GIS专业主干课 ：21905001

计算机图形学
Computer Graphics

林伟华

中国地质大学（武汉）信息工程学院

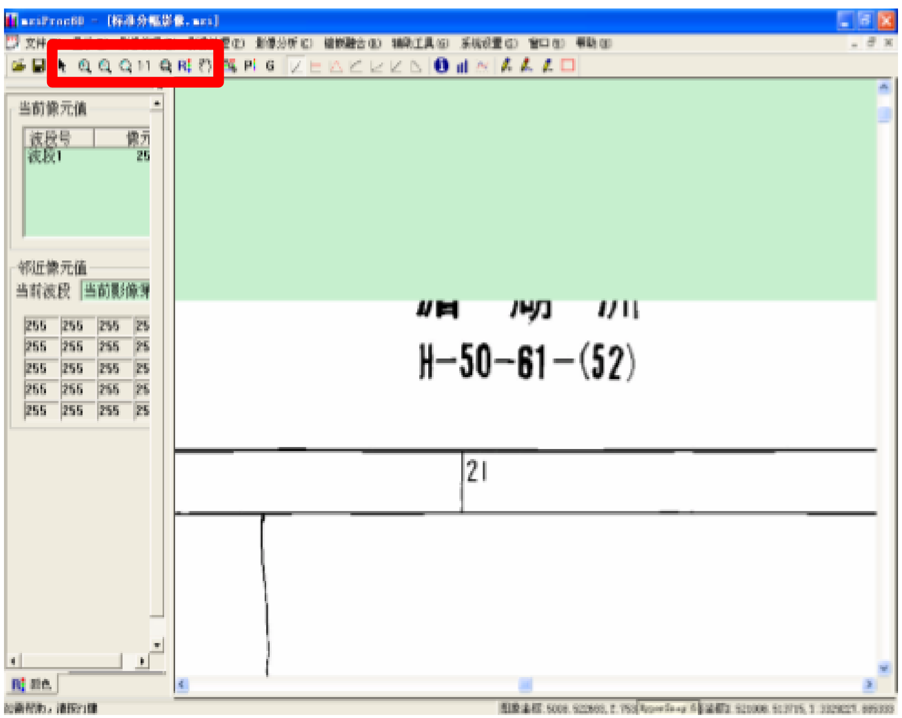
lwhcug@163.com

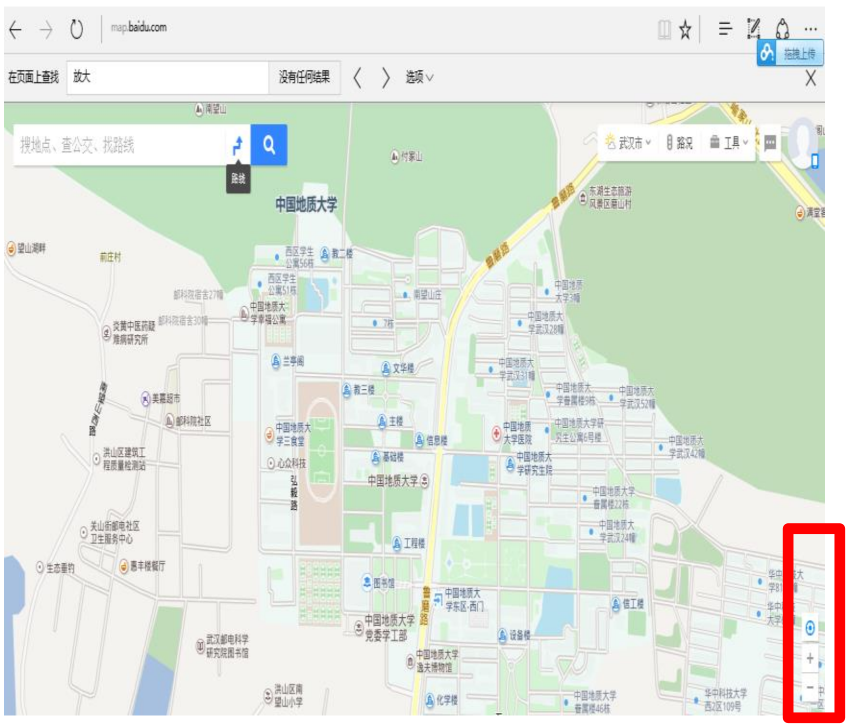
目录

- 二维图形基本变换
- 二维图形复合变换
- 三维图形基本变换
- 三维图形复合变换
- 三维图形投影变换

图形变换在GIS应用

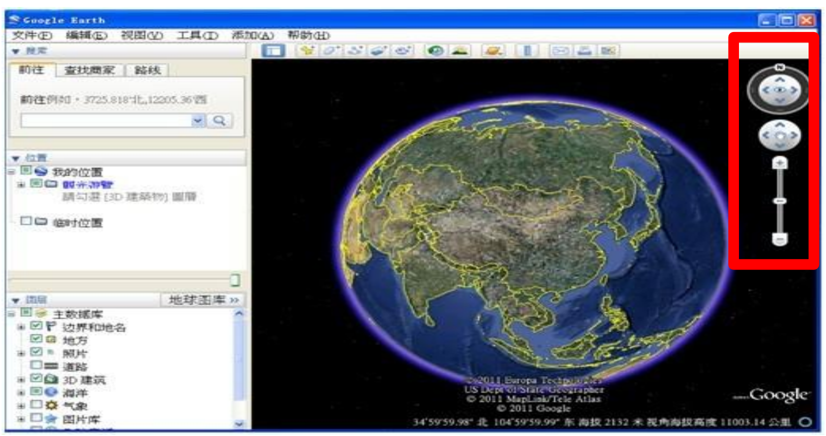
- **GIS中图形变换表现形式**
  - C/S端、Web端、移动端
  - 二维、三维
  - 放大、缩小、移动/漫游

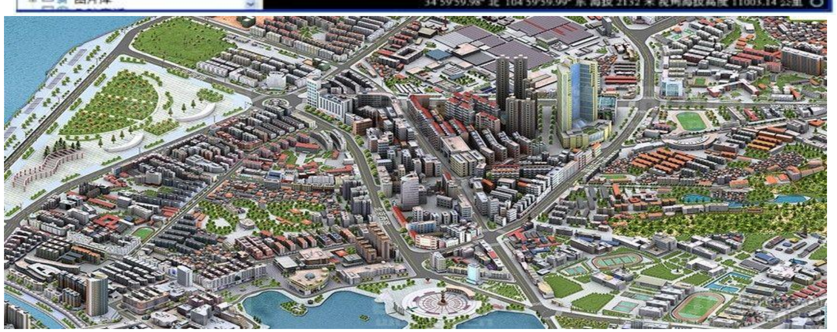




图形变换在GIS应用

- **GIS中图形变换**
  - C/S端、Web端、移动端
  - 二维、三维
  - 放大、缩小、移动/漫游





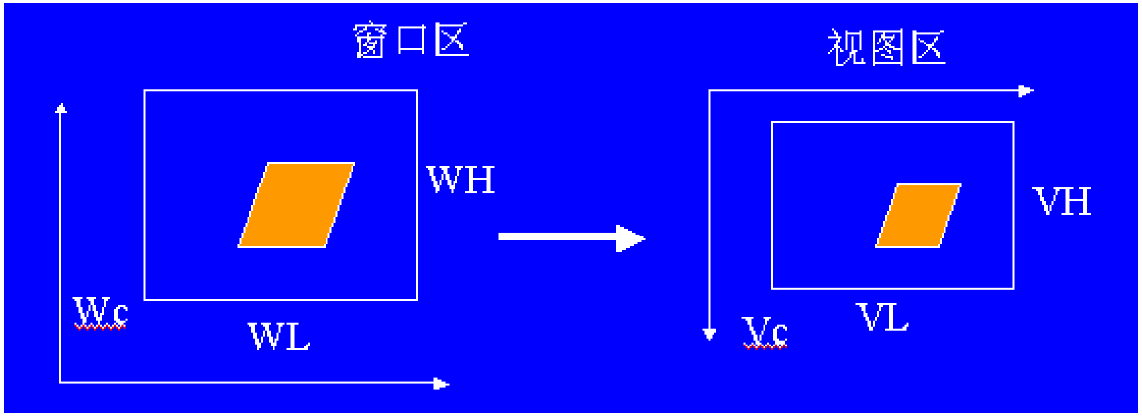
图形变换在GIS应用

- **MapGIS中图形变换接口**
  - CGisEditView :: _OpenWindow();　　　//开、放大窗口
  - CGisEditView :: _ReduceWindow();　　//缩小窗口
  - CGisEditView :: _MoveWindow();　　　//移动窗口
  - CGisEditView :: _PrevWindow();　　　//上(前)级窗口
  - CGisEditView :: _RestoreWindow();　　//复位窗口
  - CGisEditView :: _UpdateWindow();　　//更新窗口

- **ArcGIS中图形变换接口**
  - IEnvelope :: Expand (dx, dy, asRatio)//放大或缩小
  - IEnvelope :: Offset (X, Y)　　　　//平移

图形几何变换

- **几何变换：**
  - 对图形的几何信息经过**平移、比例、旋转等**变换后产生新的图形，是图形在方向、尺寸和形状方面的变换。
- **变换类型：**
  - 图形不动，坐标系变
  - 坐标系不动，图形移动



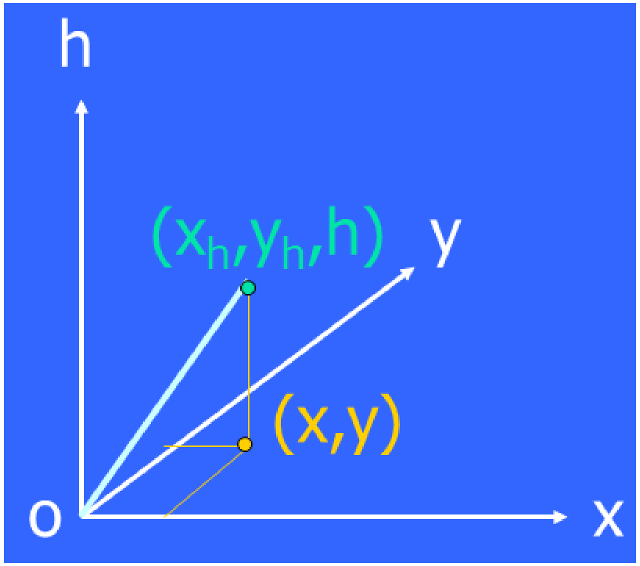
图形几何变换

- **齐次坐标**
  - **齐次坐标定义**：用n+1维向量表示一个n维向量
    P[P1,P2,…,Pn]　P[hP1,hP2,…,hPn,h] h不为0
  - **齐次坐标的不唯一性**

    如普通坐标系下的点（2,3）变换为齐次坐标可以是(1,1.5,0.5)(4,6,2)(6,9,3)等。
  - **规范化齐次坐标**：

    h=1的齐次坐标表示P[P1,P2,…,Pn,1]
  - **齐次坐标转换规范化齐次坐标**

    P[hP1 /h,hP2 /h,…,hPn/h,h/h]



二维平移变换

- **转换表达式**

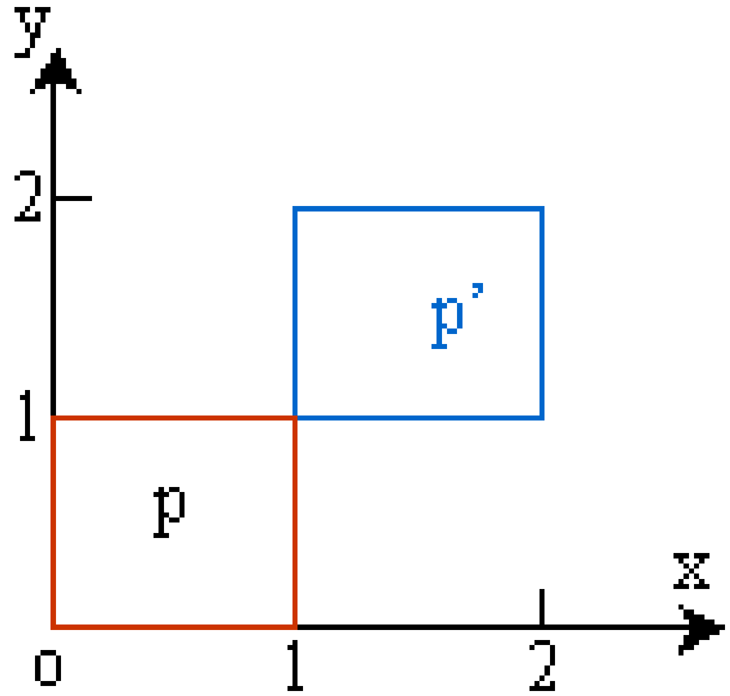
$x' = x + t_x \quad y' = y + t_y$

- **矩阵形式1**

$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$

$P' = P + T$



平移变换图示

二维平移变换

- **矩阵形式2（齐次形式）**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = T(t_x, t_y) \cdot P$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{pmatrix} = [x+t_x \quad y+t_y \quad 1]$$

$$P' = P \cdot T(t_x, t_y)$$

二维旋转变换

- **转换表达式**

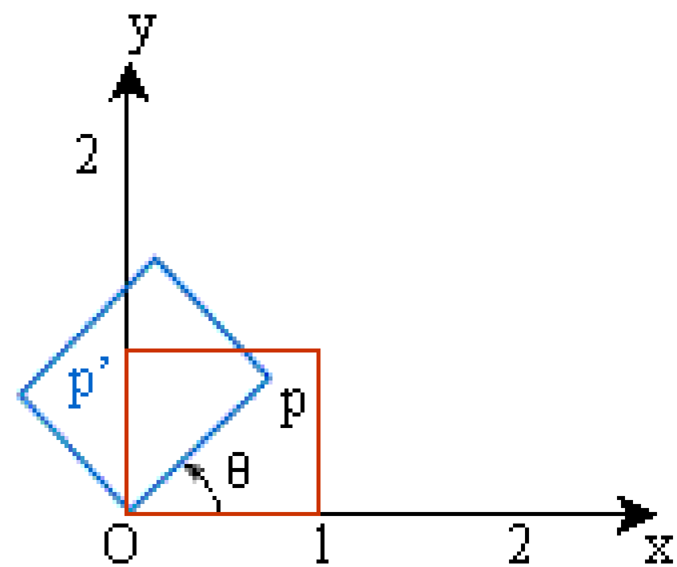
$$\begin{cases} x' = r\cos(\varphi+\theta) = r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ y' = r\sin(\varphi+\theta) = r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\cos\theta \end{cases}$$

