬度西风带大尺度准地转扰动的产生与发展中可以看出，这种扰动大部都在气流的水平切变与垂直切变都很大的地方（如西风急流上）出现或增强。这种切变便是基本气流不稳定性必须具备的特征，这在大气中是经常产生的。例如，由于太阳辐射对地面加热的不均匀性，形成平均纬向温度梯度，从而产生了基本纬向气流的垂直切变。在低纬地区，由于柯氏力的偏转作用而形成赤道辐合带，在它的北面常为东北气流、南面常为西南气流，所以在赤道辐合带上基本气流有很强的水平切变。由于基本气流的垂直与水平切变表示具备提供扰动能量的条件，我们希望找出在给定的基本气流上，扰动发展的类型。

本章从东西风带对准地转扰动的不稳定性谈起，介绍动力不稳定性产生的原因及其特征。其中包括一般理论，正压不稳定性与斜压不稳定性的条件与特征，摩擦与 β 效应对稳定性的影响。从本章可见，动力不稳定性理论在大气动力学中占据非常重要的地位。

§ 1 东西风带对准地转扰动的不稳定性

一、基本气流与扰动

1. 准地转位涡方程

我们用如下形式的绝热无摩擦准地转位涡方程

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(-\frac{\partial q}{\partial y} + \beta \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (7-1)$$

作为控制方程，这里相对位涡由下式定义

$$q = \nabla^2 \psi + \frac{f^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (7-2)$$

式中

$$\psi = \frac{p}{f_0 \rho_0}, \quad \beta = \frac{df}{dy} \quad (7-3)$$

2. 三个基本假定

为简单起见，我们对流场作如下三个基本假定：

- ① 流场由基本纬向流场与扰动流场组成。
- ② 基本纬向流场不随 x 而变，所以可把基本纬向流场看为是真实纬向气流沿整个纬圈的平均。该平均由(6-1)式所示。
- ③ 在讨论线性解时假设基本纬向流场不随时间 t 而变，这是由于基本气流的时间尺度远大于扰动的时间尺度。在考虑扰动发生发展的时间历程中，基本气流的变化很缓慢，可以近似认为不随时间而变。

在这种假定下，我们可把(7-1)式中的流函数写为

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_0(y, z) + \psi'(x, y, z, t) \quad (7-4)$$

3. 基本气流的位涡方程

由(7-4)式可得基本纬向气流为

$$U(y, z) = - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \quad (7-5)$$

假定

$$f = f_0 = \text{常数}, \quad N^2 = \text{常数} \quad (7-6)$$

由(7-2)式可得基本气流的位涡为

$$q_0 = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0}{N^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right) \quad (7-7)$$

对 y 求偏导数得到

$$\frac{\partial q_0}{\partial y} = -U_{yy} - \frac{f_0^2}{N^2} (U_{zz} - \sigma_z U_z) \quad (7-8)$$

式中

$$\sigma_z = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (7-9)$$

4. 扰动位涡方程

由扰动流函数 $\psi'(x, y, z, t)$ 可得准地转扰动位涡为

$$q' = \nabla^2 \psi' + \frac{f_0^2}{\rho_0 N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \quad (7-10)$$

将(7-4)式代入(7-1)式, 减去(7-7)式及线性化, 可得小扰动位涡方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \left[\beta - U_{yy} + \frac{f_0^2}{N^2} (\sigma_z U_z - U_{zz}) \right] = 0 \quad (7-11)$$

将扰动位涡 q' 的表达式(7-10)代入(7-11)式得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\nabla^2 \psi' + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right] + Q_{0y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (7-12)$$

这里 Q_0 为基本流场的绝对位涡, 即

$$Q_0 \equiv f + q_0 \quad (7-13)$$

而 Q_{0y} 为 Q_0 对 y 的微分, 即

$$Q_{0y} = \frac{\partial}{\partial y} (f + q_0) = \beta - U_{yy} + \frac{f_0^2}{N^2} (\sigma_z U_z - U_{zz}) \quad (7-14)$$

(7-12)式便是小扰动遵守的线性化位涡方程，也是本章讨论不稳定性质问题的出发点。

在处理稳定性问题时，我们总把基本流场作为已知的。也就是在给定基本流场 u 随经度(y)与高度(z)变化的情况下，讨论扰动从基本气流中得到能量而不断发展的条件。也就是说，在方程(7-12)式中， U 、 Q_{0y} 与 ρ_0 都是 y 、 z 的已知函数，所以该式便是关于未知函数 ψ' 的偏微分方程。要求解(7-12)式，看方程的解 ψ' 随时间是如何变化的，则还必须求得关于 ψ' 的边界条件。

5. 有关 ψ' 的边界条件

如同第六章 §2 中介绍的那样，我们假定大气被限制在 β 平面的刚性纬向通道里，这时有如下的边界条件：

$$v' = 0, \text{ 当 } y = y_1, y = y_2 \quad (7-15)$$

$$\rho_0^{\frac{1}{2}} w' = 0, \text{ 当 } z = 0, z = H \quad (7-16)$$

由于在对流层顶静力稳定度有很大的增加，在那里垂直速度是很小的，所以可将上式中的 H 看为是对流层顶的高度。如果考虑整个大气或大气上界为无穷大时，则垂直方向的边界条件便化为

$$\begin{cases} \text{当 } z = 0, w' = 0 \\ \text{当 } z \rightarrow \infty, \rho_0^{\frac{1}{2}} \psi' \text{ 为有限} \end{cases} \quad (7-17)$$

式中的上边界条件是由单位体积中的动能总是有限而得出的。

现要把(7-15)与(7-16)两式化为关于 ψ' 的边界条件。

① 南北方向

由流函数的定义可知

$$v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \quad (7-18)$$

所以南北向的边界条件可写为

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \text{ 当 } y = y_1, y = y_2 \quad (7-19)$$

② 垂直方向

为推出垂直方向关于 ψ' 的边界条件,要用如下线性化的热流量方程:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\theta'}{\theta_0} + \frac{v'}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \frac{w'}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 0 \quad (7-20)$$

从静力方程有

$$g \frac{\theta'}{\theta_0} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} (f_0 \psi') \quad (7-21)$$

由热成风关系求得

$$\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = -f_0 U_s \quad (7-22)$$

将(7-21)与(7-22)两式代入(7-20)式,并利用(7-16)式可得

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z} - U_s \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \text{ 当 } z = 0, z = H \quad (7-23)$$

这就是在垂直方向扰动所要满足的边界条件。

由此看来,扰动不稳定性问题可以看为是寻找线性方程(7-12)式在边界条件(7-19)与(7-23)下的定解问题。如果方程的解 ψ' 的值随时间增大,则扰动发展,即为不稳定; ψ' 的值随时减小,则扰动减弱,即为稳定。

二、扰动不稳定性的条件

刚才已把扰动不稳定性问题化为线性偏微分方程的定解问题,可是我们还没有得到任何具体的结果。为了要得到扰动不稳定性的具体条件,我们先对扰动进行富氏分析。

1. 扰动谐波分析

由于线性化位涡方程 (7-12) 式中的物理参量 U , ρ_0 , Q_{0v} 等都与 x , t 无关, 因此我们可把 ψ' 展成如下形式

$$\psi'(x, y, z, t) = \sum_k \psi_k(y, z) e^{ik(x - c_k t) + \frac{\sigma_k z}{2}} \quad (7-24)$$

式中 c_k 中的下标 k 表示涡度波相速随波长而变, 因子 $\exp(\sigma_k z/2)$ 则代表 $\rho_0^{\frac{1}{2}} \psi'$ 的转变。

因为线性波的各个分量间是没有相互干扰作用的, 所以我们对每个分量独立地进行讨论。由此我们将略去 ψ_k , c_k 中的下标 k , 而直接写为 ψ , c 。

2. 扰动振幅随时间变化的条件

将 (7-24) 式代入 (7-12) 式, 可得波数为 k 的扰动振幅方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \left[\frac{Q_{0v}}{U - c} - k^2 - \frac{f_0^2 \sigma_z^2}{4N^2} \right] \psi = 0 \quad (7-25)$$

将 (7-24) 式代入 (7-19) 与 (7-23) 两式得到扰动振幅函数所满足的边界条件:

$$\psi = 0 \text{ 或 } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \text{ 当 } y = y_1 \text{ 与 } y = y_2 \quad (7-26)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{U_z}{U - c} \psi, \text{ 当 } z = 0 \text{ 与 } z = H \quad (7-27)$$

如果考虑大气上界为无穷, 即垂直方向边界条件用 (7-18) 式时, 则扰动振幅在垂直方向的边界条件换为

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{U_z}{U - c} \psi, \text{ 当 } z = 0 \\ \psi \text{ 为有限, 当 } z \rightarrow \infty \end{cases} \quad (7-28)$$

在 (7-25) 及 (7-27) 与 (7-28) 两式中 c 是代表时间变化的因子, 它可以是复数, 即

$$c = c_r + ic_i \quad (7-29)$$

这里 c_r 是波数为 k 的波在 i 方向上的相速, 而 kc_i 则为这个波分量的增长率。也就是说, 当 $c_i = 0$ 时, 扰动振幅不随时间而变; $c_i \neq 0$ 时, 扰动振幅则随时间而变。所以扰动不稳定性的条件可写为

$$c_i \neq 0 \quad (7-30)$$

这种由齐次方程及齐次边界条件并带有未知因子(如 c)所代表的问题通常称为特征值问题。这个名称表示在一个特定的基本流场 U 及已知物理参数、一定 k 值的条件下, 只有在 c 为某一个值时, 这一方程组才有 ψ 不为零的解。这个 c 值即为这个条件下的特征值, 而与之相应的解函数称为特征解。所以我们所要解决的方程组(7-25)、(7-26)、(7-27)或(7-28)所代表的具体问题就是对一定的 k 值求 c 的特征值及与之相应的特征解函数 ψ 。这就是本章所要讨论的, 包括了流场的不稳定性问题。这个问题是由 c_i 不等于零所代表的。为方便起见, 我们将尽可能的先从很普遍的观点讨论不稳定性的必要条件, 即从类似扰动能量转换的积分条件出发, 那么从控制方程组直接求解出发来寻求不稳定性的必要条件, 然后再具体地求特征值及特征解。也就是将对基本气流为正压流($U_z = 0$)与斜压流($U_z \neq 0$)的不稳定性及特征值问题分别进行讨论。在讨论斜压不稳定性及特征值问题时我们先介绍两个基本模型——伊台模式与二层模式。这里要提醒读者注意的是: 这个系统只能处理振幅较小的扰动。当扰动能量超过一定限度, 将会变成有限振幅波, 这时必须考虑非线性的作用。除了这两个简单模式之外, 我们也将对两个比较更近实际情况的基本流场所代表的特征值问题作一个比较简明的讨论。

§ 2 动力不稳定性的一般理论及必要条件

上节得出的扰动不稳定性条件(7-30)式还没有达到我们的目的, 我们希望不稳定性条件能由基本流场 U 表现出来。为此我们先对扰动振幅方程(7-25)的变式进行积分。

一、积分关系式

由于在(7-25)式中, c 为复数, 所以在一般情况下, 扰动振幅 ψ 也是复数。即

$$\begin{cases} \psi = \psi_r + i\psi_i \\ \psi^* = \psi_r - i\psi_i \end{cases} \quad (7-31)$$

这里 ψ^* 为 ψ 的共轭复数。

将 ψ^* 乘(7-25)式, 并对 y, z 的整个区域(即 y 从 $y_1 \rightarrow y_2$, z 从 $0 \rightarrow H$)进行积分, 利用

$$\begin{cases} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|^2 \\ \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 \end{cases} \quad (7-32)$$

与边界条件(7-26)与(7-27)两式, 由实部与虚部分别等于零, 可得如下两个积分关系式

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^H \left[A^2 - \frac{(U - c_r)}{|U - c|^2} Q_{oy} |\psi|^2 \right] dy dz = \\ = \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{(U - c_r) U_z}{|U - c|^2} |\psi|^2 dy \right\} \Big|_{z=0}^{z=H} \end{aligned} \quad (7-33)$$

$$c_i \left[\int_{y_1}^{y_2} \int_0^H \frac{Q_{oy}}{|U - c|^2} |\psi|^2 dy dz + \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{U_z}{|U - c|^2} |\psi|^2 dy \right) \Big|_{z=0}^{z=H} \right] = 0 \quad (7-34)$$

式中

$$A^2 = |\psi_y|^2 + \frac{f_0^2}{N^2} |\psi_z|^2 + \left(k^2 + \frac{f_0^2 \sigma_z^2}{4N^2} \right) |\psi|^2 > 0 \quad (7-35)$$

在地转近似下, 有

$$A^2 = \rho_0 \left\{ u'^2 + v'^2 + \left(\frac{g}{N} \frac{\theta'}{\theta_0} \right)^2 \right\} > 0 \quad (7-36)$$

代表扰动的总能量的两倍。

二、扰动不稳定性的必要条件

1. 第一不稳定性条件

由(7-30)式可知,要(7-34)式成立,必有

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_0^H \frac{Q_{ov} |\psi|^2}{|U - c|^2} dy dz + \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{f_0^2 U_z |\psi|^2}{N^2 |U - c|^2} dy \right) \Big|_{z=0}^{z=H} = 0 \quad (7-37)$$

当上式成立时,才有可能使(7-30)式(即 $c_i \neq 0$)与(7-25)~(7-27)式同时满足。所以它是关于扰动不稳定性的一个最重要的必要条件。

2. 第二不稳定性条件

由(7-33)式得知,除(7-37)式外,基本气流还要满足如下条件:

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^H A^2 dy dz = \int_{y_1}^{y_2} \int_0^H \frac{U Q_{ov}}{|U - c|^2} |\psi|^2 dy dz + \\ + \left[\frac{f_0^2}{N^2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{U U_z}{|U - c|^2} |\psi|^2 dy \right]_{z=0}^{z=H} > 0 \end{aligned} \quad (7-38)$$

这里假定(7-33)式中 $c_r = \text{常数}$ 而得出的。上式是能量约束条件,它的意思是说,要有不稳定的扰动产生,右边二项之和必须大于零。(7-38)式也可称为第二不稳定条件。

这两个条件中,第一不稳定条件是主要的,第二不稳定性条件只是补充条件。不过要这两个条件同时满足,扰动才不稳定。

§ 3 纯正压基本流不稳定的条件 及扰动流场的特征

一、纯正压基本流场的特征

纯正压基本流场的基本特征是 θ_0 不随 y 变化,因为 U 也不随

高度变化,所以它的各级 z 方向的偏微分均为零,特别是

$$U_z = 0, U_{zz} = 0 \quad (7-39)$$

按照(7-14)式中的定义,这时 Q_{0y} 可简化为

$$Q_{0y} = \beta - U_{yy} \quad (7-40)$$

因而 Q_{0y} 不随高度 z 而变化。

二、不稳定性的必要条件

将(7-39)与(7-40)两式代入(7-37)式,利用 U 、 $(U-c)$ 及 Q_{0y} 都与 z 无关的结论,可把第一不稳定性条件写为

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{|\hat{\psi}|^2}{|U-c|^2} Q_{0y} dy = 0 \quad (7-41)$$

而第二不稳定性条件写为

$$\int_{y_1}^{y_2} (k^2 |\hat{\psi}|^2 + |\hat{\psi}_y|^2) dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{U |\hat{\psi}|^2}{|U-c|^2} Q_{0y} dy > 0 \quad (7-42)$$

在这两式中, $|\hat{\psi}|^2$ 与 $|\hat{\psi}_y|^2$ 为 $|\psi|^2$ 与 $|\psi_y|^2$ 在高度 $0 \sim H$ 内的平均值或积分。

因为在(7-41)、(7-42)两式中,积分号下

$$\frac{|\hat{\psi}|^2}{|U-c|^2} > 0$$

所以第一、二不稳定性的必要条件可写为

$$Q_{0y} = \beta - U_{yy} \text{ 在 } (y_1, y_2) \text{ 中必须改变正负号} \quad (7-43)$$

$$U Q_{0y} \text{ 在 } (y_1, y_2) \text{ 上正相关} \quad (7-44)$$

从(7-43)式所示的第一不稳定条件可知,如果绝热无摩擦不稳定正压扰动要存在的话,则基本气流的速度分布 $U(y)$ 必须使 $\beta - U_{yy}$ 在 (y_1, y_2) 的某些点上取零值。所以正(或负)的 β 值对西风带扰动起稳定(或不稳定)作用,而对东风带的扰动起不稳定(或稳定)作用。

从(7-44)式所示的第二不稳定性条件可知, $U Q_{0y}$ 在 (y_1, y_2)

内必须有正值的区域。反过来说,如果在 (y_1, y_2) 内所有点上 UQ_{0y} 均为负,即使(7-43)式成立,也就是即使 $\beta - U_{yy}$ 在 (y_1, y_2) 上改变正负号,系统还是稳定的,因为系统不符合第二不稳定性条件,即扰动能量必须为正,系统才是不稳定的。请注意,在上面的讨论里,我们没有要求扰动本身必须是正压的,即 ψ_x 不一定为零。无论扰动是否正压,上面得到的第一及第二必要条件都是适用的。

三、纯正压扰动的振幅方程及其边界条件

如果考虑扰动亦为纯正压的情况,即 $\theta' = 0$ 及 $\psi_x = 0$ 的情况则扰动振幅方程(7-25)式可写为如下形式:

$$(U - c) \left(\frac{d^2 \psi}{dy^2} - k^2 \psi \right) + Q_{0y} \psi = 0 \quad (7-45)$$

面关于 ψ 的边界条件可写为

$$\psi = 0, \text{ 当 } y = y_1, y = y_2 \quad (7-46)$$

为了方便起见,我们采用无量纲变量,即作如下变换:

$$\begin{cases} y^* = \frac{y - y_0}{d}, U^* = \frac{U}{U_0}, c^* = \frac{c}{U_0} \\ \psi^* = \frac{\psi}{d U_0}, a = k d, \beta^* = \frac{\beta d^2}{U_0} \end{cases} \quad (7-47)$$

这几个公式中,右边都是具有量纲的物理量,其中 d 为切变纬向气流的经向宽度, U_0 为基本气流速度的特征量;左边带“*”号的是相应无量纲的物理量。将(7-47)式代入(7-45)式可得无量纲扰动振幅方程:

$$\psi^{*''} = \left(a^2 + \frac{U^{*''} - \beta^*}{U^* - c^*} \right) \psi^* \quad (7-48)$$

式中

$$\psi^{*''} = \frac{d^2 \psi^*}{dy^{*2}}, U^{*''} = \frac{d^2 U^*}{dy^{*2}} \quad (7-49)$$

对于西风气流 $U_0 > 0$, 所以 $\beta^* > 0$; 对于东风气流 $U_0 < 0$, 所以 $\beta^* < 0$ 。

如果有两个强度相等的平行气流对面而行,如图 7-1 所示,由于风速经向切变 U_y 不连续,则由不稳定性条件得知,无论考虑地球旋转与否,这种流场肯定是不稳定的。可是在真实大气中,这种情况是很少存在的。

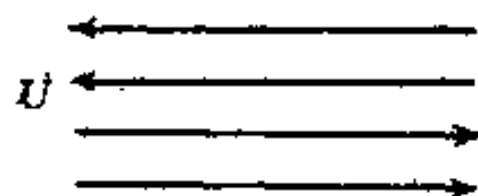


图 7-1 具有不连续经向切变的基本气流

我们下面介绍在大气中经常出现的正压不稳定性流速的情况。

四、赤道辐合带(ITCZ)

1. 基本气流的切变形式

赤道辐合带是北半球东北信风与南半球的东南信风,在赤道附近相遇所形成的气流辐合地带。南北两半球的信风有季节性位移。在北半球夏季,东北信风北移,南半球的东南风越过赤道,超过北纬 5° 时,受柯氏力的偏转作用变成西南风,于是东北信风与西南风之间构成位于赤道北面的赤道辐合带。赤道辐合带 7 月份全球平均位置在北纬 $12\sim 15^\circ$ 左右,它的典型风场如图 7-2 所示。

这时穿过赤道辐合带,纬向基本气流的风速廓线如图 7-3 所示。

为便于讨论起见,我们把这种有代表性的风速廓线写成如下的函数形式

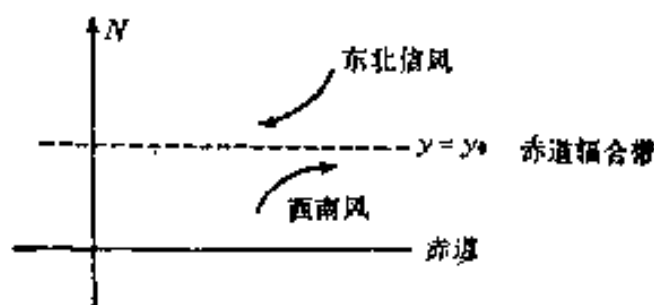


图 7-2 赤道辐合带附近的风场

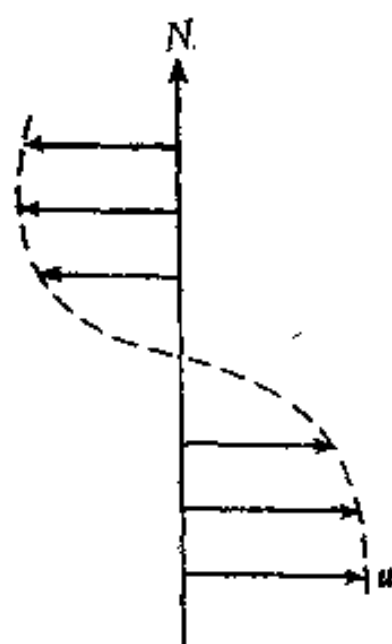


图 7-3 赤道辐合带上的风速廓线

$$U = -U_0 \tanh \frac{y - y_0}{d} \quad (7-50)$$

利用(7-47)式所示的变换,并以辐合带中心纬度为 y 的零点,可将上式写为无量纲变量的方程:

$$U^* = -\tanh y^* \quad (7-51)$$

2. 赤道辐合带上的流线型

无量纲绝对涡度的梯度为

$$Q_{\phi y}^* = \beta^* - U^* y^* y^* = \beta^* + 2U^*(1 - U^{*2}) \quad (7-52)$$

将上式代入(7-48)式可得赤道辐合带上的扰动振幅方程

$$\psi^{*''} - \left[a^2 + \frac{\beta^* + 2U^*(1 - U^{*2})}{c^* - U^*} \right] \psi^* = 0 \quad (7-53)$$

令纬向气流的宽度 d 足够窄,以使 U 的风速廓线在经向范围上超过

$$y^* = \pm 3$$

即使

$$\frac{y_2 - y_0}{d} > 3, \quad \frac{y_1 - y_0}{d} < -3 \quad (7-54)$$

这里 y_1, y_2 分别为南北边界。

由于

$$\tanh(\pm 3) = \pm 0.99505 \doteq \pm 1 \quad (7-55)$$

当无量纲经度的绝对值 $|y^*| > 3$ 时,可认为基本气流已不随经度而变,即与 $y^* \rightarrow \pm \infty$ 时的基本气流

$$U^* = \pm 1$$

非常接近。

所以可把渐近边界条件写为

$$\begin{cases} \psi^* \sim \exp\left[-\left(a^2 + \frac{\beta^*}{1 + c^*}\right)^{\frac{1}{2}} y^*\right], & \text{当 } y^* \rightarrow \infty \\ \psi^* \sim \exp\left[-\left(a^2 - \frac{\beta^*}{1 - c^*}\right)^{\frac{1}{2}} y^*\right], & \text{当 } y^* \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (7-56)$$

将振幅方程(7-53)式在边界条件 (7-26) 式下对一 k 值进行求解, 我们就得到了 c 的特征值及相应的特征函数 ψ^* 。我们求了 $\beta^* = 0.3$, $\alpha = 0.5$ 时 ψ^* 的解, 把它加上基本气流(即由图 7-3 所示的流场)的流函数, 得出总的流线型如图 7-4 所示。

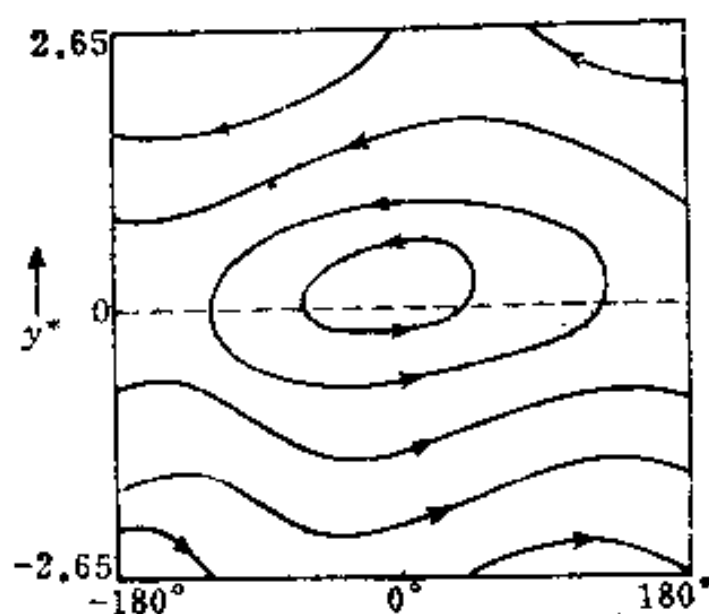


图 7-4 当 $\beta^* = 0.3$, $\alpha = 0.5$ 时的总流线型

从上图可以看出, 在扰动相当强时, 赤道辐合带上可以产生封闭的流线型。由于 β^* 在东西风带所起的作用不同, 所以流线型不是对称的, 波槽线是斜的, 最大振幅出现在赤道辐合带南边的西风带($\beta^* > 0$) 中。相应于其他 β^* 及 α 值的特征值及相应的特征解的特性, 我们将在本章第 4 节中再进行比较详细的讨论。

3. 赤道辐合带的不稳定性分析

将(7-51)式代入(7-52)式可得不稳定性条件为

$$Q_{0y*} = \beta^* + 2 \operatorname{sech}^2 y^* \tanh y^* \quad \text{在}(y_1^*, y_2^*) \text{上改变正负号。} \quad (7-57)$$

令

$$z^* = \tanh y^*, \quad z_1^* = \tanh y_1^*, \quad z_2^* = \tanh y_2^* \quad (7-58)$$

则(7-57)式变为

$$Q_{0y*} = \beta^* + 2z^* - 2z^{*3} \quad (|z^*| \leq 1) \quad (7-59)$$

当 $z^* = -3^{-\frac{1}{2}}$ 时, 函数

$$f(z^*) = 2z^{*3} - 2z^*$$

有极大值 $4 \times 3^{-\frac{3}{2}} = 0.7698$; 而当 $z^* = 3^{-\frac{1}{2}}$ 时, 函数

$$f(z^*) = 2z^{*3} - 2z^*$$

有极小值 $-4 \times 3^{-\frac{3}{2}} = -0.7698$ 。所以要 Q_{0y}^* 在 (z_1^*, z_2^*) 上改变正负号的条件可写为

$$|\beta^*| < \beta_c^* = 0.7698 \quad (7-60)$$

也就是说, β^* 对赤道辐合带上的代表性气流起着稳定作用。 β^* 的绝对值只有小于临界值 0.7698 时, 才会产生不稳定扰动。由 (7-47) 式可知

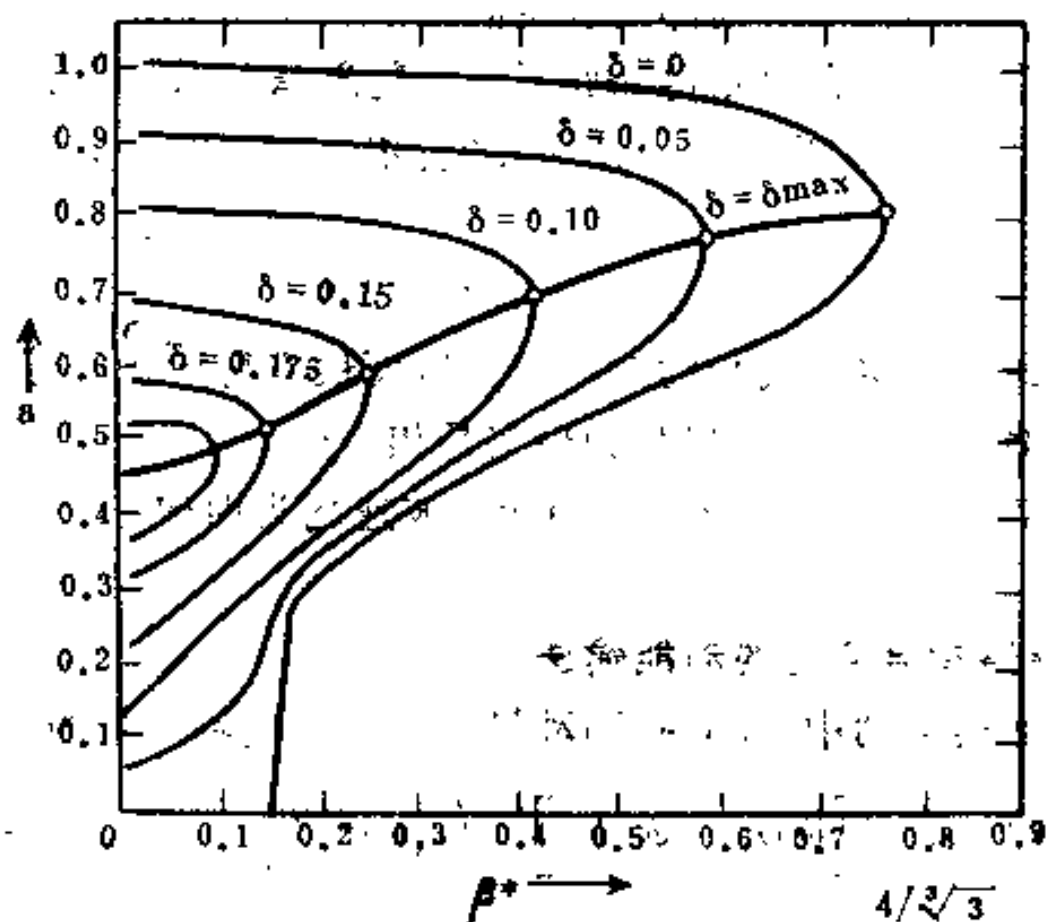
$$\beta^* = \frac{\beta d^2}{U_0}$$

因此要产生不稳定扰动, 即 $|\beta^*|$ 要小, 则基本气流要满足如下两个条件:

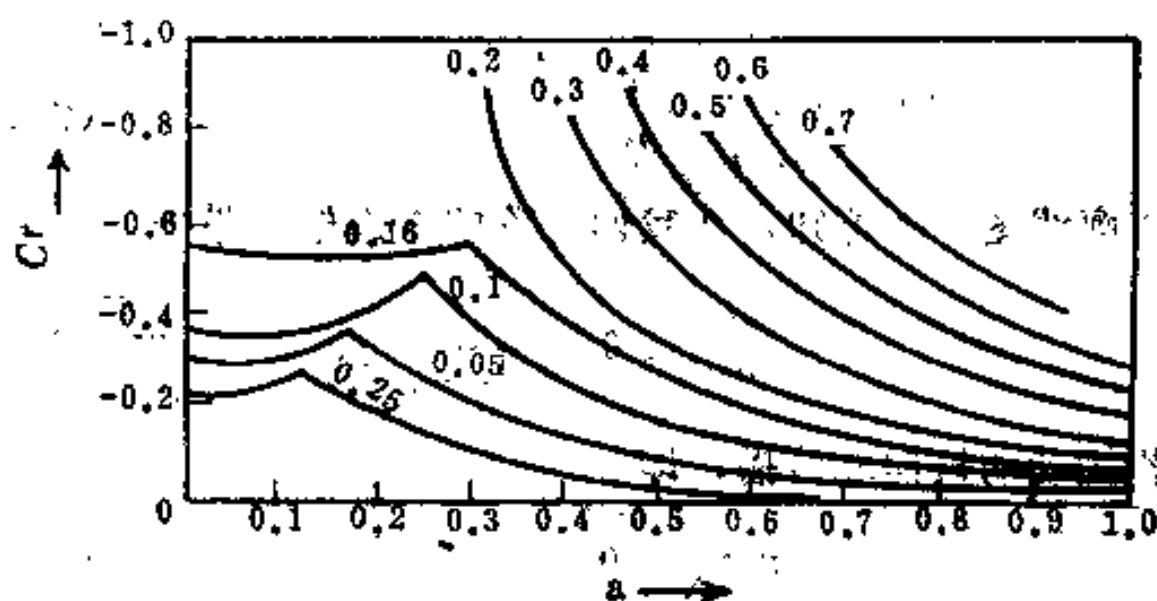
- ① 基本气流 U_0 要强;
- ② 切变宽度 d 要窄。

4. 赤道辐合带流场的特征值问题及其解

我们曾在 β^* 及 a 为不同数值时, 对方程组 (7-53) 及 (7-56) 两式求解。这样所得到的特征值 c 可看成是 β^* 和 k 的函数。我们将 c 的虚数部分, 即 c_i , 是用 $\delta^* = ac_i^2$ 的形式, 在图 7-5(a) 中表示出来的。根据复相速公式, 我们知道 δ^* 代表波长为 k 的扰动的生长率。在这张图中, 我们将 δ^* 作为 a 与 β^* 的函数, 在 $a-\beta^*$ 坐标图上进行等值线分析而得来的。从该图可以看出, 对同一个 β^* 来说, 生长率 δ^* 对于 a 而言都有一个最大值点。将这些最大值点连起来, 便成了最大生长率曲线。我们可看到在这条曲线上, 随着 β^* 的增加, a_c (即最大生长率曲线上的 a 值) 的值也增加。从 $\beta^* = 0$, $a_c = 0.4449$ 变化到 $\beta^* = 0.7698$, $a_c = 0.817$; 而最大生长率数值 δ^* 却由 0.188 变到 0; 当 $\beta^* > 0.7698$, 则不可能产生不稳定波。



(a) 不稳定波的生长率 $\delta^* = \alpha c_i^*$



(b) 相速 c_r 随 β 及 α 的变化

图 7-5

从上图还可以看出, 随着 β^* 的增大, 不稳定波的波域(用 α 表示)越来越小。当 $\beta^* = 0.7698$ 时, 只有 $\alpha = 0.817$ 的波才是中

性波，而对于其他的 α 则都是稳定波。

由低纬风速分布观测得知此系统中物理量的数量级为

$$U_0 \sim 7 \text{ 米/秒}, \quad d \sim 250 \text{ 公里} \quad (7-61)$$

这相当于

$$\beta^* \doteq 0.2$$

由此得出最不稳定的波长约 3000 公里，而最不稳定的扰动随指数变化的时间略少于 2 天，这与观测事实是相符的。

由图 7-5(b) 可见辐合带上的相对波速均为西向，但通常数值不大。

4. 赤道辐合带上的动能输送

在准地转运动中，纬向扰动动量由南向北的输送量为

$$\overline{u'v'} = \frac{k}{2} [\psi_i \psi_{ry} - \psi_r \psi_{iy}] = \frac{k}{2} |\psi|^2 \frac{d\alpha}{dy} \quad (7-62)$$

式中“—”表示对一个波长的平均， α 为槽线的位相角。

由能量关系 (6-36) 式可得正压情况下扰动动能随时间的变化为

$$\frac{\partial k_e}{\partial t} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (7-63)$$

由风速廓线图 7-3 可知，在我们讨论的赤道辐合带中

$$\frac{\partial U}{\partial y} < 0 \quad (7-64)$$

所以若扰动动量向北传播，即

$$\overline{u'v'} > 0 \quad (7-65)$$

由 (7-62) 式可知，在赤道辐合带中波槽线如呈曳式形（即槽线为东北-西南向），则由 (7-63) 式可知，扰动能量增大，即

$$\frac{\partial k_e}{\partial t} > 0 \quad (7-66)$$

这就是图 7-4 所展示的增强类不稳定性扰动所代表的情况。

反之，若扰动动量向南传播

$$\overline{u'v'} < 0 \quad (7-67)$$

由(7-62)式可知，在赤道辐合带波槽线如呈弓字型（即槽线为西北—东南向），则扰动动能减小，即

$$\frac{\partial k_e}{\partial t} < 0 \quad (7-68)$$

图 7-6 给出了赤道辐合带不稳定性扰动的纬向扰动动量经向输送及其随纬度的变化。我们发现这种输送减少了在纬向切变气流中的切变，及平均流场的动能。

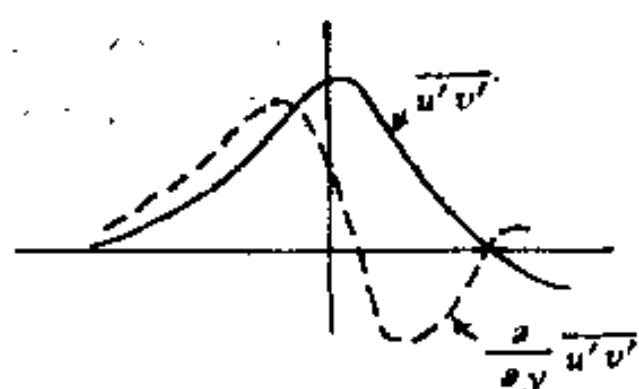


图 7-6

五、正压性急流

1. 基本气流切变形式

正压性急流能在任何地方出现，可以有西风急流，也可以有东风急流。东风急流常出现在北非赤道辐合带北端东风带上，这种急流的范围很宽，强度较强，正压性急流切变的基本形式如图 7-7 所示。

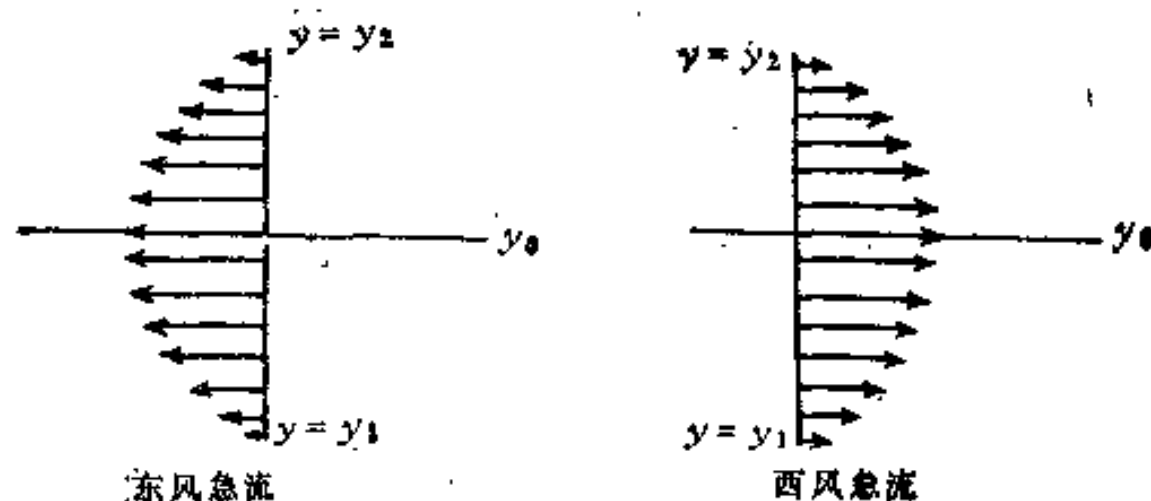


图 7-7 急流的切变形式

为方便起见,我们将图 7-7 所示的急流写成如下形式

$$U = U_0 \operatorname{sech}^2 \frac{y - y_0}{d} \quad (7-69)$$

此处 y_0 为急流中心的纬度, d 为急流的有效宽度。由于

$$\begin{cases} U_0 > 0 & \text{表示西风带急流} \\ U_0 < 0 & \text{表示东风带急流} \end{cases} \quad (7-70)$$

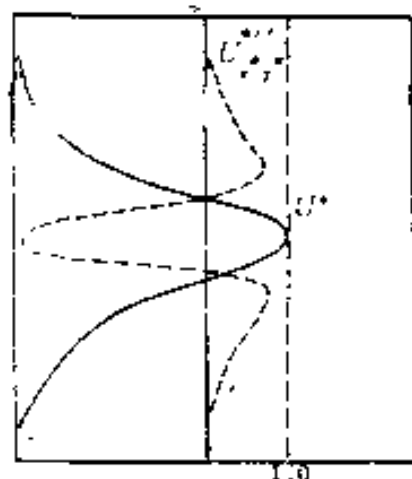
采用(7-47)式所示的无量纲变量可得

$$\begin{cases} \beta^* > 0 & \text{表示西风带急流} \\ \beta^* < 0 & \text{表示东风带急流} \end{cases} \quad (7-71)$$

并且急流的廓线方程可写为

$$U^* = \operatorname{sech}^2 y^* \quad (7-72)$$

由上式所示的风速廓线可由图 7-8 所示,图中还画出了 $U_{y^* y^*}^*$ 的



廓线。此类急流的南北界可采用 $\pm \infty$ 或相当大的有限值,例如 $|y^*| > 4.0$ 。

2. 急流的稳定条件的分析

由(7-52)式得知,正压急流不稳定性的必要条件为

$$Q_{yy^*} \equiv \beta^* - U_{y^* y^*}^* \text{ 在 } (y_1^*, y_2^*) \text{ 上改变正负号} \quad (7-73)$$

图 7-8 U^* 与 U^{**} 的廓线 这里

$$y_1^* = \frac{y_1 - y_0}{d}, \quad y_2^* = \frac{y_2 - y_0}{d}$$

在 $y_1^* < -4$, $y_2^* > 4$ 时,我们可将 y_1^* 及 y_2^* 近似看为 $\pm \infty$ 。

将(7-72)式代入(7-73)式可得不稳定性的必要条件为

$$\begin{aligned} Q_{yy^*} &= \beta^* - \operatorname{sech} y^* (1 - 2 \operatorname{sech}^2 y^*) = \\ &= \beta^* + \operatorname{sech} y^* (2 \operatorname{sech}^2 y^* - 1) \end{aligned}$$

在 (y_1^*, y_2^*) 改变正负号

(7-74)

与推导(7-60)式同样的步骤得出只有在

$$-2 \leq \beta^* \leq \frac{2}{3} \quad (7-75)$$

成立时, Q_{yy} 才能在 (y_1^*, y_2^*) 上改变正负号, 即才有可能产生正压不稳定性。

3. 急流扰动的特征值问题及其解

将方程(7-48)式对

$$U^* = \text{sech}^2 y^*$$

在边界条件 $\psi^* \rightarrow 0$, 当 $|y^*| \geq 4$

下进行求解。我们就得到这一问题的特征值 c 及特征函数 ψ^* 。图 7-9(a)、(b)中的 $\delta^* = kc_i$ 及 c_r 在 β^*-a 坐标里的分布曲线就是这样得到的。

从图 7-9 我们可得到如下一些结论

① β^* 对西风带急流起稳定作用。在上图(a)中可以看出, 在西风急流区域($\beta^* > 0$)中, 对于同样的 a 值, 随着 β^* 的增大, δ^* 是减小的, 并且不稳定波的波域也是减小的。当 β^* 增至 $\frac{2}{3}$ 时, 在西风带中只有一个波数所对应的波动才是不稳定的, 此波随时间按线性增大, 并不按指数增大。

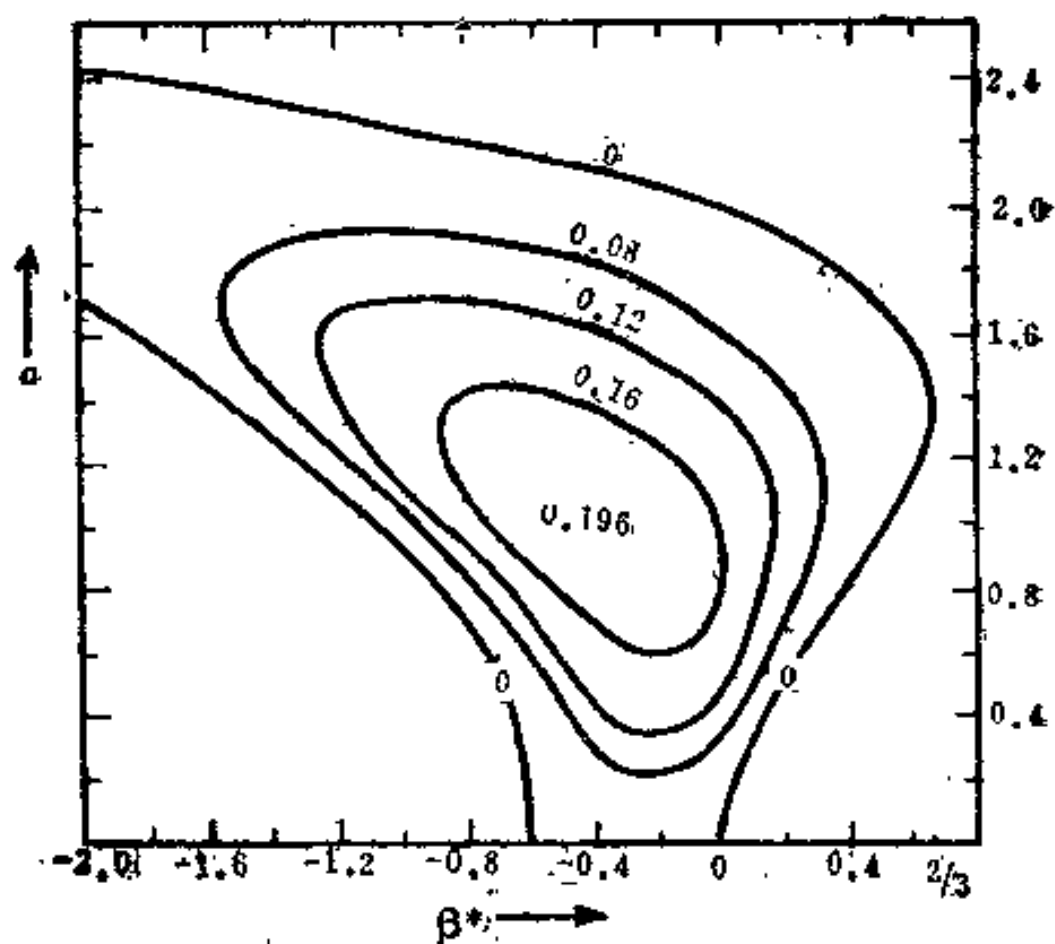
② β^* 对东风带急流起着不稳定的作用。当 β^* 负得不大时, 随着 $|\beta^*|$ 的增大, 急流变得越不稳定, 且不稳定波域也变得很大。当 $\beta^* = -0.4$, $a = 1.1$ 时, 得到不稳定波的最大生长率 $\delta_{max}^* = 0.196 \approx 0.2$, 它要比不考虑地转旋转效应, 即 $\beta^* = 0$ 时最大不稳定波的生长率 $\delta_{max}^* = 0.14$ 要大得多。而当 β^* 负得很大时, 又开始向稳定转化。

