Fuzzy Theory

Kwang Baek Kim

퍼지 이론

- 퍼지 이론은 이치 논리가 아니라 다치 논리임.
- 애매한 기준을 수치적으로 값을 표현

Example

뜨겁다 차갑다(이치 논리)

-> 1, 0

매우 뜨겁다 뜨겁다 미지근하다 약간 차갑다 차갑다(다치 논리)

-> 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0

애매함을 수리적으로 취급이 가능하도록 하는 이론 → **퍼지 이론**

퍼지 사고란?

- 퍼지 논리
  - 퍼지 논리는 영어 단어 퍼지(fuzzy)가 뜻하는 것처럼 모호한 논리가 아니라, 모호한 대상을 다루는 논리임.
  - 퍼지 논리는 퍼지 집합, 즉 모호한 정도를 조절할 수 있는 집합에 대한 이론.
    - 퍼지 논리는 만물에는 어떤 정도를 나타낼 여지가 있다는 생각에서 시작한다.
  - 온도, 높이, 빠르기, 거리, 미모, 모두 경계가 불분명한 척도를 나타냄.
    - 모터가 정말 뜨겁게 돈다. 톰은 매우 키가 큰 친구다.
  - 경계가 불분명한 척도로는 어떤 등급에 속하는 것과 그렇지 않은 것을 구분할 수 없음.
    - 언덕이 얼마나 높으면 산이 될까?

퍼지 사고란?

- 불 논리
  - 불 논리(Boolean Logic), 즉 전통적인 논리는 참과 거짓이 확실하게 구분됨.
    - 어떤 등급에 속하는 것과 그렇지 않은 것 사이에 선을 긋는 것과 같다.
  - 불 논리의 불합리
    - '키가 180cm 이상이면 큰 키, 아니면 작은 키'라 가정하자.
    - 톰의 키가 181cm이라면 크다고 할 수 있다.
    - 키가 179cm인 데이비드는 작은 편이다. 데이비드의 키가 정말 작은 것일까?
    - 아니면 우리가 모래 위에 임의로 줄을 그었기 때문에 생기는 결과일 뿐일까?
  - 퍼지 논리를 사용하면 불 논리의 불합리를 피할 수 있음.
    - 퍼지 논리는 사람들이 생각하는 방식을 반영.
    - 퍼지 논리는 낱말, 의사결정, 상식에 대한 인간의 인식을 모델링 함.

퍼지 논리

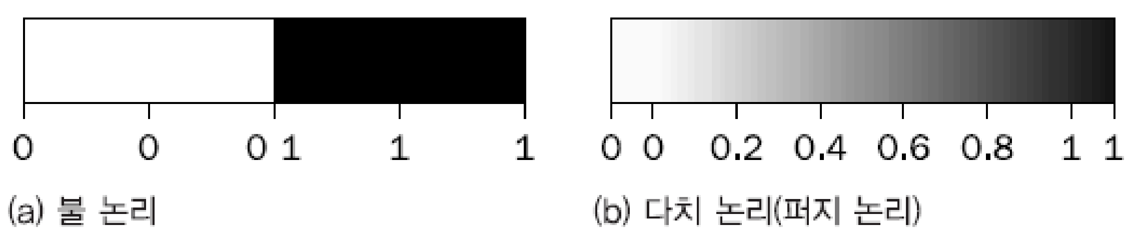
- 퍼지의 장점
  - 자데가 말했듯이, 퍼지라는 용어는 구체적이고 직접적이며 설명적이어서 무엇을 의미하는지 쉽게 이해할 수 있음.
- 왜 논리일까
  - 모호성은 퍼지 집합론에 항상 존재하고, 퍼지 논리는 이 이론의 일부분일 뿐이다. 그러나 자데는 퍼지 논리라는 용어를 좀 더 넓은 뜻으로 사용했음.

> 퍼지 논리는 고전적인 이진 논리(binary logic)처럼 소속을 분명히 하는 것이 아니라, 어느 정도 속하는지를 바탕으로 지식을 표현하는 일련의 수학 원리다.

  - 2치 논리인 불 논리와 달리 퍼지 논리는 다치 논리(multi-valued logic)임.
    - 퍼지 논리는 소속도(degrees of membership)와 진리도(degrees of truth)를 다룬다.

