Teorema 29.1: Teorema di Peano

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, con $\dim(X) < +\infty$.
Sia $t_0 \in \mathbb{R}$.
Sia $\mathbf{x}_0 \in X$.
Sia $f : \mathbb{R} \times X \to X$ continua.

Esiste $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo con $t_0 \in I$, tale che il problema di Cauchy

$\begin{cases} u' = f(u,t) \quad \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$ ammetta soluzioni.

Teorema 29.2: Teorema di Godunov

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, con $\dim(X) = +\infty$.
Sia $t_0 \in \mathbb{R}$.
Sia $\mathbf{x}_0 \in X$.

Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \times X \to X$ continua, tale che
per ogni $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo con $t_0 \in I$, il problema di Cauchy

$\begin{cases} u' = f(u,t) \quad \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$ non ammetta soluzioni.

Teorema 29.3: Esistenza di soluzioni a problemi di Cauchy

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $c > 0$.
Siano $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in X$.

Sia $f : [a;b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, c) \to X$ una funzione uniformemente continua.
Si supponga che esiste $L > 0$ tale che
$\alpha\big(f(t, A)\big) \leq L \cdot \alpha(A)$, per ogni $t \in [a;b]$ e per ogni $A \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$.

Sia $M = \sup\limits_{(t,\mathbf{x}) \in [a;b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0,c)} \|f(t, \mathbf{x})\|$.

Sia $b^* = \min\left\{b, a + \frac{c}{M}\right\}$.

Allora, esiste $u \in C^1\big([a;b^*], X\big)$ tale che:

- $u\big([a;b^*]\big) \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$, ossia $\|u(t) - \mathbf{x}_0\| \leq c$ per ogni $t \in [a;b^*]$;
- $\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \ \ \forall t \in [a;b^*] \\ u(a) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$.

Osservazioni preliminari

$M < +\infty$.
Infatti, $f\big([a;b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)\big)$ è un insieme limitato per la [Proposizione 28.7], essendo f uniformemente continua per ipotesi su $[a;b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$ convesso e limitato.

Dimostrazione: Metodo delle approssimanti di Tonelli

Si osserva intanto che, per acquisire la tesi, è sufficiente mostrare l'esistenza di una funzione $u : [a; b^*] \to X$ continua, tale che:

- $\|u(t) - \mathbf{x}_0\| \leq c$ per ogni $t \in [a; b^*]$;

- $u(t) = \mathbf{x}_0 + \int_a^t f\big(\tau, u(\tau)\big)\, d\tau$ per ogni $t \in [a; b^*]$.

Infatti, dalla seconda condizione seguirebbe allora che $u'(t) = f\big(t, u(t)\big)$ per ogni $t \in [a; b]$, e che $u(a) = \mathbf{x}_0$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca $u_n : [a; b^*] \to \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$ come l'unica funzione tale che

$$u_n(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_0, & t \leq a + \frac{b^*-a}{n} \\ \\ \mathbf{x}_0 + \int_a^{t-(b^*-a)/n} f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau, & t > a + \frac{b^*-a}{n} \end{cases}, \text{ per ogni } t \in [a; b^*].$$

Essa è ben definita.

Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ si definiscano gli intervalli

$I_{n,i} = \big[a; a + i\frac{b^*-a}{n}\big]$;

$J_{n,i} = \begin{cases} I_{n,1}, & i = 1 \\ I_{n,i} \smallsetminus I_{n,i-1}, & i > 1 \end{cases}$; si osserva che $J_{n,1}, \ldots, J_{n,n}$ costituiscono una partizione di $[a; b^*]$, e $\mathrm{diam}(J_{n,i}) = \frac{b^*-a}{n}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.

