

Фильтрация изображений

Пространственная фильтрация

Механизмы

Фильтрация:

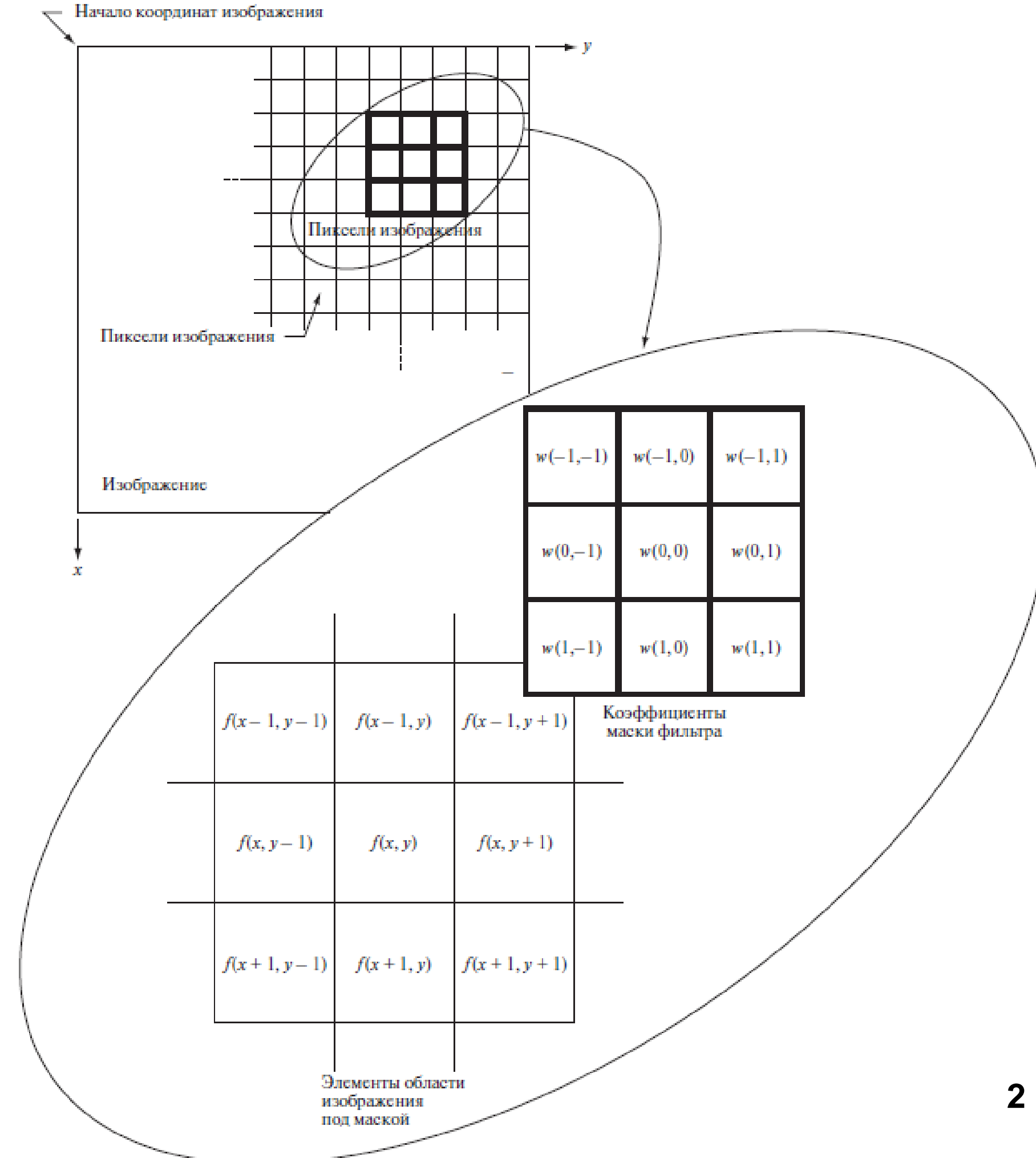
- Пропускание / подавление определенных частотных компонент

Пространственный фильтр:

- Состоит из окрестности и заданной операции
- Создает новый пиксель, значение которого зависит от операции, положение – центр окрестности

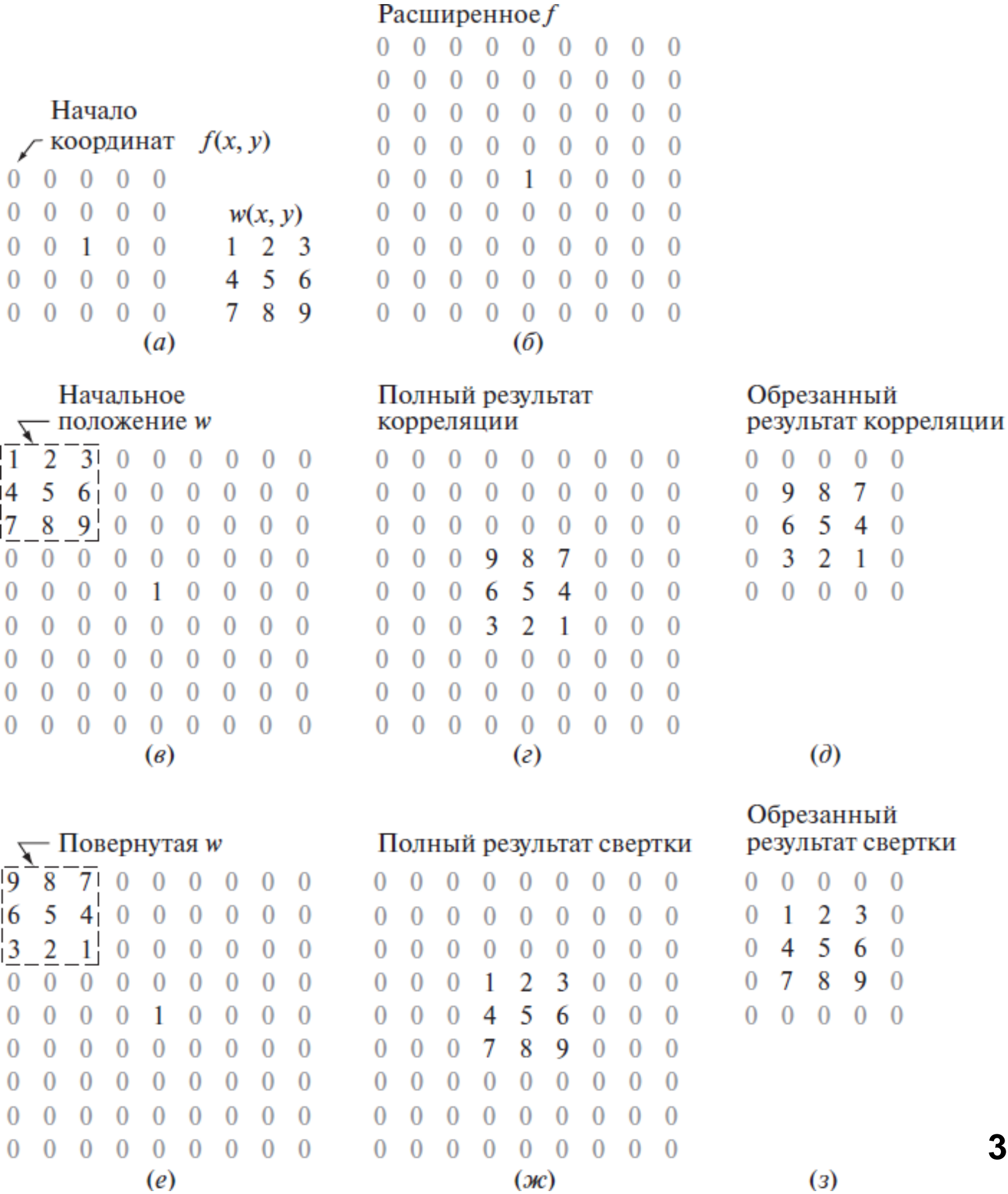
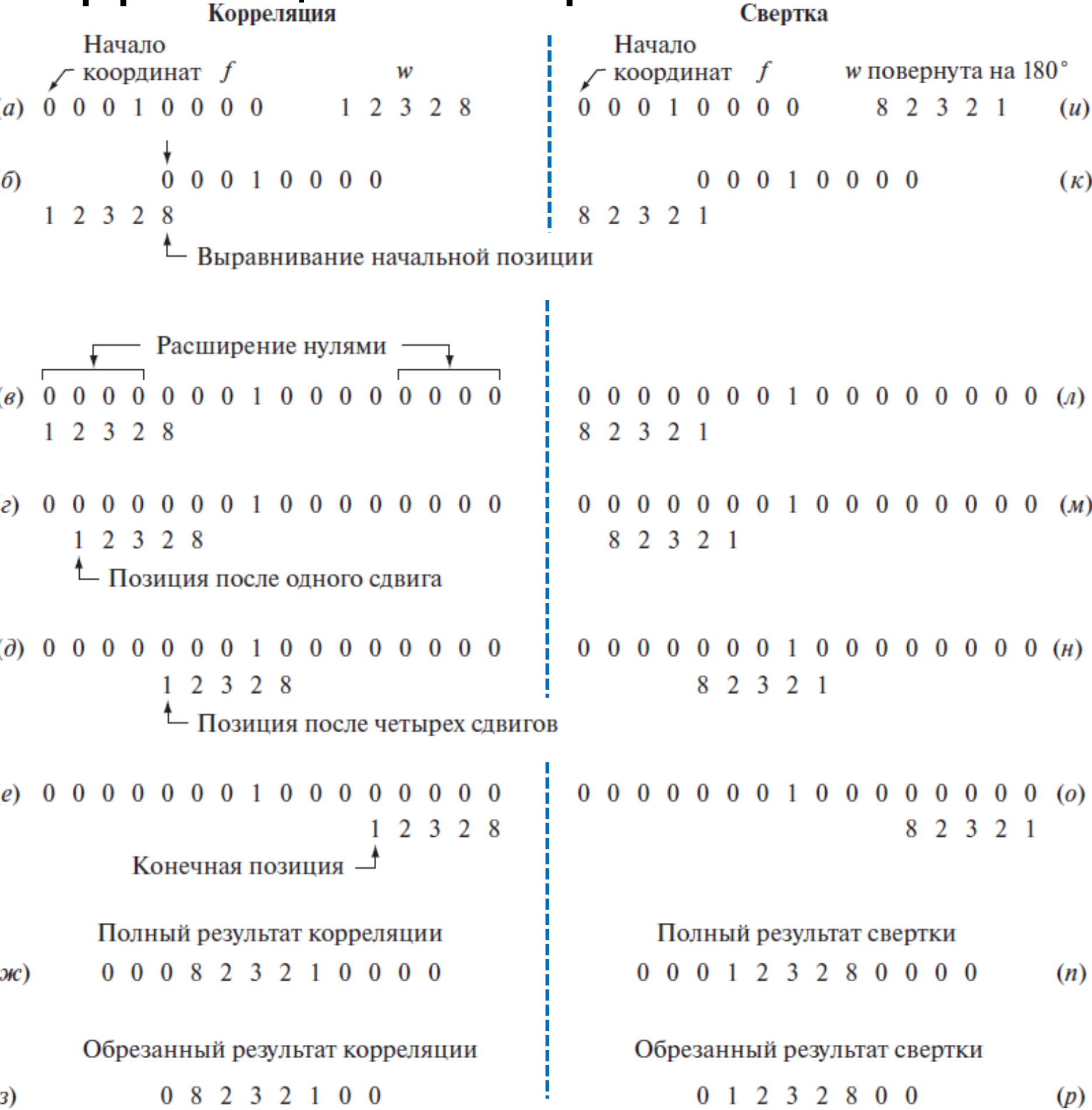
Аналитический вид фильтрации:

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)$$



Пространственная фильтрация

Корреляция и свертка



Пространственная фильтрация

Формирование масок

Формирование линейного фильтра:

- Задать матрицу размерами $m \times n$
- Выбрать коэффициенты в зависимости от ожидаемой операции

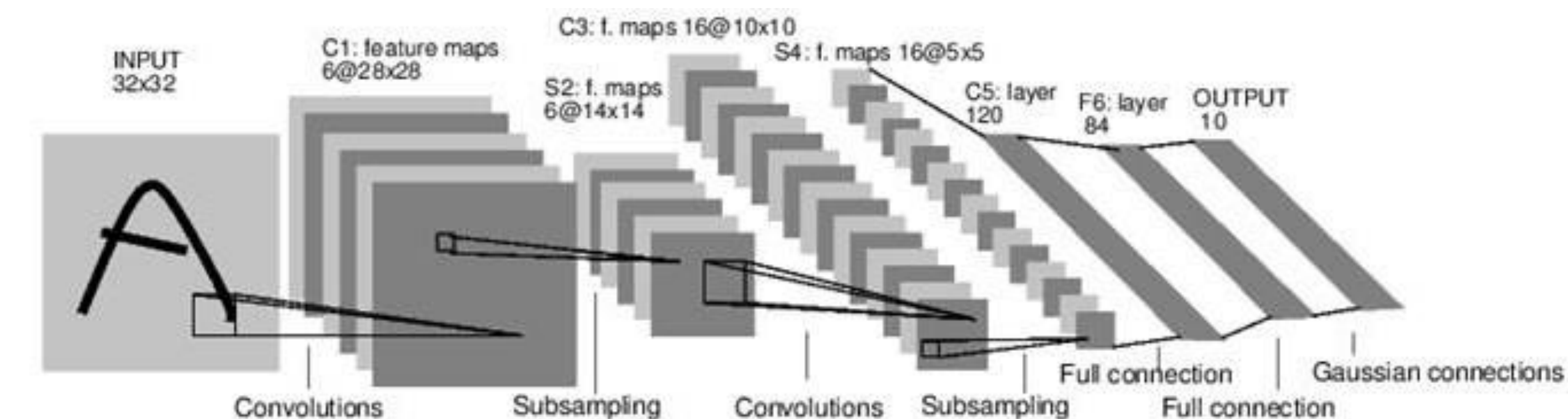
- Пример усредняющего фильтра 3×3 : $R = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i$

w_1	w_2	w_3
w_4	w_5	w_6
w_7	w_8	w_9

Формирование нелинейного фильтра:

- Задать размер окна
- Определить операцию над окрестностью
- Пример: $\max(\text{kernel})$

Основные операции CNN



A Full Convolutional Neural Network (LeNet)

Сглаживающие фильтры

Линейные фильтры

Пример фильтра:

- Взвешенное среднее

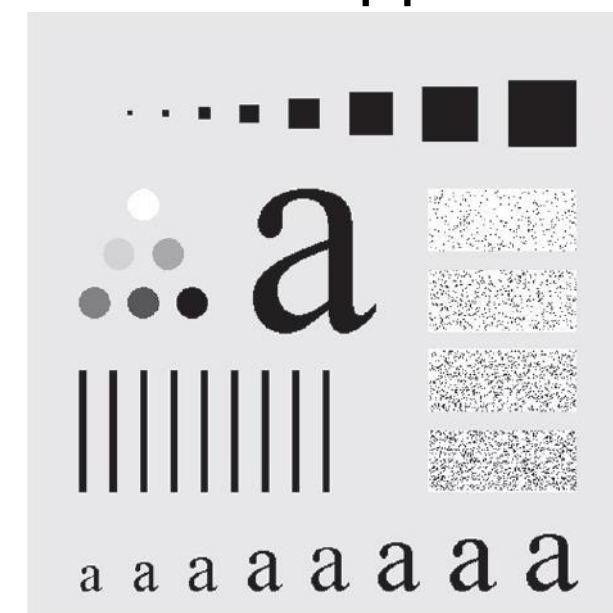
$$\frac{1}{16} \times$$

1	2	1
2	4	2
1	2	1

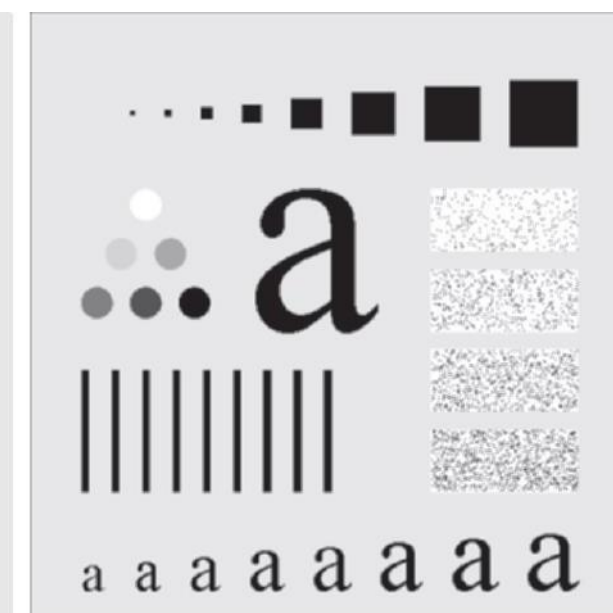
Аналитический вид фильтрации
взвешенного среднего:

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x+s, y+t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