퍼지 논리

- 왽 논리일까
  - 퍼지 논리는 0(완전한 거짓)과 1(완전한 참) 사이에 있는 연속된 논리값을 사용함.
  - 퍼지 논리는 검정과 하양만 다루는 대신 다양한 색깔을 사용함.
  - 즉 어떤 대상이 동시에 참이면서도 거짓인 경우를 허용함.
  - [그림 4-1]에서 볼 수 있듯 퍼지 논리는 불 논리에 논리값 범위를 더한 것임.
  - 고전적인 이진 논리는 다치 퍼지 논리의 특수한 경우로 볼 수 있음.



[그림 4-1] 불 논리와 퍼지 논리에서 논리값의 범위

퍼지 집합

- 집합론
  - 우리가 쓰는 자연어는 집합의 궁극적인 표현임.
    - 자동차는 자동차의 집합을 가리킨다. 자동차 한 대라는 말은 자동차 집합의 원소 하나라는 의미다.
  - X를 고전적인 크리스프 집합(crisp set, 분명한 집합)이고, x를 원소라 하자.
    - 그러면 원소 x는 X에 속하거나($x \in X$), X에 속하지 않거나($x \notin X$) 둘 중 하나다.
    - 고전적인 집합론에서는 이 집합에 명확한 경계를 긋고, 이 집합의 원소에는 1을, 원소가 아닌 것에는 0을 대입한다.
    - 크리스프 집합은 이분법 원리(principle of dichotomy)다..

퍼지 집합

- 크리스프 집합론
  - 고전적인 논리 역설
    1 피타고라스 학파(Pythagorean School)
    - 질문: 크레타 철학자가‘모든 크레타 사람은 항상 거짓만 말한다’고 주장한다면, 이 철학자는 진실을 말하고 있을까?
    - 불논리: 이 주장은 모순이다.
    - 퍼지 논리: 이 철학자는 진실을 말하고 있으면서 진실을 말하고 있지 않다.

    2 러셀의 역설(Russell’s Paradox)
    - 마을의 이발사는 스스로 머리를 깎지 않는 사람의 머리만 깎는다.
    - 질문: 이발사의 머리는 누가 깎을까?
    - 불논리: 이 주장은 모순이다.
    - 퍼지 논리: 이발사는 자신의 머리를 깎으면서 깎지 않는다.
  - 크리스프 집합론은 참과 거짓 두 가지 값만 쓰는 논리를 따름.
  - 모호한 개념을 표현할 수 없기 때문에 역설에 대한 해답을 제시하지 못함.

퍼지 집합

- 퍼지 집합론
  - 퍼지 집합론의 기본 발상
    - 원소가 퍼지 집합에 어느 정도 속한다는 것이 퍼지 집합의 기본 발상이다.
    - 명제는 참 또는 거짓이 아니라 어느 정도는 부분적으로 참(이거나 부분적으로 거짓)으로 나타낸다.
    - 정도는 보통 [0,1] 범위의 실수값으로 표현한다.
  - 고전적인 예 : 키가 큰 남자는 퍼지 집합론 [표 4-1]
    - 퍼지 집합 '키가 큰 남자'의 원소는 모든 남자지만, 이 집합의 소속도는 [표 4-1]에서 보듯 키에 좌우된다.
    - 키가 205cm인 마크는 소속도 1, 키가 152cm인 피터는 소속도 0으로 구분할 수 있다.
    - 중간에 있는 사람들은 그 사이에 있는 값으로, 부분적으로는 크다.
    - 어떤 사람을 크다고 할지는 사람마다 생각이 다르다.
    - 그러나 키가 큰 남자 집합에 들어갈 후보에게는 [표4-1]과 같은 값이 할당될 것이다.

퍼지 집합

- 퍼지 집합론
  '이 남자는 키가 클까?'라는 질문이 주어졌을 때.
  [표4-1] 참조.

  - 크리스프 집합의 답변
    - '이 남자는 키가 클까?'라고 질문한 다음, 180cm 같은 기준선을 긋는다.
    - 키가 큰 남자는 180cm 이상, 키가 작은 남자는 180cm 미만으로 나눈다.
    - 만약 톰의 키가 181cm이면 톰은 키가 크다.

  - 퍼지 집합의 답변
    - 퍼지 집합은 '이 남자는 키가 얼마나 클까?'라고 질문한다.
    - 이에 대한 답변은 퍼지 집합의 부분적인 소속도가 된다.
    - 톰의 카가 181cm이면, 톰은 0.82만큼 크다.