③ 对于 $d = 400$ 公里, 最不稳定的无量纲波数为

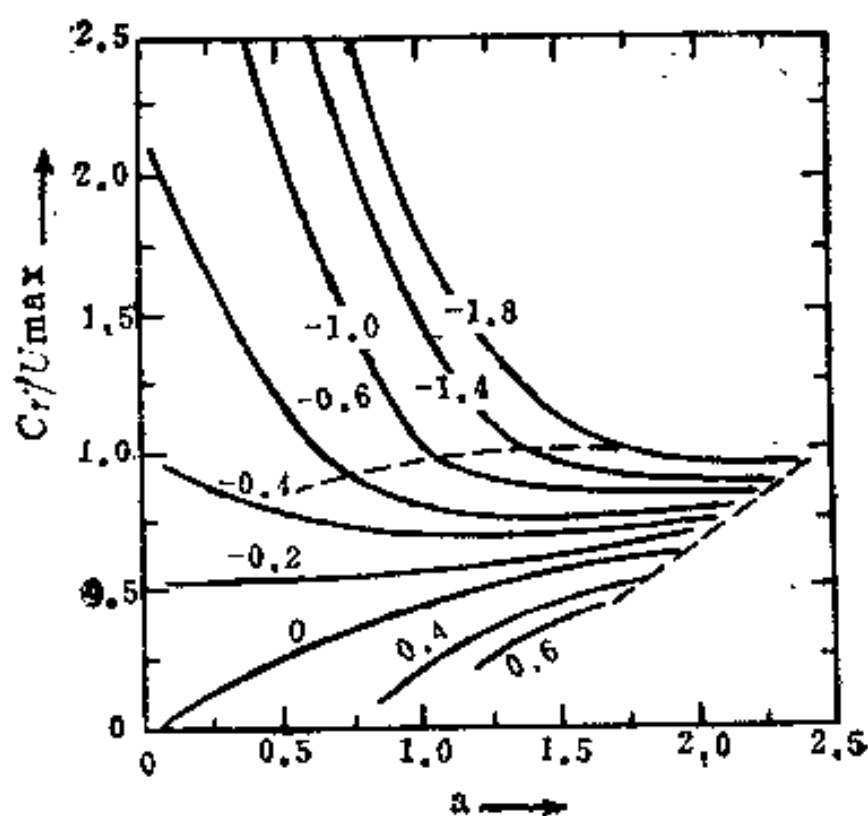
$$a_m \cong 1$$

所以最不稳定波的波长为

$$L_m = \frac{2\pi d}{a_m} \cong 2500 \text{ 公里} \quad (7-76)$$



(a) 增长率曲线



(b) 位相速度 c_r 随 β^* 及 α 的变化曲线

图 7-9

④ 从图(b)中可以看出：当 $\beta^* > 0$ 时，相速 c_r 随 α 增大；当 $\beta^* < 0$ 时，相速 c_r 随 α 而减小。

4. 准地转流正压稳定与不稳定性的物理解释

这里我们着重强调的是，稳定与不稳定性只能从能量关系上得到物理解释。即扰动能从基本气流中获得能量，则波动是不稳定的；否则波动是稳定的。也就是说

$Q_{\phi v}$ 在 (y_1, y_2) 上改变正负号

只是扰动不稳定性的一个必要条件，而不能或很难作为简明的物理解释。

例如，以 $y = y_0$ 为中心西风急流的风速廓线如图 7-10 所示。由图可知，只要切变足够强，这种切变形式的基本气流能使

$Q_{\phi v} = \beta - U_{vv}$ 在 (y_1, y_2) 上改变正负号

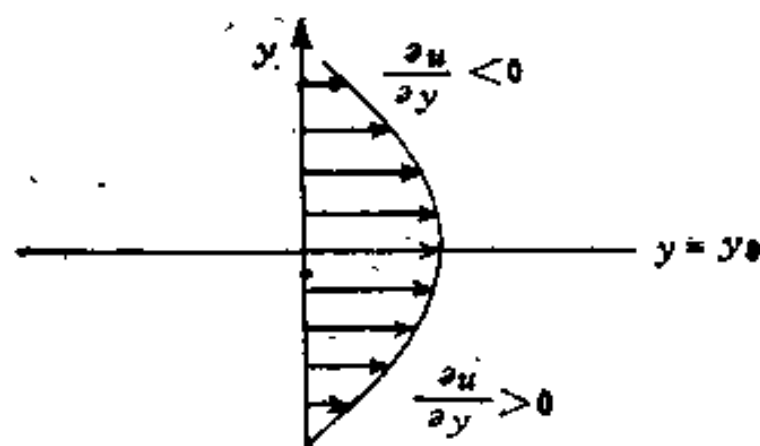


图 7-10 西风急流风速廓线

假定扰动流场有两种不同的几何特征，分别由 7-11 (a)、(b) 所示。

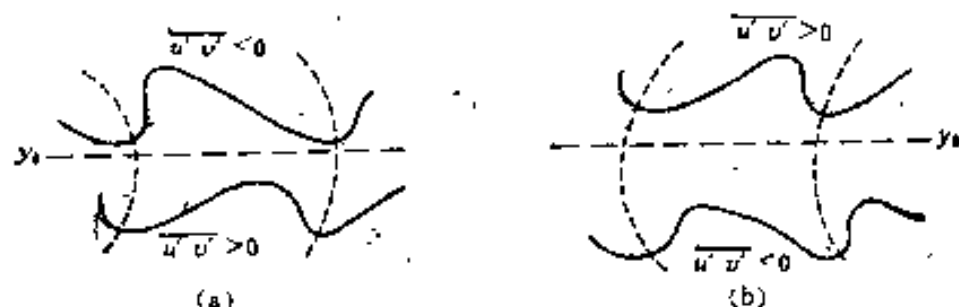


图 7-11 两种几何特征不同的扰动流场

由(7-63)式可知，对于图 7-10 的基本气流，由图 7-11 (a) 所示的扰动流场，扰动动能随时间减小，即

$$\frac{\partial k_e}{\partial t} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} < 0 \quad (7-77)$$

这说明这种扰动是衰减的,即是正压稳定的。

同样对于由图 7-10 所示的基本气流,图 7-11(b) 所示的扰动流场,扰动动能随时间是增大的,即

$$\frac{\partial k_e}{\partial t} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} > 0 \quad (7-78)$$

这说明这种扰动是增长的,即是正压不稳定的。

由此可见,基本流场符合第一不稳定性条件,并不意味所有扰动流场都是不稳定。但是不稳定的定义是只有一个不稳定解就称为不稳定的,所以与这两种可能性同时存在并不冲突。

§ 4 纯斜压流的不稳定性条件

在真实大气中,基本气流既有经向切变,又有垂直切变,这时稳定性问题的讨论比较复杂。为了方便起见,我们将对经向切变与垂直切变分别进行讨论。上节已介绍了基本气流只具有经向切变而没有垂直切变的不稳定性问题。从本节起介绍基本气流只具有垂直切变,即斜压不稳定性问题。本节介绍纯斜压流的不稳定性条件。

一、纯斜压流的特征

纯斜压流有如下几个基本特征:

① 基本气流 U 是随高度变化的,即 $U = U(z)$

② 基本气流 U 是不随 y 而变的,即

$$U_y = 0 \quad (7-79)$$

③ 扰动振幅方程(7-25)式与边界条件(7-27)、(7-28)式中的所有物理参数,如 N^2 , σ_z^2 等等都与 y 无关。

④ 它的能源是水平温度或密度梯度。通过静力平衡与地转风

关系，基本状态的水平温度梯度等价于基本状态地转风的垂直切变，即

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad \frac{\partial p_0}{\partial y} = -f\rho_0 U_0, \quad \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = -fU_0 \quad (7-80)$$

⑤ 基本状态是稳定的，即

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial z} > 0 \quad (7-81)$$

如果考虑最简单的长波斜压模式，有

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial y} = \text{常数}, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \text{常数} \quad (7-82)$$

也就是说

$$\theta_0(y, z) = c_1 z - c_2 y + c_3 \quad (7-83)$$

上式所示的稳定层结可由图 7-12 表示出来。

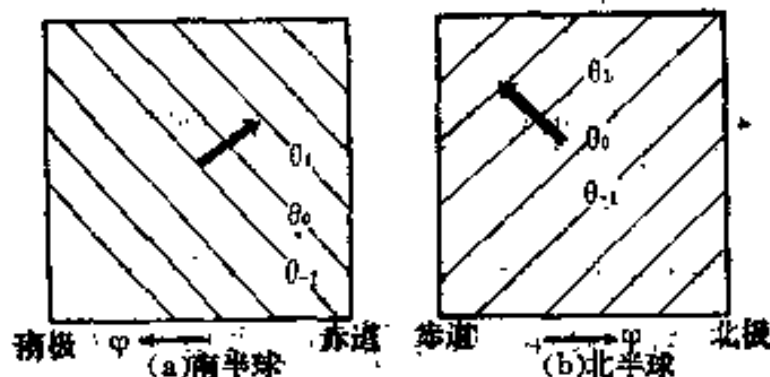


图 7-12 基本状态为稳定层结

二、考虑摩擦作用的边界条件

由于摩擦会影响扰动的稳定性，因此在讨论稳定性问题时，有时需要把摩擦因素考虑进去。本章将讨论摩擦力对斜压波的影响。这里所谈的摩擦作用是由行星边界层引起的，摩擦力则用埃克曼(Ekman)模型。

1. 行星边界层与自由大气

按照行星边界层的理论，大气可分为两层：边界层与自由大

气。在近地面 1 公里的大气中,由于受地面影响较大,摩擦力的数值一般可与气压梯度力与柯氏力相比拟,大气的这一部分便称为行星边界层。在边界层以上的那部分大气,由于受地面影响很小,

自由大气 地转流 u, v

边界层 u^*, v^*



图 7-13 自由大气与边界层

摩擦力数值与气压梯度力、柯氏力相比很小,可以略去,大气的这一部分称为自由大气。我们假定在自由大气中,地转风关系成立。由图 7-13 可以看出,边界层顶部

即为自由大气的底部。

2. 埃克曼理论

设大气中已建立了地转风关系,并假定大气由摩擦很小的地方突然移到摩擦很大的地方,运动速度减小,导致柯氏力减小,不能平衡气压场,产生由高压到低压的速度分量,即非地转风速分量。这个非地转风分量的大小取决于摩擦系数的值,下面我们把它求出来。

令 u, v 为自由大气中的地转风速,在刚才的假定下,我们有如下关系式:

$$u^* = u + u', \quad v^* = v + v', \quad p^* = p \quad (7-84)$$

式中 u', v' 为由于摩擦作用而引起的非地转风速分量。在定常情况下,将具有摩擦作用的运动方程减去地转平衡公式,可得

$$\begin{cases} -f v' = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \\ f u' = \nu \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \end{cases} \quad (7-85)$$

这里 ν 为涡动粘滞系数,这是由于行星边界层是一层湍流边界层的缘故。

由于在边界层以上为自由大气,不受摩擦影响,所以边界层顶部的边界条件为

$$u', v' \rightarrow 0, \quad \text{当 } z \rightarrow \infty \quad (7-86)$$

假定流场在地面的速度为零, 则由(7-84)式可得

$$u' = -u, \quad v' = -v, \quad \text{当 } z = 0 \quad (7-87)$$

现在我们来求在(7-86)与(7-87)所示的边界条件下, 方程(7-85)式的解。为方便起见, 令

$$\begin{cases} V' = u' + i v', \quad i = \sqrt{-1} \\ \xi = \sqrt{\frac{f}{2v}} z \end{cases} \quad (7-88)$$

则(7-85)式可写为

$$\frac{d^2 V'}{d\xi^2} = (1+i)^2 V' \quad (7-89)$$

上式的通解为

$$V' = A e^{(1+i)\xi} + B e^{-(1+i)\xi} \quad (7-90)$$

将边界条件(7-86)式代入上式可得

$$A = 0 \quad (7-91)$$

将边界条件(7-87)式代入(7-90)式可得

$$B = B_r + i B_i = V'(0) = -u - i v \quad (7-92)$$

即

$$B_r = -u, \quad B_i = -v \quad (7-93)$$

将(7-91)与(7-93)两式代入(7-90)式可得边界层中非地转风分量的解为

$$u' = -(u \cos \xi + v \sin \xi) e^{-\xi} \quad (7-94)$$

$$v' = -(v \cos \xi - u \sin \xi) e^{-\xi} \quad (7-95)$$

这种非地转风速分量跨过等压线, 由高压向低压运动, 该运动使边界层的低压区内有辐合上升运动, 高压区内有辐散下沉运动。我们下面来求这种垂直速度。由于边界层是很薄的一层流体, 所以可用不可压连续方程:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7-96)$$

将(7-84)式代入上式, 并将地转风看成是无辐散的(即忽略柯氏

参数 f 随纬度的变化), 则有

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7-97)$$

将(7-94)与(7-95)两式表示的 u' , v' 的解代入上式得到

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = e^{-\xi} \zeta \sin \xi \quad (7-98)$$

式中

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7-99)$$

为地转风相对涡度, 即自由大气中的涡度。将(7-98)式对 ξ 积分 (从 $0 \rightarrow \xi$), 可得

$$w(\xi) = \zeta \delta [1 - e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)] \quad (7-100)$$

这里

$$\delta = \sqrt{\frac{v}{2f}} \quad (7-101)$$

为边界层厚度。我们常把边界层摩擦作用称为埃克曼摩擦。

3. 埃克曼摩擦对自由大气边界条件的影响

在本书中讨论埃克曼摩擦, 其目的并不是在于求得 $w(\xi)$ 随高度 ξ 的变化, 而着重于讨论这种埃克曼摩擦对自由大气的影响是什么。

从(7-94)与(7-95)两式可以看出, u' , v' 随高度 ξ 很快衰减, 而由(7-100)式得知 $w(\xi)$ 随 ξ 增大而趋近于一个极限。 $\xi \rightarrow \infty$ 表示边界层的顶部, 也可看为自由大气的底部。因此, 自由大气底部的边界条件可写为:

$$w = \lim_{\xi \rightarrow \infty} w(\xi) = \zeta_0 \delta \quad (7-102)$$

由于存在摩擦作用, 在自由大气下界有垂直运动。

假定自由大气上界也有边界层, 则上界边界条件可写为

$$w_t = -\zeta_t \delta \quad (7-103)$$

由于存在摩擦作用, 低压区有辐合, 又因上面有个边界, 只能有向下的垂直速度, 所以土式中右边要取负号。

由此看来,埃克曼摩擦对自由大气来讲仅仅在边界上加了垂直运动。

三、振幅方程及其边界条件

对于纯斜压流而言,扰动的振幅函数可以写为

$$\psi(y, z) = \tilde{\psi}(z) \sin k_1 y \quad (7-104)$$

将上式代入振幅方程(7-25)式得到

$$(U - c) \left(\frac{d^2 \tilde{\psi}}{dz^2} - a^2 \tilde{\psi} \right) + b \tilde{\psi} = 0 \quad (7-105)$$

这里

$$a^2 = \frac{N^2}{f^2} (k^2 + k_1^2) + \Gamma^2, \quad b = \frac{N^2}{f^2} \beta + 2\Gamma U_z - U_{zz}, \quad \Gamma = \frac{\sigma_z}{2} \quad (7-106)$$

由于(7-105)式中 $\tilde{\psi}$ 仅是 z 的函数,而与 y 无关,所以我们在(7-106)式中可用 f 代替(7-25)式中的 f_0 。

关于流函数 ψ' 的边界条件是由热流量方程推出来的,当考虑埃克曼摩擦作用时,则由(7-20)式可得扰动流函数 $\psi'(x, y, z, t)$ 满足下式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z} - U_z \frac{\partial \psi'}{\partial x} = - \frac{N^2}{f} w \quad (7-107)$$

由(7-102)与(7-103)两式可得边界条件为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z} - U_z \frac{\partial \psi'}{\partial x} = - \frac{N^2 \delta}{f} \nabla_{\lambda}^2 \psi', \quad \text{当 } z = z_b \quad (7-108)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z} - U_z \frac{\partial \psi'}{\partial x} = \frac{N^2 \delta}{f} \nabla_{\lambda}^2 \psi', \quad \text{当 } z = z_t \quad (7-109)$$

这里 z_b 与 z_t 为自由大气下界与上界的高度。

扰动流函数由如下波动形式表示

$$\psi'(x, y, z, t) = \sum_{k, k_1} \tilde{\psi}(z) e^{ik(x-ct)} \sin k_1 y \quad (7-110)$$

这里略去了 $\tilde{\psi}$ 的下标 k 与 k_1 。将上式代入(7-108)与(7-109)两式可得有关 $\tilde{\psi}(z)$ 的边界条件

$$(U-c) \tilde{\psi}_z = U_z (1 - i b^*) \tilde{\psi}, \text{ 当 } z = z_b \quad (7-111)$$

$$(U-c) \tilde{\psi}_z = U_z (1 + i b^*) \tilde{\psi}, \text{ 当 } z = z_t \quad (7-112)$$

这里

$$b^* = \frac{N^2 \delta \alpha^2}{f U_z k}, \quad \alpha^2 = k^2 + k_1^2 \quad (7-113)$$

我们也可将 b^* 看成是摩擦系数。

当考虑无摩擦情况($\nu = 0$), 则有

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{2f}} = 0$$

所以

$$b^* = 0 \quad (7-114)$$

则边界条件为

$$(U-c) \tilde{\psi}_z = U_z \tilde{\psi}, \text{ 当 } z = z_b, \quad z = z_t \quad (7-115)$$

这与(7-27)式所示的边界条件是一样的。

四、不稳定性的必要条件

将(7-104)式代入(7-37)式可得无摩擦时纯斜压流的不稳定性的必要条件为

$$\int_{z_b}^{z_t} \frac{b |\tilde{\psi}|^2}{|U-c|^2} dz + \frac{U_z |\tilde{\psi}|^2}{|U-c|^2} \bigg|_{z=z_b}^{z=z_t} = 0 \quad (7-116)$$

由此可知, 纯斜压流不稳定性的必要条件为

① 当 $b > 0$, 则要求 $\frac{U_z |\tilde{\psi}|^2}{|U-c|^2}$ 在大气底部($z = z_b$)的值大

于其在大气顶部 ($z = z_t$) 的值;

② 当 $b < 0$, 则要求 $\frac{U_z |\tilde{\psi}|^2}{|U - c|^2}$ 在大气底部 ($z = z_b$) 的值小于其在大气顶部 ($z = z_t$) 的值;

③ 当 $b = 0$, 则要求 $\frac{U_z |\tilde{\psi}|^2}{|U - c|^2}$ 在大气底部 ($z = z_b$) 的值等于其在大气顶部 ($z = z_t$) 的值。

§ 5 具有恒定垂直切变斜压纬向 气流的不稳定性及解

一、振幅方程与边界条件的一些简化

具有恒定垂直切变的纬向气流是最简单的连续性斜压模型。在对流层中总的斜压效应能由该层中平均垂直切变表示出来。在研究斜压不稳定性时,最简单是将 U_z 作为常数。这样 U 变为 z 的线性函数:

$$U = U_0 + U_z z \quad (7-117)$$

这里 U_0 为大气底部的基本气流。

由 U_z 为常数, 可得 (7-106) 式定义的 b 与 z 无关, 也为常数。即:

$$b = \frac{N^2}{f^2} \beta + 2\Gamma U_z = \text{常数} \quad (7-118)$$

上式是这个模型最主要的特点。

为讨论问题方便起见,我们引入表示高度的无量纲变量 ξ (注意这里 ξ 的定义与 (7-88) 式的定义是不同的)、无量纲相速 Δ 与参量 r , 它们的定义如下:

$$\begin{cases} \xi = \frac{a(U-c)}{U_s} = \mu \left[\frac{z}{h} + \Delta - 1 \right], & r = \frac{bh^2}{2\mu U^*} \\ \mu = ah, & U^* = hU_s, \quad h = \frac{H}{2}, \quad \Delta = \frac{\bar{U} - c}{U^*} \end{cases} \quad (7-119)$$

这里 H 为大气总深度，而

$$\bar{U} = U_0 + h U_s$$

为大气中层 ($z = h$) 的基本气流, a 的定义见 (7-106) 式。当 H 为无穷大时, 我们取 h 为与 H 无关的任意高度尺度。对 ξ 的微分用撇号“'”来表示, 则振幅方程 (7-105) 式可化为如下形式

$$\xi (\psi'' - \psi) + 2\psi = 0 \quad (7-120)$$

而 (7-111) 与 (7-112) 两式所示的边界条件为

$$\xi \psi' = (1 - ib^*) \psi, \quad \text{当 } \xi = \xi_b = \mu(\Delta - 1) \quad (7-121)$$

$$\xi \psi' = (1 + ib^*) \psi, \quad \text{当 } \xi = \xi_t = \mu(\Delta + 1) \quad (7-122)$$

式中 ξ_b 表示大气底部, ξ_t 表示大气顶部 ($z = H$)。

二、伊台(Eady)模式下斜压扰动

1. 伊台模式的主要特征

伊台模式是具有恒定垂直切变斜压纬向气流中最简单的形式。它除了具有 (7-117) 式所示的特征外, 还具有以下三个最主要的特点:

① 柯氏参数为常数, 即

$$f = \text{常数}, \quad \beta = 0 \quad (7-123)$$

② 波辛尼斯克(Boussinesq)近似: 即在连续方程中略去 ρ_0 随高度的变化。即

$$2\Gamma = \sigma_s = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \quad (7-124)$$

但是它与重力加速度相乘的积却不等于零, 即

$$N^2 = g\sigma_s > 0 \quad (7-125)$$

③ 无摩擦作用, 即

$$v = 0 \quad (7-126)$$

所以伊台模式是柯氏参数为常数,无摩擦,加上波辛尼斯克近似,又具有恒定垂直切变的斜压纬向气流。

2. 振幅方程及其解

将(7-123)与(7-124)两式代入(7-118)式可得

$$b = 0 \quad (7-127)$$

将上式代入(7-119)式可得

$$r = 0 \quad (7-128)$$

将(7-126)式代入(7-113)式可得(利用 $v = 0$ 推出 $\delta = 0$)

$$b^* = 0 \quad (7-129)$$

利用(7-128)式,振幅方程(7-120)式化为

$$\tilde{\psi}'' - \tilde{\psi} = 0 \quad (\xi_b \leq \xi \leq \xi_t) \quad (7-130)$$

利用(7-129)式,则边界条件(7-121)与(7-122)两式变为

$$\xi \tilde{\psi}' - \tilde{\psi} = 0, \text{ 当 } \xi = \xi_b = \mu(\Delta - 1), \xi = \xi_t = \mu(\Delta + 1) \quad (7-131)$$

(7-130)式的通解为

$$\tilde{\psi} = Ae^{\xi} + Be^{-\xi} \quad (7-132)$$

式中 A 与 B 为两个待定常数。将边界条件(7-131)式代入上式可得有关 A 与 B 的线性齐次方程组

$$\begin{cases} (\xi_b - 1)e^{\xi_b} A - (\xi_b + 1)e^{-\xi_b} B = 0 \\ (\xi_t - 1)e^{\xi_t} A - (\xi_t + 1)e^{-\xi_t} B = 0 \end{cases} \quad (7-133)$$

上式中 A 、 B 要有非零解,则下式必然存在

$$\begin{vmatrix} (\xi_b - 1)e^{\xi_b} & -(\xi_b + 1)e^{-\xi_b} \\ (\xi_t - 1)e^{\xi_t} & -(\xi_t + 1)e^{-\xi_t} \end{vmatrix} = 0 \quad (7-134)$$

由(7-121)与(7-122)两式中 ξ_b 与 ξ_t 的定义可得

$$\mu^2 \Delta^2 = K(\mu) \quad (7-135)$$

这里

$$K(\mu) \equiv 1 + \mu^2 - 2\mu \coth 2\mu \quad (7-136)$$

3. 稳定性判据

从 μ 的定义式(7-119)可知 μ 为实数, 由(7-136)式得知 $K(\mu)$ 也是实数。而从

$$\Delta = \Delta_r + i\Delta_i = \frac{\bar{U} - c}{U^*} = \frac{\bar{U} - c_r}{U^*} + i \frac{c_i}{U^*} \quad (7-137)$$

中可知

$$c_i \neq 0 \quad \text{对应于} \quad \Delta_i \neq 0$$

所以由(7-135)式得知稳定性判据为

$$\begin{cases} K(\mu) > 0 & \text{稳定} \\ K(\mu) = 0 & \text{过渡状态} \\ K(\mu) < 0 & \text{不稳定} \end{cases} \quad (7-138)$$

而方程

$$K(\mu) = 0 \quad (7-139)$$

的根为

$$\mu_c = 1.1997$$

所以稳定性判据可写为

$$\begin{cases} \mu > \mu_c & \text{稳定} \\ \mu = \mu_c & \text{过渡状态} \\ \mu < \mu_c & \text{不稳定} \end{cases} \quad (7-140)$$

将(7-106)式代入(7-139)式, 并令 $\mu = \mu_c$ 可解出 $L_c \left(\equiv \frac{2\pi}{k_c} \right)$, 则

稳定判据还可写为

$$\begin{cases} L < L_c & \text{稳定} \\ L = L_c & \text{过渡状态} \\ L > L_c & \text{不稳定} \end{cases} \quad (7-141)$$

(7-135)式表明, 复数 Δ 的平方等于实数, 则必有

$$\Delta_r \Delta_i = 0 \quad (7-142)$$

这里

$$\Delta_r = \frac{\bar{U} - c_r}{U^*}, \quad \Delta_i = -\frac{c_i}{U^*} \quad (7-143)$$

由以上关系式可将扰动分成三个不同的体系：

① 当

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_i = 0 \quad (7-144)$$

表示稳定或中性短波体系；

② 当

$$\Delta_r = \Delta_i = 0 \quad (7-145)$$

表示过渡体系；

③ 当

$$\Delta_r = 0, \Delta_i \neq 0 \quad (7-146)$$

则表示不稳定或自激发长波体系。

由表示稳定体系的特征 $(\mu > \mu_c, K(\mu) > 0)$ 可知，

$$c = c_r = \bar{U} \pm \frac{K^{\frac{1}{2}} U^*}{\mu}, c_i = 0, L < L_c \quad (7-147)$$

由表示不稳定体系的特征 $(\mu < \mu_c, K(\mu) < 0)$ 可知

$$c_r = \bar{U}, \mu c_i = \pm (-K)^{\frac{1}{2}} U^*, L > L_c \quad (7-148)$$

这两种不同的体系是由 $\mu = \mu_c$ 所示的过渡状态扰动区分开来。对于过渡状态扰动，下式成立

$$c = c_r = \bar{U}, c_i = 0, L = L_c \quad (7-149)$$

不同体系中的参量 $\frac{c_r - \bar{U}}{U^*}$ ， $\frac{c_i}{U^*}$ 与 $\frac{\mu c_i}{U^*}$ 随 μ 的变化由图7-14

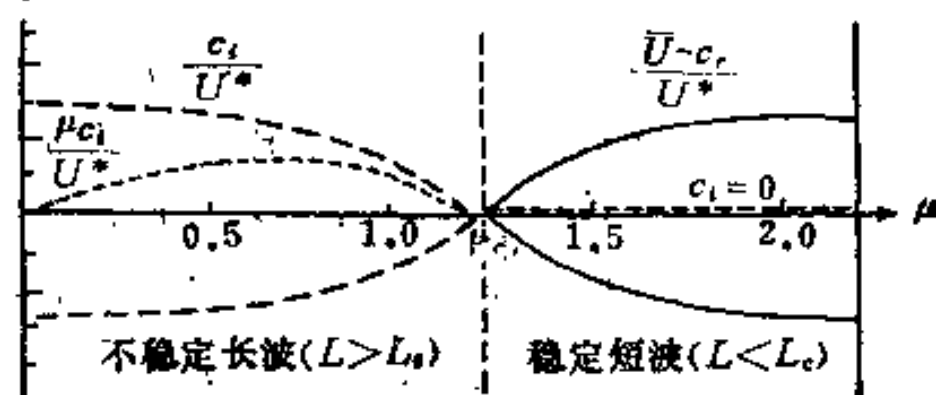


图 7-14

所示。

由上图可以看出, 在稳定体系(即短波 $L < L_c$)中, 对每个波长 $L (< L_c)$, 总是存在两个相对于平均速度 \bar{U} 方向相反、速率相同的中性波扰动。在不稳定体系(即长波 $L > L_c$)中, 对每个波长 $L (> L_c)$ 而言, 存在两个都以平均速度 \bar{U} 移动的扰动, 其中一个是增长波, 另一个是衰减波, 以相同的指数率增长或衰减。当处于临界波长时, 即 $L = L_c$, 两个共轭扰动合并为一个过渡性扰动, 这个扰动并不是中性波, 而随时间线性增大的, 关于这点我们将在后面另行讨论。

4. 最不稳定型

在不稳定体系中, 即 $K(\mu) < 0$, 若 $\mu = \mu_m$ 是 $-K(\mu)$ 的极大值点, 则与 μ_m 相应的波为最不稳定波, 对由(7-136)式所示的函数 $-K(\mu)$ 求极值, 可得

$$\mu_m = 0.8031 \quad (7-150)$$

将 μ_m 代入(7-148)式得到

$$c_{im} = [-K(\mu_m)]^{\frac{1}{2}} U^* = 0.386 U^* \quad (7-151)$$

所以不稳定波的最大增长率 δ_{max} 为

$$\delta_{max} = k_m c_{im} = 0.316 \frac{f U_z}{N} \quad (7-152)$$

式中 k_m 为 μ_m 所对应的波数。

最不稳定波的一些主要特征可由图 7-15 与图 7-16 表示出来。图 7-15 给出振幅函数 $|\phi|$ 与 $|w|$ 随高度的变化。图中 $|\phi|$ 与 $|w|$ 的最大值都归为 1 个单位。从该图可以看出 $|\phi|$ 与 $|w|$ 都是关于大气中层 ($z = h$) 对称的, 但在此层上 $|\phi|$ 具有极小值, 而 $|w|$ 具有极大值。

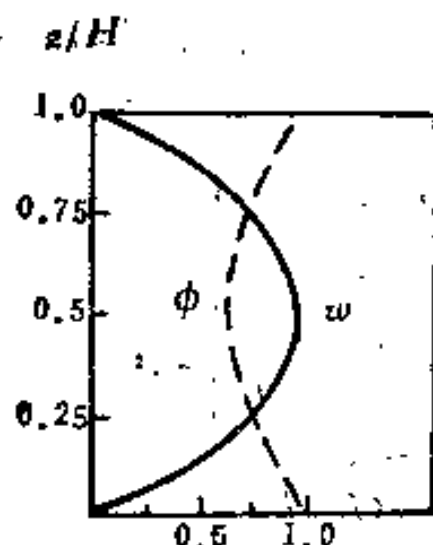


图 7-15 $|\phi|$ 与 $|w|$ 随高度变化

图 7-16 给出了扰动相位随高度的变化。由图中可以看出,从大气底部到顶部, ϕ' 的相位变化了 $\frac{\pi}{2}$; 气压场的脊线与槽线以及流场的等位相线随高度是向西倾斜的, 而温度场的脊线、槽线随高度是向东倾斜的, 所有斜压不稳定性扰动都具有这个特点。另一个特征是: 低气压区在大气底层是暖的, 在大气顶层是冷的。

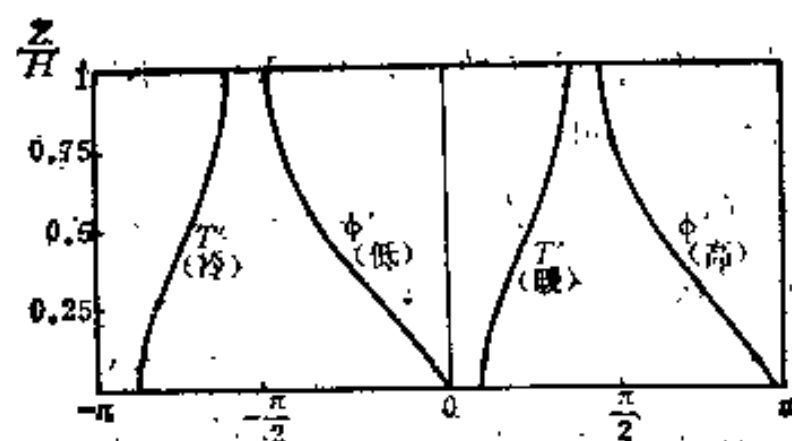


图 7-16 位相随高度的变化

5. 快速移动型——稳定短波

在 $\mu > \mu_c$ 的情况下, 将 c 作为 μ 的函数, 由 (7-147) 式可得, 当

$$\mu = 2\mu_c \quad (7-150)$$

时, 则波动以很快速度相对于 \bar{U} 向东移动, 即相速为

$$c = \bar{U} + 0.5833 U^* \quad (7-151)$$

图 7-17 便是这种波动的振幅函数 $|\phi|$ 与 $|w|$ 随高度的变化。从图中可以看出, 在这种扰动中, ϕ 在大气顶层具有最大值, w 几乎对于大气中层 $z = h$ 对称, 而在 $c = U$ 的临界面上没有梯度。对 \bar{U} 向西传播的波动, 其 $|\phi|$ 与 $|w|$ 随高度变化与图 7-17 成镜像对称。

这种波动的另一个特征是随高度无位相变化。

6. 过渡状态扰动

如稳定扰动(即短波)的波长 L 不断增加, 当波长增到 L_c 时, $K(\mu)$ 的值减小到零。这时相对应的两个波动波速差别减小到零。因此这两个波合并成一个波, 如图 7-14 所示。在给定初始条件 $\tilde{\psi}(0)$ 与 $\tilde{\psi}_x(0)$ 时, 该波动随时间是线性增长的。现证明如下:

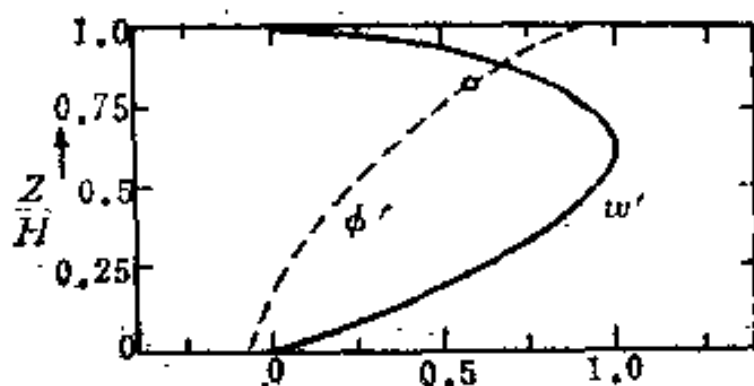


图 7-17 $|\phi|$ 与 w' 随高度的变化

假定 ψ' 是由具有相同波数 k ，但具有稍微不同相速 c 和 $c + \Delta c$ 的两个中性波组成。即

$$\psi' = A \cos k(x - ct) + B \cos k[x - (c + \Delta c)t] \quad (7-152)$$

这里 A 与 B 由下列初始条件而定：

$$\psi'(0) = \psi_0 \cos kx, \quad \psi'_t(0) = k\psi_1 \sin kx \quad (7-153)$$

将由上式确定的系数 A 与 B 的值代入(7-152)式，得到解为：

$$\begin{aligned} \psi' = \psi_0 \cos \varepsilon - \frac{(\psi_1 - c\psi_0)}{\Delta c} \{ \cos \varepsilon [1 - \cos k\Delta ct] - \\ - \sin \varepsilon \sin k\Delta ct \} \end{aligned} \quad (7-154)$$

这里

$$\varepsilon = k(x - ct) \quad (7-155)$$

由(7-154)式可见，当 Δc 是有限时，这两个波动是分开传播的。当 $\Delta c \rightarrow 0$ ，即变为过渡状态扰动，也就是 $L = L_c$ ，这时(7-154)式便变为

$$\psi' = \psi_0 \cos \varepsilon + kt(\psi_1 - c\psi_0) \sin \varepsilon \quad (7-156)$$

由此可见，当两个波动合并成一个波动，即建立过渡状态时，产生了一个振幅随时间线性增大的波

$$\sin \varepsilon = \sin k(x - ct)$$

三、摩擦作用对斜压波的影响

在本章 § 4 中我们已经提到，埃克曼摩擦对自由大气来讲仅仅在边界上加了垂直运动 w_0 与 w_i 。如果考虑这种摩擦影响的话，

就是将具有摩擦作用的边界条件(7-121)与(7-122)两式代入 $\tilde{\psi}$ 的通解(7-132)式,利用线性齐次方程组具有非零解 A, B 的条件可得

$$\mu \Delta = ib^* \coth 2\mu \pm [b^{*2}(1 - \coth^2 2\mu) + K(\mu)]^{\frac{1}{2}} \quad (7-157)$$

式中 $K(\mu)$ 的定义见(7-136)式, b^* 的定义见(7-113)式。从(7-157)式发现,仅在 U_z 超过某临界值 U_{zc} 时,才有可能产生不稳定斜压波。这里 U_{zc} 由下式给出

$$U_{zc} = \left[\frac{b^*}{(-K)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\min} = \left[\left(-\frac{fv}{2K} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{a^2}{k} \right]_{\min} = \left[\left(-\frac{vgs_z}{2fK} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu}{h} \right]_{\min} \quad (7-158)$$

由上式可见, U_{zc} 随 $f^{-\frac{1}{2}}$ 增加,纬度越低, U_{zc} 则越大。在中纬度通常大气条件下,我们有

$gs_z = 10^{-4}/\text{秒}^2$, $f = 10^{-4}/\text{秒}$, $h = 5000$ 米
涡动粘滞系数约为

$$\nu = 5 \text{ 米}^2/\text{秒}$$

以及

$$\mu = 0.83$$

这些都对应着粘性流的最不稳定型,这时

$$U_{zc} = 1.17 \times 10^{-2}/\text{秒} \quad (7-159)$$

这说明要产生不稳定扰动,基本气流的垂直切变至少是:每上升1公里,风速要变化1米/秒。

另外,在具有摩擦作用时,临界波长为 L_{vc} ,它大于无摩擦时的临界值 L_c 。所以不稳定波的产生条件为:

$$\begin{cases} U_z > U_{zc} \\ L > L_{vc} \end{cases} \quad (7-160)$$

斜压不稳定与稳定性区域由图 7-18 所示。

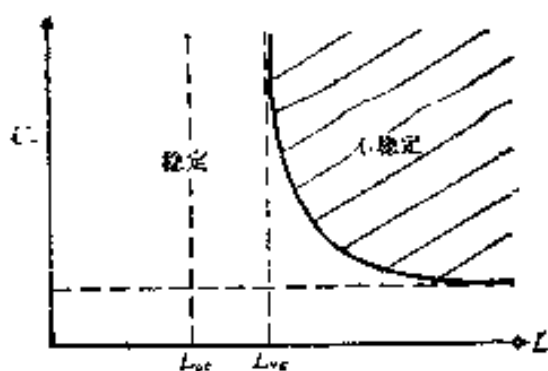


图 7-18 稳定与不稳定性区域的划分

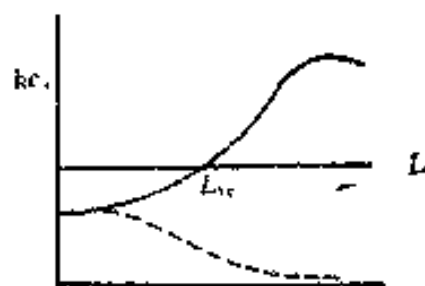


图 7-19

最后还要指出的是，在稳定区域内，具有摩擦作用得到的两个波解都是衰减的；而在不稳定区域，一个是增长波，另一个是衰减波，如图7-19所示。这说明在伊台模式中，摩擦力能使流场变得更稳定。

§ 6 二层模式下斜压不稳定性扰动的分析

当考虑柯氏参数随纬度而变，即具有 β 效应时，在方程 (7-120) 式中 r 在 U_s 为常数时，亦是一个异于零的常数。因此上节介绍的那套解是不适用的。为使问题简化起见，我们将先用二层模式来讨论这类斜压不稳定性扰动的问题。

一、控制方程组

为便于解释起见，我们将由控制扰动的基本方程出发。假定系统达到静力平衡，我们利用 p 坐标中线性化的温度方程与热流量方程作为控制方程。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \phi' + \beta \frac{\partial \phi'}{\partial x} = f_0 \frac{\partial \omega'}{\partial p} \quad (7-161)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial p} - U_p \frac{\partial \phi'}{\partial x} = -s\omega' \quad (7-162)$$

这里

$$\omega' = \frac{dp}{dt}$$

是 p 坐标下的垂直速度，而

$$s = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial p} \quad (7-163)$$

为静力稳定度因子。为简单起见，我们假定在二层模式中 s 为常数。

p 坐标与 z 坐标间的垂直速度有如下关系：

$$\omega' = w \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g w \quad (7-164)$$

由(7-102)与(7-103)两式可知，考虑埃克曼摩擦作用， p 坐标下的垂直边界条件为

$$\omega'_0 = -\rho g \delta \zeta'_0, \quad \omega'_1 = \rho g \delta \zeta'_1 \quad (7-165)$$

二、二层斜压模式

两层斜压模式有两种意义。为要考虑大气的斜压效应，我们必须了解气象变量随高度的分布，这种分布是连续的。为了分析与数值计算的方便，可把大气分为几层，从不同层次气象变量的变化，反映它们的垂直分布。由此看来，至少要有两层；如果只考虑一层，则为正压大气了。所以两层模式是最简单的斜压大气模型之一，它把三维空间的变化化为两个二维空间中的变化，从这个意义上讲，这是两层近似，即将两层平面近似反映空间。另外，两层斜压模式也可看为是由两层均匀的流体构成的物理图象，这可称为两层物理模型。如果大气中存在准地转关系，那么两层近似与两层物理模型可看为是一样的。为了推导这个模式，我们将大气分为由标号 1 到 5 各面为界的四层。每层间的气压

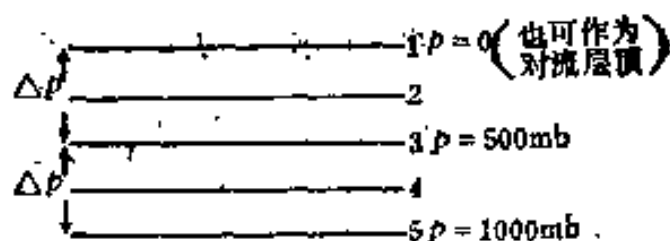


图 7-20 二层斜压模式示意图

差相同，3到1与5到3间的气压差用 Δp 表示，如图 7-20 所示。

为讨论方便起见，再作如下假定：

$$\zeta'_6 = \zeta'_4, \quad \zeta'_1 = \zeta'_2 \quad (7-166)$$

那么(7-165)式所示的边界条件应为

$$\omega'_6 = -\rho g \delta \zeta'_4, \quad \omega'_1 = \rho g \delta \zeta'_2 \quad (7-167)$$

将涡度方程(7-161)用于标号为 2、4 的层次，这就需要计算这两个层次上的辐散项 $\left(\frac{\partial \omega'}{\partial p}\right)_2$ 与 $\left(\frac{\partial \omega'}{\partial p}\right)_4$ ，即

$$\left(\frac{\partial \omega'}{\partial p}\right)_2 = \frac{1}{\Delta p}(\omega'_6 - \omega'_1) = \frac{1}{\Delta p}(\omega'_6 - \rho g \delta \zeta'_2) \quad (7-168)$$

$$\left(\frac{\partial \omega'}{\partial p}\right)_4 = \frac{1}{\Delta p}(\omega'_6 - \omega'_4) = -\frac{1}{\Delta p}(\omega'_6 + \rho g \delta \zeta'_4) \quad (7-169)$$

利用地转涡度关系式

$$\zeta'_j = \frac{1}{f} \nabla^2 \phi'_j, \quad j = 2, 4 \quad (7-170)$$

并令

$$\tilde{v} = \frac{f \rho g \delta}{\Delta p} = \frac{f \delta}{h} \quad (7-171)$$

表示摩擦作用，这里

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} \quad (7-172)$$

为一层大气的厚度。

将(7-168)与(7-169)两式代入(7-161)式，并利用(7-170)与(7-171)两式可得标号为 2、4 这两个层次的涡度方程

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \phi'_j + \beta \frac{\partial \phi'_j}{\partial x} = \\ & = \pm \frac{f^2}{\Delta p} \omega'_6 - \tilde{v} \nabla^2 \phi'_j \quad \begin{array}{l} j=2 \text{ 用“+”号} \\ j=4 \text{ 用“-”号} \end{array} \end{aligned} \quad (7-173)$$

从上式可见, 在我们的假定下, 埃克曼摩擦作用与 瑞利 (Rayleigh) 摩擦力的形式相同。方程(7-173)式 ω'_3 是在标号为 3 的层次上, 两个方程三个变量, 所以(7-173)式不闭合。我们把热力学方程(7-162)式写在标号为 3 的层次上, 则得

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + U_3 \frac{\partial}{\partial x}\right)(\phi'_4 - \phi'_2) - \Delta p U_p \frac{\partial \phi'_3}{\partial x} = -s \omega'_3 \Delta p \quad (7-174)$$

(7-173)与(7-174)两式便构成二层模式的基本方程组。

三、扰动相速公式

我们考虑如下波状扰动

$$(\phi'_2, \phi'_4, \omega'_3) = (\phi_2, \phi_4, \omega_3) \exp i[k(x - ct) + k_1 y] \quad (7-175)$$

将上式代入(7-173)与(7-174)两式得到

$$\begin{aligned} [(U_j - c) - \hat{\beta}] \phi_j &= \pm \frac{i f_0^2}{\alpha^2 k \Delta p} \omega_3, & j=2 \text{ 用“+”号} \\ & & j=4 \text{ 用“-”号} \end{aligned} \quad (7-176)$$

这里 $(U_3 - c)(\phi_4 - \phi_2) - 2U^* \phi_3 = \frac{is \Delta p}{k} \omega_3$ (7-177)

这里 $\hat{\beta}$

$$\begin{cases} U^* = \frac{1}{2} \Delta p U_p, & \hat{\beta} = \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{i \tilde{v}}{k} \\ \alpha^2 = k^2 + k_1^2 \end{cases} \quad (7-178)$$

由于我们用的是二层模式, 所以要将 U_3 与 U^* 用 U_2 与 U_4 来代表, 假定有如下线性关系

$$(7-179) \quad U_3 = \frac{1}{2}(U_2 + U_4) = \bar{U}, \quad U^* = \frac{1}{2}(U_4 - U_2)$$

这里 \bar{U} 为 2、4 两层的平均风速, 假定它等于第 3 层上的风速; U^* 为风速的垂直切变。为方便起见, 引入如下两个变量:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2), \quad \phi^* = \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) \quad (7-180)$$

同样假定

$$\phi_3 = \bar{\phi} \quad (7-181)$$

将由(7-176)式表示的两个公式相加与相减可得如下两式:

$$(\bar{U} - c - \hat{\beta})\bar{\phi} + U^*\phi^* = 0 \quad (7-182)$$

$$(\bar{U} - c - \hat{\beta})\phi^* + U^*\bar{\phi} = -\frac{if^2}{k\alpha^2\Delta p}\omega_3 \quad (7-183)$$

利用(7-177)与(7-183)两式消去 ω_3 得到:

$$[(\alpha^2 + 2F)(\bar{U} - c) - \alpha^2\hat{\beta}]\phi^* + (\alpha^2 - 2F)U^*\bar{\phi} = 0 \quad (7-184)$$

这里

$$F = \frac{f^2}{s(\Delta p)^2} \quad (7-185)$$

如果将二层模式看为是由密度为 ρ_2 与 $\rho_4 (> \rho_2)$ 的两层均质不可压缩流体所组成的物理模型时, 只要用 $\frac{2gD(\rho_4 - \rho_2)}{\rho_2 + \rho_4}$ 来代替

$s(\Delta p)^2$, 其结论完全一样, 这里 D 为这两层流体的平均深度。

(7-182)与(7-184)两式是有关 $\bar{\phi}$ 与 ϕ^* 的线性齐次方程组, 这个方程组要有非零解 $\bar{\phi}$ 与 ϕ^* , 则其系数行列式必然为零。即里兹

$$\begin{vmatrix} (\bar{U} - c - \hat{\beta}) & U^* \\ (\alpha^2 - 2F)U^* & (\alpha^2 + 2F)(\bar{U} - c) - \alpha^2\hat{\beta} \end{vmatrix} = 0 \quad (7-186)$$

由上式可得相速公式为

$$c = \bar{U} - \frac{1}{\alpha^2 + 2F} \left[(\alpha^2 + F)\hat{\beta} \mp R^{\frac{1}{2}} \right] \quad (7-187)$$

这里

$$R \equiv \hat{\beta}^2 F^2 - U^{*2}(4F^2 - \alpha^4) \quad (7-188)$$

四、无摩擦大气稳定性分析

1. 稳定性判据

当大气为无摩擦时，即

$$\nu = 0, \text{ 推得 } \tilde{\nu} = 0$$

由(7-178)式可得

$$\hat{\beta} = \frac{\beta}{\alpha^2} \quad (7-189)$$

为实数。将上式代入相速公式(7-187)式可得

$$c = \bar{U} - \frac{\beta(\alpha^2 + F)}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \pm \frac{R^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2 + 2F} \quad (7-190)$$

这时

$$R = \frac{\beta^2 F^2}{\alpha^4} - U^{*2}(4F^2 - \alpha^4) \quad (7-191)$$

为实数。

这样，稳定性判据为：

$$R \begin{cases} > 0 \text{ 稳定} \\ = 0 \text{ 过渡状态} \\ < 0 \text{ 不稳定} \end{cases} \quad (7-192)$$

对应 $R = 0$ ，虽然 c 是实数，可是波动并不是中性的，而是随时间线性增长的。

由(7-191)式可知，从稳定到不稳定的过渡状态由下式给出（即令 $R = 0$ ）：

$$\frac{\alpha^2}{2F^{\frac{1}{2}}} = 1 \pm \left(1 - \frac{\beta^2}{4U_{c1}^{*2} F^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7-193)$$

U^* 的临界值 U_{c1}^* （即由 $R = 0$ 得出）是 α, β, F 的函数，它由下式给出

$$U_{c1}^* = \frac{F\beta}{\alpha^2(4F^2 - \alpha^4)^{\frac{1}{2}}} \quad (7-194)$$

只有

$$U^* > U_{c1}^* \quad (7-195)$$

才能有不稳定波出现。根据资料分析, U_{c1}^* 接近 4 米/秒。由(7-179) 式可知 U^* 是风速切变($U_4 - U_2$)的一半, 所以两层大气中风速切变要大于 8 米/秒才有不稳定波产生。

我们将(7-193)式所示的关系式分别画在以 $\frac{2FU^*}{\beta}$ 为纵坐标、 $\frac{\alpha^4}{4F^2}$ 为横坐标(图7-21)与以 U^* 为纵坐标、波长 L 为横坐标(图7-22)的两张图中, 它表示 $c_i = 0$ 时的边缘稳定性曲线。在这条曲线下面与外面的部分表示稳定区域; 在这条曲线上面的部分表示不稳定区域。由 $R < 0$ 可知 $c_i > 0$, 这样便得到随时间按指数增长的波型和与此共轭的衰减波型。 U_{min}^* 的最小值出现在 $\alpha^2 = \sqrt{2} F$ 的地方, 并由下式给出

$$U_{min}^* = \frac{\beta}{2F} = \frac{\beta s(\Delta p)^2}{2f^2} = \frac{\beta N^2 H^2}{2f^2} \quad (7-196)$$

