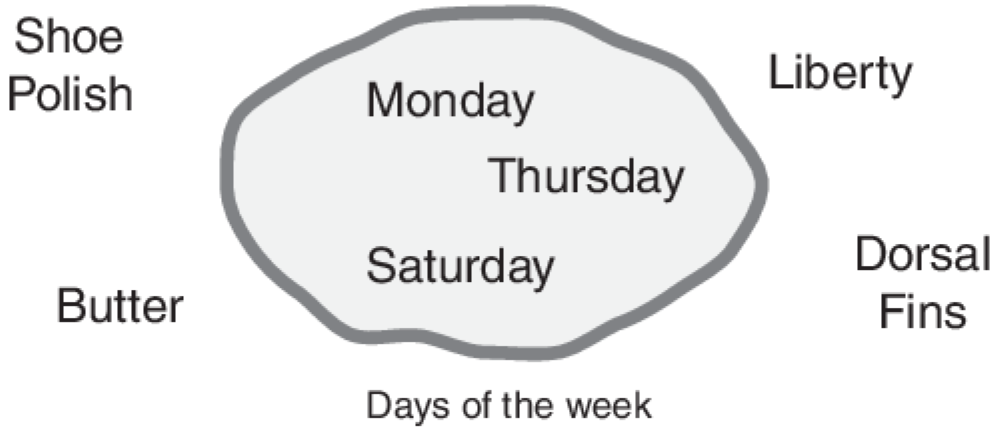
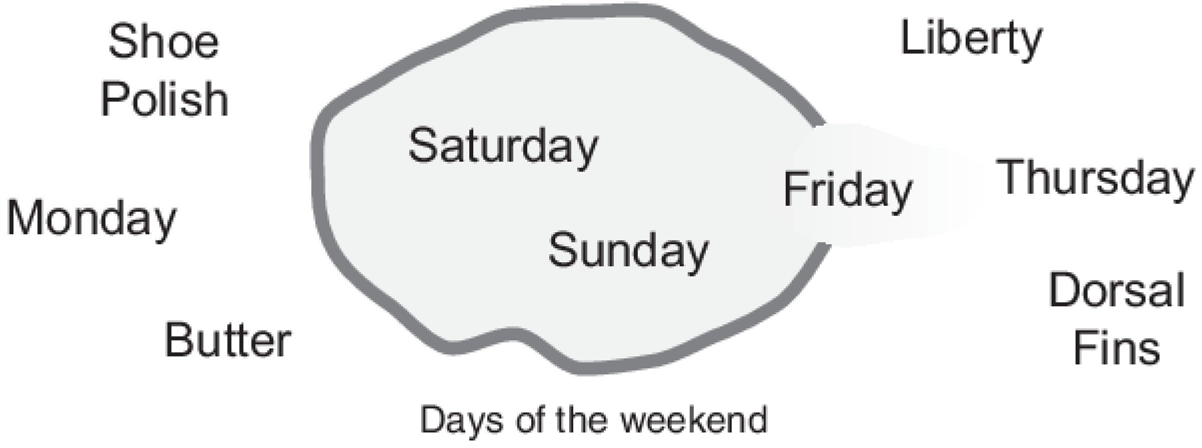
Методы нечеткого вывода

Основы нечеткой логики

Нечеткие множества

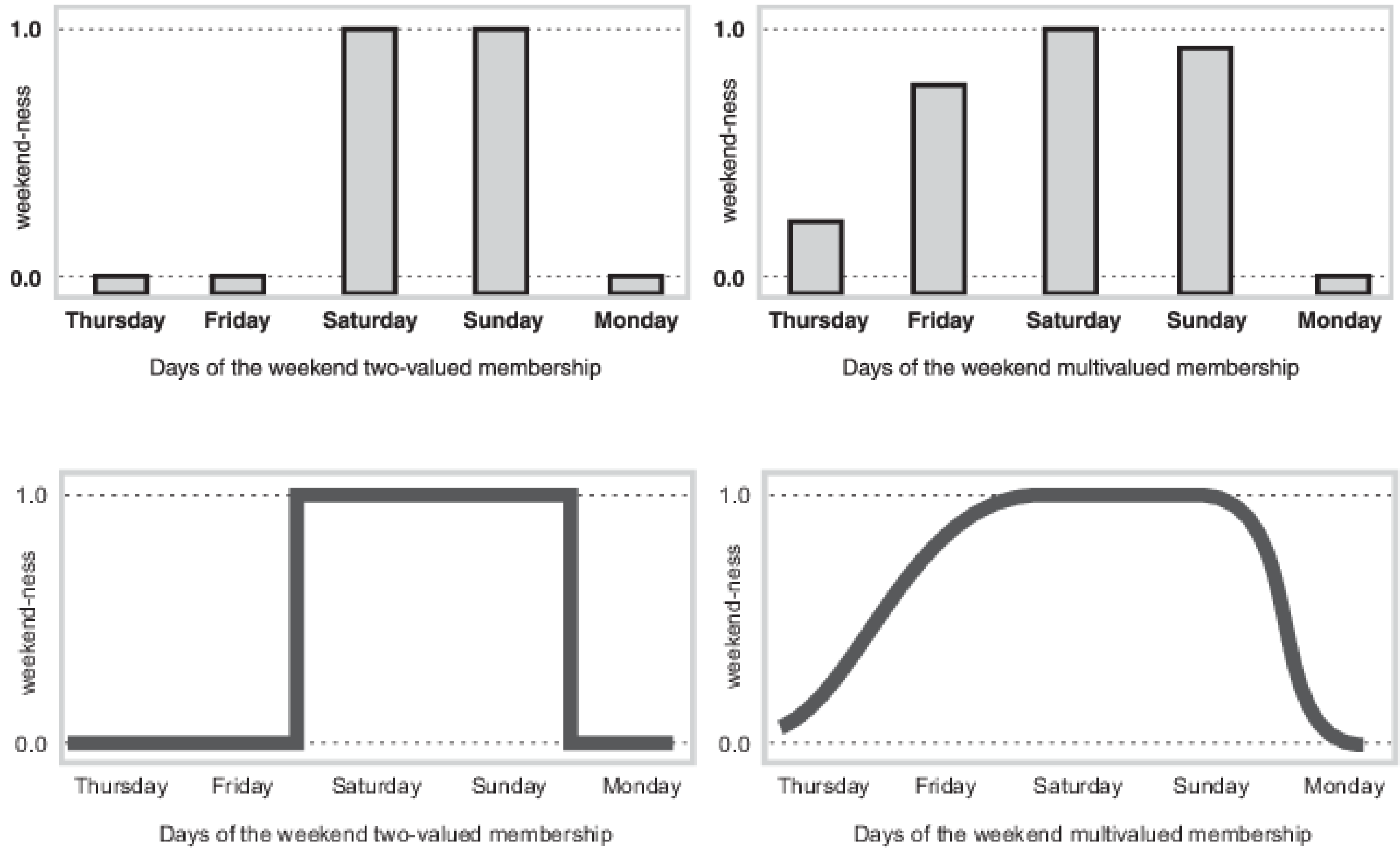
Нечеткое множество – это множество без четко определенной границы. Оно может содержать элементы с частичной степенью принадлежности.