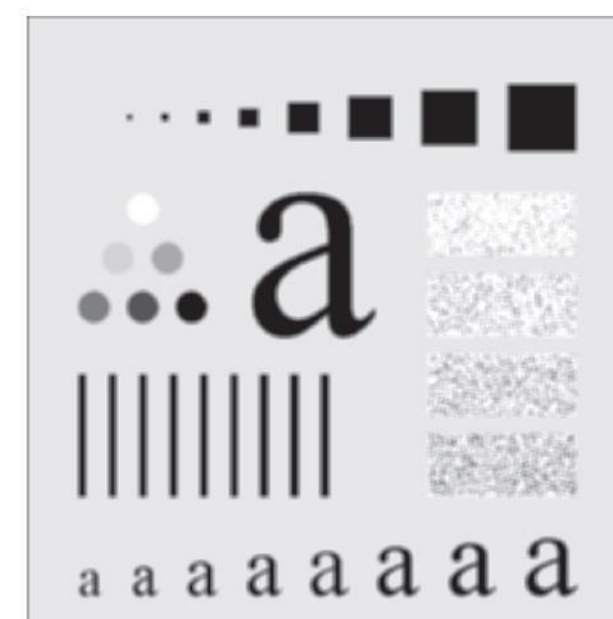
Исходное



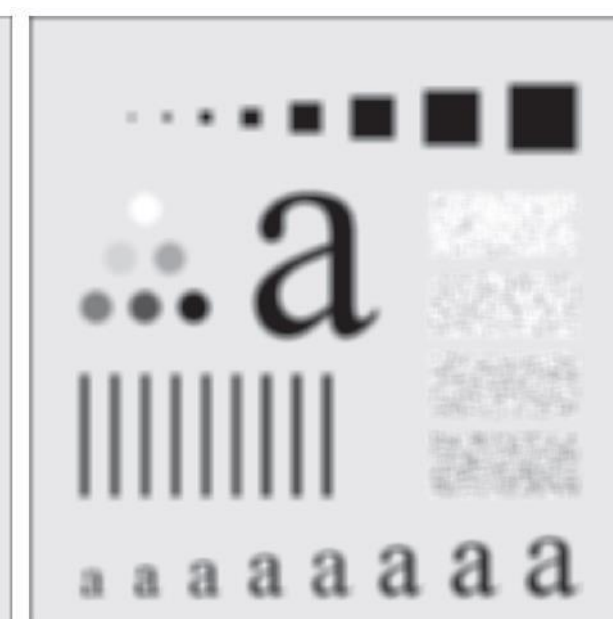
3 x 3



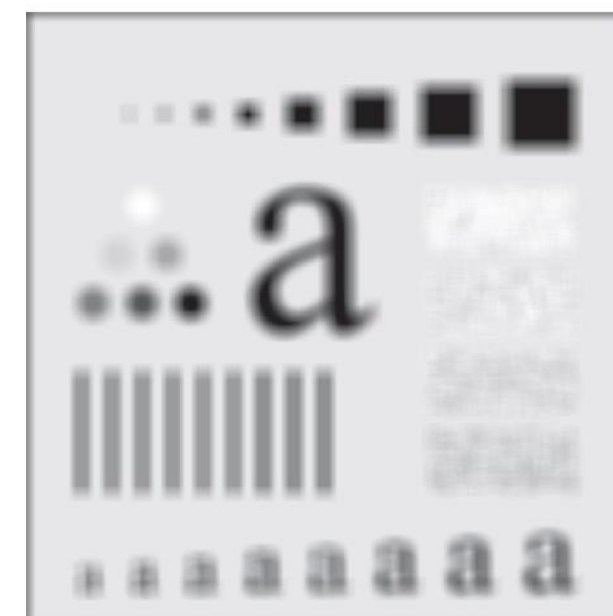
5 x 5



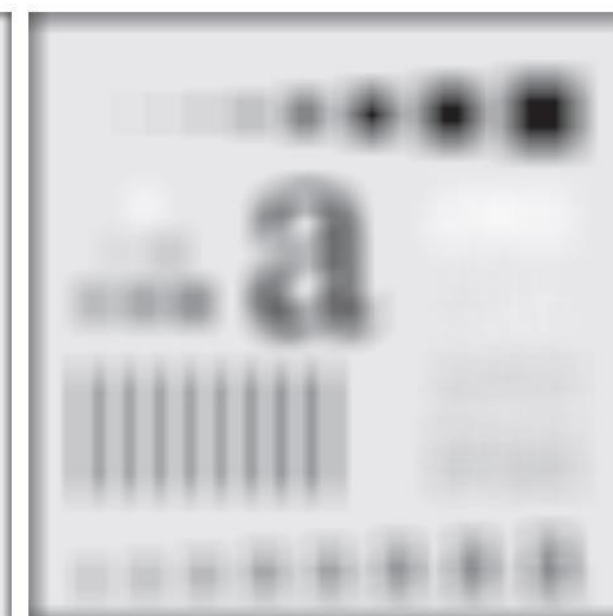
9 x 9



15 x 15



35 x 35

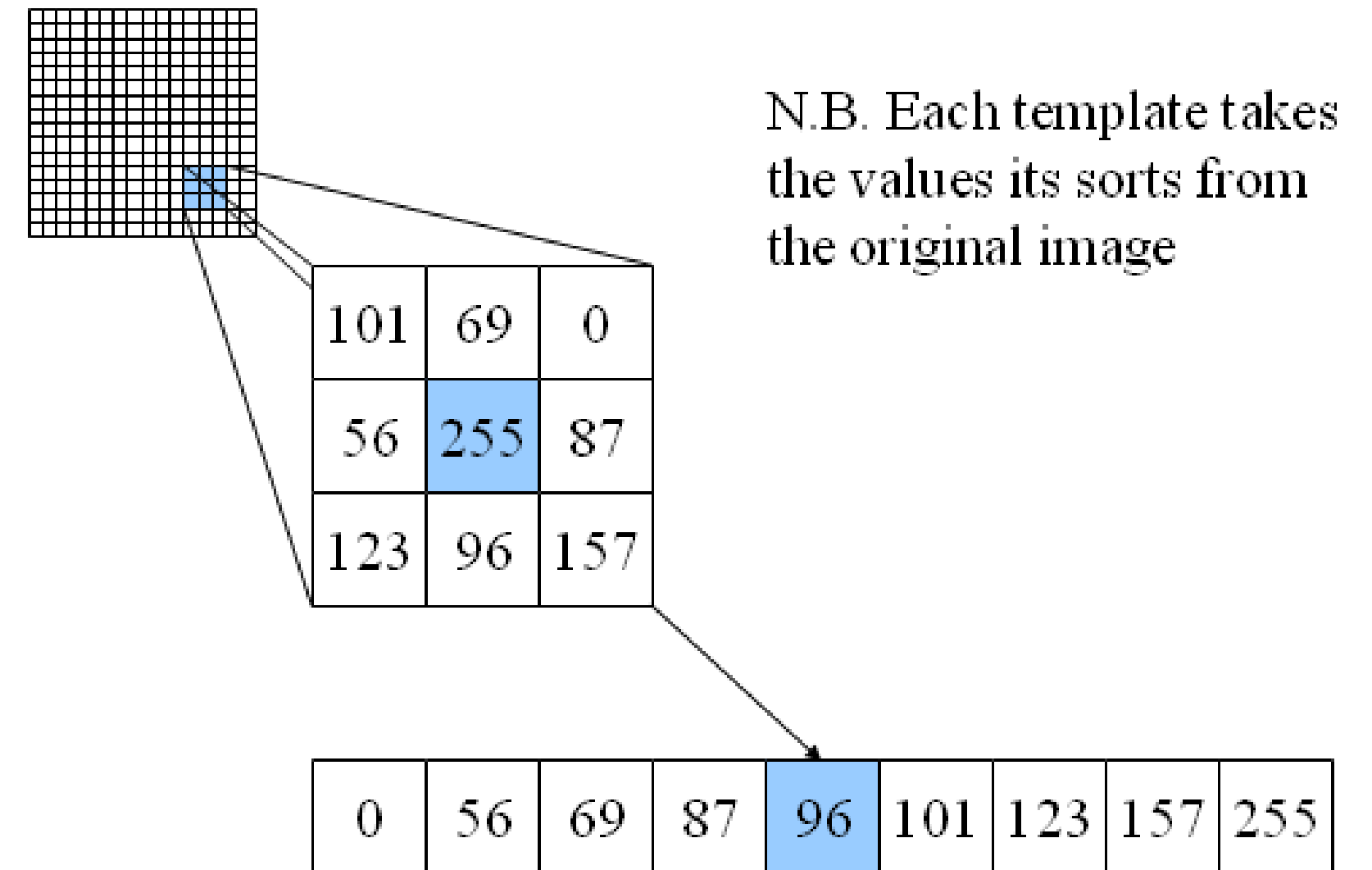


Сглаживающие фильтры

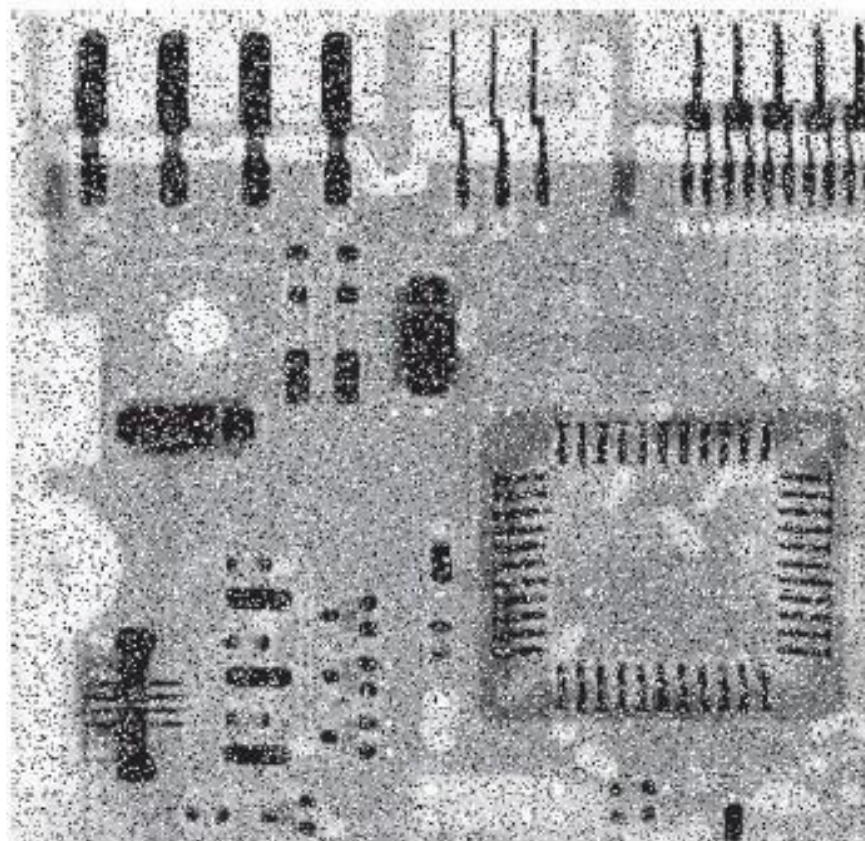
Нелинейные фильтры

Пример – медианная фильтрация:

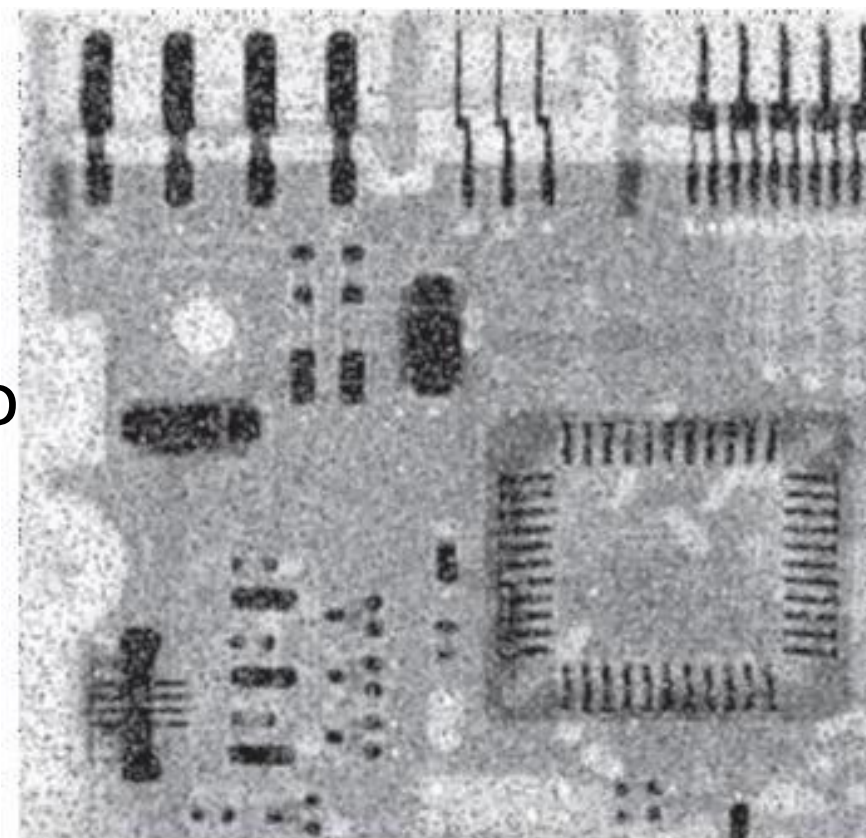
- Ранжирование значений пикселей под маской
- Выбор значения, находящегося на определенной позиции (медиана)
- Замена значения пикселя под центральном элементом маски на найденную медиану



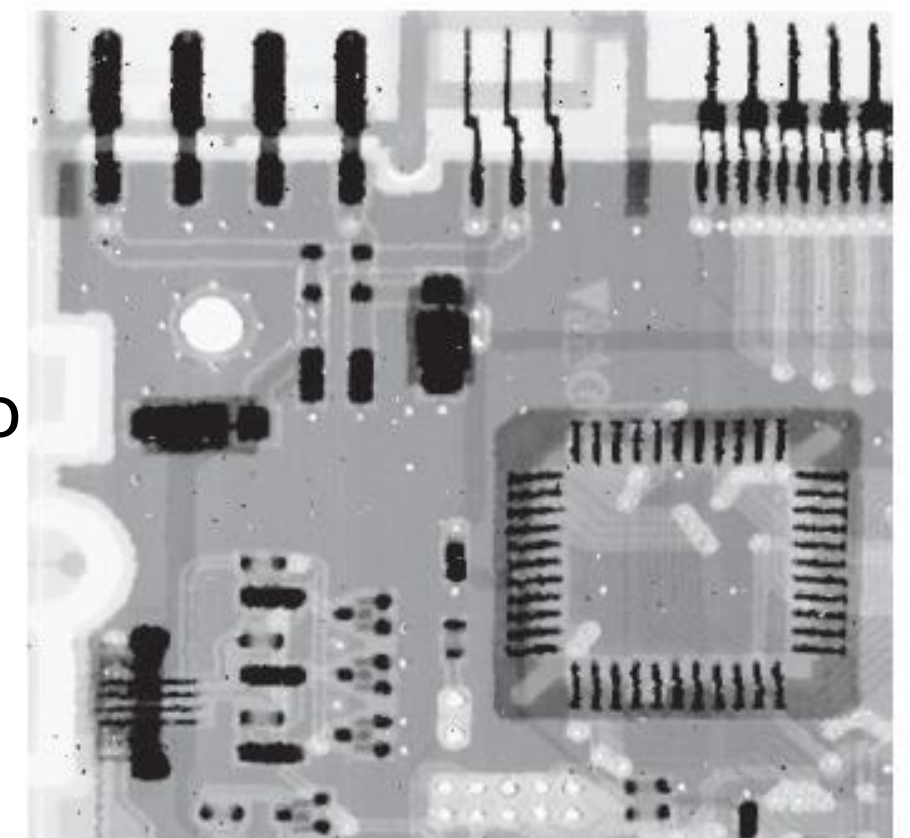
Исходное
изображение с
импульсным
шумом



После
усредняющего
фильтра



После
медианного
фильтра



Повышение резкости

ОСНОВЫ

Размытие / сглаживание == усреднение \Leftrightarrow интегрирование

Повышение резкости == обратно размытию \Leftrightarrow пространственное дифференцирование \Leftrightarrow разность

Первая производная:

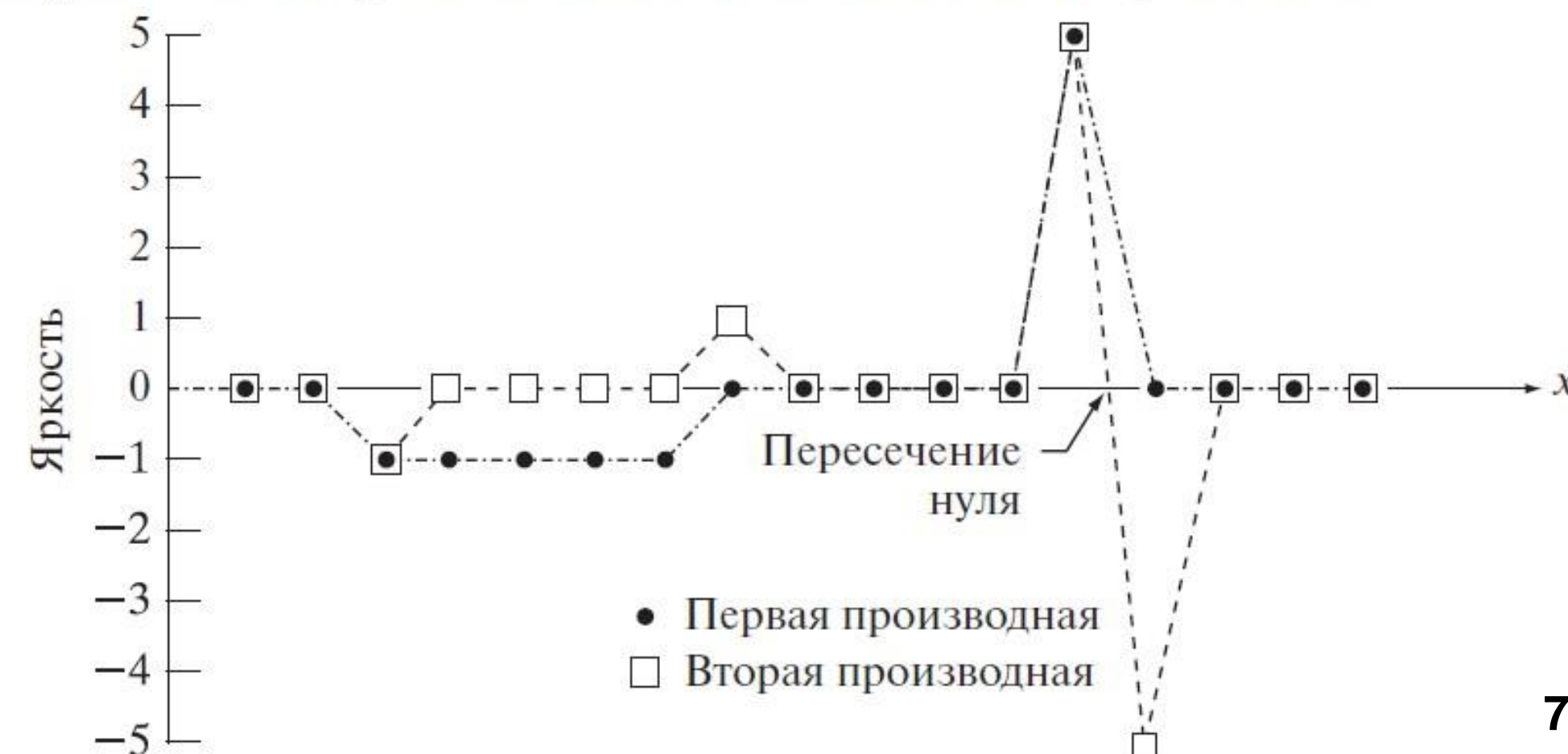
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x)$$

Вторая производная:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$$



Строка изображения	6	6	6	6	5	4	3	2	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	
1-я производная	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	
2-я производная	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5	-5	0	0	0	0	



Повышение резкости

Вторые производные, Лапласиан

Построение фильтра:

- Дискретная формулировка второй производной
- Построение маски

Простейший изотропный оператор – лапласиан:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

По осям:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

Дискретная формулировка лапласиана:

$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

Матрица
лапласиана

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

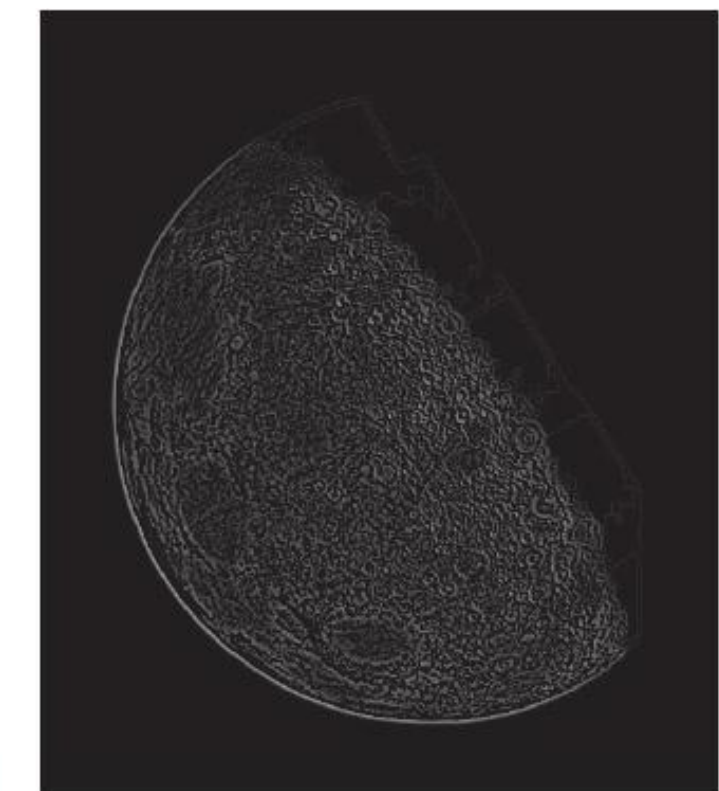
Исходное
нерезкое
изображение



Расширение лапласиана
на диагонали

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

После
применения
лапласиана



Повышение резкости

Производные первого порядка, градиент

Реализация через модуль градиента:

- Указывает направление наибольшего возрастания f в точке (x, y)

$$\nabla f \equiv \text{grad}(f) \equiv \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Модуль вектора: $M(x, y) = \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$

$$M(x, y) \approx |g_x| + |g_y|$$

Аппроксимации о осям:

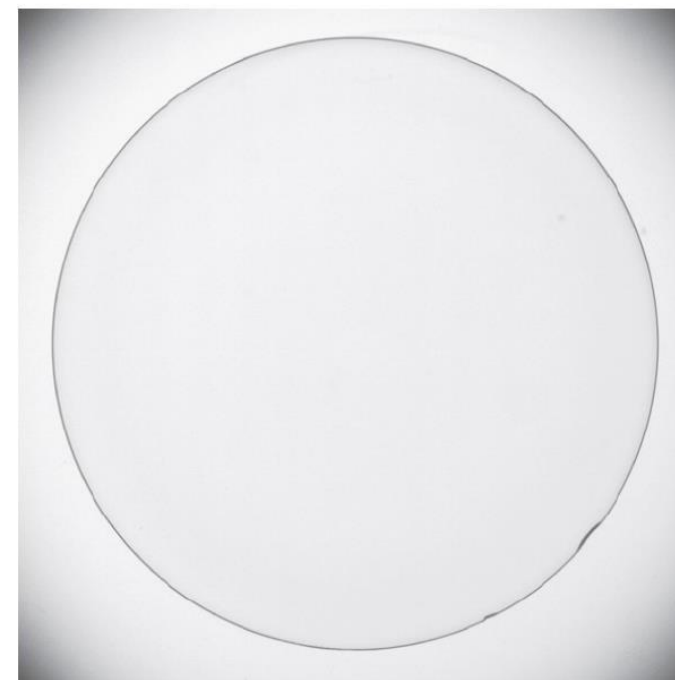
$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