这个值可由图 7-21 中边缘稳定性曲线的最低点来表示。由上式可

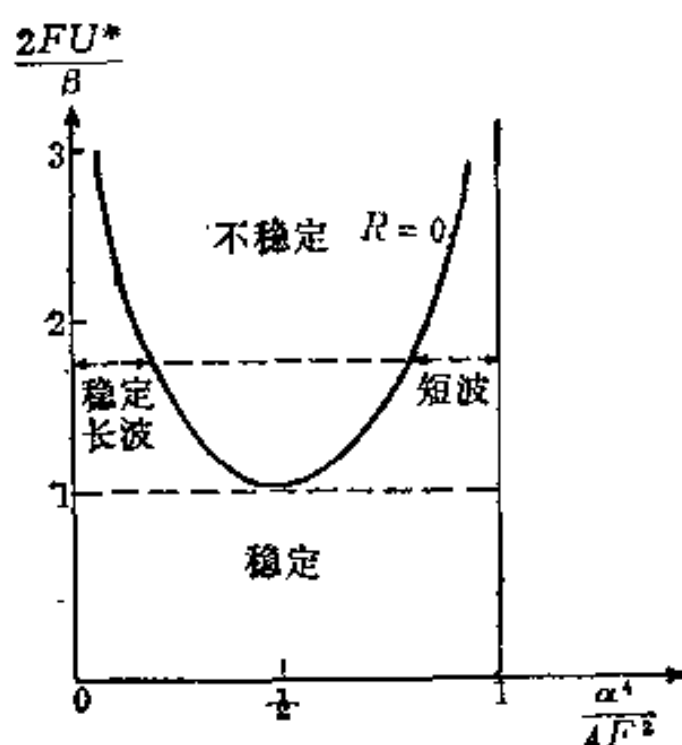


图 7-21 二层模式中边缘稳定性曲线(I)

知, 这个临界最小垂直切变随纬度按 f^{-2} 变化, 因此随着纬度降低, U_{min}^* 很快增长。例如取

$$N = 1.1 \times 10^{-2} / \text{秒}, H = 9000 \text{ 米},$$

$$\beta = 2 \times 10^{-11} / \text{米} \cdot \text{秒} \quad (7-197)$$

则

$$U_{min}^* = 9.7 \text{ 米/秒}, \text{ 当纬度 } \varphi = 45^\circ$$

$$U_{min}^* = 155 \text{ 米/秒}, \text{ 当纬度 } \varphi = 10^\circ$$

$$(7-198)$$

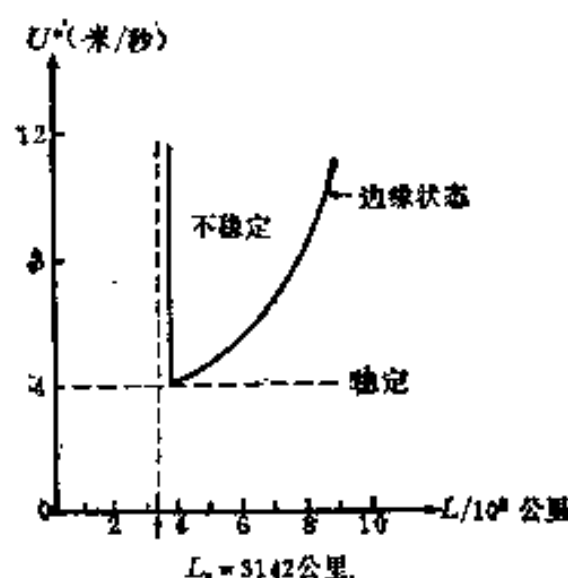


图 7-22 二层模式中边缘稳定性曲线(I)

2. 不同稳定度条件下波速分析

① 稳定区域

当 $\alpha^2 > 2F$, 或当 $U^* < U_{min}^*$, 则由(7-191)式可得 $R > 0$, 即处于稳定状态。由相速公式(7-190)式可知, 这时有传播速度不同的两个波解, 它们的波速分别为

$$c_1 = \bar{U} - \frac{\beta(\alpha^2 + F)}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} + \frac{\sqrt{R}}{\alpha^2 + 2F} \quad (7-199)$$

$$c_2 = \bar{U} - \frac{\beta(\alpha^2 + F)}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} - \frac{\sqrt{R}}{\alpha^2 + 2F} \quad (7-200)$$

罗斯贝波速为

$$c_R = \bar{U} - \frac{\beta}{\alpha^2} \quad (7-201)$$

在短波稳定区域中, 一个波的波速大于罗斯贝相速, 即 $c_1 > c_R$; 而另一个波的波速则小于罗斯贝相速, 即 $c_2 < c_R$ 。

而在长波稳定区域中, 一个中性扰动相对于 \bar{U} 按非常接近 c_R 的速度西行; 而另一个波相对于 \bar{U} 缓慢东行。

② 过渡状态

由 $R = 0$ 可知, 两个波合为一个波, 波速为

$$c_1 = c_2 = \bar{U} - \frac{\beta(\alpha^2 + F)}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \quad (7-202)$$

上式可见此波相对于 \bar{U} 西行的速度要比 c_R 慢一点。

③ 不稳定区域

在不稳定区域中，有

$$\alpha^2 < 2F, \quad U^* > U_{c1}^*, \quad R < 0$$

则由相速公式(7-190)式可得 c 的两个共轭复数的值，它代表一个增长波、一个衰减波，这两个波以同样相速

$$c_r = \bar{U} - \frac{\beta(\alpha^2 + F)}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \quad (7-203)$$

传播。由此式可见，与过渡状态相同，不稳定波相对于 \bar{U} 西行速度要比 c_R 慢一点。

图 7-23 给出了在下列条件下

$$\beta = 1.6 \times 10^{-11} / \text{米} \cdot \text{秒}, \quad f = 10^{-4} / \text{秒}$$

$$N = 1.2 \times 10^{-2} / \text{秒}, \quad U^* = 10 \text{ 米/秒}$$

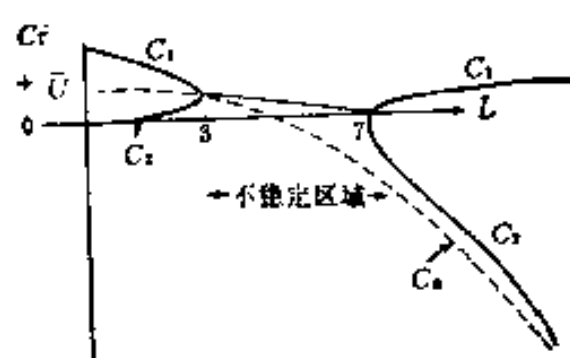


图 7-23 c_r 与 c_R 随 L 的变化

相速 c_r 与罗斯贝相速 c_R 随波长 L 的变化情况，从图中也可看出我们刚才讨论的结果。

3. 扰动能量的来源

我们从无摩擦二层准地转 ($U_v = 0$) 模式求得扰动能量方程。

将 $\frac{\phi'_1}{f^{\frac{1}{2}}_0}$ 乘以(7-173)式，将 $\frac{\phi'_4 - \phi'_2}{s(\Delta p)^2}$ 乘以(7-174)式，然后按

x 与 y 方向一个波长积分。假定在南北边界上 ϕ'_j 为零，我们可得如下扰动动能 K' 与扰动位能 E' 的方程

$$\frac{\partial K'}{\partial t} = \frac{1}{\Delta p} \langle \omega_s (\phi'_4 - \phi'_2) \rangle \quad (7-204)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial t} = & -\frac{1}{\Delta p} \langle \omega_3(\phi_4 - \phi_2) \rangle + \\ & + \frac{1}{s(\Delta p)^2} \left\langle U^*(\phi_4 - \phi_2) \frac{\partial}{\partial x} (\phi_4 + \phi_2) \right\rangle \quad (7-205) \end{aligned}$$

这里 $\langle () \rangle$ 表示沿 x 与 y 方向一个波长的平均,其中 K' 与 E' 由下式定义

$$K' \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \langle (u_{y,j}^2 + v_{y,j}^2) \rangle = \frac{1}{2f_0^2} \sum_{j=1}^2 \langle (\phi_{x,j}^2 + \phi_{y,j}^2) \rangle \quad (7-206)$$

$$E' \equiv \frac{1}{2} \left\langle \frac{(\phi_4 - \phi_2)^2}{s(\Delta p)^2} \right\rangle \quad (7-207)$$

将(7-204)与(7-205)两式相加得到

$$-\frac{\partial}{\partial t} (K' + E') = \frac{1}{s(\Delta p)^2} \left\langle U^*(\phi_4 - \phi_2) \frac{\partial}{\partial x} (\phi_4 + \phi_2) \right\rangle \quad (7-208)$$

从上式可知, $U^*(\phi_4 - \phi_2)$ 与 $\frac{\partial}{\partial x}(\phi_4 + \phi_2)$ 必须为正相关时,才能使扰动总能量 $(K' + E')$ 增加,即使扰动为不稳的。

五、具有埃克曼摩擦作用的扰动稳定性分析

1. 稳定性判据

当考虑大气中有埃克曼摩擦作用时,相速公式(7-187)式中 $\hat{\beta}$ 是复数,所以稳定性判据不能单考虑 R 的正负了。如果处于不稳定区域,则(7-187)式的两个解 c_1 与 c_2 不再是共轭复数了。在这种情况下,为求得区分稳定与不稳定区域的风速垂直切变的临界值 U_{cr}^* ,可在(7-187)式中令 $c_i = 0$ 得到。即

$$U_{cr}^{*2} = \frac{1}{(2F - \alpha^2)} \left[\frac{F^2 \beta^2}{\alpha^2(\alpha^2 + F)^2} + \frac{\tilde{v}^2 \alpha^2}{k^2} \right] \quad (7-209)$$

如考虑低粘性的情况,即

$$0 \leq \tilde{\nu} \ll \frac{kF\beta}{\alpha^2(\alpha^2 + F)} \quad (7-210)$$

则在(7-209)式中, 令

$$\tilde{\nu} \rightarrow 0$$

可得风速垂直切变的临界值为

$$U_{cr}^* = \frac{F\beta}{\alpha(\alpha^2 + F)(2F - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (7-211)$$

所以稳定性判据为

$$\begin{cases} U^* > U_{cr}^* & \text{不稳定} \\ U^* = U_{cr}^* & \text{过渡状态} \\ U^* < U_{cr}^* & \text{稳定} \end{cases} \quad (7-212)$$

2. 不同稳定度条件下的波速分析

由于我们考虑了大气的摩擦作用, 相速 c_1 与 c_2 不再互为共轭。即

$$-c_{1i} \neq c_{2i} \quad (7-213)$$

可是两个波动中至少有一个波是衰减的。

① 过渡状态 ($U^* = U_{cr}^*$)

这时有两个波解, 一个是中性波, 其相速由下式表示:

$$\begin{cases} c_{i1} = 0 \\ c_{r1} = \bar{U} - \frac{\beta}{\alpha^2 + F} \end{cases} \quad (7-214)$$

另一个是衰减波, 其相速为

$$\begin{cases} c_{i2} = -\frac{2(\alpha^2 + F)}{k(\alpha^2 + 2F)}\tilde{\nu} < 0 \\ c_{r2} = \bar{U} - \beta \left[\frac{1}{\alpha^2 + 2F} + \frac{F}{\alpha^2(\alpha^2 + F)} \right] \end{cases} \quad (7-215)$$

② 稳定区域 ($U^* < U_{cr}^*$)

这时有两个波速不同的解，由于摩擦作用，这两个波都是衰减的。

③ 不稳定区域($U^* > U_{cr}^*$)

有两个波速不同的波解，其中一个是增长波，另一个是衰减波。

我们对如下弱不稳定的情况进行讨论：风速垂直切变 U^* 比 U_{cr}^* 略大一点的情况，即

$$U^* = U_{cr}^* + \Delta, \quad 0 < \Delta \ll U_{cr}^* \quad (7-216)$$

由相速公式(2-187)式可得如下两个波解：

增长波：

$$\begin{cases} c_{1r} = \bar{U} - \frac{\beta}{(\alpha^2 + F)} \left[1 + \frac{F^2 D}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \right] \\ c_{1i} = \frac{(\alpha^2 + F)}{(\alpha^2 + 2F)} - \frac{\tilde{\nu} D}{k} \end{cases} \quad (7-217)$$

衰减波：

$$\begin{cases} c_{2r} = \bar{U} - \frac{\beta}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \left[\alpha^2 + F + \frac{F^2}{(\alpha^2 + F)} (1 - D) \right] \\ c_{2i} = -\frac{(\alpha^2 + F)}{(\alpha^2 + 2F)} (2 + D) \frac{\tilde{\nu}}{k} < 0 \end{cases} \quad (7-218)$$

这里

$$D = \frac{(4F^2 - \alpha^4)U_{cr}^* \Delta}{\left[\frac{\beta^2 F^2}{\alpha^4(\alpha^2 + F)^2} + \frac{\tilde{\nu}^2(\alpha^2 + F)^2}{k^2} \right]} \quad (7-219)$$

与 Δ 成正比。当 $\tilde{\nu}$ 很小时，这两个波的增长率或衰减率的量级是不同的，各为：

$$kc_{1i} \sim O(\tilde{\nu} \Delta) \quad (\text{增长率}) \quad (7-220)$$

$$kc_{2i} \sim O(\tilde{\nu}) \quad (\text{衰减率}) \quad (7-221)$$

若令

$$\Delta = 0$$

则有 $D = 0$

则(7-217)与(7-218)两式便变为过渡状态的波解(7-214)与(7-215)两式。

3. 摩擦对扰动不稳定性的作用

比较(7-194)与(7-211)两式发现

$$U_{cr}^* < U_{c1}^* \quad (7-222)$$

即有摩擦时垂直切变临界值 U_{cr}^* 要比无摩擦时的 U_{c1}^* 要小。这说明在具有 β 效应时, 摩擦作用使基本流场变得更不稳定。图7-24画出了有摩擦与无摩擦两种情况下边缘稳定性曲线。从图中可以看出, 具有摩擦的临界曲线要低于无摩擦时的曲线; 当 $\frac{\alpha^2}{F} > 2$ 时, 不管有没有摩擦力, 系统总是稳定的。

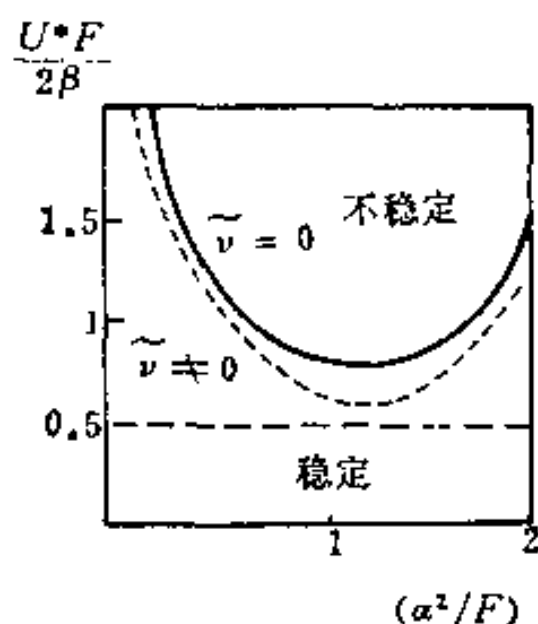


图 7-24 有无摩擦时的边缘稳定性曲线

将本章 § 5 中的伊台模式($\beta = 0$)与本节的二层模式相比较, 摩擦力对扰动不稳定性的作用是不同的。在伊台模式中, $\beta = 0$, 摩擦力具有使基本流场变得稳定的作用, 即具有增稳作用; 在二

层模式中, $\beta \neq 0$, 摩擦力使基本流场变得不稳定, 即同时考虑摩擦与 β 效应, 会产生减稳作用。

六、不稳定波的结构

在讨论不稳定波的结构, 即讨论波动随时间与空间是如何变化的问题时, 我们可以把它化为初值问题。即在 $t = 0$ 给一个不是零的初始扰动, 再看这个扰动随时间是如何变化的。对这个问题, 我们仅考虑无摩擦的情况。

1. 初始斜压扰动的一般形式解

初始斜压扰动由下式所示

$$\begin{cases} \bar{\phi}(x, 0) = Ae^{ikx} \\ \phi^*(x, 0) = A^*e^{i(kx + \alpha_0)} \end{cases} \quad (7-223)$$

这里 A, A^* 与 α_0 为给定的实常数, A, A^* 表示 $\bar{\phi}, \phi^*$ 的初始振幅, α_0 表示 $\bar{\phi}$ 与 ϕ^* 间的初始位相差。上式右边理解为只取实部。令 (7-187) 式中 $-\sqrt{R}$ 表示的解记为 c_1 , \sqrt{R} 表示的解记为 c_2 , 则 (7-182) 与 (7-184) 两式的解 $\bar{\phi}$ 与 ϕ^* 为

$$\bar{\phi}(x, t) = \phi_{01}e^{ik(x - c_1t)} + \phi_{02}e^{ik(x - c_2t)} \quad (7-224)$$

$$\phi^*(x, t) = \phi_{01}^*e^{ik(x - c_1t)} + \phi_{02}^*e^{ik(x - c_2t)} \quad (7-225)$$

利用初始条件 (7-223) 式, 我们可知这两公式中的待定常数 $\phi_{01}, \phi_{02}, \phi_{01}^*, \phi_{02}^*$ 满足下列方程组

$$\phi_{01} + \phi_{02} = A \quad (7-226)$$

$$\phi_{01}^* + \phi_{02}^* = A^*e^{i\alpha_0} \quad (7-227)$$

由 (7-182) 可得

$$\left(\bar{U} - c_l - \frac{\beta}{\alpha^2} \right) \phi_{0l} = -U^* \phi_{0l}^*, \quad l = 1, 2 \quad (7-228)$$

这里我们是用 1 及 2 来代表上、下两层的。由 (7-227) 与 (7-228) 两式消去 ϕ_{01}^* 与 ϕ_{02}^* 可得

$$c_1 \phi_{01} + c_2 \phi_{02} = A^*e^{i\alpha_0} U^* + \left(\bar{U} - \frac{\beta}{\alpha^2} \right) A \quad (7-229)$$

解(7-226)与(7-229)两式,可得

$$\phi_{0l} = -\frac{1}{c_l - c_{3-l}} \left[\left(\bar{U} - \frac{\beta}{\alpha^2} - c_{3-l} \right) A + U^* A^* e^{i\alpha_0} \right],$$

$$l = 1, 2 \quad (7-230)$$

将上式代入(7-228)式得到

$$\phi_{0l}^* = -\frac{\left(\bar{U} - c_l - \frac{\beta}{\alpha^2} \right)}{(c_l - c_{3-l})U^*} \left[\left(\bar{U} - \frac{\beta}{\alpha^2} - c_{3-l} \right) A + U^* A^* e^{i\alpha_0} \right],$$

$$l = 1, 2 \quad (7-231)$$

将(7-230)与(7-231)两式代入(7-224)与(7-225)两式可得一般形式解为

$$\bar{\phi}(x, t) = \frac{1}{c_1 - c_2} \{ A[(c_1^* e^{i\varepsilon_2} - c_2^* e^{i\varepsilon_1}) + U^* A^* [e^{i(\varepsilon_1 + \alpha_0)} - e^{i(\varepsilon_2 + \alpha_0)}]] \}$$

$$(7-232)$$

$$\phi^*(x, t) = \frac{1}{(c_1 - c_2)U^*} \{ A c_1^* c_2^* (e^{i\varepsilon_2} - e^{i\varepsilon_1}) + U^* A^* [c_1^* e^{i(\varepsilon_1 + \alpha_0)} - c_2^* e^{i(\varepsilon_2 + \alpha_0)}] \}$$

$$(7-233)$$

这里

$$c_l^* = c_l + \frac{\beta}{\alpha^2} - \bar{U}, \quad \varepsilon_l = k(x - c_l t), \quad l = 1, 2 \quad (7-234)$$

2. 初始斜压扰动的不稳定波解

对于不稳定扰动, 我们有

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 2ic_i, & \varepsilon_1 = \varepsilon - ikc_i t, & \varepsilon_2 = \varepsilon + ikc_i t \\ \varepsilon = k(x - c_r t) \end{cases} \quad (7-235)$$

将上式代入(2-232)与(2-233)两式, 可得不稳定波解为

$$\bar{\phi}(x, t) = A \left[\cos \varepsilon \cosh(kc_i t) - \frac{c_0^*}{c_i} \sin \varepsilon \sinh(kc_i t) \right] +$$

$$+ \frac{U^* A^*}{c_i} \sinh(kc_i t) \sin(\varepsilon + \alpha_0) \quad (7-236)$$

$$\begin{aligned}\phi^*(x, t) = & -\frac{1}{\bar{U}^* c_i} \{ A^* U^* [c_0^* \sin(\varepsilon + \alpha_0) \sinh(kc_i t) + \\ & + c_i \cosh(kc_i t) \cos(\varepsilon + \alpha_0)] - \\ & - A(c_0^{*2} + c_i^2) \sin \varepsilon \sinh(kc_i t) \} \quad (7-237)\end{aligned}$$

这里

$$c_0^* = c_i - \bar{U} + \frac{\beta}{\alpha^2} \quad (7-238)$$

3. 初始斜压扰动的稳定波解

对处于稳定区域的扰动, c_i 与 c_i^* 都为实数。这时(7-232)与(7-233)两式便化为

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(x, t) = & \frac{1}{c_1 - c_2} \{ A[c_1^* \cos \varepsilon_2 - c_2^* \cos \varepsilon_1] + \\ & + U^* A^* [\cos(\varepsilon_1 + \alpha_0) - \cos(\varepsilon_2 + \alpha_0)] \} \quad (7-239)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^*(x, t) = & \frac{1}{c_1 - c_2} \left\{ \frac{A}{\bar{U}^*} c_1^* c_2^* (\cos \varepsilon_2 - \cos \varepsilon_1) + \right. \\ & \left. + A^* [c_1^* \cos(\varepsilon_1 + \alpha_0) - c_2^* \cos(\varepsilon_2 + \alpha_0)] \right\} \quad (7-240)\end{aligned}$$

从这两个公式可以看出, 初始时刻以后, 扰动由具有不同相速的两个中性波构成。

4. 初始正压扰动的波解

若初始扰动为正压, 即在(7-223)式中

$$A^* = 0 \quad (7-241)$$

则由(7-232)与(7-233)两式可得波动解为

$$\bar{\phi}(x, t) = \frac{A}{c_1 - c_2} (c_1^* e^{i\varepsilon_2} - c_2^* e^{i\varepsilon_1}) \quad (7-242)$$

$$\phi^*(x, t) = \frac{Ac_1^* c_2^*}{(c_1 - c_2) \bar{U}^*} (e^{i\varepsilon_1} - e^{i\varepsilon_2}) \quad (7-243)$$

在不稳定扰动时, 我们有

$$\phi^*(x, t) = -\frac{A}{U^* c_i} (c_0^{*2} + c_i^2) \sin \varepsilon \sinh(k c_i t) \quad (7-244)$$

由此可见，初始为正压扰动，过段时间后会产生斜压扰动 ϕ^* 。

从(7-236)与(7-237)两式可以看出， $\bar{\phi}(x, t)$ 与 $\phi^*(x, t)$ 随时间按双曲函数形式增大。当增长到一定程度，我们这里给出的线性波解不符合实际情况，而要考虑非线性波解。

§ 7 广泛斜压不稳定性波

在前二节中我们介绍了两种特殊模型——伊台模式与二层模式下纯斜压基本气流(即 $U_y = 0$)的不稳定性。由于它们过于简化，与真实大气差异较大，因此很多重要而有意义的结果不能从这两个模式中得到。

本节介绍在普遍情况下纯斜压基本气流的不稳定性，分析具有恒定垂直切变廓线与急流廓线两种情况，得出不稳定性波具有短波与超长波两个波带等一些重要结论。

一、动力学方程

1. 线性化的扰动位涡方程

由(7-15)式可知，线性化的扰动位涡方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + Q_{0y} \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0. \quad (7-245)$$

这里 q' 为扰动位涡， Q_{0y} 为绝对位涡在 y 方向的梯度，它们的一般表达式为

$$q' = \nabla^2 \psi' + \frac{f_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0}{N^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \quad (7-246)$$

$$Q_{0y} = \beta - \frac{f_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0}{N^2} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (7-247)$$

在广泛的斜压不稳定性问题中，我们将扰动流函数写成如下形式：

$$\psi' = \phi(z) \exp \left\{ \int_0^z \frac{dz}{2H_0} + i [k(x - ct) + k_1 y] \right\} \quad (7-248)$$

式中 H_0 为平均密度层结时的高度尺度, 它由下式定义:

$$H_0 = \left(- \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial z} \right)^{-1} = \frac{RT}{g + R \frac{\partial T}{\partial z}} \quad (7-249)$$

这里已假定 ψ' 为 y 的周期函数, 且在边界上为零。在本节 U 、 c 、 z 可看为元量纲量。

将(7-248)式代入(7-245)式可得振幅方程为

$$(U - c) \left(\frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{1}{N^2} \frac{dN^2}{dz} \frac{d\phi}{dz} - \mu^2 \phi \right) + b\phi = 0 \quad (7-250)$$

这里

$$\mu = \frac{N h \alpha}{f_0} \left[1 + \frac{L^2}{D^2} \left(1 + \frac{2}{h N^2} \frac{d(H_0 N^2)}{dz} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha^2 = k^2 + k_1^2 \quad (7-251)$$

$$b = \frac{N^2 h^2}{f_0^2 U^*} Q_{0y} = \frac{N^2 h^2 \beta}{f_0^2 U^*} - \frac{d^2 U}{dz^2} + \left(\frac{h}{H_0} + \frac{2}{N} \frac{dN}{dz} \right) \frac{dU}{dz} \quad (7-252)$$

$$L = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad D = \frac{4\pi N H_0}{f_0}, \quad U^* = 2hU_z \quad (7-253)$$

式中 h 是一个高度尺度, 当大气看为是有限深度 H 时, 则

$$h = \frac{H}{2}$$

若大气看为无限深度时, h 为一任给定的长度尺度。

2. 边界条件

我们假定在地面上 ($z = 0$) 的垂直速度为零。即

$$w = 0, \quad \text{当 } z = 0$$

当物理条件可使 w 在有限高度 H 趋于很小的值时, 也有

$$w = 0, \text{ 当 } z = H$$

利用热流量方程, 可得关于 ϕ 的边界条件为

$$(U - c) \left(\frac{d\phi}{dz} + \frac{h}{2H_0} \phi \right) = U_z \phi \quad (7-254)$$

另一方面, 如果考虑大气上界是无限的话, 则根据在无穷远处扰动的动能密度有限, 可得下列边界条件:

$$\phi \text{ 有限, 当 } z \rightarrow \infty \quad (7-255)$$

二、恰尼(Charney)模式下的基本解

1. 恰尼模式的特征

恰尼模式有如下一些基本特征:

① U 是 z 的线性函数, 即基本气流具有恒定的垂直切变:

$$U_z = \text{常数} \quad (7-256)$$

② 维赛拉频率为常数。即

$$N^2 = \text{常数} \quad (7-257)$$

③ 密度随高度的变化为常数。即

$$H_0 = \text{常数} \quad (7-258)$$

由(7-247)式得知, Q_{0y} 也是常数。即

$$Q_{0y} = \beta + \frac{f_0^2}{N^2 H_0} U_z = \text{常数} \quad (7-259)$$

将(7-257)式代入(7-250)式, 得到恰尼模式的振幅方程为:

$$(U - c) \left(\frac{d^2 \phi}{dz^2} - \mu^2 \phi \right) + b \phi = 0 \quad (7-260)$$

将(7-259)代入(7-252)式可知上式中的参数 b 为:

$$b = \frac{N^2 h^2}{f_0^2 U^*} \left(\beta + \frac{f_0^2}{N^2 H_0} U_z \right) = \frac{N^2 h^2 \beta}{f_0^2 U^*} \left(1 + \frac{D^*}{D} \right) \quad (7-261)$$

式中 D 由(7-253)式所定义, 而 D^* 具有动力长度尺度, 由下式定义:

$$D^* = \frac{4\pi f_0 U_*}{N\beta} \quad (7-262)$$

从(7-261)式可以看出,基本气流的垂直切变为正, (即 $U_* > 0$) 会增加 β 效应; 当垂直切变为负 ($U_* < 0$) 时, 即会减小 β 效应。这与大气中的实际情况是较符合的, 作者(郭晓岚, 1952)早就指出, 在通常大气条件下, 垂直切变对 β 效应的影响是比较明显的。

2. 恰尼模式的分析解

① 方程的简化

由于

$$U_* = \text{常数}$$

(7-260)式中的 b 为常数, 这时方程有分析解。为了简化方程(7-260)式, 我们先作如下变量变换:

$$\xi = \frac{4\mu}{U_*} (U - c) = 4\mu \left(\frac{U_0 - c}{U_*} + \frac{z}{2} \right) \quad (7-263)$$

ξ 是 z 的函数, 可将 ξ 作为垂直坐标。上式中 U_0 为基本气流在地面的速度。再令

$$\phi(z) = \xi e^{-\frac{\xi}{2}} \Phi(\xi) \quad (7-264)$$

将(7-263)与(7-264)两式代入(7-260)式, 得到有关 $\Phi(\xi)$ 的方程

$$\xi \Phi'' + (2 - \xi) \Phi' - a \Phi = 0 \quad (7-265)$$

式中撇号“'”表示对 ξ 的微分, 上式是合流超几何方程的标准形式, 而参数为

$$a = 1 - d \quad (7-266)$$

$$d = \frac{b}{\mu} = \frac{L}{D^*} \frac{1 + \frac{D^*}{D}}{\left(1 + \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (7-267)$$

边界条件(7-254)式便变为

$$\xi^2 (\Phi' - \lambda \Phi) = 0, \text{ 当 } \xi = \xi_0, \xi = \xi_t \quad (7-268)$$

这里 ξ_0, ξ_z 是 ξ 在大气底部与顶部的值。式中

$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{h}{4\mu H_0} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{L}{(L^2 + D^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (7-269)$$

从上式可以看出, 密度层结因子 D 具有减小 λ 值的效应, 特别在超长波的情况下更为明显。

(7-265) 式的通解可写为

$$\Phi = A\Phi_1 + B\Phi_2 \quad (7-270)$$

这里 A 与 B 为两个任意常数。 Φ_1 与 Φ_2 为 (7-265) 式线性独立的两个基本解。

② a 不等于零或负整数的基本解

这时, (7-270) 式中的两个基本解可以很容易写为:

$$\Phi_1(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(2)_m} \frac{\xi^m}{m!} \quad (7-271)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\xi) = \frac{1}{\xi} - (1-a) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(2)_m} \frac{\xi^m}{m!} [\ln \xi + \widetilde{\Gamma}(a+m) - \\ - \widetilde{\Gamma}(1+m) - \widetilde{\Gamma}(2+m)] \end{aligned} \quad (7-272)$$

这里 $\widetilde{\Gamma}(x)$ 即为伽玛函数 $\Gamma(x)$ 的对数微商。即

$$\widetilde{\Gamma}(x) = \frac{d}{d \ln x} \Gamma(x) \quad (7-273)$$

而

$$(a)_m = a(a+1)(a+2)\cdots(a+m-1), \quad (a)_0 = 1 \quad (7-274)$$

(7-271) 与 (7-272) 所示的两个级数对所有的 ξ 都是收敛的。当 ξ 值较大时, 采用如下的渐近式是方便的:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) = \frac{1}{\Gamma(a)} \left\{ \frac{(-1)^a \sin \pi a}{(1-a)\pi} \Phi_2 + \right. \\ \left. + e^{\frac{1}{2}\pi i} \xi^{a-2} \left[\sum_{m=0}^{R-1} \frac{(1-a)_m (2-a)_m}{m!} \xi^{-m} + O(|\xi|^{-R}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7-275)$$

$$\Phi_2(\xi) = \Gamma(a) \xi^{-a} \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(a)_m (a-1)_m}{m!} (-\xi)^{-m} + O(|\xi|^{-n}) \right] \quad (7-276)$$

因此, 当 ξ 值相当大时, Φ_1 与 $e^{\xi} \xi^{a-2}$ 同量级, 而 Φ_2 与 ξ^{-a} 同量级。

③ a 等于零或负整数时的基本解

这时, $\Phi_1(\xi)$ 还原为 $(-a)$ 阶拉盖尔 (Laguerre) 多项式, 而 Φ_2 具有如下形式:

$$\Phi_2(\xi) = \xi^{a-2} e^{\xi} + \Phi_1(\xi) \ln \xi + \dots \quad (7-277)$$

因此当 ξ 相当大时, $\Phi_2(\xi)$ 与 $\xi^{a-2} e^{\xi}$ 具有相同的数量级。

当 ξ 为负实数时, (7-277) 式中的 $\ln \xi$ 应理解为主值, 即

$$\ln \xi = \ln |\xi| - \pi i \quad (7-278)$$

④ 基本解的微分性质

上面给出的基本解有如下微分性质:

$$\xi \Phi_1'(a, 2, \xi) = a [\Phi_1(a+1, 2, \xi) - \Phi_1(a, 2, \xi)] \quad (7-279)$$

$$\xi \Phi_2'(a, 2, \xi) = (a-1) \Phi_2(a+1, 2, \xi) - a \Phi_2(a, 2, \xi) \quad (7-280)$$

这两个公式在求不稳定扰动的特征值 c 是常用的。

三、从恰尼模式得到的结果

这个模式是由恰尼首次提出, 以后有不少人致力于这方面的研究。例如, 作者 (郭晓岚, 1952) 证明方程 (7-265) 式在区域

$$0 \leq d \leq 1 \quad (7-281)$$

内的解是最不稳定的, 并在这最大不稳定的范围内得到了特征值与特征函数。后来格林 (Green, 1960) 与伯格 (Burger 1962, 1966) 证明在其他区域

$$m + \varepsilon \leq d \leq m - \varepsilon \quad m \geq 1 \quad (7-282)$$

解也是不稳定的。玛埃斯 (Miles 1964) 还证明了对于很小的正数 ε , 相应于 $d = m - \varepsilon$ 的生长率要比 $d = m + \varepsilon$ 的为大。为了了解斜压不稳定性扰动的本性, 我们对此模式进行较详细的讨论。

由刚才的讨论可知,当 ξ 充分大时,方程(7-265)式总有一个基本解具有 $\xi^{a-2} e^{\xi}$ 的量级,它随 ξ 是呈指数增大的。由于在所有的高度上扰动能量必须是有限的,因此在通解(7-270)式中,随 ξ 指数增长解前面的系数必为零。因为当参数 $d = 1 - a$ 是正整数(或零)和非整数时,基本解具有完全不同的行为,所以我们对这两种情况分别进行讨论。

1. d 为正整数或零时的中性波解

在 d 为正整数或零的条件下,大气深度若看成是无限大时,我们可得到中性波解。并且,当 $d = 0$ 时,解由 Φ_2 表示; $d = n > 0$ 时,解由 Φ_1 表示。

① $d = 0$ (即 $a = 1$) 的情况

由(7-267)式可知,这种情况相应于水平波长 L 很短的扰动。我们从(7-275)式很容易看到 Φ_1 随 ξ 的增长比 e^{ξ} 慢,而比 $e^{-\frac{\xi}{2}}$ 快;而 Φ_2 为(7-276)式中的第一项,所以通解(7-270)式中必须去掉 Φ_1 ,因此解为

$$\Phi = \frac{B}{\xi}$$

由(7-264)式可得振幅为

$$\phi = B e^{-\frac{\xi}{2}} \quad (7-283)$$

将解 $\Phi(\xi)$ 代入边界条件(7-268)式,利用 $d = 0$,得到 $\alpha \rightarrow \infty$ 的波具有如下关系式:

$$\xi_0 = -\frac{1}{\lambda} = -2 \quad (7-284)$$

$$c = U_0 \quad (7-285)$$

这就是说,在无限深模型中,波长很短的波是中性波,它们以地面平均气流速度移动。气压扰动在地面具有最大振幅,随高度指数衰减。

② $a = 1 + n$, $d = 1 + n =$ 正整数的情况

这时 Φ_1 为 n 阶拉盖尔多项式, 而 Φ_2 由 (2-277) 式所示。我们可以看出, 当 ξ 相当大时, Φ_2 与 $\xi^{a-2} e^\xi$ 具有相同量级, 当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, $\Phi_2(\xi) \rightarrow \infty$, 因此在通解 (7-270) 式中必须除去 Φ_2 , 而只留下 Φ_1 。即

$$\Phi(n, \xi) = A \Phi_1(-n, 2; \xi) = A \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m}{(2)_m} \frac{\xi^m}{m!} \quad (7-286)$$

将上式代入边界条件 (7-268) 式, 我们发现特征值 ξ_b 由下列方程给出

$$\xi_b^2 \left[\sum_{m=1}^n \frac{(-n)_m}{(2)_m} \frac{\xi_b^{m-1}}{(m-1)!} - \lambda \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m}{(2)_m} \frac{\xi_b^m}{m!} \right] = 0 \quad (7-287)$$

显见

$$\xi_b = 0 \quad (7-288)$$

是代数方程 (7-287) 式的双重根, 由 ξ 的定义式 (7-263) 可推出当 (7-288) 成立时, 有波速为 U_0 的中性波产生, 即

$$c = U_0 \quad (7-289)$$

除了这两个零根外, 代数方程 (7-287) 式还有 n 个根, 当 U_z 是正的话, 它们相应于相对 U_0 后退的 n 个中性波扰动。我们还可看到, 当 $n = 0, d = 1$ 时, 代数方程 (7-287) 式的根只有

$$\xi_b = 0$$

而当 $n = 1, d = 2$ 时, 该方程的根为

$$\xi_{b,3,4} = 2 + \frac{1}{\lambda}, c_{3,4} = U_0 - U^* \left(\frac{1}{2\mu} \pm \frac{1}{2\mu - \frac{\sigma}{2}} \right) \quad (7-290)$$

当 $n = 2, d = 3$ 时, 该方程的根为

$$\begin{cases} \xi_{b,3,4} = 3 + \frac{1}{\lambda} \pm \left(3 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ c_{3,4} = U_0 - \frac{U^*}{4\mu} \left[3 + \frac{1}{\lambda} \pm \left(3 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{cases} \quad (7-291)$$

所以当 $U^* > 0$, $\mu > \frac{\sigma}{8}$ 时, 所有这些中性波扰动相对 U_0 是向西移动的, 而当 $U^* < 0$, $\mu > \frac{\sigma}{8}$ 时, 所有这些中性波扰动相对 U_0 都是向东移动的。

2. d 为非整数时的不稳定波解

① 特征值 ξ_0 的求得

当 d 不为整数时, 由(7-272)式可知, Φ_2 的解中包含了 $\ln \xi$, 如果当 ξ 是负实数, 或当 ξ 在 z 的变化范围内改变了正负号, 则 $\ln \xi$ 为复数。这时, 就会有不稳定波解产生。

与前面介绍相类似, 不稳定波解的特征值也是从边界条件解得 ξ_0 后得到的。我们可采用如下迭代法很方便地求出 ξ_0 来。若令

$$\widetilde{\Phi}_2 = \xi \Phi_2 \quad (7-292)$$

则边界条件(7-268)式便为

$$2(1 + \lambda \xi_0) \widetilde{\Phi}_{20} - \xi_0 \widetilde{\Phi}'_{20} = G \quad (7-293)$$

对于精确解来讲, 应有

$$G = 0$$

对任给定的 d , 最方便的一阶估计是认为 $\xi_0^{(1)}$ 是 d 近邻的已知特征值。所以我们可在接近整数 m 的

$$d = m \pm \delta d$$

开始进行计算, 而利用 $d = m$ 所得的特征值 $\xi_0^{(1)}$ 作为第一阶近似。

我们利用三个差别不大的 ξ_0 的估计值 $\xi_0^{(1)}$, $\xi_0^{(1)} + \delta \xi$, $\xi_0^{(1)} - \delta \xi$, 由(7-293)式可得到三个不同的 G 值:

$$G(\xi_0^{(1)} - \delta \xi), G(\xi_0^{(1)}), G(\xi_0^{(1)} + \delta \xi)$$

利用下式求出一阶微商 G' 与二阶微商 G'' :

$$\begin{cases} G' = \frac{G(\xi_0^{(1)} + \delta \xi) - G(\xi_0^{(1)} - \delta \xi)}{2\delta \xi} \\ G'' = \frac{G(\xi_0^{(1)} + \delta \xi) + G(\xi_0^{(1)} - \delta \xi) - 2G(\xi_0^{(1)})}{(\delta \xi)^2} \end{cases} \quad (7-294)$$

而将下述代数方程

$$G + G' \Delta \xi_b + \frac{G'' (\Delta \xi_b)^2}{2} = 0 \quad (7-295)$$

的根 $\Delta \xi_b$ 作为订正值, 即

$$\Delta \xi_b = \xi_b^{(2)} - \xi_b^{(1)}$$

再由 $\xi_b^{(2)}$, $\xi_b^{(2)} \pm \theta \xi$ 得到三个不同的 G 值, 再由代数方程 (7-295) 式求得校正项。这过程一直重复到 $G(\xi_b^{(k)})$ 充分接近于零为止。

利用这个迭代方法, 作者 (郭晓岚, 1973, 1979) 求得了 $0 \leq d \leq 5$ 区域上 ξ_b 的实部 ξ_{br} 与虚部 ξ_{bi} 的值。图 7-25 给出了 $0 \leq d \leq 3$ 的范围内, ξ_{br} 与 ξ_{bi} 随 d 的变化情况。有关数据列于表 7-1。

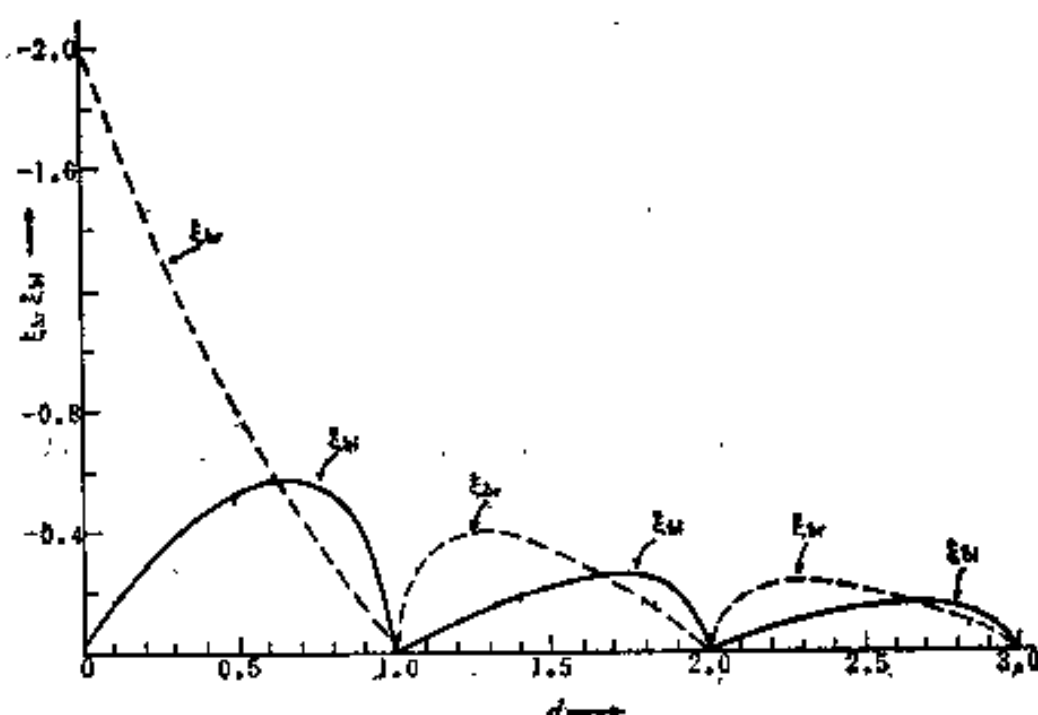


图 7-25 ξ_{br} 与 ξ_{bi} 随 d 的变化曲线

② 不稳定波的波速与生长率

求得特征值 ξ_b 后, 根据 μ 、 D 、 ξ 、 U^* 的定义式, 我们可求得
不稳定波的相速与生长率为:

$$c_r = U_0 - \frac{f_0 U_z L}{4\pi N} \left(1 + \frac{L^2}{D^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \xi_{br} \quad (7-296)$$

表7-1 无限深一层恒定垂直切变系统斜压扰动的特征值

d	$-\xi_{br}$	$-\xi_{bi}$	d	$-\xi_{br}$	$-\xi_{bi}$
0.0	2.00000	0	1.6	0.27602	0.24765
0.2	1.51407	0.29666	1.8	0.14882	0.24168
0.4	1.09615	0.49002	2.0	0.00000	0.00000
0.6	0.71167	0.57051	2.2	0.20732	0.05368
0.8	0.34560	0.51442	2.4	0.21345	0.11412
1.0	0.00000	0.00000	2.6	0.17018	0.15505
1.2	0.37385	0.09504	2.8	0.09509	0.15661
1.4	0.36225	0.19038	3.0	0.00000	0.00000

$$\delta \equiv kc_i \equiv \alpha c_i = -\frac{f_0 U_z}{2N} \left(1 + \frac{L^2}{D^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \xi_{bi} \quad (7-297)$$

上式表明生长率与 U_z 、 ξ_{bi} 成正比。因此对固定的 U_z 而言,在每个区间

$$m \leq d \leq m+1$$

内, δ 均有一个极大值。从图 7-25 可见, ξ_{bi} 的极大值随 m 的增大而减小。

图 7-26 给出了各种垂直切变下 δ 随波长的变化情况。从图中可以看出,在地球大气所能容许的波长范围之内,不稳定波有两个波带:短波带与长波带。当 U_z 在 1.5×10^{-3} /秒至 2.0×10^{-3} /秒之间时,长波带的最大生长率比波辛尼斯克近似稍低一些,可是超过短波带最大生长率的 $\frac{1}{3}$ 。在长波带 $U_z > 2.0 \times 10^{-3}$ /秒与 $U_z = 2.0 \times 10^{-3}$ /秒的最大生长率几乎是相同的,可是相应的波长则随 U_z 增大。

③ 不稳定波的振幅和位相

由(7-292)式所示的 $\tilde{\Phi}_2(\xi)$,可将扰动流函数

$$\psi' = \frac{p'}{f\rho_0}$$

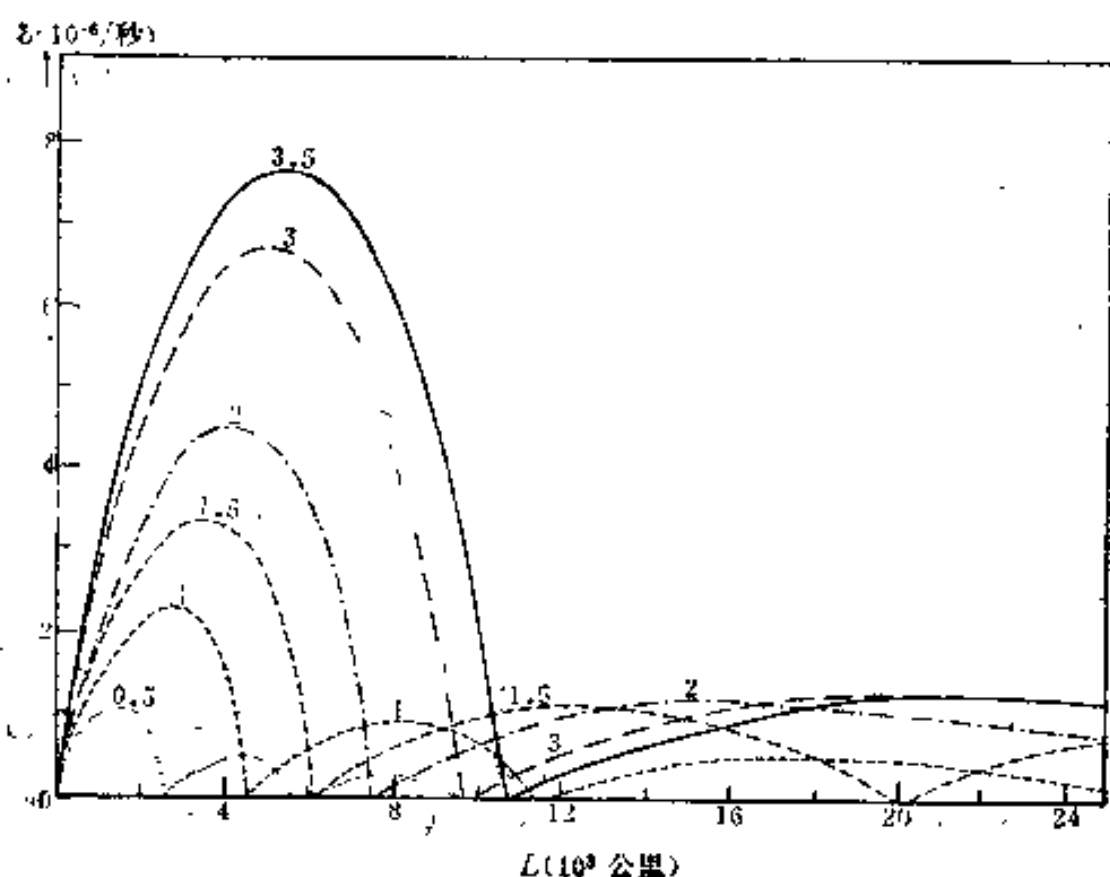


图 7-26 各种垂直切变下 δ 随 L 的变化曲线

与扰动温度 T' 的振幅 $\hat{\psi}$ 、 \hat{T} 随高度变化写为

$$\hat{\psi} = \tilde{\Phi}_2(\xi) e^{-\frac{\xi}{2} + \frac{z}{2H_0}} \quad (7-298)$$

$$\hat{T} = \frac{fT_0}{gh} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\hat{\Phi}_2(\xi) e^{-\frac{\xi}{2}} \right] + \left(\frac{gh}{c_p T_0} + \frac{h}{2H_0} \right) \tilde{\Phi}_2(\xi) e^{-\frac{\xi}{2}} \right\} e^{\frac{z}{2H_0}} \quad (7-299)$$

$$z = \frac{H_0}{\left(1 + \frac{D^2}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}} (\xi - \xi_0) \quad (7-300)$$