La buona definizione della legge u_n segue dal fatto che:

- la sua legge è univocamente determinata in I_1 (in cui si ha $u_n(t) = \mathbf{x}_0$ per ogni $t \in I_1$);

- fissato $i \in \{1, \ldots, n\}$ di modo da aver individuato la legge di u_n in I_i, per ogni $t \in J_{i+1}$ si ha che $\big[a; t - \frac{b^*-a}{n}\big] \subseteq I_i$, e dunque risulta ben definita e univocamente determinata la legge di $u_n(t)$ dalla posizione

$$u_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_a^{t-(b^*-a)/n} f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau.$$

Resta da provare che il codominio di u_n è ben definito, ossia $u_n\big([a;b^*]\big) \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$, cioè $\lVert u_n(t) - \mathbf{x}_0 \rVert \leq c$ per ogni $t \in [a;b^*]$.

Fissato dunque $t \in [a;b^*]$, se $t \in I_1$ si ha $u_n(t) = \mathbf{x}_0 \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$;
se $t \notin I_1$ si ha invece che

$\lVert u_n(t) - \mathbf{x}_0 \rVert = \left\lVert \int_a^{t-(b^*-a)/n} f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau \right\rVert$	Per definizione di u_n
$\leq \int_a^{t-(b^*-a)/n} \lVert f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \rVert\, d\tau$	Per maggiorazione della norma dell'integrale di Riemann ([Proposizione 21.6])
$\leq \int_a^{t-(b^*-a)/n} M\, d\tau$	Per definizione di M e per monotonia dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali
$= M\left(t - \frac{b^*-a}{n} - a\right)$	
$\leq M(b^* - a)$	$t - \frac{b^*-a}{n} \leq b^*$ in quanto $t \in [a;b^*] \setminus I_1$
$\leq M\left(a + \frac{c}{M} - a\right) = c$	In quanto $b^* \leq a + \frac{c}{M}$ per definizione di b^*

Dunque, $u_n(t) \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$ per ogni $t \in [a;b^*]$.

Si provi ora che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni equi-(uniformemente) continue in $[a;b^*]$.

Si fissino dunque $n \in \mathbb{N}$ e $t, s \in [a;b^*]$; si supponga $s < t$.

Se $s, t \in I_1$, si ha
$\lVert u_n(t) - u_n(s) \rVert = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Se $s \in I_1 \not\ni t$, si ha

$\lVert u_n(t) - u_n(s) \rVert = \left\lVert \int_a^{t-(b^*-a)/n} f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau \right\rVert$ Per definizione di u_n

$\leq \int_a^{t-(b^*-a)/n} \left\| f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \right\| d\tau$ Per maggiorazione della norma dell'integrale di Riemann ([Proposizione 21.6])

$\leq \int_a^{t-(b^*-a)/n} M \, d\tau$ Per definizione di M e per monotonia dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali

$= M \left(t - \frac{b^*-a}{n} - a\right)$

$\leq M(t-s)$

Se $s, t \notin I_1$, si ha

$\|u_n(t) - u_n(s)\| = \left\| \int_a^{t-(b^*-a)/n} f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \, d\tau - \int_a^{s-(b^*-a)/n} f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \, d\tau \right\|$ Per definizione di u_n

$\left\| \int_{s-(b^*-a)/n}^{t-(b^*-a)/n} f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \, d\tau \right\|$ Per additività dell'integrale di Riemann rispetto all'intervallo di integrazione ([Proposizione 21.8])

$\leq \int_{s-(b^*-a)/n}^{t-(b^*-a)/n} \left\| f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \right\| d\tau$ Per maggiorazione della norma dell'integrale di Riemann ([Proposizione 21.6])

$\leq \int_{s-(b^*-a)/n}^{t-(b^*-a)/n} M \, d\tau$ Per definizione di M e per monotonia dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali

$= M\,(t-s)$

Fissato ora $\varepsilon > 0$, per ogni $s, t \in [a; b^*]$ con $|s-t| < \frac{\varepsilon}{M}$ si ha allora $\|u_n(s) - u_n(t)\| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si consideri ora la successione $\big\{ f\big(\cdot, u_n(\cdot)\big) \big\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Le sue funzioni sono ben definite, in quanto f è definita su $[a; b^*] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$ e $u_n\big([a; b^*]\big) \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per quanto visto prima;

inoltre, esse sono equi-continue, essendo $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni equi-continue per quanto appena acquisito ed essendo f (uniformemente) continua per ipotesi,
e anche equi-limitate, in quanto f è uniformemente continua per ipotesi su $[a; b^*] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$ convesso e limitato, dunque la sua immagine è limitata per la [Proposizione 28.7].