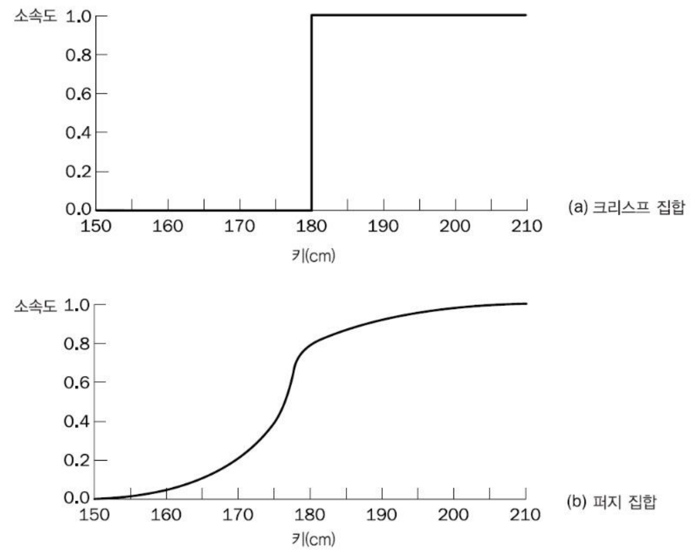
02_퍼지 집합

[표 4-1] '키가 큰 남자'에 대한 소속도

이름	키(cm)	소속도	
		크리스프	퍼지
크리스	208	1	1.00
마크	205	1	1.00
존	198	1	0.98
톰	181	1	0.82
데이비드	179	0	0.78
마이크	172	0	0.24
밥	167	0	0.15
스티븐	158	0	0.06
빌	155	0	0.01
피터	152	0	0.00

퍼지 집합

- 퍼지 집합론
  - 퍼지 집합은 경계를 넘을 때 점진적으로 전이함. [그림 4-2]
    - ‘매우 키가 작은 남자’, ‘키가 작은 남자’,‘키가 보통인 남자’, ‘매우 키가 큰 남자’ 같은 집합도 생각할 수 있음.



[그림 4-2] ‘키가 큰 남자’에 대한 크리스프 집합과 퍼지 집합

퍼지 집합

- 퍼지 집합 X 상의 퍼지부분집합(A)

  μ_a : X->[0, 1]로 되는 멤버쉽 함수

  μ_a 에 의해 특성화된 집합

- 퍼지 집합 A의 소속함수를 μ_a:X->[0,1]

  $\mu_a(x)$
  = 1 : 요소 x는 퍼지 집합 A에 완전히 속한다.
  = 0 : 요소 x는 A에 완전히 속하지 않는다.
  1 근처에 있는 경우 : 속하는 정도가 높다.

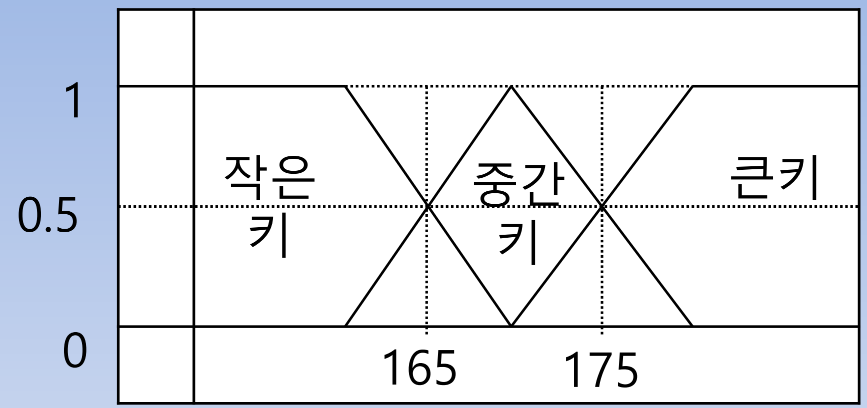
퍼지 집합

크리스프 집합

	큰키	중간키	작은키	결론
176cm	1	0	0	키가 크다
166cm	0	1	0	키가 중간이다
163cm	0	0	1	키가 작다

퍼지 집합

퍼지 집합



	큰키	중간키	작은키	결론
176cm	0.6	0.4	0	키가 큰 것보다 약간 작다
166cm	0	0.6	0.4	키가 중간 보다 약간 작다
163cm	0	0.3	0.7	키가 작다

퍼지 집합

- 퍼지 집합론
  - 퍼지 집합은 단순히 경계가 모호한 집합으로 정의할 수 있음.
  - X를 논의 영역, x를 이 영역의 원소라 하자.
    - 고전적인 집합론에서 X상의 크리스프 집합 A는 A에 대한 특성 수 $f_A(x)$를 써서 정의한다.

$$f_A(x) : X \to [0, 1] \qquad (4.1)$$

    - 여기서 $f_A(x)$ 는 다음과 같다.