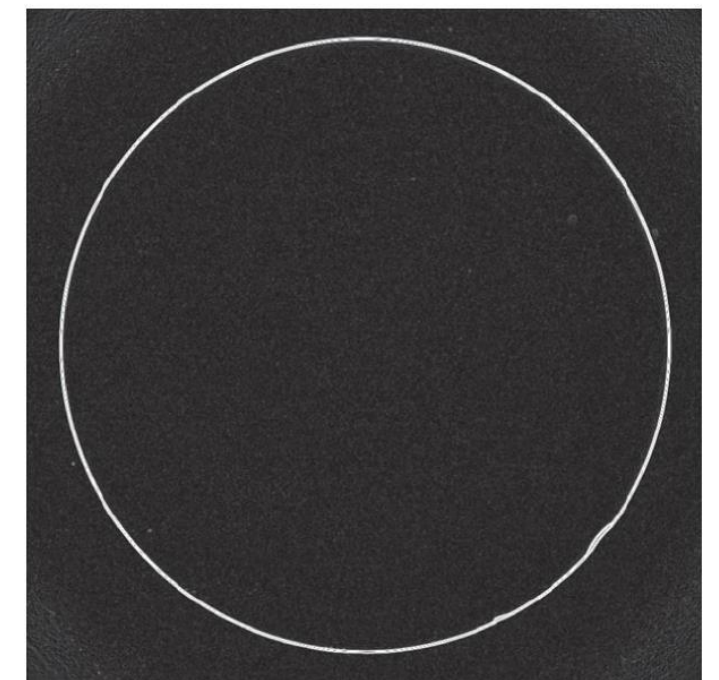
Матрицы Собеля

-1	-2	-1	-1	0	1
0	0	0	-2	0	2
1	2	1	-1	0	1

Исходное
изображение
линзы

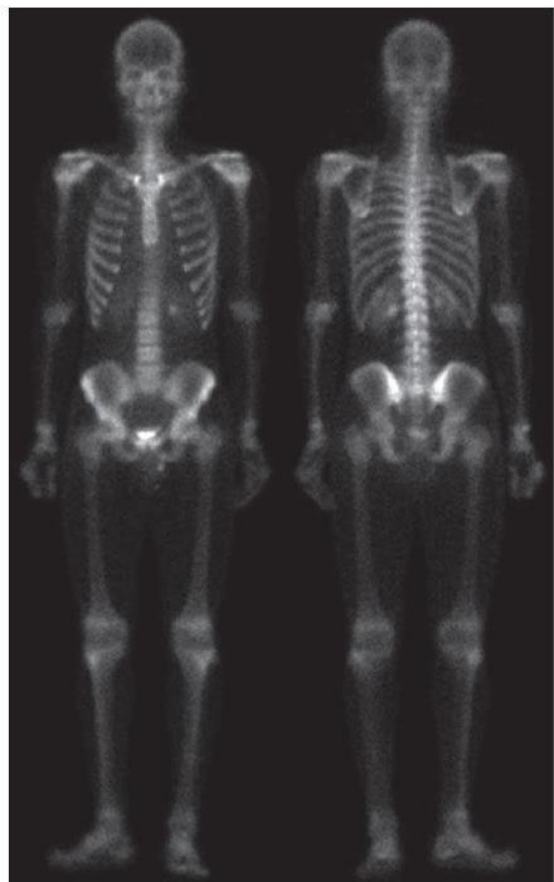


После
оператора
Собеля

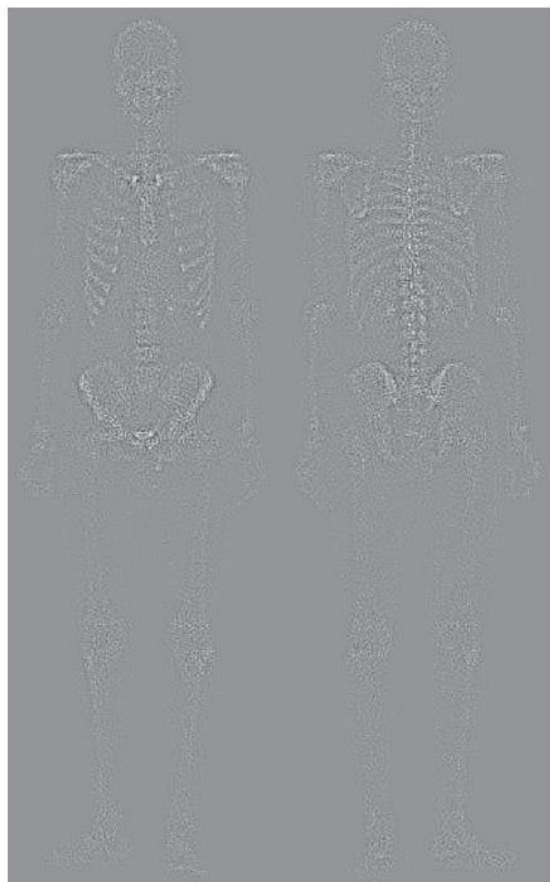


Комбинирование методов улучшения

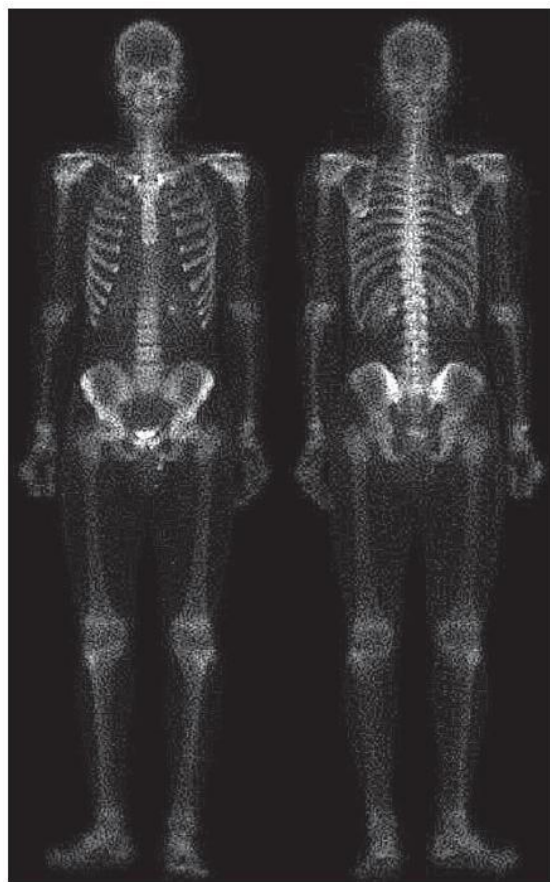
Основные этапы



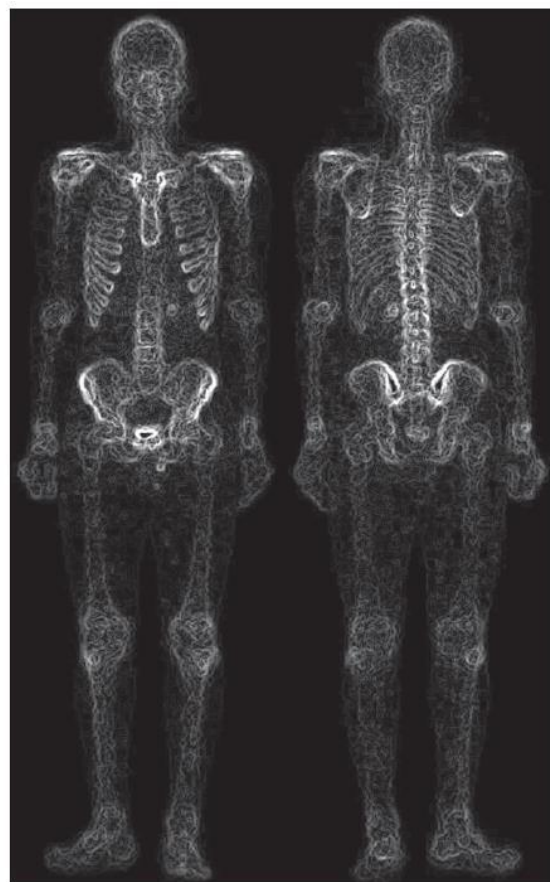
А) Исходное



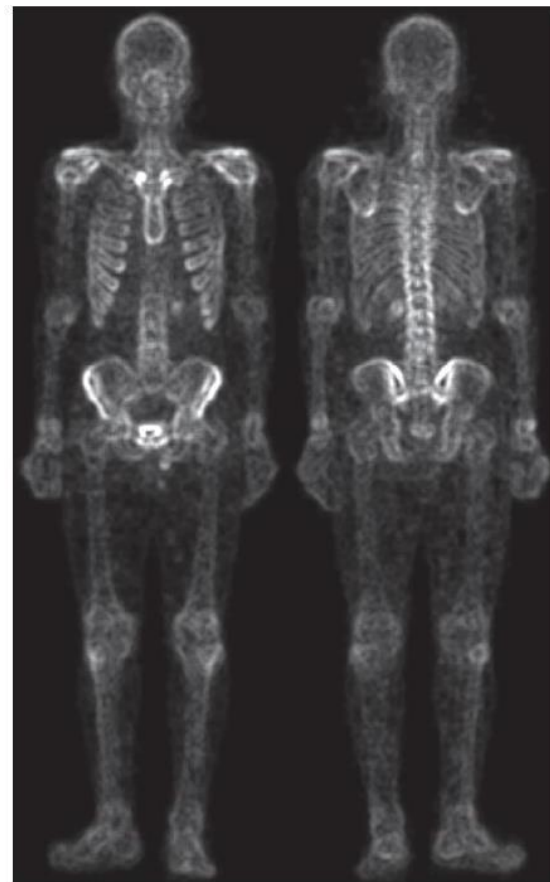
Б) Лапласиан



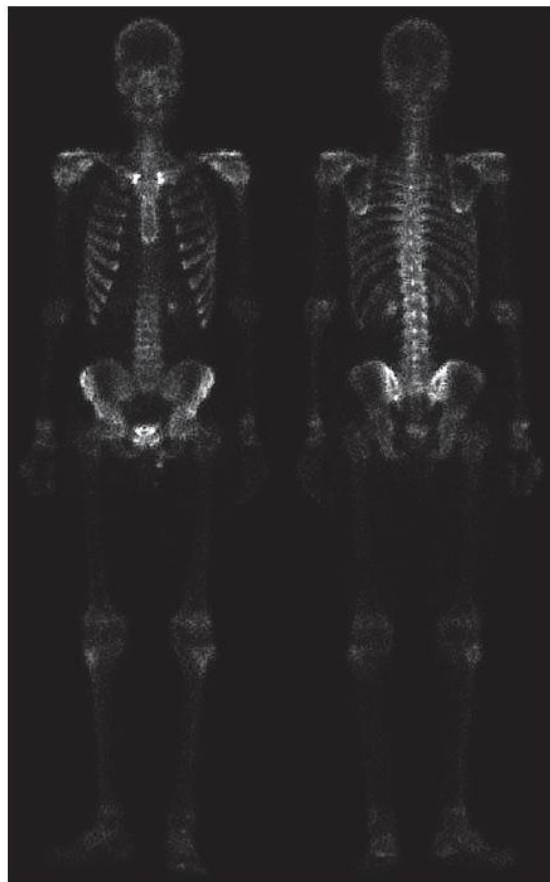
В) А + Б



Г) Собель

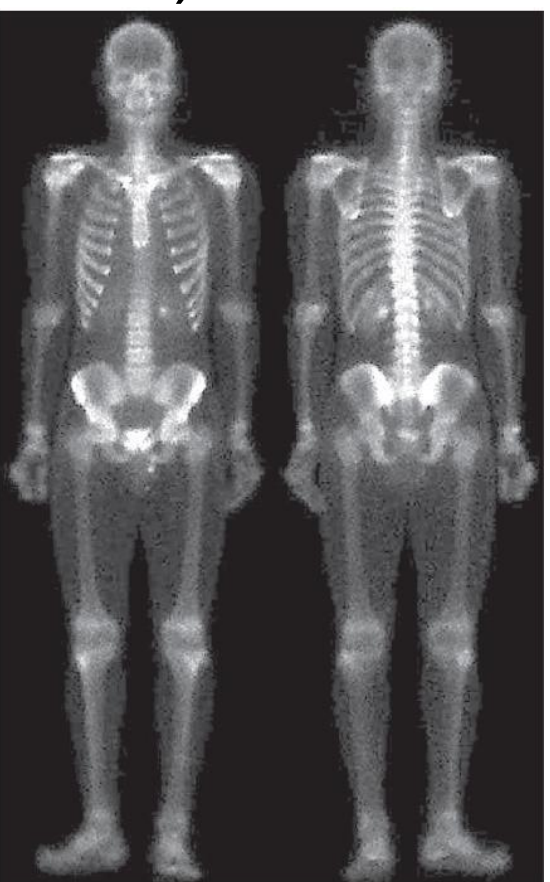
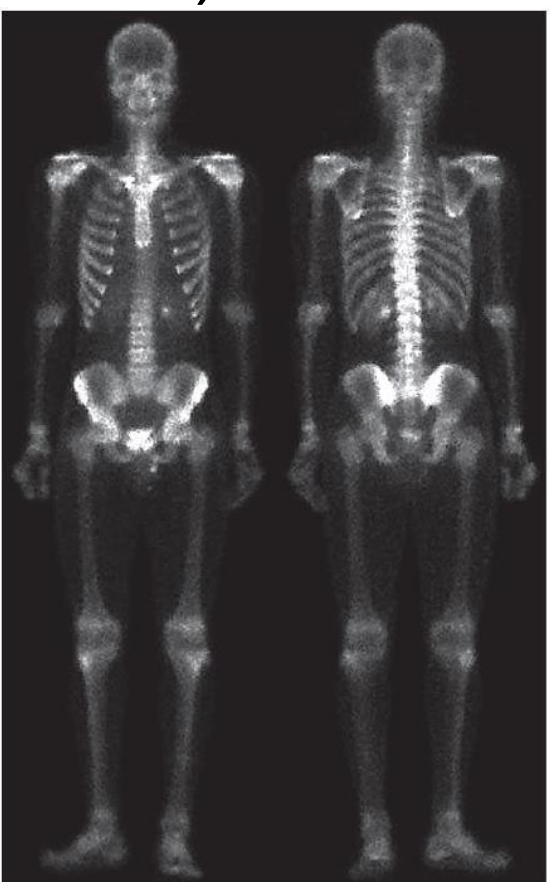


Д) Усредняющее
сглаживание



Е) Маска В * Д

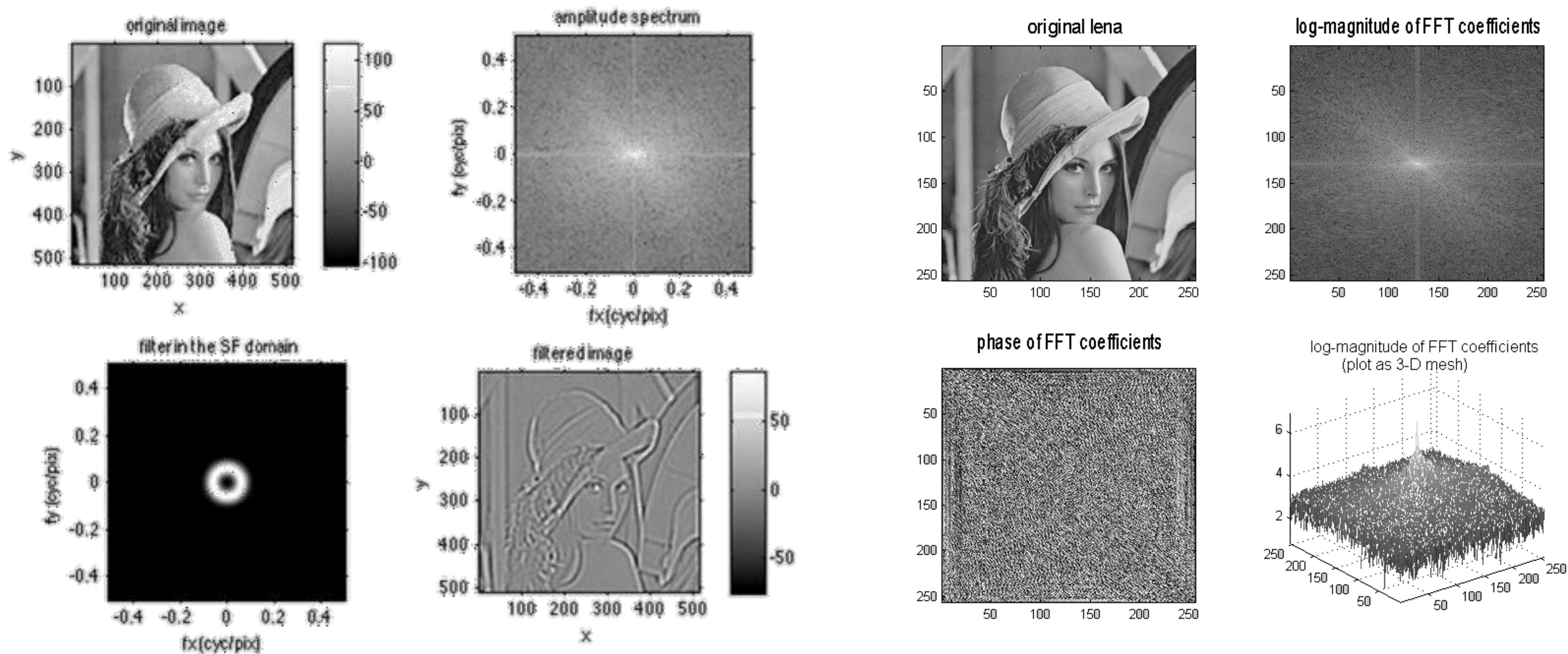
Ж) А + Е



З) Градационная
коррекция

Фильтрация в частотной области

Введение



Фильтрация в частотной области

Предпосылки

Основные математические идеи:

- Комплексные числа $C = R + iI$
- Разложение в ряд Фурье $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}$ $c(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t} dt$ для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Одиночный импульс – дельта функция

дельта-функция непрерывной величины

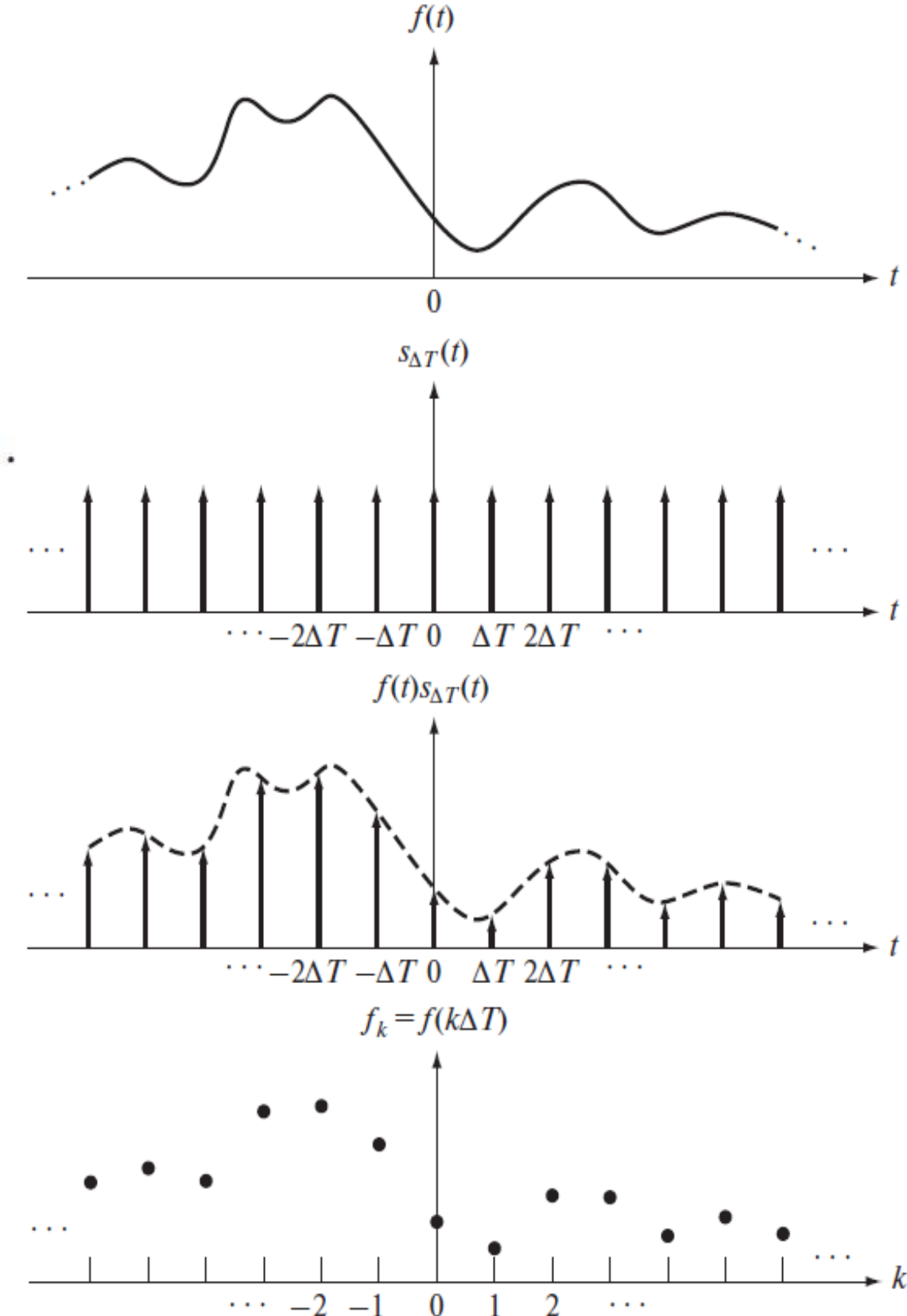
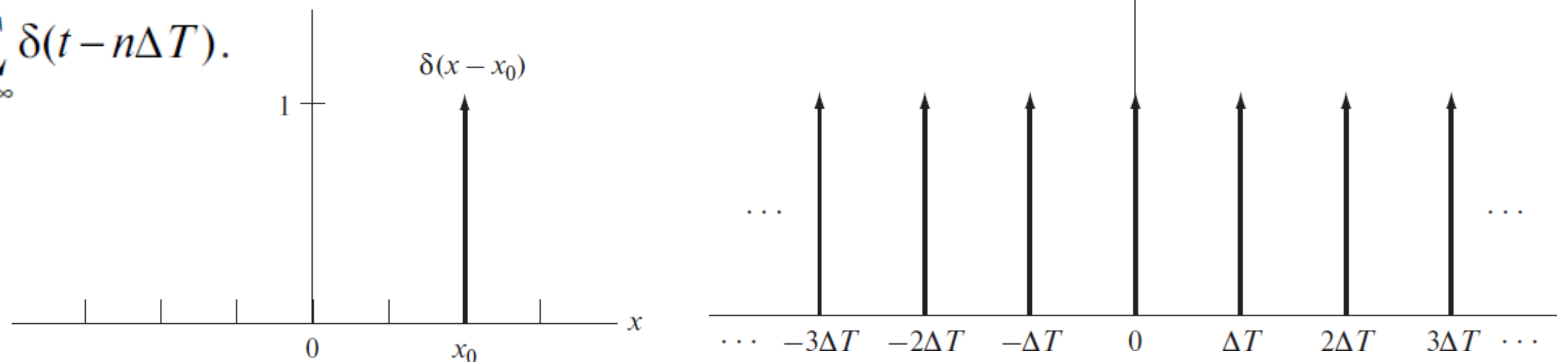
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{если } t = 0, \\ 0 & \text{если } t \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0),$$

дельта-функция дискретной величины

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x = 0, \\ 0 & \text{если } x \neq 0. \end{cases} \quad \sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1. \quad \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0).$$

- Последовательность импульсов

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T).$$



Нижняя функция является суммой
четырех расположенных над ней
функций

Фильтрация в частотной области

Функции двух переменных

Основные математические идеи:

- Дельта-функция непрерывной величины

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{если } t = 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, z) dt dz = 1.$$