我们利用这个模式，计算了 $d = 0.5$, $d = 1.3$, $d = 1.7$ 这三种条件下，扰动流函数，扰动温度的振幅 $|\psi|$, $|T'|$ ，以及扰动流函数的位相 α ，随高度变化的情况。计算结果如图 7-27 所示。

利用(7-300)与(7-253)两式，令

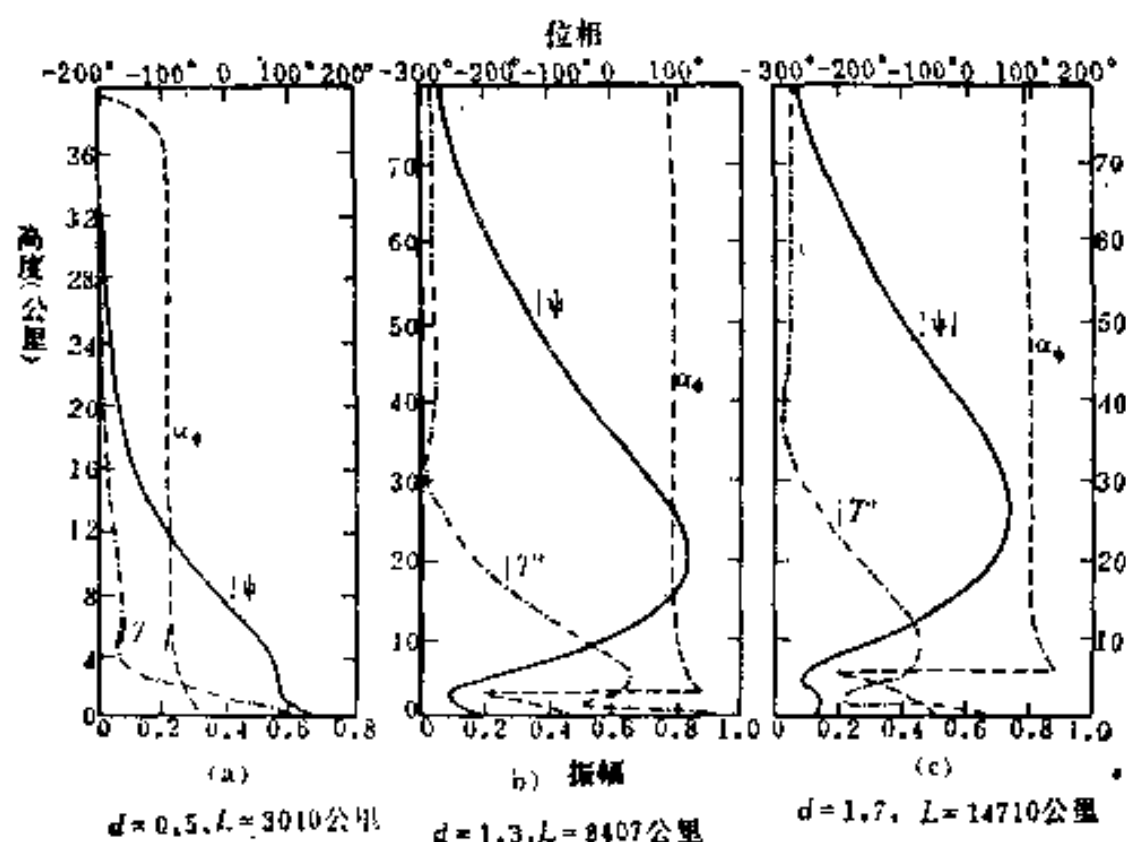


图 7-27 $|\psi|$ 、 $|T'|$ 与 α_* 随高度的变化

$$N^2 = 1.44 \times 10^4 f^2$$

对 $d=0.5$ 取 $U_s = 0.002 \text{ 秒}^{-1}$, 对 $d=1.3$, $d=1.7$ 取 $U_s = 0.0015 \text{ 秒}^{-1}$, 则对于 $d=0.5$, $d=1.3$, $d=1.7$, 分别求得的波长 L 为 3040、8407、14710 公里。由生长率方程(7-297)式与图 7-26 给出的结果可见: 这里 $d=0.5$, $L=3040$ 公里位于最不穩定短波带稍偏短波一方, $d=1.7$, $L=14710$ 公里位于次不穩定长波带中最不穩定波部分, 而 $d=1.3$, $L=8407$ 公里则位于次不穩定带偏短波一方。

从图 7-27(a) 可以看出, 最不穩定带短波扰动 ψ' 的振幅在地面最大; 在低于 1.5 公里时, 随高度迅速减小; 在 1.5~3.5 公里之间几乎保持常数; 在 3.5 公里以上随高度缓慢稳定地减小。 ψ 的槽线在高层比低层大约落后 60° 左右。相应的温度扰动主要集中在低层, 其扰动振幅在 $z=4$ 公里面以上就变得很小, 在这个面上, T' 的位相(图中没画出)大约前移了 90° 。因此, 由这个扰动引起的热量平均向北输送主要是在低于 4 公里的高度下完成的。

其次, 由图 7-27(c) 所示的次不稳定长波带中的不稳定扰动可见, 扰动流函数的振幅 $|\psi|$ 在地面有个很小的极大值; 而在 $z = 25$ 公里处取最大值; 高于这个面, $|\psi|$ 随高度缓慢而稳定地减小。而温度扰动振幅在地面达最大值; 在 $z = 9$ 公里面上有个次最大值; 高于 40 公里 $|T'|$ 的值很小而保持常数。这个扰动从低层到高层槽线的相移大约为 220° 。

最后从图 7-27(b) 可以看出这个次不稳定带的波长较短的扰动 ($d = 1.3$) 与该带波长较长的扰动 ($d = 1.7$) 相似, 只是 $|\psi|$ 与 $|T'|$ 的极大值、极小值的高度稍低一点。

由图 7-27(a), (b), (c) 中给出的温度扰动振幅随高度的分布可见, 恰尼模式得到的结论为: 平流层中的 $|T'|$ 远小于对流层与近地面。这与下面要讨论的急流模式形成鲜明对比, 特别在长波部分, 更为明显。

四、急流模式下的基本解

1. 急流模式的特点

急流模式比恰尼模式复杂, 参数 U_* 、 N^2 与 H_0 都随高度面变。我们根据 U 的垂直廓线的不同形式, 将急流模式分为三种, 即急流 I 型、II 型及 III 型, 如图 7-28 所示。

① 急流 I 型

它是单急流廓线, 风速极大值 U_{\max} 在对流层上限附近的 $z = 12.5$ 公里面上。在高于 20 公里的高度上, U 随高度不变。急流 I 型的垂直风速廓线方程为:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{U}{U_*} = 0.330688 \times 10^{-2} (324z - 18z^2 + z^3) & \text{当 } 0 \leq z \leq 12.0 \\ \frac{U}{U_*} = \frac{0.6850 + 2.46094 \times 10^{-3}(z - 16)}{[(z - 16)^2 - 48]} & \text{当 } 12.0 \leq z \leq 20.0 \\ \frac{U}{U_*} = 0.3700 & \text{当 } 20.0 \leq z \leq 100.0 \end{array} \right. \quad (7-301)$$

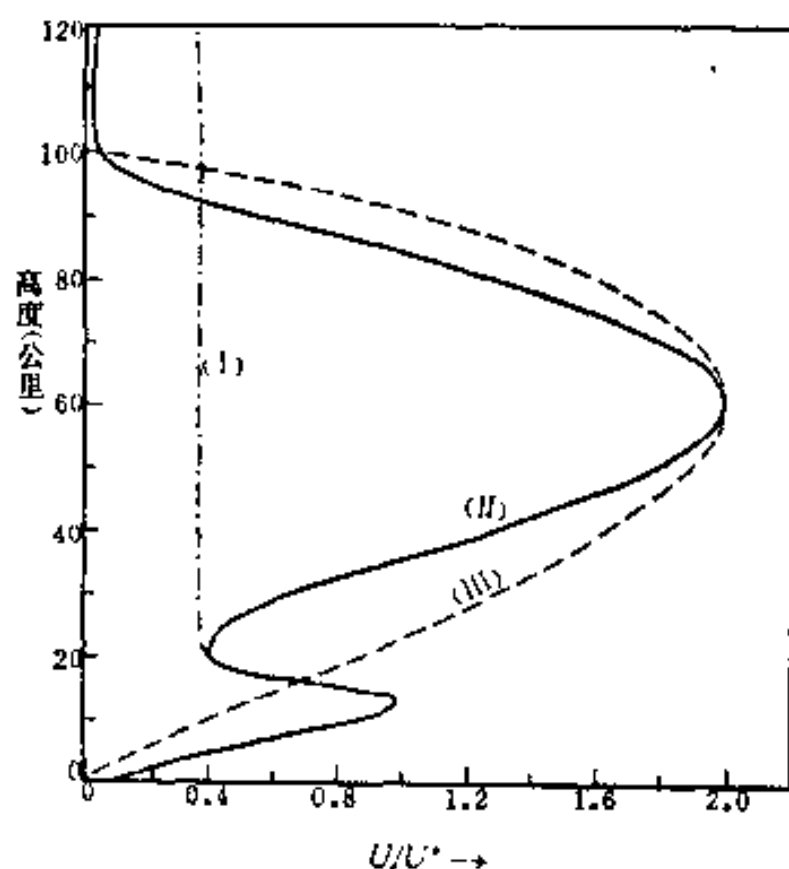


图 7-28 三种主要的急流型

式中 z 的单位为公里。

② 急流 II 型

这是个双急流型,它在高层($z = 60$ 公里)与低层($z = 12.5$ 公里)各有一个急流。在低于 20 公里的高度内,它与急流 I 型是完全一样的。急流 II 型的垂直风速廓线方程为:

$$\frac{U}{U^*} = 0.330688 \times 10^{-3} (324z - 18z^2 + z^3) \quad \text{当 } 0 \leq z \leq 12.0$$

$$\frac{U}{U^*} = 0.6850 + 2.4609 \times 10^{-3} (z - 16) [(z - 16)^2 - 48] \quad \text{当 } 12.0 \leq z \leq 20.0$$

$$\begin{aligned} \frac{U}{U^*} = \frac{U_T}{U^*} + 10^{-6} (z - 60)^2 \left[404.6875 - 1250.0 \frac{U_T}{U^*} - \right. \\ \left. - 2.890625 (z - 60) + \left(0.390625 \frac{U_T}{U^*} - 0.1806640625 \right) \right. \\ \left. (z - 60)^2 \right] = 0 \quad \text{当 } 20.0 \leq z \leq 100.0 \end{aligned}$$

(7-302)

式中 U_T 为 $z = 60$ 公里处的最大平均速度。这个急流型式是从冬季北纬 45° 左近的垂直西风场得到的。

③ 急流Ⅲ型 冬季型

在 $z = 60$ 公里有个急流, 即为单急流型。其垂直风速廓线方程为

$$\frac{U}{U^*} = 1 - \frac{7}{14400} (z - 60)^2 - \frac{1}{288000} (z - 60)^3 \quad (7-303)$$

这个急流型是由冬季北纬 60° 左近的平均西风场得到的。

在急流模式中, 静力稳定度与密度层结因子 N^2 、 $\frac{1}{H_0}$ 随高度的变化也是被计入的。它们的垂直廓线分别由图 7-29 (a) (b) 所示。

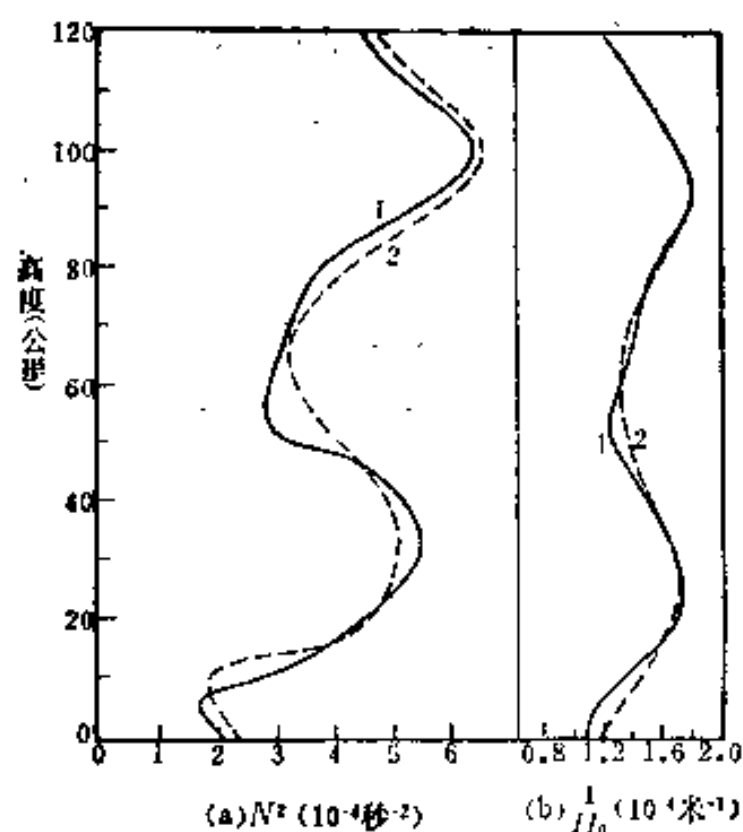


图 7-29 N^2 、 $\frac{1}{H_0}$ 的垂直廓线

在图 7-29 中, 标号为 1 的曲线是直接从中纬度平均温度廓线得来的; 而标号为 2 的曲线是曲线 1 的简单分析近似。在这里介绍的三种急流型中, 我们假定高度大于 100 公里时, N^2 、 U 为常数。

即当 $z \geq z_t = 100$ 公里时

$$\begin{aligned} U(z) &= U(z_t) = \text{常数} \\ N^2(z) &= N^2(z_t) = \text{常数} \end{aligned} \quad (7-304)$$

将上式代入边界条件 (7-255) 式, 可得在 $z = z_t$ 的渐近条件或辐射条件:

$$\phi = \phi(z_t) e^{-\lambda_0(z-z_t)} \quad (7-305)$$

式中

$$\lambda_0 = \left[\mu^2(z_t) - \frac{b(z_t)}{U(z_t) - c} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7-306)$$

上式只取正的实根。下面我们可以发现, 在高度 $z_t = 100$ 公里处, 利用两个不同边界条件 (7-255) 与 (7-305) 所得到结果无多大区别。

2. 急流模式特征值问题的数值解法

对于这三种急流型, 由 (7-250)、(7-254) 与 (7-255) 诸式所示的特征值问题只能利用数值方法来求解。这里介绍作者 (郭晓岚, 1978) 提出的还原与迭代方法。

① 差分方程与差分形式的边界条件

在 z 方向用 J 个等距格点 z_1, z_2, \dots, z_J 。其中

$$z_j = (j-1)\delta, \quad \delta = \frac{z_t}{J-1} \quad (7-307)$$

这里 z_t 是我们所用的上边界。令 s 为位温距平 θ' 与基本状态位温 θ_0 的比值, 即

$$s = \frac{\theta'}{\theta_0}$$

则微分方程 (7-250) 式的有限差分形式为

$$\phi_{j+1} - B_j \phi_j + \delta_j \phi_{j-1} = 0 \quad (7-308)$$

这里

$$\sigma_j = \frac{s_{j+\frac{1}{2}}}{s_{j-\frac{1}{2}}} \quad (7-309)$$

$$B_j = 1 + \sigma_j + \left\{ \frac{4\pi^2 N_j^2}{f^2 L^2} + \frac{s_j + \frac{1}{2}}{4H_0^2 s_j} \left[1 + \frac{2}{hs_j} \frac{d(H_0 s)_j}{dz} \right] \right\} \times \\ \times h^2 \delta^2 - \frac{s_j + \frac{1}{2}}{(U_j - c)s_j} \left\{ \frac{N_j^2 h^2 \beta}{f^2 U_j^*} - \left[\frac{d^2 U}{dz^2} - \left(\frac{h}{H_0} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{s} \frac{ds}{dz} \right) \frac{dU}{dz} \right]_j \right\} \quad (7-310)$$

边界条件(7-254)式的差分形式为

$$\phi_0 = \phi_2 - \left(\frac{2\delta U_{21}}{U_1 - c} - \frac{\delta h}{H_0} \right) \phi_1 \quad (7-311)$$

② 还原-迭代解法

将(7-311)式中的 ϕ_0 代入 $j = 1$ 时的(7-308)式, 我们得到

$$\phi_1 = E_1 \phi_2 \quad (7-312)$$

这里

$$E_1 = \frac{1 + \sigma_1}{B_1 + \sigma_1 \left[\frac{2(U_2 - U_1)}{U_1 - c} - \frac{\delta h}{H_{01}} \right]} \quad (7-313)$$

我们已使用了单侧差分

$$U_{21} = \frac{U_2 - U_1}{\delta} \quad (7-314)$$

接着利用(7-312)式消去 $j = 2$ 时的(7-308)式, 得到包含 ϕ_2 与 ϕ_3 的方程。这个过程一直继续下去, 我们可把满足边界条件(7-311)式, 差分方程(7-308)式的解写为

$$\phi_j = E_j \phi_{j+1} \quad 1 \leq j \leq J + 1 \quad (7-315)$$

式中系数 E_j 可由 B_j 、 σ_j 与 E_{j-1} 来确定, 我们现在就来求这个关于 E_j 的递推公式。

既然(7-315)式对任意 j 都成立, 因此有

$$\phi_{j-1} = E_{j-1} \phi_j \quad (7-316)$$

将(7-315)与(7-316)两式中的 ϕ_{j+1} 、 ϕ_{j-1} 用 ϕ_j 表示, 并代入(7-

308)式可得关于 E_j 的递推公式:

$$E_j = \frac{1}{B_j - \sigma_j E_{j-1}}, \quad 2 \leq j \leq J \quad (7-317)$$

由于 E_1 由(7-313)式求出, 所以由(7-317)式可求得所有的 E_j 。

③ 特征值 c 的求得

在讨论三种急流型时, 我们采用渐近上边界条件(7-305)式, 它的差分形式为

$$\Phi_{J+1} - \Phi_{J-1} = 2\delta \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)_{z=z_i} = -2\delta\lambda_0 \Phi_J \quad (7-318)$$

将上式代入 $j = J$ 时的(7-308)式可得

$$\frac{\Phi_{J-1}}{\Phi_J} = \frac{B_J + 2\delta\lambda_0}{1 + \sigma_J} \quad (7-319)$$

由(7-316)式可知

$$\frac{\Phi_{J-1}}{\Phi_J} = E_{J-1} \quad (7-320)$$

因此, 满足上、下边界条件的解必须通过采用合适的特征值 c , 满足如下相容性条件:

$$G(c) \equiv E_{J-1} - \frac{B_J + 2\delta\lambda_0}{1 + \sigma_J} = 0 \quad (7-321)$$

如果我们在很高的高度 z_i 上, 用边界条件(7-255)式来代替渐近上边界条件(7-305)式, 则相容性条件为

$$G(c) = E_{J-1} - \left[B_J - \frac{2(U_J - U_{J-1})}{U_J - c} - \delta H_J \right] \frac{1}{1 + \sigma_J} = 0 \quad (7-322)$$

由于 E_{J-1} 是 c 的非常复杂的函数, 要从(7-321)或(7-322)中直接解出 c 来并不是一件很容易的事情。我们采用逐步迭代法, 先从 c 的一个估计值 c_1 开始, 逐步将 $G(c)$ 订正到零。如果 c_n 是特征值 c 的第 n 次估计值 ($n = 1, 2, \dots$), 则采用与(7-295)式相同的处理可得 c_n 的订正值 Δc 满足如下二次代数方程式:

$$G(c_n + \Delta c) = G_0 + (\Delta c) \cdot G' + \frac{G''}{2} (\Delta c)^2 = 0 \quad (7-323)$$

这里

$$\begin{cases} G_0 = G(c_n), G' = \frac{1}{2\delta c} [G(c_n + \delta c) - G(c_n - \delta c)] \\ G'' = \frac{1}{(\delta c)^2} [G(c_n + \delta c) + G(c_n - \delta c) - 2G_0] \end{cases} \quad (7-324)$$

这里 δc 是方便选取 c 的增量。 c_n 的订正值

$$\Delta c = - \frac{2G_0}{[G' \pm (G'^2 - 2G_0G'')^{\frac{1}{2}}]} \quad (7-325)$$

并使上式分母有较大的绝对值为准来选取根号前面的正负号。

经过这样多次订正后，能求得符合上、下边界条件的特征值 c 。

五、由急流模式得出的结果

1. 不稳定波的相速与生长率

根据求得的特征值 c ，我们可得不稳定波的相速 c_r 与生长率 $\delta = \alpha c_i$ 。经数值计算发现急流 I 型与急流 II 型的 c 值差异很小，所以将这两型归成一类进行讨论。

① 急流 I、II 型

对于 $z_t = 100$ 公里， $\Delta z = 1$ 公里，以及 $z = 12.5$ 公里处各种不同 U^* 值，求得这两型的生长率 δ 与相对相速 $\bar{c}_r = c_r - U_0$ 随波长 L 的变化曲线，分别由图 7-30 与图 7-31 所示。图中各曲线上的数字是对应的 U^* 值。

由于急流 I 型与急流 II 型能得到相同的 \bar{c}_r 与 δ 随 L 的分布，这说明高空急流的强度 U_T 对斜压不稳定扰动的特征值 c_r 与 c_i 影响很小。

从图 7-30 可得到这样一些结论：

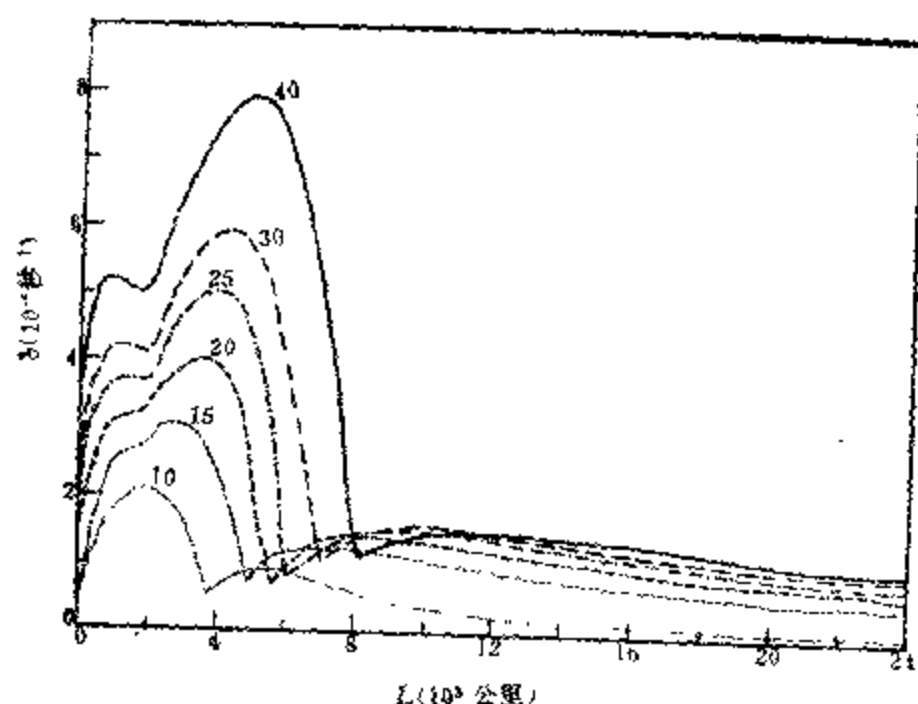


图 7-30 $z = 12.5$ 公里面上各种急流速度 U^* 下 δ 随 L 的变化曲线

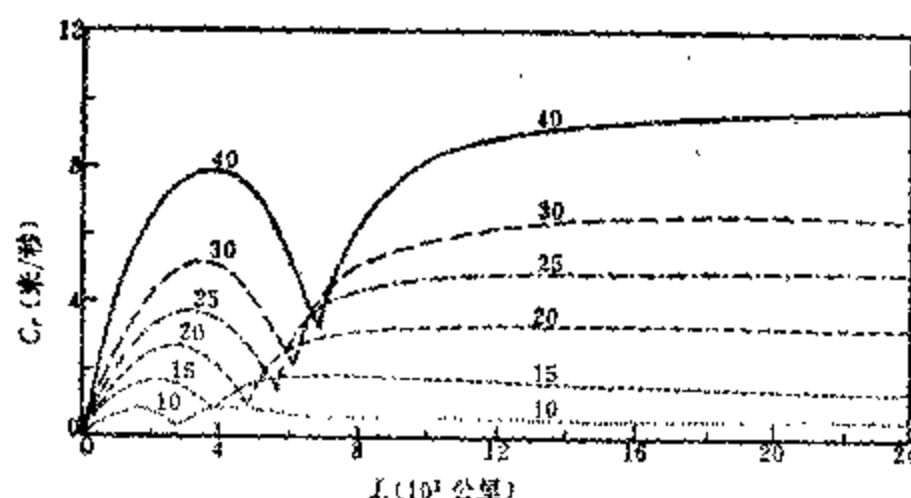


图 7-31 各种急流速度 U^* ($z = 12.5$ 公里面) 下相对相速 \bar{c}_r 随波长 L 的变化

(i) 扰动谱包含两个不稳定带——短波带与长波带，这与恰尼模式的结果(图7-26)是相似的。

(ii) 长波带中最不稳定波的衰减时间大约 7.7 天。

(iii) 对于 $U^* > 10$ 米/秒， δ 没有小尺度的振动。

(iv) 当 $U^* > 15$ 米/秒时, 在短波带 ($L \cong 1800$ 公里) 生长率有个次极小值及一个次极大值 ($L \sim 1100$ 公里)。这个次最大生长率可认为是代表地面气旋或锋面波的不稳定性的。这表明在单急流模型中, 地面气旋或锋面波的相对不稳定性, 也能由生长率的变化与最大生长率附近的主要扰动分辨开来。这些主要扰动是占据整个对流层的。

从图 7-31 更可得到如下一些结论:

- (i) 相速 \bar{c}_r 的变化是光滑的, 在短波带没有次极小值。
- (ii) 短波带 \bar{c}_r 的最大值正在短波带最不稳定波长处 (即对应 δ_{\max}), 这与恰尼模式是相似的。
- (iii) 在长波带, \bar{c}_r 随 L 几乎不变。

② 急流 II 型

这是平流层单急流廓线型, 这种急流在北纬 60° 冬季是很明显的。在这种急流型下, 扰动的生长率 δ 与相对相速 \bar{c}_r 随 L 的分布如图 7-32 与图 7-33 所示。

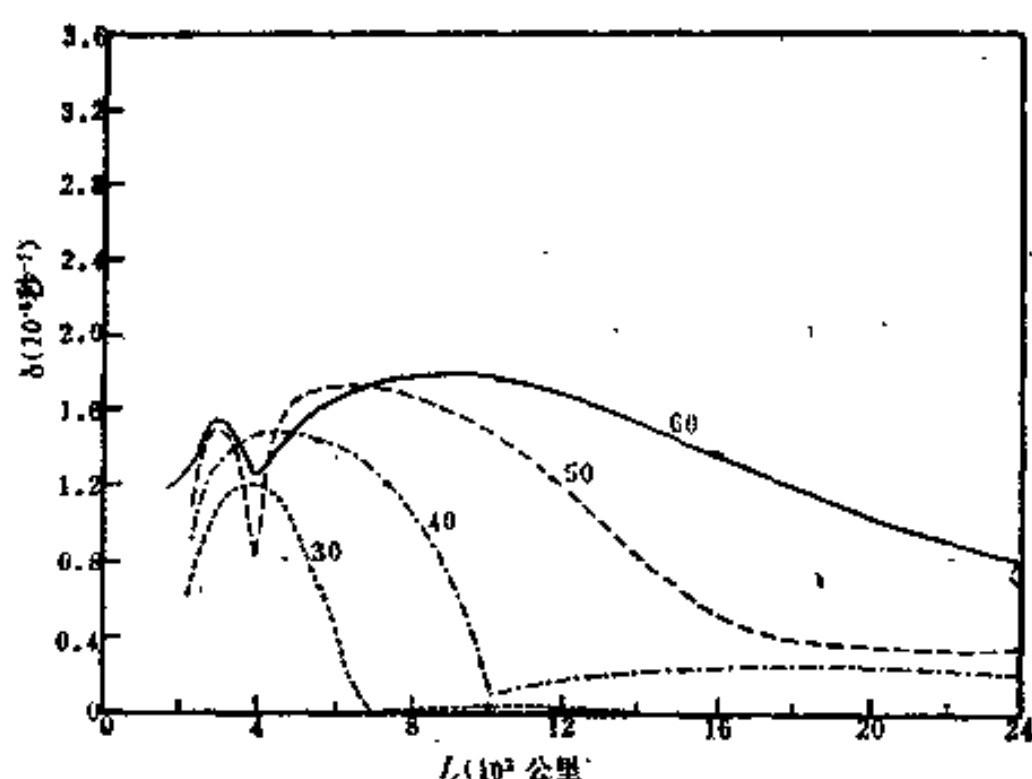


图 7-32 在各种不同的 U^* 下 δ 随 L 的变化曲线

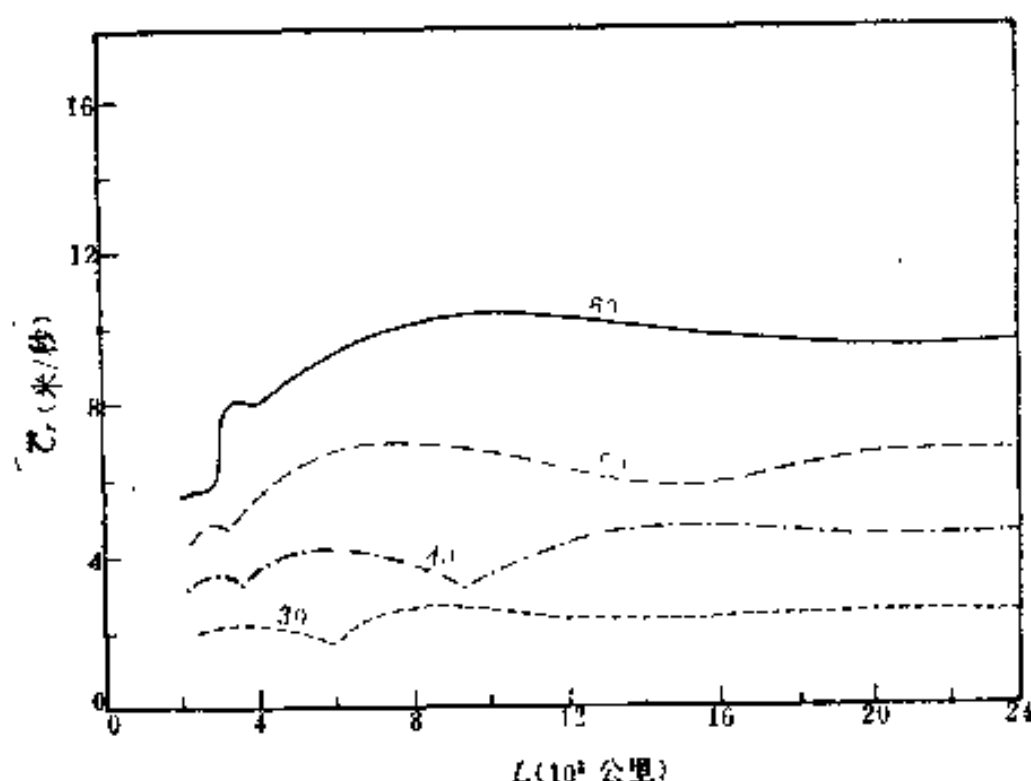


图 7-33 在各种不同的 U^* 下 \bar{c}_r 随 L 的变化曲线

从图 7-32 可得如下结论:

(i) $U^* < 30$ 米/秒, 不稳定性集中在短波带 ($L < 6000$ 公里); 而 $U^* > 40$ 米/秒, 主要的不稳定性移向长波带。

(ii) 当 $U^* > 50$ 米/秒, 最大生长率约为 1.8×10^{-6} /秒, 最不稳定波的波长为 10000 公里, 它相当于在北纬 60° 纬向波数为 2 的长波, 衰减时间为 6.4 天; 而当 $U^* = 50$ 米/秒, 最不稳定波长约为 7000 公里, 这相当于纬向波数为 3 的波动, 衰减时间为 6.8 天。

(iii) 通过比较得知, 急流 III 型的最大生长率是低于急流 I、II 型的。

从图 7-33 得知这样结论:

(i) 当 $U^* = 50$ 米/秒, 长波的相对相速为 6~7 米/秒, 它比急流 I、II 型都要小。

(ii) 对于短波而言, 虽然急流 III 型没有急流 I、II 型那样不稳定, 可是它生成长波的能力相当强。当急流强度超过 40 米/秒时, 这种能力是高于急流 I、II 型的。

2. 不稳定性波的结构

① 急流 I 型

图 7-34 给出了急流 I 型（即单急流模型）在 $U^* = 20$ 米/秒 $L = 3500, 4667, 7000, 14000$ 公里（即相应于 45°N 纬向波数为 $m = 8, 6, 4, 2$ ）时， $|\psi|$ 、 $|T'|$ 与 α_4 随高度的变化曲线。

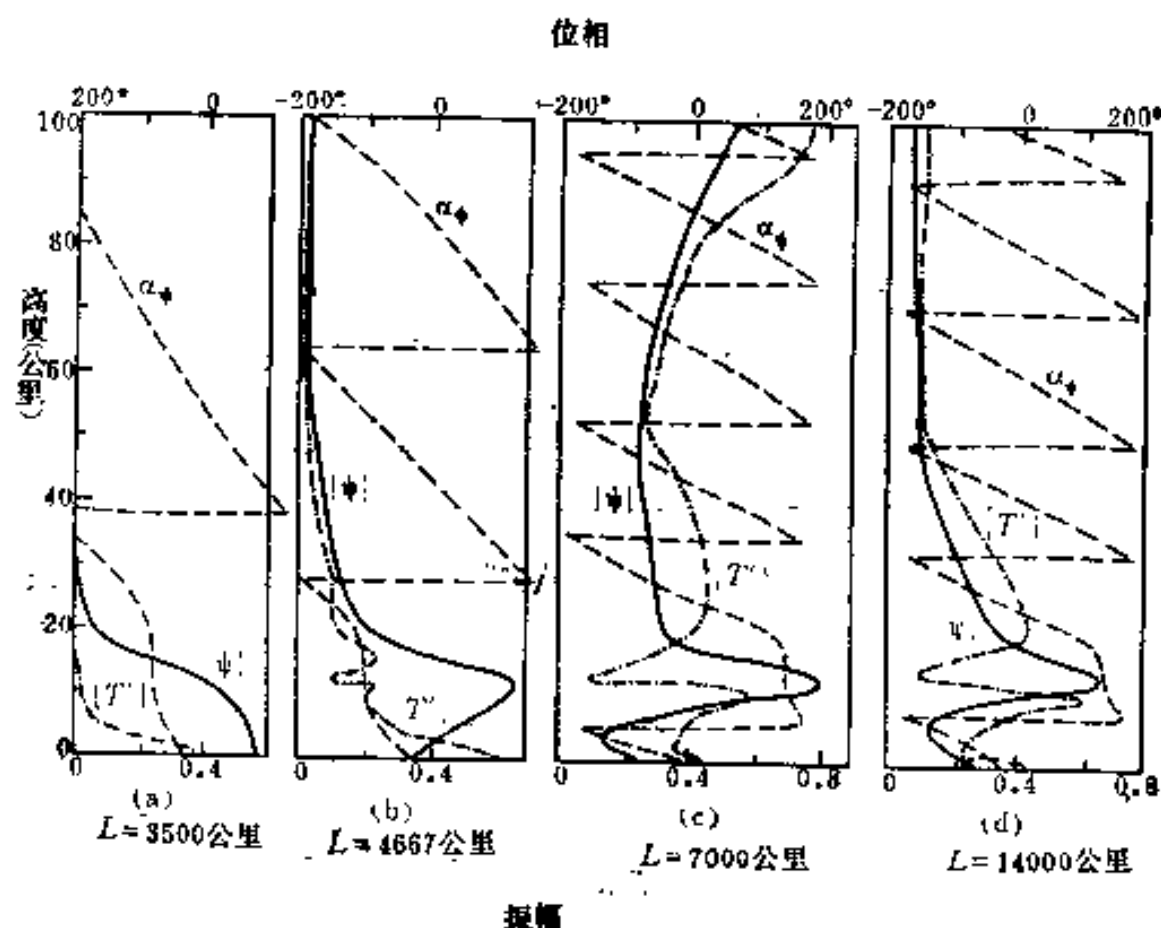


图 7-34 急流 I 型的不稳定波结构

从上图可以看出，不同波长波的结构是不同的。在平流层中，水平波长愈大则垂直波长愈短。

② 急流 II 型

当高层急流强度相对而言是比较小的时候，则由急流 II 型给出的所有波长的扰动结构与急流 I 型给出的极为相似。而在高层急流强度相当强的情况下，如

$$\frac{U_T}{U^*} > 1$$

则与急流 I 型给出的扰动结构有明显的不同。这时 $|\psi|$ 、 $|T'|$ 与 α_4

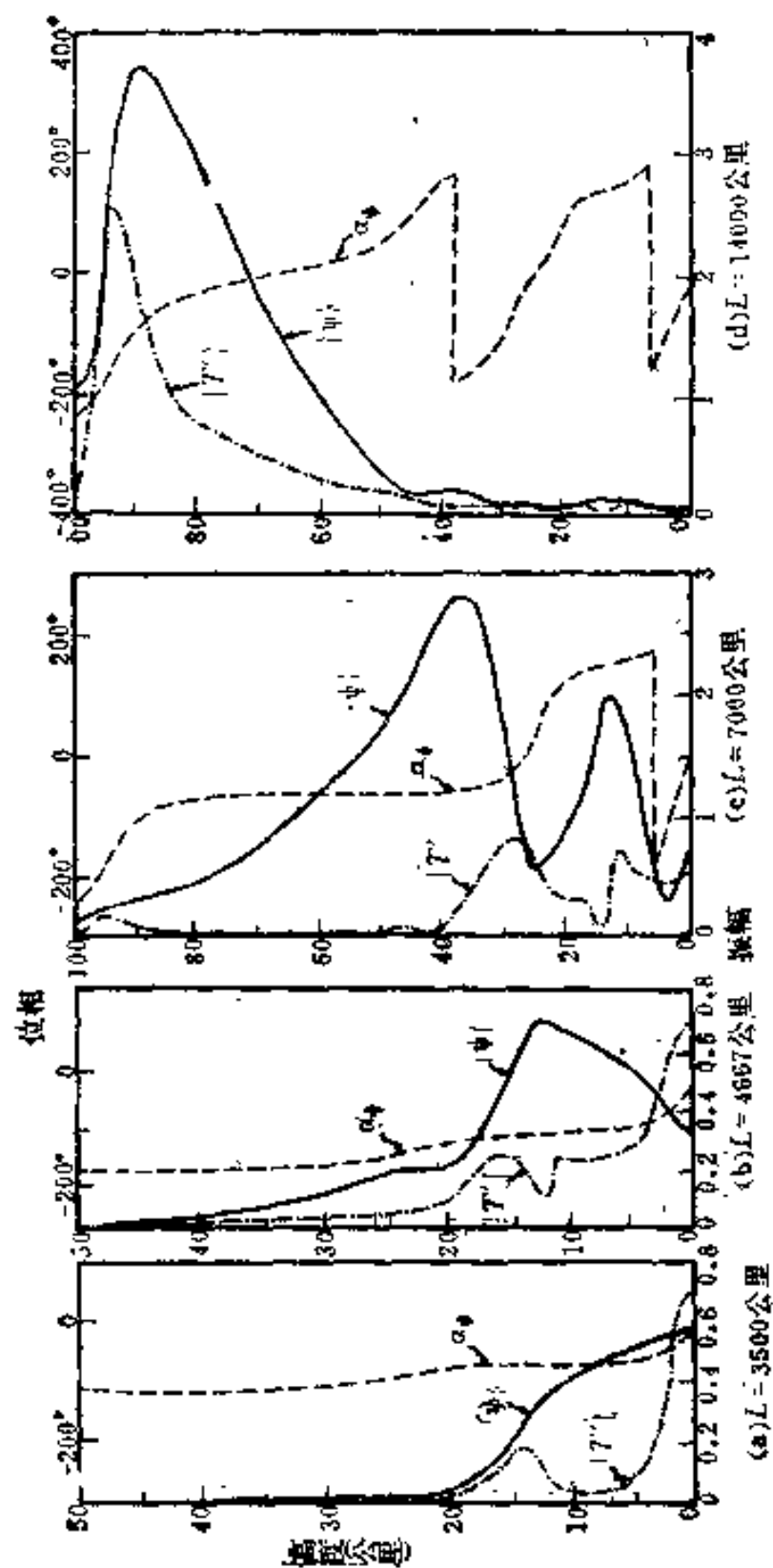


图 7-35 高层强急流情况下急流 I 型的不稳定波结构

随高度的分布由图 7-35 所示

比较图 7-34 与图 7-35 发现：

(i) 高层急流的存在对短波扰动的特征影响很小。

(ii) 当存在强高层急流时，长波的结构比急流 I 型有很大的不同。

除了振幅与位相函数外，我们还讨论了不同波长下，由扰动产生的平均热量的向北输送，列于图 7-36。从图中可见，这个输送对所有的高度（包括平流层）都是正的。在这里不稳定性长波的贡献是很重要的，特别在对流层上层与平流层下层。这与观测所得结果是一致的。

③ 急流 II 型

图 7-37 给出了急流 II 型在

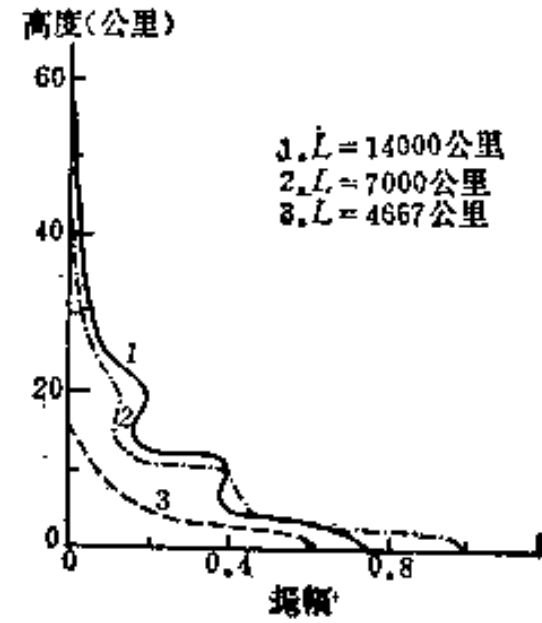


图 7-36 热量向北输送的高度分布

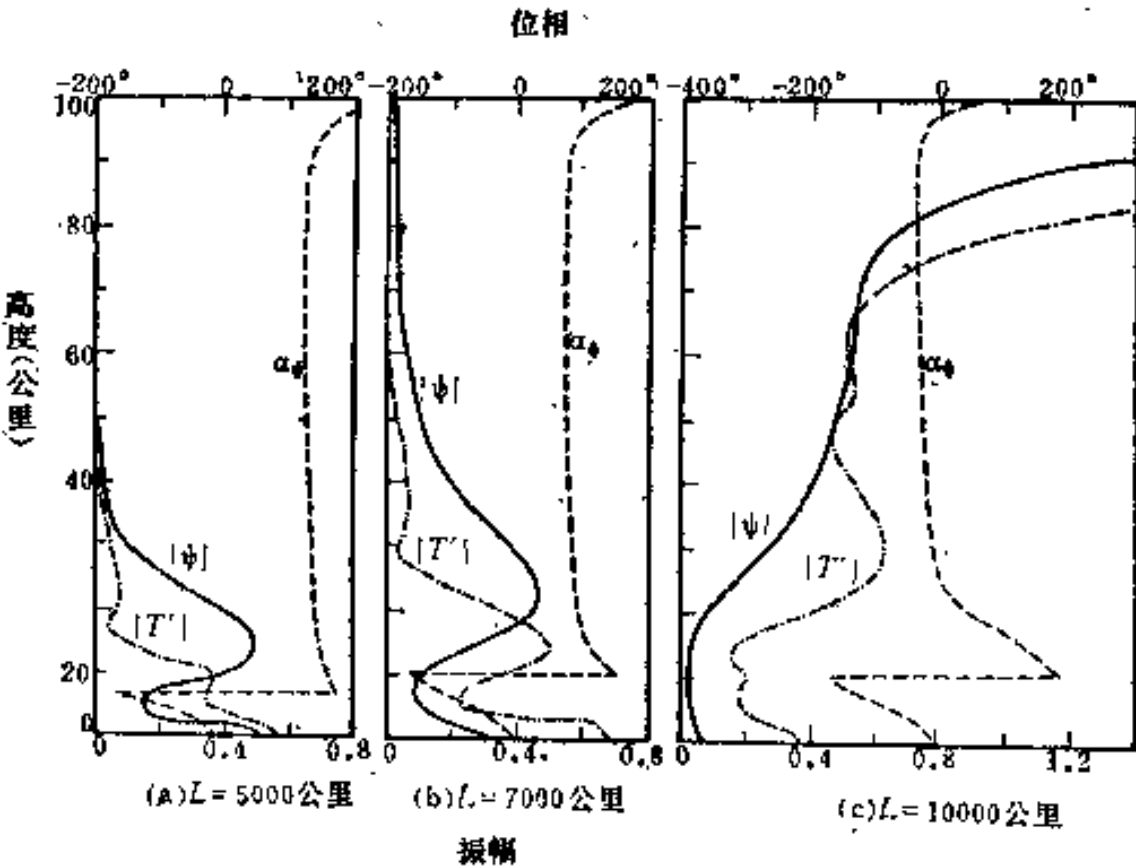


图 7-37 急流 II 型不稳定性波的结构

$U^* = 50$ 米/秒, $L = 5000, 7000, 10000$ 公里时 $|\psi|$ 、 $|T'|$ 、 α_4 随高度的变化。

从图中可看出如下结果:

(i) 当波长增大时, $|\psi|$ 与 $|T'|$ 的极大值移向越来越高的面。例如, $L = 7000$ 公里的扰动, 在平流层底部 $|T'|$ 有个明显的极大值, 而对于 $L = 10000$ 公里的扰动, $|T'|$ 的极大值在 $z = 30$ 公里处。

(ii) 对于长波扰动, $|T'|$ 通常在 $z = 30$ 公里以上较大, 在 $z = 80$ 公里以上的高度还能取很高的数值。

参 考 文 献

Barcilon, V. (1964). *J. Atmos. Sci.*, 21, 291-299.

Burger, A.P. (1962). *J. Atmos. Sci.*, 19, 31-38.

_____ (1966). *J. Atmos. Sci.*, 23, 272-277.

Charney, J.G. (1947). *J. Meteor.*, 4, 136-163.

_____ and A. Eliassen (1949). *Tellus*, 1, 38-54.

_____ and M. Stern (1962). *J. Atmos. Sci.*, 19, 159-172.

Dickinson, R.E. (1973). *J. Atmos. Sci.*, 30, 1520-1527.

Eady, E.T. (1949). *Tellus*, 1, 33-52.

Garcia, R.V., and R. Norcini (1970). *Tellus*, 22, 239-250.

Geisler, J.E. and R.R. Garcia (1977). *J. Atmos. Sci.*, 34, 311-321.