即：
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

- **矩阵形式1**

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$P' = R \cdot P$$



旋转变换图示

二维旋转变换

- **矩阵形式2（齐次形式）**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = R(\theta) \cdot P$$

– **逆时针旋转**

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x\cos\theta - y\sin\theta \quad x\sin\theta + y\cos\theta \quad 1]$$

– **顺时针旋转**

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x\cos\theta + y\sin\theta \quad -x\sin\theta + y\cos\theta \quad 1]$$

二维比例变换

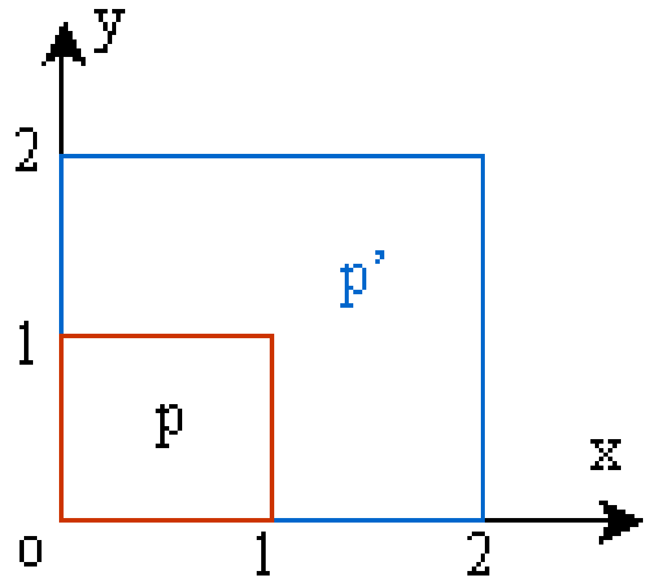
- **转换表达式**

$$\begin{cases} x' = x \cdot s_x \\ y' = y \cdot s_y \end{cases}$$

- **矩阵形式:**

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

$$P' = S \cdot P$$



比例变换图示

二维比例变换

- **矩阵形式2（齐次形式）**

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x s_x \quad y\, s_y \quad 1]$$

$$P' = P \cdot S(s_x, s_y)$$

二维比例变换

- **讨论：**

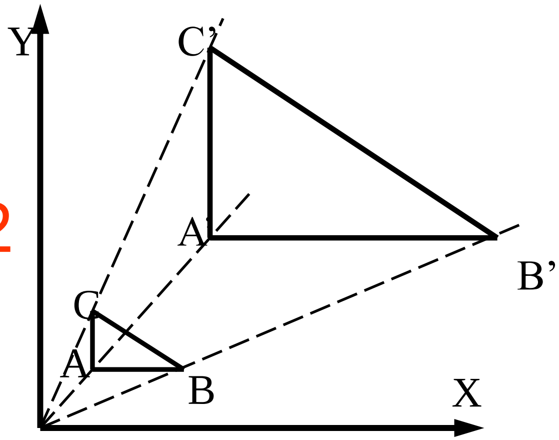
(1) $S_x = S_y = 1$ 时　　图形不变

(2) $S_x = S_y > 1$ 时　　沿两轴方向等比例放大

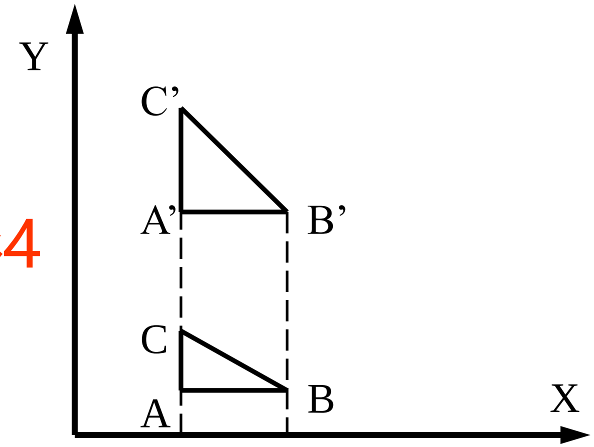
(3) $S_x = S_y < 1$ 时　　沿两轴方向等比例缩小

(4) $S_x <> S_y$ 时　　沿两轴方向作非均匀比例变换

情形2

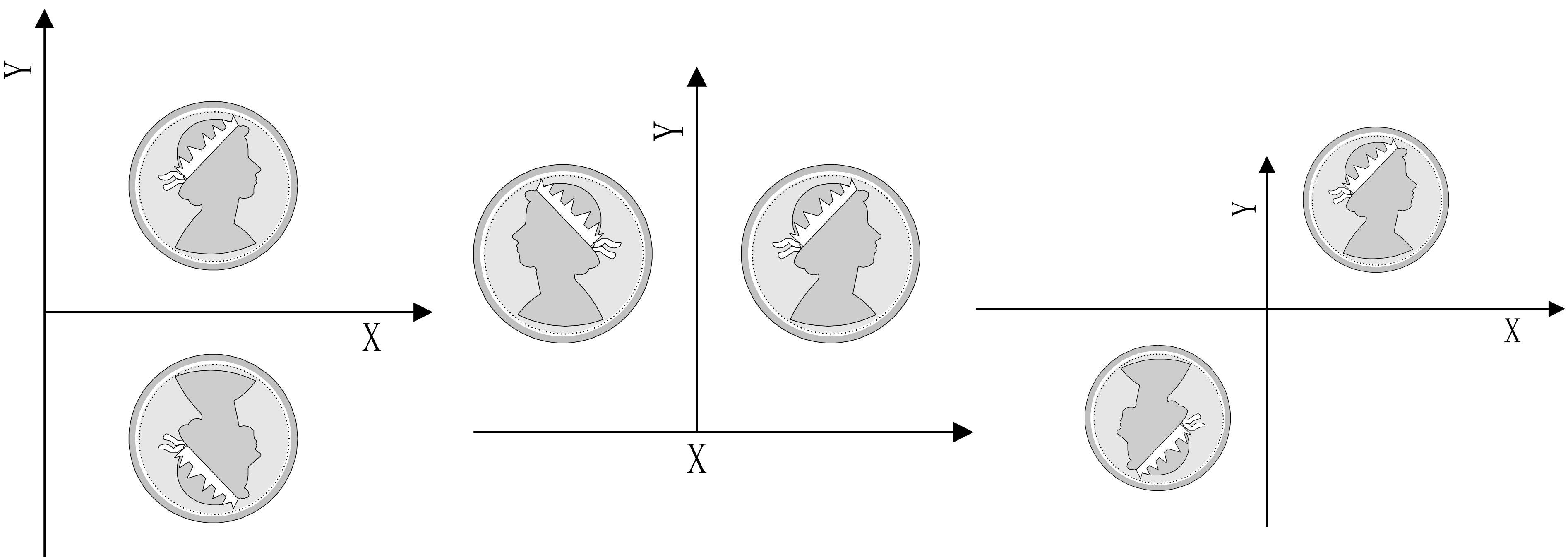


情形4



二维对称变换

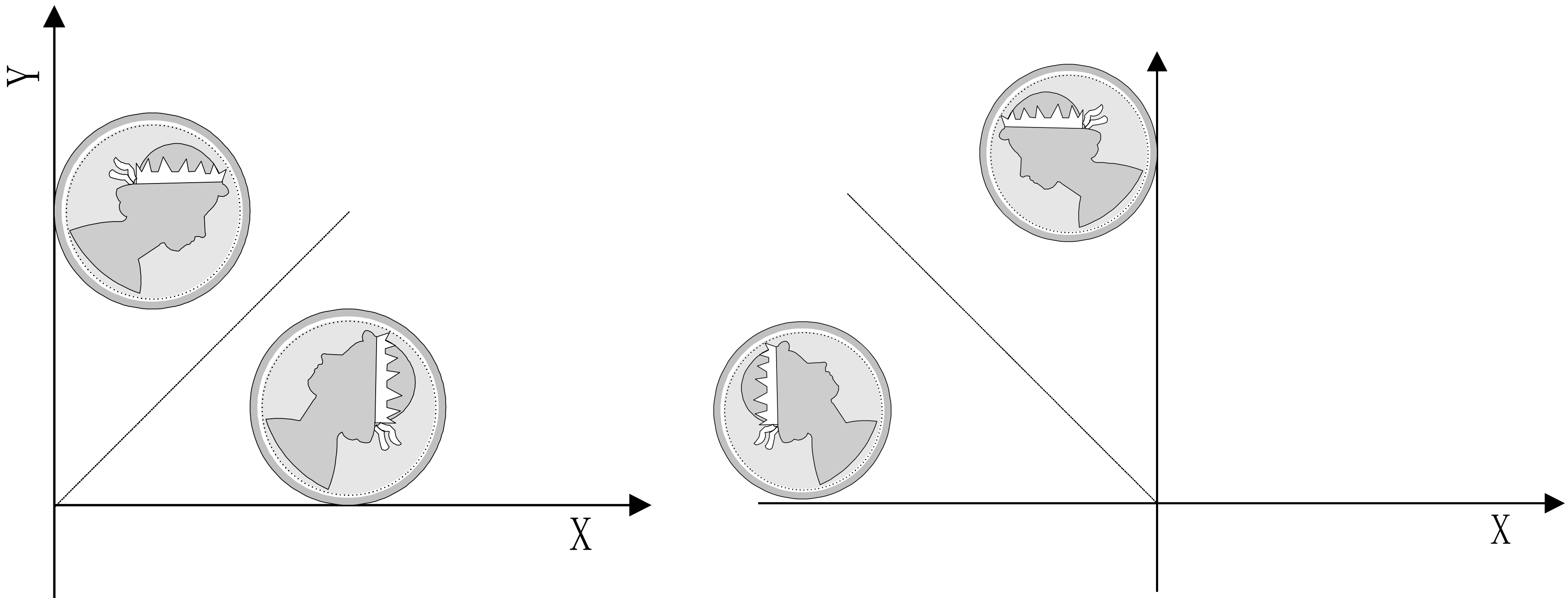
对称变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。



(a)关于x轴对称　(b)关于y轴对称　(c)关于原点对称

二维对称变换

对称变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。



(d)关于x=y对称

(e)关于x=-y对称

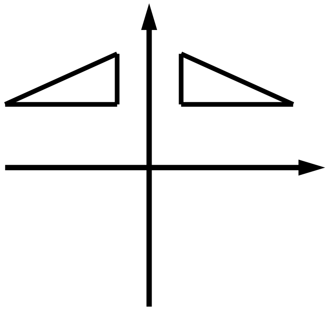
二维对称变换

- **变换矩阵**

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax+by \quad dy+ey \quad 1]$$

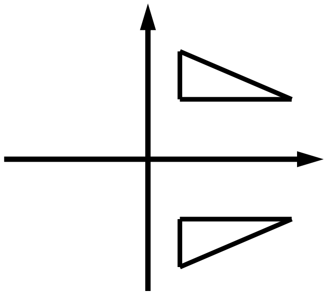
(1) b = d = 0, a = -1, e = 1 时 $x^* = -x$, $y^* = y$, 以y 轴对称

$$[x' \ y' \ 1] = [x \ y \ 1] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [-x \quad y \quad 1]$$



(2) b = d = 0, a = 1, e = -1 时 $x^* = x$, $y^* = -y$, 以x 轴对称

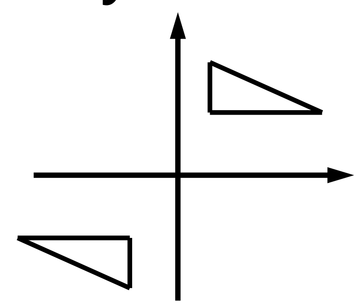
$$[x' \ y' \ 1] = [x \ y \ 1] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x \quad -y \quad 1]$$



二维对称变换

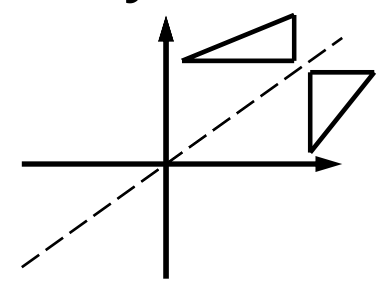
(3) b = d = 0, a = e = -1 时　$x^* = -x,\ y^* = -y$, 以原点对称

$$[x'\ y'\ 1]=[x\ y\ 1]\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=[-x\ \ -y\ \ 1]$$



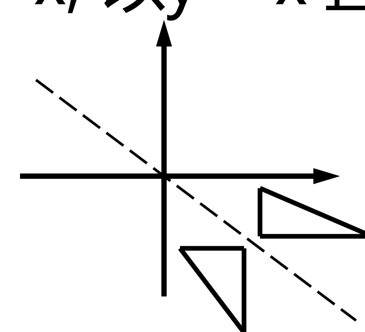
(4) b = d = 1, a = e = 0 时　$x^* = y,\ y^* = x$, 以y = x 直线对称

$$[x'\ y'\ 1]=[x\ y\ 1]\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=[y\ \ x\ \ 1]$$



(5) b = d = -1, a = e = 0 时　$x^* = -y,\ y^* = -x$, 以y=-x 直线对称

$$[x'\ y'\ 1]=[x\ y\ 1]\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=[-y\ \ -x\ \ 1]$$