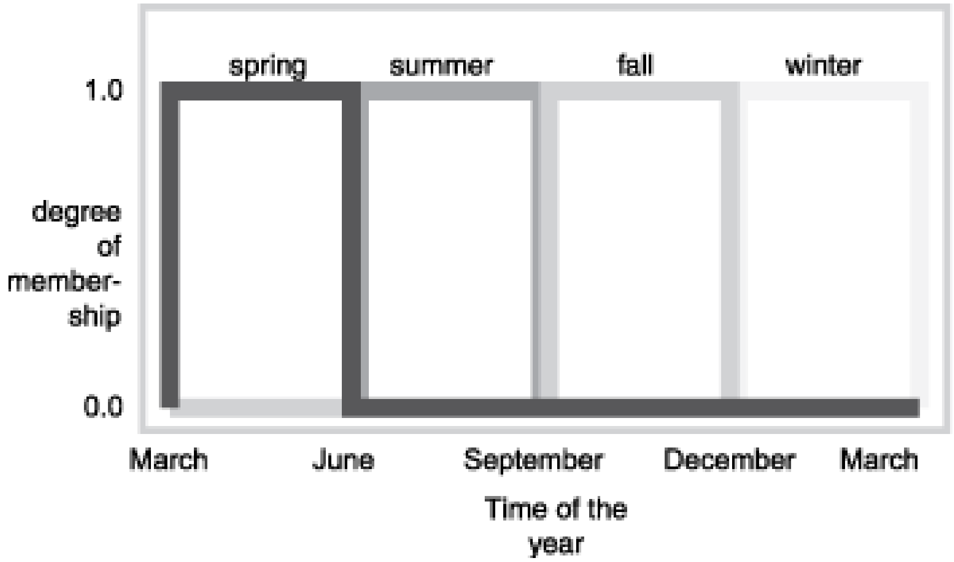
Основы нечеткой логики

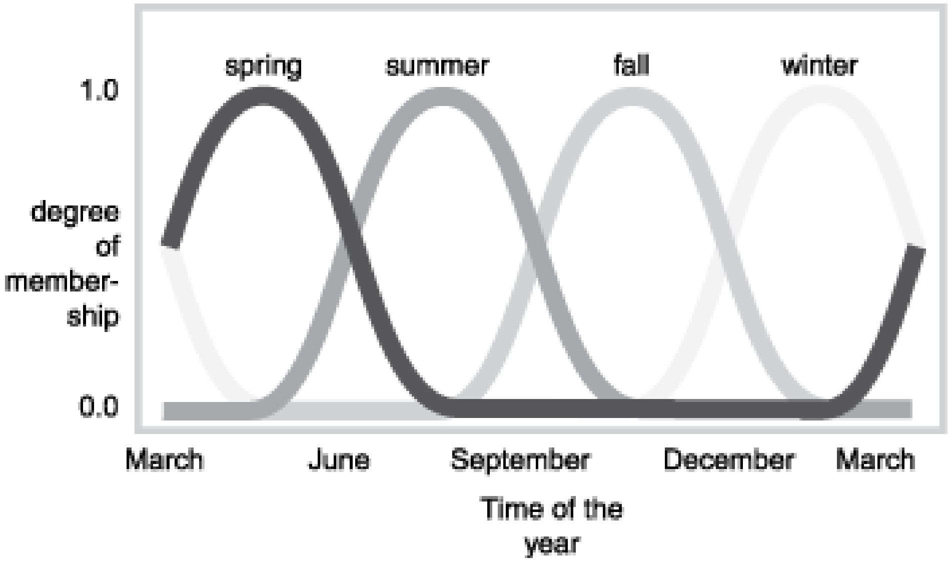
Нечеткие множества



Основы нечеткой логики

Нечеткие множества

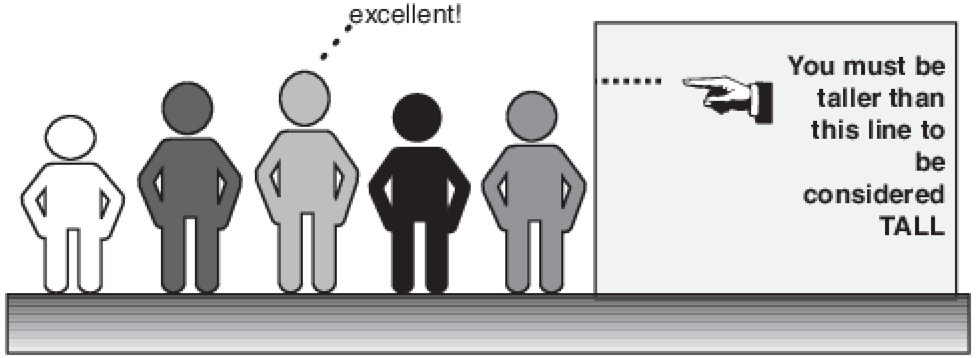


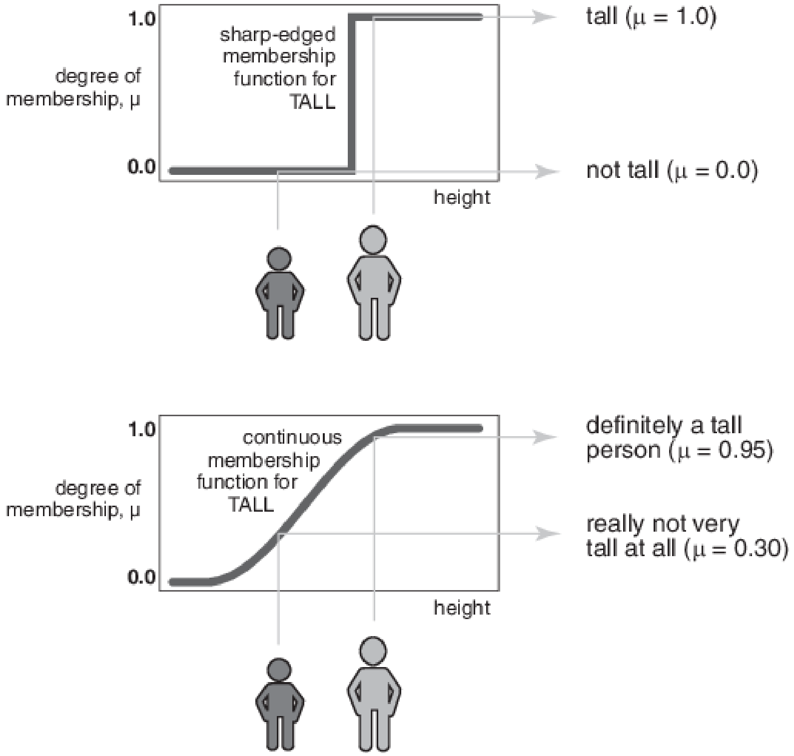


Основы нечеткой логики

Функции принадлежности

Функция принадлежности (ФП, μ) – это кривая, которая определяет, как каждая точка входного пространства отображается в значение принадлежности (или степень принадлежности) между 0 и 1.