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in A \\ 0, & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

    - 이 집합은 영역X를 두 원소로 이루어진 집합에 대응시킨다.
    - 영역X의 특정 원소 x가 있을 때, 특성함수 $f_A(x)$는 x가A의 원소면1이고, x가 A의 원소가 아니면 0이다.

퍼지 집합

- 퍼지 집합론
  - 퍼지 이론에서 영역X에 속한 퍼지 집합 A는 함수 $\mu_A(x)$를 써서 정의함.
  - 이 함수를 집합A에 대한 소속 함수(membership function)라 함.

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1] \qquad (4.2)$$

    - 여기서 $\mu_A(x)$ 는 다음과 같다.

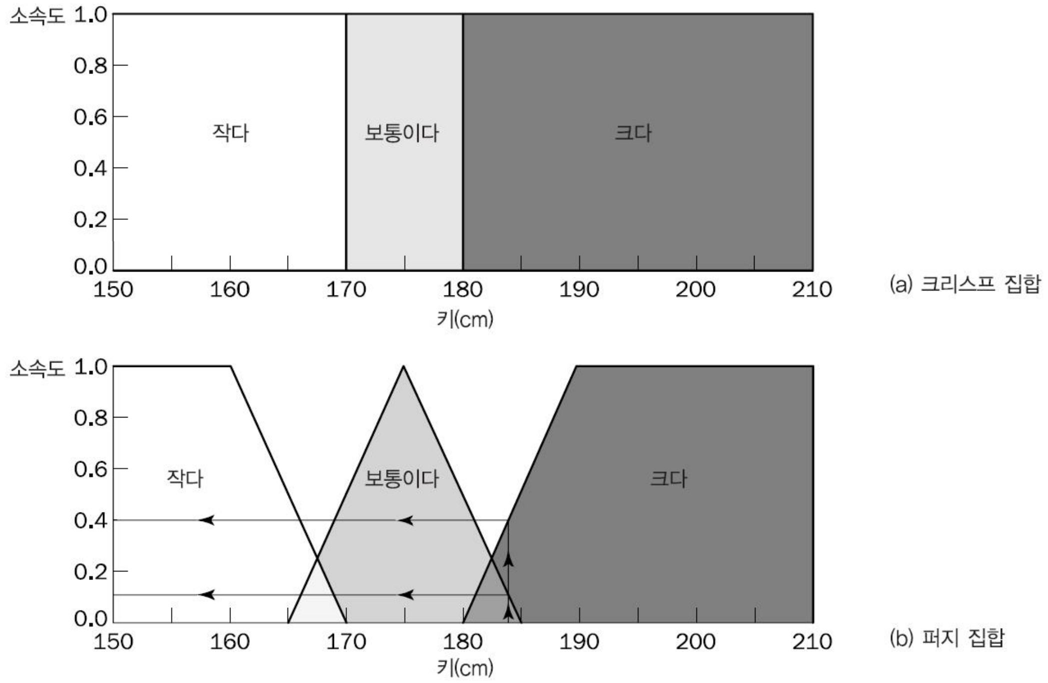
$$\mu_A(x) = 1 \quad x\text{가 완전히 } A\text{에 속한 경우}$$
$$\mu_A(x) = 0 \quad x\text{가 완전히 } A\text{에 속하지 않는 경우}$$
$$0 < \mu_A(x) < 1 \quad x\text{가 부분적으로 } A\text{에 속한 경우}$$

    - 이 집합에서 가능한 선택지는 연속적인 값이 될 수 있다.
    - 영역 X의 특정 원소 x가 있을 때, 소속함수 μA(x)는 x가 집합A에 속하는 정도다.
    - 이는 0~1 사이의 값으로 소속도를 나타내며, 집합A에서 원소 x의 소속 값이라고도 한다.