二维错切变换

- **含义**：剪切、错位变换，用于产生弹性物体的变形处理。

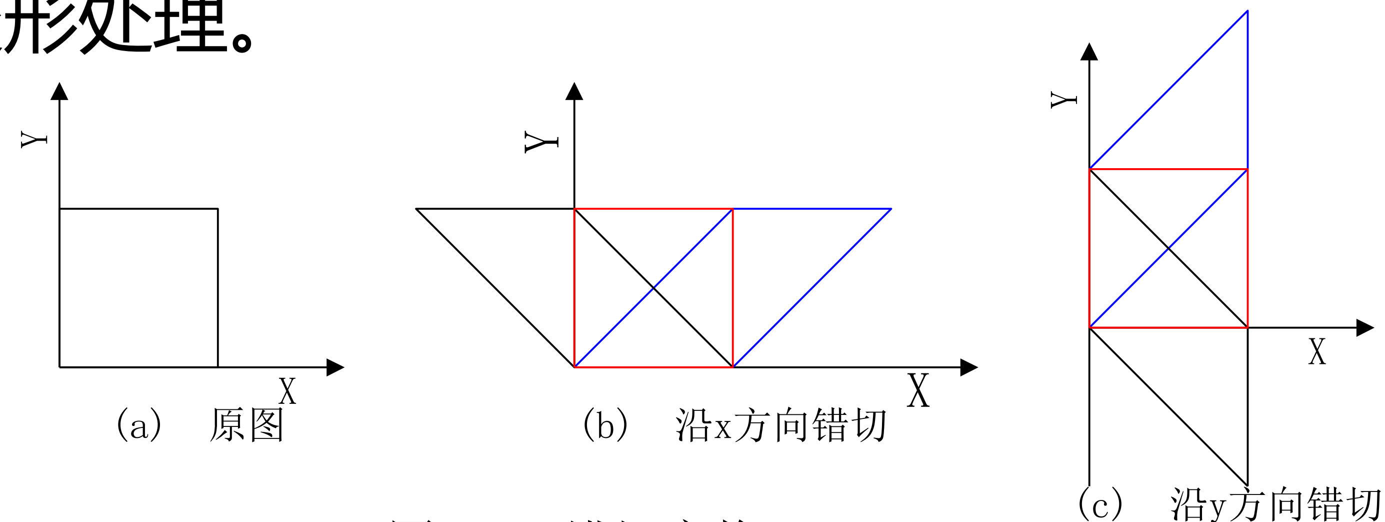


图6-7 错切变换

- **变换矩阵**

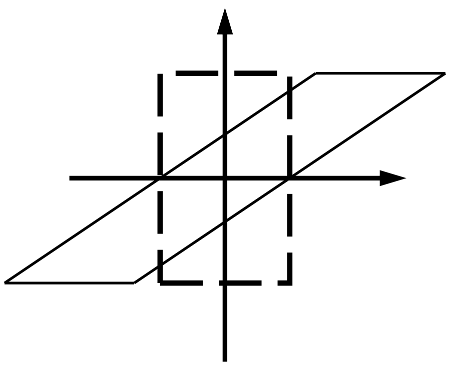
$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & d & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x+by \quad dx+y \quad 1]$$

二维错切变换

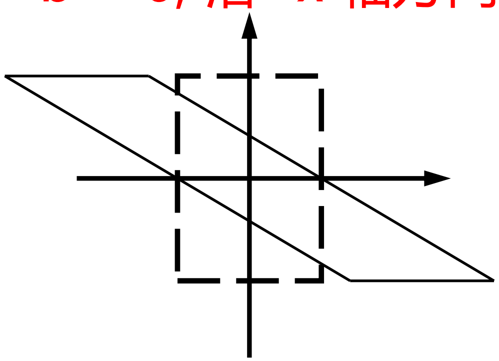
讨论： (1) d = 0 时 $x^* = x + by,\ y^* = y,$ 沿x 轴方向错切

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ SHx & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x + SHx \cdot y \quad y \quad 1]$$

b > 0, 沿 *+x*轴方向错切位移



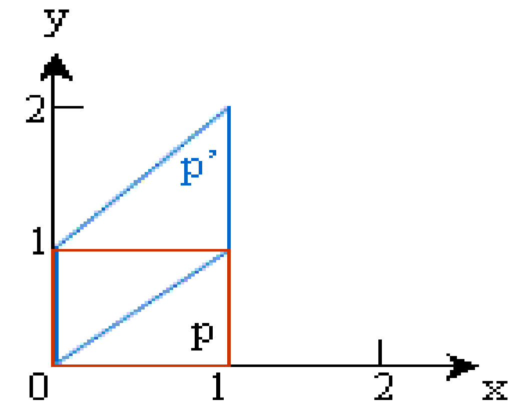
b < 0, 沿 *-x*轴方向错切位移



二维错切变换

(2) b＝0时　　$x^{*}= x,\ y^{*}= dx+ y,$　　沿y 轴方向错切

$$[x'\ y'\ 1]=[x\ y\ 1]\cdot\begin{pmatrix}1 & SHy & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=[x\quad x\cdot SHy+y\quad 1]$$



y 方向错切变换

(3) b < > 0, d < > 0 时　　　　　同时沿两 轴方向错切

二维复合变换

- **1、相对于原点的复合变换**
  - 图形作一次以上的几何变换，变换结果是每次的变换矩阵相乘。
  - 任何一复杂的几何变换都可以看作基本几何变换的组合形式。
  - 复合变换具有形式：

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n)$$

$$= P \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n \qquad (n > 1)$$

二维复合变换

复合平移：

$$T_t = T_{t1} \cdot T_{t2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} & T_{y1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x2} & T_{y2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1}+T_{x2} & T_{y1}+T_{y2} & 1 \end{bmatrix}$$

复合比例: $T_s = T_{s1} \cdot T_{s2}$

复合旋转: $T_r = T_{r1} \cdot T_{r2}$

* 利用复合变换调整参考点

* 几何变换不改变图形的连接关系和平行关系

二维复合变换

- **2、相对于参考点(xf，yf)的复合变换**

其变换过程为：

(1) 平移

(2) 针对原点进行二维几何变换

(3) 反平移

例1. 相对点(x_F,y_F)的旋转变换

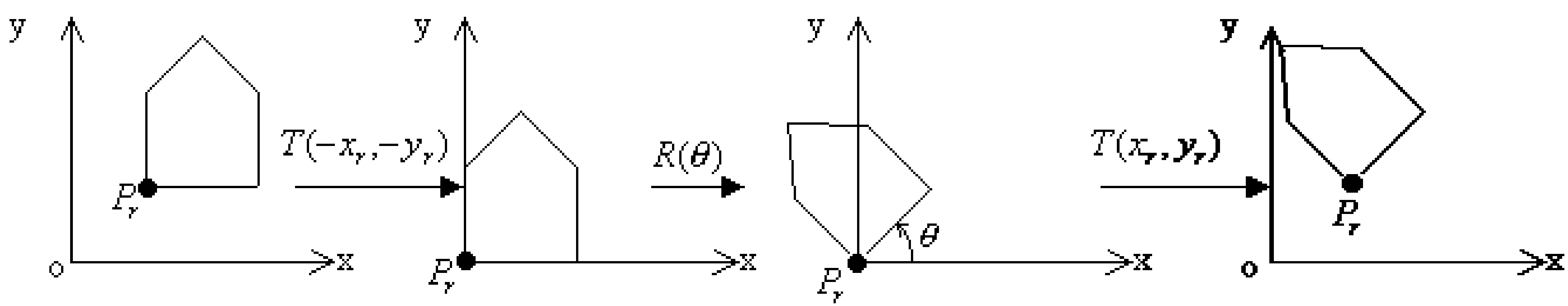
例2. 相对点(x_F,y_F)的比例变换

二维复合变换

例1. 相对点(xf,yf)的旋转变换

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_f & -y_f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_f & y_f & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ (1-\cos\theta)\cdot x_f + y_f \cdot\sin\theta & (1-\cos\theta)\cdot y_f - x_f \cdot\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

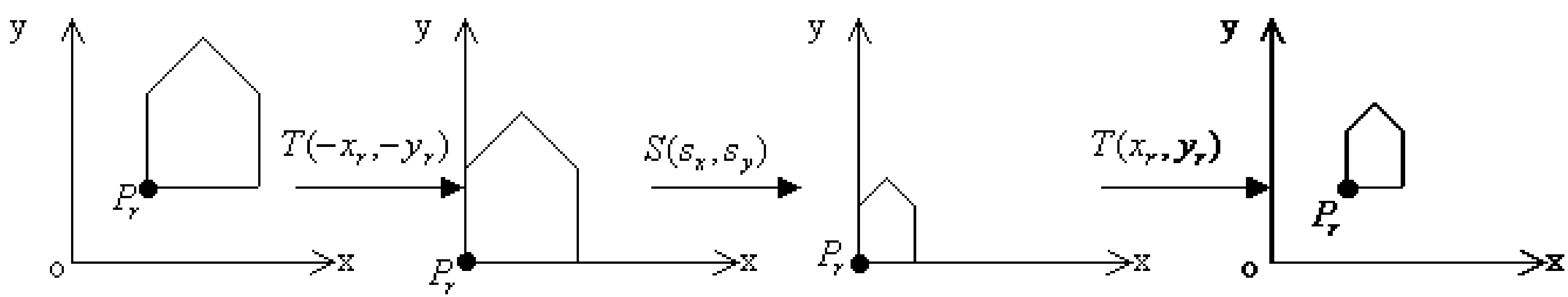


二维复合变换

例2. 相对点(xf,yf)的比例变换

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x_f & -y_f & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_f & 0 & 0\\ 0 & S_f & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x_f & y_f & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}S & 0 & 0\\ 0 & S & 0\\ (1-S_f)\cdot x_f & (1-S_f)\cdot y_f & 1\end{pmatrix}$$



二维复合变换

- **3、相对于任意方向二维几何变换**

其变换过程为：

……

(1) 相对原点旋转变换

(2) 针对坐标轴进行二维几何变换

(3) 相对原点反向旋转

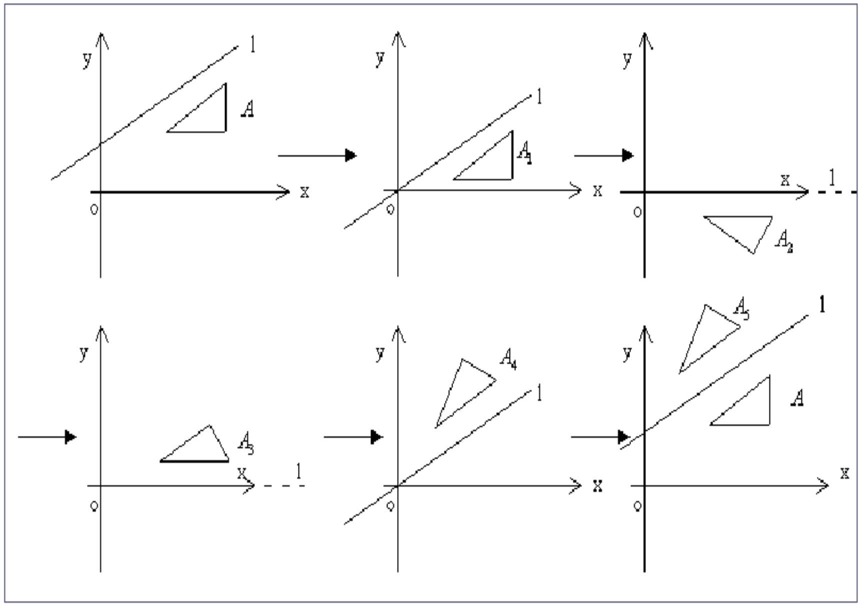
……

二维复合变换

- 例：任一图形关于任意的反射轴y=a+bx的反射变换

1. 将坐标原点平移到(0,a)处

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$



2. 将反射轴（已平移后的直线）按顺时针方向旋转θ角，使之与x轴重合

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二维复合变换

3. 图形关于x轴的反射变换

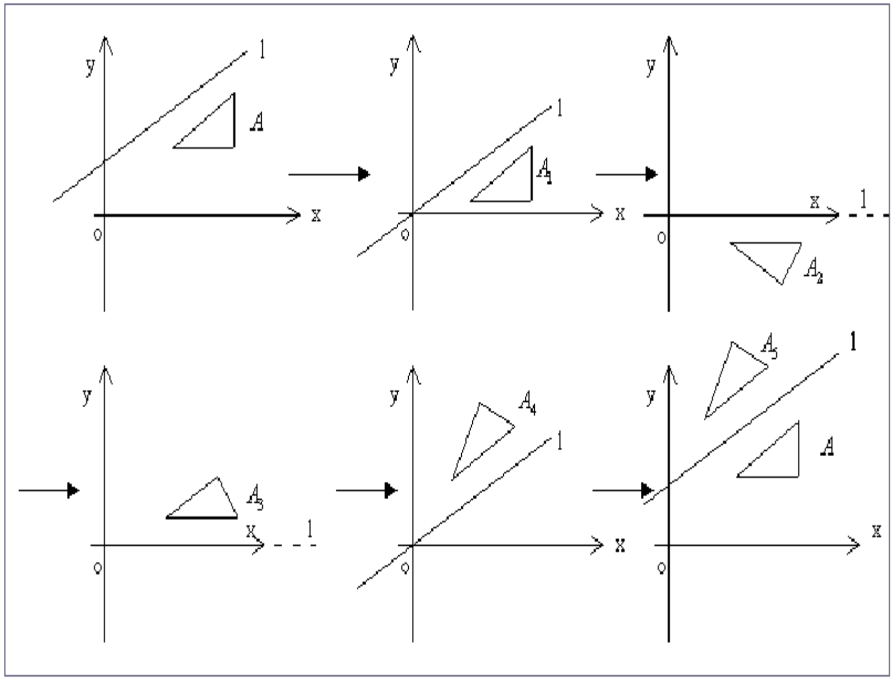
$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 将反射轴逆时针旋转θ角

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.恢复反射轴的原始位置

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$



因此，$T = T_1 R(-\theta) T_2 R(\theta) T_3$

三维几何变换

- **变换类型：**
  - 基本变换（平移、旋转、变比例）
  - 复合变换
  - 投影变换
- **变换特点：**
  - 三维基本几何变换都是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换。
  - 假设三维形体变换前一点为p(x,y,z)，变换后为p'(x',y',z')。

三维平移变换

- **转换矩阵**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = T(t_x, t_y, t_z) \cdot P$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = P \cdot T(t_x, t_y, t_z)$$

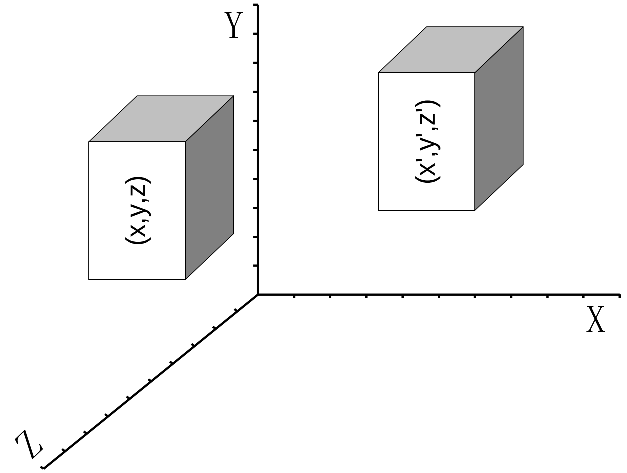


图7-5　平移变换

三维比例变换

- **转换矩阵**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$$

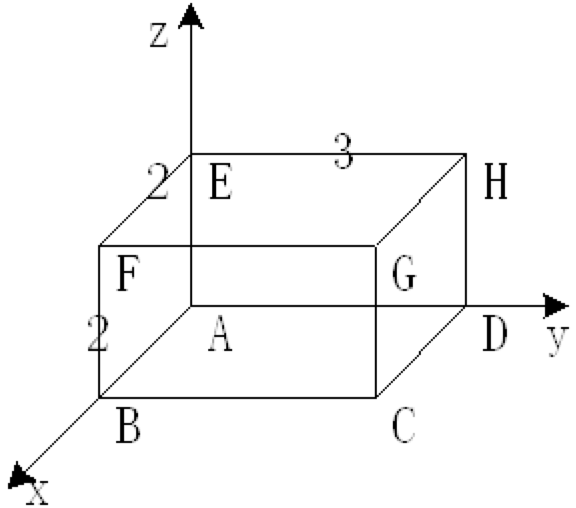
$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