Основы нечеткой логики

Нечеткое множество

Классическое множество

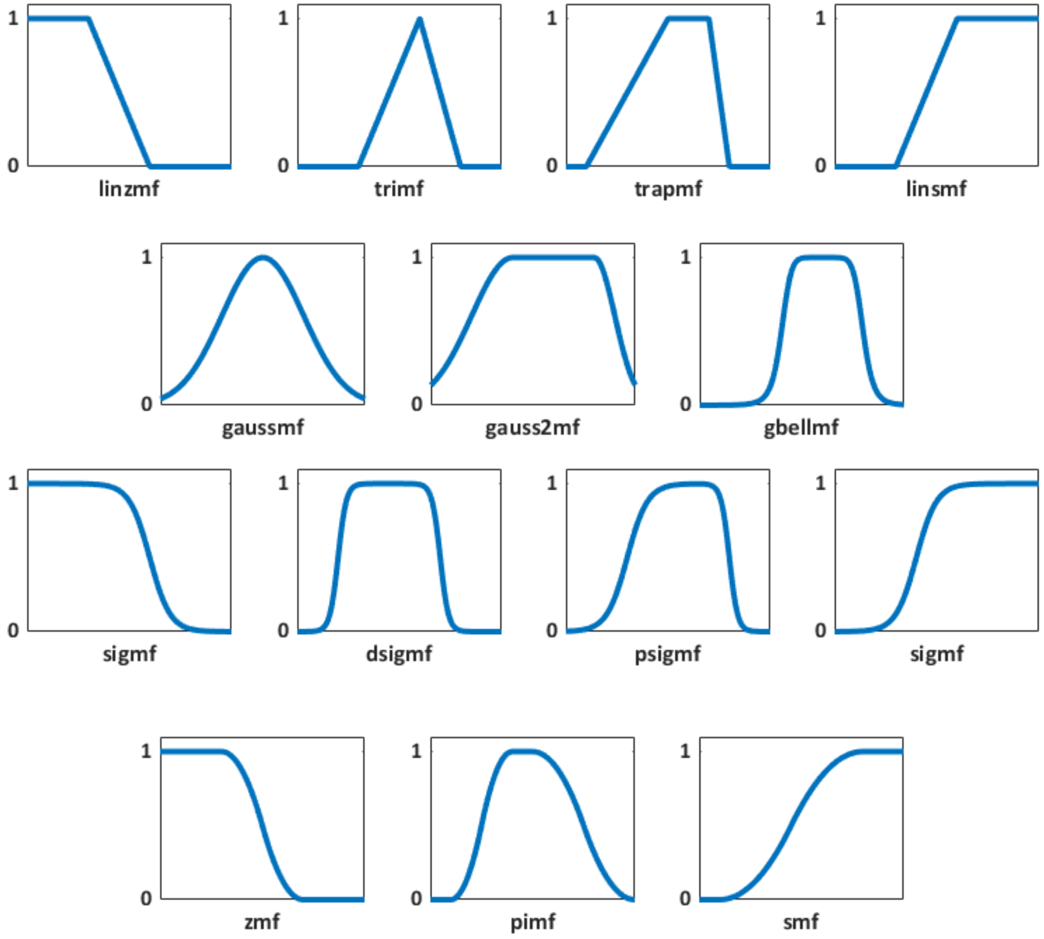
$$A = \{x | x > 6\}$$

Нечеткое множество

$$A = \{x, \mu_A(x) | x \in X\}$$

Основы нечеткой логики

Виды функций принадлежности



Основы нечеткой логики

Логические операции

Булева логика

A	B	A and B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

A	B	A or B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

A	not A
0	1
1	0

NOT

Нечеткая логика

A	B	min(A,B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

A	B	max(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

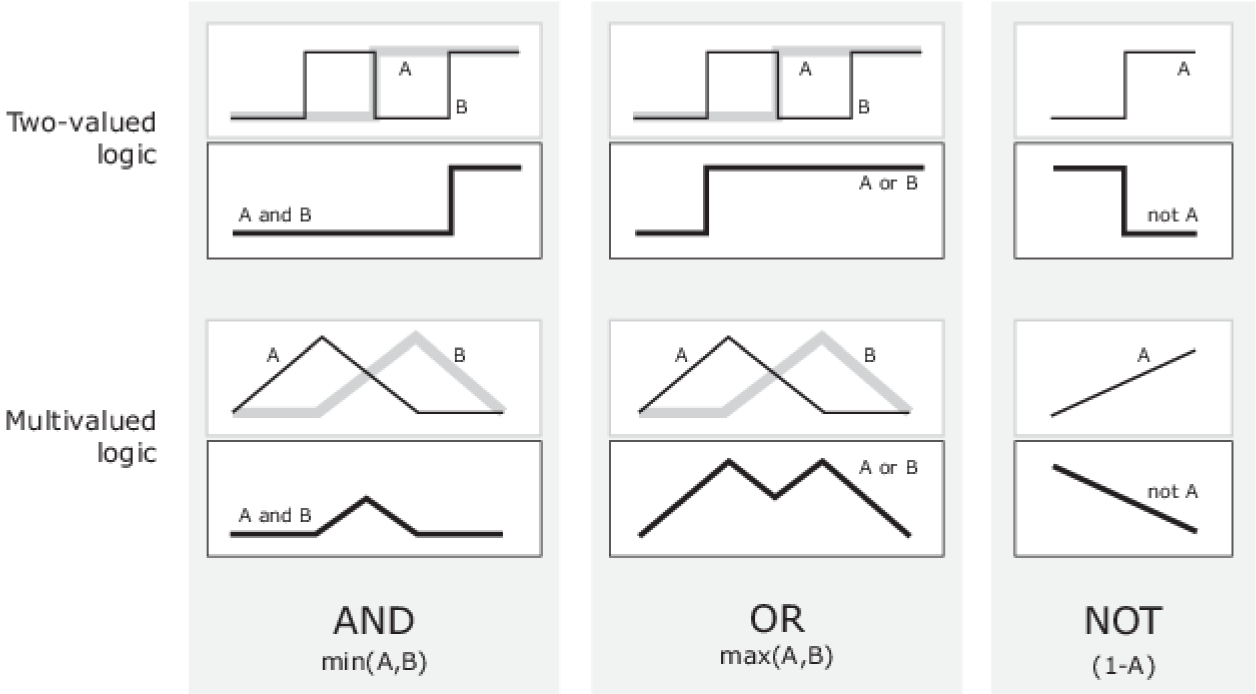
OR

A	1 - A
0	1
1	0

NOT

Основы нечеткой логики

Логические операции



Основы нечеткой логики

Логические операции

Пересечение двух нечетких множеств A и B задается в общем случае бинарным отображением T, которое агрегирует две функции принадлежности следующим образом:

$$\mu_{A\cap B}(x) = T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$

Например, бинарный оператор T может представлять умножение $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ (для пересечения нечетких множеств необязательно используется min).

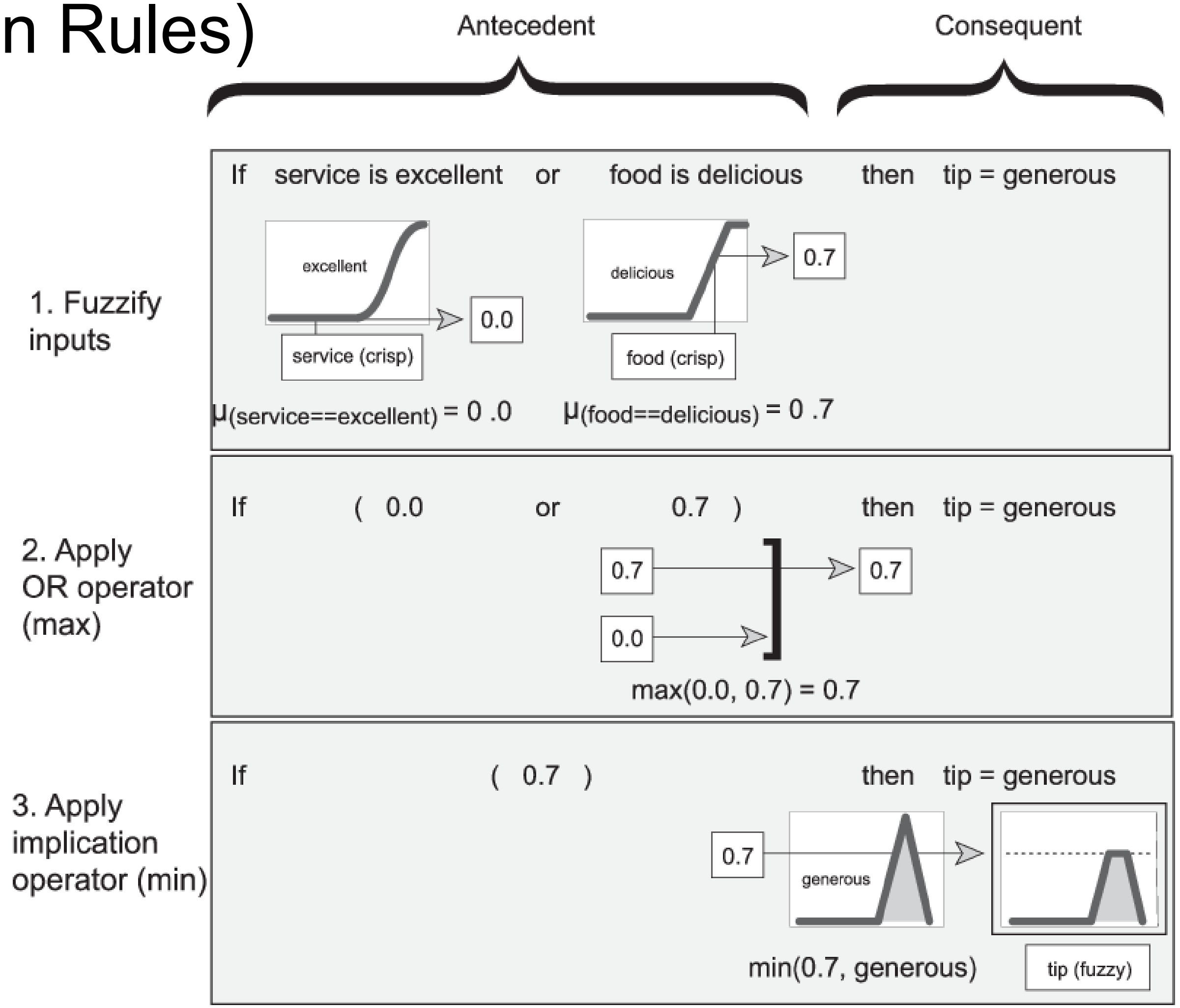
Подобно нечеткому пересечению, оператор нечеткого объединения задается в общем случае бинарным отображением S:

$$\mu_{A\cup B}(x) = S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$

Например, бинарный оператор S может представлять сложение $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ (для объединения нечетких множеств необязательно используется max).

Основы нечеткой логики

Правила «Если …, то …» (If-Then Rules)



If x is A, then y is B

If service is good, then tip is average

If service == good, then tip = average

Для правила типа «если – то» антецедент (условие) p влечет (имплицирует) консеквент (следствие) q.
В двоичной логике, если p истинно, то q тоже истинно (p→q).
В нечеткой логике, если p истинно с некоторой степенью принадлежности, то q также истинно в той же степени (0,5p→0,5q).
В обоих случаях, если p ложно, то значение q не определено.