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisca ora la funzione $v_n : [a; b^*] \to X$ ponendo
$v_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_a^t f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau$, per ogni $t \in [a; b^*]$;
essa è di classe C^1.

Inoltre, si ha $v_n\big([a; b^*]\big) \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
infatti, per ogni $t \in [a; b^*]$ si ha

$\lVert v_n(t) - \mathbf{x}_0 \rVert = \left\lVert \int_a^t f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau \right\rVert$	Per definizione di v_n
$\leq \int_a^t \left\lVert f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \right\rVert d\tau$	Per maggiorazione della norma dell'integrale di Riemann ([Proposizione 21.6])
$\leq \int_a^t M\, d\tau$	Per definizione di M e per monotonia dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali
$= M\,(t - a)$	
$\leq M(b^* - a)$	$t \leq b^*$ in quanto $t \in [a; b^*]$
$\leq M\left(a + \frac{c}{M} - a\right) = c$	In quanto $b^* \leq a + \frac{c}{M}$ per definizione di b^*

Si osserva che vale $\lim\limits_n \lVert u_n - v_n \rVert_{C^0([a;b^*],X)} = 0$.

Infatti, si fissi $t \in [a; b^*]$;
se $t \in I_1$, si ha

$\lVert v_n(t) - u_n(t) \rVert = \left\lVert \int_a^t f(\tau, \mathbf{x}_0)\, d\tau \right\rVert$	Per definizione di v_n e u_n, ed essendo $[a;t] \subseteq I_1$
$\leq \int_a^t \lVert f(\tau, \mathbf{x}_0) \rVert\, d\tau$	Per maggiorazione della norma dell'integrale di Riemann ([Proposizione 21.6])
$\leq \int_a^t M\, d\tau$	Per definizione di M e per monotonia dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali
$= M(t-a)$	
$\leq M \frac{b^*-a}{n}$	In quanto $t \in I_1$

Se invece $t \notin I_1$, si ha

$\lVert v_n(t) - u_n(t) \rVert = \left\lVert \int_a^t f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau - \int_a^{t-(b^*-a)/n} f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau \right\rVert$	Per definizione di v_n e u_n, ed essendo $t \notin I_1$
$\left\lVert \int_{t-(b^*-a)/n}^t f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau \right\rVert$	Per additività dell'integrale di Riemann rispetto all'intervallo di integrazione ([Proposizione 21.8])
$\leq \int_{t-(b^*-a)/n}^t \left\lVert f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \right\rVert\, d\tau$	Per maggiorazione della norma dell'integrale di Riemann ([Proposizione 21.6])
$\leq \int_{t-(b^*-a)/n}^t M\, d\tau$	Per definizione di M e per monotonia dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali
$= M \frac{b^*-a}{n}$	

Dunque, $\lVert u_n - v_n \rVert_{C^0([a;b^*],X)} \leq M \frac{b^*-a}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui segue per confronto che

$\lim\limits_n \lVert u_n - v_n \rVert_{C^0([a;b^*],X)} = 0.$

Per ogni $t \in [a;b^*]$, si ponga ora

$U(t) = \{u_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
$V(t) = \{v_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$U(t)$ e $V(t)$ sono limitate per ogni $t \in [a; b^*]$; ciò segue dal fatto che $u_n(t), v_n(t) \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in [a; b^*]$.

Inoltre, avendo osservato che $\lim\limits_n \|u_n - v_n\|_{C^0([a;b^*],X)} = 0$, si ha in particolare che $\lim\limits_n \|u_n(t) - v_n(t)\| = 0$ per ogni $t \in [a; b^*]$.

Per la [Proposizione 28.1], si ha allora $\alpha\big(V(t)\big) = \alpha\big(U(t)\big)$ per ogni $t \in [a; b^*]$.