02_퍼지 집합

- 퍼지 집합의 표현
  - 소속 함수 결정 방법
    - 퍼지 집합을 구성할 때 매우 실용적인 접근법 중 하나는 전문가 한 사람의 지식에 의존하는 방법이다.
    - 전문가에게 원소가 주어진 집합에 속하는지를 물어본다.
    - 다른 유용한 접근법은 여러 전문가에게서 지식을 얻는 방법이다.
    - 최근에 퍼지 집합을 만드는 새로운 기법으로 인공 신경망(artificial neural networks)을 이용하는 방법이 소개되었다.
    - 인공 신경망은 사용 가능한 시스템 연산 데이터를 학습한 다음 자동으로 퍼지 집합을 유도해낸다.
  - 컴퓨터에서 퍼지 집합을 나타내기 : '키가 큰 남자' 예
    - 크리스프 집합과 함께 [그림 4-3]으로 나타낼 수 있다.
    - 이 집합들의 논의 영역인 남자의 키는 키가 작은 남자, 키가 보통인 남자, 키가 큰 남자라는 세 집합으로 이루어진다.
    - 여기서 볼 수 있듯, 퍼지 논리에서는 키가 184cm인 남자는 키가 보통인 남자 집합의 구성원으로 소속도가 0.1이고, 동시에 키가 큰 남자 집합의 구성원으로서 소속도가 0.4다.
    - 이는 키가184cm인 남자가 여러 집합에 부분적으로 소속되어 있음을 뜻한다.

- 퍼지 집합
  - 크리스프 집합과 퍼지 집합 [그림 4-3]



[그림 4-3] 키가 작은 남자, 키가 보통인 남자, 키가 큰 남자에 대한 크리스프 집합과 퍼지 집합

- 퍼지 집합
  - 퍼지 집합의 예
    - 참조 초집합(reference super set)이라고도 하는 논의 영역 X가 원소 다섯 개를 포함하는 크리스프 집합 X = {x1, x2, x3, x4, x5} 라고 하자.
    - X의 크리스프 부분 집합 A가 원소 두개로 이루어져 있다고 하자.

      A = $\{x_2,\ x_3\}$
    - 부분 집합 A는 이제 A = {(x1, 0), (x2, 1), (x3, 1), (x4, 0), (x5, 0)}를 {(xi, μA(xi))} 쌍의 집합으로 나타낼 수 있음
    - $\mu_A(x)$는 부분 집합 A의 원소x에 대한 소속 함수다.

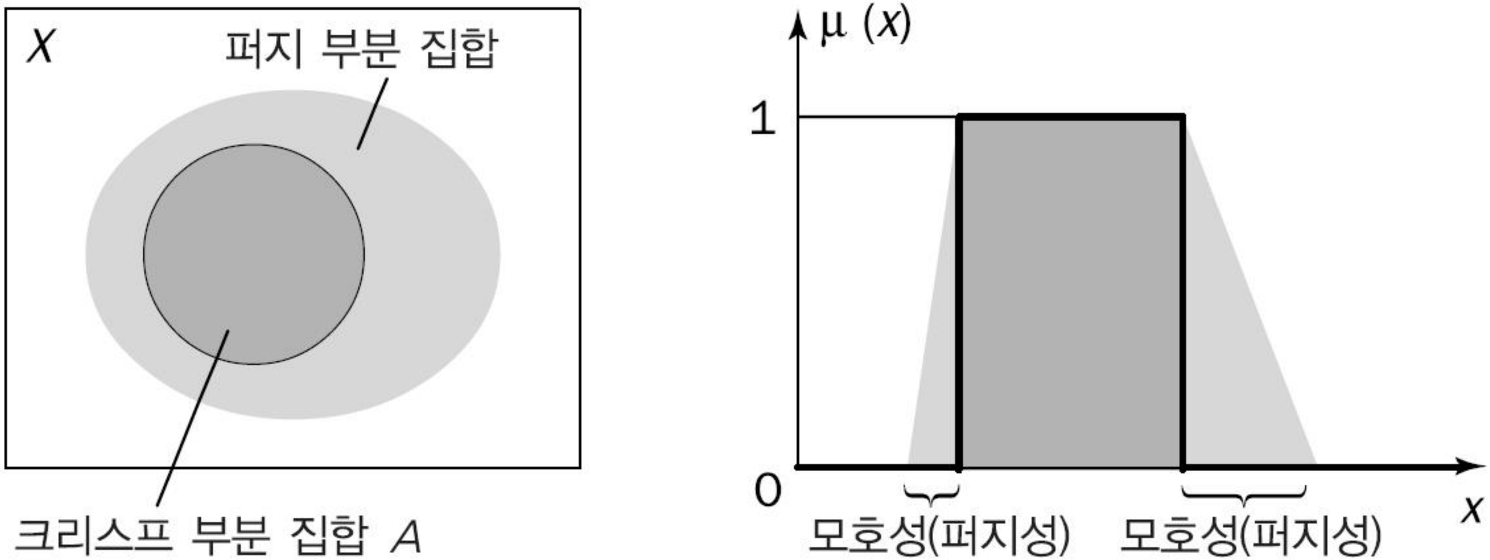
문제는 '$\mu_A(x)$가 0 또는 1이라는 두 값만 취할 수 있는가, 아니면 0~1 사이의 어떤 값이라도 취할 수 있는가'다.

