



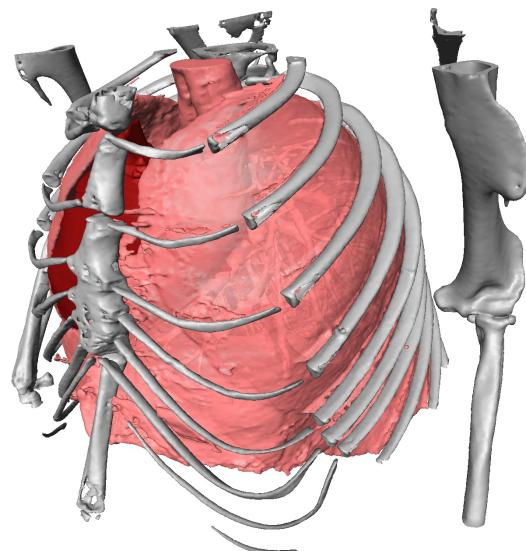
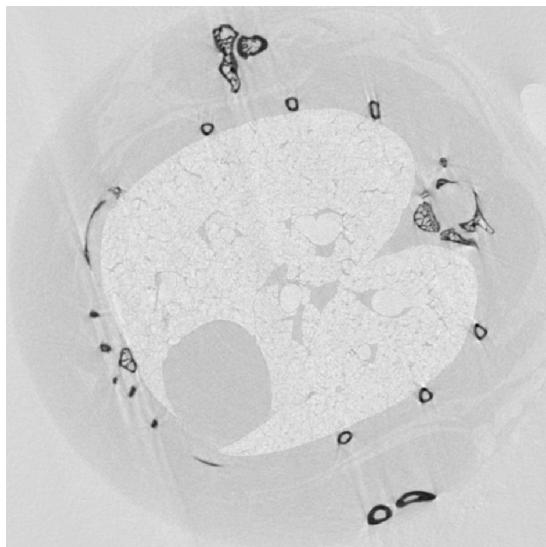
GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN

Fakultät für Physik  
Friedrich-Hund-Platz 1  
37077 Göttingen

master-fp.physik.uni-goettingen.de

# Master Forschungspraktikum

Schwerpunkt Biophysik und Komplexe Systeme (M.phy.402)



Versuchsanleitung zu BK.PKR

## Phasenkontrast Radiographie



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zusammenfassung</b>	<b>5</b>
<b>2 Fourieroptische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Von den Maxwellgleichungen zur Wellengleichung . . . . .	6
2.2 Fresnel-Kirchhoff-Integral . . . . .	8
<b>3 Entstehung von Phasenkontrast</b>	<b>9</b>
3.1 Projektionsapproximation . . . . .	10
3.2 Intensitäts-Transport-Gleichung . . . . .	10
3.3 Kontrasttransferfunktion . . . . .	11
3.4 Fresnelsches Skalierungstheorem . . . . .	13
<b>4 Phasenrekonstruktion</b>	<b>14</b>
<b>5 Tomographie</b>	<b>16</b>
5.1 Radontransformation . . . . .	16
5.2 Gefilterte Rückprojektion . . . . .	17
<b>6 Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>19</b>
6.1 Versuchsaufbau . . . . .	19
6.2 Steuerung des Experiments . . . . .	20
6.3 Versuchsdurchführung . . . . .	23
6.4 Fragen zur Vorbereitung . . . . .	26
<b>7 Versuchsaufgaben und Auswertung</b>	<b>27</b>
7.1 Kugeln . . . . .	27
7.2 Tomographische Rekonstruktion mit MATLAB . . . . .	27
7.3 3D Visualisierung mit Avizo . . . . .	28



# 1 Zusammenfassung

Die Röntgenbildgebung (Radiographie) wurde seit der Entdeckung der Röntgenstrahlung 1895 durch Wilhelm Conrad Röntgen in der medizinischen Diagnostik eingesetzt. Der besondere Vorteil dieser Bildgebungsmethode ist das Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlung und somit die Darstellung von Strukturen im Inneren lichtundurchsichtiger Körper. Dabei beruht der Kontrastmechanismus gemeinhin auf der stark unterschiedlichen Absorption von Stoffen, insbesondere von schwereren und leichteren Elementen für die Röntgenstrahlung. Durch Wahl der Photonenenergie  $E = hc/\lambda = \hbar ck$  (z.B. im Bereich von 10-100 keV) lässt sich die Eindringtiefe stark variieren und auf die Dimensionen und Zusammensetzung des Probenkörpers abstimmen. Dabei variiert der lineare Absorptionskoeffizient des Lambert-Beerschen Gesetzes näherungsweise mit  $\mu \propto E^{-3}$  und bei gleicher Dichte mit der Kernladungszahl der durchstrahlten Materie wie  $\mu \propto Z^4$  (bzw. entsprechend dem gewichteten Mittel). Insbesondere in Verbindung mit der computergestützten Tomographie (CT) lassen sich damit durch Projektionsbilder (geometrische Schattenprojektion), die unter einer Reihe von Drehwinkeln aufgenommen werden, komplexe dreidimensionale Strukturen abbilden.

Um in der Radiographie nicht nur absorbierende Strukturen (z.B. Knochen) sondern auch gering absorbierende oder praktisch völlig transparente Stoffe und Gewebe abzubilden, wurde seit den 1990er Jahren die Phasenkontrast-Radiographie entwickelt, durch die zunehmende Verfügbarkeit partiell kohärenter Röntgenstrahlung insbesondere an Synchrotronstrahlungsquellen. Die Phasenkontrast-Radiographie nutzt den Phasenschub, den selbst harte Röntgenstrahlen bei Durchtritt durch Materie erfahren. Absorption wie Phasenschub in Materie lassen sich in Kontinuumsbeschreibung durch den Real- und Imaginärteil des komplexen Brechungsindex ausdrücken, der für Röntgenstrahlung meist in der Form  $n = 1 - \delta + i\beta$  geschrieben wird. Entsprechend ist der Phasenunterschied (zum Vakuumstrahl) beim Durchtritt einer Probe der Dicke  $\Delta z$  durch  $\Delta\phi = k\delta\Delta z$  und die Absorption durch  $I = I_0 e^{-\mu\Delta z} = I_0 e^{-2\beta\Delta z}$  gegeben. Für harte Röntgenstrahlung im Bereich mehrerer keV bzw. Wellenlängen  $\lambda$  im Bereich von wenigen hundertstel bis zu einem Nanometer (nm) ist  $\delta$  um bis zu drei Größenordnungen höher als  $\beta$  und ermöglicht damit die Bildgebung auch von schwach absorbierenden Strukturen wie z.B. weichem Gewebe, sowie von Strukturen sehr geringer Größe.

Durch moderne Mikrofokus-Röntgenquellen sind Phasenkontrastmethoden nicht mehr nur auf Synchrotronstrahlung beschränkt. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten, den zunächst nicht messbaren Phasenschub  $\Delta\phi$  messbar zu machen. In vorliegenden Fall geschieht dies auf der Basis freier Strahlpropagation zwischen Probe und Detektor (Phasenkontrastbildgebung durch freie Propagation). Ziel des Versuchs ist es nun, mit einer Mikrofokus-Röntgenquelle Phasenkontrast-Bilder von Teststrukturen und selbst mitgebrachten Objekten aufzunehmen. Die Grundlagen der Entstehung des Phasenkontrastes basierend auf freier Propagation sowie der Tomographie sollen durch den Versuch erlernt und die entsprechenden Konzepte der Fourieroptik verdeutlicht werden. Ein wichtiger Schwerpunkt des Versuches liegt auf der Phasenrekonstruktion, durch die eine quantitative Bildgebung ermöglicht wird.

# 2 Fourieroptische Grundlagen

Das folgende Kapitel erläutert die Grundlagen die zum Verständnis der eigentlichen Theorie nötig sind. Die ersten beiden Unterabschnitte stellen Grundlagen dar, die aus der Elektro-

dynamik Vorlesung bekannt sein sollten. Es ist für den Versuch nicht nötig diese exakt zu beherrschen, jedoch ist es zum Verständnis der darauf aufbauenden und für den Versuch notwendigen Theorie (Kapitel 3, 4 und 5) sehr hilfreich. Die Darstellung der theoretischen Grundlagen orientiert sich an [1] und für eine ausführlichere Darstellung sei darauf verwiesen.

## 2.1 Von den Maxwellgleichungen zur Wellengleichung

Grundlage für die zeitliche und räumliche Beschreibung elektromagnetischer Wellen, zu denen auch Röntgenstrahlen gehören, bilden die **Maxwellgleichungen**. Für den Fall nicht-magnetischer Materialien sowie nicht-existenter Ladungs- und Stromdichten gilt:

$$\nabla \cdot (\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0 \quad (1)$$

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \partial_t \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \epsilon(\mathbf{r}) \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4)$$

Dabei ist  $\mathbf{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\mathbf{H}$  die magnetische Feldstärke,  $\mu_0$  die magnetische Permeabilität des Vakuums und  $\epsilon$  die elektrische Permittivität. Unter der Annahme, dass sich  $\epsilon$  räumlich in der Größenordnung der Wellenlänge nur schwach ändert, sodass Polarisationseffekte vernachlässigbar sind, lässt sich die folgende Form der Wellengleichungen herleiten:

$$(\epsilon(\mathbf{r})\mu_0 \partial_t^2 - \nabla^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5)$$

Diese Gleichung gilt in der selben Form auch für die magnetische Feldstärke  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , welche hier nicht explizit gezeigt werden. Da die einzelnen Komponenten der Felder durch die gezeigte Wellengleichung und die dafür angenommenen Näherungen nicht mehr gekoppelt sind, kann man an dieser Stelle zu einer skalaren Betrachtung übergehen, wobei die skalare Größe  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  jede Komponente des elektromagnetischen Feldes sein kann. Zusammen mit den Definitionen des Brechungsexponenten  $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$  und der Wellengeschwindigkeit  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  ergibt sich:

$$\left( \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6)$$

Um eine zeitunabhängige Variante der skalaren Wellengleichung zu erhalten, wird zunächst eine spektrale Zerlegung der Funktion  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  durchgeführt, so dass diese über ihre Fourierkomponenten beschrieben wird:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7)$$

Diese Zerlegung kann physikalisch so interpretiert werden, dass die Wellenfunktion aus verschiedenen monochromatischen Wellen mit der Gewichtung  $\psi_{\omega}(\mathbf{r})$  zusammengesetzt ist. Durch Einsetzen von Gleichung (7) in (6) und Ausnutzen der Linearität der Fouriertransformation und der Wellengleichung sieht man, dass es reicht die Wellengleichungen für die monochromatischen Komponenten des Wellenfeldes zu lösen und diese später gemäß der spektralen Zerlegung zu überlagern. Nimmt man eine monochromatische Welle  $\Psi = \psi_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$  an und setzt

diese in die Wellengleichung ein, so ergibt sich die sogenannte (inhomogene) **Helmholtz-Gleichung**:

$$(\nabla^2 + k^2 n^2) \psi_\omega(\mathbf{r}) = 0 \quad (8)$$

Hierbei wurde die Wellenzahl  $k = \frac{\omega}{c^2}$  definiert. Die Helmholtz-Gleichung beschreibt für eine gegebene stationäre Situation wie sich monochromatische Wellen verhalten.