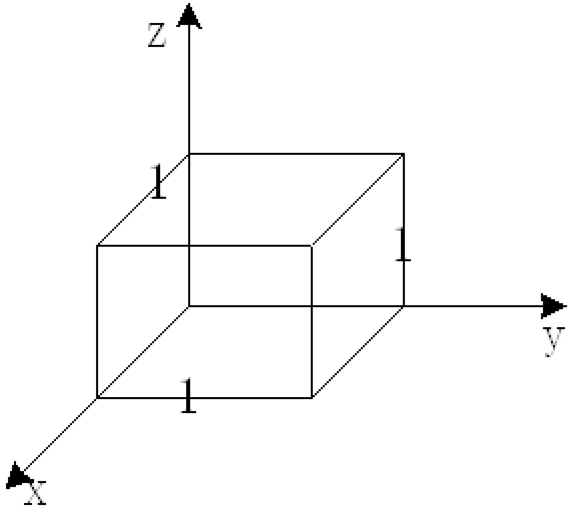
$$P' = P \cdot S(s_x, s_y, s_z)$$

三维比例变换

例子：对如图7-6所示的长方形体进行比例变换，其中a=1/2，e=1/3，j=1/2，求变换后的长方形体各点坐标。

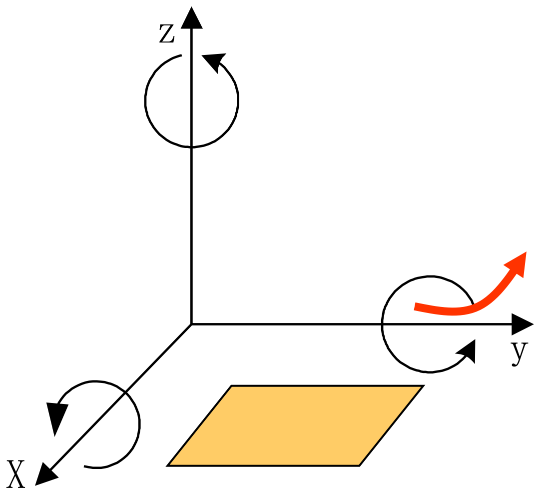
计算：$$T_s=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



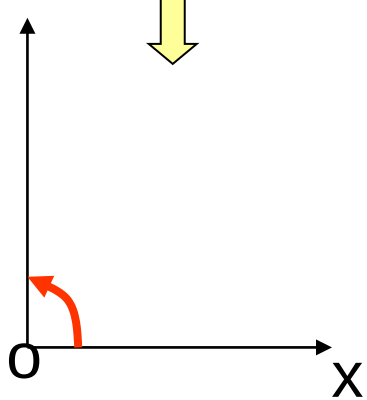


三维旋转变换

- (1)绕z轴旋转-转换矩阵



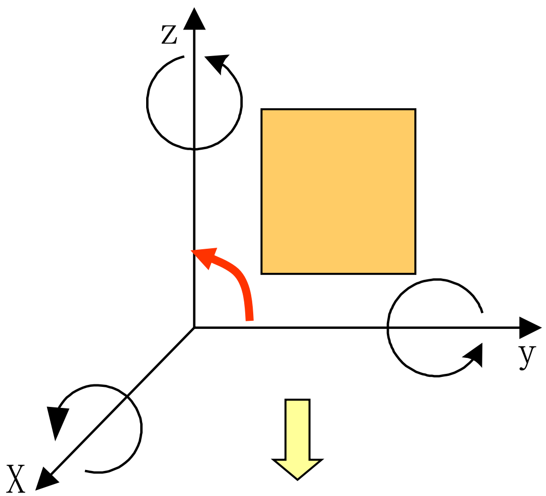
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



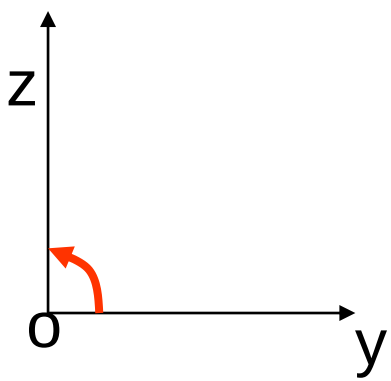
$$T_{RZ} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维旋转变换

- (2)绕x轴旋转-转换矩阵



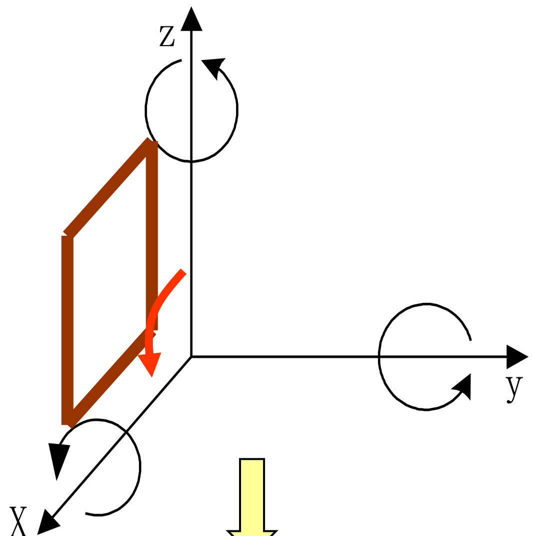
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



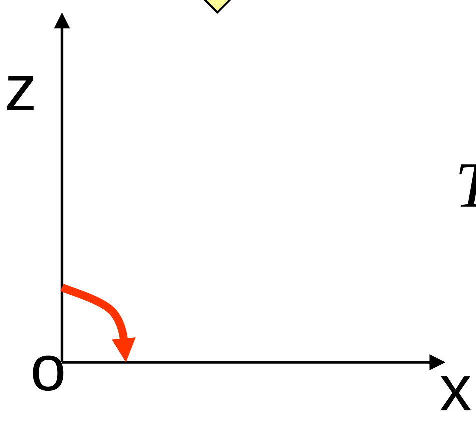
$$T_{RX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维旋转变换

- (3)绕y轴旋转-转换矩阵



$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$T_{RY} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维对称变换

- **(1)关于坐标平面对称**
  - 关于xoy平面进行对称变换矩阵：

$$T_{Fxy}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

  - 关于yoz平面进行对称变换矩阵：

$$T_{Fyz}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

  - 关于xoz平面进行对称变换矩阵：

$$T_{Fzx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维对称变换

- **(2)关于坐标轴对称变换**
  - 关于x轴进行对称变换矩阵：

$$T_{Fx}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

  - 关于y轴进行对称变换矩阵：

$$T_{Fy}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

  - 关于z轴进行对称变换矩阵：

$$T_{Fz}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

三维错切变换

(1)沿x方向错切

$$T_{SH}=\begin{bmatrix}1 & b & c & 0\\ d & 1 & f & 0\\ g & h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow T_{SHx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ d & 1 & 0 & 0\\ g & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(2)沿y方向错切

$$T_{SH}=\begin{bmatrix}1 & b & c & 0\\ d & 1 & f & 0\\ g & h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow T_{SHy}=\begin{bmatrix}1 & b & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3)沿z方向错切

$$T_{SH}=\begin{bmatrix}1 & b & c & 0\\ d & 1 & f & 0\\ g & h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow T_{SHz}=\begin{bmatrix}1 & 0 & c & 0\\ 0 & 1 & f & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维逆变换

- (1)平移的逆变换

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{bmatrix} \qquad T_t^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & -T_z & 1 \end{bmatrix}$$

- (2)比例的逆变换（局部）

$$T_s = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_s^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维逆变换

- **(3)比例的逆变换（整体）**

$$T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \qquad T_S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

- **(4)旋转的逆变换**

$$T_{RZ} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{RZ}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维复合变换

- **(1)相对任一参考点的三维复合变换**

  相对于参考点F(x_f,y_f,z_f)作比例、旋转、错切等复合变换过程：

  (1) 将参考点F移至坐标原点

  (2) 针对原点进行二维几何变换

  (3) 进行反平移

  例：相对于F(xf,yf,zf)点进行比例变换

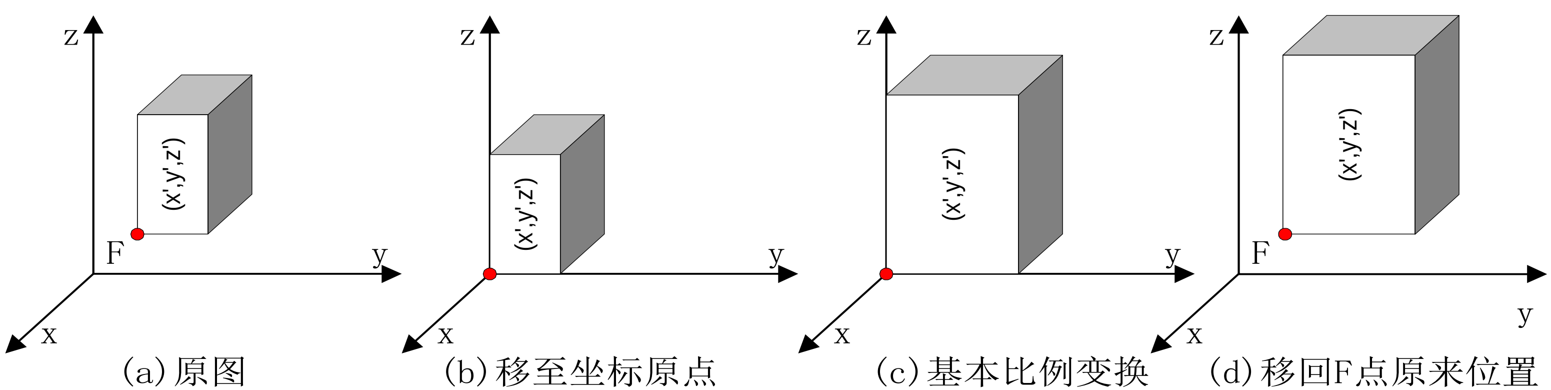


图7-8　相对参考点F的比例变换

三维复合变换

- **(2)绕任意轴的三维旋转变换**

思路： 将旋转轴转到 z 轴方向，对图形作绕 z 轴的旋转变换后在转回原位置

例：设旋转轴由空间一点$A(x_a, y_a, z_a)$及其方向数 (a, b, c) 定义，若空间一点 $P(x_p, y_p, z_p)$ 绕 A 轴转 q 角到 $P^*(x^*_p, y^*_p, z^*_p)$, 构造关系

$$[x^*_p \quad y^*_p \quad z^*_p \quad 1] = [x_p \quad y_p \quad z_p \quad 1] \cdot R_a$$

其中， R_a为待求的变换矩阵

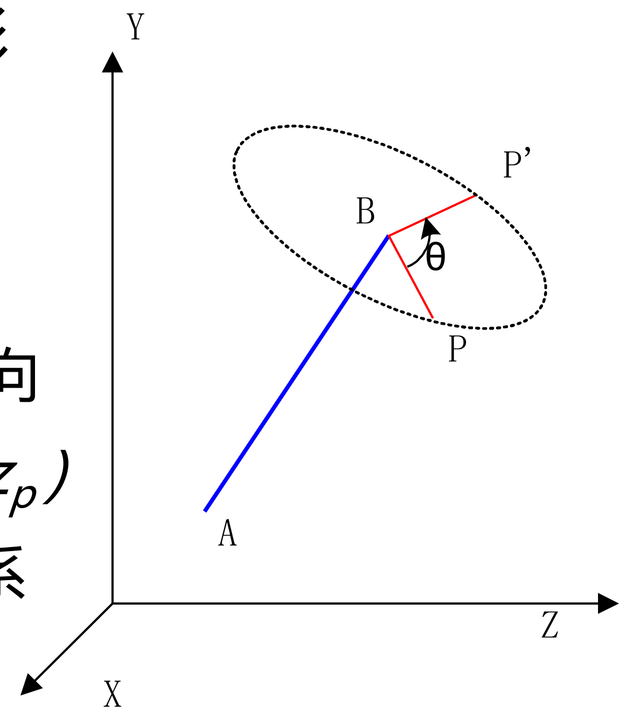
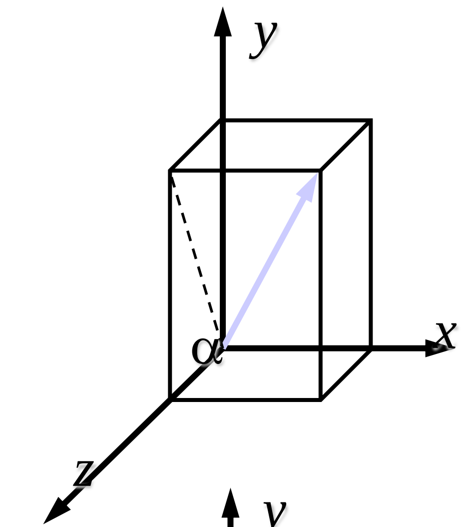


图7-9 P点绕AB轴旋转

三维复合变换

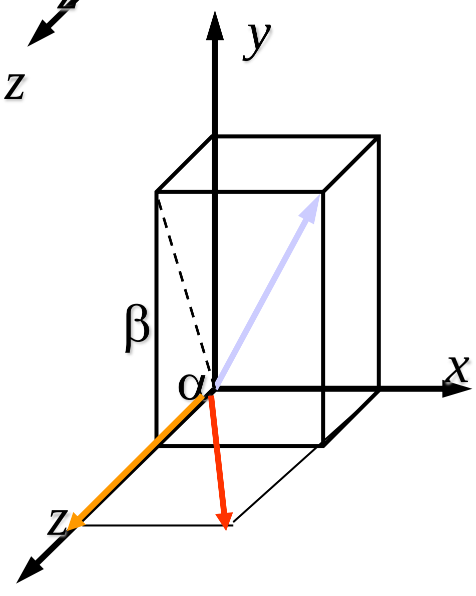
(1) 使坐标原点平移到 A 点，即用平移矩阵作变换

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_a & -y_a & -z_a & 1 \end{bmatrix}$$