Основы нечеткой логики

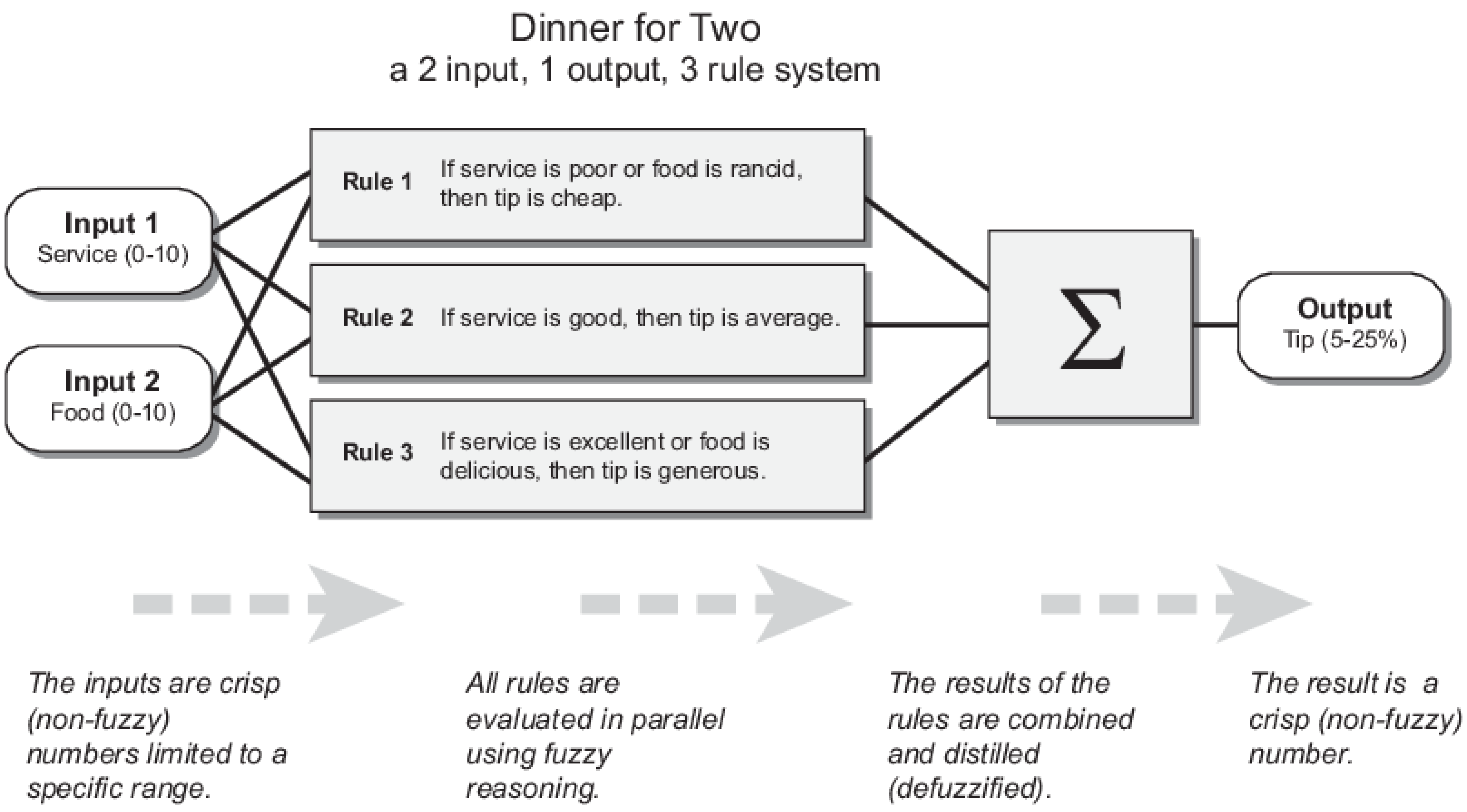
Правила «Если …, то …» (If-Then Rules)

1. Фаззификация входов: определить степени истинности всех нечетких высказываний в условии в виде степеней принадлежности в диапазоне от 0 до 1. Если условие состоит из одной части, то полученная величина и есть степень поддержки правила.

2. Применение нечеткого оператора к составному условию: если условие включает несколько частей, применить операции нечеткой логики и свести условие к одному числу в диапазоне от 0 до 1. Это и есть степень поддержки правила.

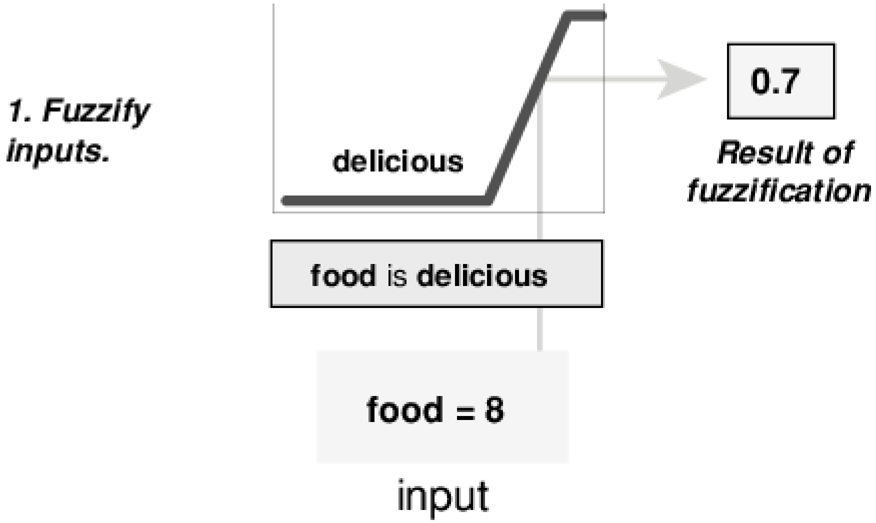
3. Применение метода импликации: использовать степень поддержки всего правила для формирования (модификации) выходного нечеткого множества. Следствие нечеткого правила задает для выхода целое нечеткое множество. Это множество представляется функцией принадлежности, выбранной так, чтобы отражать свойства следствия. Если условие истинно лишь частично (то есть ему присвоено значение меньше 1), то выходное нечеткое множество усекается в соответствии с выбранным методом импликации.

Процесс нечеткого вывода



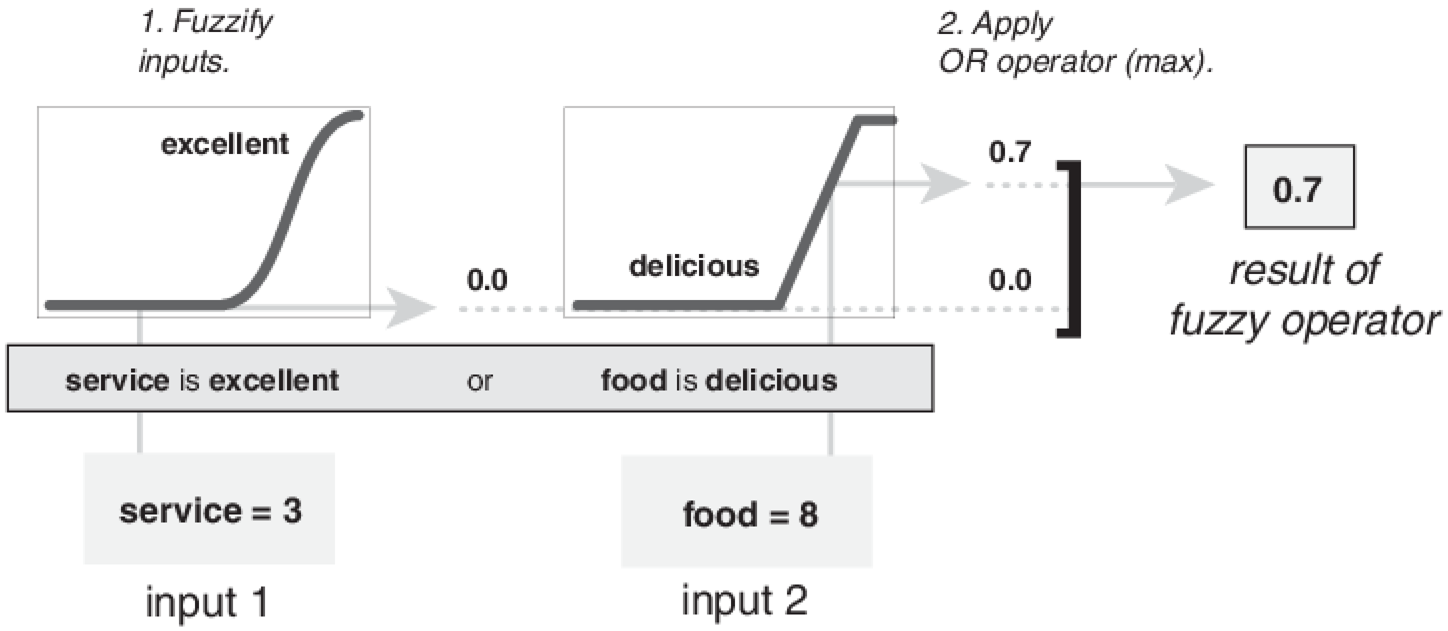
Процесс нечеткого вывода

1. Введение нечеткости (фаззификация входов)