**Paraxiale Wellengleichung** Ausgehend von der Helmholtz-Gleichung (8) kann man weitere vereinfachte Wellengleichungen herleiten. Ein verbreiteter Ansatz wird durch eine strahlartige Beschreibung der Wellenfelder motiviert. Als Ansatz dient dabei der Separationsansatz

$$\psi_\omega(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \cdot e^{ikz} \quad (9)$$

wobei die Richtung der z-Achse ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Ausbreitungsrichtung der Welle sei. Es wird also angenommen, dass die Welle in Ausbreitungsrichtung aus einem schnell oszillierenden Term und einer langsam veränderlichen Einhüllenden besteht (vgl. Abbildung 1). Setzt man diesen Ansatz in die Helmholtz-Gleichung (8) ein, liefert das:

$$\nabla^2 (A(\mathbf{r})e^{ikz}) + n^2(\mathbf{r})k^2 A(\mathbf{r})e^{ikz} = 0 \quad (10)$$

Durch Aufteilen des dreidimensionalen Laplace-Operators  $\nabla$  in den lateralen Teil  $\nabla_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$  sowie den Teil entlang der Ausbreitungsrichtung z, ergibt sich nach einigen Umformungen

$$(\nabla_\perp^2 + \partial_z^2 + 2ik\partial_z + k^2(n^2 - 1)) A(\mathbf{r}) = 0. \quad (11)$$

Betrachtet man nun die in Abbildung 1 veranschaulichte Situation eines strahlartigen Wellenprofils, motiviert dies die Vernachlässigung des Terms  $\partial_z^2 A(\mathbf{r})$ . Zum einen variieren strahlartige Wellen im Allgemeinen wesentlich stärker in der lateralen Richtung als in Richtung der optischen Achse, wodurch  $\nabla_\perp^2 A(\mathbf{r})$  einen wesentlich größeren Beitrag liefert, zum Anderen sind die Variation der ersten Ableitung der Einhüllenden für paraxiale Strahlen wesentlich größer als die der zweiten Ableitung, so dass  $\partial_z^2 A(\mathbf{r}) \ll 2ik\partial_z A(\mathbf{r})$ . Daraus ergibt sich die **Paraxiale Wellengleichung**:

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z + k^2(n(\mathbf{r})^2 - 1)) A(\mathbf{r}) = 0 \quad (12)$$

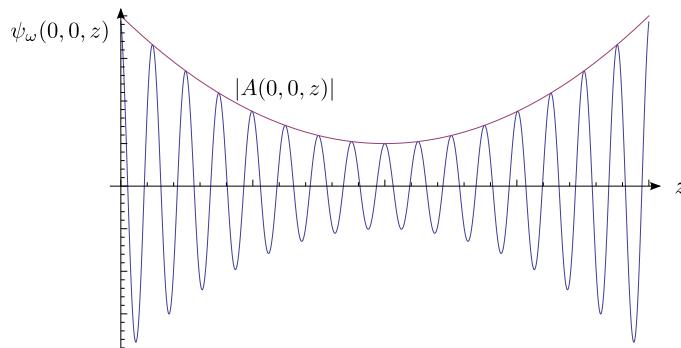


Abbildung 1: Veranschaulichung der Paraxialnäherung: Die monochromatische Welle  $\psi_\omega$  wird in einen stark oszillierenden Teil  $e^{ikz}$  und eine Einhüllende  $A(x, y, z)$  separiert. Weiter wird angenommen, dass die Einhüllende hauptsächlich in x- und y-Richtung variiert und daher die zweite partielle Ableitung in z-Richtung vernachlässigbar ist.

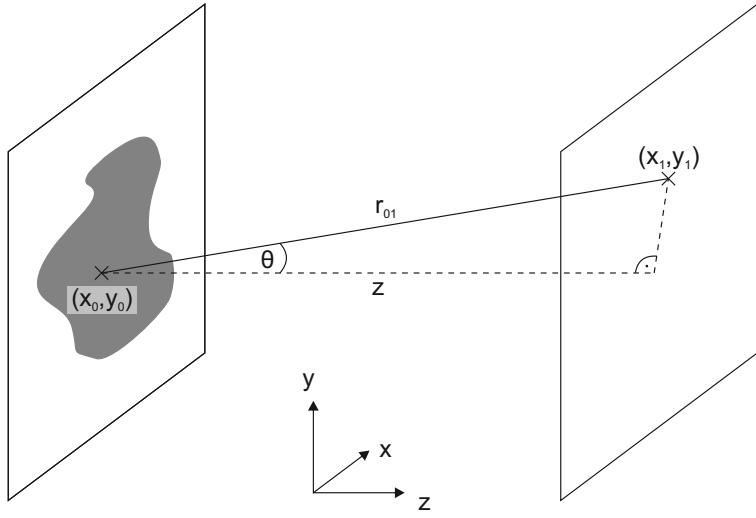


Abbildung 2: Skizze zur Veranschaulichung des Huygens-Fresnel-Prinzip. Die komplexe Amplitude an einem Punkt  $\psi_1(x_1, y_1)$  in der Zielebene, welche im Abstand  $z$  zur Ausgangsebene steht, entsteht durch Überlagerung von Kugelwellen, die mit einer komplexen Amplitude  $\psi_0(x_0, y_0)$  in der gesamten Ausgangsebene ausgesendet werden. Die Strecke  $r_{01}$  ist dabei jeweils die Länge, die eine Kugelwelle bis zum Zielpunkt zurückgelegt hat. Diese Strecke bildet mit der optischen Achse den Winkel  $\theta$ .

## 2.2 Fresnel-Kirchhoff-Integral

Eine direkte Lösung der Helmholtz-Gleichung (8) kann mittels Green'scher Funktionen hergeleitet werden. Eine Variante davon ist als Fresnel-Kirchhoff-Integral oder auch als Huygens-Fresnel-Prinzip bekannt. Eine ausführliche Herleitung findet man z.B. in [2]. Eine physikalisch gut interpretierbare Form ist:

$$\psi_1(x_1, y_1) = \frac{1}{i\lambda} \int \int \psi_0(x_0, y_0) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos \theta dx_0 dy_0 \quad (13)$$

Dabei ist  $\lambda$  die Wellenlänge der Strahlung,  $\psi_0(x_0, y_0)$  die Wellenfunktion in einer Ausgangsebene und  $\psi_1(x_1, y_1)$  die Wellenfunktion in der Zielebene. Alle anderen Größen sind geometrisch bedingt und in Abbildung 2 veranschaulicht. Das Fresnel-Kirchhoff-Integral (13) kann so interpretiert werden, dass die Ausgangsebene durch ihre Beleuchtung mit elektromagnetischer Strahlung als sekundäre Quelle mit einer komplexen Amplituden-Verteilung in jedem Punkt  $(x_0, y_0)$  Kugelwellen aussendet. In einem gewissen Zielpunkt  $(x_1, y_1)$  in der Zielebene, welche sich im Abstand  $z$  entlang der optischen Achse befindet, interferieren alle diese Kugelwellen und bilden dadurch das Beugungsbild. Die Kugelwellen legen dabei den Abstand  $r_{01}$  zurück (vgl. Abbildung 2). Der komplexe Vorfaktor und der  $\cos \theta$  Term ergeben sich durch die exakte Herleitung.

Der Abstand zwischen einem Quell- und Zielpunkt ergibt sich aus Abbildung 2 zu:

$$r_{01} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + z^2}$$

In der sogenannten Klein-Winkel- oder Paraxialnäherung kann nun angenommen werden,

dass die Winkel  $\theta$  in Abbildung 2 klein sind. Daher werden auch die lateralen Abweichungen

$$|\Delta \mathbf{r}_\perp|^2 := |\mathbf{r}_{\perp,1} - \mathbf{r}_{\perp,0}|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

sehr klein werden. Dies motiviert einige Näherungsschritte für Gleichung (13). Durch Taylorentwicklung für  $\theta \approx 0$  und  $\Delta \mathbf{r}_\perp \approx 0$  erhält man:

$$\cos \theta = 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$$r_{01} = z + \frac{|\Delta \mathbf{r}_\perp|^2}{2z} + \mathcal{O}(|\Delta \mathbf{r}_\perp|^4)$$

Setzt man im  $\frac{1}{r_{01}}$  Term die Entwicklung erster Ordnung, im  $e^{ikr_{01}}$  Term die Entwicklung dritter Ordnung und für  $\cos \theta$  die Entwicklung erster Ordnung ein, so kann Gleichung (13) in der Kleinwinkel- oder Fresnel-Näherung geschrieben werden. Durch Ausmultiplizieren der quadratischen Terme erhält man

$$\psi_1(x_1, y_1) = A \int \int \psi_0(x_0, y_0) e^{-\frac{ik}{z} x_0 x_1} e^{-\frac{ik}{z} y_0 y_1} e^{\frac{ik}{2z} (x_0^2 + y_0^2)} dx_0 dy_0, \quad (14)$$

mit dem in der Praxis irrelevanten Vorfaktor  $A := \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z} (x_1^2 + y_1^2)}$ . Die Integration in (14) entspricht bis auf Vorfaktoren einer lateralen Fouriertransformation  $\mathcal{F}_\perp$  des Terms:

$$\psi_0(x_0, y_0) \cdot e^{\frac{ik}{2z} (x_0^2 + y_0^2)}$$

Insbesondere ist also das propagierte Bild die Fouriertransformierte des Ausgangsbilds, wenn der exponentielle Phasenfaktor vernachlässigbar ist. Diese Schreibweise legt die Definition des einheitenlosen Faktors

$$F = \frac{a^2}{\lambda z} \quad (15)$$

nahe, wobei  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  verwendet und  $a$  als eine typische Strukturgröße des zu untersuchenden Objekts eingeführt wird.  $F$  ist als **Fresnelzahl** bekannt und ist ein Maß für das Regime der Bildgebung. Für  $F \ll 1$  ist der exponentielle Phasenfaktor vernachlässigbar, so dass das propagierte Bild der reinen Fouriertransformation entspricht. Diese Näherung wird als **Fraunhofer-Näherung** bezeichnet. Für  $F \gg 1$  erhält man den Spezialfall der **geometrischen Optik**, in der die Beugung vernachlässigbar wird. Den Bereich mit  $F \approx 1$  bezeichnet man als **Fresnel-Regime**, welches wir in diesem Versuch genauer betrachten.

Übrigens: Da Gleichung (14) die Form einer Faltung mit dem Faltungskern  $H(\mathbf{r}_\perp) = e^{\frac{ik}{2z} \mathbf{r}_\perp^2}$  hat, kann diese auch als Multiplikation im Fourierraum ausgedrückt werden:

$$\psi_1(x_1, y_1) = e^{ikz} \cdot \mathcal{F}_\perp^{-1} \left[ e^{-i \frac{z(k_x^2 + k_y^2)}{2k}} \mathcal{F}_\perp(\psi_0(x_0, y_0)) \right]. \quad (16)$$

### 3 Entstehung von Phasenkontrast

Dass durch freie Propagation einer Wellenfront Phasenkontrast entsteht, lässt sich direkt aus den Wellengleichungen herleiten. Durch die Wechselwirkung von Materie mit Strahlung

entsteht eine gestörte Wellenfront, welche durch freie Propagation (im Vakuum / Luft) zu messbaren Intensitätsmodulationen in der Detektorebene führt. Die Form dieser Modulationen lässt sich dabei mithilfe der in Abschnitt 2.2 vorgestellten Propagationsformeln herleiten. Aus diesen Gleichungen lässt sich auch eine einfache Rekonstruktionsformel herleiten, um von den gemessenen Intensitäten die quantitativen Phasenschübe zu rekonstruieren (s. Kapitel 4). Dieser Teil sollte gut verstanden werden, da er die Grundlage für die Phasenrekonstruktion legt, welche während des Versuchs durchzuführen ist.