- 이는 1965년에 자데가 연구한 퍼지 집합의 기본 문제기도 하다.
- X가 참조 초집합이고 A가 X의 부분 집합이라면, A가 X의 퍼지 부분 집합일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$A = \{(x, \mu_A(x))\} \qquad x \in X,\ \mu_A(x) : X \to [0, 1] \qquad (4.3)$$

- 특수한 경우로, X → [0, 1] 대신X → { 0, 1}을 사용하면 퍼지 부분 집합A는 크리스프 부분 집합 A가 된다.

퍼지 집합



[그림 4-4] X의 크리스프 부분 집합과 퍼지 부분 집합

- 퍼지 집합
  - 유한한 참조 초 집합X의 퍼지 부분 집합A는 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1))\}, \{(x_2, \mu_A(x_2))\}, \ldots, \{(x_n, \mu_A(x_n))\} \qquad (4.4)$$

    - A를 다음과 같이 나타내면 더욱 편리하다. 여기서 구분 기호

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1\}, \{\mu_A(x_2)/x_2\}, \ldots, \{\mu_A(x_n)/x_n\} \qquad (4.5)$$

  - 연속적인 퍼지 집합을 컴퓨터로 나타내려면 이를 함수로 나타내고 집합의 원소를 소속도에 대응 시켜야 함
    - 이때 쓸 수 있는 전형적인 함수로는 시그모이드(sigmoid) 함수, 가우스(gaussian) 함수, 파이(pi) 함수가 있다.
    - 이 함수들은 퍼지 집합의 실수 데이터를 나타낼 수 있으나 계산 시간을 증가시킨다.
    - 따라서 실제 응용에서는 대부분 [그림4-3]에서 본 것과 같은 선형 적합 함수를 쓴다

• 퍼지 집합

– 이를테면, [그림 4-3]의 키가 큰 남자에 대한 퍼지 집합은 다음과 같은 적합 벡터(fit-vector)로 나타낼 수 있음.

키가 큰 남자 = (0/180, 0.5/185, 1/190)

또는 키가 큰 남자 = (0/180, 1/190)

– 이를테면, [그림 4-3]의 키가 큰 남자에 대한 퍼지 집합은 다음과 같은 적합 벡터로 나타낼 수 있음.

키가 작은 남자 = (1/160, 0.5/165, 0/170)

또는 키가 작은 남자 = (1/160, 0/170)

키가 보통인 남자 = (0/165, 1/175, 0/185)