(2)：绕 x 轴转 a 角，使 B 落在 x-z 平面内

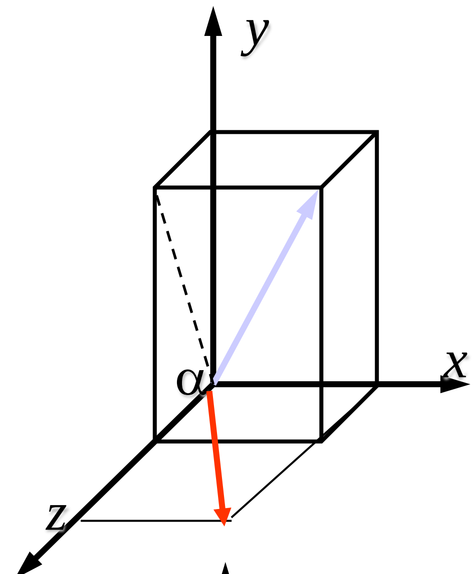
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



三维复合变换

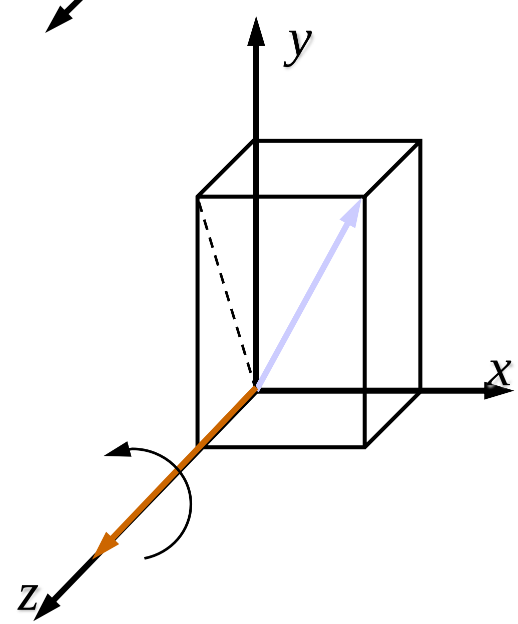
(3)：绕 *y* 轴转 b 角，使 B 落在 *z* 轴上

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(4)：绕 *z* 轴转 q 角，使 *P* 绕 *AB* 旋转 q 角

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



三维复合变换

(5)：求 R_y, R_x, T_A 的逆变换

$$R_y^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad R_x^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad T_A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ x_a & y_a & z_a & 1\end{bmatrix}$$

(6)：总的变换矩阵为：

$$R_a = T_A \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot R^{-1}{}_y \cdot R^{-1}{}_x \cdot T^{-1}{}_A$$

三维复合变换

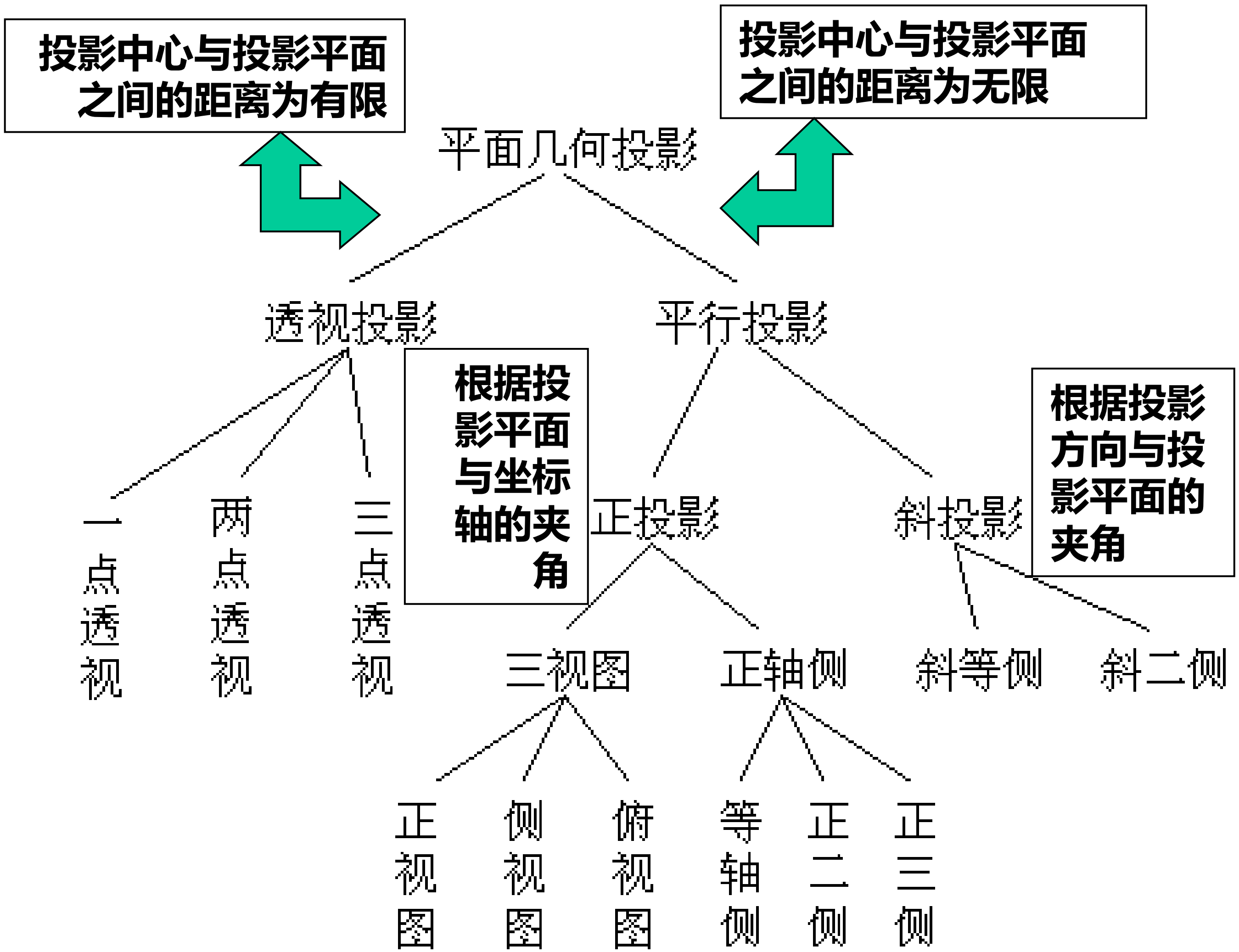
- **绕任意方向轴的变换步骤：**
  - (1) 使任意方向轴的起点与坐标原点重合，此时进行平移变换。
  - (2) 使方向轴与某一坐标轴重合，此时需进行旋转变换，且旋转变换可能不止一次。
  - (3) 针对该坐标轴完成变换。
  - (4) 用逆旋转变换使方向轴回到其原始方向。
  - (5) 用逆平移变换使方向轴回到其原始位置。

三维投影变换

- **定义**：投影变换就是把三维立体（或物体）投射到投影面上得到二维平面图形。
- **分类**：
  - **平面几何投影**主要指平行投影、透视投影以及通过这些投影变换而得到的三维立体的常用平面图形：三视图、轴测图。
  - **观察投影**是指在观察空间下进行的图形投影变换。

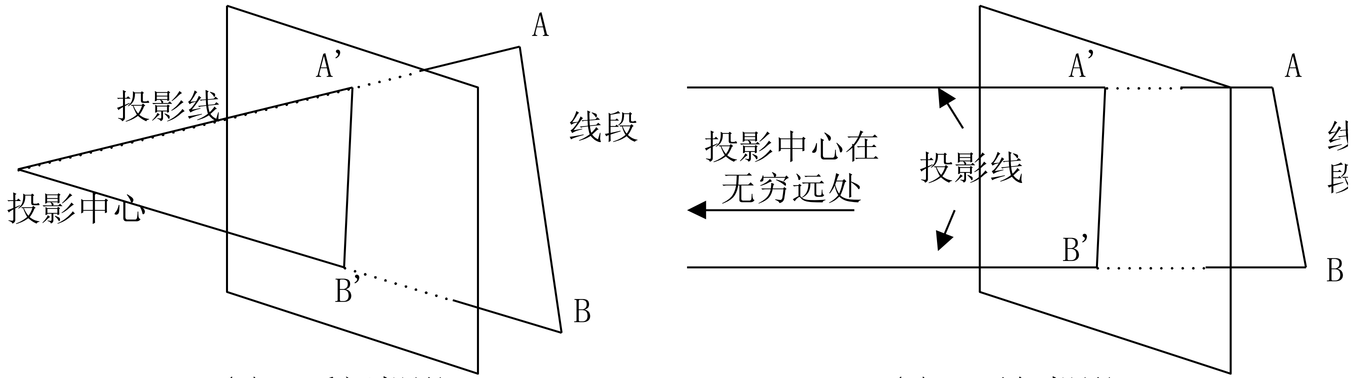
三维投影变换

- **平面几何投影分类：**



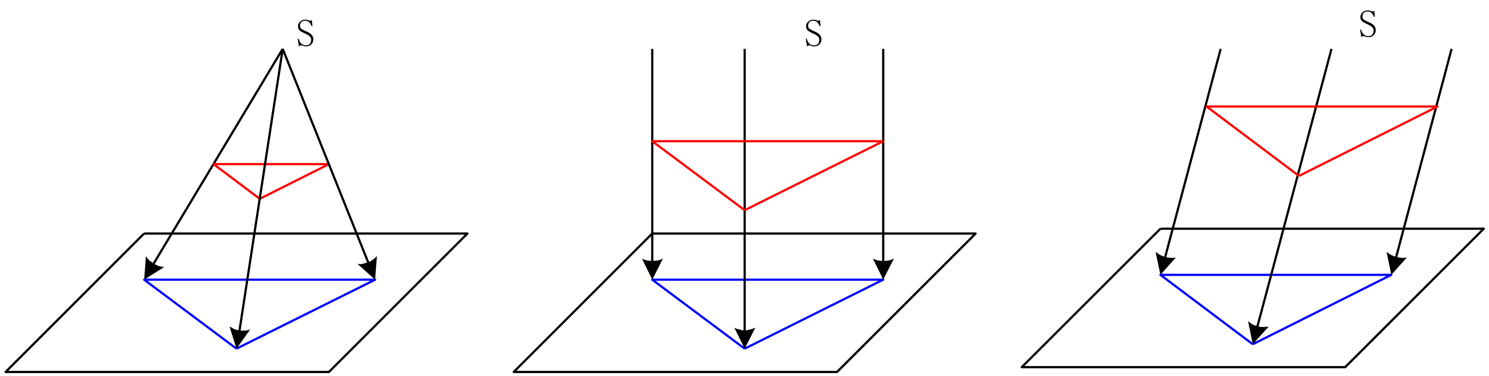
三维投影变换

- **示例：投影中心、投影面、投影线；平行投影**



(a)　透视投影　　　(b)　平行投影

图7-1　线段AB的平面几何投影

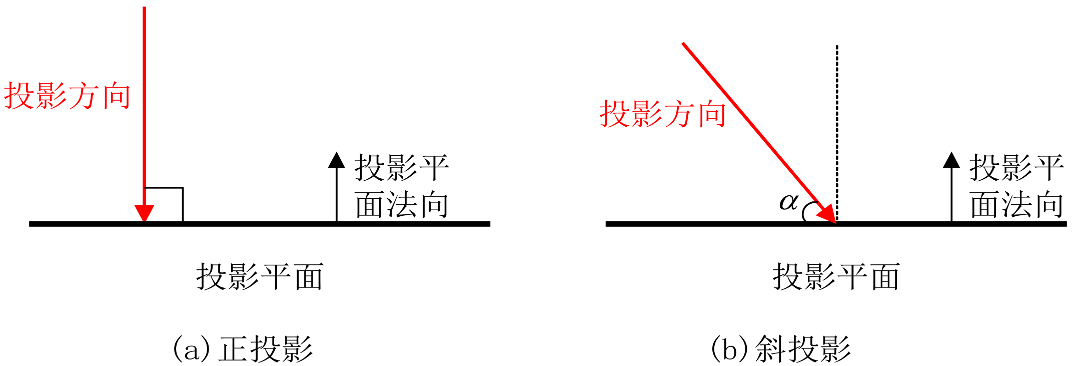


(a)透视投影　　(b)正投影　　(c)斜投影

图7-2　平面几何投影分为透视投影和平行投影

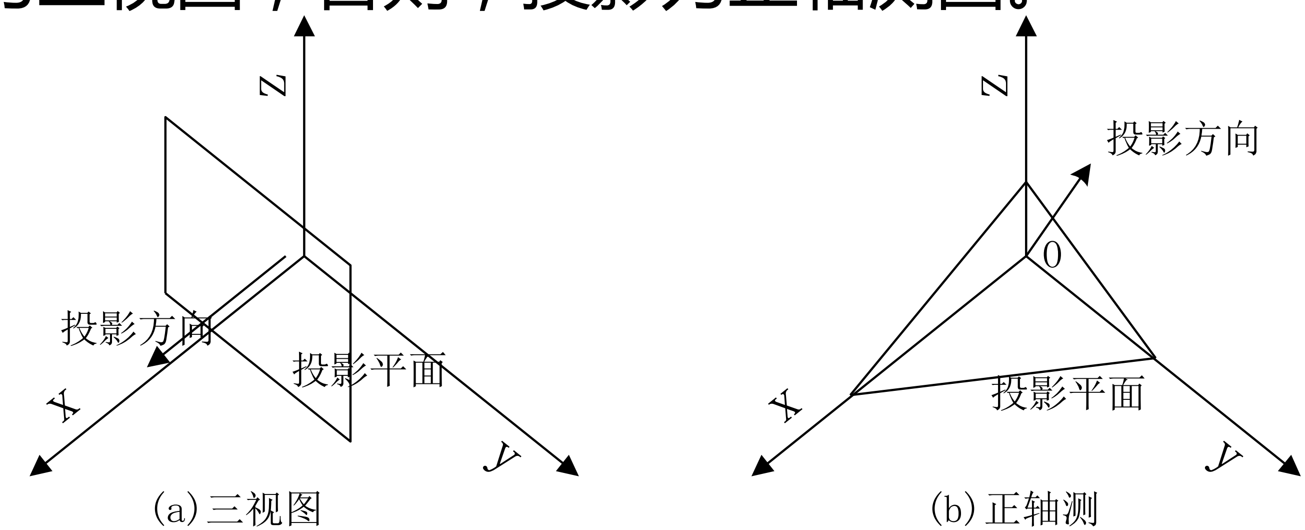
三维平行投影

- **平行投影可分成两类：**
  - **正投影**
  - 斜投影



7-11　平行投影

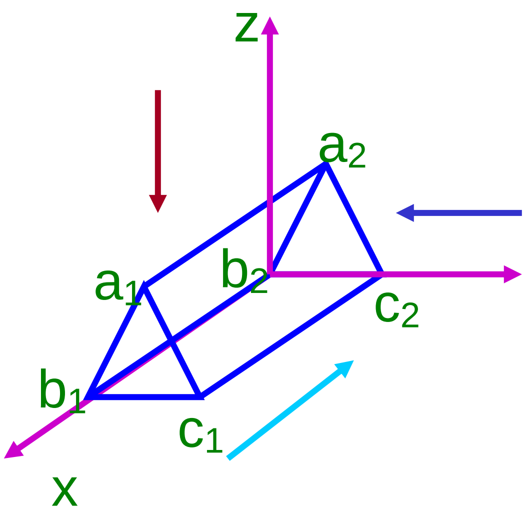
- **三视图和正轴测：**当**投影面**与**某一坐标轴**垂直时，投影为三视图；否则，投影为正轴测图。