### 3.1 Projektionsapproximation

Treffen Röntgenstrahlen auf Materie, so können sie absorbiert oder gestreut werden. Mit der Projektionsapproximation wird der Effekt von Materie in Strahlung durch eine effektive Objektebene beschrieben, die die kompletten Informationen der Probe enthält. Dadurch können alle vorherigen Propagationsmethoden auf diese Wellenfunktionen angewandt werden, da die weitere Ausbreitung der Strahlung hinter einer Probe im Vakuum oder in Luft erfolgt. Unter der Annahme, dass innerhalb der zu betrachtenden Probe die Streuung vernachlässigbar ist und nur einen veränderten Phasenschub bewirkt, lässt sich die Wellenfunktion im Objekt durch die geometrische Optik beschreiben. Dadurch kann die Wellenfunktion direkt hinter der Probe als Produkt aus der Beleuchtungsfunktion  $P(\mathbf{r}_\perp)$  und der Objekttransmissionsfunktion  $O(\mathbf{r}_\perp)$  geschrieben werden. Die Objekttransmissionsfunktion lässt sich durch Integration zu folgendem Ausdruck herleiten, der bei Beleuchtung mit einer ebenen Welle ( $P(\mathbf{r}_\perp) = 1$ ) auch der Wellenfunktion direkt hinter dem Objekt entspricht:

$$O(\mathbf{r}_\perp) := e^{-ik\bar{\delta}(\mathbf{r}_\perp)} \cdot e^{-k\bar{\beta}(\mathbf{r}_\perp)} \quad (17)$$

Dabei stellen  $\bar{\delta}(x, y) = \int_0^z \delta(\mathbf{r}) dz$  und  $\bar{\beta}(x, y) = \int_0^z \beta(\mathbf{r}) dz$  die über die gesamte Probe auf integrierten Werte des komplexen Brechungsindex  $n = 1 - \delta + i\beta$  dar.

### 3.2 Intensitäts-Transport-Gleichung

Für Bildgebung mit Röntgenstrahlung werden meist zweidimensionale Intensitätsverteilungen mit einem Flächendetektor aufgenommen. Da Röntgendetektoren die Intensität der Strahlung und nicht Real- und Imaginärteil messen können, bietet es sich an, eine Beschreibung für Intensitäten und Phasen herzuleiten. Die Phase geht bei der Messung grundsätzlich verloren, so dass für quantitative Bildgebung zusätzliche Informationen zur Phasenrekonstruktion benötigt werden. Dieses Problem wird allgemein als **Phasenproblem** bezeichnet und tritt in vielen verschiedenen Bereichen der Physik auf. Die folgenden Herleitungen sind durch [1] motiviert.

Ein beliebiges Wellenfeld  $\psi$  kann man durch seine Phase und Intensität darstellen. Das Wellenfeld  $A(\mathbf{r})$  (siehe (9)) lässt sich somit durch

$$A(\mathbf{r}) = \sqrt{I(\mathbf{r})} e^{i\phi(\mathbf{r})} \quad (18)$$

ausdrücken. Durch Einsetzen des Ansatzes (18) in die paraxiale Wellengleichung (12) folgt:

$$\nabla_\perp \cdot \left( \frac{e^{i\phi}}{2\sqrt{I}} \nabla_\perp I + i\sqrt{I} e^{i\phi} \nabla_\perp \phi \right) + ik \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{I}} \partial_z I + i2ik\sqrt{I} e^{i\phi} \partial_z \phi = 0 \quad (19)$$

Da  $\phi$  und  $I$  rein reelle Größen sind, liefert Gleichung (19) zwei gekoppelte Differentialgleichungen. Für den Imaginärteil lässt sich folgender Ausdruck herleiten

$$\boxed{\nabla_{\perp} \cdot (I(\mathbf{r}) \nabla_{\perp} \phi(\mathbf{r})) = -k \frac{\partial I(\mathbf{r})}{\partial z}}, \quad (20)$$

welcher als **Intensitäts-Transport-Gleichung** (TIE) bekannt ist und in dieser Form zum ersten Mal von Teague 1983 hergeleitet wurde [3]. Die Intensitätsvariationen entlang des Strahls werden also durch die Krümmung der Phasen bzw. Intensitätsgradienten bestimmt.

### 3.3 Kontrasttransferfunktion

Ein weitere Möglichkeit, das Wellenfeld im Abstand  $z$  hinter der Probe, welche sich bei  $z = 0$  befindet, zu beschreiben liefert die so genannte **Kontrasttransferfunktion**. Diese gilt unter der Annahme schwach wechselwirkender Objekte, sodass die Objekttransmissionsfunktion (17) linearisiert werden kann:

$$O(\mathbf{r}_{\perp}) = e^{-ik\bar{\delta}(\mathbf{r}_{\perp})} \cdot e^{-k\bar{\beta}(\mathbf{r}_{\perp})} = e^{i\phi - \frac{\mu}{2}} \approx 1 + i\phi - \frac{\mu}{2}$$

Bei Beleuchtung mit einer Ebenen Welle  $I_0 e^{ikz}$  ist die Beleuchtungsfunktion  $P(\mathbf{r}_{\perp}) = I_0 e^{ik \cdot 0} = I_0$ . Damit ergibt sich die Wellenfunktion bei  $z = 0$  zu

$$\psi(\mathbf{r}_{\perp}, 0) = I_0 O(\mathbf{r}_{\perp}) = I_0 \left(1 + i\phi - \frac{\mu}{2}\right) \quad (21)$$

Betrachtet man nun das propagierte Wellenfeld an einer Position  $z$  hinter dem Objekt, so lässt sich das Wellenfeld dort in der Paraxialnäherung durch Gleichung (16) beschreiben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit definieren wir eine reduzierte Variable, die den Exponenten aus (16) beschreibt:<sup>1</sup>:

$$\chi = \frac{z(\mathbf{k}_{\perp}^2)}{2k} = \frac{\lambda z}{4\pi} (\mathbf{k}_{\perp}^2) \quad (22)$$

$$\Rightarrow \psi_{\omega}(\mathbf{r}_{\perp}, z) = e^{ikz} \cdot \mathcal{F}_{\perp}^{-1} [e^{-i\chi} \mathcal{F}_{\perp} [\psi_{\omega}(\mathbf{r}_{\perp}, 0)]] \quad (23)$$

Daraus ergibt sich nach einigen Umformungen die Kontrasttransferfunktion

$$\frac{\tilde{I}(\mathbf{k}_{\perp}, z)}{I_0} = \delta_D(\mathbf{k}_{\perp}) + 2\tilde{\phi} \sin \chi - \tilde{\mu} \cos \chi. \quad (24)$$

Sie kann wie folgt interpretiert werden: Die Diracsche Delta Funktion ( $\delta_D$ ) im Fourierraum entspricht der transmittierten Beleuchtung, welche hier als ebene Welle angenommen wurde. Die Phase  $\phi$  und der integrierte Absorptionskoeffizient  $\mu$  wirken nun einfach als Filter im Fourierraum auf die Bildentstehung wobei sie jeweils mit  $\sin \chi$  bzw.  $\cos \chi$  gewichtet werden. Da  $\sin(\chi = 0) = 0$  ist, ist im direkten Kontakt ( $z = 0$ ) noch kein Phasenkontrast zu erkennen und das Bild vollständig durch die Absorption ( $\cos \chi = 1$ ) gegeben. Für gewisse Raumfrequenzen werden die  $\sin \chi$  und  $\cos \chi$  Terme für eine feste Propagationsdistanz verschwinden, so dass z.B. für reine Phasenobjekte, also  $\mu = 0$ , über die Raumfrequenzen mit  $\sin \chi = 0$  keine

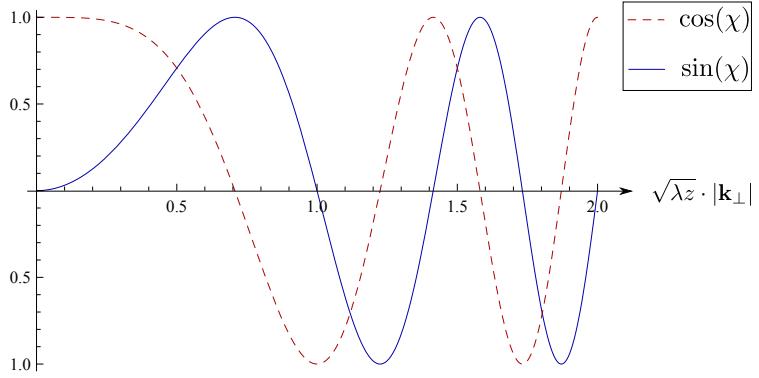


Abbildung 3: Kontrasttransferfunktion in Abhängig von der reduzierten Raumfrequenz  $\sqrt{\lambda z} \cdot |\mathbf{k}_\perp|$ . Man beachte die Nullstellen, bei denen bestimmte Raumfrequenzen in reinen Phasenobjekten bzw. in reinen Absorptionsobjekten keinen Beitrag zur Intensität liefern.

Informationen im Bild enthalten sind (vgl. Abbildung (3)). Für kleine Propagationsdistanzen kann außerdem  $\sin \chi \approx \chi$  genähert werden, so dass sich Gleichung (24) auch schreiben lässt als:

$$\frac{\tilde{I}(\mathbf{k}_\perp, z)}{I_0} = \delta_D(\mathbf{k}_\perp) + 2\tilde{\phi}\chi \quad (25)$$

Setzt man die ursprüngliche Definition von  $\chi$  wieder ein und transformiert diese Gleichung zurück in den Realraum, so ergibt sich für die Intensität

$$\frac{I(\mathbf{r})}{I_0} = 1 - \frac{z}{k} \nabla_\perp^2 \phi \quad (26)$$

Die Intensität eines reinen Phasenobjekts entspricht also im Nahfeld der Krümmung der Phasenfronten, die durch den Laplace Operator gegeben sind. Insbesondere heißt das für dieses Regime der Bildentstehung, dass Kanten stark verstärkt werden (siehe Abb. 4). Für reine

---

<sup>1</sup>Je nach Normierung der Fouriertransformation kann sich  $\chi$  um Vorfaktoren unterscheiden. Hier wird die Fouriertransformation mit dem normierenden Term  $1/\sqrt{2\pi}$  in jeder Transformationsrichtung angenommen.

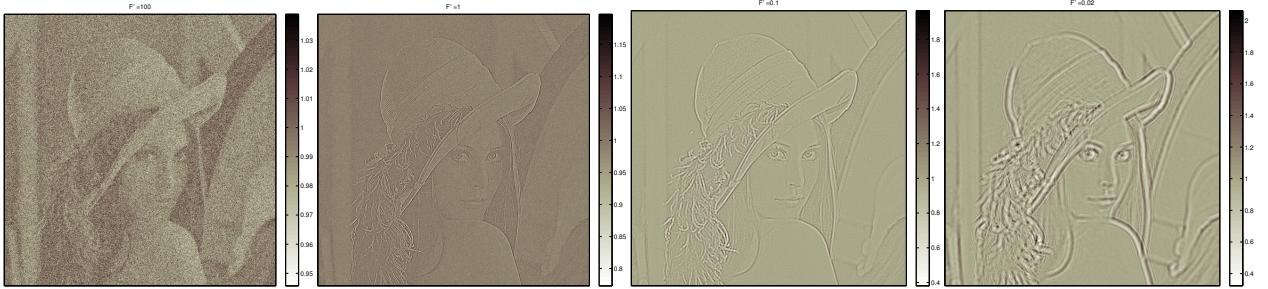


Abbildung 4: Simulierte relative Intensitätsverteilungen (oben)  $I/I_0$  für verschiedene Fresnelzahlen von  $F' = 100$  (links) bis  $F' = 0.02$  (rechts) für ein hypothetisches abzubildendes Objekt (Gleichung 40). Für Fresnelzahlen wesentlich größer als 1 entspricht die zu beobachtende Intensität fast ausschließlich dem Absorptionsbild (geometrische Optik). Für kleiner werdende Fresnelzahlen nimmt der Phasenkontrast immer mehr zu. Für zu kleine Fresnelzahlen ist die Näherung des direkten Kontrastregimes nicht mehr ganz erfüllt.