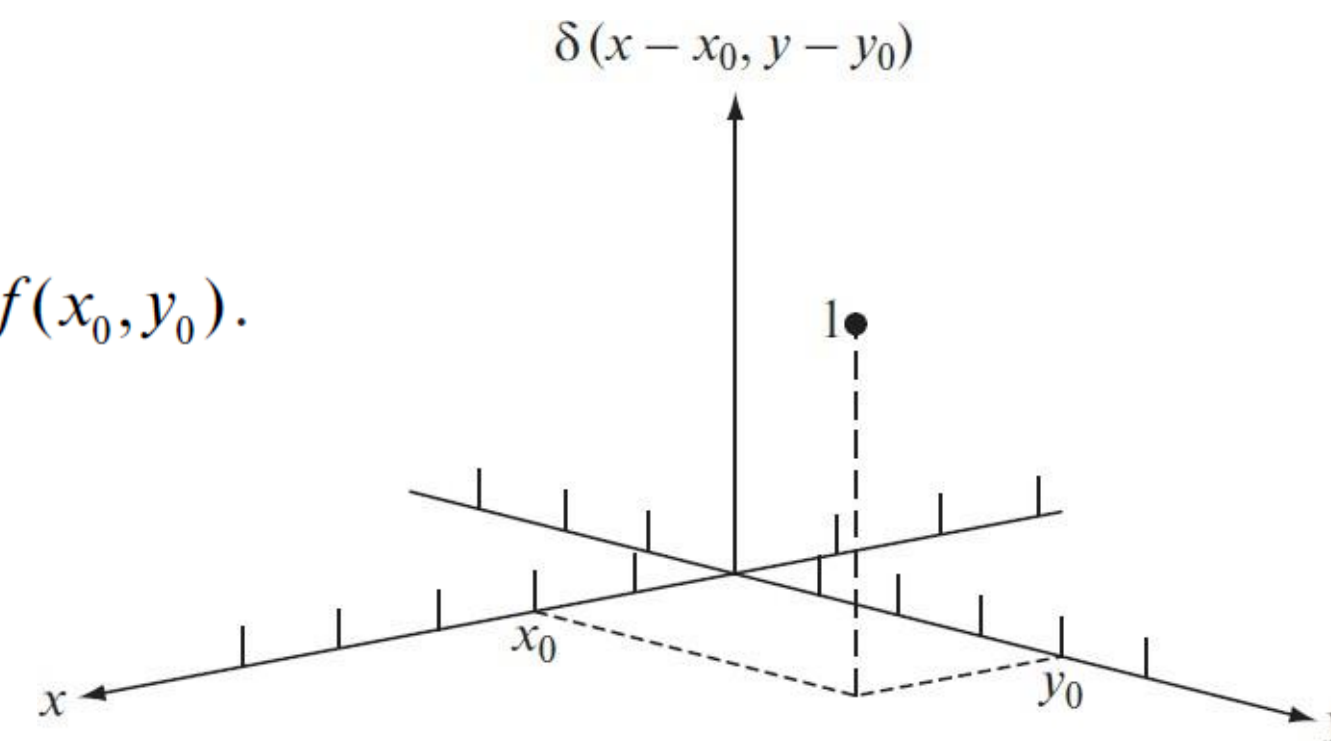
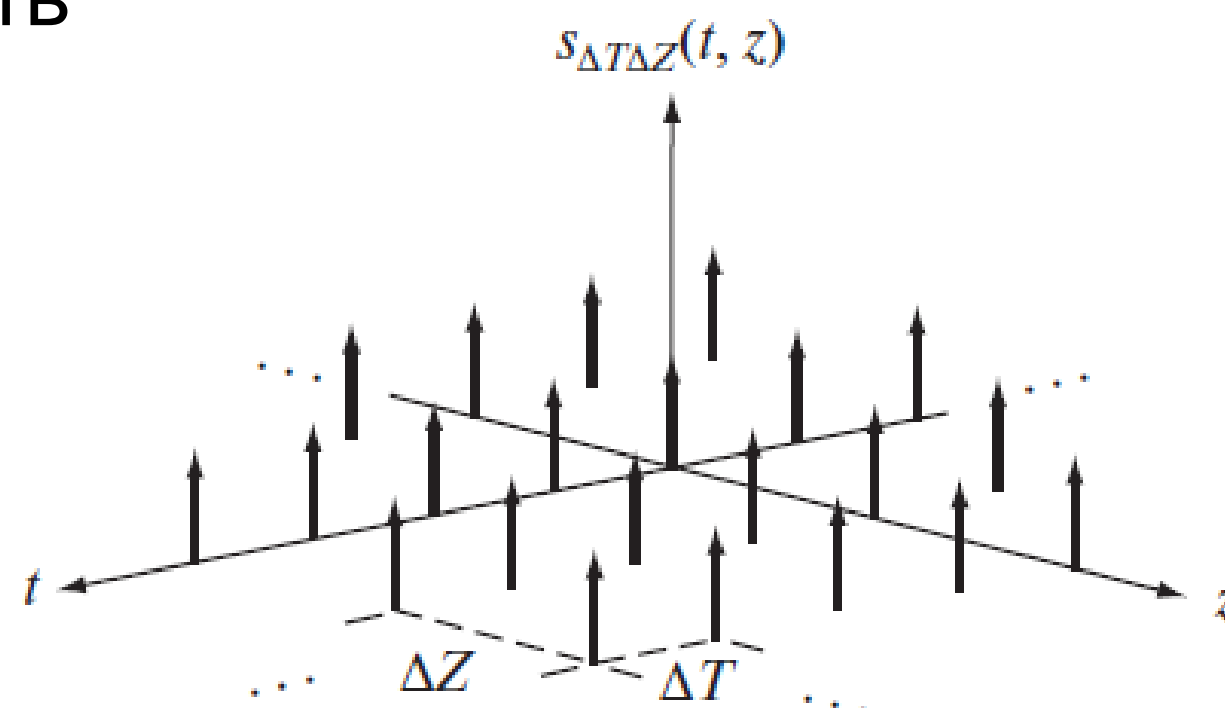
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t - t_0, z - z_0) dt dz = f(t_0, z_0).$$

- Дельта-функция дискретной величины

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{если } x = y = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0).$$

- Последовательность импульсов



Фильтрация в частотной области

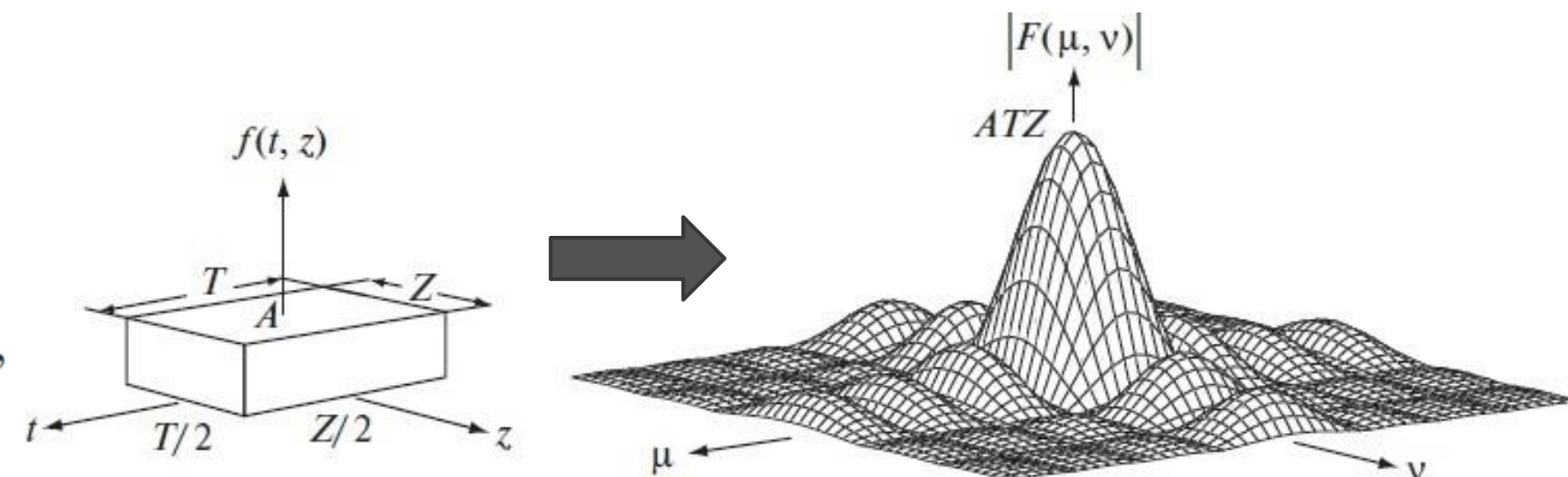
Двумерная дискретизация и преобразование Фурье

Основные математические идеи:

- Двумерное непрерывное преобразование Фурье

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-i2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{i2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu,$$

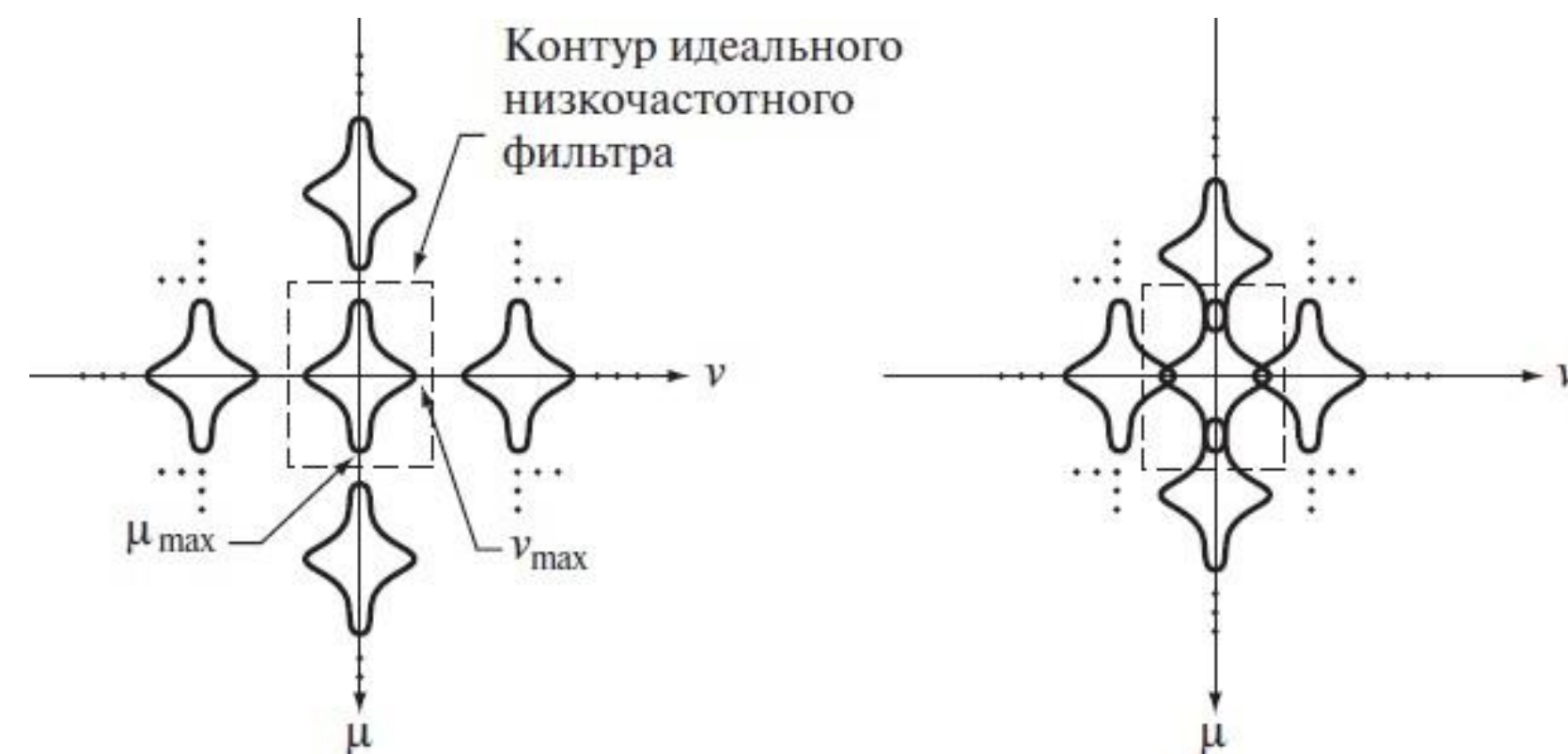


- Двумерная дискретизация

$$s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z),$$

- Двумерная теорема отсчетов – непрерывная функция с ограниченной полосой частот $f(t, z)$
- может быть точно восстановлена из набора своих отсчетов, если шаги дискретизации удовлетворяют неравенствам