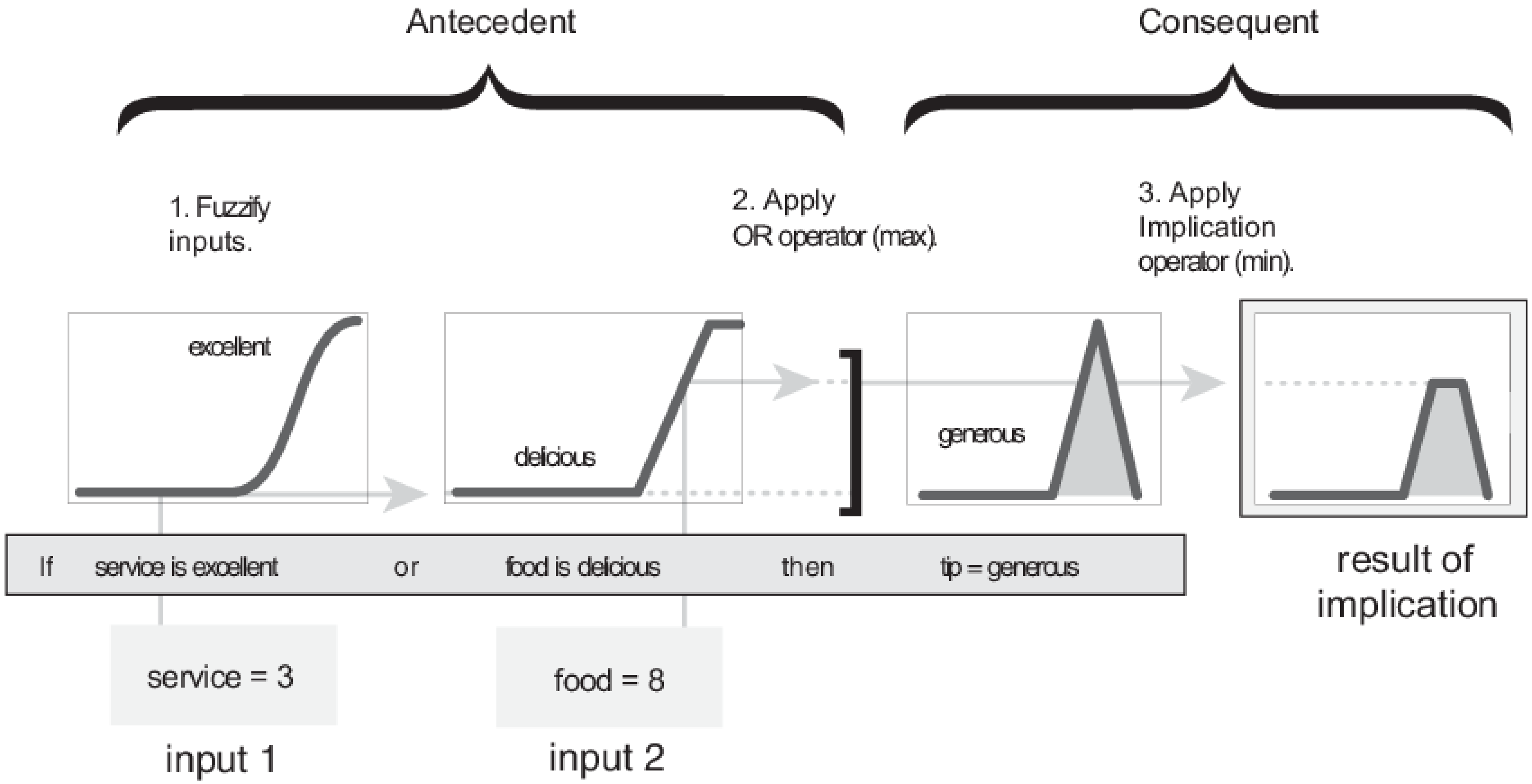
Процесс нечеткого вывода

2. Применение нечетких операций



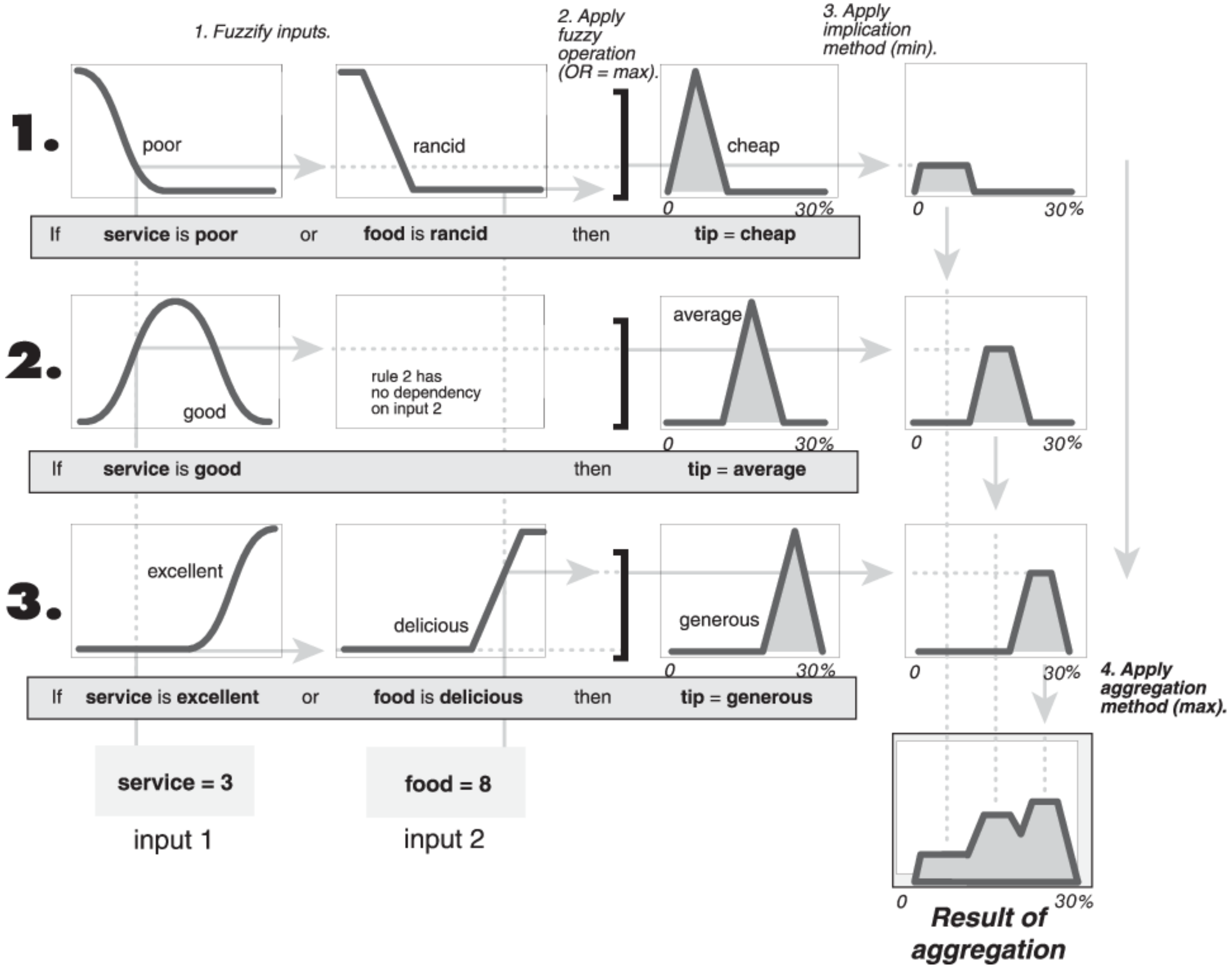
Процесс нечеткого вывода

3. Применение метода импликации



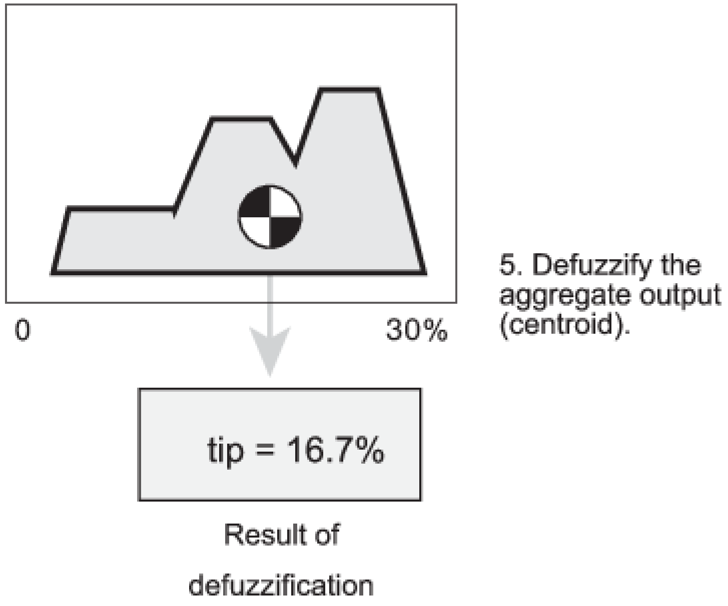
Процесс нечеткого вывода

4. Агрегация всех выходов



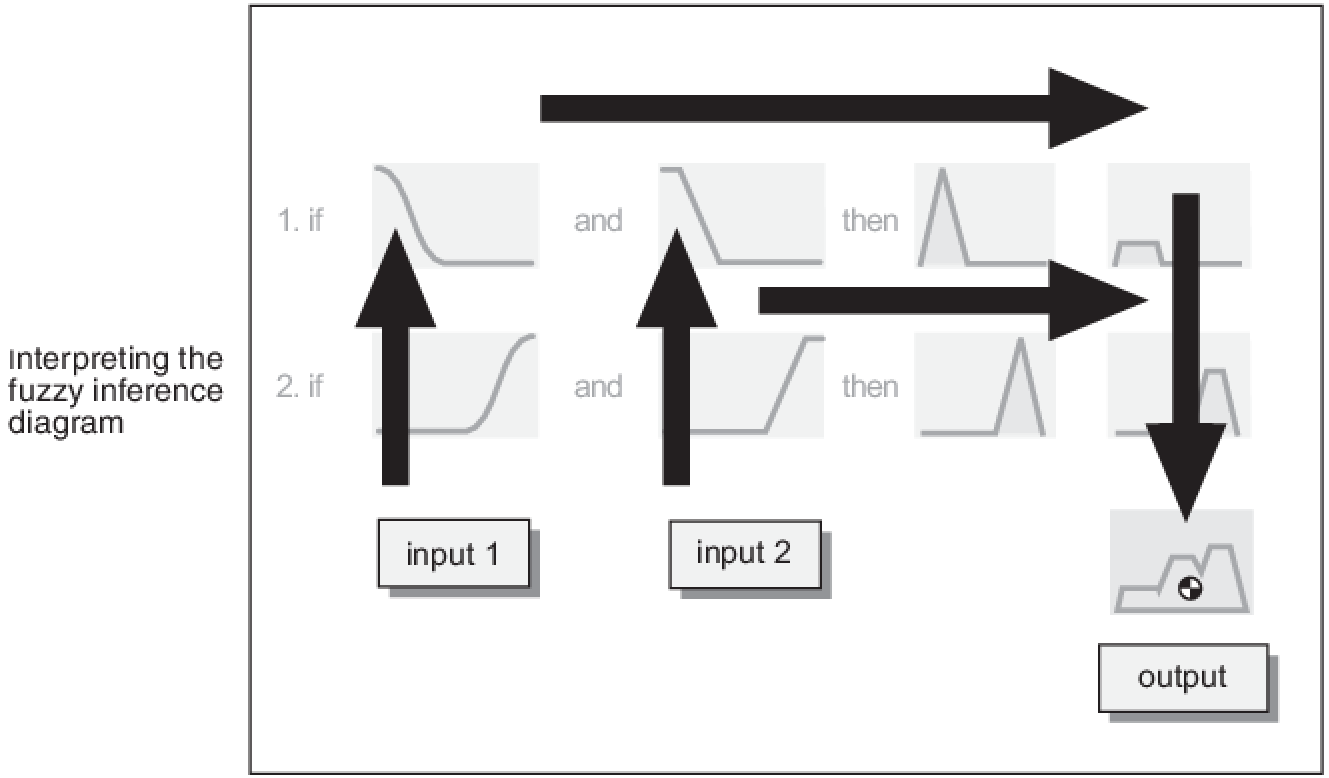
Процесс нечеткого вывода

5. Приведение к четкости (дефаззификация)



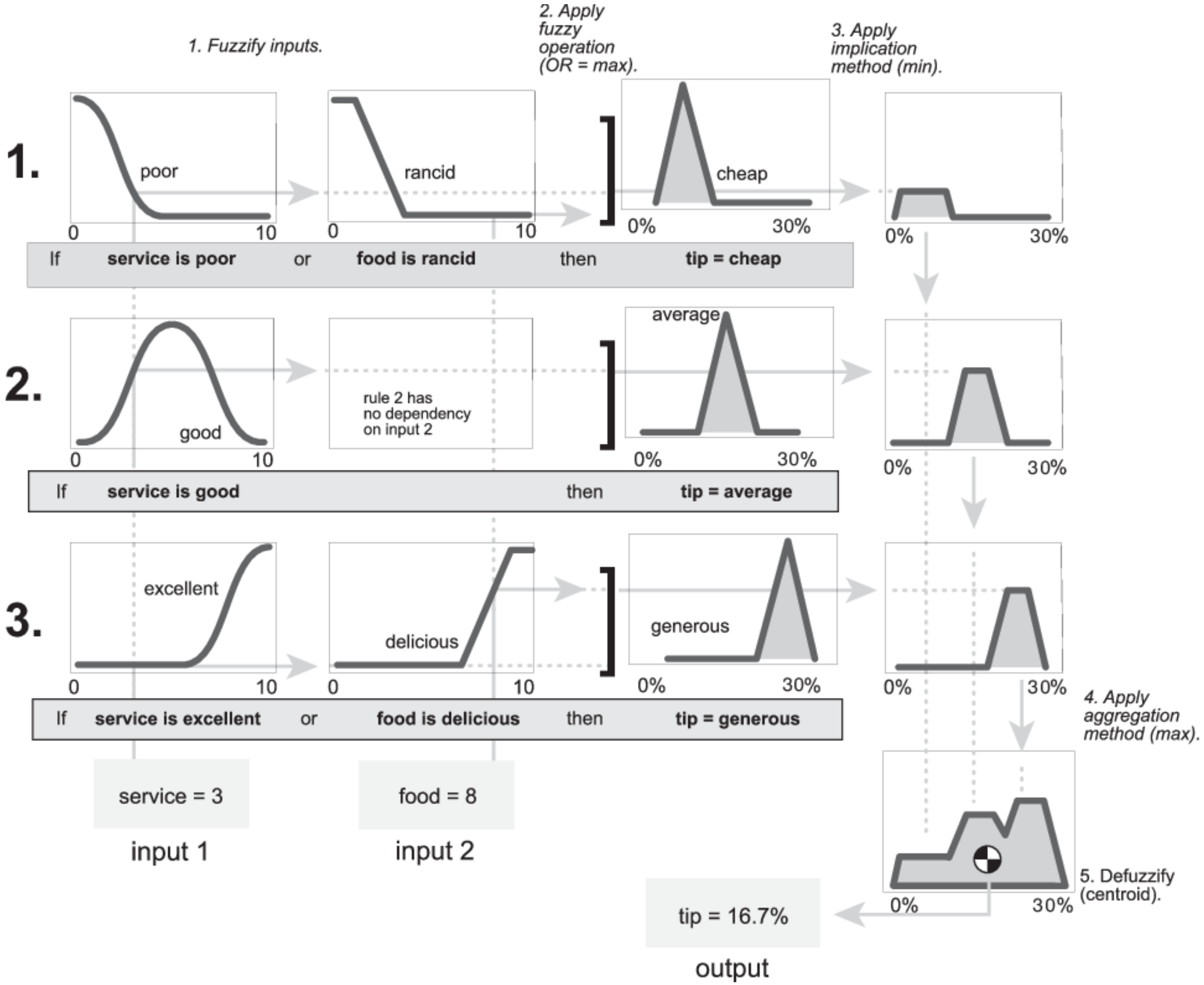
Процесс нечеткого вывода

Схема нечеткого вывода (Mamdani)



Процесс нечеткого вывода

Схема нечеткого вывода (Mamdani)



Процесс нечеткого вывода

Алгоритм нечеткого вывода (Mamdani)

Алгоритм математически может быть описан следующим образом:

1. Нечеткость: находятся степени истинности для предпосылок каждого правила: $A_1(x_0)$, $A_2(x_0)$, $B_1(y_0)$, $B_2(y_0)$.
2. Нечеткий вывод: находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого из правил (с использованием операции МИНИМУМ)

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0),$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0),$$

   где через «$\wedge$» обозначена операция логического минимума (min), затем находятся «усеченные» функции принадлежности:

$$C'_1 = \alpha_1 \wedge C_1(z),$$

$$C'_2 = \alpha_2 \wedge C_2(z).$$

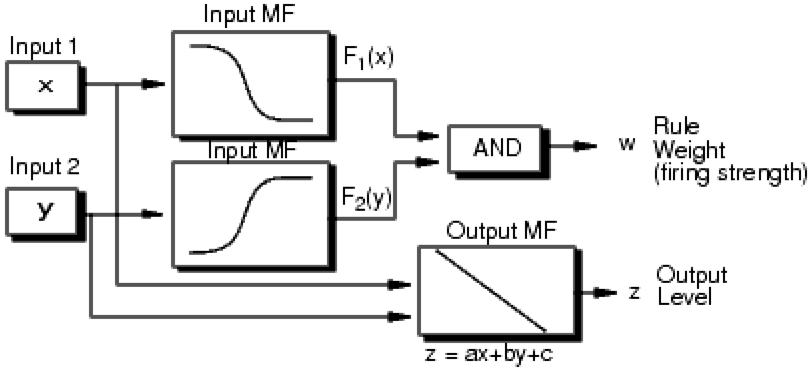
3. Композиция: использование операции МАКСИМУМ (max, далее обозначаемой как «$\vee$») производится объединение найденных усеченных функций, что приводит к получению итогового нечеткого подмножества для переменной выхода с функцией принадлежности:

$$\mu_{\Sigma}(z) = C(z) = C'_1(z) \vee C'_2(z) = \left(\alpha_1 \wedge C_1(z)\right) \vee \left(\alpha_2 \wedge C_2(z)\right).$$