Phasenobjekte in diesem sogenannten **direkten Kontrastregime** entspricht Gleichung (26) der Intensitäts-Transport-Gleichung (TIE, siehe auch Gleichung (20)). Für größere Propagationsdistanzen verliert (26) seine Gültigkeit und die Bildentstehung wird holographisch, d.h. die messbaren Intensitäten entsprechen nicht mehr dem abzubildenden Objekt (vgl. z.B. [4]).

### 3.4 Fresnelsches Skalierungstheorem

In diesem Versuch wird die Bildgebung in einer divergenten Geometrie durchgeführt, jedoch lassen sich Experimente in der divergenten Geometrie durch eine effektive Parallelstrahlgeometrie beschreiben [1].

Wird Strahlung erzeugt, so geschieht dies meist in einem kleinen Punkt, so dass die davon erzeugten Wellen in guter Näherung als Kugelwellen beschrieben werden können. Das Ausgangswellenfeld direkt hinter dem Objekt kann in der Projektionsapproximation als Produkt aus Beleuchtungs- und Objekttransmissionsfunktion beschrieben werden. Die Beleuchtung sei dabei eine Kugelwelle die auf der optischen Achse mit Abstand  $z_1$  zur Objektebene ausgesendet wird (vgl. Abbildung 5):

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}_\perp) &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} e^{ik|\mathbf{r}|} \\ &\approx \frac{1}{|\mathbf{r}|} e^{ikz_1} \cdot e^{\frac{ik}{2z_1}(x^2+y^2)} \end{aligned} \quad (27)$$

Dabei wurde im letzten Schritt die übliche paraxiale Näherung durchgeführt, die hier erfüllt ist, wenn das Objekt weit genug vom Ursprung der Kugelwelle entfernt ist. Die Wellenfront im Abstand  $\Delta z = z_2$  von der Objektebene erhält man nun z.B. durch Ausführen des Fresnel-Kirchhoff-Integrals (14):

$$\psi(x_1, y_1) = \frac{A}{|\mathbf{r}|} \int \int O(x_0, y_0) e^{ikz_1} e^{\frac{ik}{2}(x_0^2+y_0^2)(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2})} e^{-\frac{ik}{z_2}(x_0x_1+y_0y_1)} dx_0 dy_0 \quad (28)$$

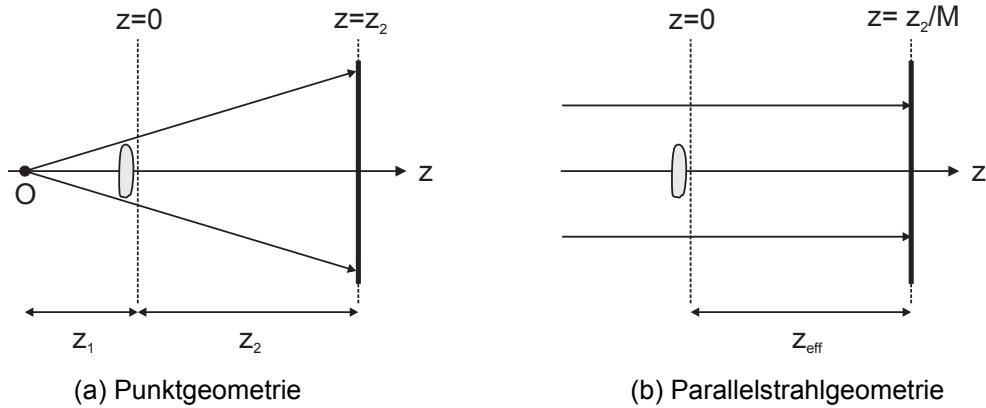


Abbildung 5: Veranschaulichung der Situation. Eine Punktquelle beleuchtet ein Bild, welches den Abstand  $z_1$  zur Quelle bzw. Fokus hat. Dessen propagiertes Bild wird in der Ebene mit Abstand  $z_2$  zur Objektebene gemessen bzw. simuliert (links). Diese Situation kann durch eine äquivalente Geometrie mit effektiver Propagationsdistanz  $z_{eff}$  beschrieben werden (rechts).

Definiert man nun eine **effektive Propagationsdistanz**

$$\frac{1}{z_{eff}} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \quad (29)$$

sowie die **geometrische Vergrößerung**

$$M = \frac{z_1 + z_2}{z_1} \quad (30)$$

so lässt sich Gleichung (28) wie folgt umschreiben:

$$\psi(x_1, y_1) = \frac{A}{|\mathbf{r}|} \int \int O(x_0, y_0) e^{ikz_1} e^{\frac{ik}{2z_{eff}}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-\frac{ik}{z_{eff}}(x_0 \frac{x_1}{M} + y_0 \frac{y_1}{M})} dx_0 dy_0 \quad (31)$$

Dies entspricht bis auf den Vorfaktor, der die Intensität abschwächt, einer Propagation mit einer ebenen Welle  $e^{ikz_1}$  als Beleuchtungsfunktion. Man kann also alle Probleme aus der divergenten Punktgeometrie über die Transformation von  $z \rightarrow z_{eff} = z/M$  und  $x \rightarrow x_{eff} = x_1/M$  beschreiben. Man beachte, dass dabei die Abstände  $x_1$  in der Detektorebene durch effektive Abstände  $x_1/M$  ersetzt wurden. Dies entspricht z.B. bei einem Detektor mit fester Pixelgröße  $\Delta x$  einer Verkleinerung der Pixel, so dass man mit einer divergenten Strahlgeometrie kleinere Strukturen als die Pixelgrößen der Detektoren erkennen kann.

## 4 Phasenrekonstruktion

Gleichung (26) besagt, dass die gemessene Intensität nach freier Propagation eines reinen Phasenobjekts nur vom Laplace der Phasen abhängt. Diese Gleichung liefert außerdem gleich eine Rekonstruktionsmöglichkeit um aus den gemessenen Intensitätsbildern die quantitativen Phasen zu erhalten.

Diese ergibt sich durch die Anwendung des **Fourier-Ableitungs-Theorems** [1]

$$[\partial_x^m + \partial_y^n]^p (\cdot) = \mathcal{F}^{-1}([(ik_x)^m + (ik_y)^n]^p \mathcal{F}(\cdot)), \quad (32)$$

welches die Ableitung im Realraum durch eine Multiplikation im Fourierraum ausdrückt. Dabei sind  $m, n$  und  $p$  zunächst ganzzahlige positive Werte. Diese Limitierung kann jedoch aufgehoben werden, da Gleichung (32) auch für negative ganzzahlige Werte wohldefiniert ist. Operatoren, die sich auf diese Weise ergeben, sind in der Literatur als „**Pseudo Differential Operatoren**“ bekannt. Für den Spezialfall  $m = n = 2$  und  $p = -1$  folgt insbesondere:

$$\nabla^{-2} = -\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \mathcal{F} \right) \quad (33)$$

Nutzt man diesen Operator, um Gleichung (26) umzuformen, so folgt

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \nabla_{\perp}^{-2} \left( -\frac{k}{\Delta z} (I/I_0 - 1) \right) \\ &= \frac{k}{\Delta z} \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}(I/I_0 - 1)}{|\mathbf{k}_{\perp}|^2} \right) \\ &= 2\pi \underbrace{\frac{dx^2}{\lambda \Delta z}}_{= *}, \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}(I/I_0 - 1)}{|\mathbf{k}_{\perp}^0|^2} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Dabei wurde der einheitenlose reziproke Vektor  $\mathbf{k}^0_\perp = dx \cdot \mathbf{k}_\perp$  definiert, wobei  $dx$  die Pixelgröße bzw. Strukturgröße des Systems beschreibt. Der mit \* markierte Term stellt eine Form der Fresnelzahl  $F' = \frac{dx^2}{\lambda \Delta z}$  für die Pixelgröße  $dx$  dar, so dass sich Gleichung (34) komplett einheitenlos, nur von der Fresnelzahl und der gemessenen Intensität abhängig schreiben lässt [4]:

$$\phi(x, y) = 2\pi F' \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}(I/I_0 - 1)}{|\mathbf{k}^0_\perp|^2} \right) \quad (35)$$

In der Herleitung für die Rekonstruktionsformel (35) steckt die Annahme eines reinen Phasenobjekts, wodurch sich eine Singularität bei  $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{0}$  ergibt. Dieses Problem kann dadurch umgangen werden, dass in Gleichung (35) der Nenner regularisiert wird [5]. Dies führt zu einer in der Praxis gebräuchlicheren Rekonstruktionsformel, die durch den empirisch wählbaren Parameter  $\alpha$  auch für schwach absorbierende Objekte gültig ist:

$$\boxed{\phi(x, y) = 2\pi F' \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}(I/I_0 - 1)}{|\mathbf{k}^0_\perp|^2 + \alpha} \right)} \quad (36)$$

Eine quantitativerere Rekonstruktionsformel ergibt sich unter der Annahme, dass das Objekt nur aus einem Material besteht [6]. Dabei vereinfacht sich die Darstellung stark dadurch, dass im gesamten Objekt nur ein Brechungsindex vorliegt, also  $\beta(\mathbf{r}) = \beta$  und  $\delta(\mathbf{r}) = \delta$  ist. Die im folgenden kurz skizzierte Herleitung basiert darauf, nicht die Phasen zu rekonstruieren, sondern die projizierte Dicke  $T(\mathbf{r}_\perp)$  als zentrales Element zu rekonstruieren. Die Intensitäten verhalten sich dabei mit dem **linearen Absorptionskoeffizienten**  $\mu = 2k\beta$  gemäß dem Lambert-Beer'schen Gesetz:

$$I(\mathbf{r}_\perp, 0) = P(\mathbf{r}_\perp) e^{-\mu T(\mathbf{r}_\perp)} \quad (37)$$

wobei hier angenommen wurde, dass sich ein Objekt der Dicke  $d$  zwischen  $z \in [-d, 0]$  befindet. Für den Phasenschub, der durch so ein Objekt verursacht wird gilt analog:

$$\phi(\mathbf{r}_\perp, 0) = -k\delta T(\mathbf{r}_\perp) \quad (38)$$

Setzt man diese Terme in die TIE (20) ein, so ergibt sich nach einigen Vereinfachungen die folgende Differentialgleichung

$$-\kappa P(\mathbf{r}_\perp) (\nabla_\perp^2 e^{-\mu T(\mathbf{r}_\perp)}) = \frac{\partial I(\mathbf{r})}{\partial z} \approx \frac{I(z) - I_0}{z} \quad (39)$$

Diese Gleichung stellt nun eine Differentialgleichung für den Ausdruck  $e^{-\mu T(\mathbf{r}_\perp)}$  dar, die analog zu (26) mit den Pseudo-Differential Operatoren gelöst werden kann. Aus der projizierten Dicke lassen sich dann Absorption und Phase gemäß (37) und (38) errechnen. Es ergibt sich letztendlich als Rekonstruktionsformel für die Phasen der folgende Ausdruck:

$$\boxed{\phi(r_\perp, 0) = \frac{\kappa}{2} \cdot \ln \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}(I(\mathbf{r}_\perp, \Delta z)/I_0)}{\left( \frac{\kappa}{4\pi F_1} |\mathbf{k}^0_\perp|^2 + 1 \right)} \right)} \quad (40)$$

Hier steht  $\kappa = \delta/\beta$  für das Verhältnis des Dekrements und des Extinktionskoeffizienten und  $F_1 = \frac{dx^2}{\lambda \Delta z}$  für die pixelgrößenabhängige Fresnelzahl. Bei genauem Betrachten fällt auf,

dass Gleichung (40) und (36) im Fourierraum eine ähnliche Struktur besitzen, so dass die empirische Regularisierung implizit die Annahme erzwingt, dass das Objekt nur aus einem Material besteht.