Green, J.S.A. (1960). *Quart. J. R. Met. Soc.*, 86, 237-251.

- Hiroto, I. (1968). *J. Meteorol. Soc. Japan*, 46, 234-249.
- Kuo, H.L. (1949). *J. Meteor.*, 6, 105-122.
- _____ (1952). *J. Meteorol.*, 9, 260-278.
- _____ (1953). *J. Atmos. Sci.*, 10, 235-243.
- _____ (1973). *Advances in Appl. Mech.*, 13, 248-330.
- _____ (1978). *J. Atmos. Sci.*, 35, 1840-1860.
- _____ (1979). *J. Atmos. Sci.*, 36, 2361-2378.
- Lipps, Frank B. (1965). *J. Fluid Mech.*, 12, 397-407.
- Michalke, A. (1964). *J. Fluid Mech.*, 19, 543-556.
- Miles, J.W. (1964a,b). *J. Atmos. Sci.*, 21, 550-556, 603-609.
- _____ (1964c). *Rev. of Geophys.*, 2, 155-176.
- Moen, L. (1974). *Tellus*, 26, 424-443.
- Pedlosky, J. (1964a,b). *J. Atmos. Sci.*, 21, 201-219, 342-353.
- Phillips, N. A. (1951). *J. Meteor.*, 8, 381-394.
- Song, R.T. (1970). *J. Atmos. Sci.*, 28, 549-586.
- Tang, C.M. (1971). *Tellus*, 23, 285-294.
- Thomson, P.D. (1953). *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 79, 51-69.

第八章 弱不稳定下的非线性解

从第七章中可以看出,线性系统的不稳定波解,其振幅是随时间按指数增大的。可是,这种情况仅在扰动振幅很小时才近似成立。从物理上来讲,基本或平均流场能量加上扰动流场的能量是守恒的,所以扰动振幅随时间无休止地按指数增加是不可能的,它必然有个上限。否则,扰动能量将无限增大,这不符合能量守恒定律。

为了克服线性系统这个弱点,我们必须考虑非线性作用。在非线性的系统中,扰动能量不可能无限增大,它有个有穷的上界。当扰动能量达到这个上界时,扰动为有限振幅波,它的总能量加上基本流场的总可用能量等于原来的能量,这样符合能量守恒定律。

本章从非线性位涡方程出发,采用多时间尺度分析和小参数展开方法求得二层模式位涡方程的弱非线性波解。

§ 1 扰动位涡方程及其边界条件

一、基本流场与扰动流场

我们采用与第七章相同的处理方法,将流场分成不随时间而变的基本纬向气流与随时间变化的扰动。这个扰动流场也有一个不随 x 变化的平均部分。它们各有如下一些特点。

1. 对基本流场的假定

与第七章相同,对基本流场作如下假定:

- ① 基本流场不随 x 而变,所以基本纬向气流可以看成是真实

纬向气流沿整个纬圈或沿 x 方向比一个波长要长的长度内的平均。

② 基本纬向气流不随时间而变。

所以基本流场可由

$$U = U(y, z) \quad (8-1)$$

来表示。

2. 扰动流场的处理

由于我们考虑大尺度扰动，所以认为静力平衡与准地转近似成立。如扰动流场由流函数

$$\psi = \psi(x, y, z, t) \quad (8-2)$$

来表示，则由(5-1)式可求得扰动流场的相对位涡为

$$q = q(x, y, z, t) = \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \quad (8-3)$$

与线性系统不同的是，在非线性系统中扰动流场在 x 方向的平均（沿整个纬圈或一个波长的平均）值并不等于零。为方便起见，我们将扰动流场分为两个部分：

$$\psi(x, y, z, t) = \bar{\psi}(y, z, t) + \psi'(x, y, z, t) \quad (8-4)$$

$$q(x, y, z, t) = \bar{q}(y, z, t) + q'(x, y, z, t) \quad (8-5)$$

这里 $\bar{\psi}$ ， \bar{q} 为扰动流场流函数、相对位涡在 x 方向上的平均。其中平均符号“ $\bar{\quad}$ ”的定义如下：

$$\left(\overline{\quad} \right) \equiv \frac{1}{L} \int_0^L (\quad) dx \quad (8-6)$$

对(8-4)与(8-5)两式求平均可得

$$\bar{\psi}' = 0, \quad \bar{q}' = 0 \quad (8-7)$$

由(8-6)式可知，若 A 是一个与 x 无关的函数，则有

$$A \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad A \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (8-8)$$

二、扰动位涡方程

由位涡方程(3-88)式可得扰动位涡方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) q + Q_{0y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \gamma \nabla^2 \psi = -J(\psi, q) \quad (8-9)$$

这里 $J(\psi, q)$ 为 ψ, q 的雅哥比函数, 即

$$J(\psi, q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (8-10)$$

而

$$\gamma = \frac{\sqrt{E}}{R_0} \quad (8-11)$$

其中

$$E = \frac{2\nu}{f_0 D^2} \quad (8-12)$$

为埃克曼数, 而

$$R_0 = \frac{U}{f_0 L} \quad (8-13)$$

为罗斯贝数。 D 为大气深度的特征度量。

Q_{0y} 为基本气流绝对位涡梯度, 由(7-14)式定义。

当

$$E^{\frac{1}{2}} \ll R_0 \quad (8-14)$$

时, 则有

$$\gamma \ll 1 \quad (8-15)$$

这时摩擦效应可以略去。否则, 就要考虑摩擦作用。也就是说, 在(8-9)式中若令

$$\gamma = 0$$

则得无摩擦的扰动位涡方程。

由于 U, Q_{0y} 都是与 x 无关的函数, 则由(8-8)式可知:

$$\overline{U \frac{\partial q}{\partial x}} = 0, \quad \overline{Q_{0y} \frac{\partial \psi}{\partial x}} = 0 \quad (8-16)$$

将扰动位涡方程(8-9)式按(8-6)式求平均, 利用(8-16)式可得平均(即不随 x 变化部分)扰动位涡方程为

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \gamma \nabla^2 \bar{\psi} = -J(\bar{\psi}, \bar{q}) = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{(\psi'_x q')} \quad (8-17)$$

式中 ψ 的下标 x 表示对 x 的偏导数。

将(8-9)式减去(8-17)式, 可得随经度 x 变化部分的扰动位涡方程:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + Q_{0y} \psi'_x + \gamma \nabla^2 \psi' = & -J(\psi', q') - \psi'_x \bar{q}_y + \\ & + \bar{\psi}_y q'_x + \frac{\partial}{\partial y} \overline{(\psi'_x q')} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\overline{(\psi'_x q')} - \bar{\psi}'_x \bar{q}'_y \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\psi}'_y q'] - \bar{\psi}'_x \bar{q}'_y + \bar{\psi}'_y q'_x \end{aligned} \quad (8-18)$$

三、扰动流场所满足的边界条件

对于扰动流场, 我们采用如下两个平面边界条件:

$$\textcircled{1} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{当 } y = 0, \quad y = y_2 \quad (8-19)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0, \quad \text{当 } y = 0, \quad y = y_2 \quad (8-20)$$

上式中 \bar{u} 为不随 x 变化的纬向扰动速度, 即

$$\bar{u} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \quad (8-21)$$

所以(8-20)式也可写为

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y \partial t} = 0, \quad \text{当 } y = 0, \quad y = y_2 \quad (8-22)$$

这两个边界条件表明: 在边界上没有经向扰动速度; 平均纬向扰动流场在边界上不随时间变化。

四、定解问题

本章将基本流场作为是给定的, 即 U 、 Q_{0y} 为 y 、 z 的已知函数。问题便化为在边界条件(8-19)与(8-22)下, 方程(8-17)与(8-18)两式的非线性解。由于基本流场不稳定要产生扰动, 这里主要讨论流场的切变不很大, 从而不稳定性不很强的所谓弱不稳定情况。这时, 系统虽然是非线性的, 然而非线性效应不太强, 也就是我们求(8-17)与(8-18)两式的弱非线性解。非线性解与线性解有很大差别: 线性解只能求得一些判断波动稳定与否的临界值及小扰动的大致结构, 而无法求得绝对振幅。非线性解可求得扰动的振幅, 而弱非线性解则只求在不稳定度不太强时的最基本解的振幅, 高阶项均被略去。

§ 2 二层模式下的控制方程组

一、弱不稳定条件

利用第七章 §6 介绍的二层模式, 将位涡方程写在标号为 2, 4 的层次上。利用(8-3), (7-14)式可知二层模式中如下关系式成立:

$$\begin{cases} \overline{q_j} = -\frac{\partial^2 \overline{\psi_j}}{\partial y^2} - F \overline{\psi_j} + F \overline{\psi_{e-j}} \\ q'_j = \nabla^2 \psi'_j - F \psi'_j + F \psi'_{e-j} \quad j = 2, 4 \end{cases} \quad (8-23)$$

$$Q_{0v2} = \beta + FU_c + F \Delta \quad (8-24)$$

$$Q_{0v4} = \beta - FU_c - F \Delta \quad (8-25)$$

式中 F 为弗洛德(Froude)数, 即

$$F = \frac{f_0^2 L^2}{-\frac{\Delta \rho}{\rho} g D} \quad (8-26)$$

U_c 为风速垂直切变($U_2 - U_4$)的临界值, 而

$$\Delta = (U_2 - U_4) - U_c \quad (8-27)$$

为稳定性指标。由第七章可知, 扰动稳定性的判据为

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{不稳定} \\ \Delta = 0 & \text{过渡状态} \\ \Delta < 0 & \text{稳定} \end{cases} \quad (8-28)$$

本章我们仅考虑如下所谓弱不稳定情况, 即

$$0 < \Delta \ll U_c \quad (8-29)$$

也就是说求不稳定程度不太大时的非线性解。以下我们所用方程所有变数及参数都是无量纲化了的。

二、控制方程组

将(8-17)与(8-18)两式写在二层模式上为

$$-\frac{\partial \bar{q}_j'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} (\psi_{j\alpha}' \bar{q}_j') - \gamma \frac{\partial^2 \bar{\psi}_j'}{\partial y^2}, \quad j=2, 4 \quad (8-30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_j'}{\partial t} + U_j \frac{\partial q_j'}{\partial x} + Q_{0vj} \psi_{j\alpha}' + \gamma \nabla^2 \psi_j' = & -\frac{\partial}{\partial y} [\psi_{j\alpha}' q_j' - \bar{\psi}_{j\alpha}' \bar{q}_j'] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (\psi_{jv}' \bar{q}_j') - \psi_{j\alpha}' \bar{q}_{jv}' + \bar{\psi}_{jv}' q_{j\alpha}', \quad j=2, 4 \end{aligned} \quad (8-31)$$

式中

$$\begin{cases} \psi_{j\alpha}' = \frac{\partial \psi_j'}{\partial x}, \quad \psi_{jv}' = \frac{\partial \psi_j'}{\partial y}, & \bar{\psi}_{jv}' = \frac{\partial \bar{\psi}_j'}{\partial y} \\ q_{j\alpha}' = \frac{\partial q_j'}{\partial x}, \quad \bar{q}_{jv}' = \frac{\partial \bar{q}_j'}{\partial y} \end{cases} \quad (8-32)$$

边界条件可写为

$$\textcircled{1} \quad v_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = 0, \quad \text{当 } y=0, y=y_2 \quad (8-33)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}_j}{\partial y \partial t} = 0, \quad \text{当 } y=0, y=y_2 \quad (8-34)$$

§ 3 多时间尺度分析

一、小参数展开法的问题

在各种物理,流体力学及大气动力学的理论研究中,我们常使用小参数展开法。即把变量展成在控制方程中存在的某个小参数的幂级数形式,逐次求出级数中的各项系数,以求得近似解。在用这种方法有这样一个问题:当时间超过一定限度后,级数可能发散,即近似解会趋于无穷。这就是说,小参数方法可能只在很短的一个时段内才近似有效。这里举线性阻尼谐振子这样一个简单例子来加以说明。阻尼线性谐振子方程如下:

$$\ddot{x} + x + 2\eta \dot{x} = 0 \quad (8-35)$$

式中 x 上方的“ \cdot ”表示对时间的微分。 η 是阻力系数。我们假定 η 的数值是较小的,所以我们用小参数展开法来求解(8-35)式,令(8-35)式的解 x 按小参数 η 进行展开,即令

$$x = x_0 + \eta x_1 + \eta^2 x_2 + \dots \quad (8-36)$$

将(8-36)式代入(8-35)式,令 η 同次幂的系数为零得到

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (8-37)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2\dot{x}_0 \quad (8-38)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2\dot{x}_1 \quad (8-39)$$

.....

方程(8-37)式的通解为

$$x_0 = a \cos(t + \varphi) \quad (8-40)$$

式中 a 与 φ 是任意常数。将上式代入(8-38)式,对 x_1 进行求解可得

$$x_1 = -at \cos(t + \varphi) \quad (8-41)$$

将上式代入(8-39)式,对 x_2 进行求解可得

$$x_2 = \frac{1}{2} at^2 \cos(t + \varphi) + \frac{1}{2} at \sin(t + \varphi) \quad (8-42)$$

于是方程式(8-35)的解可写为

$$x = a \cos(t + \varphi) - \eta a t \cos(t + \varphi) + \frac{1}{2} \eta^2 a [t^2 \cos(t + \varphi) + t \sin(t + \varphi)] + O(\eta^3) \quad (8-43)$$

假若我们把 η 看成一个小参数而只取二级(或 n 级)的近似解, 则上式所示的解只能在时间小于一定的限度内才能成立。当时间 t 大到具有 η^{-1} 的数量级时, 则(8-43)式是一个精密很差的解。因为这时 ηx_1 与 x_0 , $\eta^2 x_2$ 与 ηx_1 相比不是小量; 加上 $x_1, x_2 \cdots$ 的振幅中都是时间 t 的幂函数, 所以当 t 增加到 $O(\eta^{-1})$ 时,

$$\frac{x_m}{x_{m-1}} \sim O(\eta^{-1})$$

这时有限项数的小参数展开方法便不成立。如何来解决这个问题呢? 多时间尺度分析是其中有效的方法之一。

二、多时间尺度分析

小参数展开法为什么会在

$$t \sim O(\eta^{-1})$$

的时候失败呢? 我们用(8-35)式的精确解

$$x = a e^{-\eta t} \cos(\sqrt{1 - \eta^2} t + \varphi) \quad (8-44)$$

与(8-43)式对比来进行分析。对(8-44)式中指数函数与余弦函数分别进行展开

$$e^{-\eta t} = 1 - \eta t + \frac{1}{2} \eta^2 t^2 + \cdots \quad (8-45)$$

$$\cos(\sqrt{1 - \eta^2} t + \varphi) = \cos(t + \varphi) + \frac{1}{2} \eta^2 t \sin(t + \varphi) + \cdots \quad (8-46)$$

将这两个公式代入(8-44)式便可得(8-43)式。我们知道只有当 ηt 是小量的时候, $e^{-\eta t}$ 与 $\cos(\sqrt{1 - \eta^2} t + \varphi)$ 才能用有限项的展开来近似表达。因为 η 是小量, 所以 ηt 为小量便意味着

$$t \leq O(1) \quad (8-47)$$

当

$$t = O(\eta^{-1})$$

时, ηt 则不是小量, 因此我们不能用级数的截断表达式。由此可

知，截断级数只对于 t 处于一定范围，即 $t < t_c$ 是可行的，超过了这个时段， $\exp(-\eta t)$ ， $\cos(\sqrt{1-\eta^2} t + \varphi)$ 与截断级数的差将超过预先给定的精度。当增加截断级数的项数时，截断级数所满足的时间范围也由 t_c 增加到 t'_c 。但当 $t > t'_c$ 时， $e^{-\eta t}$ (或 $\cos(\sqrt{1-\eta^2} t + \varphi)$) 与新截断级数之差又将大于预先给定的精度。为使某一展式对任何时间 t 都满足，则要给出级数的所有项。因此为了要确定某一个展式对量级为 η^{-1} 的时间成立，应把 ηt 看作单个变量 T_1 ，即

$$T_1 = \eta t = O(1) \quad (8-48)$$

$e^{-\eta t}$ 对量级为 η^{-1} 的时间成立的任何截断层式的形式为

$$e^{-\eta t} = e^{-T_1} \quad (8-49)$$

与此相类似，当

$$t \sim O(\eta^{-2})$$

时，截断展式(8-46)式不能成立。为了得到 $\cos(\sqrt{1-\eta^2} t + \varphi)$ 对时间 $t = O(\eta^{-2})$ 成立的截断渐近展式，则 $\eta^2 t$ 应考虑为一个单一变量，即

$$T_2 = \eta^2 t = O(1) \quad (8-50)$$

这样

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{1-\eta^2} t + \varphi) &= \cos\left(t - \frac{1}{2} T_2 + \varphi - \frac{1}{8} \eta^4 t + \dots\right) = \\ &= \cos\left(t - \frac{1}{2} T_2 + \varphi\right) + \frac{1}{8} \eta^4 t \sin\left(t - \frac{1}{2} T_2 + \varphi\right) + \dots \end{aligned} \quad (8-51)$$

对 $t = O(\eta^{-2})$ 成立，因为这时修正项（即第二项）为 $O(\eta^2)$ 。但当 $t = O(\eta^{-4})$ 时，此展式被破坏，因为第二项与第一项之比不再是小量。为了得到对时间量级为 η^{-4} 成立的截断展式，必须引入另一变量

$$T_4 = \eta^4 t = O(1) \quad (8-52)$$

从上面的讨论可以看出， $x(t, \eta)$ 的值取决于 $t, \eta t, \eta^2 t \dots$ 以及

η 本身的数值。为了确定一个对所有 t 从 0 到 $O(\eta^{-M})$ 都成立的截断展开式, 则必须确定 x 对 $M+1$ 个不同时间尺度 T_0, T_1, \dots, T_M 的依赖关系, 这里

$$T_j = \eta^j t, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M \quad (8-53)$$

时间尺度 T_1 比 T_0 大, T_2 比 T_1 大, \dots T_M 比 T_{M-1} 大。因此我们有

$$x(t, \eta) = \tilde{x}(T_0, T_1, \dots, T_M, \eta) = \sum_{j=0}^M \eta^j x_j(T_0, T_1, \dots, T_M) + O(\eta T_M) \quad (8-54)$$

式中误差 $O(\eta T_M)$ 说明展开式对 t 从 0 到 $O(\eta^{-M})$ 的范围内都成立。超出这个时间范围, 必须使用别的时间尺度来保持展开式的一致成立。对于阻尼线性谐振子的这种讨论, 也可用于偏微分方程。对偏微分方程, 引入不同的时间尺度将增加自变量的个数。用复合函数求导法则可知时间导数为:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \eta \frac{\partial}{\partial T_1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (8-55)$$

方程(8-53)~(8-55)形成一套多时间尺度的方案。

把(8-54)与(8-55)两式代入(8-35)式, 令 η 同次幂的系数为零, 得到确定 x_0, x_1, \dots, x_M 的方程, 这些方程含有时间尺度 T_0, T_1, \dots, T_M 的任意函数, 为了确定这些函数, 需提出一些附加条件。若(8-54)式对 $t = O(\eta^{-M})$ 成立, 则 $\eta^m x_m$ 应是对 $\eta^{m-1} x_{m-1}$ 的小修正量, $\eta^{m-1} x_{m-1}$ 又是 $\eta^{m-2} x_{m-2}$ 的小修正量, 于是我们要求

$$\frac{x_m}{x_{m-1}} < \infty, \quad \forall T_0, T_1, \dots, T_M \quad (8-56)$$

三、非线性二层模式中的两时间尺度分析

1. 两种不同的时间尺度

为简单起见, 在本章所考虑的非线性系统中, 仅是两种不同的时间尺度,

① 用于度量非线性波传播的时间尺度 τ ;

② 用于度量非线性波振幅变化的时间尺度 T 。

这两个时间尺度由下式所示:

$$\begin{cases} \tau = t \\ T = \eta^\lambda t, \lambda \geq 1 \end{cases} \quad (8-57)$$

这里

$$\eta = \Delta^{\frac{1}{2}} = [(U_2 - U_4) - U_c]^{\frac{1}{2}} \quad (8-58)$$

由(8-55)式可得

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta^\lambda \frac{\partial}{\partial T} \quad (8-59)$$

这里

$$\begin{cases} \lambda = 1, & \text{对无摩擦大气} \\ \lambda = 2, & \text{对有摩擦大气} \end{cases}$$

由于考虑弱不稳定,所以 Δ 很小,即 η 很小。这样, η 可以看为小参数。

2. 含小参数 η 的基本方程组

利用小参数 η , 将有关基本流场的一些物理量写为:

$$U_2 = U_4 + U_c + \Delta = U_4 + U_c + \eta^2 \quad (8-60)$$

$$Q_{0v2} = \beta + FU_c + F\eta^2 \quad (8-61)$$

$$Q_{0v4} = \beta - FU_c - F\eta^2 \quad (8-62)$$

这些参数都是无量纲的。

将(8-59)~(8-62)诸式代入(8-31)式可得标号为 2, 4 两个层次上的随 x 变化部分的扰动位涡方程分别为:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \eta^\lambda \frac{\partial}{\partial T} \right) + (U_4 + U_c + \eta^2) \frac{\partial}{\partial x} \right] q'_2 + (\beta + FU_c + \\ & + F\eta^2) \frac{\partial \psi'_2}{\partial x} + \gamma \nabla^2 \psi'_2 = -J(\psi'_2, q'_2) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\psi'_{2x} q'_2) - \psi'_{2x} \frac{\partial q'_{2y}}{\partial y} + \psi'_{2y} \frac{\partial q'_{2x}}{\partial x} \end{aligned} \quad (8-63)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \eta^\lambda \frac{\partial}{\partial T} \right) + U_4 \frac{\partial}{\partial x} \right] q'_4 + (\beta - FU_c - F\eta^2) \frac{\partial \psi'_4}{\partial x} + \\ & + \gamma \Delta^2 \psi'_4 = -J(\psi'_4, q'_4) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\psi'_4 q'_4}) - \psi'_{4x} \overline{q'_{4y}} + \\ & + \overline{\psi'_{4y}} q'_{4x} \end{aligned} \quad (8-64)$$

由于平均的扰动部分 \overline{q} , $\overline{\psi}$ 不随 x 而变, 所以它没有随波动传播的时间尺度, 即在求 \overline{q} 与 $\overline{\psi}$ 随时间的偏导数时, 用如下公式:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \eta^\lambda \frac{\partial}{\partial T} \quad (8-65)$$

将上式代入(8-3)式可得

$$\eta^\lambda \frac{\partial \overline{q_j}}{\partial T} + \gamma \frac{\partial^2 \overline{\psi_j}}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y} (\overline{\psi'_j q'_j}), \quad j=2, 4 \quad (8-66)$$

§ 4 用小参数展开法求非线性解

一、谐波分析

由于非线性波解有谐波的性质并具有两个不同的时间尺度, 所以(8-63)与(8-64)两式的非线性解可写为如下谐波形式:

$$\begin{aligned} \psi'_j(x, y, t, T) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{j,l,s}(T, \eta) e^{i l \tau} \sin(smy) = \\ &= \varphi_{j,1,1}(T, \eta) e^{i \tau} \sin my + \sum_{\substack{l=1, s=1 \\ l+s \neq 2}}^{\infty} \sum_{l+s \neq 2}^{\infty} \varphi_{j,l,s}(T, \\ &\quad \eta) e^{i l \tau} \sin(smy) \end{aligned} \quad (8-67)$$

$$\begin{aligned} q'_j(x, y, t, T) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} q_{j,l,s}(T, \eta) e^{i l \tau} \sin(smy) = \\ &= q_{j,1,1}(T, \eta) e^{i \tau} \sin my + \sum_{\substack{l=1, s=1 \\ l+s \neq 2}}^{\infty} \sum_{l+s \neq 2}^{\infty} q_{j,l,s} \\ &\quad (T, \eta) e^{i l \tau} \sin(smy) \end{aligned} \quad (8-68)$$

式中

$$\varepsilon = k(x - ct), \quad c = c_r \quad (8-69)$$

(8-67)与(8-68)两式中第一项表示由线性理论给出的基本解。在求弱不稳定下的非线性解时，我们仍将注意力集中在这个基本解上，而不去考虑后面那些项。从能量的观点可知，振幅 $\varphi_{j,1,1}(T, \eta)$ 与 $q_{j,1,1}(T, \eta)$ 应是 η 的增函数，当 η 越大，则它们值越大； η 越小，则它们值越小。

二、振幅函数的小参数展开

虽然(8-67)与(8-68)两式中的基本解与线性理论中的波解有相同的形式，可是这两者是不同的。线性理论并不求出扰动的振幅究竟有多大，只知道它随时间指数增大；非线性理论要求得出随时间不是指数增大的振幅函数来。为了做到这一点，我们常将扰动振幅函数展为 η 的级数：

$$\begin{aligned} \varphi_{j,1,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \varphi_j^{(n)}(T) &= \eta \varphi_j^{(1)}(T) + \eta^2 \varphi_j^{(2)}(T) + \\ &+ \eta^3 \varphi_j^{(3)}(T) + \dots \end{aligned} \quad (8-70)$$

$$\begin{aligned} q_{j,1,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n q_j^{(n)}(T) &= \eta q_j^{(1)}(T) + \eta^2 q_j^{(2)}(T) + \\ &+ \eta^3 q_j^{(3)}(T) + \dots \end{aligned} \quad (8-71)$$

式中的系数 $\varphi_j^{(n)}(T)$ 与 $q_j^{(n)}(T)$ 为时间 T 的函数。下面我们知道，为要求得振幅的一级近似值，必须要展开到三级近似。

我们假定扰动开始于 $\eta = 0$ 的基本解，这时扰动振幅为零，以后振幅随 η 而增大，同时非线性项就产生了高阶谐波。

与(8-70)与(8-71)两式相类似，平均扰动场用小参数 η 展为：

$$\overline{\psi}_j(y, \eta, t) = \overline{\psi}_j(y, \eta, T) = \sum_{n=2}^{\infty} \eta^n \overline{\psi}_j^{(n)}(y, T) \quad (8-72)$$

$$\overline{q}_j(y, t) = \overline{q}_j(y, T) = \sum_{n=2}^{\infty} \eta^n \overline{q}_j^{(n)}(T) \quad (8-73)$$

由于 $\bar{\psi}$ 与 \bar{q} 由扰动而产生,所以级数由 $n = 2$ 开始。

由位涡的定义可知:

$$q'_j = (\nabla^2 - F)\psi'_j + F\psi'_{s-j} \quad (8-74)$$

$$\bar{q}_j = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - F \right) \bar{\psi}_j + F\bar{\psi}_{s-j} \quad (8-75)$$

将(8-67)与(8-68)两式代入(8-74)式,比较各个单波的系数得到:

$$q_j^{(n)}(T) = -(\alpha^2 + F)\varphi_j^{(n)}(T) + F\varphi_{s-j}^{(n)}(T), \alpha^2 = k^2 + m^2 \quad (8-76)$$

$$q_{j,1,s} = -(l^2k^2 + s^2m^2 + F)\varphi_{j,1,s} + F\varphi_{s-j,1,s} \quad (8-77)$$

$$l \geq 2, \text{ 或 } s \geq 2$$

将(8-72)与(8-73)两式代入(8-75)式可得

$$\bar{q}_j^{(n)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - F \right) \bar{\psi}_j^{(n)}(T) + F\bar{\psi}_{s-j}^{(n)}(T) \quad (8-78)$$

三、小参数展开形式的振幅方程

我们利用(8-63)与(8-64)两式来求得基本解 $e^{i\theta} \sin my$ 的振幅函数。在计算中常用到下式:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi_j^{(n)}(T) e^{ik(x-c\tau)} \right] = \\ & = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \eta^\lambda \frac{\partial}{\partial T} \right) \left[\varphi_j^{(n)}(T) e^{ik(x-c\tau)} \right] = \\ & = \left[\left(\eta^\lambda \frac{d}{dT} - ikc \right) \varphi_j^{(n)}(T) \right] e^{ik(x-c\tau)} \end{aligned} \quad (8-79)$$

将(8-67), (8-68), (8-70), (8-71)四式代入(8-63)与(8-64)两式,并利用(8-76)与(8-79)两式,得到小参数展开形式的振幅方程:

$$\begin{aligned}
& \left[ik(c - U_4 - U_c - \eta^2) - \eta^2 \frac{d}{dT} \right] \left[(\alpha^2 + F) (\eta \varphi_2^{(1)} + \eta^2 \varphi_2^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \eta^3 \varphi_2^{(3)}) - F(\eta \varphi_4^{(1)} + \eta^2 \varphi_4^{(2)} + \eta^3 \varphi_4^{(3)}) + \dots \right] + \\
& \quad + \left[ik(\beta + FU_c + F\eta^2) - \gamma \alpha^2 \right] (\eta \varphi_2^{(1)} + \eta^2 \varphi_2^{(2)} + \\
& \quad + \eta^3 \varphi_2^{(3)} + \dots) = \frac{1}{e^{i\theta} \sin my} \left[-J(\psi'_2 q'_2) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\psi'_2 q'_2}) - \psi'_{2x} \overline{q'_{2y}} + \overline{\psi'_{2y}} q'_{2x} \right] \quad (8-80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ik(c - U_4) - \eta^2 \frac{d}{dT} \right] \left[(\alpha^2 + F) (\eta \varphi_4^{(1)} + \eta^2 \varphi_4^{(2)} + \eta^3 \varphi_4^{(3)}) - \right. \\
& \quad \left. - F(\eta \varphi_2^{(1)} + \eta^2 \varphi_2^{(2)} + \eta^3 \varphi_2^{(3)}) + \dots \right] + \left[ik(\beta - FU_c - \right. \\
& \quad \left. - F\eta^2) - \gamma \alpha^2 \right] (\eta \varphi_4^{(1)} + \eta^2 \varphi_4^{(2)} + \eta^3 \varphi_4^{(3)} + \dots) = \\
& = \frac{1}{e^{i\theta} \sin my} \left[-J(\psi'_4, q'_4) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\psi'_4 q'_4}) - \psi'_{4x} \overline{q'_{4y}} + \right. \\
& \quad \left. + \overline{\psi'_{4y}} q'_{4x} \right] \quad (8-81)
\end{aligned}$$

由(8-70)~(8-73)四式可知, (8-80), (8-81)两式右边最低阶为 η^3 。令

$$\begin{cases} K_1 = (\alpha^2 + F)(U_4 + U_c - c) - \beta_* - FU_c \\ K_2 = -F(U_4 + U_c - c) \\ K_3 = -F(U_4 - c) \\ K_4 = (\alpha^2 + F)(U_4 - c) - \beta_* + FU_c \end{cases} \quad (8-82)$$

这里

$$\beta_* = \beta + \frac{i\gamma\alpha^2}{k} \quad (8-83)$$

这样可把(8-80)与(8-81)两式写为

$$\begin{aligned} & \left[K_1 + \left(\alpha^2 \eta^2 - \frac{i}{k} (\alpha^2 + F) \eta^2 \frac{d}{dT} \right) \right] (\eta \varphi_2^{(1)} + \eta^2 \varphi_2^{(2)} + \eta^3 \varphi_2^{(3)} \\ & + \dots) + \left[K_2 - F \left(\eta^2 - \frac{i}{k} \eta^2 \frac{d}{dT} \right) \right] (\eta \varphi_4^{(1)} + \eta^2 \varphi_4^{(2)} + \\ & + \eta^3 \varphi_4^{(3)} + \dots) = - \frac{i}{k e^{i\sigma} \sin m y} \left[J(\psi'_2, q'_2) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\psi'_{2x} q'_2}) + \psi'_{2x} \bar{q}_{2y} - \bar{\psi}_{2y} q'_{2x} \right] \quad (8-84) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(K_3 + \frac{i}{k} F \eta^2 \frac{d}{dT} \right) (\eta \varphi_2^{(1)} + \eta^2 \varphi_2^{(2)} + \eta^3 \varphi_2^{(3)} + \dots) + \\ & + \left[K_4 + F \eta^2 - \frac{i}{k} (\alpha^2 + F) \eta^2 \frac{d}{dT} \right] (\eta \varphi_4^{(1)} + \eta^2 \varphi_4^{(2)} + \\ & + \eta^3 \varphi_4^{(3)} + \dots) = - \frac{i}{k e^{i\sigma} \sin m y} \left[J(\psi'_4, q'_4) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\psi'_{4x} q'_4}) + \psi'_{4x} \bar{q}_{4y} - \bar{\psi}_{4y} q'_{4x} \right] \quad (8-85) \end{aligned}$$

利用小参数展开的目的，是为了将非线性偏微分方程化为一组常微分方程，求得任何阶的近似解。

四、具有 β 效应与无摩擦情况下的非线性解

1. 基本特征

具有 β 效应和无摩擦情况下的大气有如下一些基本特征：

$$\textcircled{1} \quad \beta \neq 0, \quad \gamma = 0 \quad (8-86)$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda = 1, \quad \text{即 } T = \eta t \quad (8-87)$$

由(7-195)式可知，在(8-86)式所示的条件下，不稳定的区域为：

$$\alpha^2 < 2F$$

由(8-83)式可知

$$\beta_* = \beta \quad (8-88)$$

由此可得(8-84)与(8-85)两方程式中的一些参数为

$$\begin{cases} K_1 = (\alpha^2 + F)(U_4 + U_{cI} - c) - \beta - FU_{cI} \\ K_2 = -F(U_4 + U_{cI} - c) \\ K_3 = -F(U_4 - c) \\ K_4 = (U_4 - c)(\alpha^2 + F) - \beta + FU_{cI} \end{cases} \quad (8-89)$$

式中 U_{cI} 中的下标“ I ”表示无摩擦大气。

2. η 阶项

对小参数展开形式的振幅方程(8-84)与(8-85)两式中保留 η 项, 略去 η^2 以上的项。注意这两个方程式的右边最低阶为 η^3 , 这时可得

$$K_1 \varphi_2^{(1)} + K_2 \varphi_4^{(1)} = 0 \quad (8-90)$$

$$K_3 \varphi_2^{(1)} + K_4 \varphi_4^{(1)} = 0 \quad (8-91)$$

这是振幅方程(8-84)与(8-85)线性部分的解。上述有关 $\varphi_2^{(1)}$ 与 $\varphi_4^{(1)}$ 的线性齐次方程组(8-90)与(8-91)两式要有非零解, 则必有系数行列式不等于零, 即

$$\begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{vmatrix} = K_1 K_4 - K_2 K_3 = 0 \quad (8-92)$$

将(8-89)式代入(8-92)式得到

$$\begin{aligned} \alpha^2(\alpha^2 + 2F) \left\{ (U_4 - c)^2 + \left[U_c - \frac{2(\alpha^2 + F)\beta}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \right] (U_4 - c) + \right. \\ \left. + \frac{[F\alpha^2 U_c^2 - (\alpha^2 + F)U_{cI}\beta + \beta^2]}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8-93)$$

求解这个关于 c 的两次代数方程式, 其解为

$$c = U_4 + \frac{U_{cI}}{2} - \frac{(\alpha^2 + F)\beta}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \pm R^{\frac{1}{2}} \quad (8-94)$$

其中

$$\begin{aligned} R &= \left[\frac{1}{4} - \frac{F}{(\alpha^2 + 2F)} \right] U_c^2 + \frac{\beta^2 F^2}{\alpha^4(\alpha^2 + 2F)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2 - 2F}{4(\alpha^2 + 2F)} \left[U_{cI}^2 - \frac{4\beta^2 F^2}{\alpha^4(4F^2 - \alpha^4)} \right] \end{aligned} \quad (8-95)$$

因为 U_{cI} 是风速垂直切变的临界值, 即

$$U_{cI} = (U_2 - U_4)_{\text{临界}} \quad (8-96)$$

它是由

$$R = 0 \quad (8-97)$$

求得的, 即

$$U_{cI}^2 = \frac{4\beta^2 F^2}{\alpha^4(4F^2 - \alpha^4)} \quad (8-98)$$

当 α^2 近于 $2F$ 时, U_{cI} 趋于无限大; 当 α^2 大于 $2F$ 时, R 为正, 所以流场是稳定的; 当

$$\alpha^2 = F$$

时, U_{cI} 取极小值

$$U_{cI \min} = \frac{\beta}{2F}$$

将(8-98)式代入(8-94)式可得相速公式为

$$c = U_4 + \frac{U_{cI}}{2} - \frac{(\alpha^2 + F)\beta}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \quad (8-99)$$

若令

$$U_4 + \frac{1}{2}U_{cI} = \frac{1}{2}(U_4 + U_2)_c = \bar{U}_c \quad (8-100)$$

则

$$c = \bar{U}_c - \frac{(\alpha^2 + F)\beta}{\alpha^2(\alpha^2 + 2F)} \quad (8-101)$$

从(8-90)与(8-91)两式可以看出, 用7阶项(即线性部分解)不能求出扰动振幅的数值, 而只能求得2、4两层扰动振幅的比例, 即

$$\gamma_a = \frac{\varphi_4^{(1)}}{\varphi_2^{(1)}} = -\frac{K_1}{K_2} = 1 + \frac{\alpha^2}{F} - \frac{\beta + FU_{cI}}{F(\alpha^2 + 2F)} \quad (8-102)$$

$$\gamma_a = \frac{\varphi_4^{(1)}}{\varphi_2^{(1)}} = -\frac{K_3}{K_4} = \frac{F}{(\alpha^2 + F) - \frac{\beta - FU_{cI}}{U_4 - c}} \quad (8-103)$$

由这两个式子也能求得相速公式(8-99)式。

上面这些结果在第七章 § 6 中讨论线性解时都已得到。

若要求得随时间变化振幅的数值,则必须要求更高阶的近似,即求非线性部分的解。

3. η^2 阶项

在求 η^2 项方程式以前,先定义如下一个符号:

$$(\dot{}) = \frac{d()}{dT} \quad (8-104)$$

在(8-84)与(8-85)两式中,利用方程左、右两边 η^2 项前面系数相等可得下面两个 η^2 阶方程:

$$K_1 \varphi_2^{(2)} + K_2 \varphi_4^{(2)} = \frac{i}{k} [(\alpha^2 + F) \dot{\varphi}_2^{(1)} - F \dot{\varphi}_4^{(1)}] \quad (8-105)$$

$$K_3 \varphi_2^{(2)} + K_4 \varphi_4^{(2)} = \frac{i}{k} [(\alpha^2 + F) \dot{\varphi}_4^{(1)} - F \dot{\varphi}_2^{(1)}] \quad (8-106)$$

利用(8-76)式可得

$$K_1 \varphi_2^{(2)} + K_2 \varphi_4^{(2)} = -\frac{i}{k} \dot{q}_2^{(1)} \quad (8-107)$$

$$K_3 \varphi_2^{(2)} + K_4 \varphi_4^{(2)} = -\frac{i}{k} \dot{q}_4^{(1)} \quad (8-108)$$

将(8-107)式除以 $(-K_2)$, (8-108)式除以 $(-K_4)$, 并用(8-102)与(8-103)两式可得

$$\gamma_a \varphi_2^{(2)} - \varphi_4^{(2)} = -\frac{i}{kK_2} [(\alpha^2 + F) \dot{\varphi}_2^{(1)} - \gamma_a F \dot{\varphi}_2^{(1)}] \quad (8-109)$$

$$\gamma_a \varphi_2^{(2)} - \varphi_4^{(2)} = -\frac{i}{kK_4} [(\alpha^2 + F) \dot{\varphi}_4^{(1)} - F \dot{\varphi}_2^{(1)}] \quad (8-110)$$

將(8-102)与(8-103)两式代入以上两式可得

$$\begin{aligned}
 \gamma_a \varphi_2^{(2)} - \varphi_4^{(2)} &= -\frac{i}{kK_2} \left[(\alpha^2 + F) - \left(F + \alpha^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\beta + FU_{cI}}{U_4 + U_{cI} - c} \right) \right] \dot{\varphi}_2^{(1)} = \\
 &= -\frac{i}{kK_2'} \frac{(\beta + FU_{cI})}{U_4 + U_{cI} - c} \dot{\varphi}_2^{(1)} = \\
 &= \frac{i}{kF} \frac{(\beta + FU_{cI})}{(U_4 + U_{cI} - c)^2} \dot{\varphi}_2^{(1)} \quad (8-111)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_a \varphi_2^{(2)} - \varphi_4^{(2)} &= \frac{i\gamma_a^2}{kK_3} \left[(\alpha^2 + F) - \frac{F}{\gamma_a} \right] \dot{\varphi}_2^{(1)} = \\
 &= -\frac{i\gamma_a^2}{kF} \frac{(\beta - FU_c)}{(U_4 - c)^2} \dot{\varphi}_2^{(1)} \quad (8-112)
 \end{aligned}$$

由关系式(8-98)、(8-99)、(8-102)、(8-103)，我们可以证明(8-111)与(8-112)右边 $\dot{\varphi}_2^{(1)}$ 前面的系数是相同的。也就是说，这两个方程实质上是一个方程。由(8-111)式可得

$$\varphi_4^{(2)} = \gamma_a \varphi_2^{(2)} - \frac{i}{kF} \frac{\beta + FU_{cI}}{(U_4 + U_{cI} - c)^2} \dot{\varphi}_2^{(1)} \quad (8-113)$$

上式表明在考虑 η^2 阶项并当 $\dot{\varphi}_2^{(1)}$ 不等于零时，上下两层随 x 变化的扰动流函数 ψ_2' 与 ψ_4' 存在着位相差。这就是波动 $e^{i\omega} \sin my$ 垂直结构的 η^2 阶修正。为方便起见，令

$$\varphi_2^{(2)} = 0, \quad \varphi_2^{(1)} = A(T) \quad (8-114)$$

这样可把 η^2 阶波的垂直位相变化仅由 $\varphi_4^{(2)}$ 来表示，即

$$\begin{aligned}
 \psi_2'(x, y, \tau, T) &= R_0 \{ (\eta A + \eta^3 \varphi_2^{(3)} + \dots) e^{i\omega} \sin my + \dots \} \\
 &\quad (8-115)
 \end{aligned}$$

$$\psi'_4(x, y, \tau, T) = R e^{\left\{ \left[\gamma_a \eta A - \frac{i \eta^2}{k F} \frac{\beta + F U_{cI}}{(U_4 + U_{cI} - c)^2} \dot{A} + \right. \right.} \\ \left. \left. + \eta^3 \varphi_4^{(3)} + \dots \right] e^{i \theta} \sin m y + \dots \right\}} \quad (8-116)$$

因此要求得 η^2 阶振幅修正值, 必须求出 A 的具体函数形式。这时必须用到另外两个由 (8-66) 式给出的 η^2 阶函数 $\bar{\psi}_2^{(2)}$ 与 $\bar{\psi}_4^{(2)}$ 。当 $\gamma = 0, \lambda = 1$ 时, 方程式

$$\eta \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial T} = - \eta \frac{\partial \bar{q}_4}{\partial T} \quad (8-117)$$

的最低阶为 η^3 , 这是因为由 (8-73) 式可知 \bar{q}_2, \bar{q}_4 的最小阶为 η^2 。这时我们需要 η^2 阶函数 ψ'_2 与 ψ'_4 , 由于 $\gamma = 0$, 所以 (8-66) 式便为

$$\eta \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial T} = - \frac{\partial}{\partial y} \overline{\psi'_2 q'_2} \quad (8-118)$$

$$\eta \frac{\partial \bar{q}_4}{\partial T} = - \frac{\partial}{\partial y} \overline{\psi'_4 q'_4} \quad (8-119)$$

为了简便起见, 令

$$A = R e^{i \theta}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon + \theta, \quad \varepsilon = k(x - ct) \quad (8-120)$$

这里 R 是 A 的模, θ 是 A 的相角。将 A 对 T 求微商, 即得

$$\dot{A} = (\dot{R} + i \dot{\theta} R) e^{i \theta} \quad (8-121)$$

这时 (8-115) 与 (8-116) 两式可写为

$$\psi'_2 = (\eta R \cos \varepsilon_1 + \eta^3 \varphi_2^{(3)} e^{i \theta} + \dots) \sin m y + \dots \quad (8-122)$$

$$\psi'_4 = [(\gamma_a + c_1 \eta \dot{\theta}) \eta \cos \varepsilon_1 + c_1 \eta^2 \dot{R} \sin \varepsilon_1 + \\ + \eta^3 \varphi_4^{(3)} e^{i \theta} + \dots] \sin m y + \dots \quad (8-123)$$

式中

$$c_1 = - \frac{\beta + F U_{cI}}{k F (U_4 + U_{cI} - c)^2} \quad (8-124)$$

将 (8-122) 与 (8-123) 两式代入 (8-74) 式可求得 q'_2 与 q'_4 , 因此

(8-118)与(8-119)两式可写为:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{q}_2^{(2)}}{\partial T} &= -\frac{\partial \bar{q}_4^{(2)}}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial y} (\psi_2' q_2')^{(3)} = \frac{\partial}{\partial y} (\psi_4' q_4') = \\
 &= \frac{kmFc_1}{2} R \dot{R} \sin 2my = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - F \right) \frac{d\bar{\psi}_2^{(2)}}{dT} + \\
 &\quad + F \frac{d\bar{\psi}_4^{(2)}}{dT} \\
 &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - F \right) \frac{d\bar{\psi}_4^{(2)}}{dT} - F \frac{d\bar{\psi}_2^{(2)}}{dT} \quad (8-125)
 \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_2^{(2)} = -\bar{\psi}_4^{(2)} &= -\frac{c_2(R^2 - R_0^2)}{2} \left\{ \sin 2my - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m}{\left(\frac{F}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sinh \left[(2F)^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{y_2}{2} \right) \right]}{\cosh \left[(2F)^{\frac{1}{2}} y_2 \right]} \right\} \quad (8-126)
 \end{aligned}$$

这里 R_0 为 R 的初始值, 而

$$c_2 = \frac{kmc_1}{F + 2m^2} \quad (8-127)$$

由(8-75)式可得

$$\bar{q}_j^{(2)} = \frac{d^2 \bar{\psi}_j^{(2)}}{dy^2} - F(\bar{\psi}_j^{(2)} - \bar{\psi}_6^{(2)}) \quad j=2,4 \quad (8-128)$$

由(8-126)式可得 η^2 阶的切变 $(\bar{U}_2^{(2)} - \bar{U}_4^{(2)})$ 值为:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_2^{(2)} - \bar{U}_4^{(2)} &\equiv \bar{\psi}_4^{(2)} - \bar{\psi}_2^{(2)} = \\
 &= \frac{mc_2(R^2 - R_0^2)}{2} \left\{ \cos 2my - \frac{\cosh \left[(2F)^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{1}{2} y_2 \right) \right]}{\cosh \left[(2F)^{\frac{1}{2}} y_2 \right]} \right\} \\
 &\quad (8-129)
 \end{aligned}$$

(8-122)、(8-123)、(8-126)、(8-129)诸式中, R 与 θ 都是未知函数, 要把它们求出来, 必须考虑更高次的 η^3 阶项。

4. η^3 阶项

考虑方程(8-84)与(8-85)两式的 η^3 阶部分。将所得方程分别除以 K_2 与 K_4 , 得到如下形式的 η^3 阶方程组:

$$\gamma_a \varphi_2^{(3)} - \varphi_4^{(3)} = -\frac{i}{kK_2} [\dot{q}_2^{(2)} + ik(q_2^{(1)} - F\varphi_2^{(1)}) - G_2^{(3)}] \quad (8-130)$$

$$\gamma_a \varphi_2^{(3)} - \varphi_4^{(3)} = -\frac{i}{kK_4} [\dot{q}_4^{(2)} + ikF\varphi_4^{(1)} - G_4^{(3)}] \quad (8-131)$$

式中

$$G_j^{(3)} = \frac{1}{e^{is} \sin my} \left[J(\psi_j', q_j')^{(3)} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{(\psi_{jx}' q_j')}^{(3)} + \psi_{jx}'^{(1)} \overline{q_{jy}'}^{(2)} - \overline{\psi_{jy}'}^{(2)} q_{jx}'^{(1)} \right] \quad (8-132)$$

这里 $G_j^{(3)}$ 可以认为是

$$\left[J(\psi_j', q_j')^{(3)} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{(\psi_{jx}' q_j')}^{(3)} + \psi_{jx}'^{(1)} \overline{q_{jy}'}^{(2)} - \overline{\psi_{jy}'}^{(2)} q_{jx}'^{(1)} \right]$$

在 $e^{is} \sin my$ 上的投影。括号中的量可由(8-122)、(8-123)、(8-74)、(8-126)、(8-128)诸式求得。

既然方程(8-130)与(8-131)两式的左边是相同的, 因此若有非零解的话, 则这两个方程的右边必须相等, 即

$$\begin{aligned} \dot{q}_4^{(2)} - \frac{K_4}{K_2} \dot{q}_2^{(2)} + ik \left[F\varphi_4^{(1)} - \frac{K_4}{K_2} (q_2^{(1)} - F\varphi_2^{(1)}) \right] - \\ - G_4^{(3)} + \frac{K_4}{K_2} G_2^{(3)} = 0 \end{aligned} \quad (8-133)$$