Si osserva ora che, per ogni $t \in [a; b^*]$, vale

$\alpha\big(V(t)\big) = \alpha\left(\left\{\mathbf{x}_0 + \int_a^t f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$	Per definizione di $V(t)$
$= \alpha\left(\left\{\int_a^t f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$	Per le osservazioni preliminari
$\leq \int_a^t \alpha\big(\{f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \mid n \in \mathbb{N}\}\big)\, d\tau$	Per la [Proposizione 28.4], avendo osservato prima che $\big\{f\big(\cdot, u_n(\cdot)\big)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni equi-continue ed equi-limitate
$= \int_a^t \alpha\big(\, f\big(\tau, U(\tau)\big)\,\big)\, d\tau$	$\big\{f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \mid n \in \mathbb{N}\big\} = f\big(\tau, U(\tau)\big)$ per ogni $\tau \in [a; b^*]$, per definizione di $U(\tau)$
$\leq \int_a^t L \cdot \alpha\big(U(\tau)\big)\, d\tau$	Vale $f\big(\tau, U(\tau)\big) \leq L \cdot \alpha\big(U(\tau)\big)$ per ogni $\tau \in [a; b^*]$, per ipotesi su L; si fa poi uso della monotonia dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali
$= L \int_a^t \alpha\big(V(\tau)\big)\, d\tau$	Per linearità dell'integrale di Riemann, e avendo osservato prima che $\alpha\big(U(\tau)\big) = \alpha\big(V(\tau)\big)$ per ogni $\tau \in [a; b^*]$

Dal [Corollario 28.6], segue allora che $\alpha\big(V(t)\big) = 0$ per ogni $t \in [a; b^*]$.

Sia $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
questa è una famiglia di funzioni equi-totalmente limitate, limitata in $C^0\big([a;b^*], X\big)$.

La limitatezza segue dal fatto che $v_n\big([a;b^*]\big) \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}_0, c)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, osservato prima; infatti, sfruttando la definizione di $\|\cdot\|_{C^0([a;b],X)}$ e la seconda disuguaglianza triangolare delle norme, si ricava che $\|v_n\|_{C^0([a;b],X)} \leq \|\mathbf{x}_0\| + c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per mostrare la equi-totale limitatezza delle v_n, si fissi $\varepsilon > 0$.
Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $k > \frac{M}{\varepsilon}(b^* - a)$, e si considerino gli intervalli $J_{k,1}, \ldots, J_{k,k}$, che partizionano $[a;b^*]$; fissato $i \in \{1, \ldots, k\}$, per ogni $t, s \in J_{k,i}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$\|v_n(t) - v_n(s)\| = \left\| \int_a^t f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau - \int_a^s f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau \right\|$	Per definizione di v_n
$= \left\| \int_s^t f\big(\tau, u_n(\tau)\big)\, d\tau \right\|$	Per additività dell'integrale di Riemann rispetto all'intervallo di integrazione ([Proposizione 21.8])
$\leq \left\| \int_s^t \big\| f\big(\tau, u_n(\tau)\big) \big\|\, d\tau \right\|$	Per maggiorazione della norma dell'integrale di Riemann ([Proposizione 21.6]); il valore assoluto va inserito per ovviare al caso $t < s$
$\leq \left\| \int_s^t M\, d\tau \right\|$	Per definizione di M e per monotonia dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali
\$=M	t-s
$\leq M \frac{(b^* - a)}{k}$	In quanto $t, s \in J_{k,i}$ e $\mathrm{diam}(J_{k,i}) = \frac{b^* - a}{k}$
$< \varepsilon$	Avendo supposto $k > \frac{M}{\varepsilon}(b^* - a)$

Avendo quindi acquisito che V è una famiglia di funzioni equi-totalmente limitate, limitata in $C^0\big([a;b^*], X\big)$, per il [Teorema 4.2] si ha allora che $\alpha(V) = \sup_{t \in [a;b^*]} \alpha\big(V(t)\big)$;
avendo ottenuto anche che $\alpha\big(V(t)\big) = 0$ per ogni $t \in [a;b^*]$, si ha quindi $\alpha(V) = 0$.