Die Programme zur Phasenrekonstruktion werden als MATLAB Funktionen zur Verfügung gestellt und die Rekonstruktion der einzelnen Bilder stellt einen wesentlichen Teil der Versuchsaufgaben dar.

## 5 Tomographie

Als Computer-Tomographie (CT) bezeichnet man eine Bildgebungsmethode, bei der durch eine Messung aus verschiedenen Winkeln ein dreidimensionales Objekt rechnerisch am Computer aus den einzelnen Projektionen rekonstruiert werden kann. Diese minimal invasive Untersuchungsmethode ist z.B. in der medizinischen Diagnostik oder der Materialprüfung sehr hilfreich. Die mathematische Grundlage der Computer-Tomographie bildet die Radontransformation [7], die die Bildentstehung der Projektionen beschreibt. Die theoretischen Grundlagen der Tomographie werden hier nur grob behandelt.

### 5.1 Radontransformation

Zur Vereinfachung kann man sich auf eindimensionale Projektionen von zweidimensionalen Objekten beschränken, d.h. wir betrachten lediglich eine zweidimensionale Ebene  $f(x, y)$  durch das durchleuchtete Objekt, welche senkrecht zur Drehachse entlang  $z$  liegt (beachte, dass das Koordinatensystem sich im Gegensatz zur vorherigen Theorie verändert hat und die  $z$ -Richtung nun senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Röntgenstrahlen steht). Um das dreidimensionale Volumen zu rekonstruieren werden später lediglich alle zweidimensionalen Ebenen zusammengeführt (siehe Abb. 7). Die Radontransformation beschreibt die Entstehung einer eindimensionalen Projektion  $Rf(r, \alpha)$  für einen festen Winkel  $\alpha$ , wie in Abbildung 6 verdeutlicht wird. Aufgrund der schwachen Wechselwirkung der Strahlung mit Materie lässt sich daraus direkt auf die Dicke des Objekts schließen. Nimmt man für viele Winkel verschiedene Projektionen auf, so lässt sich aus diesen Projektionen die zweidimensionale Verteilung  $f(x, y)$  rekonstruieren. Die Projektion der zweidimensionalen Fläche auf eine eindimensionale Projektion lässt sich mathematisch mit der Radontransformation beschreiben, welche das Linienintegral über  $f$  entlang einer festen Richtung  $\alpha$  bildet:

$$R_\alpha f(r) := Rf(r, \alpha) := \int f(\mathbf{x}) \delta_D(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_\alpha - r) d\mathbf{x} \quad (41)$$

Dabei ist  $\mathbf{n}_\alpha$  der Normalenvektor zur Geraden mit Winkel  $\alpha$ . Durch das Skalarprodukt mit dem Normalenvektor innerhalb der Delta-Distribution wird gewährleistet, dass nur Werte von  $f(\mathbf{x})$  einen Beitrag zu  $Rf(r, \alpha)$  liefern, die auf einer Geraden mit Winkel  $\alpha$  liegen und den Abstand  $r$  zum Ursprung haben. Mit dieser Art der Definition lässt sich die Radontransformierte auch leicht auf höherdimensionale Räume verallgemeinern. Trägt man die Radontransformierten eines einzelnen Punktes über den Winkel auf, so erhält man eine Sinuskurve. Da alle Bilder als Überlagerung von Punkten interpretiert werden können, ist die

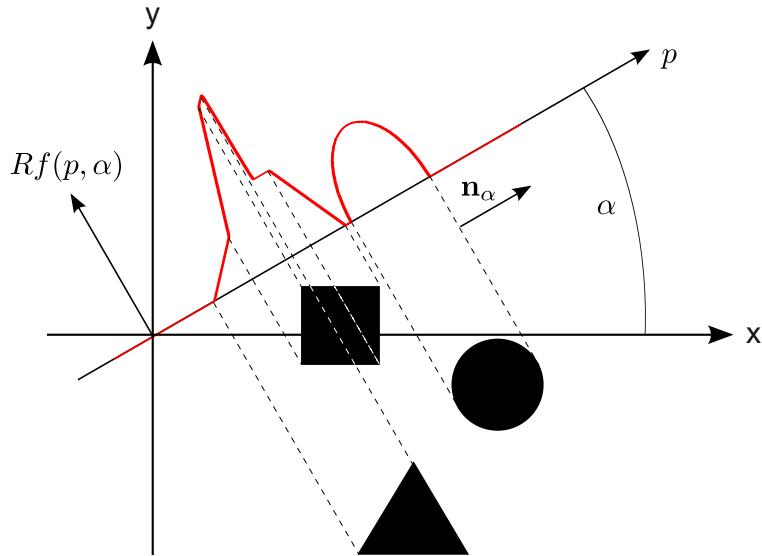


Abbildung 6: Veranschaulichung der Radon Transformation. Ein Objekt im Realraum  $(x, y)$  wird unter einem festen Winkel  $\alpha$  von parallelen Strahlen beleuchtet. Die Strahlen wechselwirken dabei so mit dem Objekt, dass aus dem Signal auf die integrierte Dicke der Objekte entlang dieser Linien geschlossen werden kann. Für verschiedene Abstände entlang der Linie  $r$  ergibt sich so das Signal  $Rf(r, \alpha)$ .

Radontransformierte eines komplexeren Bildes eine Überlagerung von verschiedenen Sinuskurven. Daher wird für eine Darstellung der Radontransformierten über den Winkeln auch häufig der Begriff **Sinogramm** verwendet (vgl. Abbildung 7).

## 5.2 Gefilterte Rückprojektion

Eine weit verbreitete Methode für die Rekonstruktion der zweidimensionalen Funktion  $f(x, y)$  aus den aufgenommenen Projektionen  $Rf(r, \alpha)$  kann durch die Rückprojektion der Radontransformierten hergeleitet werden. Dazu definiert man zunächst die partielle Rückprojektion einer Radontransformierten  $g(r, \alpha) := Rf(r, \alpha)$

$$R_\alpha^\# g(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_\alpha, \alpha) \quad (42)$$

Die Definition in Gleichung (42) kann man sich anschaulich so vorstellen, dass ein Wert der Radontransformierten an jede Position entlang einer Geraden mit Winkel  $\alpha$  geschrieben wird, die Projektion also in den zweidimensionalen Raum "zurück geschmiert" wird (siehe Abb. 7). Zur Rekonstruktion der zweidimensionalen Funktion  $f(x, y)$  werden dann alle partiellen Rückprojektionen aus den verschiedenen Winkeln aufaddiert:

$$R^\# g(\mathbf{x}) := \int g(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_\alpha, \alpha) d\mathbf{n}_\alpha \quad (43)$$

Führt man diese Rückprojektionen für alle Winkel aus, so unterscheiden sich die rückprojizierten und ursprüngliche Funktion  $f(x, y)$  stark voneinander. Insbesondere werden niedrige Frequenzen zu stark verstärkt, was die Bilder unscharf wirken lässt (siehe Abb. 7). Eine Lösung dieses Problems kann durch folgende Überlegungen motiviert werden.

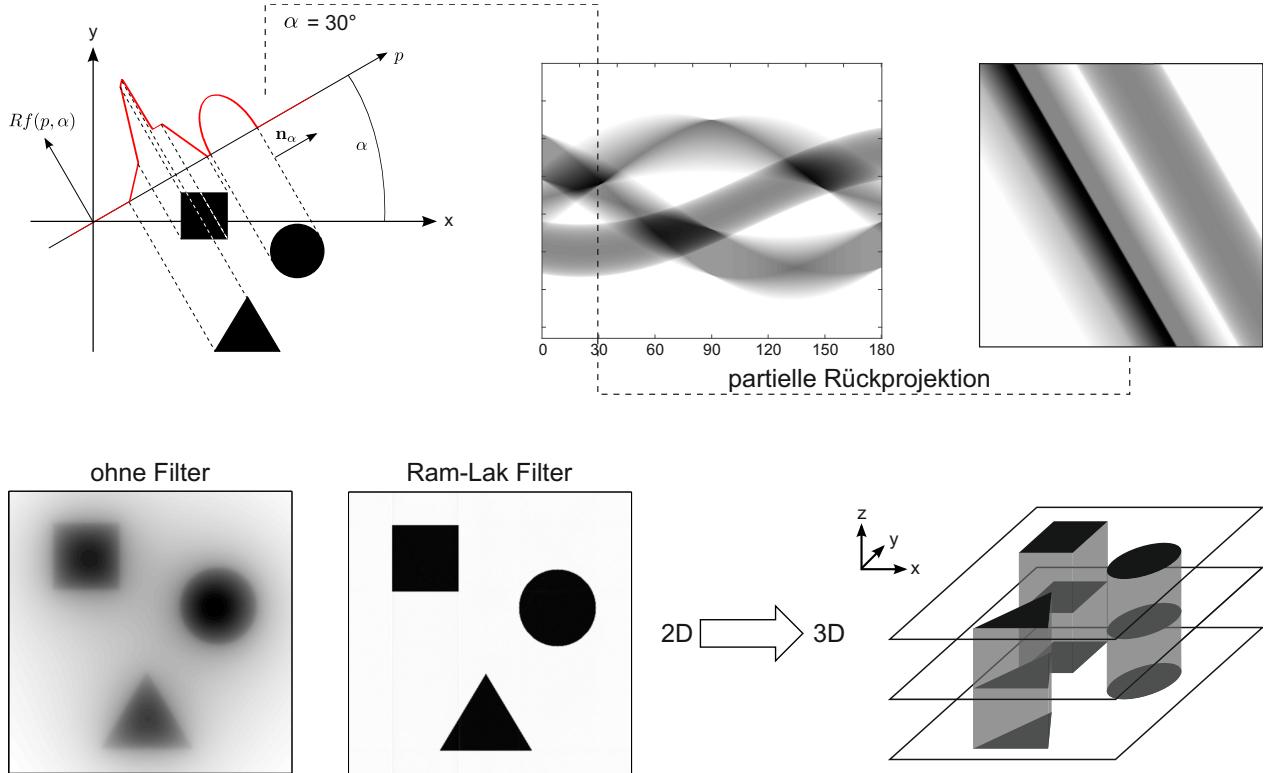


Abbildung 7: Veranschaulichung der 3D Bildgebung. Für jede Ebene entlang der Rotationsachse  $z$  wird ein Satz von Projektionen für jeden Winkel aufgenommen, die zusammen ein sog. Sinogramm ergeben. Jedes Sinogramm kann durch eine inverse Radontransformation zu einer 2D Ebene für eine spezielle  $z$ -Position rekonstruiert werden, welche übereinander gestapelt wieder das 3D Objekt ergeben. Für die Rekonstruktion der einzelnen Ebenen ist jedoch die Methode der Rückprojektion entscheidend für die Qualität der Rekonstruktion. So führt eine einfache partielle Rückprojektion (oben rechts gezeigt) aller Winkel ohne Filterung zu einem verschwommenen Ergebnis, da niedrige Frequenzen hier verstärkt werden.