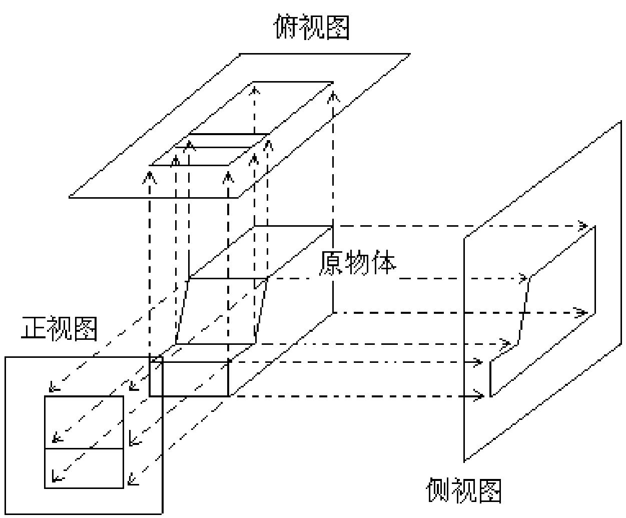


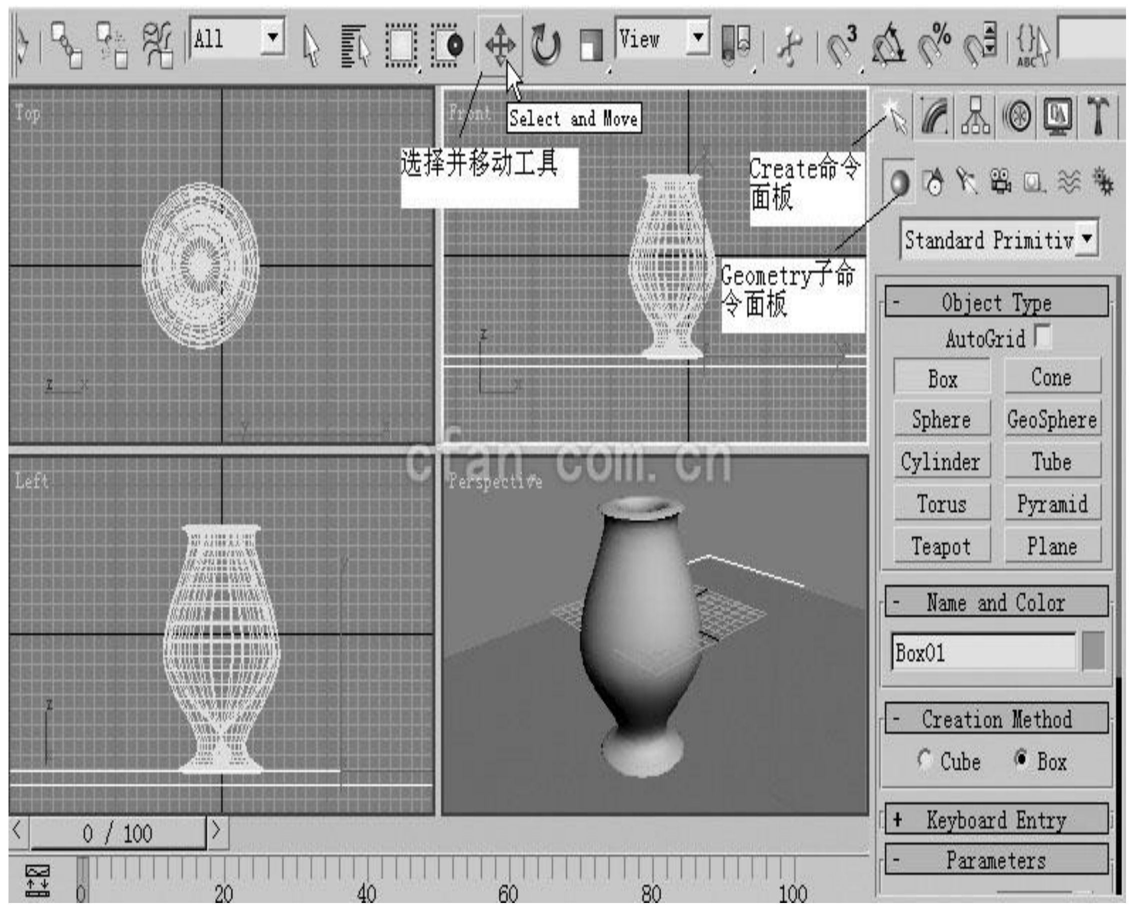
7-12　正投影

三维三视图

- **三视图：正视图、侧视图和俯视图**







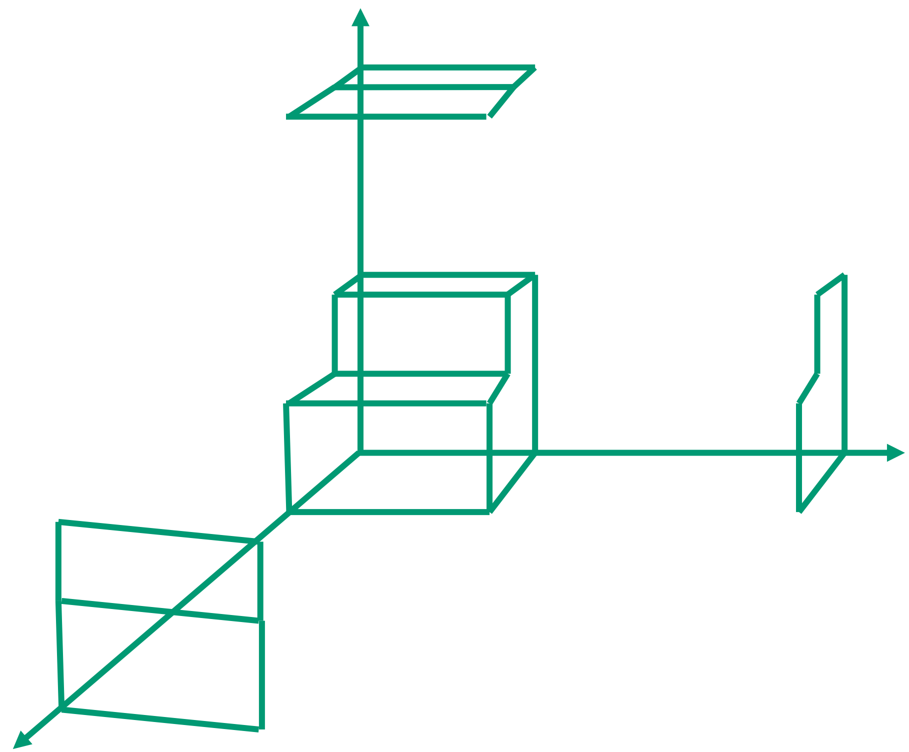
三维三视图

- **三视图投影变换矩阵**

$$T_{xoz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

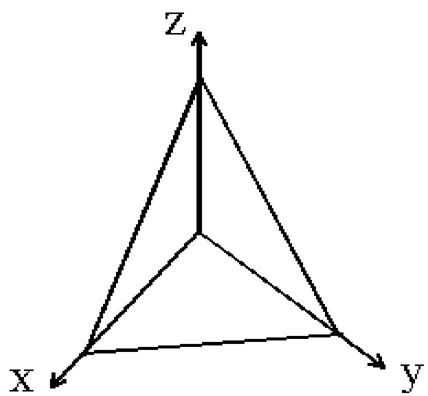
$$T_{yoz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

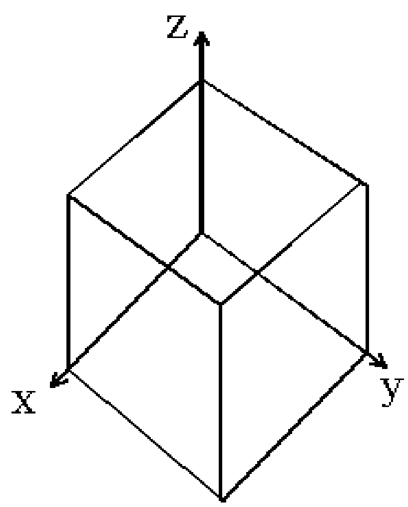
$$T_{xoy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



三维正轴侧投影

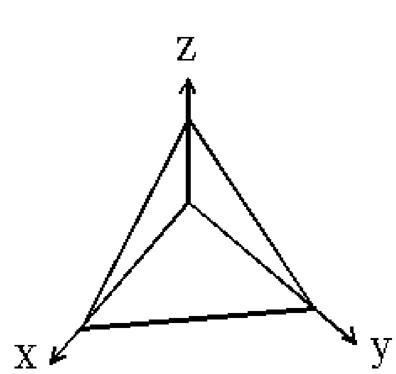
- **定义**
  - 投影方向不取坐标轴方向，投影平面不垂直于坐标轴时的正投影。
- **分类：**
  - **正等侧：**投影平面与**三个**坐标轴的交点到坐标原点的距离都**相等**。沿**三个**轴线具有**相同**的变形系数。

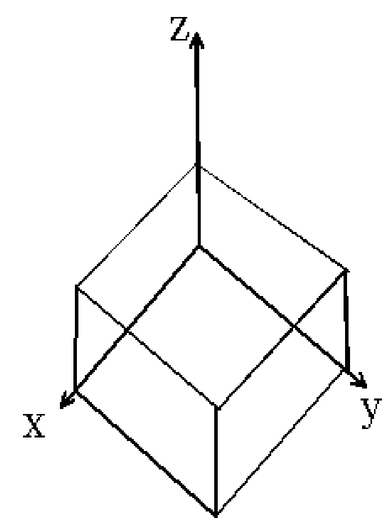




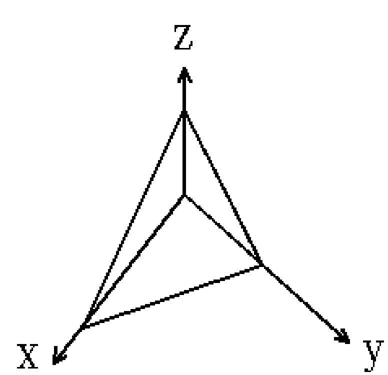
三维正轴侧投影

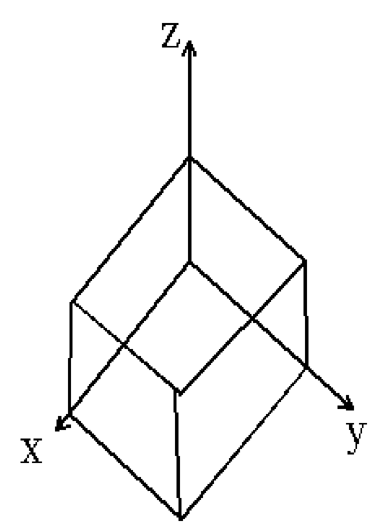
- **正二侧**：投影平面与**两个**坐标轴的交点到坐标原点的距离都**相等**。沿**两个**轴线具有**相同**的变形系数。





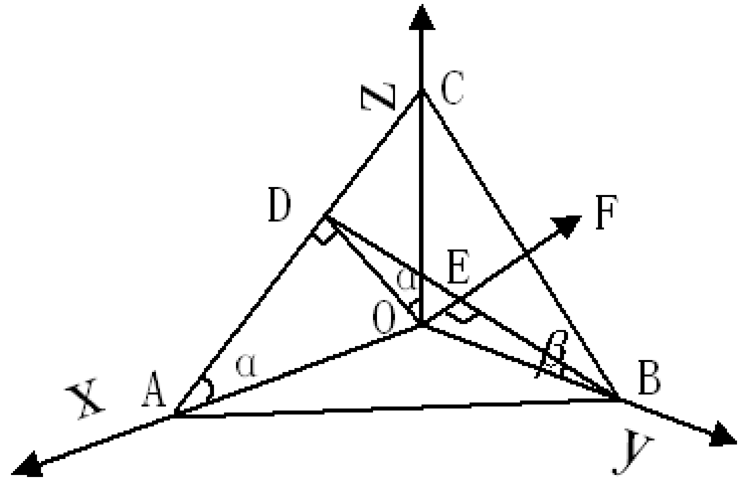
- **正三侧**：投影平面与**三个**坐标轴的交点到坐标原点的距离都**不相等**。沿**三个**轴线具有**不相同**的变形系数。