$$\Delta T < \frac{1}{2\mu_{\max}} \quad \Delta Z < \frac{1}{2\nu_{\max}},$$



Передискретизация

Субдискретизация 14

Фильтрация в частотной области

Наложение спектров при дискретизации

Наложение спектров при дискретизации

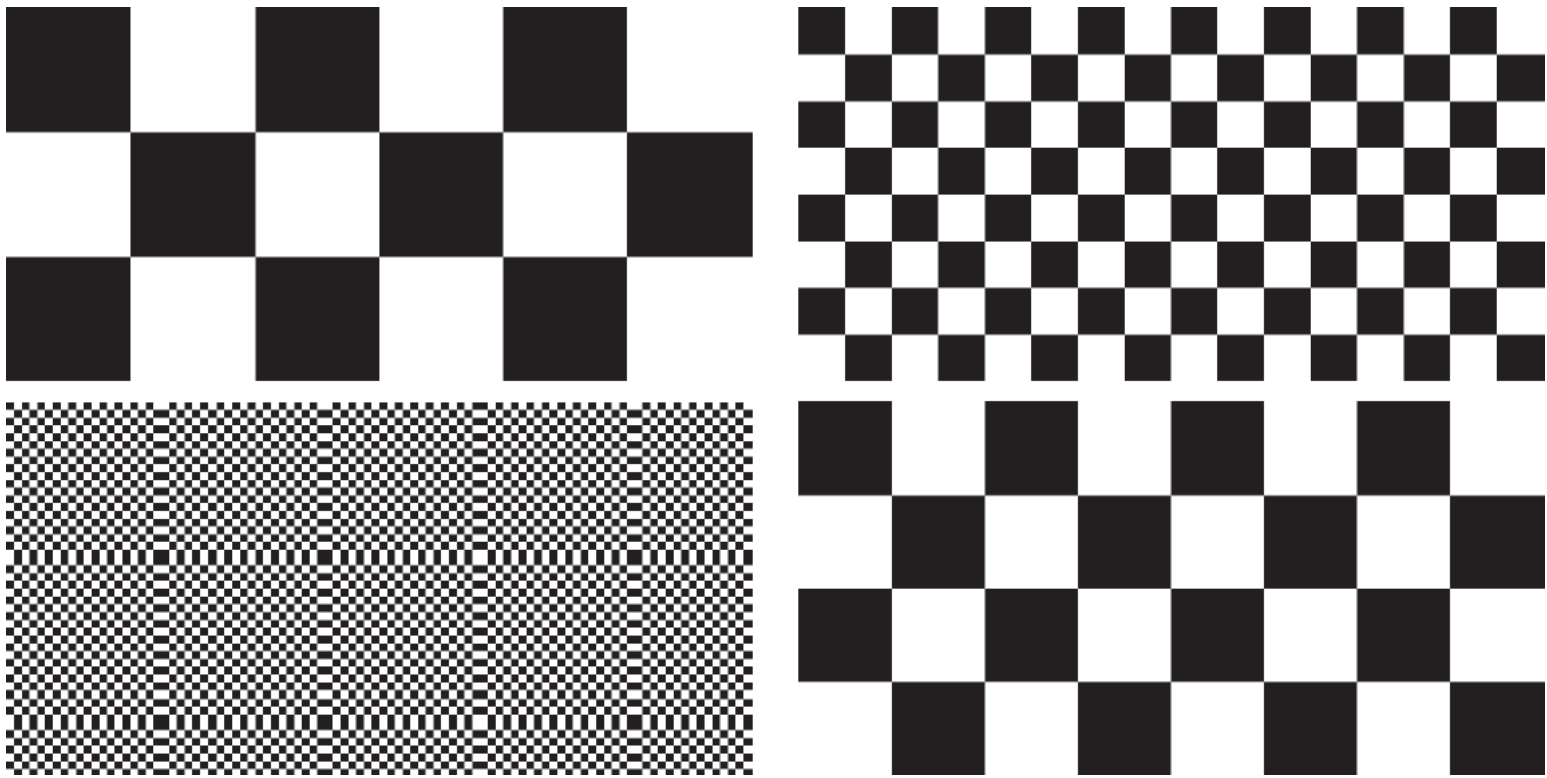
Временное

Пространственное

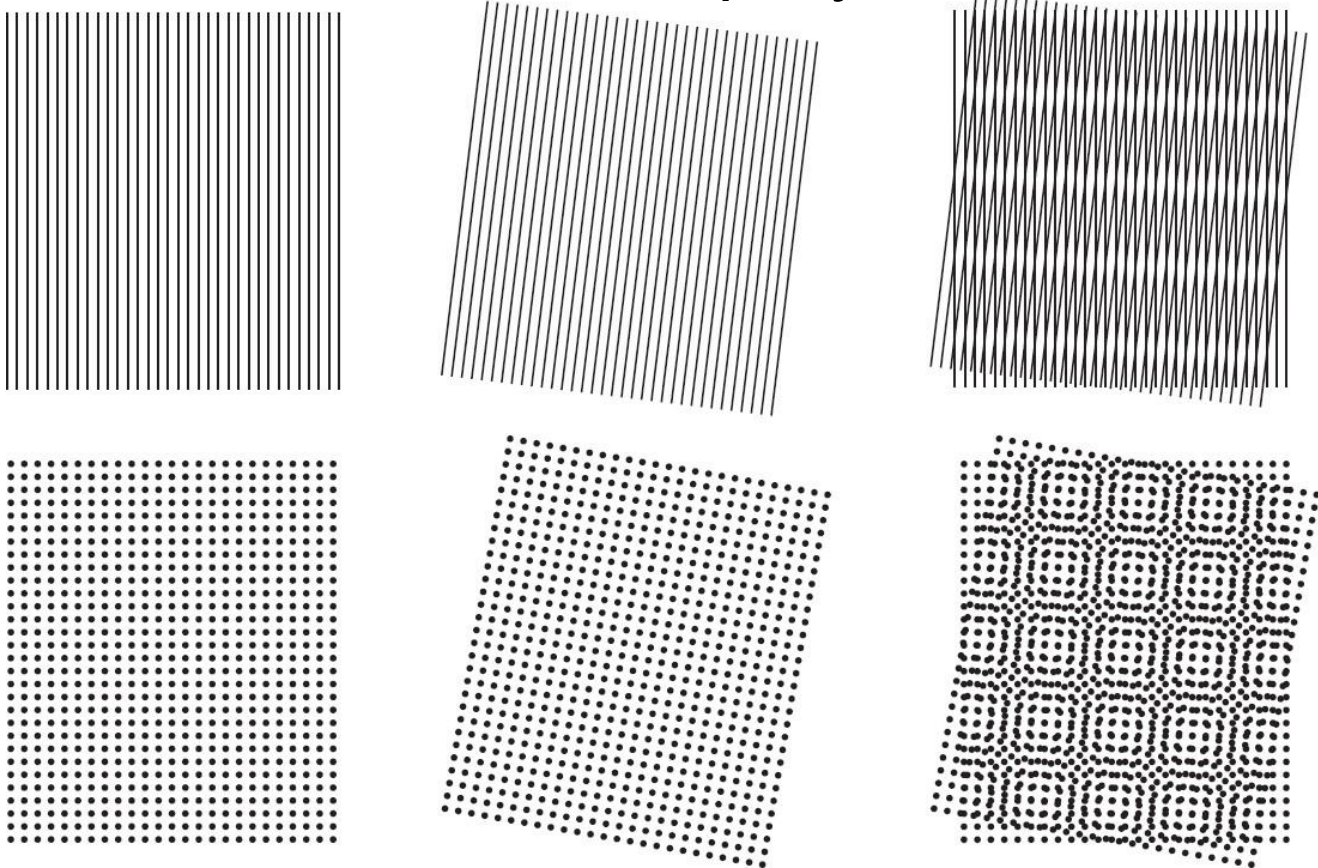
Муар в газете



Постепенное уменьшение размера
клеток: 16 > 6 > 0.9 > 0.5 pix



Появление муара при перемножении /
наложении рисунков



Наложение спектров при изменении
размера изображения

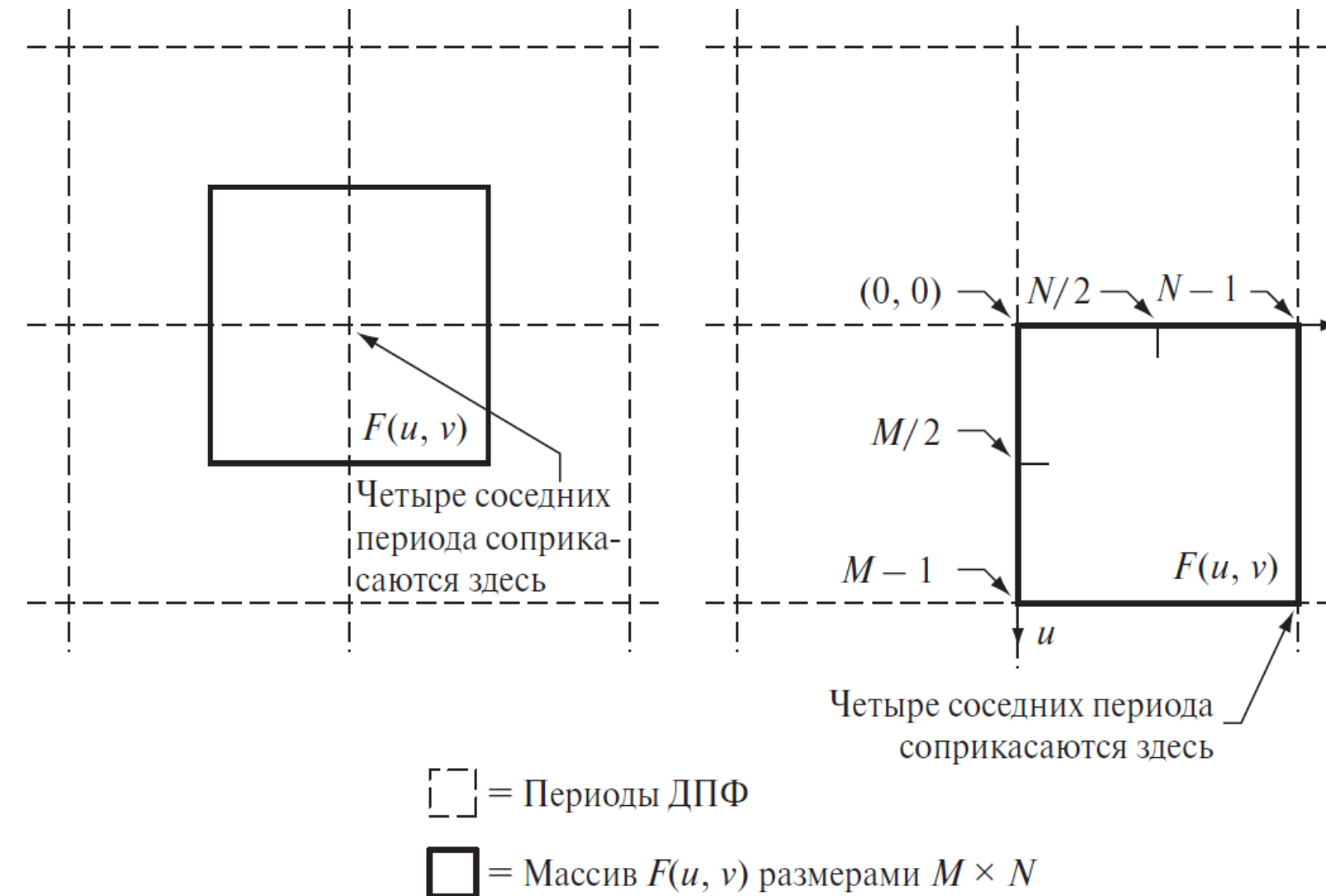
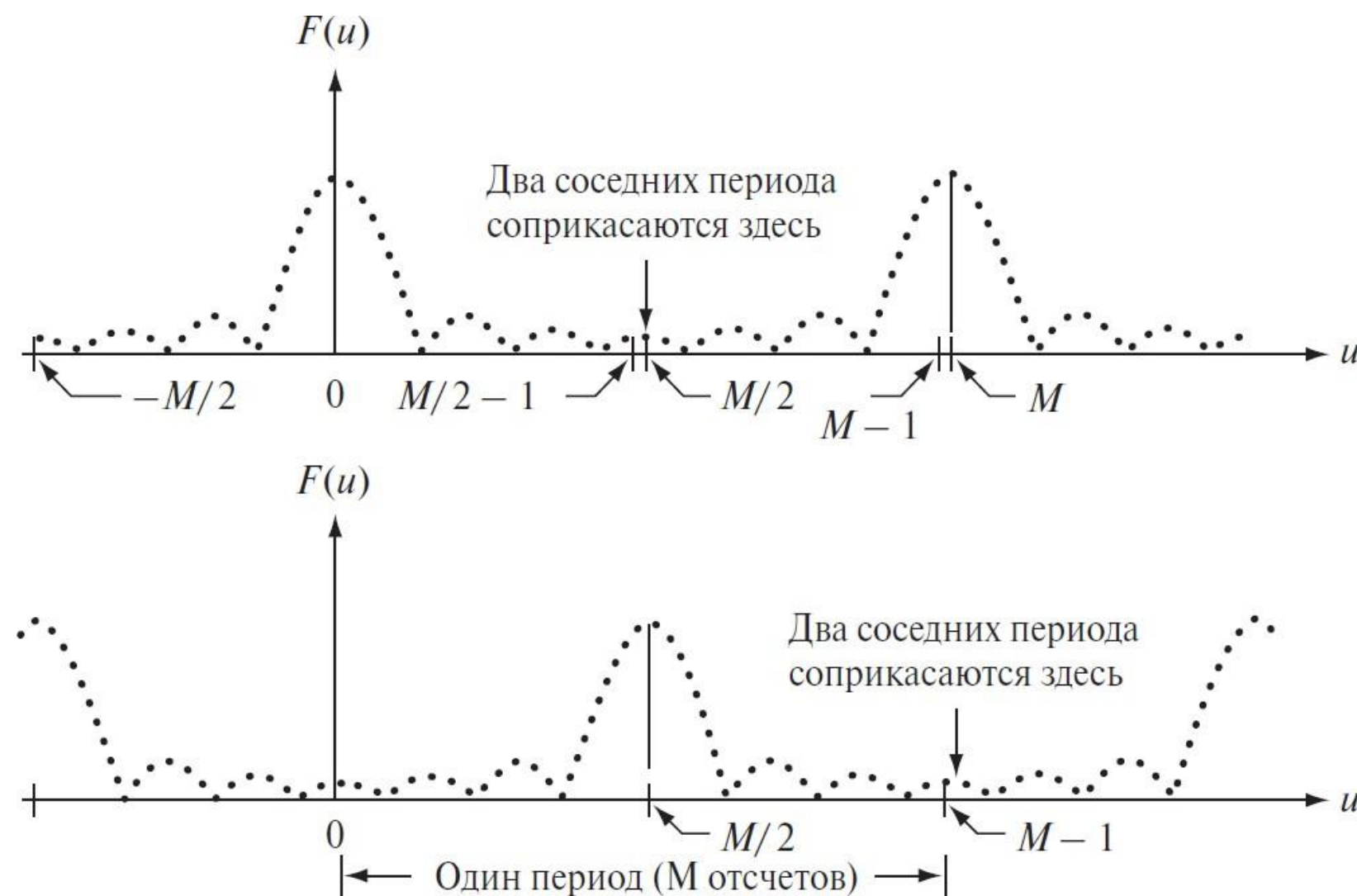


Фильтрация в частотной области

Двумерное дискретное преобразование Фурье

Двумерное дискретное преобразование Фурье:

- Прямое преобразование $F(u, v) = F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N) = F(u + k_1 M, v + k_2 N)$
- Обратное преобразование $f(x, y) = f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N) = f(x + k_1 M, y + k_2 N)$
- Взаимосвязь пространственных и частотных интервалов $\Delta u = \frac{1}{M \Delta T} \quad \Delta v = \frac{1}{N \Delta Z}$
- Периодичность преобразования



Фильтрация в частотной области

Фурье-спектр

ДПФ – комплексное => выражение в полярных координатах:

$$F(u,v)=|F(u,v)|e^{i\phi(u,v)}$$

- Амплитуда == Фурье-спектр == частотный спектр

$$|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

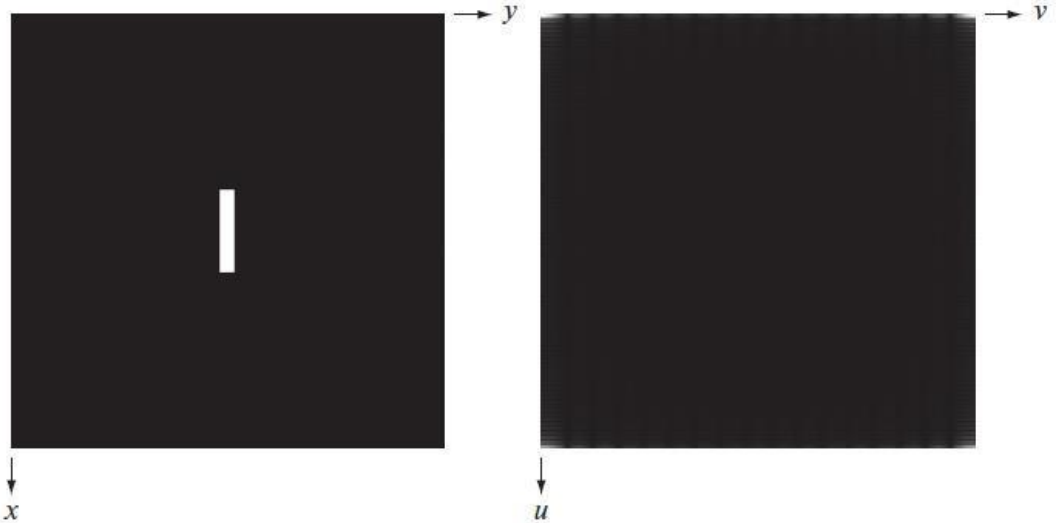
- Фазовый угол

$$\phi(u,v)=\arctg\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

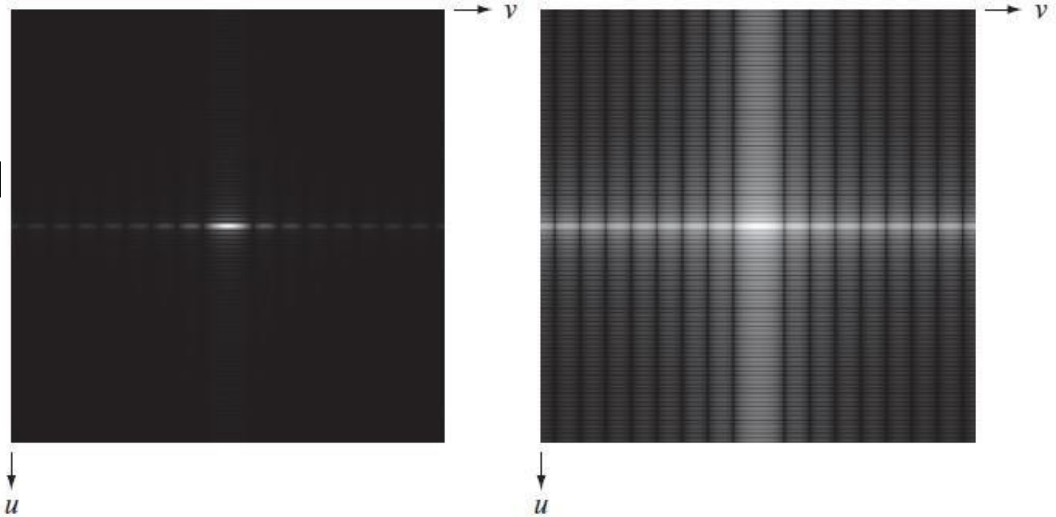
- Энергетический спектр

$$P(u,v)=|F(u,v)|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v).$$

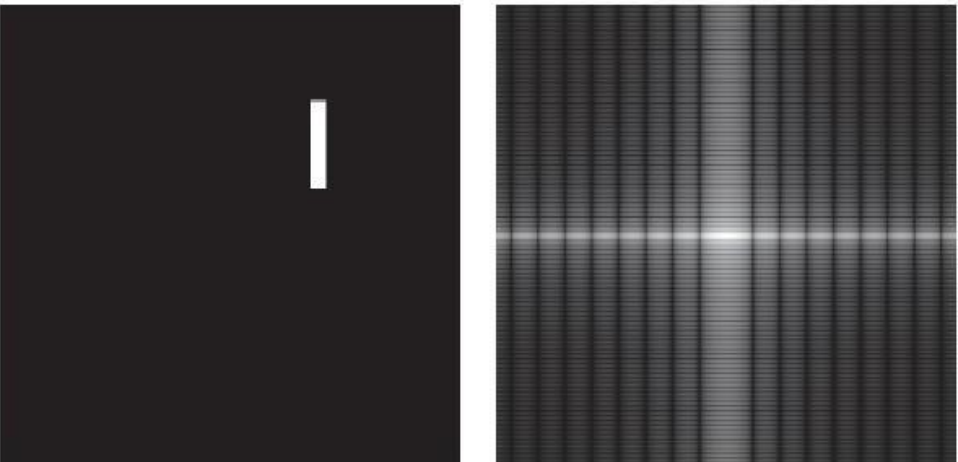
Простая
прямоугольная
функция



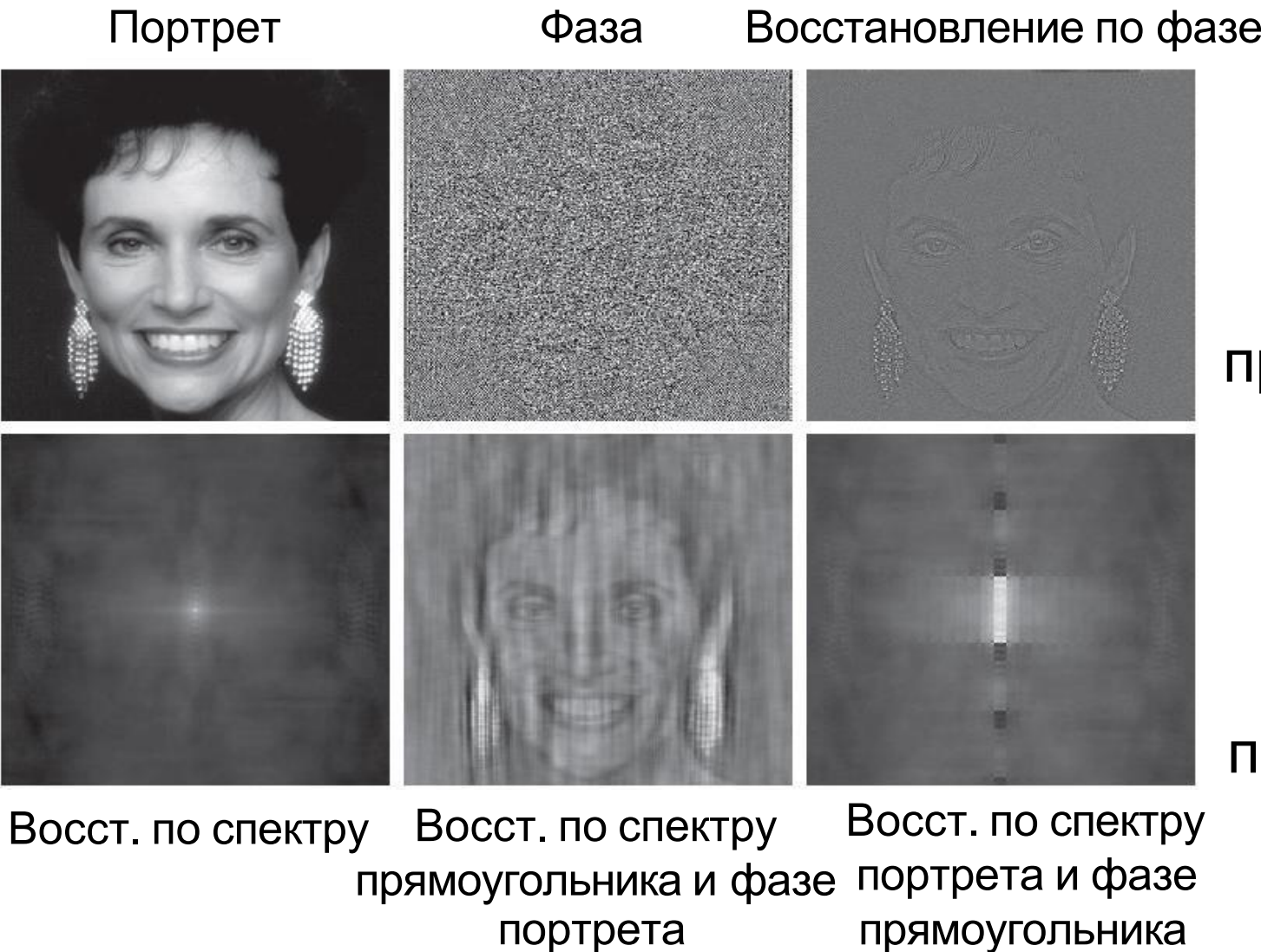
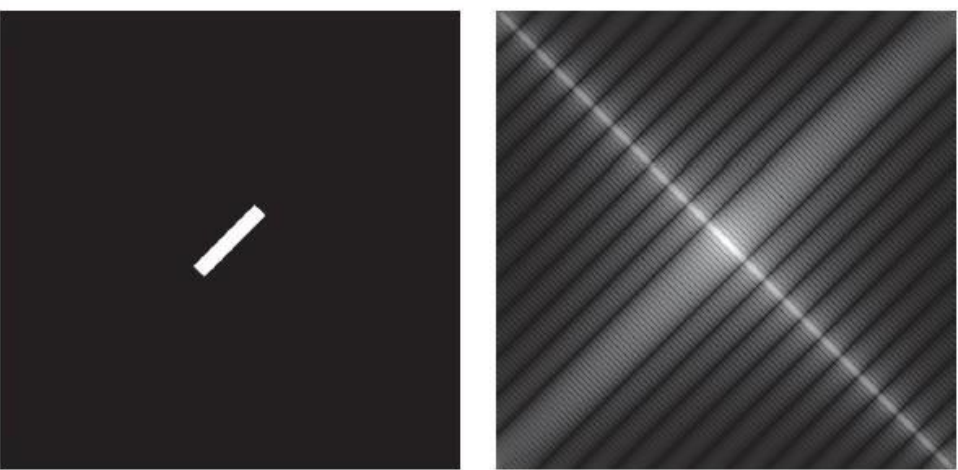
Центрированный
спектр



Сдвинутая
прямоугольная
функция



Повернутая
прямоугольная
функция



Фильтрация в частотной области

Сводка свойств двумерного ДПФ

Название	Выражение
1) Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) функции $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(ux/M + vy/N)}$
2) Обратное дискретное преобразование Фурье (обратное ДПФ) функции $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi(ux/M + vy/N)}$
3) Представление в полярных координатах	$F(u, v) = F(u, v) e^{i\phi(u, v)}$
4) Спектр	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$ $R = \text{Re}(F); \quad I = \text{Im}(F)$
5) Фаза (фазовый угол)	$\phi(u, v) = \arctg \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
6) Энергетический спектр	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
7) Среднее значение	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$
8) Периодичность (k_1 и k_2 — целые)	$F(u, v) = F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N) = F(u + k_1 M, v + k_2 N)$ $f(x, y) = f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N) = f(x + k_1 M, y + k_2 N)$
9) Свертка	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x-m, y-n)$
10) Корреляция	$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n) h(x+m, y+n)$

Название	Фурье-пары дискретного преобразования
1) Свойства симметрии	См. табл. 4.1
2) Линейность	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) Сдвиг (общий случай)	$f(x, y) e^{i2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-i2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$
4) Сдвиг в центр частотного прямоугольника ($M/2, N/2$)	$f(x, y) (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v) (-1)^{u+v}$
5) Поворот	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0)$ $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \phi \quad v = \omega \sin \phi$
6) Теорема о свертке [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v)$ $f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$
7) Теорема о корреляции [†]	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) H(u, v)$ $f^*(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$
8) Дискретный единичный импульс	$\delta(x, y) \Leftrightarrow MN$
9) Прямоугольник	$\text{rect}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-i\pi(ua+vb)}$
10) Синус	$\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow i \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) - \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$
11) Косинус	$\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(u + Mu_0, v + Nv_0) + \delta(u - Mu_0, v - Nv_0)]$

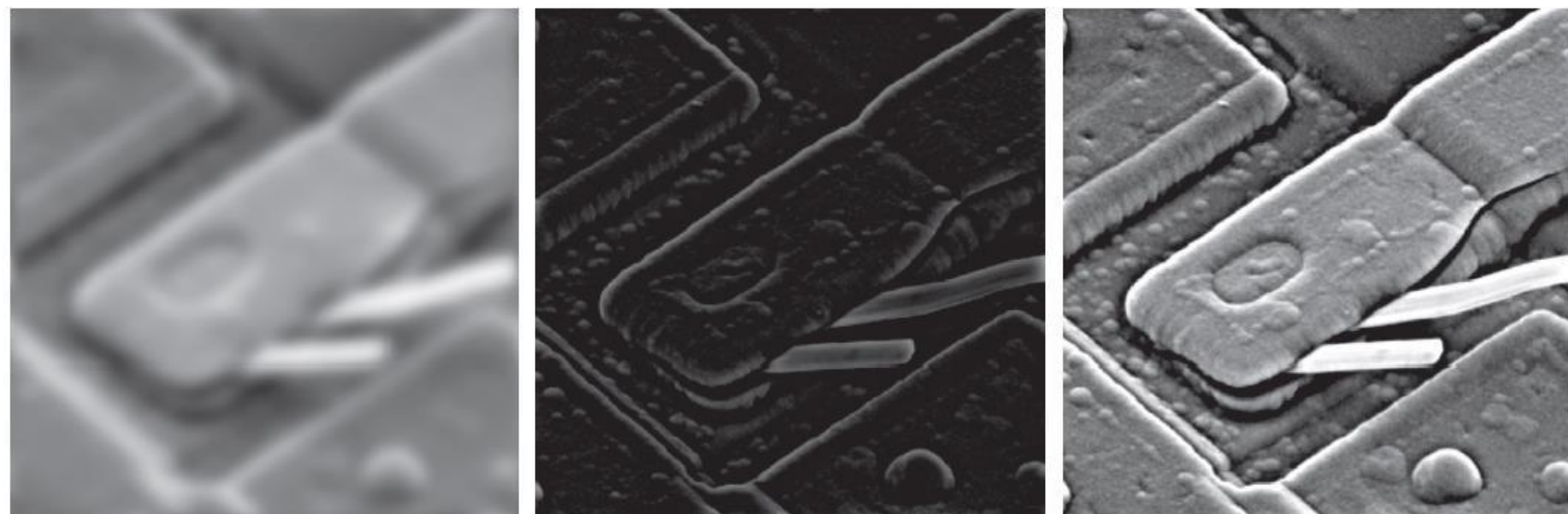
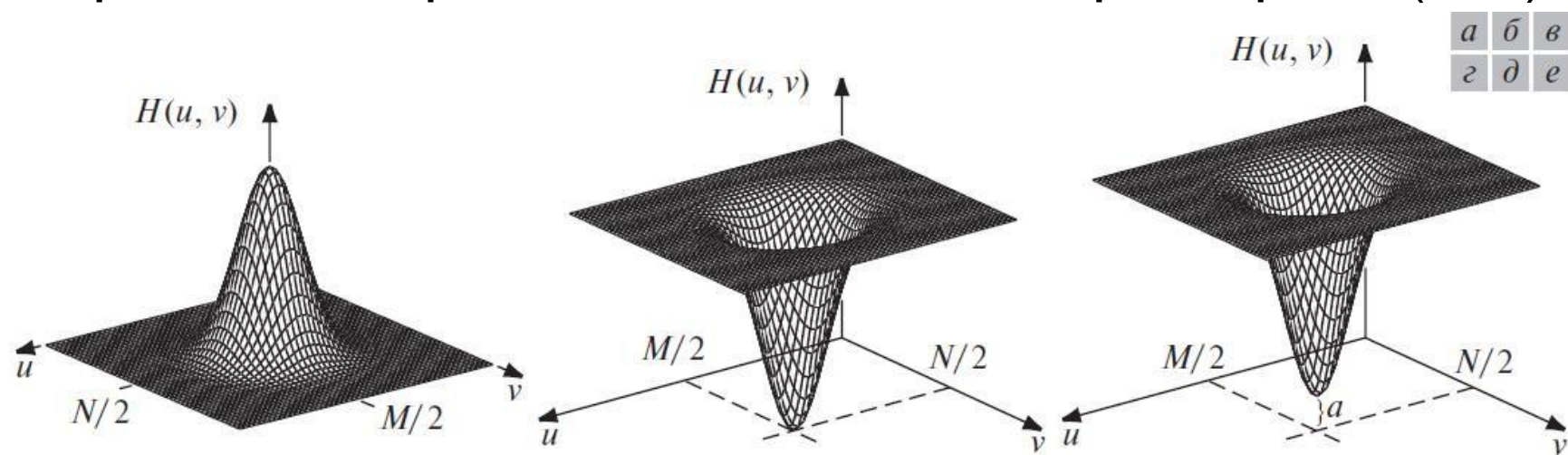
Фильтрация в частотной области