Man betrachte die Rückprojektion einer Radontransformierten  $(Rf)(r, \alpha)$ , die mit einem Filterkern  $h(r)$  gefaltet wird. Die Faltung wirkt dabei im Folgenden immer nur auf die erste Koordinate der Radontransformierten und nicht auf den Winkel.

$$R^\# (h * Rf(r, \alpha))(\mathbf{x}) = R^\# \left( h * \int f(\mathbf{z}) \delta(\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}_\alpha - r) d\mathbf{z} \right) \quad (44)$$

Führt man die Faltung aus und setzt die Definition der Rückprojektion (43) ein, so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu:

$$\begin{aligned} R^\# (h * Rf(r, \alpha))(\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{n}_\alpha \int d\mathbf{z} (h(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_\alpha - \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}_\alpha) f(\mathbf{z})) \\ &= \int d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) \underbrace{\int d\mathbf{n}_\alpha h((\mathbf{x} - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{n}_\alpha)}_{=(R^\# h)(\mathbf{x} - \mathbf{z})} \end{aligned} \quad (45)$$

Dabei wurden im letzten Schritt lediglich die Integrationsgrenzen vertauscht und  $\mathbf{n}_\alpha$  innerhalb des Skalarprodukts ausgeklammert. Der hintere Term in Gleichung (45) entspricht der

Rückprojektion des Faltungskerns  $h(r)$ . Damit lässt sich Gleichung (45) wieder als Faltung schreiben, so dass insgesamt folgt:

$$R^\# (h * Rf)(\mathbf{x}) = (f * R^\# h)(\mathbf{x}) \quad (46)$$

Gleichung (46) kann nun zur Herleitung der Gefilterten Rückprojektion verwandt werden. Findet man einen Faltungskern  $\tilde{h}(r)$ , so dass  $R^\# \tilde{h} \approx \delta(\mathbf{x})$ , dann ist die Faltung auf der rechten Seite von Gleichung (46) eine Faltung mit einer Delta-Distribution, was die Identitätsoperation der Faltung darstellt. Die Rekonstruktion verläuft im Detail dann so, dass die Projektionen mit einem Filter bearbeitet werden und die gefilterten Projektionen zurück projiziert werden. Es existieren verschiedene Filter, die im Rahmen der benötigten Genauigkeit die Bedingung  $R^\# \tilde{h} \approx \delta(\mathbf{x})$  erfüllen (zum Beispiel der so genannte Ram-Lak Filter, welcher für die Rekonstruktion in Abb. 7 verwendet wurde). In MATLAB ist die gefilterte Rückprojektion mit verschiedenen Filtern als fertige Funktion (iradon) implementiert, welche für den Versuch genutzt wird.

## 6 Versuchsaufbau und Durchführung

### 6.1 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau besteht im wesentlichen aus drei Teilen, welche in Abbildung 8 gezeigt sind. Im einzelnen sind dies eine Mikrofokus Röntgenquelle, ein vollständig motorisierter Probenturm (siehe Abb. 9) und eine Röntgenkamera. Die Röntgenquelle besteht aus einem Teil, in dem freie Elektronen in einer Kathode erzeugt werden welche mit ca. 70 kV beschleunigt werden und dann auf eine Anordnung magnetischer Linsen trifft, die den Strahl ausrichten und fokussieren. Im hinteren Teil der Quelle befindet sich ein Flüssigmetall-Target aus der bei Raumtemperatur flüssigen Metallegierung Galinstan (68.5% Gallium, 21.5% Indium und

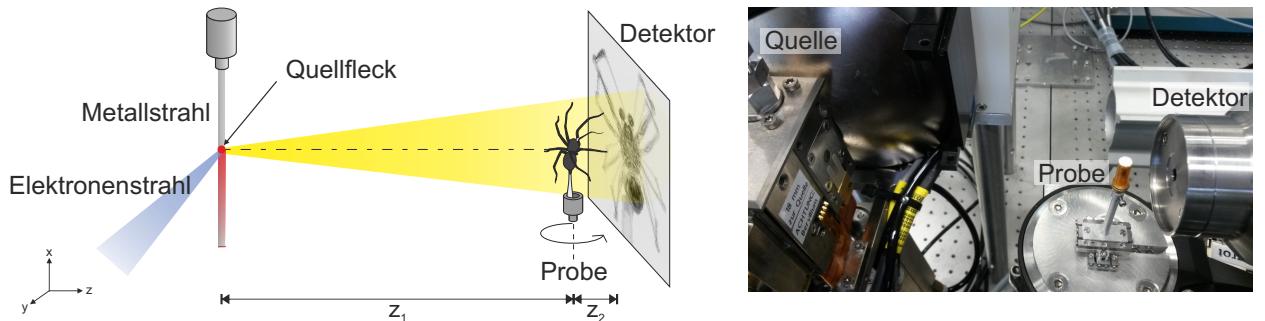


Abbildung 8: *Versuchsaufbau: In einer Kathode werden Elektronen ausgelöst und mit Hochspannung beschleunigt. Eine Magnetenordnung fokussiert diese Elektronen auf einen Fleck von ca. 4-10  $\mu\text{m}$  Größe auf eine Flüssigmetall-Anode aus Galinstan, hinter der sich das Austrittsfenster befindet. Der Probenturm ermöglicht die tomographische Rotation der Probe sowie die zuvorige Ausrichtung dieser in allen translatorischen Freiheitsgraden, wie in Abbildung 9 skizziert. Die Intensität der entstehenden Wellenfelder wird dann mit einem Flächendetektor aufgenommen.*

10% Zink). Dieses wird im Betrieb kontinuierlich in einem Kreislauf gehalten. Aufgrund der hohen Wärmeentwicklung bei der Entstehung von Röntgenstrahlen ist bei herkömmlichen Festkörperquellen die Höhe des Elektronenstroms durch den Schmelzpunkt des Anodenmaterials begrenzt. Insbesondere bei kleinen Fokusgrößen können so nur wenige Photonen generiert werden, da es andernfalls zum Schmelzen des Anodenmaterials kommen würde. In Flüssigmetallquellen können bei gleichen Fokusgrößen mehr Photonen erzeugt werden, da die Anode bereits in geschmolzener Form vorliegt. Durch die kontinuierliche Bewegung des Metalls innerhalb der Quelle wird das Anodenmaterial einerseits ständig erneuert, was eine Elektronenleistungsdichte erlaubt, welche zu Verdampfungen im Metallstrahl führen kann, und der stationären Wärmeentwicklung kann andererseits aufgrund der hohen Fließgeschwindigkeiten entgegengewirkt werden. Die erzeugte Röntgenstrahlung tritt letztlich durch ein Berylliumfenster aus und trifft auf die Probe. Zu beachten ist, dass die Motorpositionen von z.B. sx den Abstand der Quelle zur Drehachse angeben. Die Propagationsdistanz ergibt sich letztlich als Differenz zwischen dem Abstand Quelle - Detektor  $z_1 + z_2$  und dem Abstand Quelle - Probe  $z_1$  und dient am Ende zum Errechnen der effektiven Propagationsdistanz gemäß dem Fresnelschen Skalen Theorem.

## 6.2 Steuerung des Experiments

Da die Röntgenstrahlung gesundheitsschädlich ist, darf sich während des Betriebs der Quelle keine Person in der Experimentierhütte aufhalten. Alle Manipulationen an Proben oder Kameras geschehen daher motorisiert und werden über ein Netzwerk gesteuert.

### Motorsteuerung und Bildaufnahme

Die zentrale Steuerung der Motoren und Kameras geschieht mit dem Programm SPEC. Dieses Programm wird über die Konsole gesteuert und die wichtigsten Befehle sind in Tabelle 1

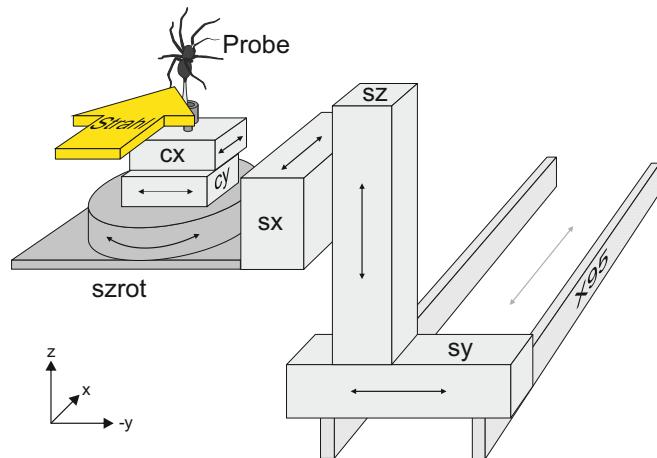


Abbildung 9: Veranschaulichung der Freiheitsgrade des Probenturms an JuLiA. Der Probenkopf ist auf einer Metallschiene (X-95 Rohr) in x-Richtung verfahrbar angeschraubt. Fünf Translationen ermöglichen das exakte Einjustieren und Positionieren der Drehachse sowie der Probenposition relativ zur Drehachse während des Betriebs. Der gelbe Pfeil kennzeichnet die Ausbreitungsrichtung der Röntgenstrahlung.

Tabelle 1: Die wichtigsten Befehle für das Steuerprogramm SPEC

Befehl	Funktion
(u)mv motor value	Fährt den entsprechenden Motor absolut auf den in <code>value</code> angegebenen Wert
(u)mvr motor value	Fährt einen motor relativ um seine aktuelle Position
wa	Gibt alle Motorpositionen zurück
ct zeit	Nimmt an einem Punkt für <code>zeit</code> Sekunden ein Bild auf
mat_setupflat	Startet einen Assistenten zum Einstellen der Leerbildposition
mat_newflat anzahl zeit	Nimmt ein neues Leerbild auf, wozu <code>anzahl</code> Bilder á <code>zeit</code> Sekunden gemittelt werden.
mat_autocontrast	Ermöglicht im Matlab Liveviewer den Kontrast auf eine bestimmte Region zu optimieren.
mat_caxis	Setzt den mit autocontrast eingestellten Wert zurück und skaliert die Bilder automatisch.
mat_pixelsize	Funktion zur Bestimmung der effektiven Pixelgröße
mat_align_rotaxis	Funktion zur Vereinfachung der Drehachsenjustage
mat_align_nick	Funktion zur Vereinfachung der Drehachsenjustage
tomo_setup	Startet einen Assistenten zum Einstellen des tomographischen Scans
tomo_scan name	Tomo Scan starten

dargestellt. „motor“ wird dabei durch den entsprechenden Motornamen (siehe Abbildung 9) ersetzt. Zusätzlich zu den in Abbildung 9 gezeigten Motoren ist die Kamera noch motorisiert (mit den Translationen `dety` und `detz`), um möglichst mittig im Strahlzentrum zu stehen.

