A 期望逆序对

medium

假设最终序列是 $x_{p_1},\ldots,x_{p_n}$，它作为最优解的一个必要条件是交换两个相邻的位置 $x_{p_i},x_{p_{i+1}}$ 不能让答案变得更优。交换两个相邻的数的时候，只有它们之间的相对顺序发生了改变，所有这个条件也可以被写成所有 $(x_{p_i},x_{p_{i+1}})$ 是逆序对的概率不超过 $\frac{1}{2}$。

对于两个随机变量 $x\in[l_1,r_1],y\in[l_2,r_2](l_1\le l_2)$，考虑 (x,y) 是逆序对的概率不超过 $\frac{1}{2}$ 的条件：

1. $r_1\le r_2$，这时 x 的区间整体在 y 的左侧，因此形成逆序对的概率不超过 $\frac{1}{2}$。
2. $r_1>r_2$，即 x 的区间包含 y 的区间时，如果 y 的区间在 x 的区间的正中央时，根据对称性，形成逆序对的概率是恰好 $\frac{1}{2}$。因此当 y 在 x 中间偏右的时候，逆序对的概率就小于 $\frac{1}{2}$ 了；中间偏左的时候，逆序对的概率大于 $\frac{1}{2}$。

综上，条件可以被总结为 $\frac{l_1+r_1}{2}\le\frac{l_2+r_2}{2}$。因此最开始把所有区间按照中点从小到大排序，我们就可以得到最优的序列。问题变成了给定序列怎么求逆序对个数的期望。根据期望的可加性，我们可以枚举每一对位置，答案就是它们形成逆序对的概率加起来。对于两个随机变量 $[l_1,r_1],[l_2,r_2]$，左边比右边大的概率为：

$$(r_1-l_1+1)^{-1}(r_2-l_2+1)^{-1}\sum_{i=l_1}^{r_1}\max(0,\min(i,r_2)-l_2+1)$$

右侧是一个分 $O(1)$ 段的线性函数，讨论一下即可。总的时间复杂度为 $O(n^2)$。

B 密码学

easy

题面中给出了已知原文和秘钥，加密得到密文的方法。其实已知密文和秘钥，就可以轻松的解密出原文：只要用密文对应的数字减去秘钥对应的数字就可以了。

因此，我们可以从后往前“撤销”所有加密操作带来的影响。假设最后一次加密操作是用 s_x 去加密 s_y，那么在结果中，s_x 是没有发生变化的，即秘钥已知；s_y 存储的是结果，即密文已知。从而用上面的方法可以直接从两者之中推出 s_y 原来的值。

所以从后往前考虑每一次加密操作，依次进行撤销，最后得到的就是最开始的 n 个字符串。

C 染色图

medium-easy

对于一张图，如果染色方案已知：染第 i 种颜色的点的个数是 c_i，为了最大化图的边数，我们会在每一对不同颜色点之间连上一条边，因此此时的最大边数为：

$$\binom{n}{2}-\sum_{i=1}^{m}\binom{c_i}{2}$$

为了让上面这个十字尽可能大，最优方案是把 n 均匀地分配给所有的 c_1，即有 $n \bmod m$ 个颜色有 $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ 个点，有 $n - n \bmod$ 个颜色有 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ 个点，此时边数为：

$$g(n,m) = \binom{n}{2} - (n \bmod m)\binom{\lceil \frac{n}{m} \rceil}{2} - (n - n \bmod m)\binom{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}{2}$$

使用两个恒等式化简：$\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 1$，$n \bmod m = n - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor m$。这样可以得到 $g(n,m)$ 是一个只和 $n, \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor, \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$。后两者的取值只有 $O(\sqrt{n})$ 种，枚举它们然后每一段直接求和即可。

时间复杂度为 $O(T\sqrt{n})$。

D 生成树

medium-hard

这题要用到带权版本的基尔霍夫矩阵：对于一张带边权图 G，定义生成树的权值为所有使用的边权的乘积，求所有生成树的权值和。方法和不带权的版本类似，定义矩阵 A：

1. $\forall 1 \le i \le n$, $A_{i,i}$ 等于 i 所有相邻边的权值和。
2. $\forall 1 \le i \ne j \le n$，$A_{i,j}$ 等于$(-1)\times$ 边 (i,j) 的权值。

令 B 为 A 删去第 n 行第 n 列后得到的矩阵，那么答案就是 $|B|$。

在这题中，我们定义所有只在 G_1 的边的边权为 1，同时在 G_1, G_2 中的边的边权为 x，那么 B 的每一个元素都是一个多项式，记作 $B(x)$，$|B(x)|$ 是一个 $n-1$ 次多项式 $f(x) = \sum a_i x^i$，其中 a_i 表示使用了 i 条公共边的生成树个数，所以答案就是 $f'(1) = \sum i \times a_i$。

根据矩阵求导法则，可以得到：

$$f'(1) = |B(1)| \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \left(B(1)^{-1}\right)_{i,j} \times B'(1)_{i,j}$$

用高斯消元 $B(1)$ 的行列式和逆矩阵即可，时间复杂度为 $O(n^3)$。

E 树与路径

medium

令 A_i 为第 i 个点为根时的答案，那么 A_1 可以在 $O(n)$ 时间内求出来。现在对于每一个点 i，设它的父亲为 f_i，考虑 $A_i - A_{f_i}$：