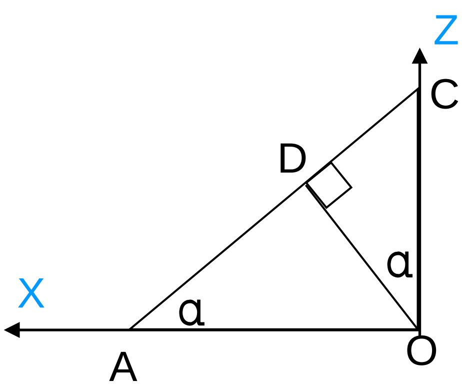




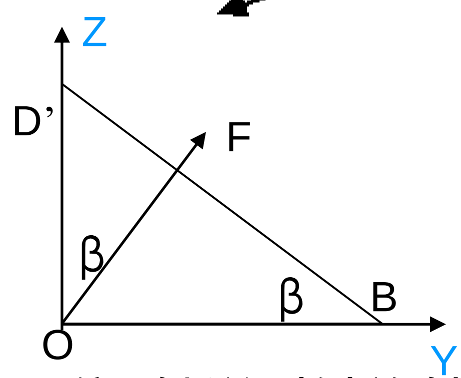
三维正轴侧投影

- **正轴侧投影变换矩阵**
  - 作BD垂直于AC于D，连接OD，则平面OBD垂直于平面ABC；
  - 作OF垂直BC于E，则OF为投影方向矢量。





先绕y轴顺时针旋转α角



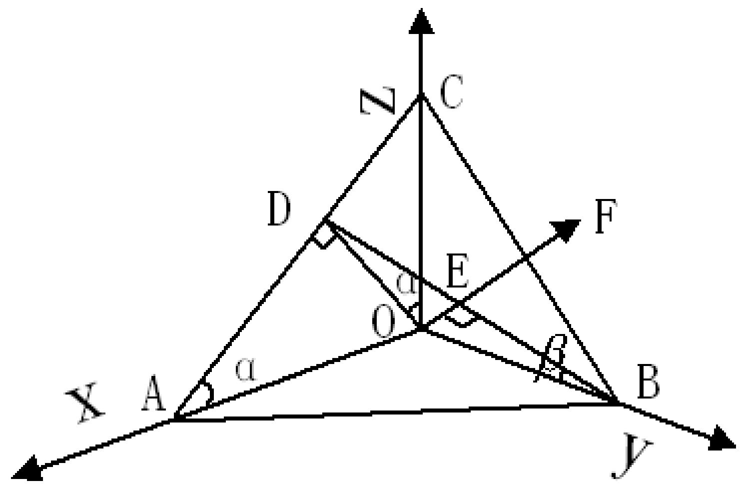
再绕x轴逆时针旋转β角

问题转换：1、投影矢量OF旋转变换到Z轴上（即将投影平面旋转变换到XOY平面上）；

2、针对XOY平面作投影变换。

三维正轴侧投影

- **正轴侧投影变换矩阵**
  - 先绕y轴顺时针旋转α角
  - 再绕x轴逆时针旋转β角
  - 针对XOY平面作投影变换



$$T_{Ry}=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & 0 & -\sin(-\alpha) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

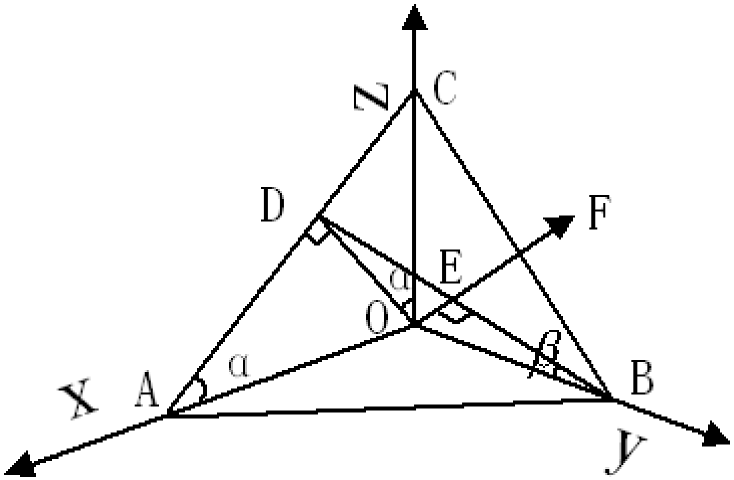
$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0\\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_{xoy}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T=T_{Ry}\cdot T_{Rx}\cdot T=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\cdot\sin\beta & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & 0 & 0\\ -\sin\alpha & -\cos\alpha\cdot\sin\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维正轴侧投影

- **正等轴侧投影**
  - OA=OB=OC　　α = 45^0



$$\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$$

$$BD=\sqrt{OD^2+OB^2}=\sqrt{6/2}OB$$

$$OD=\sqrt{2/2}OA$$

$$\sin\beta = \sqrt{3}/3$$

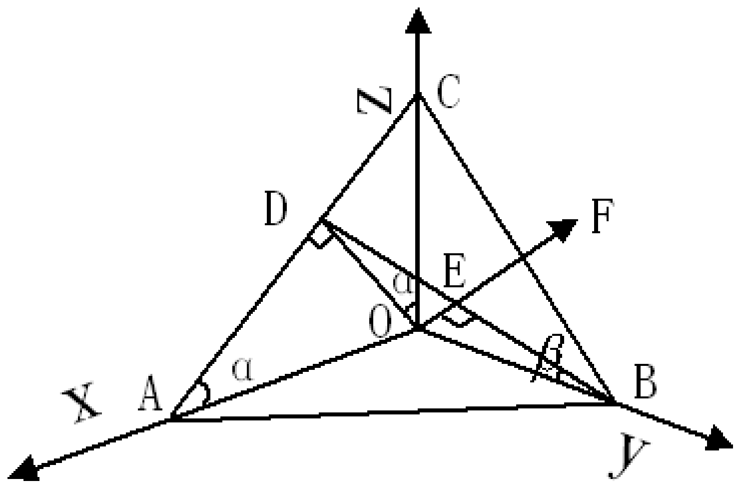
$$\cos\beta = \sqrt{6}/3$$

$$T = T_{Ry}\cdot T_{Rx}\cdot T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha\cdot\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.4082 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8165 & 0 & 0 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维正轴侧投影

- **正二侧投影**
  - 对于正二测图OA、OB、OC有两个相等，但与另一个不等，现在假定OA=OC，求其投影转换矩阵。

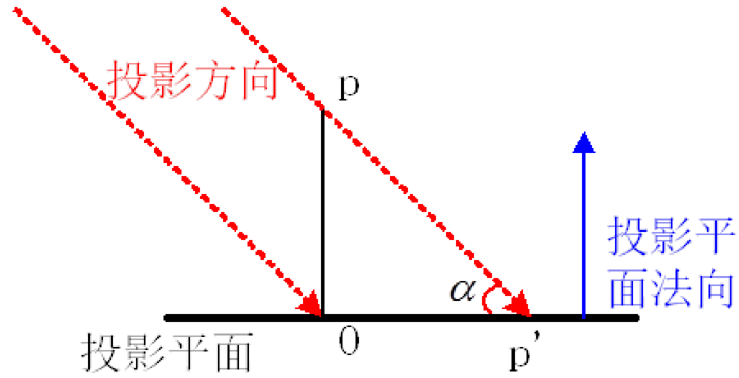


$$T = T_{Ry} \cdot T_{Rx} \cdot T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\cdot\cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha\cdot\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

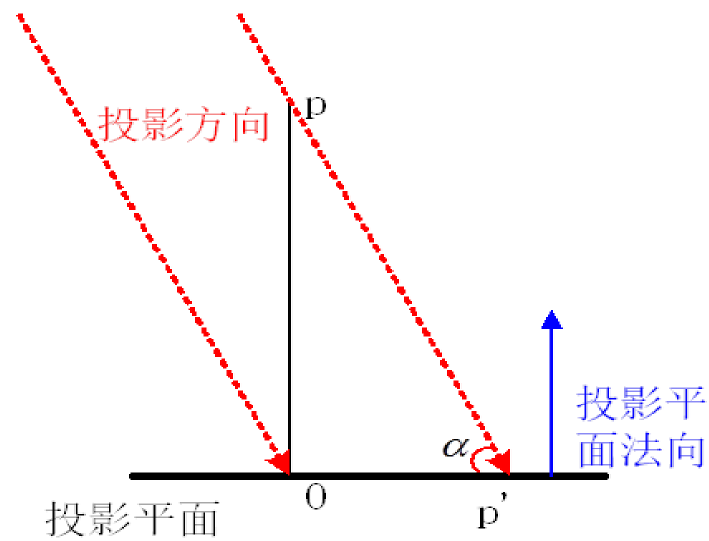
$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维斜轴侧投影

- 斜等侧投影
  - 投影平面与一坐标轴垂直
  - 投影线与投影平面成45°角
  - 与投影平面垂直的线投影后长度不变
- 斜二侧投影
  - 投影平面与一坐标轴垂直
  - 投影线与该轴夹角成 arcctg(1/2)
  - 与投影平面垂直的线投影后长度变为原来的1/2。



(a) 斜等测

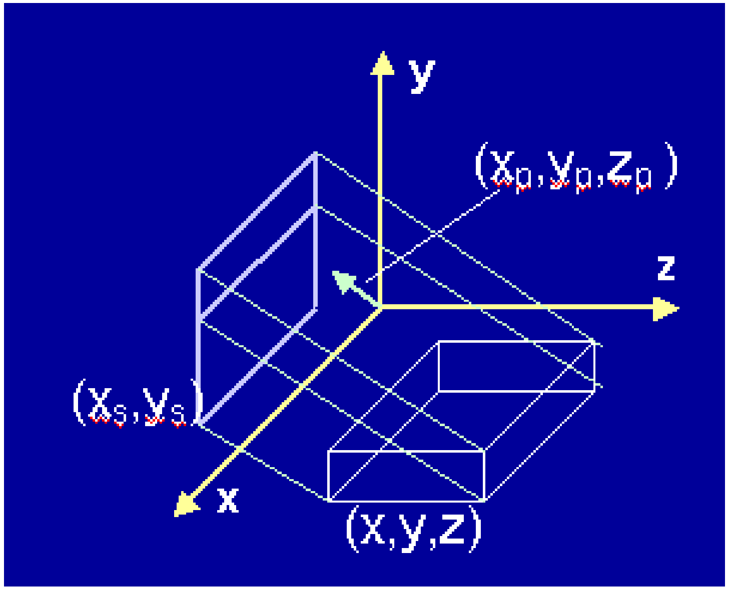


(b) 斜二测

三维斜轴侧投影

- 1、已知投影方向矢量为（xp,yp,zp）
  - 设形体被投影到XOY平面上
  - 形体上的一点(x,y,z)在xoy平面上投影后→(xs,ys)
  - ∵投影方向矢量为(xp,yp,zp)
  - ∴投影线的参数方程为：

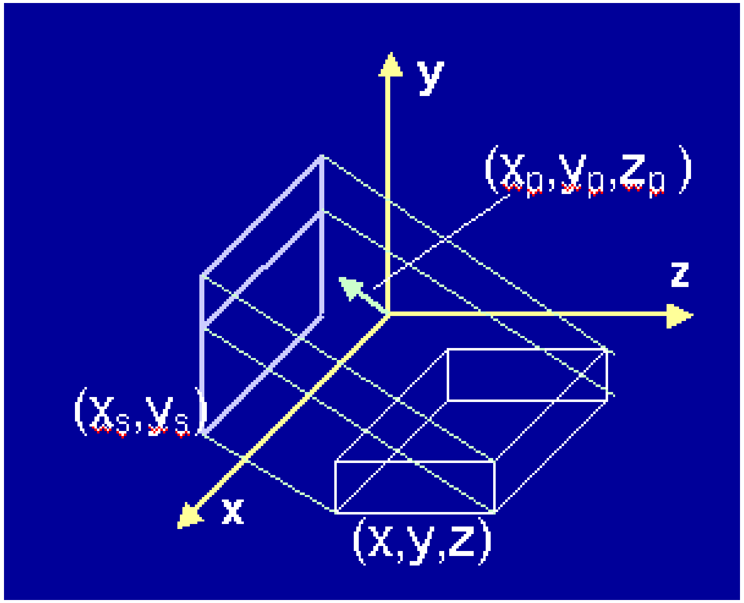
$$\begin{cases} x_s = x + x_p \cdot t \\ y_s = y + y_p \cdot t \\ z_s = z + z_p \cdot t \end{cases}$$



三维斜轴侧投影

$\because (x_s \quad y_s \quad z_s)$在$Z=0$的平面上$\therefore z_s = 0$

$$\therefore t = -\frac{z_i}{z_p}$$



$$\begin{cases} x_s = x - \dfrac{x_p}{z_p} \cdot z_i \\ y_s = y - \dfrac{y_p}{z_p} \cdot z_i \end{cases}$$

$$若令 S_{xp} = \frac{X_p}{Z_p} \quad S_{yp} = \frac{y_p}{Z_p}$$

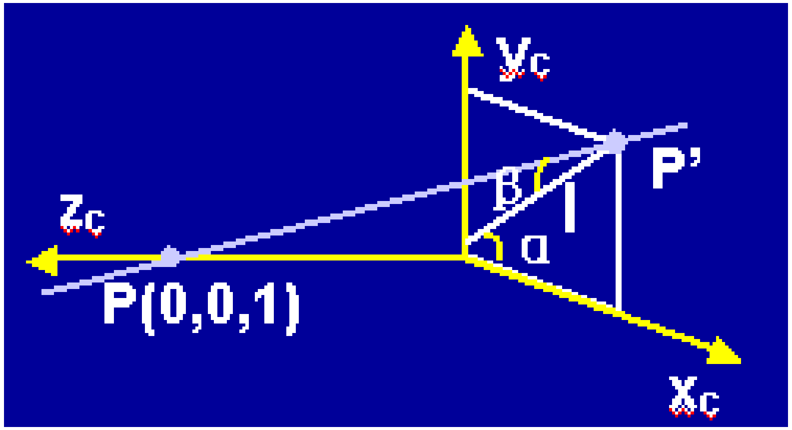
$$(x_s \quad y_s \quad z_s \quad 1) = (x \quad y \quad z \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_{xp} & -S_{yp} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

三维斜轴侧投影

- 2．设（xe,ye,ze）为任一点，（xs,ys）为（xe,ye,ze）在XcOcYc平面上的投影
  - 设立方体上一点 P(0,0,1)在XcOcYc平面上的投影P‘(lcosα,lsinα,0)，则投影方向矢量为(lcosα,lsinα,-1)
  - 现考虑任一点（xe,ye,ze）在XcOcYc平面上的投影（xs,ys）
  - ∵投影方向与投影线PP’平行

$$\therefore \frac{z_e - z_s}{-1} = \frac{x_e - x_s}{l\cos\alpha} = \frac{y_e - y_s}{l\sin\alpha} \quad \because z_s = 0$$

$$\begin{cases} x_s = x_e + z_e \cdot l\cos\alpha \\ y_s = y_e + z_e \cdot l\sin\alpha \end{cases}$$



三维斜轴侧投影

- **矩阵形式为：**

$$\begin{pmatrix} x_s & y_s & z_s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_e & y_e & z_e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l\cos\alpha & l\sin\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