## Steuerung der Röntgenquelle

Die Röntgenquelle wird über das Programm „Excillum JXS HMI“ gesteuert (siehe Abbildung 10). Sie ermöglicht unter anderem das Ein- und Ausschalten des Elektronenstroms sowie die Justage des Elektronenstrahls. Der Elektronenstrahl kann dabei nur eingeschaltet werden, wenn die beiden Türen der Vollschatzhütte geschlossen wurden. Dadurch erhält das Sicherheitssystem Strom. Wenn beim Einschalten des Geräts das sogenannte Interlock System (die Türen) nicht geschlossen war lässt sich die Quelle nicht einschalten. Es gibt dann im Reiter „Log“ eine Fehlermeldung. Im ausgeschalteten Zustand befindet die Quelle im „Ready“ Modus, d.h. der Elektronenstrahl ist ausgeschaltet, aber der Metallstrahl wird kontinuierlich durch die Anlage gepumpt und das Vakuum ist stabil. Es gibt nun verschiedene Parameter die eingestellt werden können:

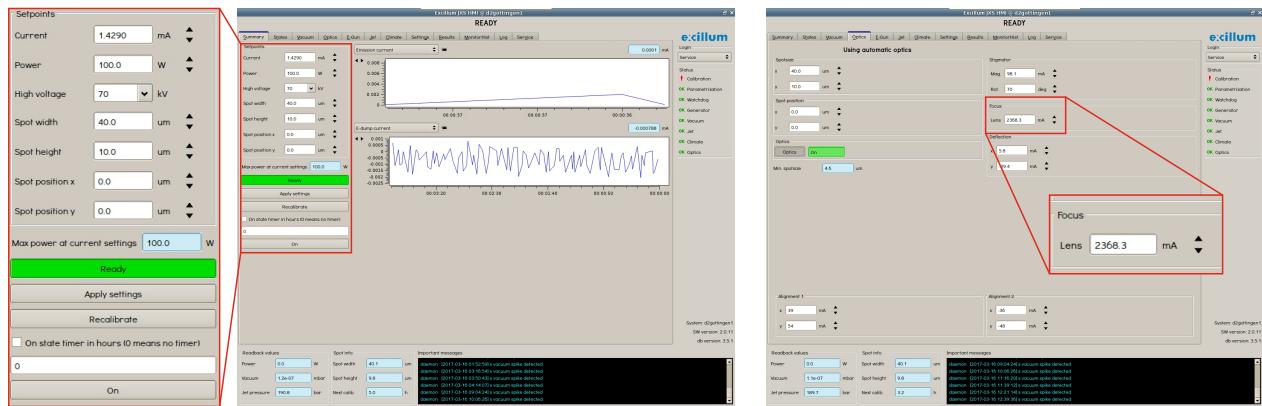


Abbildung 10: Software für die Steuerung der Röntgenquelle

- **Power:** diese bestimmt die Größe des Elektronenstroms (in der Software mit "Current" bezeichnet) und ist das Produkt aus Beschleunigungsspannung und Strom; bei 70 kV Beschleunigungsspannung ist die maximale Leistung um den Faktor 10 größer als die Spothöhe
- **High Voltage:** Beschleunigungsspannung der Elektronen; maximal 70 kV
- **Spot width:** Breite des Elektronenfokus; maximal 4-mal so groß wie die Spothöhe; durch die Verbreiterung des Fokus wird lediglich die Anzahl der generierten Photonen entlang der optischen Achse erhöht, in der Projektion bleibt die Größe des Quellflecks konstant
- **Spot height:** Höhe des Elektronenfokus; hierdurch wird die Größe des Quellflecks in vertikaler Richtung bestimmt, in horizontaler Richtung ist die Eindringtiefe der Elektronen in die Anode entscheidend; insgesamt ist der Quellfleck in etwa kreisförmig
- **Spot position x:** verschiebt den Elektronenfokus entlang der optischen Achse; mittig auf dem Metallstrahl ist der Quellfleck in horizontaler Richtung minimal, jedoch kommt es zu erhöhter Selbstabsorption im Anodenmaterial (siehe Abb. 11)
- **Spot position y:** verschiebt den Elektronenfokus in der Höhe

Die Quelle wird über die Schaltfläche "on" eingeschaltet. Die vorgegebenen Fokusgrößen können über eine Kalibrationsroutine von der Software eigenständig eingestellt werden. Dieser Schritt wird automatisch alle 24 h sowie nach einer Änderung der Parameter durchgeführt.

### Justage der Elektronenoptik

Die Größe des Elektronenfokus auf dem Metallstrahl und somit des Quellflecks für die Photonen hat einen großen Einfluss auf die Auflösung des Röntgenaufbaus. Eine quellfleckgröße

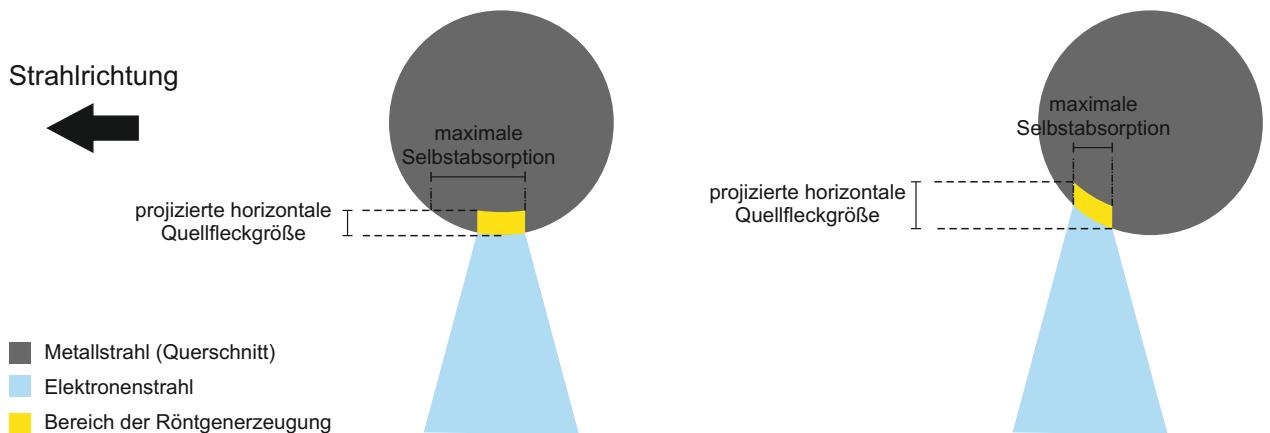


Abbildung 11: Skizze zum Einfluss der Elektronenstrahlposition entlang der optischen Achse. Mittig auf dem Metallstrahl ist der projizierte Quellfleck minimal, jedoch kommt es zu erhöhter Selbstabsorption. Verschiebt man den Elektronenstrahl in Richtung des Austrittsfensters wird die Selbstabsorption verringert, sodass mehr Photonen die Quelle verlassen, jedoch wird dadurch der Quellfleck in horizontaler Richtung vergrößert.

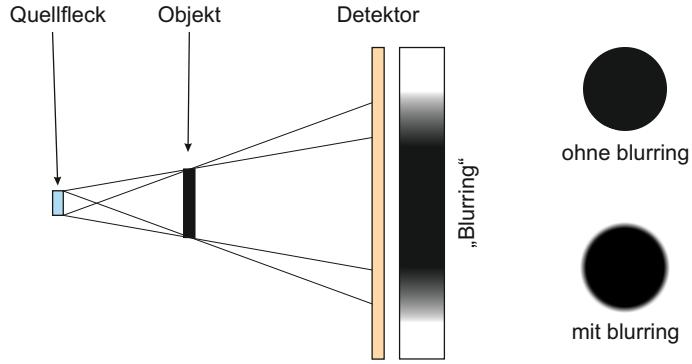


Abbildung 12: Einfluss des endlich großen Quellflecks: Betrachtet man jeden Punkt innerhalb der Quelle als Punktquelle, so wird das Bild in der Detektor-Ebene durch eine Überlagerung der einzelnen Strahlengänge beschrieben, was zu einer Verschmierung (engl. „blurring“) des Bildes führt. Diese Verschmierung lässt Kanten unscharf erscheinen und verringert die Sichtbarkeit feiner Strukturen.

von etwa  $6 \mu\text{m}$  führt zu Auflösungen im Bereich von  $3 \mu\text{m}$ . Der Grund für die limitierte Auflösung liegt daran, dass in der als inkohärent zu betrachtenden Quelle an jedem Punkt zufällig Röntgenstrahlen erzeugt werden, die alle zur Bildentstehung beitragen. Betrachtet man die äußersten Strahlen, so ergibt sich hinter einem Objekt neben Bereichen, die unter jedem Winkel dunkel erscheinen ein Halbschattenwurf durch teilweise beleuchtete Bereiche (siehe Abb. 12). Mathematisch lässt sich die Bildentstehung mit einem endlichen Quellfleck als Faltung zwischen dem realen Bild und einer so genannten Punktspreizfunktion (engl. point spread function, PSF) beschreiben. Diese beschreibt, wie ein einzelner Punkt in der Objektebene auf dem Detektor abgebildet wird. Bei nicht idealen Detektoren spielt zusätzlich die PSF des Detektors eine Rolle. Typische Werte für die PSF der hier benutzten Detektoren sind ca. 2 Pixel. Die Abstände von Quelle zu Probe und Detektor sollten also so gewählt sein, dass die durch die geometrische Vergrößerung erreichbaren effektiven Pixelgrößen in etwa der halben Quellfleckgröße entsprechen oder leicht darunter liegen, um die maximale Auflösung zu erreichen.

### 6.3 Versuchsdurchführung

Zunächst soll der Effekt der Fokusgröße auf die Auflösung mithilfe einer Teststruktur untersucht werden. Im Anschluss wird an eine Probe aus Polystyrolkugeln die Phasenkontrast-Bildentstehung durch freie Propagation in zwei Dimensionen verdeutlicht und ein Tomogramm von einer biologischen Probe, welche selbst mitgebracht werden kann, aufgenommen. Zur Auswertung gehört die Phasenrekonstruktion der zweidimensionalen Bilder und die Quantifizierung des Effekts der verschiedenen Propagationsdistanzen auf die Bildqualität sowie die tomographische Rekonstruktion der mitgebrachten Probe inklusive der Phasenrekonstruktion für alle aufgenommenen Projektionen. Auch eine anschließende geeignete Visualisierung der dreidimensionalen Daten ist Teil der Auswertung.

## Justage des Elektronenstrahls

Die Größe des Elektronenfokus und somit die Größe des Quellflecks wird von der Steuersoftware der Quelle eigenständig durchgeführt. Um den Einfluss dieser Größe auf die Auflösung zu bestimmen wird eine Teststruktur (JIMA) auf den Probenturm gesetzt, die Linien mit verschiedenen Periodizitäten von 15 µm bis zu einigen 100 nm enthält, und der Fokusstrom variiert (siehe Abb. 10 rechts). Dadurch verändert sich die Lage des Fokuspunkts und die Größe des Elektronenfokus auf dem Metallstrahl. Die ungefähre Größe des Quellflecks kann aus der Sichtbarkeit der Linien bestimmt werden. Überlegen Sie sich, wie groß die effektive Pixelgröße sein sollte, um abhängig von der eingestellten Fokusgröße die maximale Auflösung zu erzielen. Notieren Sie sich den Wert für den idealen Fokusstrom, welcher von der Software bestimmt wurde und variieren Sie ihn anschließend im Bereich -100 mA bis 100 mA . Finden Sie den Wert mit der maximalen Auflösung. Stimmt er mit dem ursprünglichen Wert überein?

## Entstehung von Phasenkontrast Bildern am Beispiel einer Testprobe

- Mit einer Probe aus Polystyrolkugeln wird anschließend die Entstehung von Phasenkontrast getestet. Dazu wird die Kamera direkt hinter dem Probenturm platziert und ausgehend von kleinen Propagationsdistanzen, bei denen das Objekt möglichst nah an der Kamera ist, der Abstand zur Kamera langsam erhöht (durch Verfahren mit sx). Durch die Faseroptikplatte und den Szintillator im Detektor werden Artefakte im Bild zu erkennen sein. Um die Qualität der Daten zu erhöhen wird ein Leerbild aufgenommen, also ein Bild bei dem die Probe aus dem Strahl entfernt ist, und alle nachfolgenden Bilder werden durch dieses Leerbild geteilt. Die Leerbildkorrektur kann z.B. in ImageJ oder in MATLAB erfolgen. Die Leerbildkorrektur erzeugt außerdem die für die Phasenrekonstruktion benötigte Größe  $I/I_0$ .