Pertanto, V è totalmente limitato in $C^0\big([a;b^*],X\big)$;
essendo tale spazio completo in quanto X è uno spazio di Banach, ne viene che
V è relativamente compatto.

Allora, $\overline{V}$ è compatto, dunque lo è sequenzialmente;
per definizione di V, segue allora che la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un'estratta $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente in $C^0\big([a;b^*],X\big)$
(cioè uniformemente) a una certa funzione $u \in C^0\big([a;b^*],X\big)$.

Si osserva ora che, per ogni $t \in [a;b^*]$, vale

$u(t) = \lim\limits_n v_{n_k}(t)$	Per definizione di u e dal fatto che la convergenza uniforme implica la puntuale
$= \lim\limits_n \ \mathbf{x}_0 + \int_a^t f\big(\tau, u_{n_k}(\tau)\big)\, dx$	Per definizione di v_{n_k}
$\mathbf{x}_0 + \int_a^t f\big(\tau, u(\tau)\big)\, d\tau$	La successione $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a u; infatti, $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad essa uniformemente, ed è stato osservato che $\lim\limits_n \lVert u_n - v_n \rVert_{C^0([a;b^*],X)} = 0$. Essendo $f(\cdot, u_n(\cdot))$ uniformemente continua in quanto continua su $[a;b^*]$ compatto, la successione $\big\{f\big(\cdot, u_{n_k}(\cdot)\big)\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f\big(\cdot, u(\cdot)\big)$; l'ugugaglianza si ottiene allora passando al limite sotto l'operatore integrale

Dunque, $u(t)$ soddisfa le proprietà espresse all'inizio della dimostrazione, che è dunque conclusa.
■

Lemma 29.4: Relativa compattezza di una successione di funzioni di classe C^1

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $\mathcal{F} \subseteq C^1\big([a;b],\mathbb{R}\big)$.

Si supponga che la famiglia $\mathcal{F}' = \{f' \mid f \in \mathcal{F}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia costituita da funzioni equi-continue ed equi-limitate.
Si supponga che esiste $t_0 \in [a;b]$ tale che $\mathcal{F}(t_0)$ sia limitato.

Allora, $\mathcal{F}$ è relativamente compatto in $C^1\big([a;b], \mathbb{R}\big)$.

Dimostrazione

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$.

Essendo $\mathcal{F}'$ una famiglia di funzioni equi-continue ed equi-limitate, per il teorema di Ascoli-Arzelà ([Corollario 5.3]), la successione $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette un'estratta $\{f'_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, convergente in $C^0\big([a;b], \mathbb{R}\big)$ (cioè uniformemente) a una certa funzione $g \in C^0\big([a;b], \mathbb{R}\big)$.

La successione $\{f_{n_k}(t_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata, essendo $\mathcal{F}(t_0)$ limitato per ipotesi;
per il teorema di Bolzano-Weierstrass, la successione $\{f_{n_k}\}$ ammette a sua volta un'estratta $\{f_{n_{k_r}}\}_{r \in \mathbb{N}}$ dimodoché $\{f_{n_{k_r}}(t_0)\}_{r \in \mathbb{N}}$ converga in $\mathbb{R}$.

Per il teorema di scambio di limiti e derivate, $\{f_{n_{k_r}}\}_{r \in \mathbb{N}}$ converge allora uniformemente a una certa funzione $F \in C^1\big([a;b], \mathbb{R}\big)$, e si ha $F' = g$.

Ne segue che la successione $\{f_{n_{k_r}}\}_{r \in \mathbb{N}}$ converge in $C^1\big([a;b], \mathbb{R}\big)$ a F;
infatti, dotando tale spazio della norma del massimo, si ha

$\lim\limits_{r} \|f_{n_{k_r}} - F\|_{C^1([a;b],\mathbb{R})} = \lim\limits_{r} \max\big\{\|f_{n_{k_r}} - F\|_{C^0([a;b],\mathbb{R})}, \|f'_{n_{k_r}} - F'\|_{C^1([a;b],\mathbb{R})}\big\}$	Per definizione di $\|\cdot\|_{C^1([a;b],\mathbb{R})}$
$= \lim\limits_{r} \max\big\{\|f_{n_{k_r}} - F\|_{C^0([a;b],\mathbb{R})}, \|f'_{n_{k_r}} - g\|_{C^1([a;b],\mathbb{R})}\big\}$	Per quanto ottenuto prima
$= 0$	In quanto $\{f_{n_{k_r}}\}_{r \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a F, e $\{f'_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a g