由(8-116)与(8-76)两式可知, $\dot{q}_4^{(2)}$ 、 $\dot{q}_2^{(2)}$ 都与 \ddot{A} 成比例, 所以上述方程是有关 \ddot{A} 的方程。将 A 由(8-120)式表示为

$$A = R e^{i\theta}$$

(8-133)式中实部与虚部分别为零,得到如下两个有关 R 与 θ 的方程:

$$\ddot{R} = c_0^2 R - N_0 R(R^2 - R_0^2) + \frac{L}{R^3} \quad (8-134)$$

$$R^2 \dot{\theta} = L \quad (8-135)$$

这里 L 是个积分常数,而

$$c_0^2 = \frac{2k^2 \beta^2 F^2}{\alpha^4 (\alpha^2 + 2F)^2 U_{c1}} \frac{\Delta}{|\Delta|} \quad (8-136)$$

$$N_0 = \frac{k^2 m c_2}{8(F + 2m^2)(\alpha^2 + 2F)} \left\{ (2F - \alpha^2) \left[\alpha^2 + \frac{8m^2}{F + 2m^2} \frac{\tanh[(2F)^{\frac{1}{2}} y_2]}{\left(\frac{F}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] + 2m^2(2\alpha^2 - F) \right\} \quad (8-137)$$

这里 N_0 为已知常数。

将(8-134)式进行一次积分得到

$$\dot{R}^2 - (c_0^2 + N_0 R_0^2) R^2 + \frac{N_0}{2} R^4 - \frac{L}{R^2} = 2E \quad (8-138)$$

式中 E 为初始时刻($t = t_0$)的总能量,即

$$2E = \left(\frac{dR}{dT} \right)_0^2 + (c_0^2 + N_0 R_0^2) R_0^2 - \frac{N_0}{2} R_0^4 + \frac{L}{R_0^2} \quad (8-139)$$

方程(8-138)式可以写为

$$\frac{dR}{dT} = \left[\frac{N_0}{2} (R_{\max}^2 - R^2)(R^2 - R_{\min}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8-140)$$

这里 R_{\max} 与 R_{\min} 是对应于给定参数下, R 的最大值及最小值。这个方程的解可由雅可比椭圆函数 d_n 来表示。即

$$R(T) = R_{\max} d_n \left[\sqrt{\frac{N_0}{2}} R_{\max} (T - T_0) \right] \quad (8-141)$$

当 $R(T)$ 求得后, 将它代入 (8-135) 式, 对时间积分可求得位相角 θ 。

当 R, θ 求得后, 由 (8-120) 式便可确定

$$\varphi_2^{(1)}(T) = A(T)$$

由 (8-102) 或 (8-103) 式可求得 $\varphi_4^{(1)}(T)$ 。这样一来, 一阶的扰动振幅便已求得了。如要求出二阶、三阶的振幅函数, 则要计算更高阶的项。

(8-141) 式能给出一个特别有趣的结果, 即扰动与平均流场一起呈现周期性变化, 而在任何时刻保持总能量为常数。波的振幅 R 在 R_{\max} 与 R_{\min} 之间振动, 而 R_{\max} 与 R_{\min} 的大小依赖于初始值 R_0 。当 R 增大时, 扰动从平均气流中获得能量, 当 R 增大到超过平衡值 R_0 时, 则环境平均气流越来越稳定, 最后能量由扰动气流传送给平均气流, 以使 R 减小, 如图 8-1 所示。

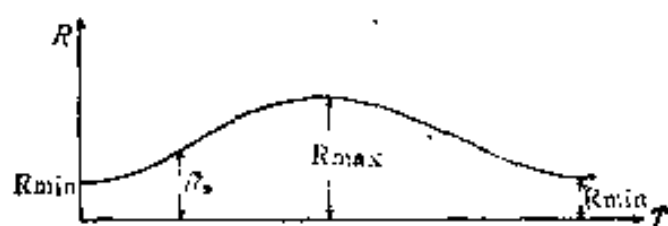


图 8-1 $R(T)$ 的周期性变化

五、具有 β 效应及有摩擦情况下的非线性解

1. 基本特征

具有 β 效应和有摩擦情况下的大气有如下一些基本特征:

$$\textcircled{1} \quad \beta \neq 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \gamma \text{ 很小} \quad (8-142)$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda = 2, \quad \text{即 } T = \eta^2 t \quad (8-143)$$

由 (8-59) 式可得

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad (8-144)$$

$$\textcircled{3} \quad \beta_* = \beta + \frac{i\gamma\alpha^2}{k}$$

为复数。

因此，小参数展开式的振幅方程(8-84)与(8-85)两式中的参数 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 应使用(8-82)式来计算，且在(8-84)与(8-85)两式中 $\lambda = 2$ 。

2. η 阶项

与无摩擦情况下相类似的推导，可得 η 阶项与(8-90)与(8-91)两式有相同的形式，即

$$K_1 \varphi_2^{(1)} + K_2 \varphi_4^{(1)} = 0$$

$$K_3 \varphi_2^{(1)} + K_4 \varphi_4^{(1)} = 0$$

只是这里的系数 K_1 、 K_4 是复数(因为 β_* 是复数)。因此一阶振幅的比值为

$$\gamma_a = \frac{\varphi_4^{(1)}}{\varphi_2^{(1)}} = -\frac{K_1}{K_2} = -\frac{K_3}{K_4}$$

也是复数；这表明 $\varphi_4^{(1)}$ 与 $\varphi_2^{(1)}$ 之间有位相差。当 γ 很小时，与(7-221)式相似的推导，可得临界垂直切变为

$$U_{cr} = \frac{2\beta F}{\alpha(2F - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha^2 + F)} < U_{c1} \quad (8-145)$$

相速为

$$c = U_4 + \frac{1}{2}U_{cr} = \frac{\beta}{\alpha^2 + F} \quad (8-146)$$

系数的比值

$$\gamma_a = \frac{\alpha^2 + F}{F} + \frac{\beta_* + U_{cr}F}{F(c - U_2)} \quad (8-147)$$

与无摩擦的情况相似， η 阶项只能求得两层扰动振幅间的比例，而不能求得扰动振幅的数值。要求得扰动振幅的数值，则必须计算高阶项。

3. η^2 阶项

① 随 x 变化部分的解

考虑(8-84)与(8-85)两式 η^2 项前面的系数，注意 $\lambda = 2$ ，可

得如下两个方程式:

$$K_1 \varphi_2^{(2)} + K_2 \varphi_4^{(2)} = \frac{i}{k} \{ (\alpha^2 + F) \dot{\varphi}_2^{(1)} - F \dot{\varphi}_4^{(1)} \} \quad (8-148)$$

$$K_3 \varphi_2^{(2)} + K_4 \varphi_4^{(2)} = \frac{i}{k} \{ (\alpha^2 + F) \dot{\varphi}_4^{(1)} - F \dot{\varphi}_2^{(1)} \} \quad (8-149)$$

将此两式用 K_2 及 K_4 相除并利用下列关系

$$\frac{\varphi_4^{(1)}}{\varphi_2^{(1)}} = \gamma_a = -\frac{K_1}{K_2} = -\frac{K_3}{K_4}$$

$$\dot{\varphi}_4^{(1)} = \gamma_a \dot{\varphi}_2^{(1)}$$

则得

$$\begin{aligned} \gamma_a \varphi_2^{(2)} - \varphi_4^{(2)} &= -\frac{i}{kK_2} (\alpha^2 + F - \gamma_a F) \dot{\varphi}_2^{(1)} = \\ &= \frac{i}{kF} \frac{\beta + FU_c}{(U_4 + U_c - c)^2} \dot{\varphi}_2^{(1)} \end{aligned} \quad (8-150)$$

$$\gamma_a \varphi_2^{(2)} - \varphi_4^{(2)} = -\frac{i\gamma_a^2}{kF} \frac{(\beta - FU_c)}{(U_4 - c)^2} \dot{\varphi}_2^{(1)} \quad (8-151)$$

既然两式左边相同,右边也必相等。可是在(8-150)式右边 $i\dot{\varphi}_2^{(1)}$ 的系数是实数,而在(8-151)式的右边 $i\dot{\varphi}_2^{(1)}$ 的系数有因子 r_a^2 ,所以是复数,因而只有在 $\dot{\varphi}_2^{(1)}$ 为零时这两式才能相同。但如两式右边均为零,则异于 $\varphi_2^{(1)}$ 及 $\varphi_4^{(1)}$ 的 $\varphi_2^{(2)}$ 及 $\varphi_4^{(2)}$ 解只有零解,所以必有

$$\varphi_2^{(2)} = \varphi_4^{(2)} = 0$$

② 平均扰动解

在(8-66)式中,令 $\lambda = 2$ 可得有摩擦存在时的平均扰动方程式:

$$\eta^2 \frac{\partial \overline{q_j}}{\partial T} + \gamma \frac{\partial^2 \overline{\psi_j}}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{\psi_{j+1} q_j'}, \quad j=2,4 \quad (8-152)$$

式中左边第一项至少是 η^3 阶的,因此上式的 η^2 阶项满足如下方

程式

$$\gamma \frac{d^2 \bar{\psi}_j^{(2)}}{dy^2} = - \frac{\partial}{\partial y} \overline{(\psi'_j q'_j)^{(2)}} = - F \frac{\partial}{\partial y} \overline{(\psi'_j \psi'_{6-j})^{(2)}} \quad (8-153)$$

上述方程满足边界条件的解为

$$\bar{\psi}_2^{(2)} = - \bar{\psi}_4^{(2)} = \frac{\alpha \gamma_{a i} |A|^2 F}{8 \gamma m} \left[\sin 2my - 2m \left(y - \frac{y_2}{2} \right) \right] \quad (8-154)$$

式中 $\gamma_{a i}$ 为 γ_a 的虚部, 即

$$\gamma_{a i} = \frac{\gamma \alpha^2}{k F (c - U_c)} \quad (8-155)$$

(8-154) 式中 A 还是未知函数, 要把它求出来, 必须要用 η^3 项。

4. η^3 阶项

考虑(8-84)与(8-85)两式的 η^3 阶部分, 与无摩擦的情况相似, 得出如下方程组:

$$\begin{aligned} K_1 \varphi_2^{(3)} + K_2 \varphi_4^{(3)} &= \frac{i}{k} \{ (\alpha^2 + F) \dot{\varphi}_2^{(1)} - F \dot{\varphi}_4^{(1)} \} - G_2^{(3)} + \\ &+ (\alpha^2 + F) \varphi_2^{(1)} - F \varphi_4^{(1)} - F \varphi_2^{(1)} \equiv M_2^{(3)} \end{aligned} \quad (8-156)$$

$$\begin{aligned} K_3 \varphi_2^{(3)} + K_4 \varphi_4^{(3)} &= \frac{i}{k} [(\alpha^2 + F) \dot{\varphi}_4^{(1)} - F \dot{\varphi}_2^{(1)} - G_4^{(3)}] + \\ &+ F \varphi_4^{(1)} \equiv M_4^{(3)} \end{aligned} \quad (8-157)$$

方程组(8-156)与(8-157)要有相容解的话, 下式必成立:

$$\frac{M_2^{(3)}}{K_2} = \frac{M_4^{(3)}}{K_4} \quad (8-158)$$

由上式可推出如下方程式:

$$\frac{dA}{dT} = A k \frac{\Delta}{|\Delta|} (\sigma_r + i \sigma_i) - A |A|^2 k^2 (N_r + i N_i) \quad (8-159)$$

这里

$$\sigma = \frac{\gamma_a F p_1 - (\alpha^2 - F \gamma_a) p_2}{[\gamma_a (\alpha^2 + F) - F] p_1 - [(\alpha^2 + F) - F \gamma_a] p_2} \quad (8-160)$$

$$N = \frac{3}{8} \frac{i \gamma_a F}{\gamma}$$

$$\frac{[\gamma_a (\alpha^2 - F) + F + \frac{4}{3} m^2] p_1 - [\alpha^2 - F - F \gamma_a - \frac{4}{3} m^2] p_2}{[\gamma_a (\alpha^2 + F) - F] p_1 - [(\alpha^2 + F) - F \gamma_a] p_2} \quad (8-161)$$

σ, N 都是复数, 它们的实部与虚部分别为 σ_r, N_r 与 σ_i, N_i , 即

$$\sigma = \sigma_r + i \sigma_i, \quad N = N_r + i N_i \quad (8-162)$$

(8-160) 与 (8-161) 两式中的 p_1, p_2 为

$$p_1 = -ik \frac{U_c}{2} - (\alpha^2 - F) - \gamma \alpha^2 \quad (8-163)$$

$$p_2 = ik \left[-\frac{U_c}{2} + \frac{\beta}{\alpha^2 + F} \right] F \quad (8-164)$$

(8-159) 式的共轭方程为 (A^* 为 A 的共轭复数),

$$\frac{dA^*}{dT} = A^* k \frac{\Delta}{|\Delta|} (\sigma_r - i \sigma_i) - A^* |A|^2 k^2 (N_r - i N_i) \quad (8-165)$$

将 A^* 乘 (8-159) 式, 加上 A 乘 (8-165) 式, 可得振幅的平方模方程:

$$\frac{d|A|^2}{dT} = 2|A|^2 (k \sigma_r - k^2 N_r |A|^2) \quad (8-166)$$

上式右边第一项能看为由线性理论计算的生长率。而第二项的系数 N_r 是确定波动具有有限振幅行为的常数。如果

$$N_r > 0$$

以及波动是线性不稳定的, 即

$$k \sigma_r > 0$$

则波动振幅不随 T 无限增大, 而单调地趋近于一个稳定值, 达到有限振幅。(8-166) 式的解为

$$|A|^2 = \frac{|A(0)|^2 e^{2k\sigma_r T}}{1 + \frac{kN_r}{\sigma_r} |A(0)|^2 (e^{2k\sigma_r T} - 1)} \quad (8-167)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, 则渐近解为

$$|A(\infty)|^2 = \frac{\sigma_r}{kN_r} \quad (8-168)$$

将 $|A(T)|^2$ 随时间 T 的变化画在图 8-2 中, 从图中可以看出, 当初始有个很小扰动时, 扰动振幅会不断增加。当 $T \rightarrow \infty$, $|A(T)|^2$ 趋近于上限 $\frac{\sigma_r}{kN_r}$ 。

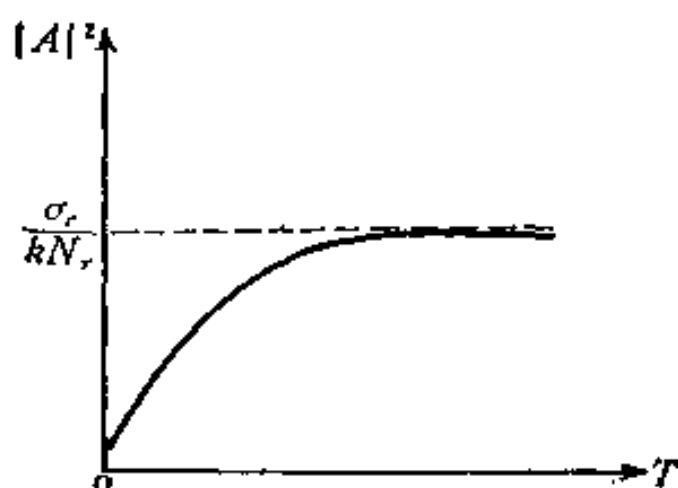


图 8-2 $|A(T)|^2$ 随时间的变化

六、一些简单讨论

在弱不稳定的条件下, 有无摩擦作用对非线性分析的影响是大不相同的。在无摩擦的情况下, 由(8-134)式可知, 振幅演变方程是时间的二阶常微分方程, 而扰动振幅在一个由初始条件所确定的数值附近振动, 即 $|A|$ 随时间呈周期性变化。在有摩擦的情况下, 衰减的时间尺度常为 $O(\gamma)$, 由此得到有摩擦的振幅演变方程(8-166)式是时间的一阶常微分方程, 它的解 $|A|$ 随时间不呈周期性变化, 而趋近一个稳定的数值。这种变化是许多有摩擦作用的不稳定非线性解所公有的。

参 考 文 献

- Kuo, H.L.(1961). *J. Fluid Mech.*, 10, 611-634.
_____(1973a). *Advances in Appl. Mech.*, 13,
248-330.
_____(1973b). *J. Atmos. Sci.*, 30, 969-983.
Lorenz, E. (1963). *J. Atmos. Sci.*, 20, 448-464.
Pcdlosky, J. (1970). *J. Atmos Sci.*, 27, 15-30.
_____(1971). *J. Atmos. Sci.*, 28, 587-597.
Pfeffer, R. L. and Y. Chiang (1967). *Mon. Wea.*
Rev., 94, 75-82.
Phillips, N. A. (1954). *Tellus*, 6, 273-286.
Romea, R. D. (1977). *J. Atmos. Sci.*, 34, 1689-
1695.
Stuart, J.T., and J. Watson (1960). *J. Fluid Mech.*,
9, 353-370, 371-389.

第九章 低纬度正压与斜压联合作用下的不稳定性波

我们在第七、八两章中介绍了准地转近似下大尺度扰动的动力不稳定性问题,并得出了线性与非线性的解。在讨论中,我们将正压性与斜压性区分开来,即只分析了纯正压流

$$U = U(y)$$

与纯斜压流

$$U = U(z)$$

的不稳定性问题及解。然而在真实大气中,正压性和斜压性通常是结合在一起的,即基本气流是 y 、 z 的函数。即

$$U = U(y, z)$$

本章利用二层原始方程模式,讨论在低纬度这两者联合作用对扰动不稳定性的影响,得到低纬度基本气流的不稳定性主要是由水平切变(正压性)引起的,而垂直切变(斜压性)对扰动结构有重要影响等等结论。

§1 二层模式下的控制方程组

一、一些基本假设

本章讨论低纬度二层模式下的大尺度扰动问题,因此对基本流场与扰动流场作如下一些假设:

- ① 无论是基本状态还是扰动,其压力总服从静力平衡。
- ② 基本流场符合准地转平衡。
- ③ 模式中上、下两层为均质不可压缩流体(见图 9-1),且为

静力稳定系统，即上层流体密度 ρ_1 小于下层流体密度：

$$\rho_1 < \rho_2 \quad (9-1)$$

④ 两层流体密度间的差异很小，即

$$\rho_2 - \rho_1 \ll \rho_1 \quad (9-2)$$

因此，除了计算上、下两层的密度差

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$$

外，我们均可近似将两层的密度 ρ_1 、 ρ_2 看成是相同的，用平均密度来代替，即

$$\rho_1 \doteq \rho_2 \doteq \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \rho \quad (9-3)$$

⑤ 两层流体的总厚度 H 变化很小，可作为常数。即

$$H = H_0 = \text{常数} \quad (9-4)$$

⑥ 扰动很小，能用线性化方程。

二、二层物理模型的数学描述

我们考虑如图 9-1 所示的两层均匀旋转流体，其旋转角速度为

$$\Omega = \frac{f}{2}$$

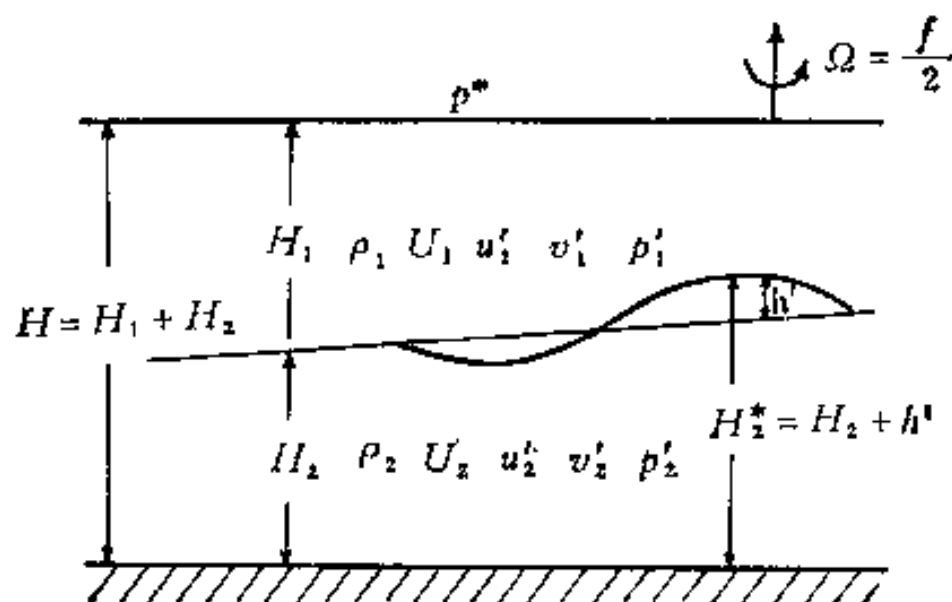


图 9-1 二层物理模型

上、下两层的物理量分别用标号 1、2 表之。这样，流场在垂直方向上的变化就用两层均质流体的差异来代表。

1. 基本状态

① 基本气流速度

基本气流速度可用

$$U_j = U_j(y), \quad j = 1, 2 \quad (9-5)$$

来描述，这里 U_1 、 U_2 仅是 y 的函数， U_1 与 U_2 的差异反映了基本气流速度的垂直分布。

② 基本压力场

图 9-1 中 H_1 、 H_2 分别为上、下两层流体的深度， H 为两层流体的总深度。即

$$H = H_1 + H_2 = \text{常数} \quad (9-6)$$

这里 H_1 与 H_2 仅是 y 的函数。图中 p^* 是上边界的气压。因此这两层流体的基本状态压力分布为

$$p_1 = p^* + g\rho_1(H - z) \quad H_2 \leq z \leq H \quad (9-7)$$

$$p = p^* + g\rho_1 H_1 + g\rho_2(H_2 - z) \quad 0 \leq z \leq H_2 \quad (9-8)$$

③ 基本流场的地转平衡关系

由假设②可知，基本流场符合如下地转平衡关系：

$$f U_j = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial y}, \quad j = 1, 2 \quad (9-9)$$

将(9-7)与(9-8)两式代入(9-9)式，并注意 z 是与 y 无关的变量，可得

$$\frac{dp^*}{dy} + g\rho_1 \frac{dH}{dy} = -f\rho_1 U_1 \quad (9-10)$$

$$g(\rho_2 - \rho_1) \frac{dH_2}{dy} = f(\rho_1 U_1 - \rho_2 U_2) \quad (9-11)$$

根据(9-4)式，可将(9-10)式写为：

$$\frac{dp^*}{dy} = -f\rho_1 U_1 \quad (9-12)$$

由(9-3)式, 可将(9-11)式写为:

$$g(\rho_2 - \rho_1) \cdot \frac{dH_2}{dy} = f\rho(U_1 - U_2) \quad (9-13)$$

2. 扰动状态

各层的扰动速度为

$$\begin{cases} u'_j = u'_j(x, y, z) \\ v'_j = v'_j(x, y, z) \\ w'_j = w'_j(x, y, z) \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (9-14)$$

扰动压力为

$$p'_j = p'_j(x, y, z) \quad j = 1, 2 \quad (9-15)$$

由于流场扰动, 上、下两层间的界面发生了波动(见图 9-1), 则扰动后的内界面为

$$H_2^* = H_2 + h' \quad (9-16)$$

3. 内界面上压力的连续性

在上、下两层间的内界面上, 总压力

$$p_1 = \bar{p}_1 + p'_1 = p^* + g\rho_1(H - z) \quad H_1^* \leq z \leq H \quad (9-17)$$

$$p_2 = \bar{p}_2 + p'_2 = p^* + g\rho_1(H - H_2^*) + g\rho_2(H_2^* - z) \quad 0 \leq z \leq H_2^* \quad (9-18)$$

必须连续。因为压力若不连续, 在内界面上会产生无限大的速度变化, 这是不可能的。

内界面($z = H_2^*$)上压力连续性可由下式表示

$$p_1 = p_2, \quad \text{当 } z = H_2^* \quad (9-19)$$

将(9-17)与(9-18)两式代入(9-19)式, 并利用(9-7)与(9-8)两式可得

$$p'_2 - p'_1 = g(\rho_2 - \rho_1)h' \quad (9-20)$$

由(9-7)、(9-8)、(9-17)、(9-18)还可得到

$$\frac{\partial p'_j}{\partial z} = 0, \quad \text{即 } p'_j = p'_j(x, y) \quad (9-21)$$

三、控制方程组

由于本章讨论低纬度扰动不稳定性问题，不能采用准地转近似，因此与前两章不同，并不采用准地转位涡方程，而直接从运动方程出发建立控制方程组。

线性化的运动方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x} \right) u'_j - f^* v'_j = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_j}{\partial x} \quad j=1, 2 \quad (9-22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x} \right) v'_j + f u'_j = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_j}{\partial y} \quad j=1, 2 \quad (9-23)$$

式中

$$f = \beta y, \quad f^* = f - \frac{\partial U_j}{\partial y} \quad (9-24)$$

注意在(9-22)与(9-23)两式中，对密度已采用了(9-3)式的近似。

由假设③可知，上、下两层均为不可压缩流体，所以连续方程为

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x} + \frac{\partial v'_j}{\partial y} + \frac{\partial w'_j}{\partial z} = 0 \quad (9-25)$$

在运动方程(9-22)、(9-23)式与连续方程(9-25)式中总共有 8 个变量 u'_j, v'_j, w'_j, p'_j ($j=1, 2$)，而方程只有 6 个，所以必须消去两个变量才能得到闭合方程组。我们利用内界面垂直速度的两种表示来消去 w'_j 。

由(9-20)式可知，扰动压力 p'_1, p'_2 不随高度变化，则由(9-22)与(9-23)两式可知，扰动速度 u'_j, v'_j 也不随高度面变。即

$$\frac{\partial u'_j}{\partial z} = \frac{\partial v'_j}{\partial z} = 0 \quad (9-26)$$

上式是指在同一层内，扰动速度不随高度变化，而从一层到另一层扰动速度还是要变的，因为 u'_1 与 u'_2, v'_1, v'_2 是 x, y 的不同函数。

利用(9-26)式的结论, 将连续方程(9-25)式对 z 进行积分得到

$$w'_j(z) = -[u'_{jx} + v'_{jy}](z - z_{0j}) \quad z_{01} = H, \quad z_{02} = 0 \quad (9-27)$$

式中下标 x 、 y 表示对 x 、 y 的偏微分。

在上式中, 令 $z = H_2^*$, 可得内界面上扰动垂直速度:

$$w'_j(H_2^*) = -(u'_{jx} + v'_{jy})D_j \quad (9-28)$$

这里

$$D_2 = H_2^* - H_2, \quad D_1 = H_2 - H = -H_1 \quad (9-29)$$

内界面扰动垂直速度的定义为

$$w'_j(H_2^*) \equiv \left(\frac{dH_2^*}{dt} \right)_j \quad (9-30)$$

将(9-16)式代入上式得到

$$w'_j(H_2^*) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x} \right) h' + v'_j \frac{dH_2}{dy} \quad (9-31)$$

将(9-20)式代入上式得到

$$w'_j(H_2^*) = \frac{1}{g(\rho_2 - \rho_1)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x} \right) (p'_2 - p'_1) + v'_j \frac{dH_2}{dy} \quad (9-32)$$

(9-28)与(9-32)两式右边必然相等, 则得

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(\rho_2 - \rho_1)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x} \right) (p'_2 - p'_1) + v'_j \frac{dH_2}{dy} + \\ + D_j(u'_{jx} + v'_{jy}) = 0, \quad D_1 = -H_1, \quad D_2 = H_2 \end{aligned} \quad (9-33)$$

上式中 H_1 、 H_2 是属于基本状态的量, 我们可根据已知的基本流场 U_1 、 U_2 , 利用(9-13)式求出 H_2 , 再利用(9-6)式求出 H_1 。因此我们可将 H_1 与 H_2 看为是 y 的已知函数。这样, (9-22)、(9-23)、(9-33)所示的六个方程中所含的未知函数数目正好是 6 个, 即 u'_j 、 v'_j 、 p'_j , 它们便组成闭合的控制方程组。

§ 2 波动振幅方程与边界条件

一、无量纲变量

我们用 L 表示变化的水平尺度, U_0 表示水平速度的特征尺度, ρU_0^2 表示压力的特征尺度。由下式可将变量无量纲化

$$\begin{cases} (x', y') = L(x, y) \\ (u'_j, v'_j, U'_j, c') = U_0(u_j, v_j, U_j, c) \\ p'_j = \rho_0 U_0^2 \varphi_j \quad j=1, 2 \end{cases} \quad (9-34)$$

式中左边为有量纲变量, 右边为无量纲变量。

二、波动振幅方程

令扰动 u'_j, v'_j, p'_j 有如下形式的波动解:

$$(u'_j, v'_j, p'_j) = U_0(u_j, iv_j, \rho U_0 \varphi_j) \exp[ik(x - ct)] \quad (9-35)$$

将它代入控制方程组(9-22)、(9-23)、(9-33)三式可得:

$$\sigma_j u_j - f_j^* v_j = -k \varphi_j \quad (9-36)$$

$$\sigma_j v_j - f u_j = \varphi_{jy} \quad (9-37)$$

$$\lambda_j \sigma_j (\varphi_j - \varphi_{3-j}) + L_j v_j + k u_j + v_{jy} = 0 \quad (9-38)$$

式中

$$\begin{cases} \sigma_j = k(U_j - c), \\ \lambda_j = \frac{\rho U_0^2}{g(\rho_2 - \rho_1) |D_j|} \\ L_j = -f \lambda_j (U_j - U_{3-j}) \\ f = \beta y, \quad f_j^* = f - U_j v \\ \beta = \frac{L^2}{U_0} \beta' \end{cases} \quad (9-39)$$

这里 σ_j 常称为多普勒相移频率, β 为无量纲罗斯贝系数。

由(9-36)与(9-37)两式可解出

$$u_j = \frac{1}{F_j} (k\sigma_j \varphi_j - f_j^* \varphi_{jv}) \quad (9-40)$$

$$v_j = \frac{1}{F_j} (kf \varphi_j - \sigma_j \varphi_{jv}) \quad (9-41)$$

这里

$$F_j = f f_j^* - \sigma_j^2 \quad (9-42)$$

将(9-40)与(9-41)两式代入(9-38)式, 可得关于无量纲压力扰动振幅 φ_j 的方程

$$\begin{aligned} \varphi_{jvv} + \left(L_j - \frac{F_{jv}}{F_j} \right) \varphi_{jv} - \\ - \left\{ k^2 + \frac{k}{\sigma_j} \left[\beta + f \left(L_j - \frac{F_{jv}}{F_j} \right) \right] \right\} \varphi_j - \lambda_j F_j (\varphi_j - \varphi_{j-1}) = 0 \end{aligned} \quad (9-43)$$

若令

$$\begin{cases} D_1^{(j)} = L_j - \frac{F_{jv}}{F_j} \\ D_2^{(j)} = -k^2 - \frac{k}{\sigma_j} \left[\beta + f \left(L_j - \frac{F_{jv}}{F_j} \right) \right] - \lambda_j F_j \\ D_3^{(j)} = -\lambda_j F_j \end{cases} \quad (9-44)$$

则(9-43)式便为

$$\varphi_{jvv} + D_1^{(j)} \varphi_{jv} + D_2^{(j)} \varphi_j - D_3^{(j)} \varphi_{j-1} = 0 \quad (9-45)$$

三、边界条件

我们介绍两套边界条件:

1. 远离赤道的切变流

① 常用条件

$$\varphi_{jv}(0) = 0 \quad (9-46)$$

或赤道对称条件

$$\varphi_j(0) = 0 \quad (9-47)$$

② 渐近条件

$$\varphi_{jv}(y_N) = -a \varphi_j(y_N), \quad a > 0, \quad y_N \text{ 很大} \quad (9-48)$$

2. 在赤道上的急流与切变流

① 常用条件

$$v_j(0) = 0, \quad \text{或} \quad \frac{dv_j}{dy} = 0, \quad \text{当} \quad y = 0 \quad (9-49)$$

② 渐近条件

$$v_j = v_j(y_N) e^{-a(y-y_N)}, \quad \text{当} \quad y \geq y_N, \quad (a > 0) \quad (9-50)$$

§ 3 双层二阶方程的特征值问题

一、微分方程的有限差分近似

直接求解二阶常微分方程(9-45)式在(9-46)~(9-50)式中选择合适边界条件下的特征值问题, 是比较困难的。我们可用类似于第七章 § 7 中介绍的迭代-还原方法, 来求得特征值 c 。由于这里涉及两个二阶常微分方程, 比起(7-250)式来要复杂一些, 但原理是相同的。我们先把(9-45)式化成二阶差分方程。

为使符号表达清楚起见, 我们将表示层次的下标 j 放到字母的右上角, 变为上标, 这样可把(9-45)式写为

$$\varphi_{yy}^{(j)} + D_1^{(j)} \varphi_y^{(j)} + D_2^{(j)} \varphi^{(j)} - D_3^{(j)} \varphi^{(j+1)} = 0 \quad j=1, 2 \quad (9-51)$$

并在 $y=0$ 与 $y=y_N$ 之间采用步长为 δ 的 $(N-2)$ 个等距格点。即

$$y_l = (l-2)\delta, \quad \text{或} \quad \eta_l = y_N - y(l) = (l-2)\delta, \quad l=2, 3, \dots, N \quad (9-52)$$

将(9-51)写成如下差分形式

$$A_l^{(j)} \varphi_{l+1}^{(j)} + B_l^{(j)} \varphi_l^{(j)} + C_l^{(j)} \varphi_{l-1}^{(j)} - \beta_l^{(j)} \varphi_{l+1}^{(j+1)} = 0 \quad (9-53)$$

这里下标 l 表示第 l 个格点上的值。式中的系数 $A_i^{(j)}$ 、 $B_i^{(j)}$ 、 $C_i^{(j)}$ 、 $\beta_i^{(j)}$ 都可由 $D_1^{(j)}$ 、 $D_2^{(j)}$ 、 $D_3^{(j)}$ 表示出来。如：

$$A_i^{(j)} = 1 + D_1^{(j)} \frac{\delta}{2}, \quad C_i^{(j)} = 1 - D_1^{(j)} \frac{\delta}{2} \quad \dots \quad (9-54)$$

二、迭代-还原解法

1. 系数迭代公式

令(9-53)式的解有如下的形式

$$\varphi_i^{(j)} = E_i^{(j)} \varphi_{i+1}^{(j)} + \alpha_i^{(j)} \varphi_{i+1}^{(j-1)} \quad (9-55)$$

式中的系数 $E_i^{(j)}$ 与 $\alpha_i^{(j)}$ 是使 $\varphi_i^{(j)}$ 为(9-53)式的解。如此式对任一 l 值均适用，则必有

$$\varphi_{i-1}^{(j)} = E_{i-1}^{(j)} \varphi_i^{(j)} + \alpha_{i-1}^{(j)} \varphi_i^{(j-1)} \quad (9-56)$$

将此式在 $j = 1$ 及 $j = 2$ 时所给的 $\varphi_{i-1}^{(j)}$ 代入相应的方程(9-53)式中，则得下列只含 $\varphi_i^{(1)}$ 、 $\varphi_{i+1}^{(1)}$ 及 $\varphi_{i+1}^{(2)}$ 的两个齐次方程

$$\overline{B}_i^{(1)} \varphi_i^{(1)} + \overline{\beta}_i^{(1)} \varphi_{i+1}^{(2)} = A_i^{(1)} \varphi_{i+1}^{(1)}$$

$$\overline{\beta}_i^{(2)} \varphi_i^{(1)} + \overline{B}_i^{(2)} \varphi_{i+1}^{(2)} = A_i^{(2)} \varphi_{i+1}^{(1)}$$

由此两式求 $\varphi_i^{(1)}$ 及 $\varphi_{i+1}^{(2)}$ 的解，并用(9-55)形式表出则得：

$$E_i^{(j)} = \frac{A_i^{(j)} \overline{B}_i^{(j-1)}}{M_i} \quad (9-57)$$

$$\alpha_i^{(j)} = - \frac{A_i^{(j-1)} \overline{\beta}_i^{(j)}}{M_i} \quad (9-58)$$

这里

$$\overline{B}_i^{(j)} = B_i^{(j)} - C_i^{(j)} E_{i-1}^{(j)} \quad (9-59)$$

$$\overline{\beta}_i^{(j)} = \beta_i^{(j)} - C_i^{(j)} \alpha_{i-1}^{(j)} \quad (9-60)$$

$$M_i = \overline{B}_i^{(1)} \overline{B}_i^{(2)} - \overline{\beta}_i^{(1)} \overline{\beta}_i^{(2)} \quad (9-61)$$

从(9-59)与(9-60)两式中可以看出，(9-57)、(9-58)两式中的 $\overline{B}_i^{(j-1)}$ 与 $\overline{\beta}_i^{(j)}$ 中是含第 $(l-1)$ 个格点上的值 $E_{i-1}^{(j-1)}$ 与 $\alpha_{i-1}^{(j-1)}$ ，所以(9-57)~(9-61)组成了系数 $E_i^{(j)}$ 、 $\alpha_i^{(j)}$ 的迭代公式。

2. 利用边界条件确定 $E_2^{(j)}$ 、 $\alpha_2^{(j)}$ 及特征值 c

根据边界条件及方程 (9-53) 便可把系数 $E_2^{(j)}$ 与 $\alpha_2^{(j)}$ 求出来。如采用 (9-47) 式所示的边界条件, 即

$$\varphi^{(j)} = 0, \quad \text{当 } y = 0 \quad (9-62)$$

由 (9-52) 式可知, $y = 0$ 相当于 $l = 2$, 我们可很容易得到

$$E_2^{(j)} = 0, \quad \alpha_2^{(j)} = 0 \quad (9-63)$$

由 (9-59) 与 (9-60) 两式可求出 $\overline{B}_3^{(j)}$, $\overline{\beta}_3^{(j)}$, 代入 (9-61) 式可求得 M_3 , 再将 $\overline{B}_3^{(j)}$, $\overline{\beta}_3^{(j)}$, M_3 代入 (9-57)、(9-58) 两式可得 $E_3^{(j)}$ 、 $\alpha_3^{(j)}$, 再重复这个过程可得出 $E_4^{(j)}$, $\alpha_4^{(j)}$, $E_5^{(j)}$, $\alpha_5^{(j)}$, …… 以至 $E_N^{(j)}$, $\alpha_N^{(j)}$ 。对于其他边界条件也有同样情况。

除在 $y = 0$ 的边界条件外, 方程 (9-53) 式的解还需满足 $y = y_N$ 的渐近边界条件 (9-48) 式或 (9-50) 式。以 (9-48) 式为例并求出它的积分, 乃得

$$\varphi_{N+1}^{(j)} = \varphi_{N-1}^{(j)} - 2a \delta \varphi_N^{(j)} \quad (9-64)$$

代入 $l = N$ 时的 (9-53) 式, 并因有

$$A_1^{(j)} + C_1^{(j)} = 2$$

存在, 因而得到

$$2\varphi_{N-1}^{(1)} = (B_N^{(1)} + 2a \delta A_N^{(1)})\varphi_N^{(1)} + \beta_N^{(1)} \varphi_N^{(2)} \quad (9-65)$$

$$2\varphi_{N-1}^{(2)} = (B_N^{(2)} + 2a \delta A_N^{(2)})\varphi_N^{(2)} + \beta_N^{(2)} \varphi_N^{(1)} \quad (9-66)$$

由 (9-56) 式并可得到

$$\varphi_{N-1}^{(1)} = E_{N-1}^{(1)} \varphi_N^{(1)} + \alpha_{N-1}^{(1)} \varphi_N^{(2)} \quad (9-67)$$

$$\varphi_{N-1}^{(2)} = E_{N-1}^{(2)} \varphi_N^{(2)} + \alpha_{N-1}^{(2)} \varphi_N^{(1)} \quad (9-68)$$

在 (9-65) ~ (9-68) 这四个式子中, 消去 $\varphi_{N-1}^{(1)}$ 与 $\varphi_{N-1}^{(2)}$ 可得

$$\frac{\varphi_N^{(2)}}{\varphi_N^{(1)}} = - \frac{B_N^{(1)} - 2E_{N-1}^{(1)} + 2a \delta A_N^{(1)}}{\beta_N^{(1)} - 2\alpha_{N-1}^{(1)}} \quad (9-69)$$

$$\frac{\varphi_N^{(2)}}{\varphi_N^{(1)}} = - \frac{\beta_N^{(2)} - 2\alpha_{N-1}^{(2)}}{B_N^{(2)} - 2E_{N-1}^{(2)} + 2a \delta A_N^{(2)}} \quad (9-70)$$

将这两式相减得到

$$G(c) = \frac{[\beta_N^{(1)} - 2\alpha_{N-1}^{(1)}][\beta_N^{(2)} - 2\alpha_{N-1}^{(2)}]}{[B_N^{(1)} - 2E_{N-1}^{(1)} + 2a\delta A_N^{(1)}][B_N^{(2)} - 2E_{N-1}^{(2)} + 2a\delta A_N^{(2)}]} - 1 \quad (9-71)$$

采用由(7-323)~(7-325)诸式所示的订正步骤,可求得满足远离赤道的边界条件(9-47)、(9-48)式,或在赤道附近的边界条件(9-49)、(9-50)两式的特征值 c 来。

§ 4 切变流产生的不稳定性波

一、切变线的廓线方程

沿赤道辐合带切变流平均流场的风速廓线方程可写为:

$$U_j = U_{j0} \tanh(y - y_0) + 0.5U_j^* \quad (9-72)$$

这里 U_{j0} 、 U_j^* 与 y_0 都是常数, y_0 为切变流中心的纬度。式中第一项表示每一层中在 y 方向上的切变廓线。对于同一层来讲,这一项表示正压部分,而将两层统一来考虑,则该项既包括正压部分,又包括斜压部分。最后一项 $0.5U^*$, 或表示恒定流(若 $U_1^* = U_2^*$); 或表示垂直方向上的恒定切变(若 $U_1^* \neq U_2^*$), 即表示纯斜压气流。

二、准正压流的不稳定性波

1. 准正压流的特征

我们把平均垂直切变为零,两层中有相反水平切变的基本气流称为准正压流。它的特征由下式所示:

$$U_1^* = U_2^* = 0, U_{10} = 1, U_{20} = -1 \quad (9-73)$$

图 9-2 给出了这两层的水平风速廓线,从图中可以看出,从上、下两层来看是斜压的,从南北方向来看是正压的。

2. 不稳定性波的特征

利用本章 § 3 介绍的迭代-还原方法,可求得特征值与特征函

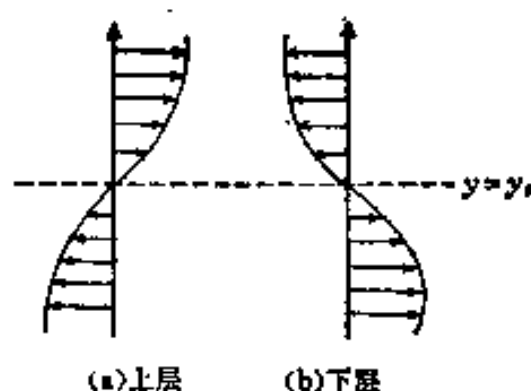


图 9-2 上、下两层具有相反水平切变的风速廓线

数，由此可得到不稳定性波有如下一些特征：

① 上层流体中产生的不稳定性波的结构与特征，接近于第七章 § 3 中介绍的纯正压流模型的结果。

② 下层流体 v_2 与上层流体的 v_1 有 180° 的位相差。上层有向北的扰动，下层则有向南的扰动；上层有向南的扰动，则下层有向北的扰动。 u_2 的位相与 u_1 相接近。

③ 下层流体气压扰动振幅 φ_2 有如下特征：

$$|\varphi_2| = 1.1 |\varphi_1| \quad \text{当 } R_i = 7.2 \text{ (层结不太稳定)}$$

$$|\varphi_2| = 0.8 |\varphi_1| \quad \text{当 } R_i = 72 \text{ (层结稳定)} \quad (9-74)$$

三、真实斜压切变流的不稳定性波

1. 真实斜压切变流的特征

这种形式的切变流有如下一些特征：

① 具有平均垂直切变，即

$$U_1^* = -U_2^* = 1 \quad (9-75)$$

② 两层中有相反的水平切变，即

$$U_{10} = -U_{20} = 1 \quad (9-76)$$

上、下两层基本流场的水平廓线也由图 9-2 所示。

我们利用这种形式的切变流来说明正压与斜压的联合作用。

2. 不稳定性波的特征

在这种形式的切变流中，根据本章 § 3 的方法求得特征值 c ，可得不稳定性波有如下一些主要特征（见图 9-3）：

① 当切变带中心的纬度

$$y_0 < 15^\circ$$

时，平均垂直切变对系统不稳定性级别的影响很小。

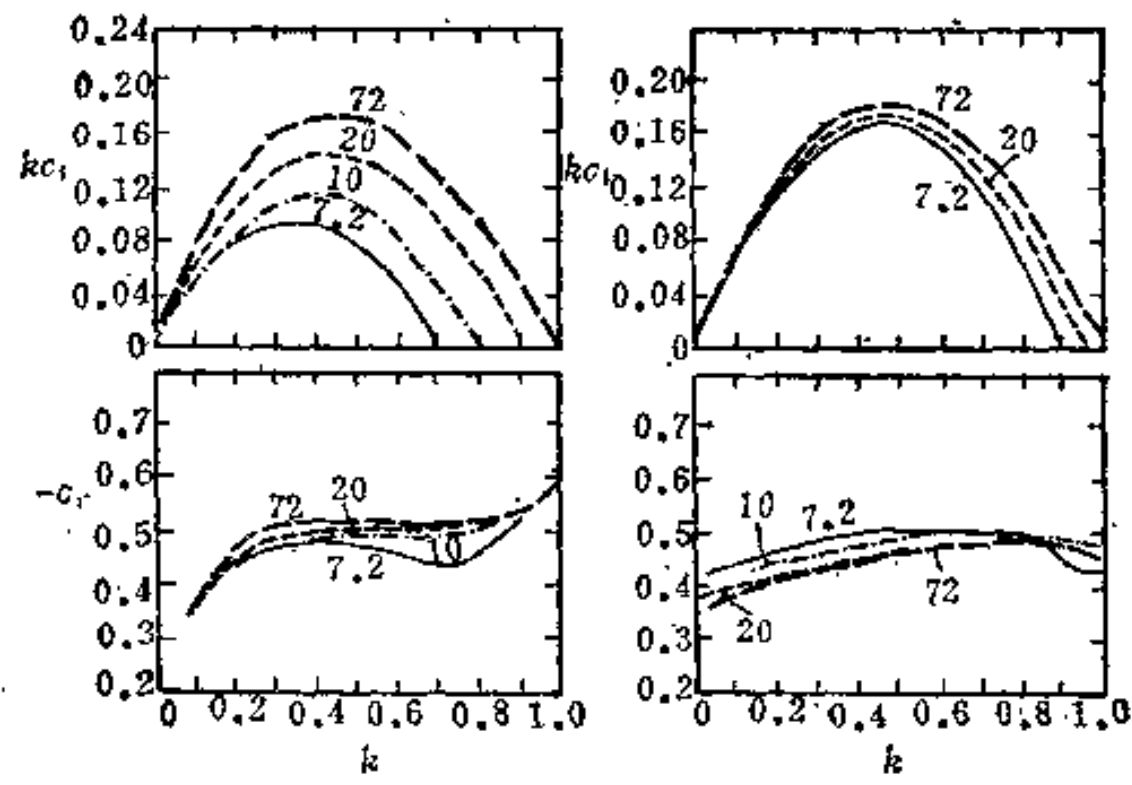
② 平均垂直切变对扰动垂直结构有显著的影响。当斜压性很

大(即 U^* 值很大)时,波动产生分离现象,扰动将分成两个波群传播。即

(a) 上层流体(当 $U_1^* = 1$)中,主要是向东传播的波群,生长率 kc_i 随理查逊数 R_i 的变化很小。

(b) 下层流体(当 $U_2^* = -1$)中,主要是向西传播的波群,生长率 kc_i 随 R_i 的增加而增大。

这种上、下两层扰动分群的结果由图 9-3 所示。



(a) 向西传播的扰动 (b) 向东传播的扰动

图 9-3 非地转斜压扰动的特征值

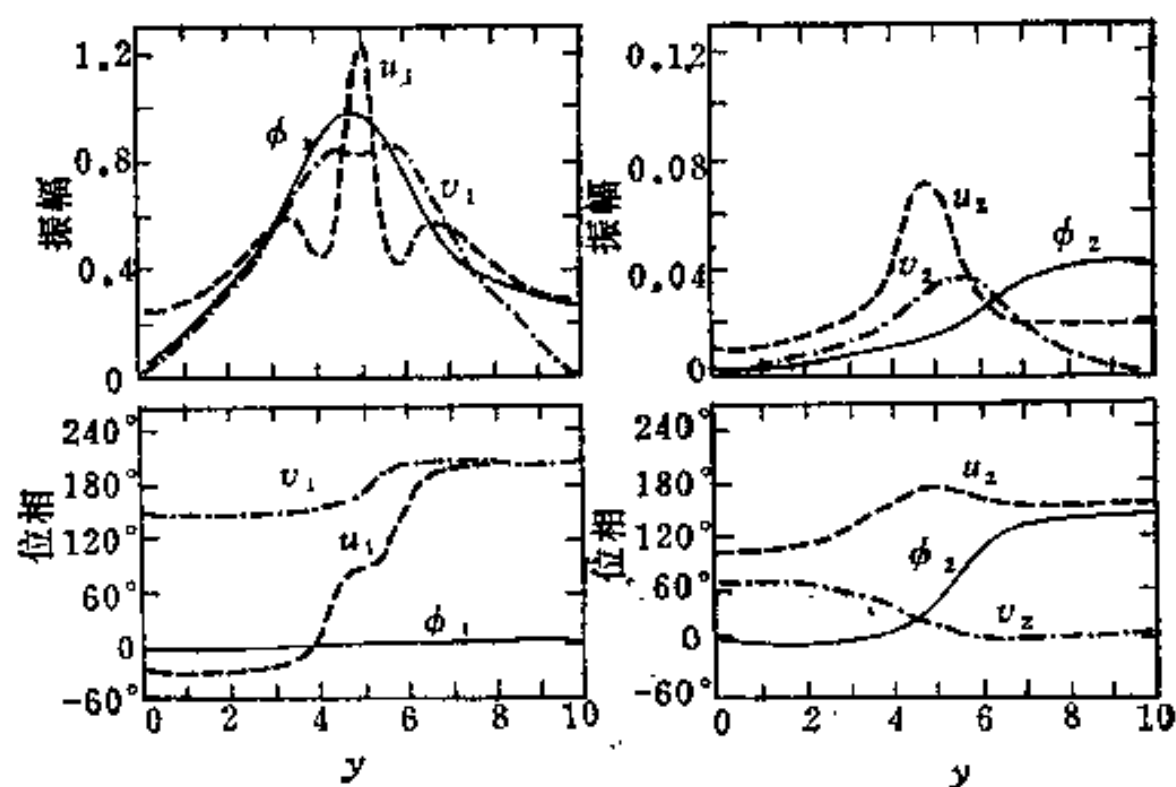
③ U_{10} 与 U_2^* 的数值能影响不稳定性波的性质。当 U_2^* 减小时,所得解接近正压解;当减小 U_{10} 或 U_{20} 时,会使扰动集中在—层流体内。