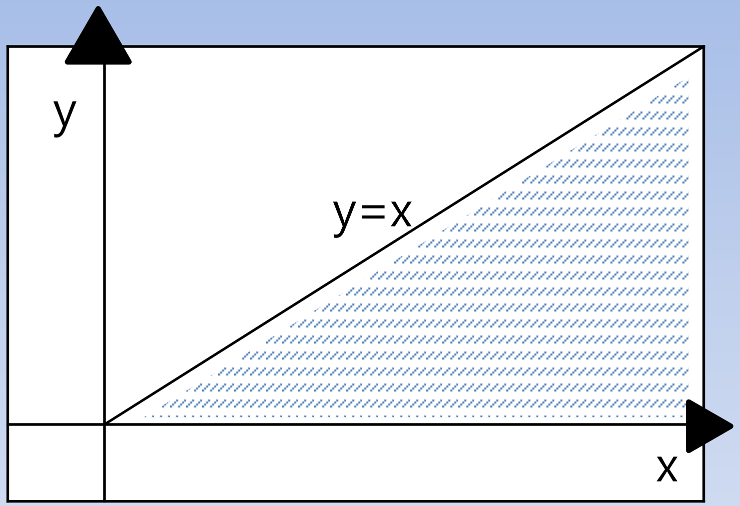
퍼지 관계

- “x와 y는 가깝다” or “x와 y는 닮았다”
  ▶수식으로 표현하기 애매함
- 퍼지 집합의 관계를 표현한 것

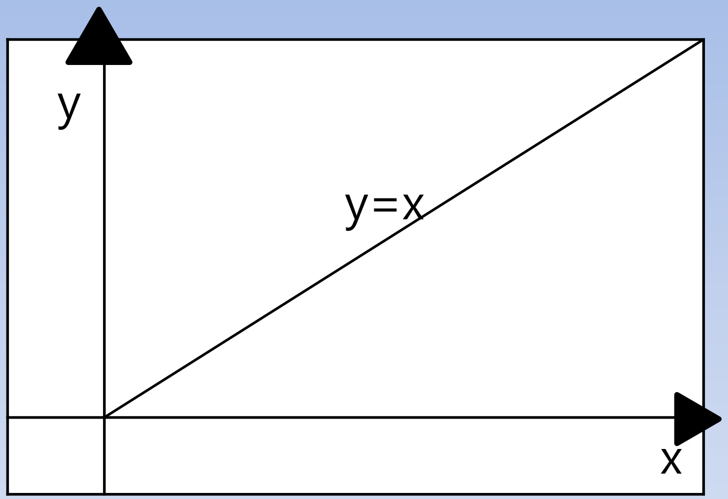
퍼지 집합 → 퍼지 이론 → 퍼지 관계

퍼지 관계

크리스프 관계



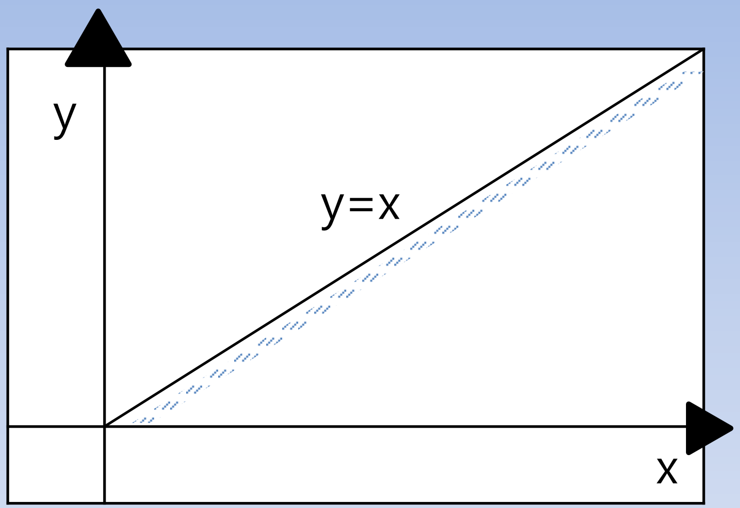
y는 x보다 작다



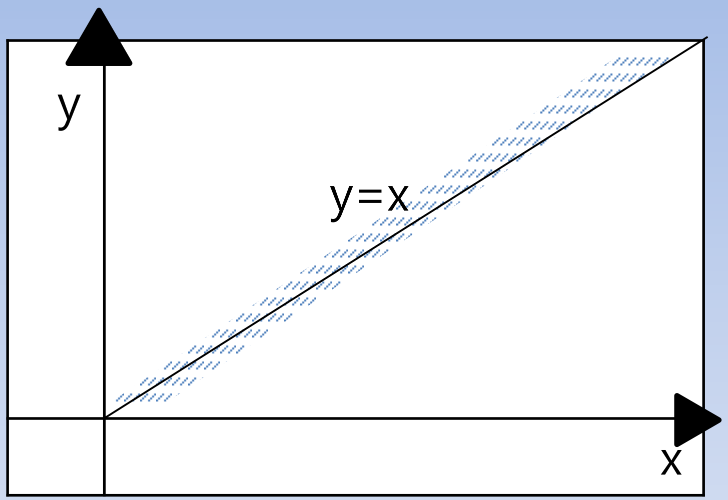
y와 x는 같다

퍼지 관계

퍼지 관계



y는 x보다 약간 작다



y와 x는 거의 같다