Dunque, ogni successione in $\mathcal{F}$ ammette un'estratta convergente in $C^1\big([a;b],\mathbb{R}\big)$;
cioè, $\mathcal{F}$ è relativamente sequenzialmente compatto, quindi relativamente compatto.
■

Proposizione 29.5: Esistenza della soluzione di problemi di Cauchy alle derivate parziali

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $[c;d] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $f : [a;b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Siano $\alpha, \beta : [a;b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue.
Sia $\varphi \in C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$.
Sia $x_0 \in [c;d]$.

Esistono $b^* \in \,]a;b]$ e una funzione $u \in C^1\big([a;b^*] \times [c;d],\mathbb{R}\big)$, dotata di derivata parziale seconda mista continua, dimodoché per ogni $(t,x) \in [a;b^*] \times [c;d]$ valga

$$\begin{cases} u_{tx}(t,x) = \alpha(t)u_x(t,x) + f\big(t,u(t,x)\big) \\ u_t(t,x_0) = \beta(t) \\ u(t_0,x) = \varphi(x) \end{cases}.$$

Dimostrazione

Si vuole applicare il [Teorema 29.3] allo spazio di Banach $C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$.

Si doti $C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$ della norma della somma, puntualmente rispetto a x_0, che verrà denotata con $\|\cdot\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$;

si consideri anche la norma del massimo in $C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$, denotata invece con $\|\cdot\|^*_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$.

Sia $\rho > 0$.

Sia $g : [a;b] \times \overline{B}(\varphi,\rho) \to C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$ la funzione definita ponendo

$g(t,v)(x) = \alpha(t)\big(v(x) - v(x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} f\big(t, v(s)\big)\, ds + \beta(t)$, per ogni $(t,v) \in [a;b] \times \overline{B}(\varphi,\rho)$.

g è di classe C^1.

Si provi che g è uniformemente continua.

Essendo α continua su $[a;b]$ compatto, tale funzione è limitata;
sia dunque $L = \sup\limits_{t\in[a;b]} |\alpha(t)|$.

Per ogni $v \in \overline{B}(\varphi,\rho)$, si ha $\|v-\varphi\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})} \le \rho$ per definizione;
dalla seconda proprietà triangolare e dalla definizione di $\|\cdot\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$ segue allora che
$\|\varphi\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})} + \rho \ge \|v\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$.

Poiché le norme $\|\cdot\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$ e $\|\cdot\|^*_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$ sono equivalenti ([Proposizione 26.1]), esiste $k > 0$ tale che si abbia
$\|v\|^*_{C^1([c;d],\mathbb{R})} \le k\|v\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$ per ogni $v \in C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$.

Si ponga $\sigma = k\big(\|\varphi\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})} + \rho\big)$;
dalle due disuguaglianze ottenute e dalla definizione di $\|\cdot\|^*_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$ segue allora che
$\max\big\{\|v\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})}\,,\, \|v'\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})}\big\} \le \sigma$, per ogni $v \in \overline{B}(\varphi,\rho)$.

Per quanto ottenuto prima, ne viene allora che $|v(x)| \le \|v\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} \le \sigma$ per ogni $v \in \overline{B}(\varphi,\rho)$ e per ogni $x \in [c;d]$.

Siano $(t,v), (s,w) \in [a;b] \times \overline{B}(\varphi,\rho)$.