4. Наконец, приведение к четкости (для нахождения z_0) проводится, например, центроидным методом.

Процесс нечеткого вывода

Схема нечеткого вывода (Sugeno)



Each rule generates two values:

- z_i — Rule output level, which is either a constant value or a linear function of the input values:

  $$z_i = a_i x + b_i y + c_i$$

  Here, x and y are the values of input 1 and input 2, respectively, and a_i, b_i, and c_i are constant coefficients. For a zero-order Sugeno system, z_i is a constant ($a = b = 0$).
- w_i — Rule firing strength derived from the rule antecedent

  $$w_i = AndMethod(F_1(x), F_2(y))$$

  Here, $F_1(...)$ and $F_2(...)$ are the membership functions for inputs 1 and 2, respectively.

The output of each rule is the weighted output level, which is the product of w_i and z_i.

The easiest way to visualize first-order Sugeno systems (a and b are nonzero) is to think of each rule as defining the location of a moving singleton. That is, the singleton output spikes can move around in a linear fashion within the output space, depending on the input values. The rule firing strength then defines the size of the singleton spike.

The final output of the system is the weighted average over all rule outputs:

$$\text{Final Output} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

where N is the number of rules.

Процесс нечеткого вывода

Алгоритм нечеткого вывода (Sugeno)

Sugeno использовал набор правил в следующей форме (приведем пример двух правил):

П$_1$: если x есть A_1 и y есть B_1, тогда $z_1=a_1x+b_1y$,

П$_2$: если x есть A_2 и y есть B_2, тогда $z_2=a_2x+b_2y$.