ОСНОВЫ

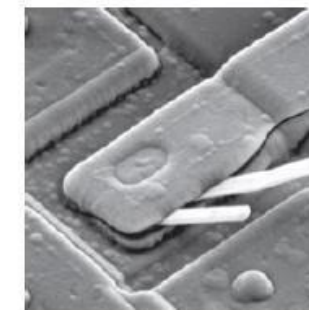
Аналитический вид частотной фильтрации: $g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$

- $F(u, v)$ – ДПФ исходного изображения $f(x, y)$
- $H(u, v)$ – передаточная фильтр-функция
- \mathcal{F}^{-1} обратное ДПФ

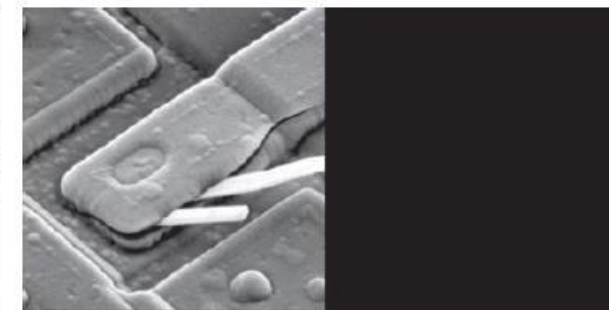
Применение различных частотных фильтров $h(u, v)$



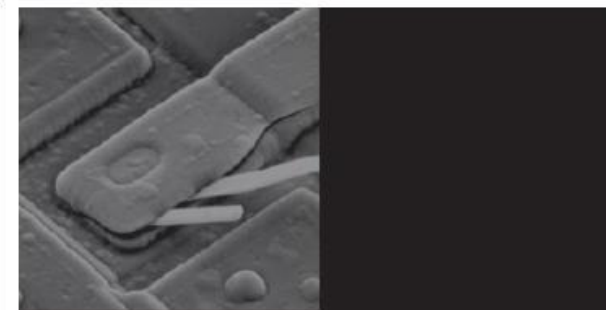
Основные этапы обработки в частотной области



Исходное
изображение



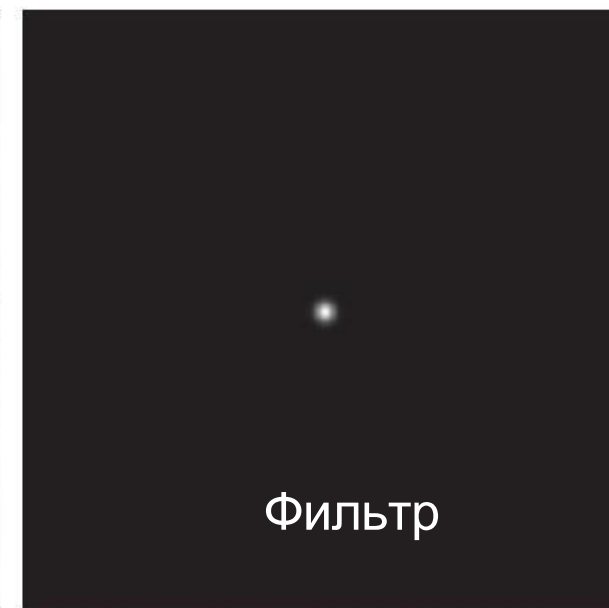
Расширенное
изображение



Умножение на
 $(-1)^{x+y}$



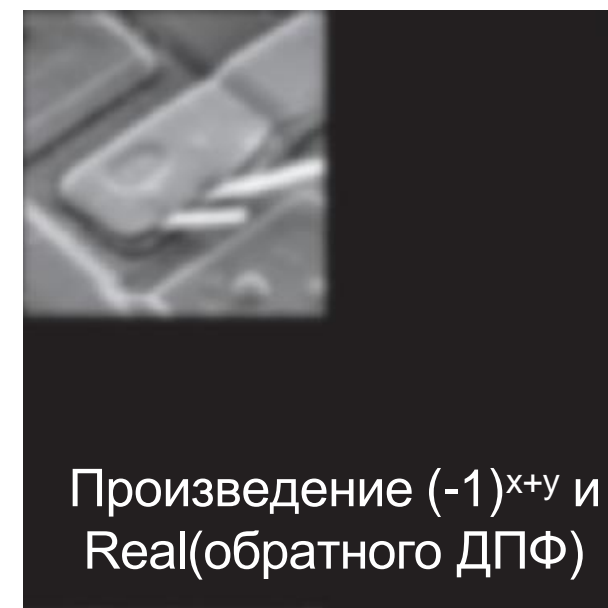
Спектр
изображения



Фильтр



Спектр
произведения



Произведение $(-1)^{x+y}$ и
 $\text{Real}(\text{обратного ДПФ})$



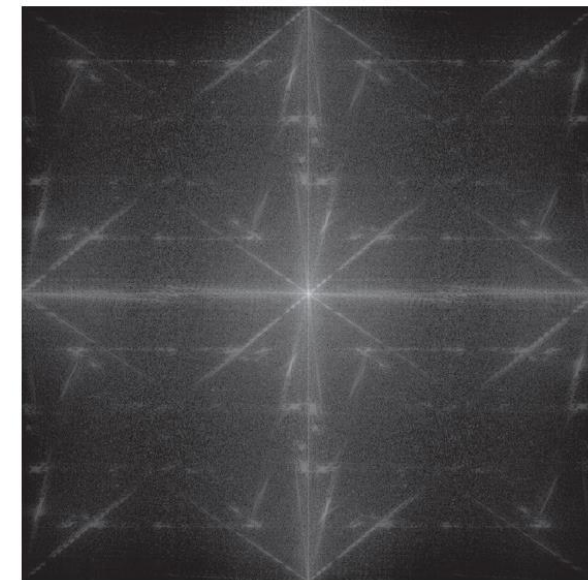
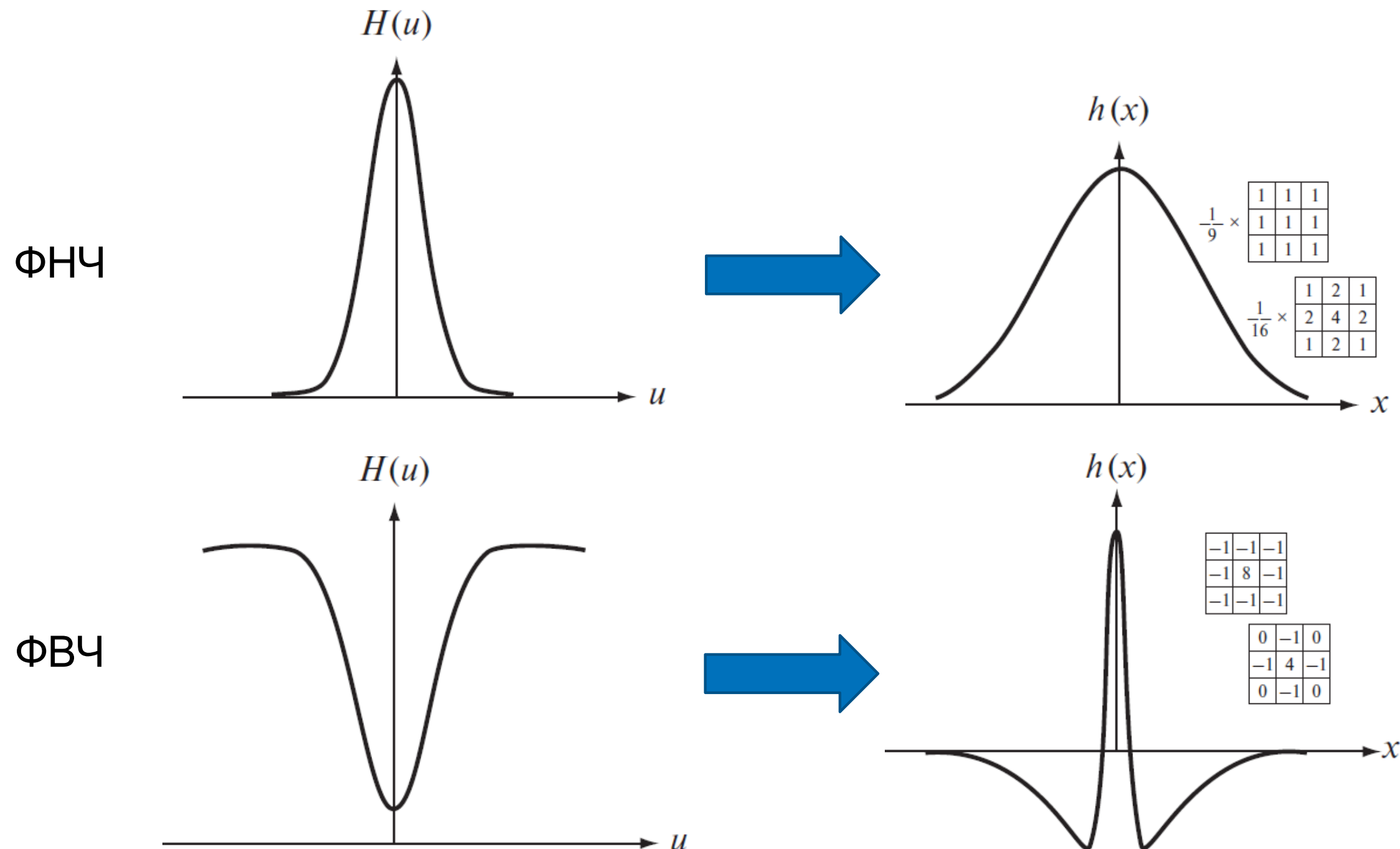
Итоговое
изображение

Фильтрация в частотной области

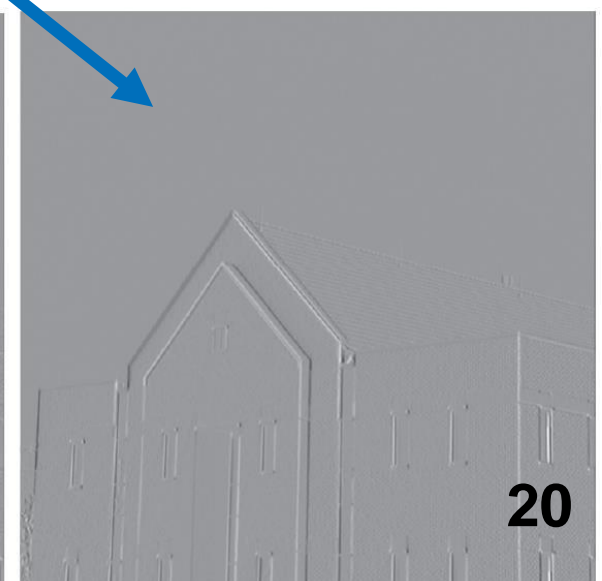
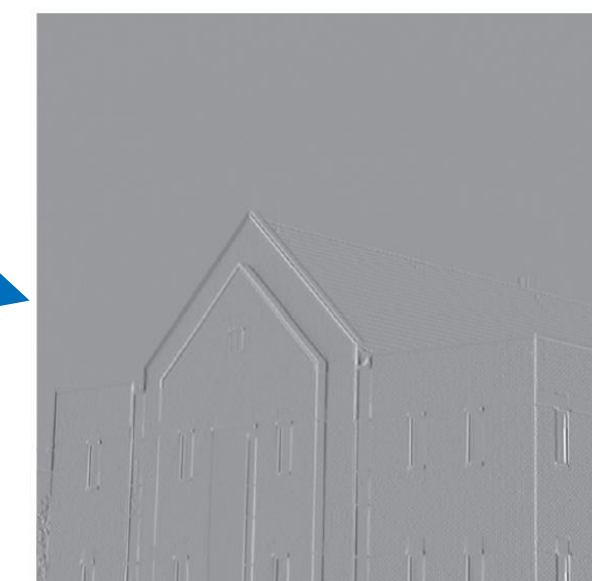
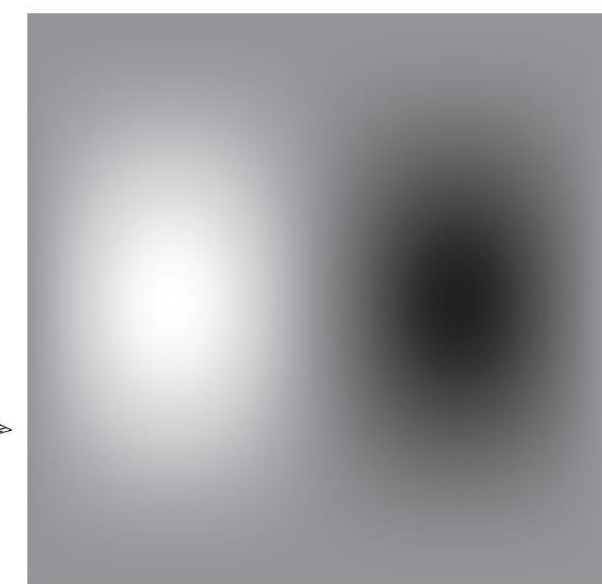
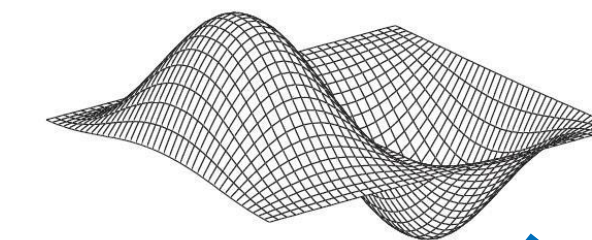
Соответствие пространственных и частотных фильтров

Переход от пространственного к частотному фильтру: $h(x, y) \Leftrightarrow H(u, v)$

- Получение $h(x, y)$ как отклик фильтра на единичный импульс
- Эффективность выполнения пространственной свертки



-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1



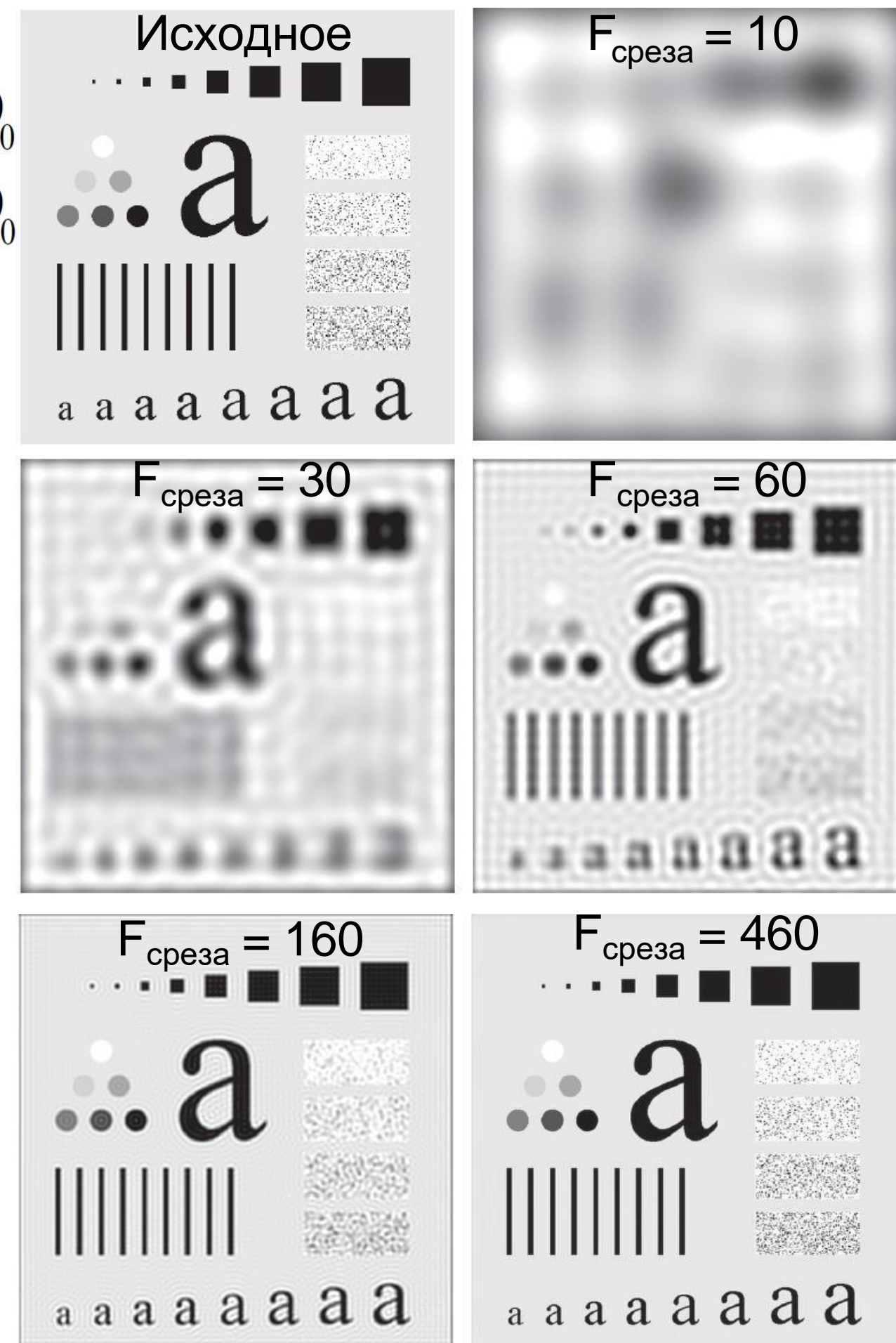
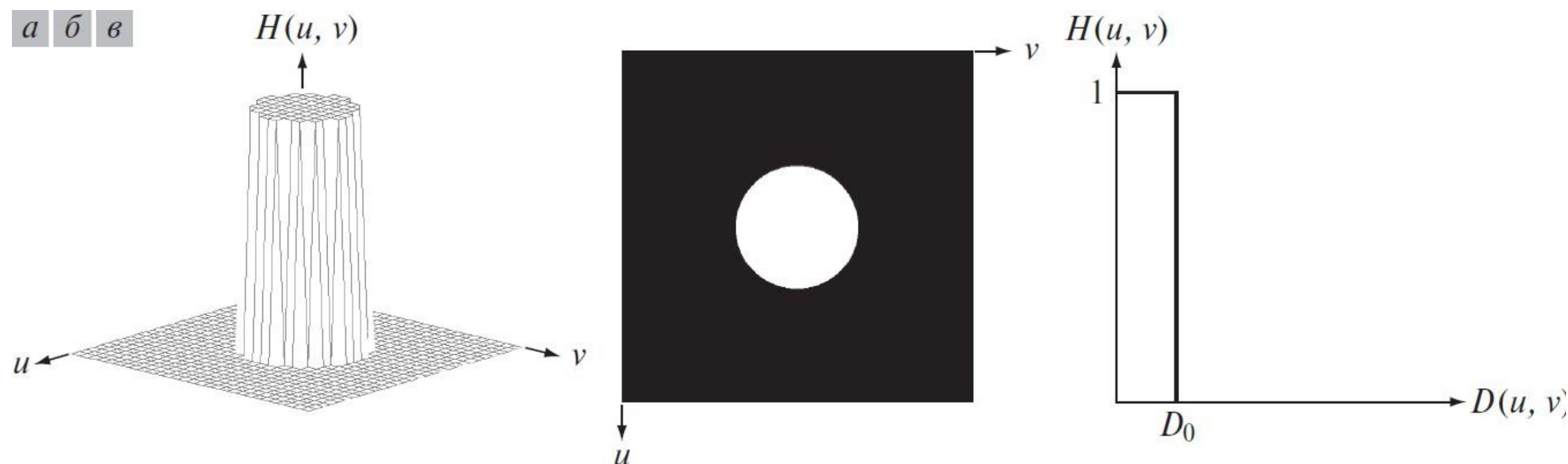
Фильтрация в частотной области

Идеальный фильтр нижних частот

Аналитическая форма идеального ФНЧ: $H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{при } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{при } D(u, v) > D_0 \end{cases}$

- D_0 – заданная положительная константа
- $D(u, v)$ – расстояние от точки (u, v) частотной области до начала координат