Si ha

$$\|g(t,v) - g(s,w)\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})} = \big\|\alpha(t)v'(\cdot) - \alpha(s)w'(\cdot) + f\big(t,v(\cdot)\big) - f\big(s,w(\cdot)\big)\big\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + |\beta(t) - \beta(s)|$$

$$= \left\|\alpha(t)v'(\cdot) - \alpha(s)v'(\cdot) + \alpha(s)v'(\cdot) - \alpha(s)w'(\cdot) + f\big(t, v(\cdot)\big) - f\big(s, w(\cdot)\big)\right\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + |\beta(t) - \beta(s)|$$

$$\leq \|\alpha(t)v'(\cdot) - \alpha(s)v'(\cdot)\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + \|\alpha(s)v'(\cdot) - \alpha(s)w'(\cdot)\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + \left\|f\big(t, v(\cdot)\big) - f\big(s, w(\cdot)\big)\right\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + |\beta(t) - \beta($$

$$= |\alpha(t) - \alpha(s)| \|v'\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + |\alpha(s)| \|v' - w'\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + \left\|f\big(t, v(\cdot)\big) - f\big(s, w(\cdot)\big)\right\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + |\beta(t) - \beta(s)|$$

$$= |\alpha(t) - \alpha(s)| \cdot \sigma + L\|v - w\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})} + \left\|f\big(t, v(\cdot)\big) - f\big(s, w(\cdot)\big)\right\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + |\beta(t) - \beta(s)|$$

Si fissi ora $\varepsilon > 0$.

Sia $\tilde{\delta} > 0$ dimodoché:

- $|\alpha(t) - \alpha(s)| < \frac{\varepsilon}{4\sigma}$ per ogni $t, s \in [a;b]$ con $|t - s| < \tilde{\delta}$;
  ciò è possibile in quanto α è continua per ipotesi su $[a;b]$ compatto, dunque è uniformemente continua.
- $\tilde{\delta} < \frac{\varepsilon}{4L}$.
- $\big\|f(t,x) - f(t,x)\big\| < \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $t, s \in [a;b]$ e per ogni $x, y \in [-\sigma;\sigma]$ con $\max\{|t - s|, |x - y|\} < \tilde{\delta}$;
  ciò è possibile in quanto f è continua per ipotesi su $[a;b] \times [-\sigma;\sigma]$ compatto, dunque è uniformemente continua.
- $|\beta(t) - \beta(s)| < \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $t, s \in [a;b]$ con $|t - s| < \tilde{\delta}$;
  ciò è possibile in quanto β è continua per ipotesi su $[a;b]$ compatto, dunque è uniformemente continua.

Sia $\delta = \min\left\{\tilde{\delta}, \frac{\tilde{\delta}}{k}\right\}$.

Si osserva che $|v(x)-w(x)|<\tilde{\delta}$ per ogni $v, w \in \overline{B}(\varphi, \rho)$ con $\|v-w\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}<\delta$ e per ogni $x \in [c;d]$.
Infatti, si ha

\$	v(x)-w(x)
$\leq \|v-w\|^*_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$	Dalla definizione di $\|\cdot\|^*_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$
$\leq k\|v-w\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$	Per costruzione di k
$< k\delta$	Avendo imposto $\|v-w\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}<\delta$
$< \tilde{\delta}$	Dalla prima condizione nella costruzione di δ

Per ogni $(t,v),(s,w) \in [a;b] \times \overline{B}(\varphi,\rho)$ con $\max\{|t-s|, \|v-w\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}\}<\delta$, si ha allora

$\|g(t,v)-g(s,w)\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$	
$\leq \|\alpha(t)-\alpha(s)\| \cdot \sigma + L\|v-w\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})} + \big\|f\big(t,v(\cdot)\big)-f\big(s,w(\cdot)\big)\big\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + \|\beta(t)-\beta(s)\|$	Per la catena di disuguaglianze ottenuta prima
$< \frac{\varepsilon}{4} + L\|v-w\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})} + \big\|f\big(t,v(\cdot)\big)-f\big(s,w(\cdot)\big)\big\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + \|\beta(t)-\beta(s)\|$	Dalla prima condizione sulla costruzione di $\tilde{\delta}$, ed essendo $\delta<\tilde{\delta}$ per costruzione di δ
$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \big\|f\big(t,v(\cdot)\big)-f\big(s,w(\cdot)\big)\big\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} + \|\beta(t)-\beta(s)\|$	Dalla seconda condizione sulla costruzione di $\tilde{\delta}$, ed essendo $\delta<\tilde{\delta}$ per costruzione di δ
$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \|\beta(t)-\beta(s)\|$	Dalla terza condizione sulla costruzione di $\tilde{\delta}$, in

$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

quanto vale $

Dalla quarta condizione sulla costruzione di $\tilde{\delta}$, ed essendo $\delta < \tilde{\delta}$ per costruzione di δ

Resta da mostrare l'uniforme α-Lipschitzianità di g rispetto alla seconda variabile.