1. Первый этап – как в алгоритме Mamdani.
2. На втором этапе находится $\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0)$, $\quad \alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)$ и индивидуальные выходы

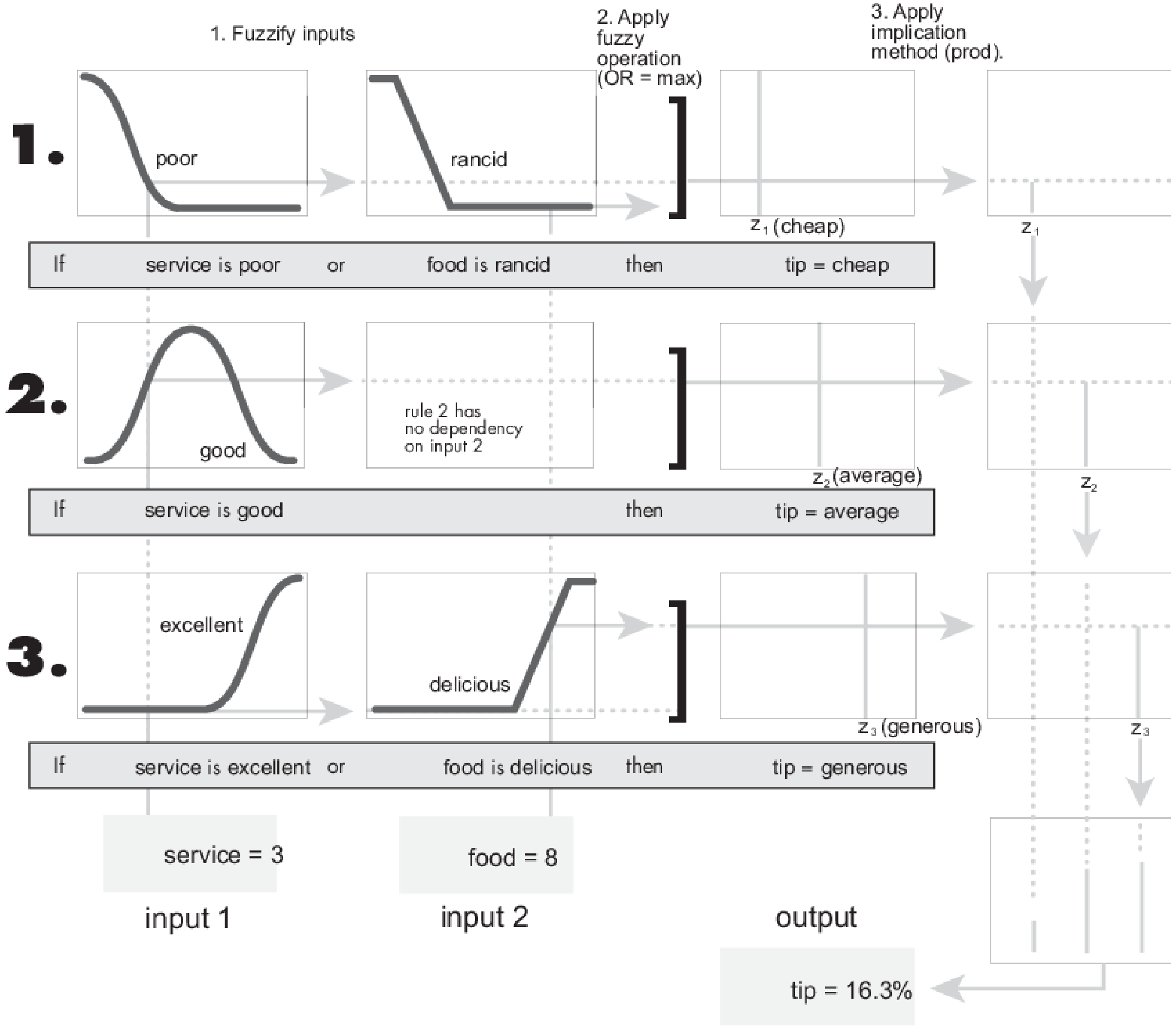
$$z_1^* = a_1 x_0 + b_1 y_0,$$
$$z_2^* = a_2 x_0 + b_2 y_0.$$

3. На третьем этапе определяется четкое значение переменной вывода:

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1^* + \alpha_2 z_2^*}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Процесс нечеткого вывода

Общая схема нечеткого вывода (Sugeno)



Решение типовых задач

Пример 1

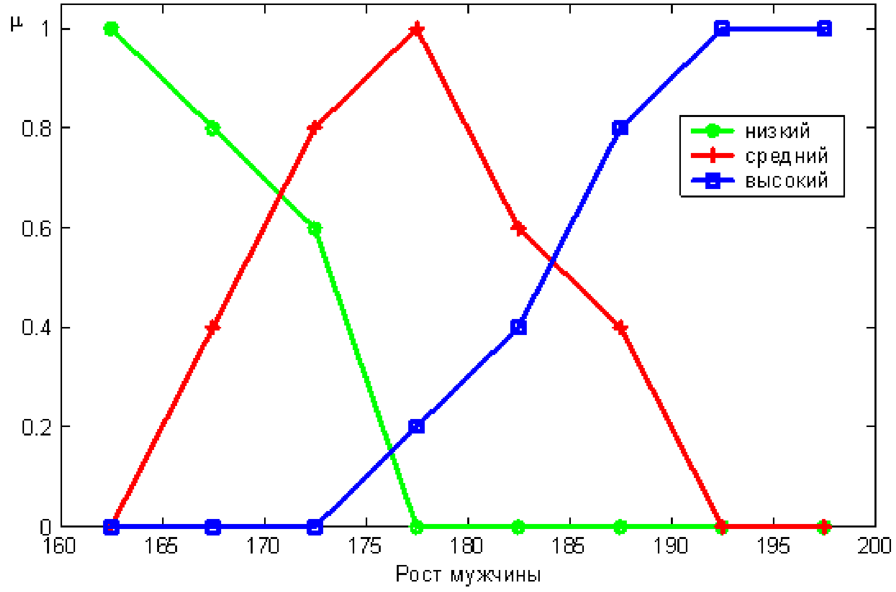
Построить функции принадлежности термов "низкий", "средний", "высокий", используемых для лингвистической оценки переменной "рост мужчины".
Результаты опроса пяти экспертов приведены в таблице.

k	Термы	[160,165)	[165,170)	[170,175)	[175,180)	[180,185)	[185,190)	[190,195)	[195,200)
Эксперт 1	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	1	1	1	0	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Эксперт 2	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	1	1	0	0	0	0
	высокий	0	0	0	0	1	1	1	1
Эксперт 3	низкий	1	0	0	0	0	0	0	0
	средний	0	1	1	1	1	1	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	1	1	1
Эксперт 4	низкий	1	1	1	0	0	0	0	0
	средний	0	0	0	1	1	1	0	0
	высокий	0	0	0	0	0	0	1	1
Эксперт 5	низкий	1	1	0	0	0	0	0	0
	средний	0	1	1	1	0	0	0	0
	высокий	0	0	0	1	1	1	1	1

Решение типовых задач

Пример 1

Термы	[160,165)	[165,170)	[170,175)	[175,180)	[180,185)	[185,190)	[190,195)	[195,200)
низкий	5	4	3	0	0	0	0	0
	1	0,8	0,6	0	0	0	0	0
средний	0	2	4	5	3	2	0	0
	0	0,4	0,8	1	0,6	0,4	0	0
высокий	0	0	0	1	2	4	5	5
	0	0	0	0,2	0,4	0,8	1	1



Решение типовых задач

Пример 2

Построить функции принадлежности термов "низкий", "средний", "высокий", используемых для лингвистической оценки переменной "рост мужчины".
Результаты опроса пяти экспертов приведены в таблице.

Матрица парных сравнений

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 170 & 175 & 180 & 185 & 190 & 195 \end{array} \\ \begin{array}{c} 170 \\ 175 \\ 180 \\ 185 \\ 190 \\ 195 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1/9 \\ 2 & 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1/8 \\ 4 & 3 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/5 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Девятибалльная шкала Саати:

1 – если *отсутствует преимущество* элемента u_i над элементом u_j;

3 – если имеется *слабое преимущество* u_i над u_j;

5 – если имеется существенное преимущество u_i над u_j;

7 – если имеется явное преимущество u_i над u_j;

9 – если имеется абсолютное преимущество u_i над u_j;

2,4,6,8 – промежуточные сравнительные оценки.