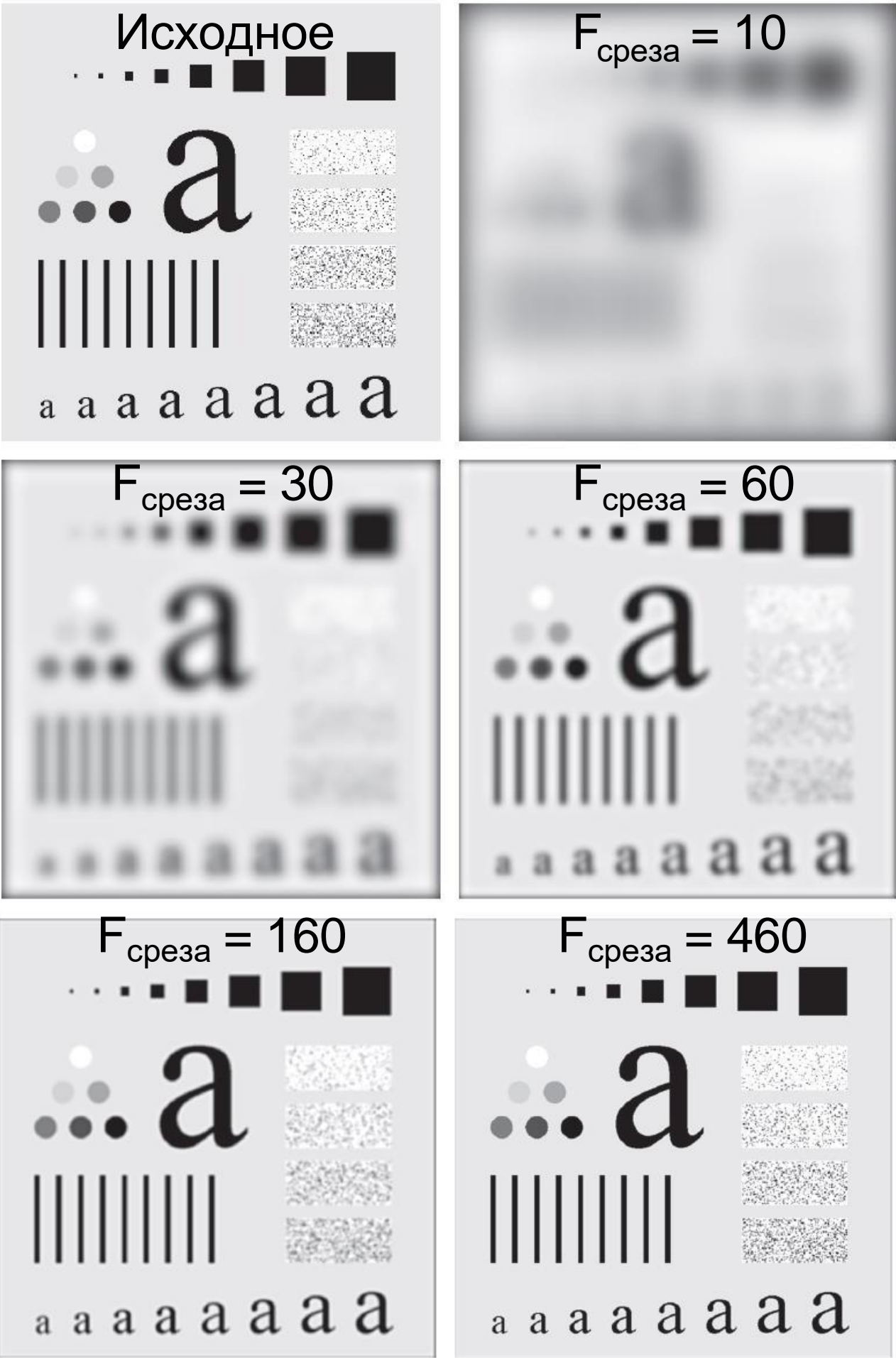
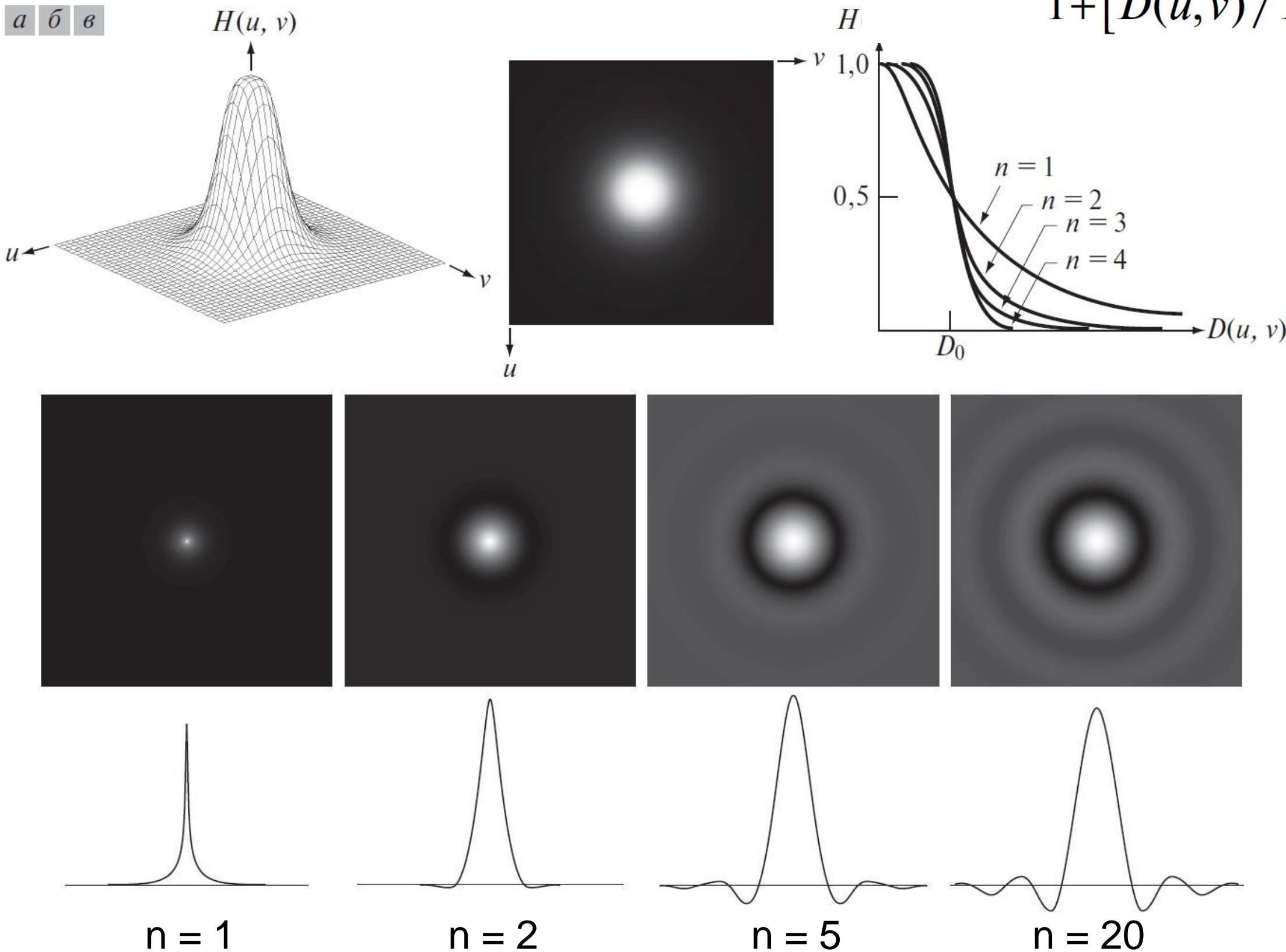
$$D(u, v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2 \right]^{1/2}$$



Фильтрация в частотной области

Фильтр нижних частот Баттерворта

Аналитическая форма ФНЧ Баттерворта: $H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v) / D_0]^{2n}}$



Фильтрация в частотной области

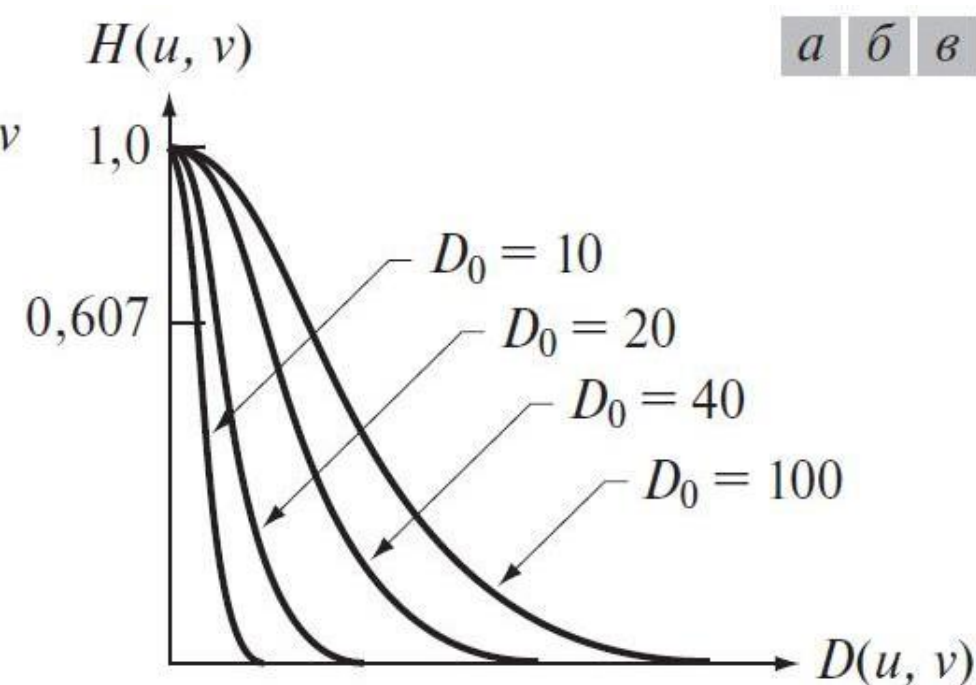
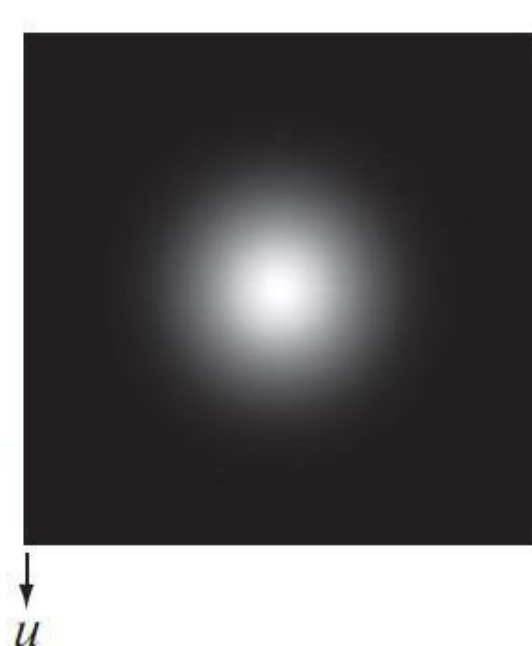
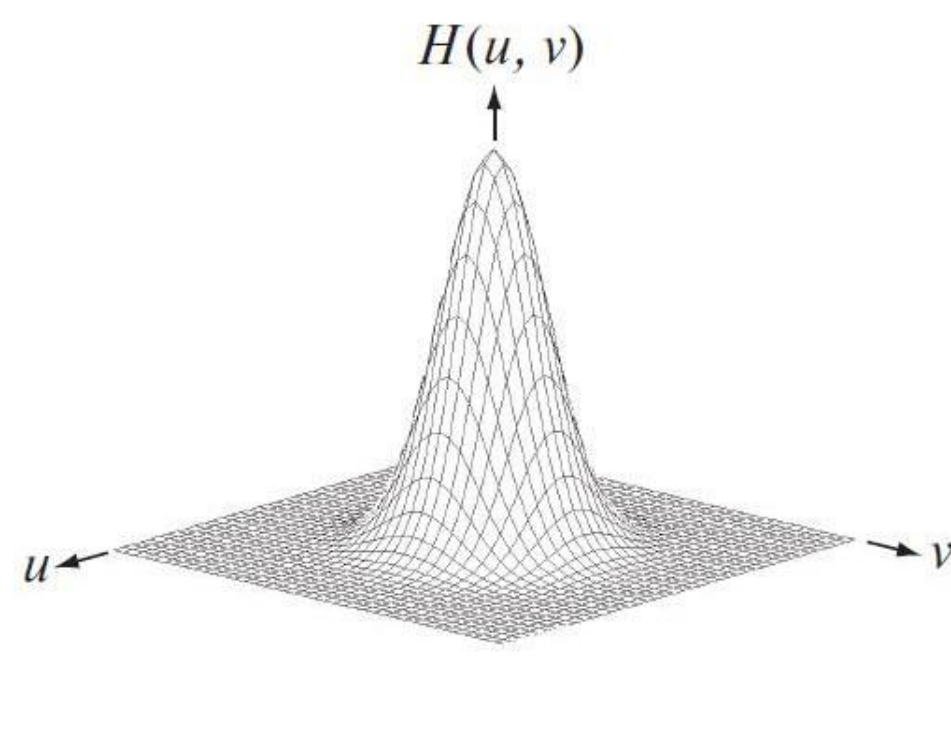
Фильтр нижних частот Гаусса

Аналитическая форма ФНЧ Гаусса:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

Выражение через частоту среза D_0 :

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$



Фильтрация в частотной области

Примеры НЧ фильтрации

- Машинное восприятие с распознаванием текста
- Улучшение зрительного восприятия в полиграфии и издательском деле

а б в



Исходное
изображение



ФНЧ Гаусса
 $D_0 = 100$



ФНЧ
Гаусса
 $D_0 = 80$

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

Образец
текста



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

ФНЧ
Гаусса

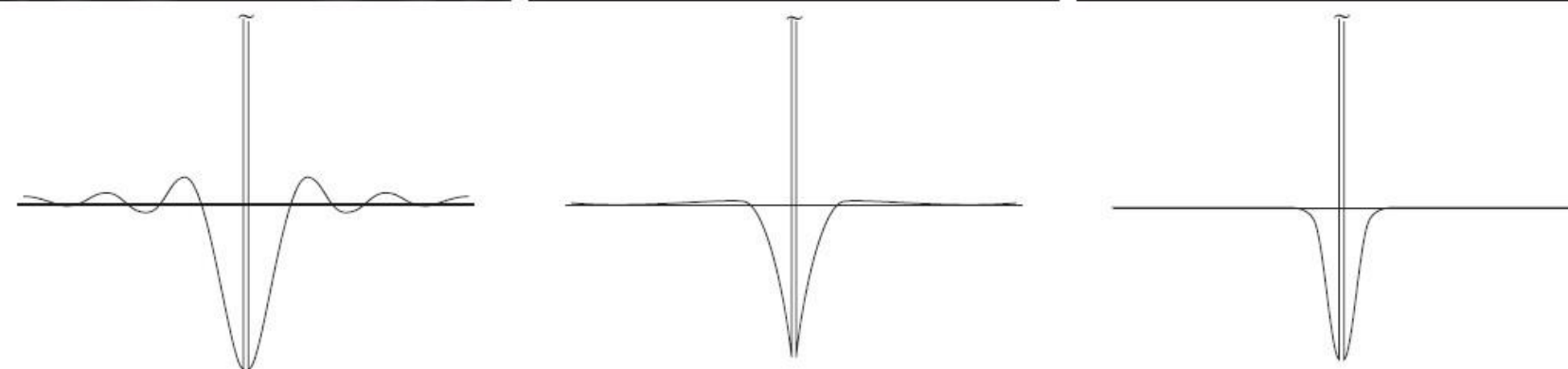
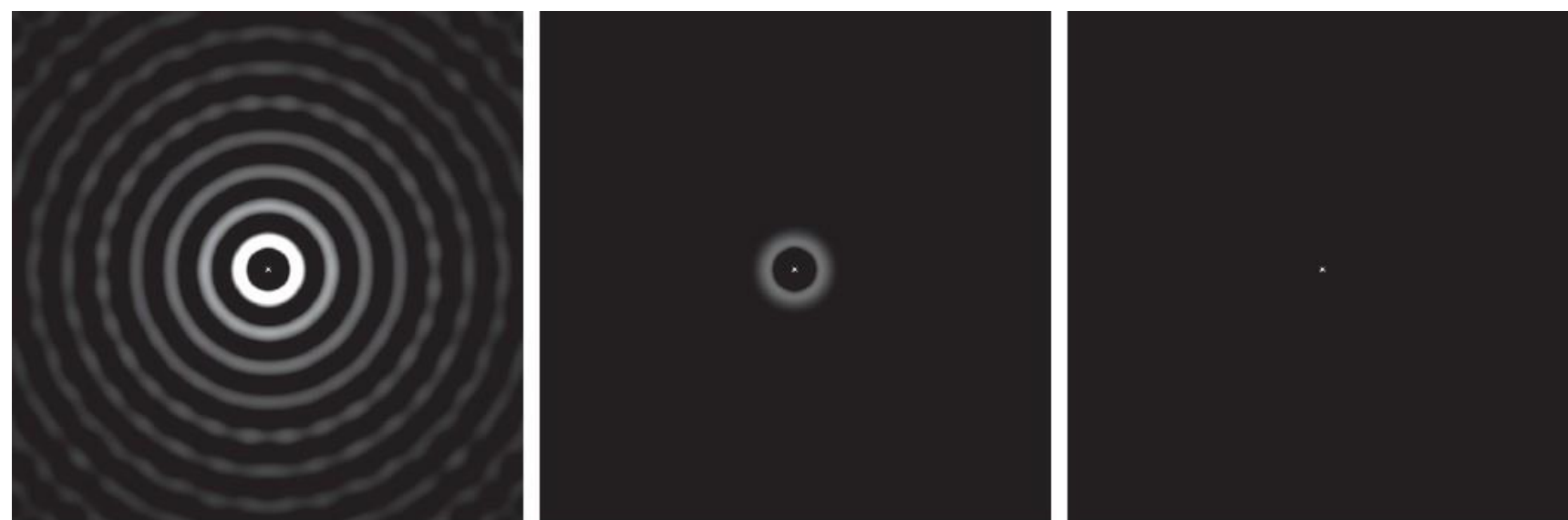


Фильтрация в частотной области

Повышение резкости

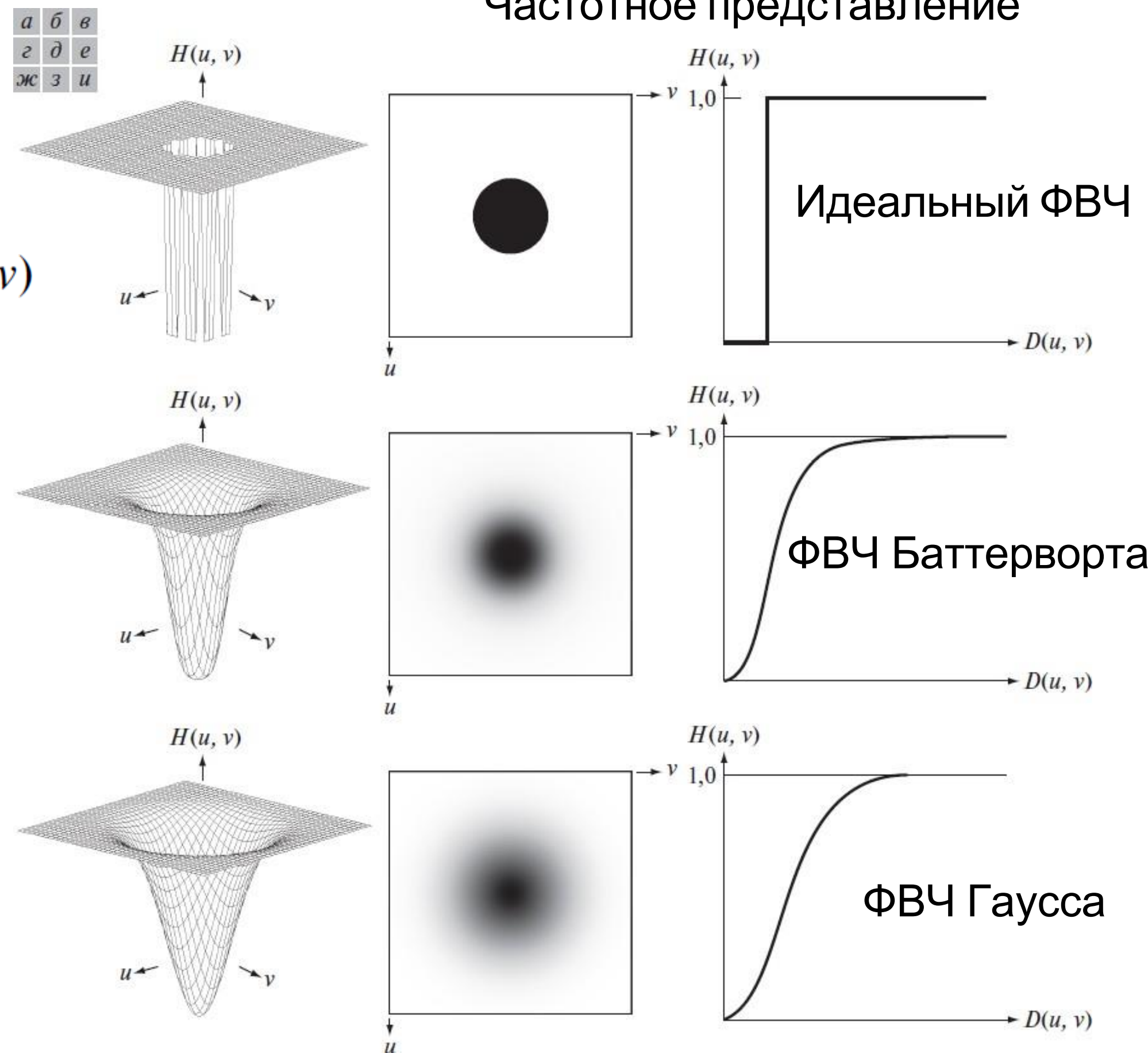
- Высокочастотная фильтрация подавляет НЧ составляющие
- Получение ВЧ фильтра из НЧ: $H_{HP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v)$