1. 对于任何一条不同时经过 i 和 f_i 的路径，它对 A_i 与 A_{f_i} 的贡献相同，即 $A_i = A_{f_i}$。
2. 对于一条同时经过 i 和 f_i 的路径，设其长度为 l，i 往下的长度是 x，那么对 A_i 的贡献为 $x(l-x)$，对 A_{f_i} 的贡献为 $(x+1)(l-x-1)$，即对 $A_i - A_{f_i}$ 的贡献是 $2x+1-l$。

所以，我们需要对每一个 i，求出所有同时经过 i 和 f_i 的所有路径的 $2x+1-l$ 的和（记作 B_i）。对于路径 (u,v)，设它们的最近公共祖先为 k，我们只考虑 $u \to k$ 这一半边路径（另半边对称），这条路径对 u 产生了 $1-l$ 的贡献，对 f_u 产生了产生了 $3-l$ 的贡献，以此类推可得，对 $[u,k)$ 上的每一个点 i 产生了 $1-l+2d_u-2d_i$ 的贡献，其中 d_i 表示 i 的深度。

我们可以用树上前缀和来推出所有 B_i：如果要对 $[u,k)$ 加上一个等差数列 ad_i+b，就在 u 上加上 (a,b)，在 k 中减去 (a,b)，然后 DFS 一遍，对每一个点 i 算出子树内的所有标记和 (a'_i,b'_i)，那么 $B_i=a'_id_i+b'_i$。

求出 B_i 后，DFS 一遍就可以根据 A_1 的值推出所有的值。时间复杂度 $O(n\log n)$。

F 乘法

medium-easy

二分答案 K，算小于等于 K 的乘积有多少个。这只要对 A,B 排序后，lower_bound 或者用指针单调地扫一遍就行了。难点在于数可以是负数或者 0，因此要对这些情况分类讨论。

时间复杂度 $O(n\log n)$。

G 圆凸包

medium

在合并两个凸包的时候，我们会选择先求出两个凸包的外切线：外切线会取代原来凸包的一部分边界，出现在合并后的凸包边界上。因为圆也是凸包，所以这个过程对圆同样适用。

因此，答案的边界一定是若干段圆弧+外切线。考虑什么样的点会成为答案的顶点：

1. 首先这个点必须要是某两个圆之间的外切点。
2. 这个点不被任何圆覆盖。

因此我们可以先 $O(n^3)$ 求出所有满足这个条件的顶点，然后对这些顶点求凸包。计算答案的时候，如果相邻两个凸包点在同一个圆上，说明这一段应该是圆弧，就把对应长度的圆弧计入答案，否则说明这一段是外切线，直接把这一段的长度计入答案。

时间复杂度 $O(Tn^3)$。

H 最大公约数

easy

考虑 y 的取值：

1. y 必须是 k 的倍数，否则无法区分 $\gcd(y,k)$ 和 k。
2. 对于 $[1,\lfloor\frac{n}{k}\rfloor]$ 的每一个质数 p，$\frac{y}{k}$ 必须是 p 的倍数，否则无法区分 k 和 pk。

因此设 $p_1,\ldots,p_m$ 为 $[1,\lfloor\frac{n}{k}\rfloor]$ 中的所有质数，那么答案就是 $k\prod_{i=1}^m p_i$。用高精度计算后就能得到答案。

I K 小数查询

medium-hard

考虑区间线段树套权值线段树求区间 k 小值的算法：对 $[1,n]$ 建线段树，每一个线段树节点 $[l,r]$，用一棵动态开点的权值线段树记录 $[l,r]$ 中每种权值出现了多少次。

如果能够维护这样的数据结构，询问就可以转化为在 $O(\log n)$ 棵权值线段树上二分，能在 $O(\log^2 n)$ 的时间里得到答案。

修改时，首先和普通的区间线段树一样，定位到某些节点 $[l,r]$：这次修改相当于把内层线段树中所有大于等于 x 的数并到 x 的位置，这可以被转化成 $t+1$ 次线段树单点修改操作，其中 t 为被并入的节点个数。把这 $t+1$ 次修改应用到内层线段树 $[l,r]$ 以及 $[l,r]$ 所有祖先节点的内层线段树上。这一步的时间复杂度为 $O(t\log^2 n)$。

接着，在 $[l,r]$ 上打上对 x 取 $\min$ 的标记。在标记下传的时候，同样当前节点的内层线段树中，更大的节点的值并到 x 处，但是因为次数祖先节点的内层线段树的信息都是正确的，所以不需要把修改应用到祖先节点的内层线段树上。

时间复杂度和所有操作的 t 的和有关，不难发现，每一次操作结束后，内层线段树的叶子节点个数都减少了 t，而最开始一共有 $O(n\log n)$ 个叶子节点，所以 t 的总和不会超过 $O(n\log n)$。因此总的时间复杂度为 $O(n\log^3 n)$。

J 德州扑克

medium-hard

直接枚举公共的 5 张牌的方案数是 $\binom{48}{5}$，再加上判断的复杂度 $\binom{7}{5}$ 乘上长度，是容易超时的。在此基础上各凭本事的剪枝就行了。

标算的做法是不枚举所有花色组合：出现同花的时候，必然有一种花色出现了超过 3 次，此时只有这一种花色的花色信息是有用的（其他花色不可能出现同花了）。因此只需要枚举大小组合、出现超过 3 次的花色以及对应的牌即可，枚举量就大大降低了。