Степени принадлежности принимаются равными соответствующим координатам собственного вектора $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ матрицы парных сравнений:

$$\mu(u_i) = w_i, \qquad i = \overline{1,n}$$

$$\begin{cases} A \cdot W = \lambda_{max} \cdot W \\ w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1 \end{cases}$$

где λ_{max} – максимальное собственное значение матрицы A

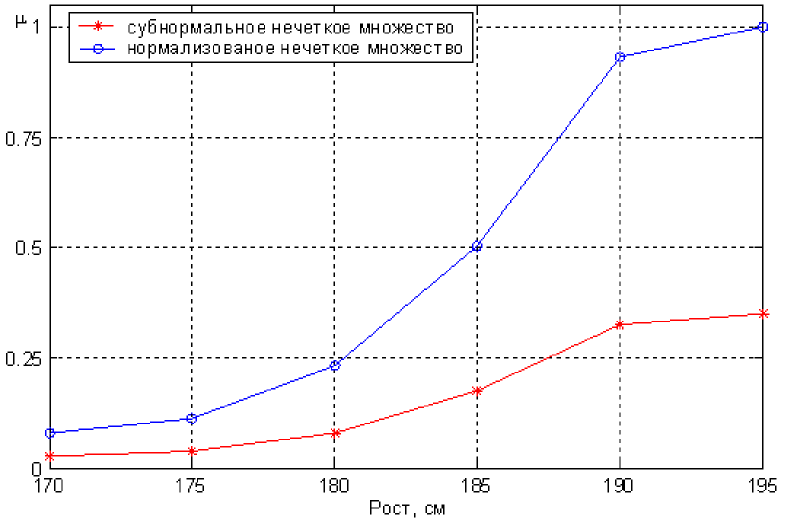
Решение типовых задач

Пример 2

Собственные значения этой матрицы парных сравнений равны:

6,2494;
0,0318 + 1,2230i;
0,0318 – 1,2230i;
0,1567 + 0,2392i;
- 0,1567 – 0,2392i;
0,0004.

λ_{max} = 6,2494



u_i	170	175	180	185	190	195
$\mu_{\text{высокий мужчина}}(u_i)$ Субнормальное нечеткое множество	0,0284	0,0399	0,0816	0,1754	0,3254	0,3494
$\mu_{\text{высокий мужчина}}(u_i)$ Нормальное нечеткое множество	0,0813	0,1141	0,2335	0,5021	0,9314	1,000

Отклонение λ_{max} от n может служить мерой несогласованности парных сравнений эксперта. В примере 2 $\lambda_{max} = 6{,}2494$, а $n = 6$. Следовательно, мера несогласованности равна $0{,}2494$. При согласованных парных сравнениях процедура построения функций принадлежности значительно упрощается [ссылка на пособие].

Решение типовых задач

Пример 3

Определить четкое значение выходной переменной z_0, соответствующее подаче на вход системы принятия решений x_0=3 и y_0=2, если нечеткий вывод осуществляется по правилам

П1: если x есть A1 и y есть B1 то z есть C1;
П2: если x есть A2 и y есть B2 то z есть C2;

с использованием логического вывода по МИНИМУМУ и композиции с МАКСИМУМОМ, если $A1_{LR}$=(4, 3, 2), $B1_{LR}$=(4, 2, 3), $A2_{LR}$=(2, 2, 4), $B2_{LR}$=(3, 2, 1), $C1_{LR}$=(2, 2, 2), $C2_{LR}$=(3, 3, 3).

Приведение к четкости осуществляется по центроидному методу.

Решение типовых задач
Пример 3

Нечеткие множества заданы **LR-треугольными** числами вида $A^{LR} = (m, \alpha, \beta)$,
где функция принадлежности:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \le m - \alpha \\ \dfrac{x - (m - \alpha)}{\alpha}, & m - \alpha \le x \le m \\ \dfrac{(m + \beta) - x}{\beta}, & m \le x \le m + \beta \\ 0, & x \ge m + \beta \end{cases}$$

Дано: $x_0 = 3,\ y_0 = 2.$

1) Степени принадлежности входов

Для $\mathbf{A_1^{LR} = (4, 3, 2)}$

Опора: $[4 - 3, 4 + 2] = [1, 6]$. Так как $x_0 = 3 \in [1, 4]$,

$$\mu_{A_1}(3) = \frac{3 - (4 - 3)}{3} = \frac{3 - 1}{3} = \frac{2}{3}$$

Для $\mathbf{A_2^{LR} = (2, 2, 4)}$

Опора: $[0, 6]$. $x_0 = 3 \in [2, 6]$ (правая ветвь),

$$\mu_{A_2}(3) = \frac{(2 + 4) - 3}{4} = \frac{6 - 3}{4} = \frac{3}{4}$$

Для $\mathbf{B_1^{LR} = (4, 2, 3)}$

Опора: $[2, 7]$. $y_0 = 2$ – это левый край, значит

$$\mu_{B_1}(2) = 0$$

Для $\mathbf{B_2^{LR} = (3, 2, 1)}$

Опора: $[1, 4]$. $y_0 = 2 \in [1, 3]$ (левая ветвь),

$$\mu_{B_2}(2) = \frac{2 - (3 - 2)}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

2) Активация правил (логический вывод по МИНИМУМУ)

Правило P_1: A_1 и $B_1 \Rightarrow C_1$

$$w_1 = \min\left(\mu_{A_1}(3), \mu_{B_1}(2)\right) = min\left(\frac{2}{3}, 0\right) = 0$$

Правило P_2: A_2 и $B_2 \Rightarrow C_2$

$$w_2 = \min\left(\mu_{A_2}(3), \mu_{B_2}(2)\right) = \min\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Значит, C_1 не влияет, а C_2 будет **усечено** на уровне $0{,}5$.

3) Композиция по МАКСИМУМУ

Итоговая выходная функция:

$$\mu_Z(z) = \max\left(\min\left(w_1, \mu_{C1}(z)\right), \min\left(w_2, \mu_{C2}(z)\right)\right) = \min\left(1/2, \mu_{C2}(z)\right)$$

так как $w_1 = 0$.

$C_2^{LR} = (3, 3, 3)$ – симметричный треугольник с вершиной в 3, опора $[0, 6]$.

После усечения на $0{,}5$ получаем симметричную трапецию относительно $z = 3$.

4) Приведение к четкости (центроид)

Для симметричной относительно $z = 3$ фигуры центроид лежит на оси симметрии, то есть

$$z_0 = 3$$

Ответ: $\boxed{z_0 = 3}$.

Решение типовых задач

Пример 4

Для заданных нечетких множеств определить:
степень их нечеткого включения, объединение и разность
F={< 0,5 / x1>,< 0,7 / x2>,< 0,8 / x3>,< 0,3 / x4>,< 0,3 / x5>}
B={< 0,9 / x1>,< 0,9 / x2>,< 0,3 / x4>,< 0,4 / x5>,< 0,9 / x6>}

1. Степень нечеткого включения $F \subseteq B$
Степень включения определяется как:
$S(F \subseteq B) = \min(\max(1 - \mu F(x), \mu B(x)))$
Для каждого элемента универсума:

x_1: max(1 - 0,5; 0,9) = max(0,5; 0,9) = 0,9
x_2: max(1 - 0,7; 0,9) = max(0,3; 0,9) = 0,9
x_3: max(1 - 0,8; 0) = max(0,2; 0) = 0,2
x_4: max(1 - 0,3; 0,3) = max(0,7; 0,3) = 0,7
x_5: max(1 - 0,3; 0,4) = max(0,7; 0,4) = 0,7
x_6: max(1 - 0; 0,9) = max(1; 0,9) = 1

$S(F \subseteq B)$ = min(0,9; 0,9; 0,2; 0,7; 0,7; 1) = 0,2

2. Объединение $F \cup B$
Функция принадлежности: $\mu F\cup B(x) = \max(\mu F(x), \mu B(x))$

x_1: max(0,5; 0,9) = 0,9
x_2: max(0,7; 0,9) = 0,9
x_3: max(0,8; 0) = 0,8
x_4: max(0,3; 0,3) = 0,3
x_5: max(0,3; 0,4) = 0,4
x_6: max(0; 0,9) = 0,9

$F \cup B = \{\langle 0,9/x_1\rangle, \langle 0,9/x_2\rangle, \langle 0,8/x_3\rangle, \langle 0,3/x_4\rangle, \langle 0,4/x_5\rangle, \langle 0,9/x_6\rangle\}$

3. Разность $F \setminus B$
Функция принадлежности: $\mu F\setminus B(x) = \min(\mu F(x), 1 - \mu B(x))$

x_1: min(0,5; 1-0,9) = min(0,5; 0,1) = 0,1
x_2: min(0,7; 1-0,9) = min(0,7; 0,1) = 0,1
x_3: min(0,8; 1-0) = min(0,8; 1) = 0,8
x_4: min(0,3; 1-0,3) = min(0,3; 0,7) = 0,3
x_5: min(0,3; 1-0,4) = min(0,3; 0,6) = 0,3
x_6: min(0; 1-0,9) = min(0; 0,1) = 0

$F \setminus B = \{\langle 0,1/x_1\rangle, \langle 0,1/x_2\rangle, \langle 0,8/x_3\rangle, \langle 0,3/x_4\rangle, \langle 0,3/x_5\rangle\}$
(элемент x_6 можно опустить,
так как его степень принадлежности равна 0)

Материалы

https://www.mathworks.com/help/fuzzy/foundations-of-fuzzy-logic.html

https://www.mathworks.com/help/fuzzy/fuzzy-inference-process.html

https://www.mathworks.com/help/fuzzy/types-of-fuzzy-inference-systems.html

https://kpfu.ru/staff_files/F850320868/Osnovy_nechetkoj_logiki.pdf