3. 不稳定性波的特征函数

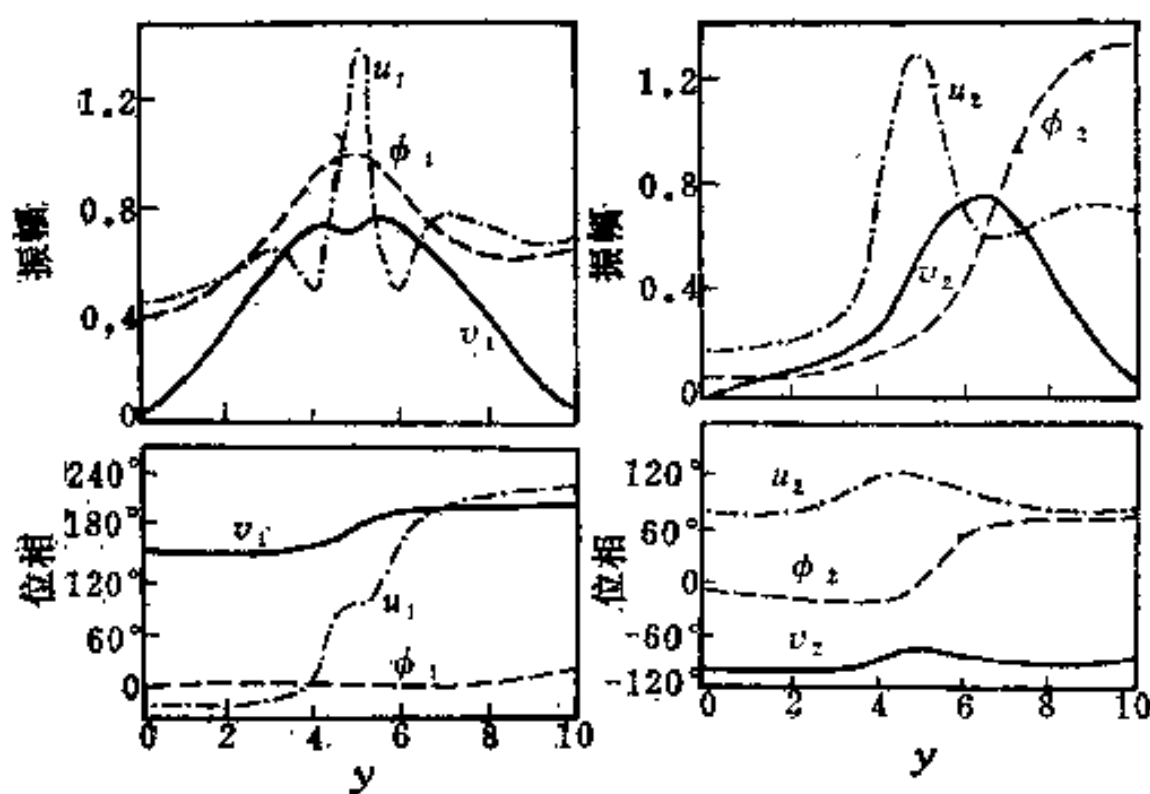
我们在

$$v_1(2y_0) = v_2(2y_0)$$

的条件下,计算了在 $k = 0.5$, R_i 分别为 7.2 与 72 时的最不稳定性向东传播扰动特征函数,计算结果由图 9-4 所示。



(a) $R_i = 72$



(b) $R_i = 7.2$

图 9-4 当 $\beta = 0.022$, $k = 0.5$, $U^* = 1$ 时, 最不稳定的向东传播非地转扰动的特征函数

从图中可以看出如下一些结果:

① 在两种 R_i 的数值下, 上层流体中的扰动都非常接近于正压情况。

② 上层流体受层结稳定度的影响较小。

③ 当层结稳定(即 $R_i = 72$)时, 下层流体中扰动很微弱; 当层结不太稳定($R_i = 7.2$)时, 它可与上层流体中的扰动相比拟。这现象在向东传播的波动中更为明显。

§ 5 急流产生的不稳定性波

一、急流的廓线方程

沿赤道辐合带急流平均流场的风速廓线方程为:

$$U_j = U_{j0} \operatorname{sech}^2(y - y_0) + 0.5U_j^* \quad (9-77)$$

这里 U_{j0} 、 U_j^* 与 y_0 都为常数。上式中各项的物理意义与切变流相似。

由于(9-77)式中 U_j^* 对不稳定性波的作用与切变流是相同的, 即使扰动分离, 这里我们就不再重复了。因此在下面讨论中将 U_j^* 看为零。

二、急流的分型

根据(9-77)式中参数取值的不同, 我们将急流分为如下几个型:

1. 正压东风急流

其特征由下式描述:

$$U_{10} = U_{20} = -1 \quad (9-78)$$

这种急流还可分为如下两类:

① 无辐散型

这类的特征是上、下两层经向扰动速度无位相差, 即

$$v_1 = v_2 \quad (9-79)$$

② 辐散型

这型的特征是上、下两层经向扰动速度有位相差，即

$$R_{i1} v_1 = -R_{i2} v_2 \quad (9-80)$$

2. 斜压急流

其特征由下式描述：

$$U_{10} = 1, U_{20} = -1 \quad (9-81)$$

三、不稳定性波的特征值与特征函数

我们在

$$U^* = 0, \beta = -1, R_i = 10 \quad (9-82)$$

与赤道对称边界条件

$$\varphi_f(0) = 0 \quad (9-83)$$

下计算了辐散正压型与斜压型急流不稳定性波的特征值 c 。

利用(9-82)式与分别在渐近边界条件

$$v = v_N \exp[a(y_N - y)] \quad \text{当 } y \geq y_N \quad (9-84)$$

与条件

$$v(y_N) = 0 \quad (9-85)$$

下计算了无辐散正压型急流不稳定性波的特征值 c 。

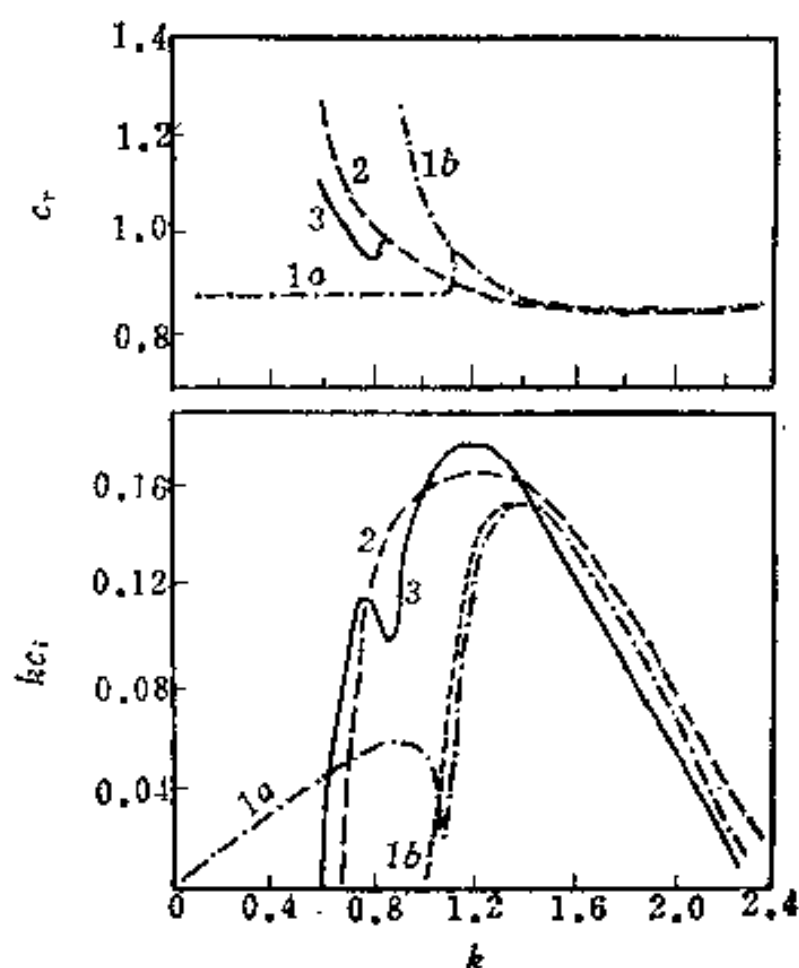
在求得特征值后，又计算了特征函数，计算结果画成图 9-5 与图 9-6。

在图 9-5 中，曲线 1 a，是根据(9-84)式所示的渐近边界条件得出的，而曲线 1 b 是根据条件(9-85)式得出。

图 9-6 (a) 为正压扰动与下层斜压扰动经向速度的振幅与位相；图 9-6 (b) 为上层东风急流、下层西风急流时，上层斜压扰动 u_1 与 v_1 的振幅与位相。图中振幅用实曲线表示，位相用虚曲线表示。

从图 9-5 与图 9-6 可得到如下一些结论：

① 辐散正压型与斜压型急流不稳定性波的生长率可与无辐



① 无辐散正压型；② 辐散正压型；③ 斜压型

图 9-5 急流不稳定性波的特征值

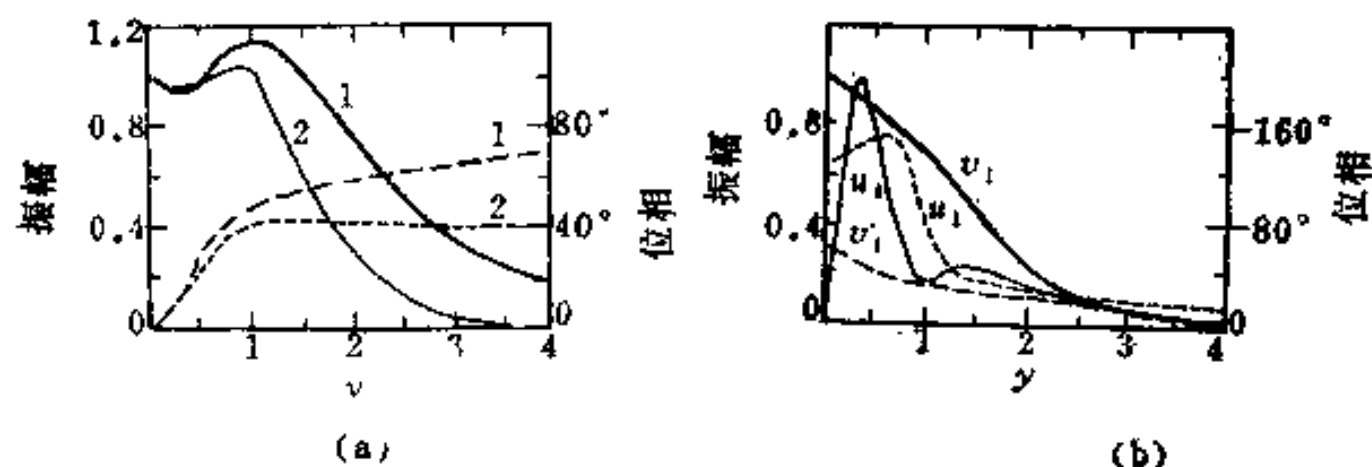


图 9-6 特征函数

散正压型相比拟，但由于辐散与非地转性的作用，使这两个型的最大增长率变得更大，而极大值的位置趋于较小的 k 值。

② 斜压性对增长率的影响相对来说比较小。

③ 在赤道对称条件下，无论下层是正压气流还是斜压气流，

v_y 在赤道有次极大值, 在离赤道稍远的地方有最大值。对于斜压流来说, 上层 v_1 的最大值在赤道。

四、急流位置对不稳定性的影响

由于在扰动振幅方程(9-43)式中包含柯氏参数 f , 所以急流不稳定性的级别应与急流中心的纬度有关。为了研究急流位置对不稳定性的影响, 我们计算了急流中心取不同纬度的生长率 $k c_i$ 与相速 c_r 随波数 k 的分布曲线, 由图 9-7~图 9-9 所示。

从这三张图中可得出如下三个基本结论:

- ① 当 $y_0 = 8^\circ$ 时, 可得最不稳定波;
- ② 当 y_0 减小时, 最不稳定波的波长 L_m 增大;
- ③ 波长很长与很短的波具有不同的特性(从图 9-9 中可清楚看出)。

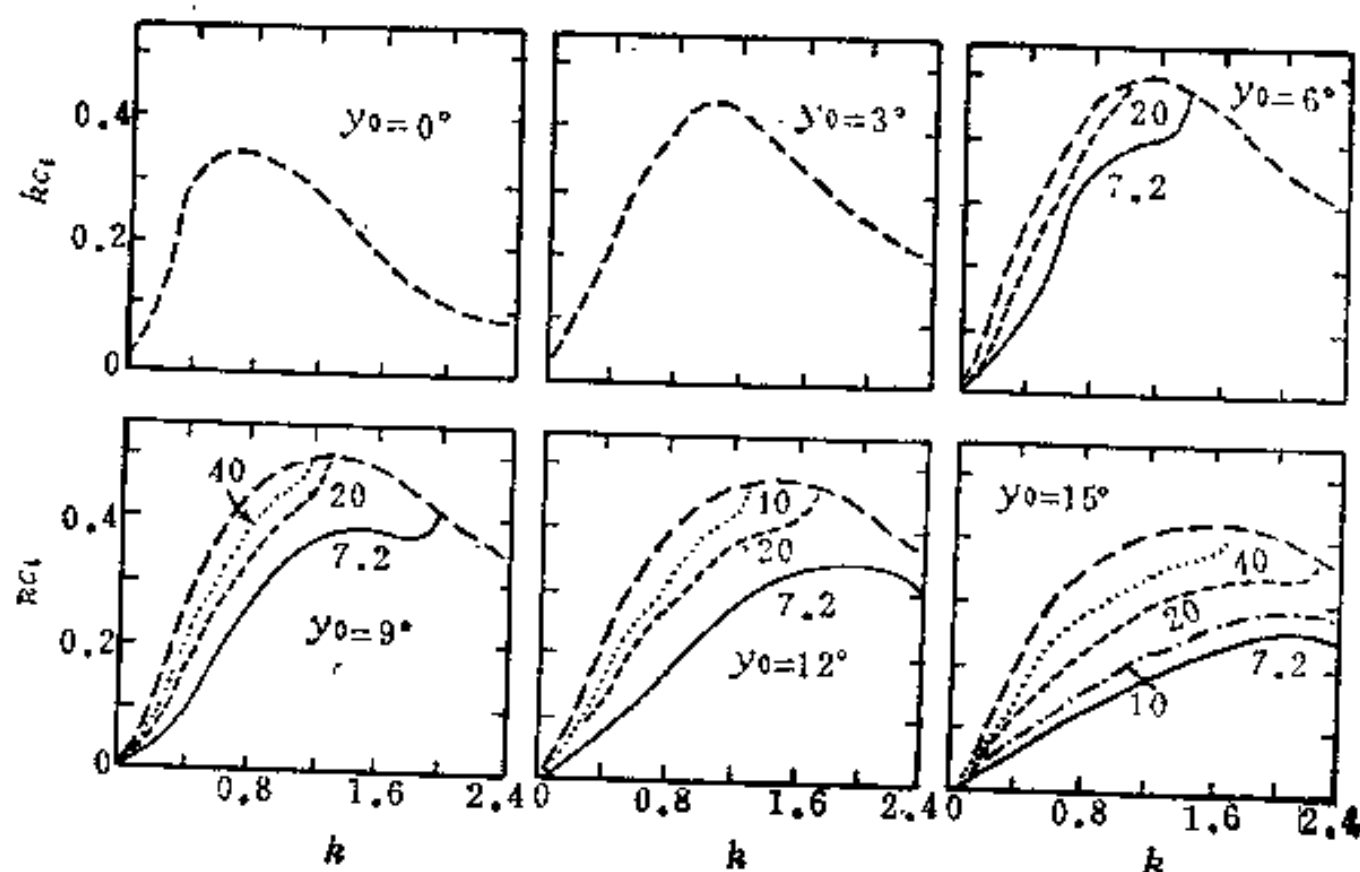


图 9-7 正压流 $U_{10} = U_{20} = -1$ 中扰动的生长率

(图中顶部虚曲线表示同位相解, 实曲线表示上层取各种 R_{11} 数下的反位相解)

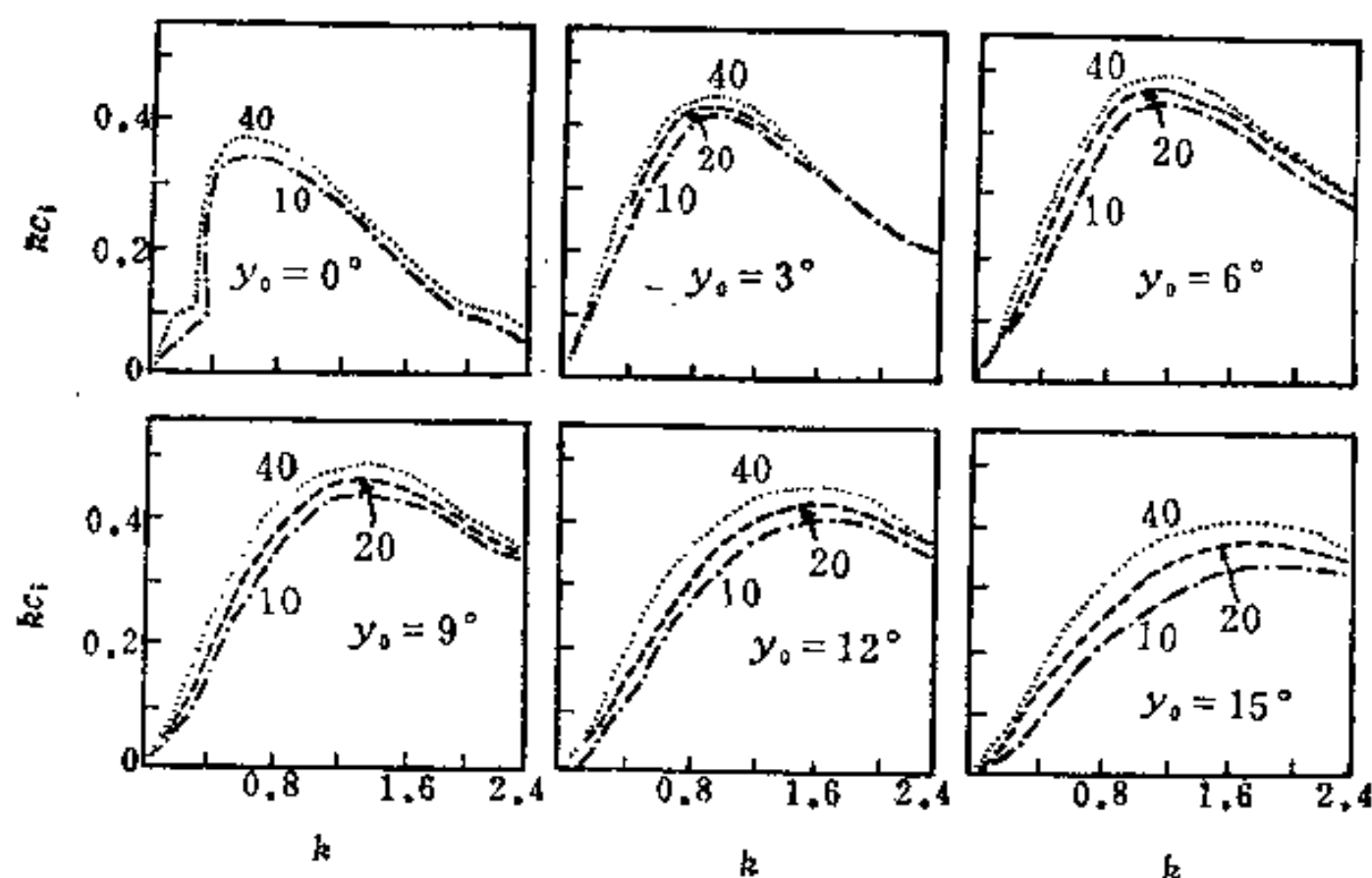
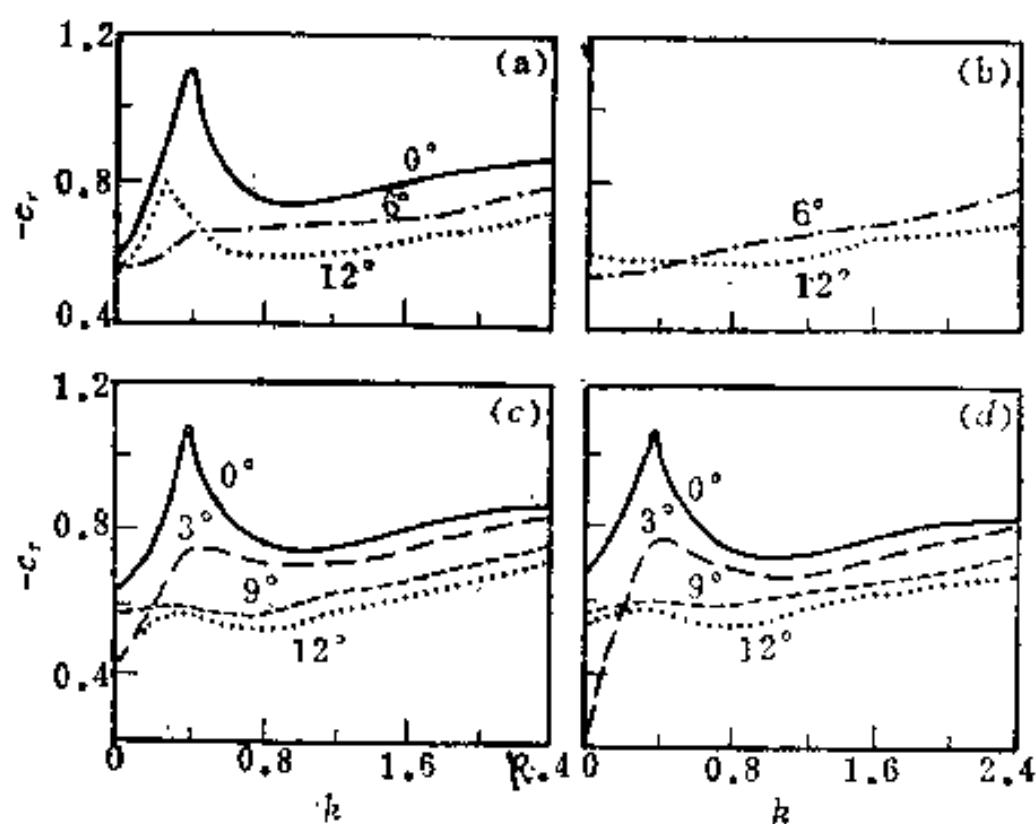


图 9-8 斜压流 $2U_{10} = U_{20} = -1$ 中扰动的生长率



(a) 正压同位相, (b) 正压反位相, (c) 正压, $R_1 = 10$, (d) 斜压, $R_1 = 40$

图 9-9 高 c_1 值扰动的相速

参 考 文 献

Kuo, H.L. (1978). *J. Atmos. Sci.*, 35, 1840-1860.

第十章 积云对流及强风暴动力性观

我们在前九章中，介绍的都是大尺度运动问题。这并不是说中、小尺度的大气运动不重要。相反地在不少情况下，中小尺度的扰动会引起很重要的天气现象。不过它们具有与大尺度大气运动所不同的性质，如非线性效应与非地转平衡。”因此一般而言，处理起来要比大尺度大气运动要困难一些。

本章介绍小尺度大气运动中最主要的内容——积云对流与飢线型强风暴动力学。我们从介绍轴对称积云单胞模型开始，在两种不同环境（即潜在最不稳定的赤道环境和低空有明显稳定层的中纬度环境）大气下，讨论了积云对流问题，计算了积云整个生命期中的代表性流场与由此产生的平均加热效应，并利用大尺度流场的变量对加热效应进行参数化，又计算了降水率，发现了许多有趣的结果。接着介绍积云对流对环境大气的平均效应。最后以飢线为例来讨论强风暴的动力学问题。

§ 1 积云模型与控制方程组

一、对流系统的基本知识

我们知道降水积云单胞的总生命期大约只有三十分钟左右，它可分成三个不同的阶段：

- ① 发展阶段：云内盛行上升气流。
- ② 旺盛（或下雨）阶段：云内既有上升气流，又有下沉气流。
- ③ 消散阶段：云中有强的下沉气流，它是由下降雨滴的拖曳及蒸发冷却作用而产生的。

另外，尽管每个积云单胞的生命期只有几十分钟，而由积云单胞组成多胞雷雨则可生存一、二小时，而飚线型强对流风暴更可以存在几个小时。这是由于在多胞雷雨中或飚线上有的积云单胞消失，在它周围又产生出新的积云单胞来。这就是说，大雷雨及飚线型强风暴是积云单胞所组成的集合体。很明显，要完整地描述这种类型的对流系统必须要采用复杂模型。

然而，利用简单模型也能对对流系统的机制作一些基本的了解，特别是我们限于找出这些系统的平均行为时更是如此。由于在积云单胞的生命期中，水汽凝结起很重要的作用，因此在模型中必须考虑水汽的变化。下面介绍一种比较简单的模型。

二、轴对称积云单胞模型

1. 模型的基本假设

我们在这个模型中采用柱坐标系，并对这模型作如下一些基本假设：

① 积云单胞是轴对称的，并以垂直方向为轴对称轴。以此对称轴为 z 轴建立柱坐标系 (r, θ, z) ，相应的速度分量为 (u, v, w) ，如图 10-1 所示。

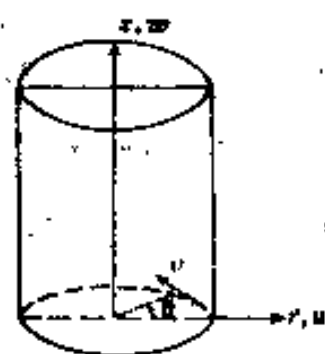


图 10-1 柱坐标系

根据轴对称的假定，任意变量都与 θ 无关，即

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (10-1)$$

② 运动的水平尺度很小，时间尺度又很短，可以认为受地球自转的影响极小，可以略去。因此在积云单胞中没有绕对称轴旋转（即 θ 方向）的速度分量。即

$$v = 0 \quad (10-2)$$

③ 连续方程采用滞弹性近似。

2. 基本方程组

在刚才的假设下，运动方程、热流量方程、水汽方程与连续方程可写为：

$$u_t + uu_r + ww_z = -\left(\frac{p'}{\rho_0}\right)_r + \gamma \nabla^2 u \quad (10-3)$$

$$w_t + uw_r + ww_z = -\left(\frac{p'}{\rho_0}\right)_z + g\left(\frac{\theta'_v}{\theta_v} - q_i\right) + \gamma \nabla^2 w \quad (10-4)$$

$$\theta'_t + \frac{1}{r}(ur\theta')_r + \frac{1}{\rho_0}(\rho_0 w\theta')_z + w\theta_{0z} = \nu \nabla^2 \theta' + \frac{L\pi C}{c_p} \quad (10-5)$$

$$q'_t + \frac{1}{r}(urq')_r + \frac{1}{\rho_0}(\rho_0 wq')_z + wq_{0z} = \nu \nabla^2 q' - C \quad (10-6)$$

$$\frac{1}{r}(ur)_r + \frac{1}{\rho_0}(\rho_0 w)_z = 0 \quad (10-7)$$

式中下标 t 、 r 、 z 分别表示对 t 、 r 、 z 的偏导数； u 与 w 分别表示径向与垂直方向的速度分量； p' 、 θ' 与 q' 分别表示气压 p 、位温 θ 与水汽混合比 q 对于未扰动环境的 p_0 、 θ_0 与 q_0 的距平； ρ_0 是未扰动密度； q_s 为温度 T 时的空气饱和水汽混合比； q_i 为液态水的混合比； γ 为涡动粘滞系数或涡动传导系数； L 为凝结潜热；而

$$\pi = \left(\frac{1000}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (10-8)$$

θ_0 为虚位温，它由下式定义

$$\theta_0 = T(1 + 0.608q)\pi \quad (10-9)$$

它的平均值由 $\bar{\theta}_0$ 表示，扰动虚位温为

$$\theta'_0 = T'(1 + 0.608q)\pi = \theta'(1 + 0.608q') \quad (10-10)$$

而 C 为凝给率，即

$$C = -\frac{dq_s}{dt} \quad (10-11)$$

由于没有混合时，在单个气块中总的水分混合比 $(q_i + q)$ 是个常数，所以 C 也可写为

$$C = \frac{dq_i}{dt}$$

3. 引入一些新变量

为了从 (10-3)~(10-7) 式所示的方程组中求出有用的结果来, 必须在这 5 个基本方程中消去一些变量, 减少方程的个数, 以便于求解。为此我们引入如下一些新变量:

① 流函数 ψ

由连续方程(10-7)式可知, 径向速度 u 与垂直速度 w 可表为:

$$u = -\psi_z + \sigma_z \psi \quad (10-12)$$

$$w = \psi_r + \frac{\psi}{r} \quad (10-13)$$

式中

$$\sigma_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (10-14)$$

我们把如此定义的 ψ 也称为流函数。

② 涡度 η

θ 方向上的涡度分量可写为

$$\eta = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} = \nabla_h^2 \psi + \psi_{zz} - \sigma_z \psi_z \quad (10-15)$$

这里

$$\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \quad (10-16)$$

③ 未扰动熵与扰动熵

未扰动(即环境大气)湿空气的熵为:

$$c_p s_0 = \frac{c_p}{\theta} \left(\theta_0 + \frac{\pi L q_0}{c_p} \right) \quad (10-17)$$

这里 $\bar{\theta}$ 是 θ_0 的平均数, 因而是个常数。

湿空气的扰动熵为

$$c_p s' = -\frac{c_p}{\theta} \left(\theta' + \frac{\pi L}{c_p} q' \right) \quad (10-18)$$

未扰动湿空气的饱和熵为

$$c_p s_{0s} = -\frac{c_p}{\theta} \left(\theta_0 + \frac{\pi L}{c_p} q_{0s} \right) \quad (10-19)$$

云内饱和空气的扰动熵为

$$c_p s'_s = -\frac{c_p}{\theta} \left(\theta' + \frac{\pi L}{c_p} q'' \right) \quad (10-20)$$

这里

$$q'' = q_s - q_{0s} = \left(\frac{\partial q_s}{\partial T} \right)_{T_0} T' = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial q_s}{\partial T} \right)_{T_0} \theta' \quad (10-21)$$

4. 方程组的归并

将(10-4)或对 r 求偏导数, 减去(10-3)对 z 求偏导数得到下式

$$\eta_t + (u\eta)_r + (w\eta)_z - \nu \nabla^2 \eta = g \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\theta'_v}{\theta_v} - q_1 \right) \quad (10-22)$$

这是 θ 方向的涡度方程。

将 $\frac{\pi L}{c_p}$ 乘以(10-6)式加上(10-5)式可得下列湿空气的熵扰动

方程:

$$\begin{aligned} s'_{et} + \frac{1}{r} (ur s'_e)_r + \frac{1}{\rho_0} (\rho_0 w s'_e)_z + w \frac{\partial \widehat{s_{0s}}}{\partial z} = \\ = \nu \nabla^2 s'_e + g \frac{\pi L}{c_p^2 T \theta} (q_s - q_{0s}) w \end{aligned} \quad (10-23)$$

这里

$$\frac{\partial \widehat{s_{0s}}}{\partial z} = \frac{1}{\theta} \left[\frac{d\theta_0}{dz} + \frac{\pi L}{c_p} \frac{dq_{0s}}{dz} \right] = \frac{ds_0}{dz} - \frac{g\pi L q_s}{c_p^2 T \theta} \quad (10-24)$$

这样, 轴对称积云可由(10-22)与(10-23)两式作为控制方程组。由

(10-12)、(10-13)、(10-15)式可得,(10-22)与(10-23)两式中只有两个未知变量 ψ 与 s'_e 。

三、准一维系统

为了把问题进一步简化,我们将注意力集中于云中的上升气流上。这样,可将(10-23)与(10-24)两式对 r 求积分,把 (r, z) 二维空间上的控制方程组化为一维(即 z 方向)的方程。为做到这一点,我们先给出积云单胞的边界条件。

1. 积云单胞边缘所满足的条件

若 R 为积云单胞的半径(即积云中心到边缘的距离),则我们假定:当 $r = R$ 时,下列诸式成立。

$$\theta'(R) = a \theta'_e \quad (10-25)$$

$$q'(R) = b \theta'(R) = ab \theta'_e \quad (10-26)$$

$$u(R) = -\alpha_1 w_e = -\frac{\mu}{2} R w_e \quad (10-27)$$

$$w(R) = 0, \quad \eta(R) = -\beta_1 \bar{\eta} \quad (10-28)$$

$$\int_0^R \rho r \nabla^2 s'_e dr = -\alpha'' w \bar{s}'_e \quad (10-29)$$

$$\int_0^R \rho \nabla^2 \eta dr = -\frac{\alpha''}{R} w_0 \bar{\eta} \quad (10-30)$$

这里 a 、 b 、 α_1 、 α'' 与 β_1 都是常数; θ'_e 、 w_e 、 \bar{s}'_e 与 $\bar{\eta}$ 都为 θ' 、 w 、 s'_e 与 η 在云内的平均值; w_0 为在对称轴上 w 的值; μ 为质量夹卷系数,它由下式定义:

$$\mu = \frac{1}{M} \frac{dM}{dz} = \frac{2\alpha_1}{R} \quad (10-31)$$

这里

$$M = \rho_0 w R^2 \quad (10-32)$$

M 为在云内向上的质量通量。

在(10-25)与(10-26)两式中, 系数 $a > 0$ 表示卷入了相对暖的空气, $a < 0$ 表示卷入了相对冷的空气; 系数 $b < 0$ 表示卷入比未扰动环境更潮湿的空气, 而 $b > 0$ 表示卷入比未扰动环境更干燥的空气。

2. 准一维方程组

将扰动方程(10-23)式乘以 $\rho_0 r dr$, 并对 r 从 0 到 R 积分, 利用(10-25)~(10-29)诸式所示的条件, 可得如下准一维方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H}{w} \right) + \frac{\partial H}{\partial z} + \left(\frac{a''}{R^2} - \frac{a^*}{R} \right) H = -M \left\{ \frac{d \hat{s}_{0s}}{dz} + \right. \\ \left. + \frac{\pi L}{c_p \theta} \left[\mu (q_{0s} - q_0) - \frac{g}{c_p T} (q_s - q_{0s}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (10-33)$$

这里

$$H = \rho_0 w R^2 s'_0 \quad (10-34)$$

$$a^* = 2\alpha_1 a' \quad (10-35)$$

为了将涡度方程(10-22)化为准一维形式, 我们需用一个简化假定: 即认为 ψ 的径向变化是调和的, 即假定

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \nabla^2 \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \psi = -\frac{\alpha^2}{R^2} \psi \quad (10-36)$$

这里

$$\alpha = 2.405 \quad (10-37)$$

为贝塞尔函数 $J_1(\alpha r/R)$ 的第一个零点。

从(10-28)、(10-30)与(10-32)诸式可得

$$\overline{\eta} = \frac{1}{R} \int_0^R \eta dr = -\frac{1}{R} \left[w_0 - \frac{R^2}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} - \sigma \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \right] \quad (10-38)$$

我们进一步假定 w 、 θ'_0 与 q_1 的平均值等于它们在积云中心值的一半, 即

$$w_0 = 2w_c, \quad \theta'_0(0) = 2\overline{\theta'_0}, \quad q_1(0) = 2\overline{q_1} \quad (10-39)$$

并令

$$Y = w_c \left[w_c - \frac{R^2}{\alpha^2} \left(\frac{d^2 w_c}{dz^2} - \sigma_z \frac{dw_c}{dz} \right) \right] \quad (10-40)$$

将方程(10-22)式对 r 从 0 到 R 积分, 并利用(10-38)与(10-39)两式可得关于 Y 的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Y}{w_c} \right) + \frac{\partial Y}{\partial z} + \left(\frac{\alpha'_1}{R} + \frac{\alpha'}{R^2} \right) Y = \\ = g \left[(1 - 0.5\alpha) \frac{\theta'_v}{\theta} - (q_t - 0.5g_t(R)) \right] \end{aligned} \quad (10-41)$$

(10-33)与(10-41)两式为准一维控制方程组。

四、准定常一维控制方程组

1. 积云对流准定常发展的条件

假定积云降水是以下列任一种形式进行:

① 云内空气是沿倾斜面上升, 积云中的雨滴不直接降落在上升气流上。

② 降雨过程通过特殊过程完成的, 它对上升气流没有向下的拖曳力。

那么积云发展可以看为通过相似的气泡, 从云底部开始接连不断地上升到平衡面, 面逐步扩张到云的顶部的过程; 而积云的消散过程是按照统计方式完成的。

在上述这些条件下, 方程(10-33)与(10-41)两式中的时间局地变化项 $\frac{\partial(\quad)}{\partial t}$ 要比其他各项小很多, 可以被略去。因此我们可以把上述的假定称为积云准定常发展条件。

2. 准定常一组方程组

在(10-33)与(10-41)两式中略去时间局地变化项, 在(10-33)式中 H 仍以 s'_t 由(10-34)式代回, 则得如下两个准定常一维方程组:

$$\frac{d\hat{s}_e'}{dz} + \left(\mu - \frac{\alpha^*}{R} + \frac{\alpha''}{R^2} \right) \hat{s}_e' = - \frac{d\hat{s}_{0s}}{dz} - \frac{\pi L}{c_p \theta} \left[\mu (q_{0s} - q_0) - \frac{g}{c_p T_0} (q_s - q_{0s}) \right] \quad (10-42)$$

$$\frac{dY}{dz} + \left(\frac{\alpha_1'}{R} + \frac{\alpha''}{R^2} \right) Y = g \left[(1 - 0.5a) \frac{\theta_v'}{\theta} - q_1 + 0.5 q_1(R) \right] \quad (10-43)$$

我们根据这两个方程讨论云内平均垂直速度与热力过程。

假若我们将方程(10-42)式右边的 $\frac{\pi(q_s - q_{0s})}{\theta}$ 项写成

$\left(\frac{\partial q_s}{\partial T} \right)_{T_0} \frac{\theta'}{\theta}$, 再利用(10-20)及(10-21)两式将 $\frac{\theta'}{\theta}$ 用 s_e' 表示, 这

个方程就变成了只含未知变数 s_e' 的方程, 因而 s_e' 随高度的变化可以从这个方程直接求得。所以我们求这个准一维空间模式解的问题主要是从方程(10-43)式求 w_e 的高度分布。

为使(10-42)与(10-43)两式变成闭合方程组, 还需加入有关 q_1 的液态水方程

$$\frac{dq_{1\text{cond.}}}{dz} = - \frac{dq_s}{dz} - \mu' [q_s - q^* + (1 + a_2) q_{1\text{cond.}}] \quad (10-44)$$

这里 $q_{1\text{cond.}}$ 表示由凝结产生的液态水混合比, q^* 是 $r = R_*$ 处的混合比, 而 R_* 正是上升气流区域的半径。 a_2 是在积云边界具有蒸发效应的另一个常数因子。而

$$\mu' = \mu - \frac{gL}{c_p^2 T_0} \frac{\partial q_s}{\partial T} \frac{1}{\left(1 + \frac{L}{c_p} \frac{\partial q_s}{\partial T} \right)} \quad (10-45)$$

§ 2 云内平均垂直速度、位温与降水率

方程(10-42)与(10-43)两式中不少参数, 如 $\frac{d\hat{s}_{0s}}{dz}$, q_0 , q_{0s} 等

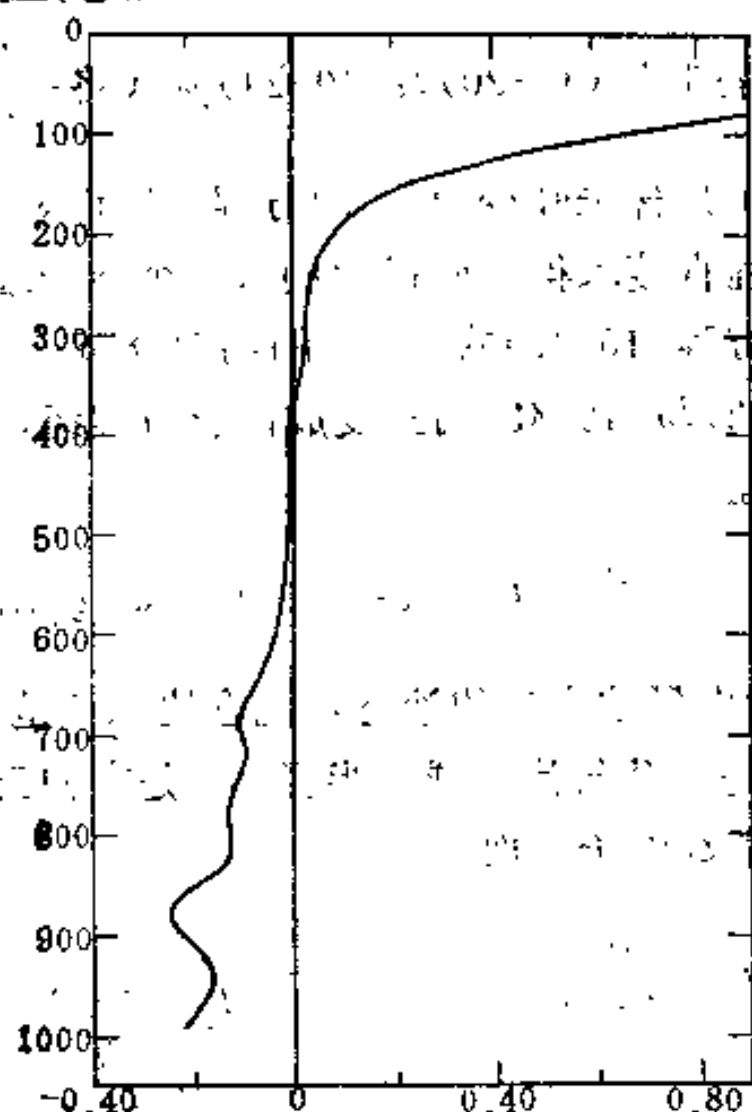
等都是环境大气的变量，在这两个方程中是以已知参数形式出现的。因此要解这两个方程，必须首先要知道环境大气处于什么状态。下面谈谈两种主要形式的环境大气。

一、两种环境大气

1. 热带或赤道区平均探空曲线(I型环境大气)

这类环境大气 $\frac{\partial s_{05}}{\partial z}$ 随高度的变化可由图 10-2 所示。

气压(毫巴)



$\frac{\partial s_{05}}{\partial z} (10^{-4} \text{米}^{-1})$

图 10-2 热带平均探空曲线

从图中可以看出探空曲线是比较光滑的，并可得出这样的结论：

① 假若这种大气处于绝对静止状态，它的层结本身是稳定的。

② 这种大气存在着潜在的不稳定性，当大尺度流场把空气抬升至凝结高度时，这样潜在不稳定性，会变成真正的不稳定性。

2. 中纬度(美国伊利诺州的赛伦)探空曲线(I型环境大气)

这类环境大气 $\frac{\partial \hat{s}_{01}}{\partial z}$ 随高度的变化可由图10-3所示。

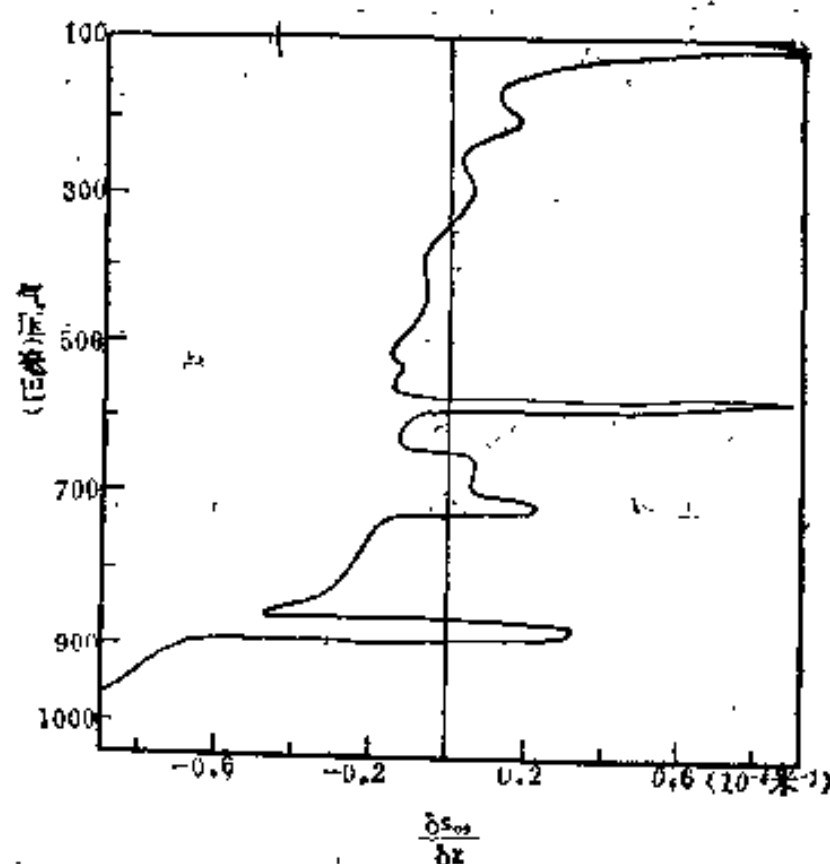


图 10-3 美国赛伦与伊利诺的探空曲线

这种探空曲线有很多稳定层，而在低于 350 毫巴的高度有几个相当厚的条件不稳定层。从图 10-3 我们可得到这样一些结论：

① 由于在低空有很多稳定层，所以尺度小的积云不易冲破这些稳定层而得以发展。

② 尺度较大的积云，在大尺度流场的抬升作用下，可逐次冲破低空的稳定层。一旦它摆脱了稳定层的束缚，这种积云可发展到很高的地方。

二、积云内平均垂直速度

1. 迭代计算的步骤

由 Y 的定义(10-40)式可知,从 Y 值可求出云内平均垂直速度 w_c 。因此我们可把方程(10-43)式看为是求出平均垂直速度 w_c 的方程。在(10-43)式中,将 q_i 作为 z 的已知函数,由(10-42)式的解 s'_e ,根据湿度方程求得 q' ,利用(10-20)与(10-10)两式求出 θ'_e 。这样可把(10-43)式作为 z 的一阶常微分方程来求解。由于 q_i 可表示为 w_c 的函数,所以(10-43)式必须与液态水方程(10-44)式一起求解。我们利用传统的烟流模式进行求解。