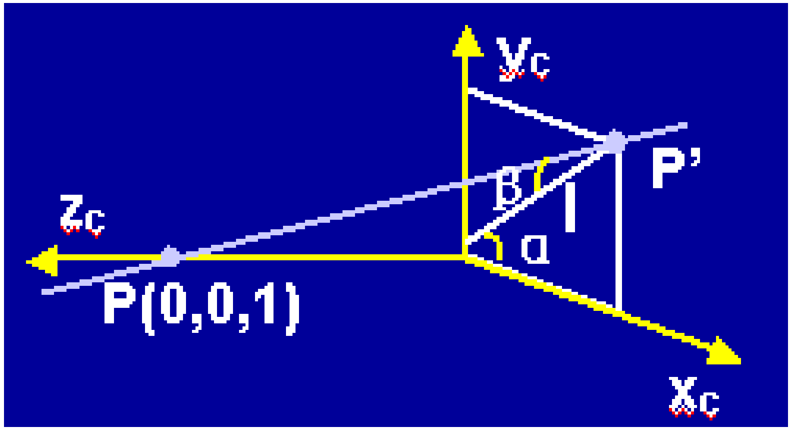
– 斜等侧中：β=45°，l=1

– 斜二侧中：

β=arctgα=63.4°

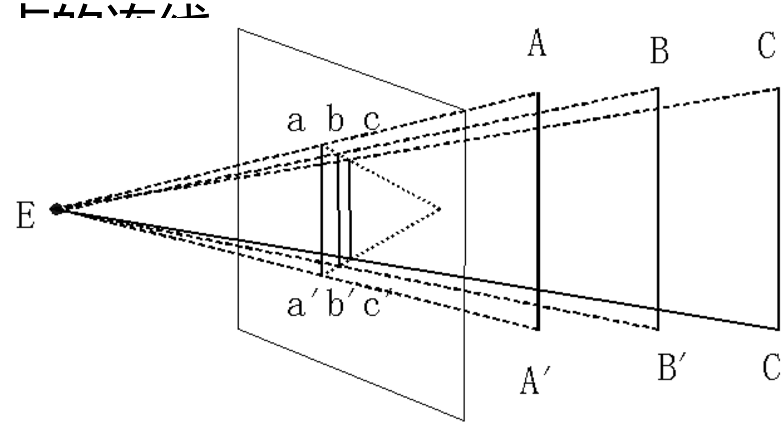
l=1/2

– 正平行投影： β=90°,l=0



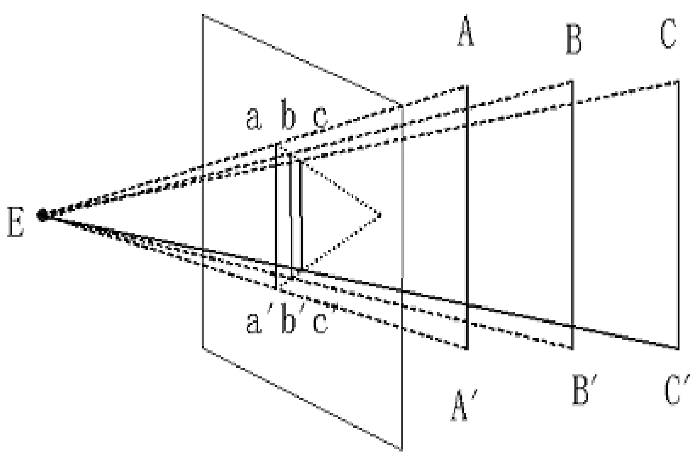
三维透视投影

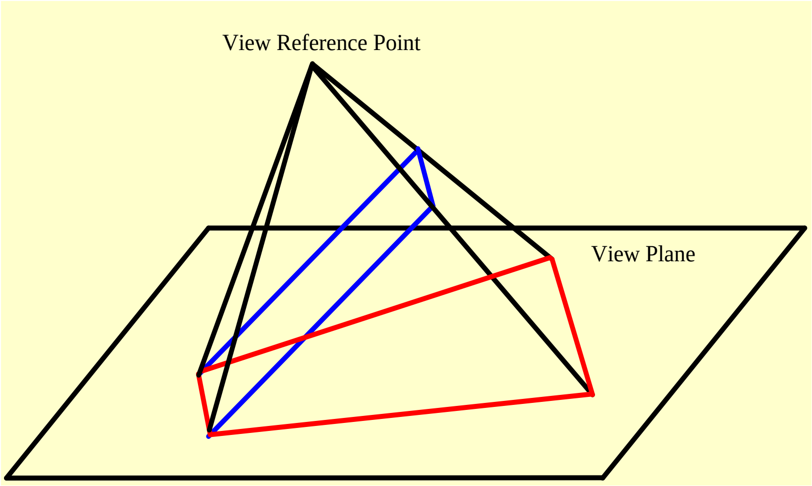
- **透视投影示例：**
  - 图中，AA',BB',CC'为一组高度和间隔都相等，排成一条直线的电线杆，从视点E去看，发现∠AEA′>∠BEB′>∠CEC′
  - 若在视点E与物体间设置一个透明的画面P，让P通过AA ′，则在画面上看到的各电线杆的投影aa'>bb'>cc'
  - aa'即EA,EA'与画面P的交点的连线;
  - bb'即为EB，EB'与画面P的交点的连线。
  - cc' 即为EC，EC'与画面P的
  - ∴近大远小



三维透视投影

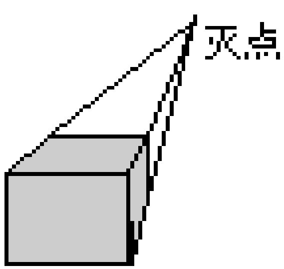
- **特点：**
  - 平行于投影面的平行线，其投影线也互相平行。
  - 不平行于投影面的平行线，其投影线必交于一点（灭点）

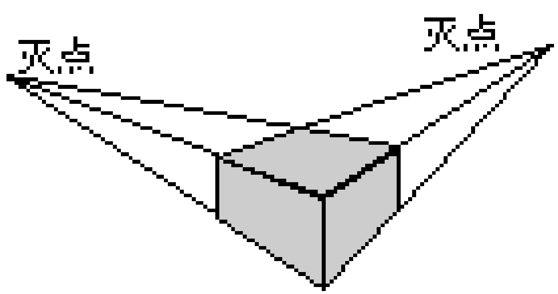


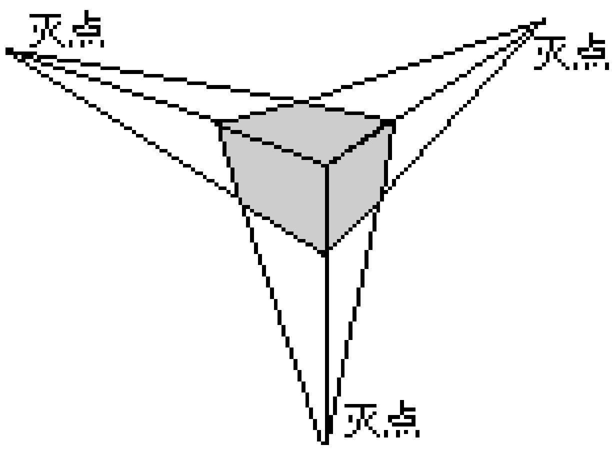


三维透视投影

- **灭点**：不平行于投影面的平行线的投影会汇聚到一个点
  - **主灭点**：坐标轴方向的平行线在投影面上形成的灭点。
  - **一点透视有一个主灭点**，即投影面与一个坐标轴正交，与另外两个坐标轴平行。
  - **两点透视有两个主灭点**，即投影面与两个坐标轴相交，与另一个坐标轴平行。
  - **三点透视有三个主灭点**，即投影面与三个坐标轴都相交。







三维一点透视投影

P_0 ： 视点

S平面：投影面，屏幕画面

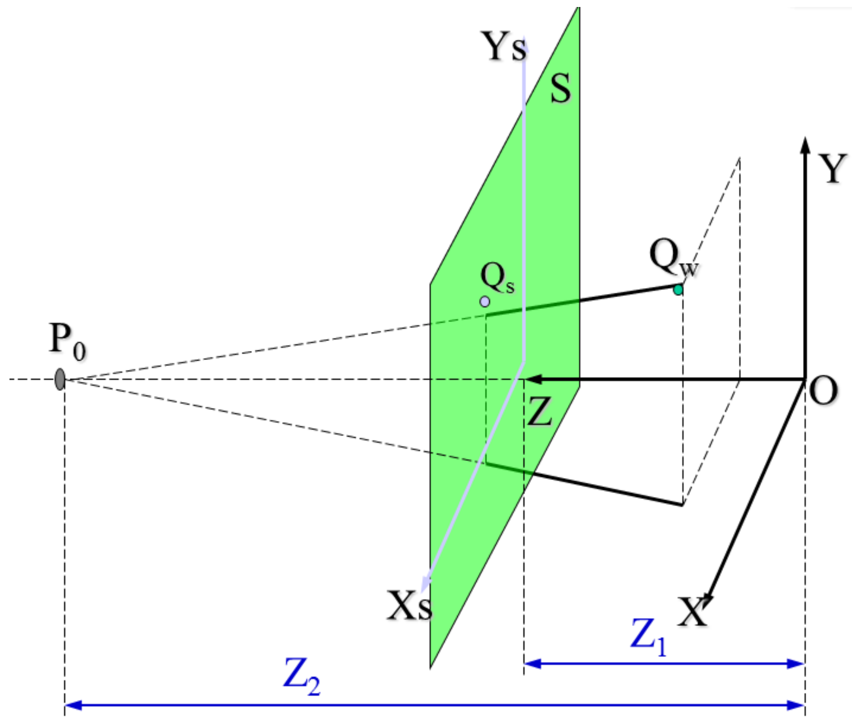
点Q_w的透视：P_0Q_w与平面S的交点

$Q_w(X_w, Y_w, Z_w)$

$Q_s(X_s, Y_s)$

$$X_s = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_w} \cdot X_w$$

$$Y_s = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_w} \cdot Y_w$$



若Z_1 = 0，上式可简化为：

$$X_s = \frac{Z_2}{Z_2 - Z_w} \cdot X_w = \frac{X_w}{1 - \frac{Z_w}{Z_2}}$$

$$Y_s = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_w} \cdot Y_w = \frac{Y_w}{1 - \frac{Z_w}{Z_2}}$$

若$Z_2 \to \infty$ 为平行投影，$X_s = X_w$，$Y_s = Y_w$

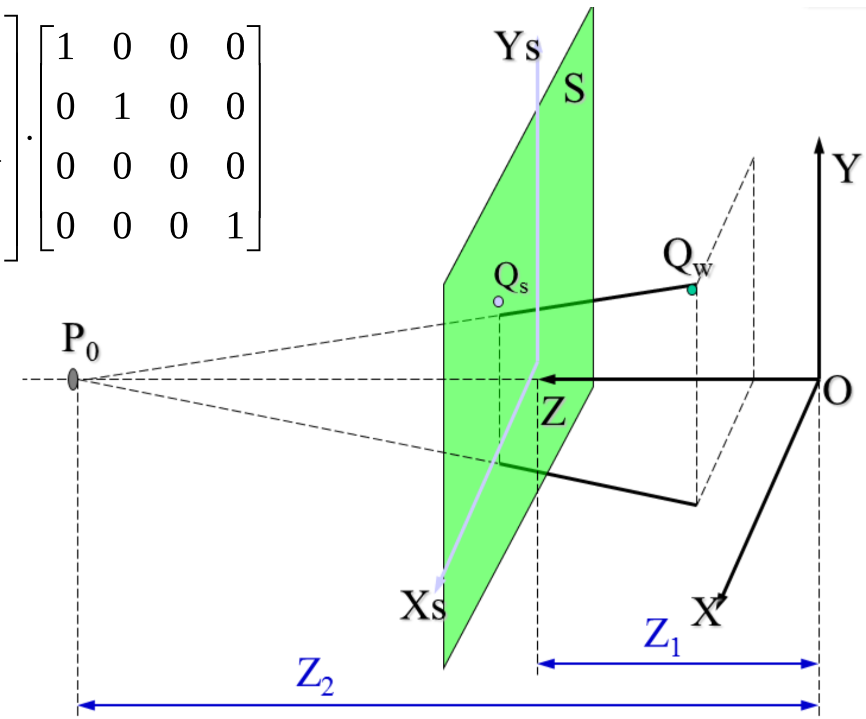
当投影面与某轴垂直时为一点透视；当投影面平行于某坐标轴，但与另外两轴不垂直时为二点透视；否则为三点透视。

三维一点透视投影

$$[X_s \quad Y_s \quad Z_s \quad 1] = [X_w \quad Y_w \quad Z_w \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{Z_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_w & Y_w & 0 & 1-\frac{Z_w}{Z_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{X_w}{1-\frac{Z_w}{Z_2}} & \frac{Y_w}{1-\frac{Z_w}{Z_2}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



知若 $\gamma = -1/Z_2$，则主灭点在 Z 轴上 $Z = 1/\gamma$　此时，与 X, Y 轴平行的线段经透视投影后仍平行于 X_s, Y_s 轴。

三维两点透视投影

设两点透视投影中，一个主灭点在 X 轴上 $x=1/\rho$ 处，另一个主灭点在Z轴的 $z=1/\gamma$ 处，画面为 $x'o'y'$ 。则透视的投影变换矩阵为：

$$T=\begin{bmatrix}1&0&0&\rho\\0&1&0&0\\0&0&1&\gamma\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta&0&-\sin\theta&0\\0&1&0&0\\\sin\theta&0&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=T_1\cdot T_2\cdot T_3$$

其中 T_2 为物体绕 Y 轴旋转的矩阵，它使X轴平行于屏幕画面，并使画面与原坐标面成 θ 角

三维三点透视投影

透视的投影变换矩阵为：

$$T=\begin{bmatrix}1&0&0&\rho\\0&1&0&\psi\\0&0&1&\gamma\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta&0&-\sin\theta&0\\0&1&0&0\\\sin\theta&0&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\varphi&\sin\varphi&0\\0&-\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=T_1\cdot T_2\cdot T_3\cdot T_4$$

其中 T_2、 T_3 为物体分别绕 Y 轴旋转 θ 角，然后绕 X 轴转 φ 角的矩阵

讨论：

- 可用投影平面的方向控制主灭点的数目
- 投影中主灭点的数目由与观察平面相交的主轴的数目决定

思考

1、请阐述在二维和三维几何图形复合变换的差异。

谢　谢！