## Drehachsenjustage

Für eine artefaktfreie tomographische Rekonstruktion muss die Drehachse sorgfältig justiert werden. Dabei muss einerseits die Achse so positioniert werden, dass sie sich in der Mitte des Bildes befindet, andererseits muss sie durch Justage des Nick / Pitch Winkels senkrecht zur optischen Achse liegen (Abb. 13,  $\theta$  muss verschwinden). Dies kann durch Verfahren des Detektors erfolgen. Die Justage besteht insgesamt aus folgenden Schritten:

- (i) Das Gitter wird auf den Probenhalter gesetzt und mit den Motoren cx und cy so positioniert, dass es sich in etwa mittig auf dem Detektor befindet.
- (ii) Die Drehachse wird mit dem Motor sy mittig zum Detektor platziert. Dazu dient die Funktion `mat_align_rotaxis`, die ein Bild bei 0° und 180° zueinander korreliert und die relative Verschiebung bestimmt.
- (iii) Das Gitter wird nun unter 90° präzise in der Drehachse justiert, um Kegelstrahl Artefakte zu verhindern. Dann kann Schritt (ii) nochmal wiederholt werden.

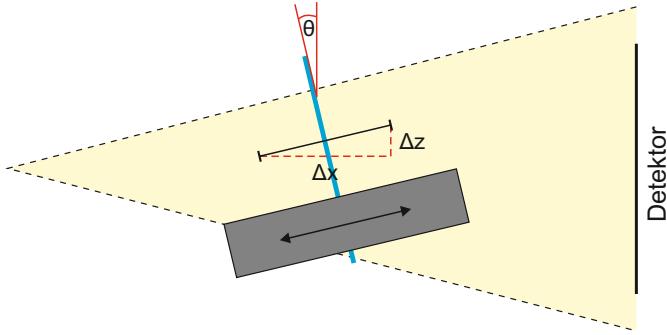


Abbildung 13: Verdeutlichung des Nick/Pitch Winkels  $\theta$ . Steht die Drehachse nicht senkrecht zur optischen Achse führt ein Verfahren entlang des Strahl um  $\Delta x$  zu einer Höhenverschiebung  $\Delta z$ . Diese kann zur Justage des Nick/Pitch Winkels verwendet werden.

- (v) Zur Justage des Nick-Winkels wird das Gitter mit einem Motor oberhalb der Drehachse ( $cx$ ) entlang des Strahls verfahren. Die Funktion `mat_align_nick` hilft bei der Justage. Äquivalent zum Kippen der Drehachse ist ein Verfahren des Detektors, so dass dieser entsprechend verfahren wird.
- Mit dem Justage Gitter kann auch der Detektorabstand bestimmt werden. Dazu dient die Funktion `mat_pixelsize`.

## Tomographie

- Im letzten Teil wird eine selbst mitgebrachte Probe tomographiert und ein 3D Modell der Probe am Computer erzeugt. Damit alles gut klappt muss die Probe gewisse Randbedingungen grob erfüllen (siehe Abschnitt *Limitierungen an die Probe*).
  - Der gewünschte Bereich der Probe wird dann mit den entsprechenden Motoren ( $sz$ ,  $cx$ ,  $cy$ ) unter  $0^\circ$  und unter  $90^\circ$  in die Mitte des Detektors (und somit in die Drehachse) verschoben.
  - Ein tomografischer Scan wird mit den Funktionen `tomo_setup` und `tomo_scan` durchgeführt. Entsprechende Auswerteskripte, die auf den Laborrechnern Snowball und Tybalt sofort lauffähig sind, werden automatisch erzeugt.

**Limitierungen an die Probe** Für den Versuch steht eine moderne Röntgen Kamera zur Verfügung. Diese besteht aus einer Kamera auf dessen sCMOS über eine Faseroptikplatte ein Szintillator gekoppelt ist. Der Szintillator wandelt dabei die Röntgenphotonen in optische Photonen um, welche von der Kamera detektiert werden können. Die Kamera hat eine reale Pixelgröße von  $6.54 \mu\text{m}$  wobei durch die geometrische Vergrößerung effektiv eine Pixelgröße im Bereich von weniger als  $3\mu\text{m}$  erreicht wird. Damit ist die maximale Größe des Gesichtsfelds bei  $2048 \times 2048$  Pixeln auf ca.  $6 \times 6 \text{ mm}^2$  limitiert. Von größeren Proben können also nur Ausschnitte aufgenommen werden.

Ein anderer limitierender Faktor für die Probengröße ist die Energie der Röntgenstrahlung. Die  $K_\alpha$ -Linie von Gallium liegt bei  $9.25 \text{ keV}$ , was etwa ein Viertel des Spektrums ausmacht.

Bei dieser Energie wird durch 1 cm Wasser fast die gesamte Strahlung absorbiert. Leichte Kunststoffe absorbieren tendenziell weniger und Metalle sowie dichtere Kunststoffe (z.B. Teflon) mehr. Durch Phasenkontrast lassen sich insbesondere schwach absorbierende Materialien gut abbilden, was bei der Auswahl einer eigenen Probe zu beachten wäre. Gut eignen sich z.B. kleine Insekten.

## 6.4 Fragen zur Vorbereitung

Bitte gehen Sie in Ihrer Darstellung der theoretischen Grundlagen auf folgende Fragen ein:

1. Wie funktioniert die Erzeugung von Röntgenstrahlung? Welche Arten der Strahlung treten auf? Was für ein Spektrum erwarten Sie bei einem Galinstan Target mit 70 kV Beschleunungsspannung der Elektronen?
2. Warum ist es sinnvoll Phasenkontrast für die Bildgebung zu nutzen? Welchen Einfluss hat der Phasenkontrast auf die aufgenommenen/rekonstruierten Bilder?
3. Wie entsteht Phasenkontrast durch freie Propagation?
4. Wie funktioniert die Phasenrekonstruktion im Regime des direkten Kontrasts? Wie wirkt sich der Regularisierungsparameter  $\alpha$  auf das rekonstruierte Bild aus?
5. Welchen Einfluss hat die Polychromasie der Röntgenstrahlung auf die Bildentstehung und deren Rekonstruktion?
6. Wie funktioniert Tomographie?
7. *Optional:* Machen Sie sich vor dem Versuch mit der Phasenrekonstruktion an simulierten Daten vertraut. Ein Matlab Skript zur Erzeugung und Rekonstruktion der Daten finden Sie unter:  
<http://www.roentgen.physik.uni-goettingen.de/~mtoepperwien/Praktikum/>

## Übungsaufgabe:

Machen Sie sich den Zusammenhang zwischen dem empirisch gewählten Regularisierungsparameter  $\alpha$  aus Gleichung (36) und dem Verhältnis aus Dekrement und Imaginärteil des Brechungsindizes  $\kappa = \delta/\beta$  aus Gleichung (40) klar. Begründen Sie den Zusammenhang mathematisch.

**Für das schriftliche Protokoll sollte der Theorienteil einen Umfang von ca. 4 Seiten nicht überschreiten und keine detaillierte Wiederholung der Versuchsanleitung sein, sondern er soll zeigen, dass die theoretischen Grundlagen verstanden wurden!**

# 7 Versuchsaufgaben und Auswertung

## 7.1 Kugeln

Für die Auswertung der Kugeldaten steht ein Matlab Skript bereit, dass bereits viele Aufgaben übernimmt:

<http://www.roentgen.physik.uni-goettingen.de/~mtoepperwien/Praktikum/>

- Errechnen Sie die richtigen Fresnelzahlen basierend auf den Abstandsmessungen und der Wellenlänge für die Gallium  $K_{\alpha}$ -Strahlung ( $E = 9.25\text{keV}$ ,  $\lambda[\text{\AA}] = 12.398/E[\text{keV}]$ )
- Verdeutlichen Sie **qualitativ** den Effekt des stärker werdenden Phasenkontrast anhand von Intensitätsprofilen für verschiedene Fresnelzahlen (= Propagationsdistanzen)
- Führen Sie für die verschiedenen Abstände die Phasenrekonstruktion gemäß Gleichung (36) durch (MATLAB Funktion `mbo()`). Da sich die Fresnelzahl für die verschiedenen Propagationsdistanzen ändert, benötigen Sie für jede Propagationsdistanz verschiedene Parameter für die Rekonstruktion.
- Ermitteln Sie das Verhältnis von  $\delta/\beta$  aus den für die Phasenrekonstruktion nötigen Regularisierungsparametern (**Übungsaufgabe**) und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den theoretisch für die Probe (Polystyrolkugeln) zu erwartenden Verhältnissen von  $\delta/\beta$ . Wie wirken sich falsche Werte auf die Rekonstruktion aus und was heißt das für Proben, die nicht aus einem Material bestehen? Literaturwerte für die verschiedenen Materialien erhalten Sie unter  
[http://henke.lbl.gov/optical\\_constants/](http://henke.lbl.gov/optical_constants/)
- **Quantifizieren** Sie den Effekt des Phasenkontrasts und die Auswirkungen auf die Qualität der resultierenden Bilder über die Bestimmung des Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) in den unrekonstruierten und den rekonstruierten Projektionen für die verschiedenen Fresnelzahlen.
- Das SNR ist definiert als:

$$SNR = A_{Signal}/\sigma_{Rauschen}$$

wobei  $A_{Signal}$  die Amplitude des zu messenden Signals ist (Differenz zwischen Luft und Kugel) und  $\sigma_{Rauschen}$  die Standardabweichung des Rauschens (z.B. im Bereich ohne Kugeln). Es ist zu beachten, dass das SNR für sehr unscharfe Bilder (zu kleine  $\alpha$ ) besser wird. Das SNR ist also nur bei bereits richtiger Wahl der Parameter ein gutes Kriterium.

## 7.2 Tomographische Rekonstruktion mit MATLAB

Da die Daten sehr groß sind (ca. 17 GB) und für die Auswertung mehrfach im Arbeitsspeicher geladen werden, empfiehlt es sich, die tomographische Auswertung auf einem der Laborrechner Snowball / Tybalt durchzuführen.

- Ein fertiges MATLAB Skript mit entsprechenden auszufüllenden Parametern wird bereitgestellt. Führen Sie die tomographische Rekonstruktion einmal mit und einmal ohne vorheriger Phasenrekonstruktion durch. Vergleichen Sie die Ergebnisse und diskutieren Sie die Beobachtungen in Hinblick auf weitere Verarbeitung der rekonstruierten Daten.

## 7.3 3D Visualisierung mit Avizo

- Zusammen mit dem Betreuer können die Rekonstruktionen dann dreidimensional an einem speziellen Auswerterechner visualisiert werden (wie z.B. das Titelbild dieser Anleitung aus [8]).

## Literatur

- [1] D. M. Paganin. *Coherent X-Ray Optics*. New York: Oxford University Press, 2006.
- [2] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Roberts & Company: Englewood, Colorado, 2005.
- [3] Michael Reed Teague. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(11):1434–1441, Nov 1983.
- [4] M. Krenkel. Quantitative Phasenkontrast Tomographie. Master's thesis, 2012.
- [5] A. Groso, R. Abela, and M. Stampanoni. Implementation of a fast method for high resolution phase contrast tomography. *Opt. Express*, 14(18):8103–8110, September 2006.
- [6] D. Paganin, S. C. Mayo, T. E. Gureyev, P. R. Miller, and S. W. Wilkins. Simultaneous phase and amplitude extraction from a single defocused image of a homogeneous object. *J. Microsc.*, 206(Pt 1):33–40, 2002.
- [7] J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Akad. Wiss.*, 69:262–277, 1917.
- [8] Martin Krenkel, Mareike Töpperwien, Christian Dullin, Frauke Alves, and Tim Salditt. Propagation-based phase-contrast tomography for high-resolution lung imaging with laboratory sources. *AIP Advances*, 6(3):035007, 2016.

**Hinweis:** Die Versuchsanleitung stellt die theoretischen Grundlagen bereits sehr ausführlich dar. Die hier angegebene Literatur zeigt teilweise die originalen Veröffentlichungen, deren detailliertes Verständnis keine Voraussetzung für den Versuch ist.