首先在(10-40)式中略去气压扰动项,得到

$$Y = w_c^2 \quad (10-46)$$

在液态水方程中利用 $w_c(z_{n-1})$ 得到 $q_i(z_n)$ 第一阶近似值。利用这个近似值,在(10-43)式中求得下一个面上的 Y 值。这样可得到所有面上 Y 的第一阶近似 $Y^{(1)}$ 。然后求解包括气压扰动在内的方程(10-40)式,即

$$\frac{R^2}{\alpha^2} \left(w_c \frac{d^2 w_c}{dz^2} - \sigma w_c \frac{dw_c}{dz} \right) - w_c^2 = -Y^{(1)} \quad (10-47)$$

这里 $Y^{(1)}$ 为 z 的已知函数,用牛顿方法求解上式所示的边值问题。这样求得 w_c 的第二阶近似值,再利用液态水方程得出所有面上 Y 的第二阶近似 $Y^{(2)}$,然后求得 w_c 的第三阶近似。如此反复迭代可求得 w_c 的值来。

在迭代计算中,我们取

$$\begin{aligned} & \mu = 0.183/R \\ & L = 597.0 - 0.555(T - 273\text{K}) \text{卡/克/米} \\ & g = 9.81 \text{米/秒} \\ & T_v = (1 + 0.608q)T \\ & \alpha'' = 0, \text{即粘滞扩散系数为零} \end{aligned} \quad (10-48)$$

2. 计算结果及其讨论

对由图 10-2 所示的第 I 型环境大气, 在初始条件

$$M_0 = R^2 w_0 = \text{常数} \quad (10-49)$$

下, 对(10-43)进行迭代求解, 计算结果如图 10-4 所示。

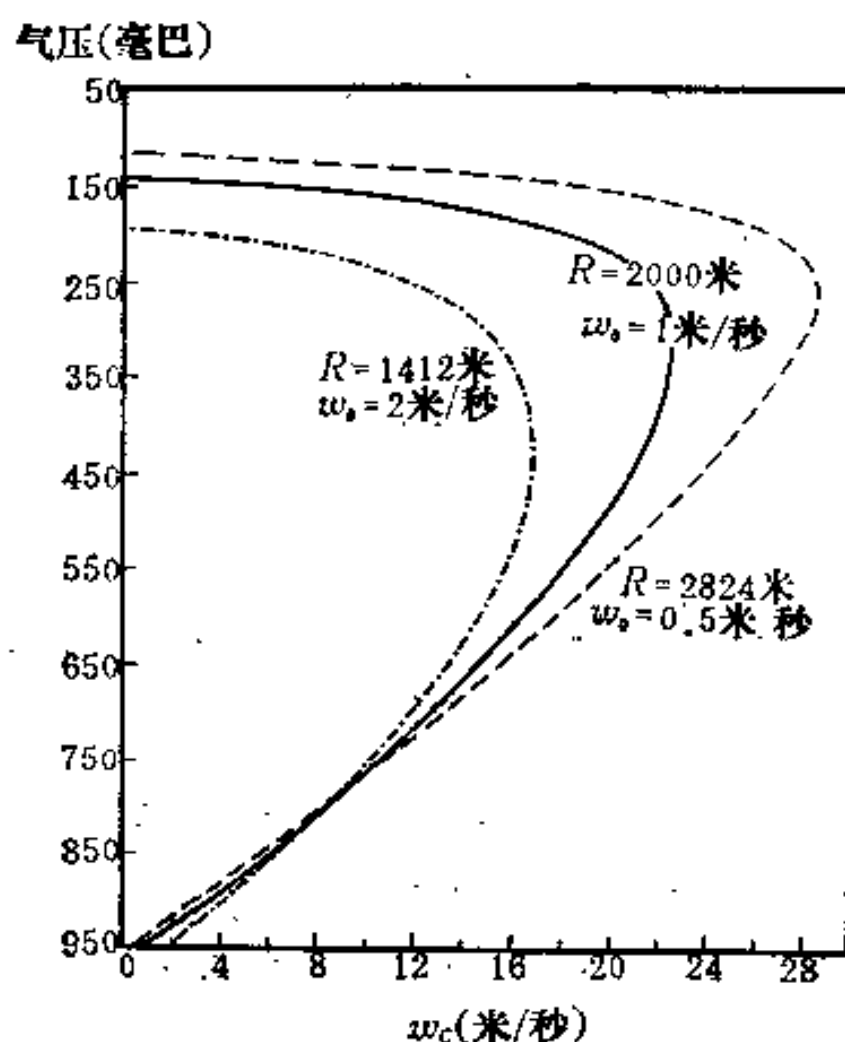


图 10-4 I 型环境大气在各种条件下 w_c 的高度变化

我们从上图可以看出两个主要结果

① 当积云水平面积增大时, 虽然积云中心初始垂直速度减小, 但云顶所达到的高度及最大垂直风速 w_{\max} 都还是增大的。

② 当积云水平面积减小时, 即使积云中心初始垂直速度增大, 但云顶达到的高度及 w_{\max} 都是减小的。

我们根据准定常一维模式研究了气压扰动不存在与存在两种情况下, 积云中最大垂直速度 w_{\max} 随积云半径的变化情况, 计算结果如图 10-5 所示。图中实曲线表示无气压扰动的情况, 虚曲线表示有气压扰动的情况。

从上图可以看出, 当有气压扰动时, 大约在积云半径等于 8 公

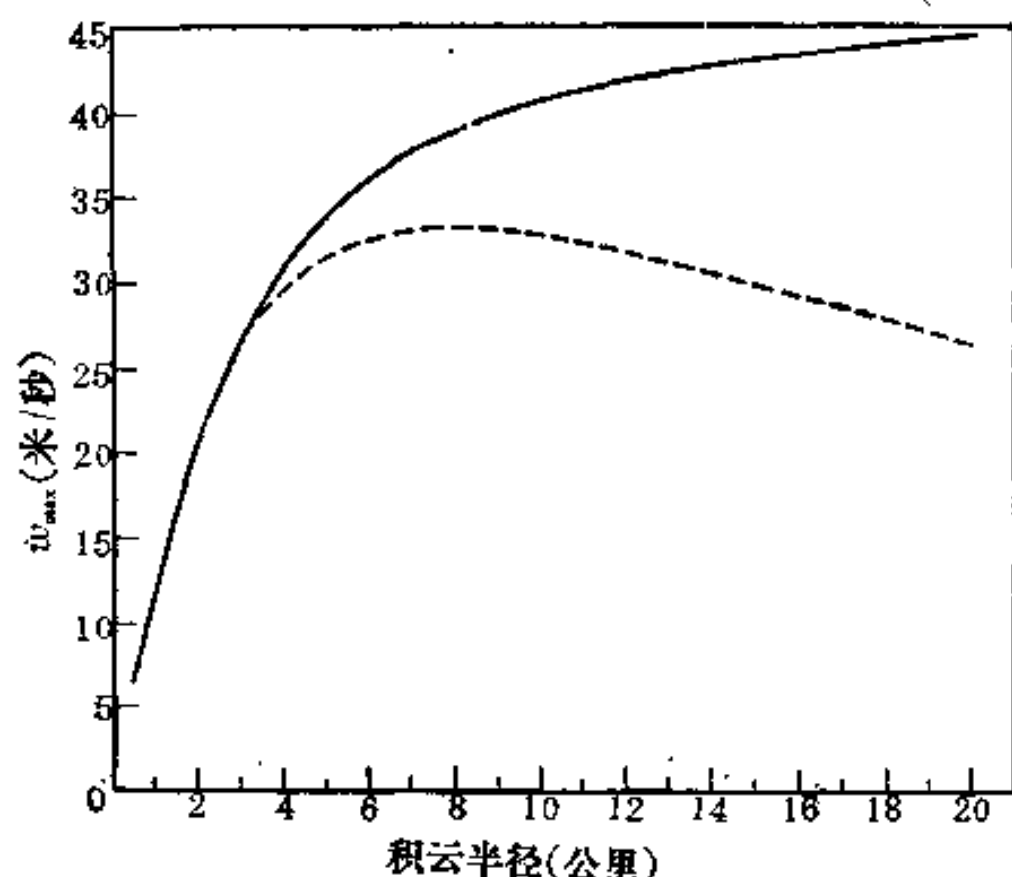
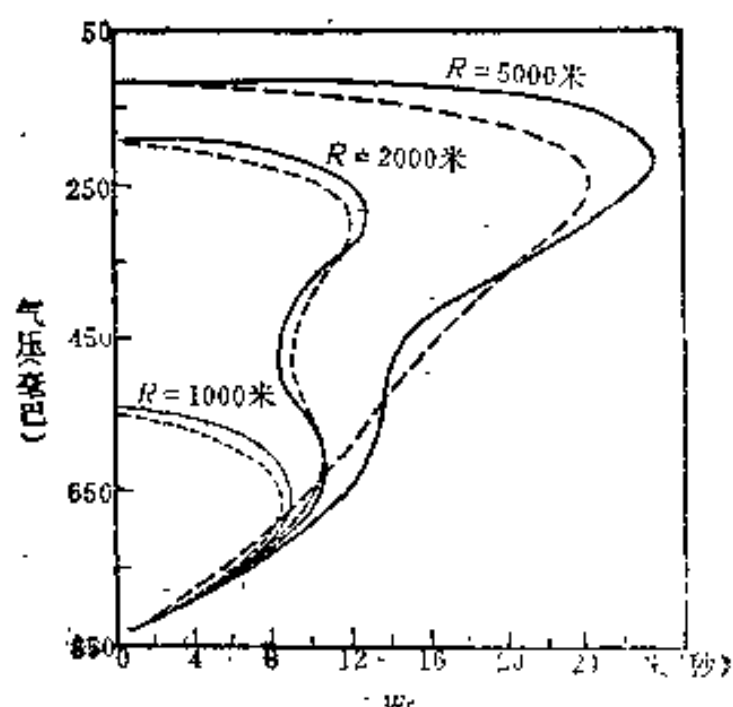


图 10-5 积云中最大垂直速度 w_{\max} 随积云半径的分布曲线

里处, w_{\max} 有个最高值, 即积云半径超过 8 公里时, w_{\max} 反而下降。当气压扰动不存在时, w_{\max} 随 R 单调递增。所以从图中可得到这样结论: 小尺度积云受气压扰动的影响很小, 而受夹卷效应 (它与积云半径成反比) 的作用很大; 大尺度积云正相反, 受气压扰动的影响很大, 而受夹卷效应作用很小。因此, 总存在一个最佳的积云尺度, 当这两种相反效应都起作用; 而似乎达到平衡时, w_{\max} 达到最高值。



对于图10-3所示的第 图 10-6 I 型环境大气在不同 R 下 w_0 的解

I型环境大气，按同样的迭代方法求解(10-43)式，计算结果如图10-6所示。

图10-6中虚线表示有气压扰动时的 w_c 值，实线表示无气压扰动时的 w_c 值。可以看出，气压扰动对半径比较大的积云，特别是半径在5000米或更大的积云才有较大的影响。这与我们刚才讨论的结果是吻合的。

另外，从图中还可看出， w_c 随 R 的变化规律与I型环境大气相似，但比I型更显著。

三、积云平均位温分布

在本章§2中，我们曾经指出 \bar{s}'_e 的垂直分布可采用类似的迭代计算直接从(10-42)式求得。将(10-20)式在 r 方向求平均，又得

$$\bar{s}'_e = -\frac{1}{\theta} \left[\theta'_c + \frac{\pi L}{c_p} \bar{q}'' \right] \quad (10-50)$$

这里 q'' 可由水汽方程求得。因此由上式可求得积云中平均位温随

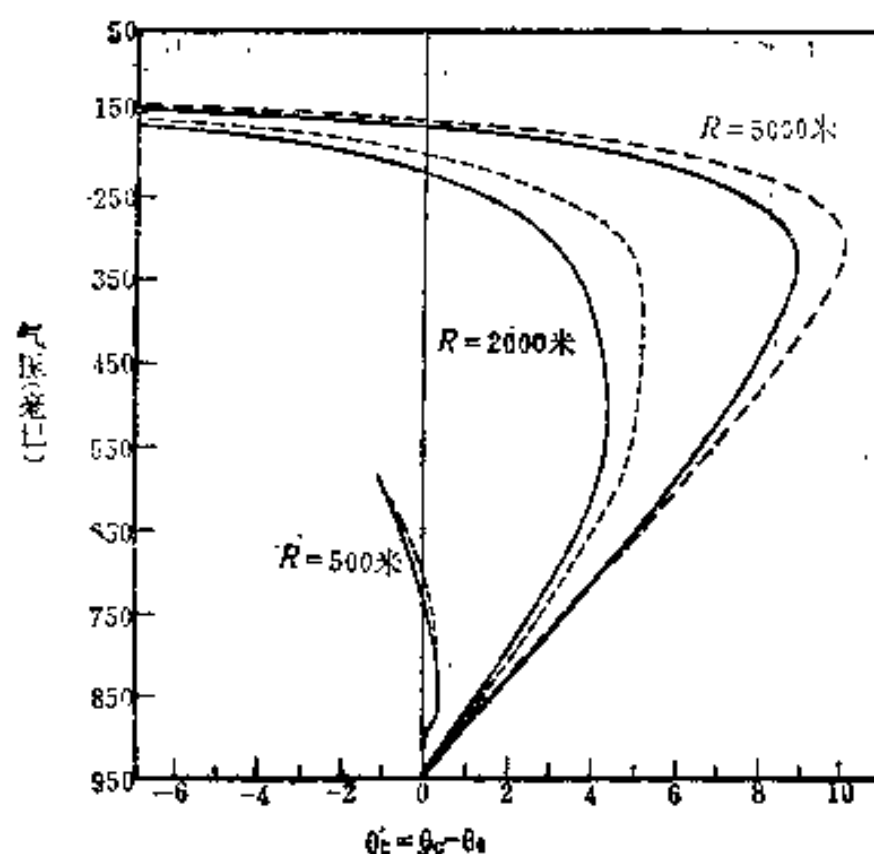


图 10-7 积云中平均扰动位温随高度的分布

高度的分布,如图 10-7 所示。图中虚线表示积云对环境有可压缩加热作用的情况,而实线则表示无这种可压缩加热情况。

从上图中可以看出,环境大气对积云的可压缩加热作用,令使积云的位温增高。还可看到上升气流在高层能得到加热。

四、积云降水率

1. 雨水混合比的计算

云滴可通过自动转换(用 auto 表示)与碰撞(用 coll. 表示)效应而变为雨滴,从而使雨水混合比 q_{rw} 增大;相反降水(用 fallout 表示)又能使雨水混合比减小。因此我们有如下公式

$$\Delta q_{rw} = (\Delta q_{cw})_{\text{auto}} + (\Delta q_{cw})_{\text{coll.}} - (\Delta q_{rw})_{\text{fallout}} \quad (10-51)$$

这里 q_{cw} 表示云滴混合比,式中第一项:

$$(\Delta q_{cw})_{\text{auto}} = \begin{cases} K \Delta t (q_{cw} - a') & \text{当 } q_{cw} \geq a' \\ 0 & \text{当 } q_{cw} < a' \end{cases} \quad (10-52)$$

表示云滴自动转变为雨滴,而使雨水混合比增大的效应。第二项

$$(\Delta q_{cw})_{\text{coll.}} = 5.26 \times 10^{-3} q_{cw} q_{rw}^{0.875} \Delta t \quad (10-53)$$

表示由碰并作用,雨滴俘获云滴而使雨水混合比增大的效应。第三项可写为

$$(\Delta q_{rw})_{\text{fallout}} = \lambda q_{rw} V_F \Delta t \quad (10-54)$$

这里 λ 是经验降水系数,它的量纲为 $\frac{1}{L}$ (L 为长度),而 V_F 则是雨滴的末端速度,它可由下式求得:

$$V_F \approx 5.1 q_{rw}^{0.125} \quad (10-55)$$

V_F 的单位为米/秒。

云滴混合比的变化方程为

$$\Delta q_{cw} = \Delta q_{\text{cond.}} - (\Delta q_{cw})_{\text{auto}} - (\Delta q_{cw})_{\text{coll.}} \quad (10-56)$$

式中第一项 $\Delta q_{\text{cond.}}$ 可由液态水方程(10-44)式求出,而其他二项各由(10-52)与(10-53)两式表出。

(10-51)~(10-56)便组成了闭合方程组，由此可求得各个时刻雨水混舍比 q_{rw} 的数值。

2. 积云降水率 p_r 的计算公式

得出了 q_{rw} 后，我们很容易由下式

$$p_r = \sum_{i=1}^N \Delta t_i V_F (\Delta q_{rw})_{fallont} / \hat{T} \quad (10-57)$$

求得积云降水率。因为若已求出 q_{rw} ，则利用(10-55)与(10-54)两式可得到 V_F 与 $(\Delta q_{rw})_{fallont}$ 的值。(10-57)式中 Δt_i 为积云中第 i 层(高度为 Δp)形成所需的时间，而

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^N \Delta t_i \quad (10-58)$$

是积云总的发展时间，也可把它作为积云总的生命期。

3. 计算结果及其分析

在这个计算雨水混合比的模式中， Δq_{leond} 是与环境大气有关的。我们由本节所介绍的两种环境大气与三种不同的积云半径，计算了降水率 p_r ，计算结果由表 10-1 所示。

表10-1 两种环境大气与三种积云半径下的降水率 p_r (厘米/小时)

环境大气 \ 半径 R (米)	500	2000	5000
I	1.57	4.73	5.17
II	0.67	5.21	5.73

表中 I 型大气的数值没有考虑冰晶的相变，如果把冰晶作用考虑进去，则降水率要比表中数字大 10~20%。

表中所列的降水率，不能用作大面积及长时间的降水量计算。因为积云的生命期只有半小时左右，且只在小区域中存在；但它能表示降水强度。

§ 3 积云对流对大气平均性质的影响

一、积云对流与大尺度系统的关系

前面我们已经说明了在上升气流区域附近的环境因子是如何影响积云基本性质的。反过来，积云对流也能影响中尺度与天气尺度系统的热力、湿度与动量结构。各种参数化的技巧就是把凝结增热与动量输送的垂直分布结合到大尺度流动中去。

我们知道，积云对流总的效应是加热周围环境。积云单体的平均加热作用是由潜热释放与感热向上输送的综合结果。本节主要讨论积云对流的平均加热率 $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$ ，其中包括环境的可压缩加热与冷湿下沉气流的效应。

二、垂直质量通量平衡

我们把上升气流、湿下沉气流与较远处下沉气流区域的面积分别用 A_c 、 A_{dw} 与 A_d 表示，而在这些区域内的垂直速度分别为 w_c 、 w_{dw} 与 w_d 。那么，垂直质量净通量为零的条件可写为：

$$A_c w_c + A_{dw} w_{dw} + A_d w_d = 0 \quad (10-59)$$

这里为简单起见，忽略了不同区域密度的差别。此外我们又利用下列关系：

$$w_{dw} = -\alpha_2 w_c, \quad A_{dw} = k A_c, \quad \alpha_2 > 0, \quad k > 0 \quad (10-60)$$

将 w_{dw} 、 A_{dw} 由 w_c 、 A_c 来表示。把上式代入(10-59)式可得

$$A_d w_d = -A_c (1 - \alpha_2 k) w_c \quad (10-61)$$

三、各种增热作用

积云的加热率可写成如下的形式：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T_r}{\partial t} + \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (10-62)$$

式中右边第一项代表感热加热率,第二项代表潜热释放加热率。现在我们把这两种作用分别进行讨论。

1. 感热加热作用

在总面积

$$A = A_c + A_{dw} + A_d \quad (10-63)$$

中感热向上输送可由下式计算:

$$AT_r = \frac{\rho}{\pi_0} (A_c w_c \theta'_c + A_{dw} w_{dw} \theta'_{dw} + A_d w_d \theta'_d) \quad (10-64)$$

这里

$$\pi_0 = \left(\frac{1000}{p} \right)^{0.2857} \quad (10-65)$$

感热增温作用可由感热输送与可压缩加热这两部分所组成。

(1) 感热输送

在区域 A 上,只包括轴对称积云与邻近湿下沉气流在内的单位厚度感热输送增温为:

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} = - \frac{1}{\rho \pi_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho T_\theta^*) \quad (10-66)$$

这里

$$T_\theta^* = a_0 w_c \theta'_c (1 - a_2 a h) \quad (10-67)$$

式中

$$a_0 = \frac{A_c}{A} \quad (10-68)$$

并利用了公式

$$\theta'_{dw} = a \theta'_c \quad (10-69)$$

(2) 压缩加热作用

遥远环境大气中的压缩加热作用对平均温度变化的贡献可由下式表示

$$\frac{\partial T_{\text{comp}}}{\partial t} = \frac{a_0}{\pi_0} (1 - \alpha_2 k) w_c \frac{\Delta t}{\hat{T}} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \quad (10-70)$$

这里我们是利用了 (10-61) 式来代表 $A_e w_d$ 的。上式中 \hat{T} 由 (10-58) 式所示, 为积云总的生命期, 而 Δt 是积云在平面 z 上存在的时间。因此总的感热增温作用为

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_r}{\partial t} = \frac{\partial T_r}{\partial t} + \frac{\partial T_{\text{comp}}}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho \pi_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho T_s^*) + \\ & + \frac{a_0}{\pi_0} (1 - \alpha_2 k) w_c \frac{\Delta t}{\hat{T}} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \end{aligned} \quad (10-71)$$

2. 潜热释放加热作用

潜热释放的加热作用可由下式表示:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = -a_0 \frac{L}{c_p} w_c \left[\frac{\partial q_s}{\partial z} - \mu (q^* - q_s) \right] \quad (10-72)$$

这里 q^* 是正好在上升气流区域外边的 q 值。

将 (10-71) 与 (10-72) 两式代入 (10-62) 式可得总的加热率为

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho \pi_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho T_s^*) + \frac{a_0}{\pi_0} (1 - \alpha_2 k) w_c \frac{\Delta t}{\hat{T}} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} - \\ & - a_0 \frac{L}{c_p} w_c \left[\frac{\partial q_s}{\partial z} - \mu (q^* - q_s) \right] \end{aligned} \quad (10-73)$$

四、积云消散时对环境大气的作用

当积云消散时, 由积云携带的液态水又重新蒸发。这时总的增热作用为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T_r}{\partial t} + \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{A_e L q_{iw}^{(s)}}{c_p A \pi_0 \hat{T}} \quad (10-74)$$

这里 $q_{iw}^{(s)}$ 是液态水重新蒸发到环境大气中的数量。

大气湿润率的变化可由下式给出

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} = \frac{A_c}{A} (q_s - q_0 + q_{iw}^{(e)}) \quad (10-75)$$

由于缺乏积云型与 $q_{iw}^{(e)}$ 间比较可靠关系的知识, 我们还没有计算由 $q_{iw}^{(e)}$ 表示的重新蒸发的作用。

五、增热率的计算与讨论

1. 计算实例(一)

我们在如下条件下

$$\left\{ \begin{array}{l} R_c (\text{上升气流区域的半径}) = 1000 \text{ 米} \\ k \equiv -\frac{A_{d10}}{A_c} = 1.0 \\ \alpha_2 \equiv -\frac{w_{d10}}{w_c} = 0.4 \\ \alpha_0 \equiv -\frac{A_c}{A} = 0.1 \end{array} \right. \quad (10-76)$$

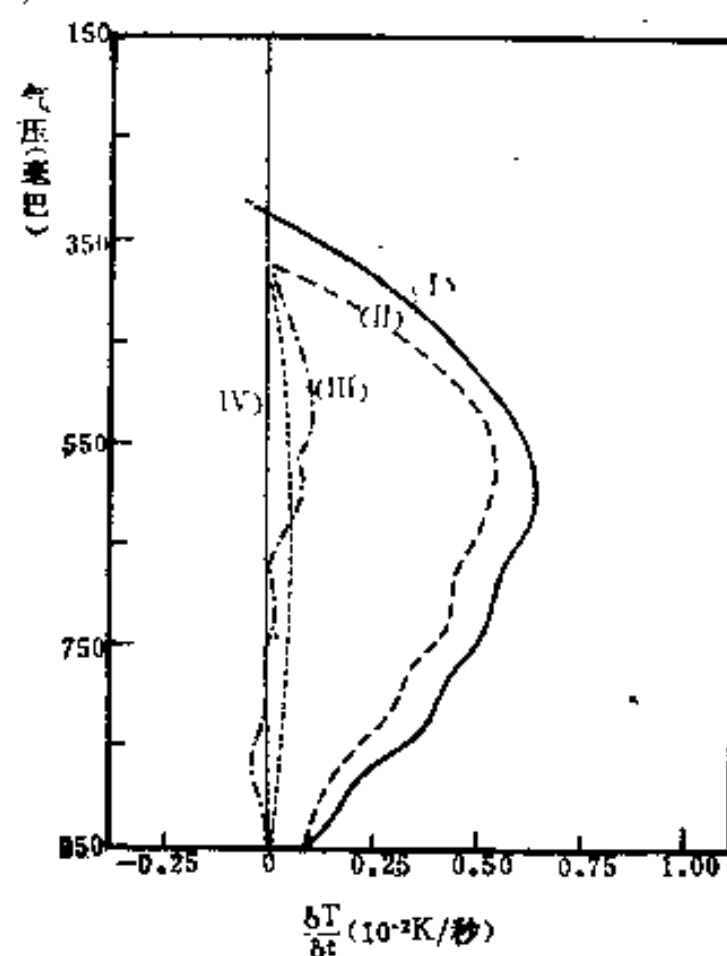


图 10-8 各种加热率垂直廓线

根据(10-66)、(10-70)、(10-72)等式计算了各种加热率。计算结果由图 10-8 所示。

图中曲线 I 表示没有冷湿下沉气流的总加热率, 曲线 II 表示具有冷湿下沉气流的总加热率, 曲线 III 表示湿下沉区域及积云内感热加热率, 曲线 IV 表示环境中的压缩加热率。

从图 10-8 可得到如下结论:

- ① 具有冷湿下沉气流会使总加热率降低。
- ② 湿下沉及云上升区域内的感热加热率在低层为绝对值很小的负值, 而在高层为绝对值稍大的正值。
- ③ 由总加热率与感热加热率的廓线相比较可知, 潜热释放在总加热率里是最重要的, 而感热作用只是潜热的 10~15% 左右。

2. 计算实例(二)

我们计算了积云半径为 2000 米与 5000 米的各种加热率垂直廓线, 分别由图 10-9 与图 10-10 所示。

图 10-9 中曲线 I 表示总加热率, 曲线 II 表示潜热加热率, 曲线 III

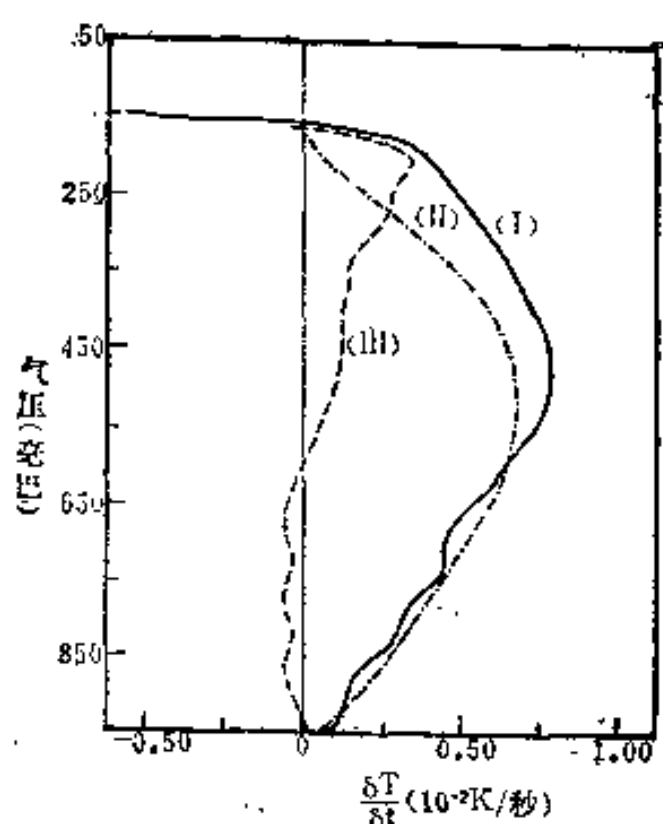


图 10-9 积云半径为 2000 米时的各种加热率垂直廓线

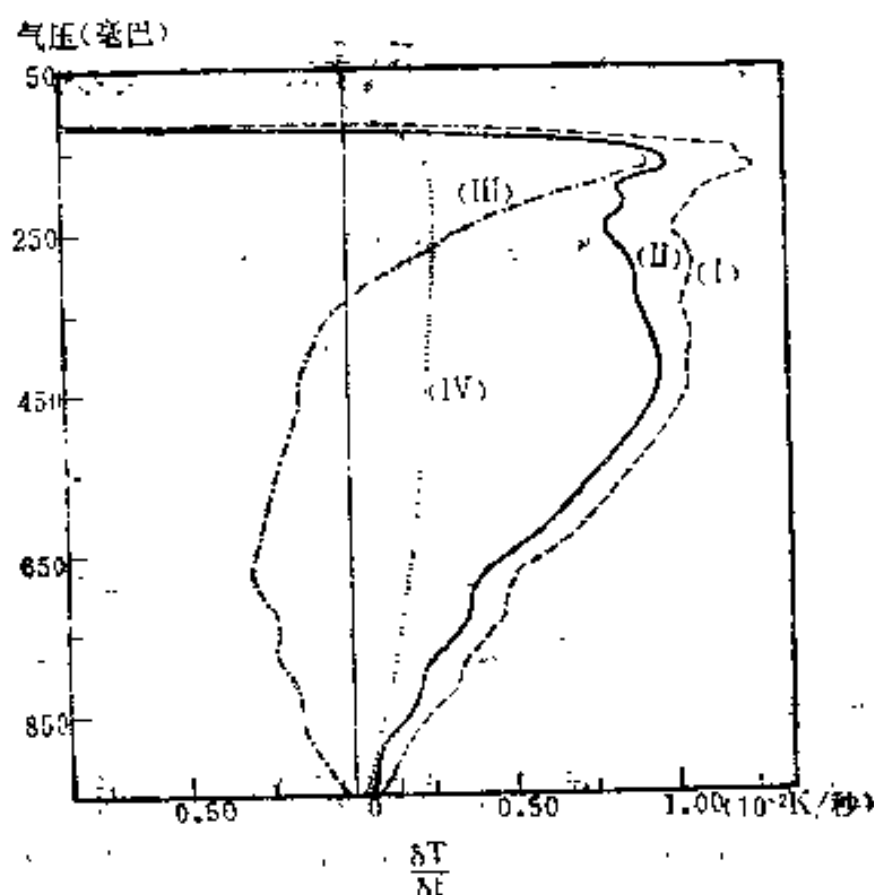


图 10-10 积云半径为 5000 米时的各种加热率垂直廓线

表示总感热加热率。

图 10-10 中曲线 I 表示 $\alpha = 0.4$ 时的总加热率, 曲线 II 表示单独由积云产生的加热率, 曲线 III 表示在环境压缩加热影响下的积云感热加热率, 曲线 IV 表示环境中的压缩加热率。

从这两张图可得到如下一些结论:

① 总感热加热率在积云顶部起的作用比较重要, 在其他地方起的作用很小。主要归结为潜热释放的作用。

② 从图 10-10 曲线 I 与曲线 II 之差异, 可得出压缩加热重要性的证据。注意这两者之差要小于曲线 IV 所示的数值。这是由于压缩加热会减小垂直速度, 因此也减小潜热释放的局地变率。

③ 压缩加热总是增加总的加热率, 积云半径越大, 这种作用越显著。比较图 10-10 与图 10-9 便可看出这一点。

④ 在所考虑的参数范围内, 冷湿下沉气流是增加感热输送的。

§ 4 飚线型强风暴动力性观

一、飚线型强风暴的特征

我们从观测研究中可以看到，飚线型的中尺度强风暴有如下一些特征：

① 飚线型强风暴常出现在大尺度天气系统的槽线区域。它的相速与其所嵌入的大系统的相速是不同的，可它的振幅常由大尺度系统所调整，这种过程特别是由深厚积云与中尺度、天气尺度系统间的相互影响来完成的。

② 多胞飚线型强风暴的轴线随高度向后倾斜，正抵消平均风的垂直切变作用。从热力学角度看来，这种倾斜甚至会使这个系统效率更高。这个特殊结构的动力学起源至今尚未搞清楚。

本节介绍一个初步的模型，从线性稳定性的观点来研究飚线型强风暴的发展。

二、基本方程组

我们采用如下方程作为基本方程组，

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - f \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\nabla \pi + \mathbf{k}(s_z \pi + g s') + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (10-77)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{Q}}{c_p T} + \nu \nabla^2 s \quad (10-78)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial z} = 0 \quad (10-79)$$

这里 \dot{Q} 是加热率，主要是凝结潜热作用。

我们假定饱和上升气流的 \dot{Q} 由下式给出

$$\dot{Q} = -w L^* \frac{\partial q_s}{\partial z} \quad (10-80)$$

这里 q_s 为饱和混合比, L^* 为气化的潜热。在非饱和下沉气流区域中

$$\dot{Q} = 0 \quad (10-81)$$

而

$$\pi = \frac{p'}{\rho_0}, \quad s = \log \theta, \quad s' = \delta s = \frac{\theta'}{\theta_0}, \quad s_z = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \quad (10-82)$$

式中 p' 与 θ' 为气压 p 与位温 θ 对其水平平均值的距平, ρ_0 为水平平均密度。 ν 为涡动扩散系数, 这里只考虑水平扩散。

三、基本流场的特征

由于我们仅从线性不稳定性解的观点来处理问题, 所以把流场分为基本流场与扰动流场。基本流场由下式表示:

$$\begin{cases} U = U(y, z) \\ V = V(x, z) \end{cases} \quad (10-83)$$

它有如下一些特点:

① 高层有西风急流, 低层为潮湿的南风急流, 如图 10-11 所示。



图 10-11 两个急流型的基本气流

② U 随 y 的变化, V 随 x 的变化, 都要比它们随 z 的变化要缓慢得多, 即在 y 及 x 方向的一个扰动波长之内, 它们可视为是没有多大改变的。

③ 基本气流符合地转风关系

$$U = -\frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (10-84)$$

$$V = -\frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (10-85)$$

也符合热成风关系:

$$\frac{\partial U}{\partial z} - s_z U = -\frac{g}{f} \frac{\partial s_0}{\partial y} \quad (10-86)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} - s_z V = -\frac{g}{f} \frac{\partial s_0}{\partial x} \quad (10-87)$$

式中

$$s_0 = \ln \theta_0 \quad (10-88)$$

有了基本流场, 我们可把基本方程组进行线性化。

四、波动频率方程

令线性化基本方程组有如下形式的波动解

$$\left(u', v', w', \frac{\theta'}{\theta_0}, \frac{p'}{\rho_0}\right) \rho_0^{\frac{1}{2}} = (u, v, w, q, p) e^{i(kx + ly - \omega t)} \quad (10-89)$$

则振幅方程为

$$\tilde{V}u - fv + U_z w = -ikp \quad (10-90)$$

$$\tilde{V}v + fu + V_z w = -ilp \quad (10-91)$$

$$\tilde{V}w = -p_z - I'p + gq \quad (10-92)$$

$$\tilde{V}q + s_{0x}u + s_{0y}v + s_{0z}w = 0 \quad (10-93)$$

$$i(ku + lv) + w_z - I'w = 0 \quad (10-94)$$

式中

$$\tilde{V} = ik \left[U + \frac{l}{k} V - \frac{\omega}{k} - ikv \left(1 + \frac{l^2}{k^2} \right) \right] \quad (10-95)$$

$$s_{0x} = \frac{\partial s_0}{\partial x}, \quad s_{0y} = \frac{\partial s_0}{\partial y} \quad (10-96)$$

$$s_{0z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\ln \theta_0 + \frac{L^*}{c_p} - \frac{q_{0s}}{T} \right) \quad (10-97)$$

这里 s_{0x} 、 s_{0y} 可根据热成风关系(10-86)、(10-87)两式由 U 、 V 及其偏导数定出。

令

$$\begin{cases} U_1 = U + \lambda V - c, & U_2 = \lambda U - V, & N^2 = g s_{0z} \\ f' = \frac{f}{k}, & c = \frac{\omega}{k} + i k (1 + \lambda^2) \nu, & \lambda = \frac{l}{k} \end{cases} \quad (10-98)$$

则由振幅方程组(10-90)~(10-94)诸式,通过变量相消的运算,可得关于 w 的二阶方程:

$$\begin{aligned} (f'^2 - U_1^2) w_{zz} - 2f' \left[-\frac{f'}{U_1} U_{1z} - i U_{2z} \right] w_z - \left\{ (1 + \lambda^2) (N^2 - \right. \\ \left. - k^2 U_1^2) + f'^2 (f'^2 - U_1^2) - U_1 (U_{1zz} + 2f' U_{1z}) - \right. \\ \left. - i f' U_{2zz} - \frac{2f'}{U_1} (f' f' U_{1z} - i U_{1z} U_{2z}) \right\} w = 0 \end{aligned} \quad (10-99)$$

这是一个关于 z 的二阶常微分方程。

w 的边界条件可写为

$$w = 0, \quad \text{当 } z = 0, \quad z = H \quad (10-100)$$

我们可把 H 作为对流层顶的高度。因为对流层顶被很稳定的平流层压住了,在那里垂直速度很小,近似可看为零。

对于给定的基本气流 U 、 V , 和给定的波数 k 、 λ , 我们能够解(10-99)式在边界条件(10-100)式下的特征值问题,把复特征值 c 求出来。由此确定最快生长的扰动性质,如斜面的形成,它的斜度与相速 c_r 等。

下面给出两个简单模式的具体计算,并进行一些初步的讨论。

五、模式 I 的计算与讨论

1. 模式 I 的特征

模式 I 有如下一些特征:

① 无南风气流。即

$$V = 0 \quad (10-101)$$

② 西风 U 的垂直切变为常数。即

$$U_z = \text{常数}, \text{ 即 } U = U_0 + U_z z \quad (10-102)$$

③ 多普勒相移频率很小。即

$$k(U - c) \ll f \quad (10-103)$$

这个条件也可称为长周期近似。

④ y 方向的波长为无限大。即

$$l = 0 \quad (10-104)$$

⑤ 在风暴中空气是饱和的, 并是有效层结不稳定。即

$$N^2 = g s_{0ez} = -N_*^2 < 0 \quad (10-105)$$

2. 模式 I 的特征值问题

令

$$\xi = \frac{kN_*}{f} \left[z - \frac{H}{2} + \frac{\bar{U} - c}{U_z} \right] \quad (10-106)$$

这里 \bar{U} 为中层 $z = \frac{H}{2}$ 上的西风风速。这时边界条件(10-100)式为:

$$w = 0 \text{ 当 } \xi = \xi_1 = \frac{kN_*}{f} \left(-\frac{H}{2} + \frac{\bar{U} - c}{U_z} \right) \text{ (对应 } z = 0 \text{)} \quad (10-107)$$

$$w = 0 \text{ 当 } \xi = \xi_2 = \frac{kN_*}{f} \left(\frac{H}{2} + \frac{\bar{U} - c}{U_z} \right) \text{ (对应 } z = H \text{)} \quad (10-108)$$

在这个模式中, 振幅方程(10-99)式变为

$$w_{\xi\xi} - \frac{2}{\xi} w_{\xi} + w = 0 \quad (10-109)$$

满足边界条件(10-107)式的解可写为

$$w(\xi) = (1 + \xi_1 \xi) \sin(\xi - \xi_1) - (\xi - \xi_1) \cos(\xi - \xi_1) \quad (10-110)$$

利用边界条件(10-108)式可知,特征值 c 由下列相容性关系求出:

$$[(1 + \xi_1 \xi_2) - (\xi_2 - \xi_1) \operatorname{ctg}(\xi_2 - \xi_1)] \sin(\xi_2 - \xi_1) = 0 \quad (10-111)$$

很容易证明, 当

$$\mu \equiv \xi_2 - \xi_1 = \frac{N_* k H}{f} = n \pi \quad (10-112)$$

时, 可得稳定性判据为:

$$\frac{(\bar{U} - c)^2}{H^2 U_*^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{4} - \frac{1}{\mu} + \operatorname{ctg} \mu \right) \begin{cases} > 0 \text{ 稳定} \\ = 0 \text{ 过渡状态} \\ < 0 \text{ 不稳定} \end{cases} \quad (10-113)$$

3. 模式 I 的结果

① 由稳定性判据(10-113)式得到最有趣的结论是: 不稳定性在无穷多个波段上出现, 如图 10-12 所示。

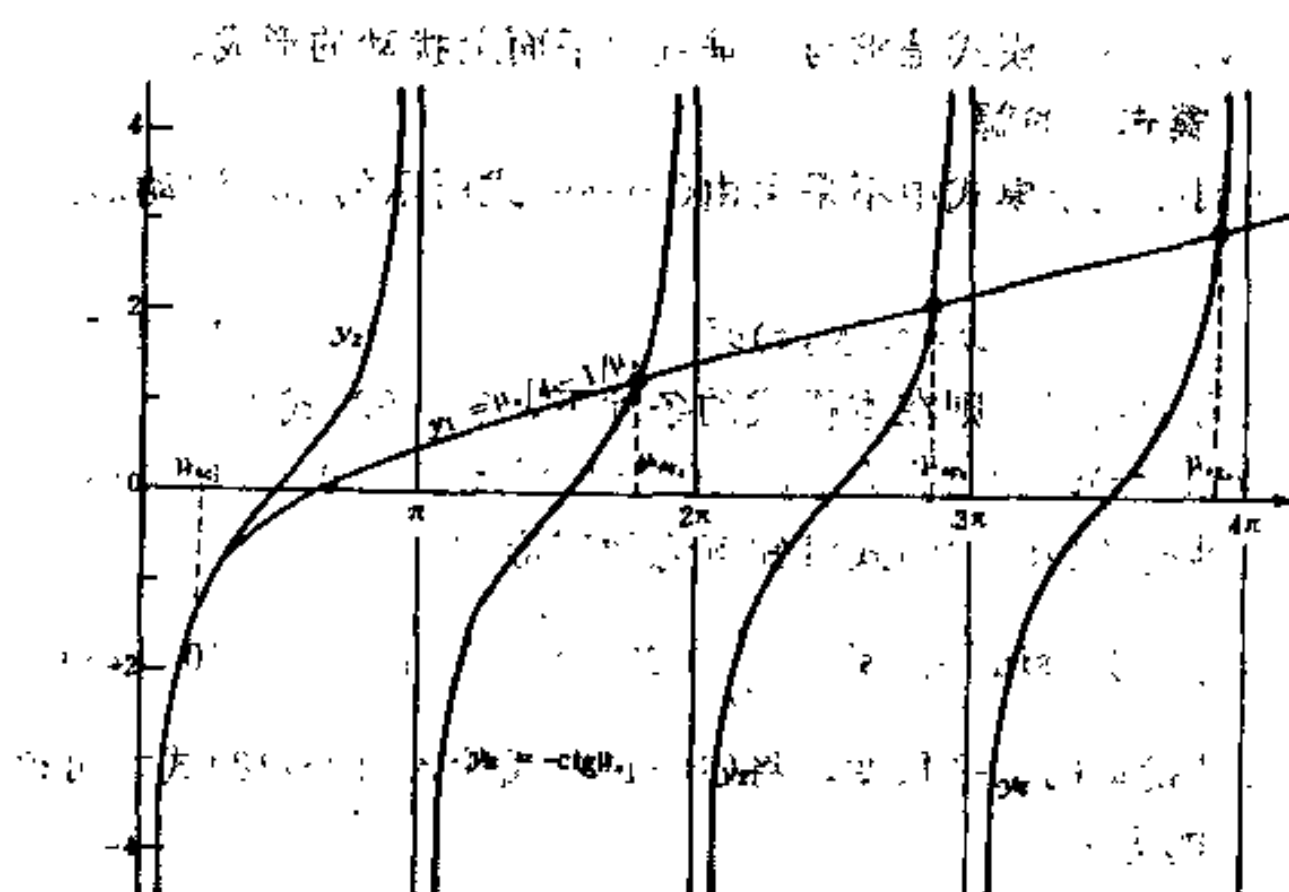


图 10-12 由 $y_1 = \frac{1}{4} \left(\mu - \frac{4}{\mu} \right)$ 与 $y_2 = -\operatorname{ctg} \mu$ 相叠表示的中性解

② 所有不稳定(增幅)扰动都以不稳定层结面上的平均气流速度 \bar{U} 移动, 它与天气尺度扰动的相速常常不同。这结果不仅对

随线型扰动，而且对通常观测到的各种尺度云带的形成都是很重要的。

六、模式Ⅱ的计算与讨论

1. 模式Ⅱ的特点

这个模式有如下一些特点：

① 无南风气流。即

$$V = 0 \quad (10-114)$$

② 西风 U 的垂直切变为常数。即

$$U_z = \text{常数}, \quad U = U_0 + U_z z \quad (10-115)$$

③ x 方向的波长为无限大。即

$$k = 0 \quad (10-116)$$

这就是说，这个模式是求与 U 垂直的平面上扰动的形成。

2. 模式Ⅱ的解

我们在这个模式中不采用由(10-89)式所示的那种波动形式，而令

$$w = w(y, z)e^{\sigma t} \quad (10-117)$$

这里 σ 为增长率。则在本模式的条件下，(10-99)式为

$$(f^2 + \sigma^2)w_{zz} + 2fU_z w_{yz} + (N^2 + \sigma^2)w_{yy} = 0 \quad (10-118)$$

根据边界条件(10-100)式可知解为如下形式：

$$w(y, z) = \sin \frac{\pi z}{H} \sin \frac{\pi}{L} \left(y - \frac{fU_z z}{f^2 + \sigma^2} \right) \quad (10-119)$$

这里 L 是扰动的水平尺度。将(10-119)式代入(10-118)式，可得有关 σ^2 的方程：

$$\sigma^2 = \frac{A}{2(1+A)} \left\{ \pm \left[\frac{4(1+A)}{A} f^2 U_z^2 + (N^2 - f^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - (N^2 - f^2) \right\} - f^2 \quad (10-120)$$

这里

$$A = \frac{H^2}{L^2}$$

3. 模式 I 的结果

(10-120)式表明,垂直切变 U_z 常能引起垂直于 U 平面上的环流,并与~~热力学过程~~类似,即暖空气上升,冷空气下沉,如图10-13所示。看~~这个~~这个效应是在前面所用的普通模式中起着重要作用的。

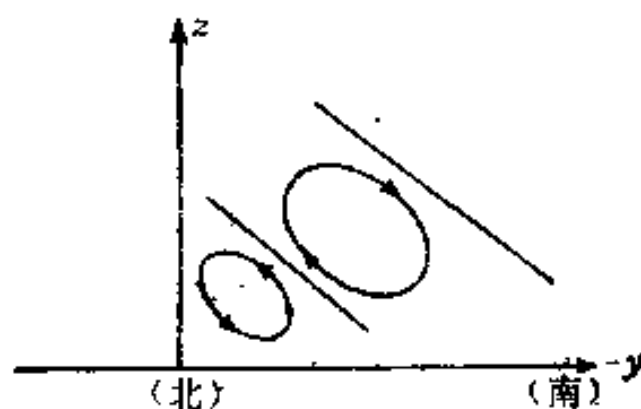


图 10-13 垂直 U 平面上的环流

参 考 文 献

- Anthes, R. A.* (1977). *Mon. Wea. Rev.*, 105, 270-286.
Kessler, E. (1969). *Met. Monogr.* 10, No. 33, 84 pp.
Kuo, H. L. (1965). *J. Atmos. Sci.*, 22, 40-63.
 _____ (1974). *J. Atmos. Sci.*, 31, 1232-1240.
 _____ (1980). *Mon. Wea. Rev.*, 108, 991-1009.

后 记

我很幸运，在今年夏天听取了郭晓岚教授《大气动力学》课程，并遵导师、中国科学院大气物理研究所所长叶笃正教授之嘱，为郭教授整理讲稿。整理工作是在郭教授直接指导下完成的。初稿写成后，郭教授又仔细地进行了审阅，对错误与不妥之处逐一加以纠正。

郭晓岚教授是世界著名气象学家，早年留学美国，1948年在芝加哥大学地球物理系获博士学位。1954年起在美国麻省理工学院担任高级研究员。1962年回芝加哥大学任地球物理系教授。1970年获美国气象界最高荣誉奖——罗斯贝奖。

郭教授学识渊博，成绩卓著，在气象界很多领域作了开创性的工作。如在动力不稳定性理论、台风的起源与发展理论、陆龙卷风的结构与起源理论、低纬大尺度扰动理论、低纬大气对流理论、强涡旋边界层理论、环型对流的非线性解、大气与地球的热相互作用、积云参数化方法等方面都有重要贡献。本书介绍了郭教授的一部分工作。

石宗祥同志精心绘制了本书插图，谨致谢忱。

最后，我对叶笃正教授表示衷心感谢。没有叶教授多日的培养与教诲，我是不可能短短几个星期内整理出这样一本书来。

朱 伯 承

于中国科学院研究生院

1979.9.12

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 大气动力学

作者 =

页数 = 3 0 6

S S 号 = 0

出版日期 =

V s s 号 = 8 6 3 7 1 0 1 6