Пространственное представление



Идеальный ФВЧ ФВЧ Баттерворта ФВЧ Гаусса

Частотное представление



Фильтрация в частотной области

Виды ФВЧ

- Идеальный ФВЧ

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{при } D(u, v) \leq D_0; \\ 1 & \text{при } D(u, v) > D_0, \end{cases}$$

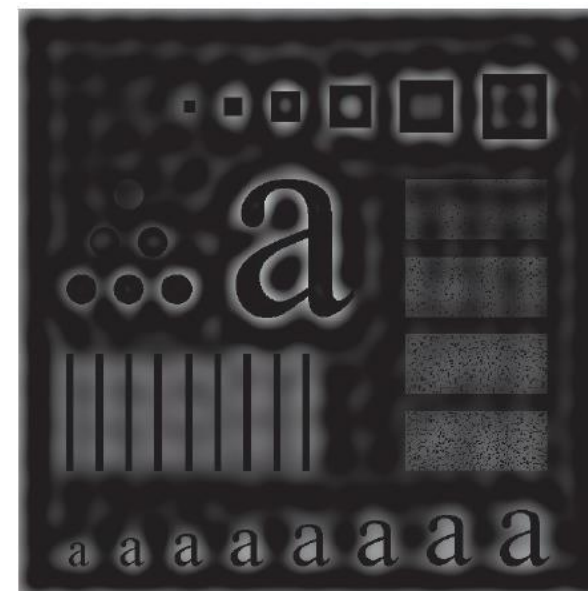
- ФВЧ Баттерворта (n=2)

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

- ФВЧ Гаусса

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

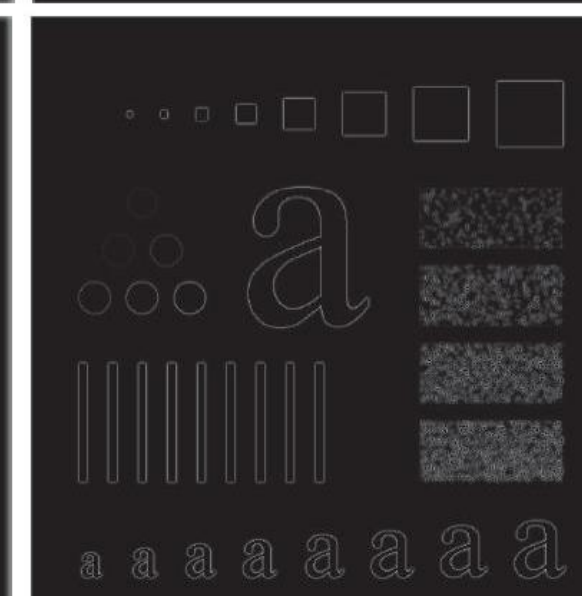
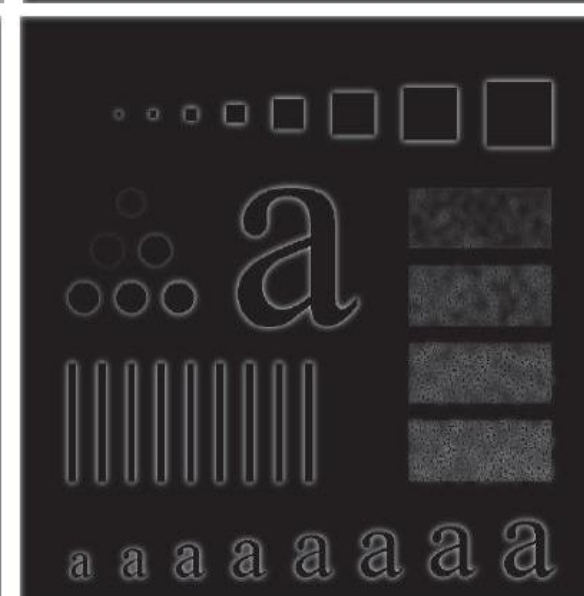
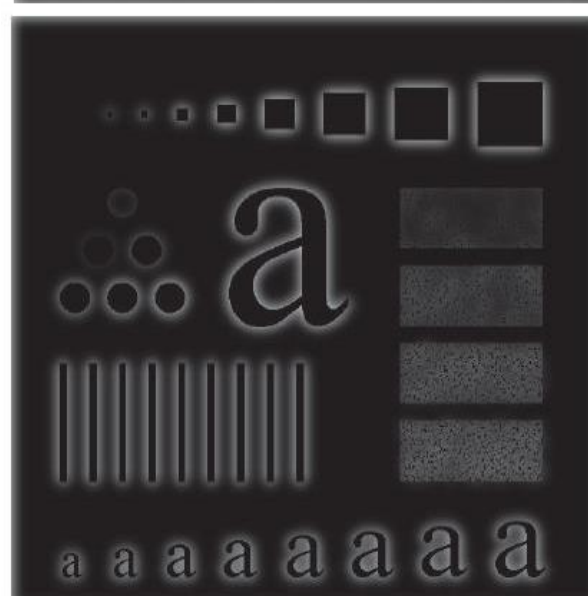
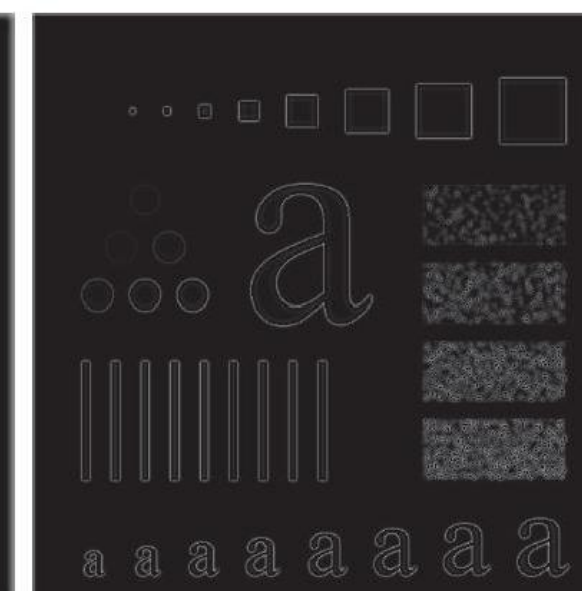
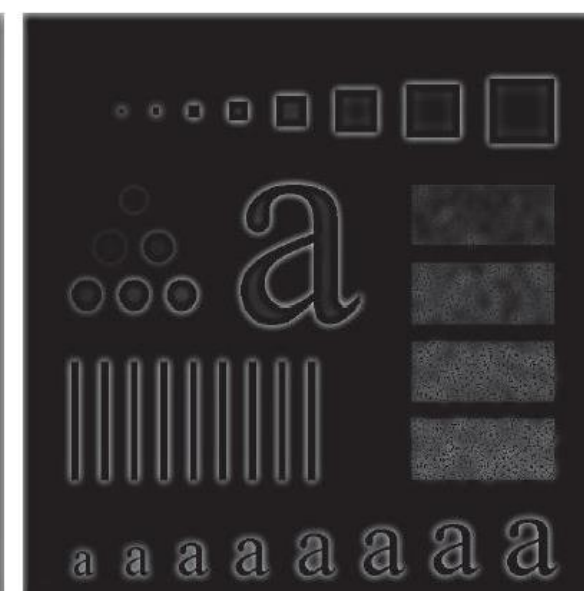
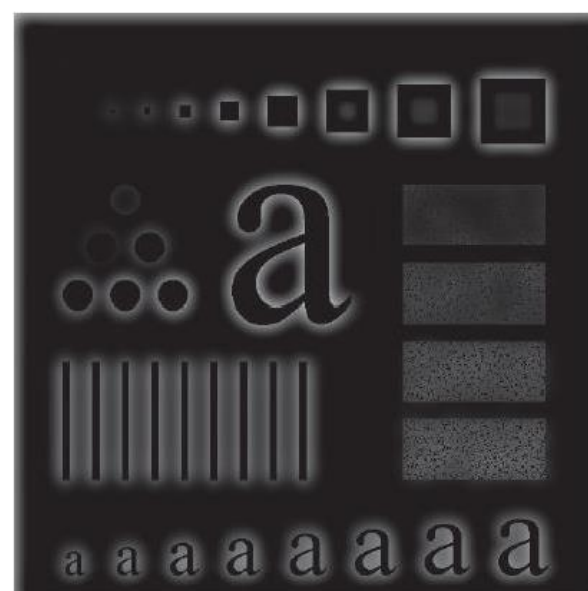
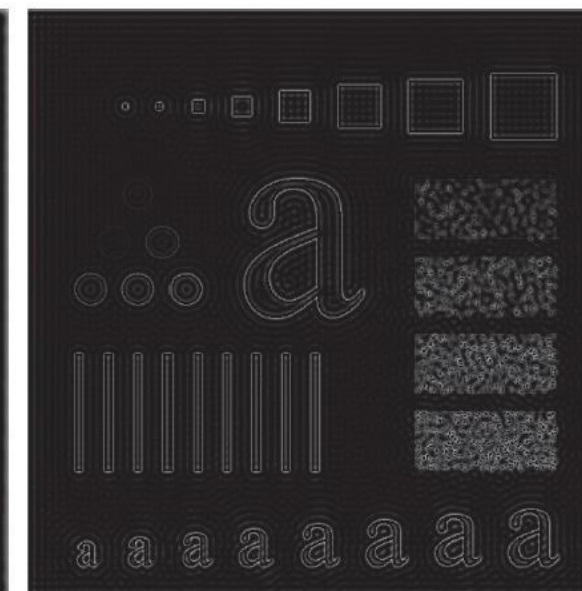
$D_0 = 30$



$D_0 = 60$



$D_0 = 160$



Фильтрация в частотной области

Режекторные и полосовые фильтры

- Идеальный режекторный фильтр

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{при } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

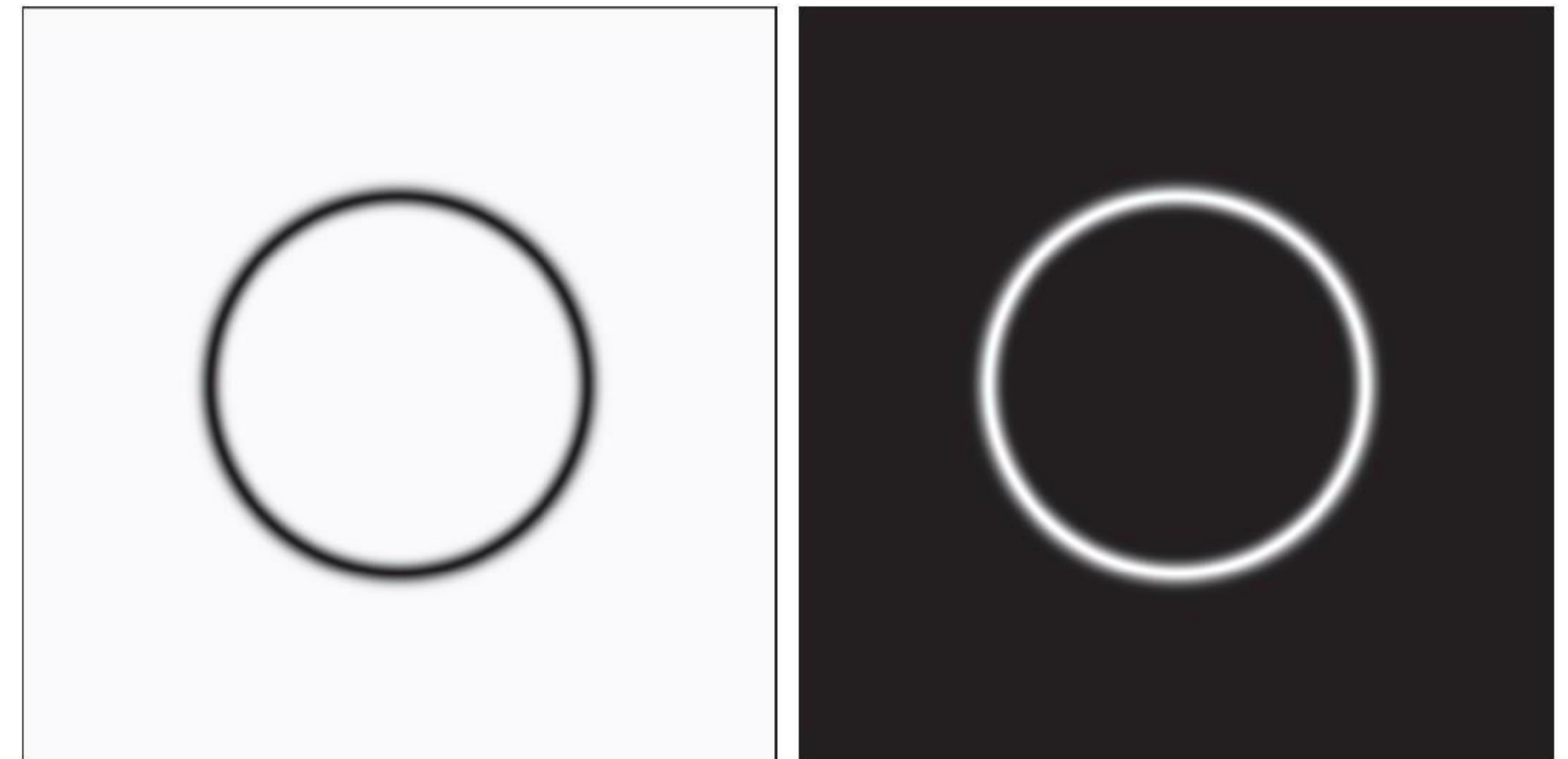
- Режекторный фильтр Баттерворта

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$$

- Режекторный фильтр Гаусса

$$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$$

Режекторный Гауссов фильтр Полосовой пропускающий фильтр



$$H_{BP}(u, v) = 1 - H_{BR}(u, v)$$

Two blue curved arrows point from the two plots above to the equation below. One arrow starts from the bottom of the left plot and points to the H_{BR} term. The other arrow starts from the bottom of the right plot and points to the H_{BP} term.

Фильтрация в частотной области

Узкополосные фильтры

Задерживают/пропускают частоты в предварительно определенной окрестности центра частотного прямоугольника

- Аналитическая форма

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

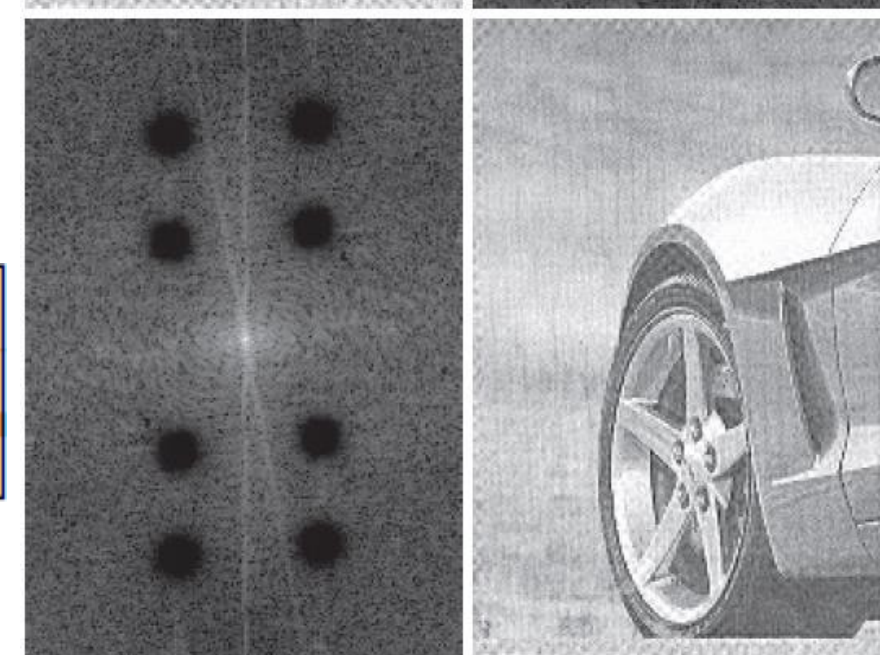
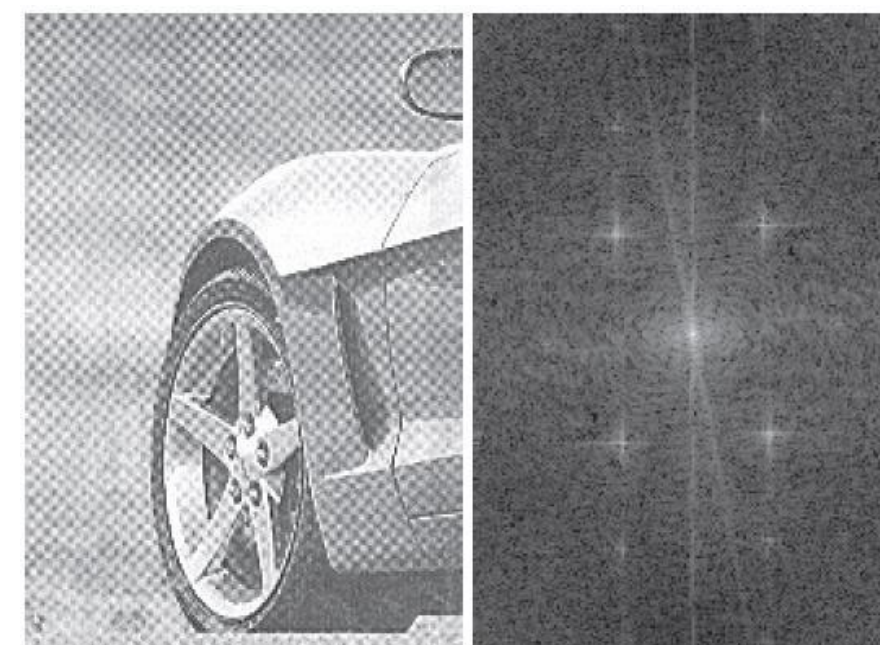
- Пример фильтра Баттерворта порядка n

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_k(u, v)]^{2n}} \right] \left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_{-k}(u, v)]^{2n}} \right]$$

Подавление муара

Исходное

Спектр

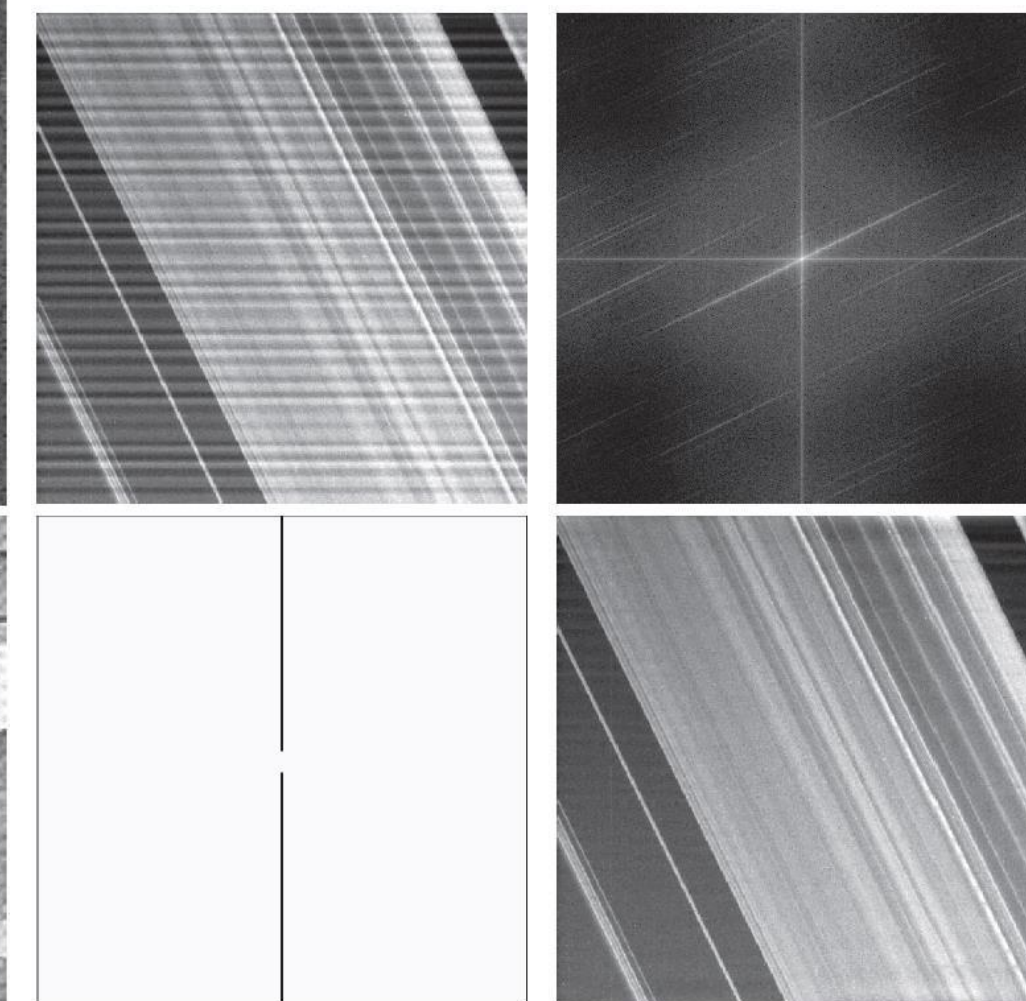


После фильтра Баттерворта
Переход в пространственную область

Устранение периодической помехи

Исходное

Спектр



Узкополосный
режекторный
фильтр

Результат
фильтрации

Резюме

- Математические основы пространственной фильтрации
- Операции пространственной корреляции и свертки
- ФНЧ и ФВЧ в пространственной области
- Комбинация фильтров в пространственной области
- Математические основы частотной фильтрации
- Источники искажений при дискретизации
- Двумерное дискретное преобразование Фурье
- Переход от пространственных к частотным фильтрам
- ФНЧ, ФВЧ, полосовые и режекторные фильтры в частотной области

Использованные материалы

- [Курс МФТИ по компьютерному зрению](#), автор – Колокольников Г.А.
- Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2012. – 1104 с. – ISBN 978-5- 94836-331-8.2.
- Курс лекций cs231n «Convolutional Neural Networks for Visual Recognition» (<http://cs231n.stanford.edu>).