Siano $g_1, g_2 : [a;b] \times \overline{B}(\varphi, \rho) \to C^1\big([c;d], \mathbb{R}\big)$ le funzioni definite ponendo rispettivamente

$g_1(t,v)(x) = \alpha(t)\big(v(x) - v(x_0)\big) + \beta(t)$, per ogni $[a;b] \times \overline{B}(\varphi, \rho)$ e per ogni $x \in [c;d]$,

$g_2(t,v)(x) = \int_{x_0}^{x} f\big(t, v(s)\big)\, ds$, per ogni $[a;b] \times \overline{B}(\varphi, \rho)$ e per ogni $x \in [c;d]$.

Si ha $g = g_1 + g_2$.

Si osserva che, per ogni $t \in [a;b]$, la funzione $g_1(t, \cdot)$ è Lipschitziana di costante L;
infatti, si ha

$\|g_1(t,v) - g_1(t,w)\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})} = \|\alpha(t)(v' - w')\|_{C^0([a;b],\mathbb{R})} + |\beta(t) - \beta(t)|$ Per definizione di $\|\cdot\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$ e di g_1

$= |\alpha(t)| \cdot \|v' - w'\|_{C^0([a;b],\mathbb{R})}$

$\leq |\alpha(t)| \cdot \|v - w\|_{C^1([a;b],\mathbb{R})}$ Dalla definizione di $\|\cdot\|_{C^1([a;b],\mathbb{R})}$

$\leq L\|v - w\|_{C^1([a;b],\mathbb{R})}$ Per definizione di L

Si osserva anche che, per ogni $t \in [a;b]$, la funzione $g_2(t, \cdot)$ è a immagine relativamente compatta.

Infatti, si ha $g_2\big(t, \overline{B}(\varphi, \rho)\big) = \big\{ \int_{x_0}^{\cdot} f\big(t, v(s)\big)\, ds \mid v \in \overline{B}(\varphi, \rho)\big\}$;

la famiglia delle derivate $\{f(t, v(\cdot)) \mid v \in \overline{B}(\varphi, \rho)\}$ è costituita da funzioni equi-continue ed equi-limitate;

l'equi-limitatezza segue dal fatto che $v(x) \in [-\sigma; \sigma]$ per ogni $v \in \overline{B}(\varphi, \rho)$ e per ogni $x \in [c; d]$, per quanto osservato precedentemente, e dal fatto che $f(t, \cdot)$ è continua su $[-\sigma; \sigma]$ compatto, dunque è limitata;

l'equi-continuità segue dal fatto che $f(t, \cdot)$ è continua, e dal fatto che le funzioni in $\overline{B}(\varphi, \rho)$ sono equi-Lipschitziane; infatti, per ogni $x, y \in [c; d]$ e per ogni $v \in \overline{B}(\varphi, \rho)$ si ha

$\lvert v(x) - v(y)\rvert = \lvert v'(\xi)\rvert \cdot \lvert x - y\rvert$, per qualche ξ interno all'intervallo di estremi x e y	Per il teorema di Lagrange
$\leq |v'|_{C^0([c;d],\mathbb{R})}\cdot	x-y
$\leq \sigma	x-y

Infine, $g_2(t, \overline{B}(\varphi, \rho))(x_0) = \{0\}$, che dunque è un insieme limitato.

Per il [Lemma 29.4], $g_2(t, \overline{B}(\varphi, \rho))$ è allora relativamente compatto, dunque totalmente limitato.

Per ogni $t \in [a; b]$, la funzione $g(t, \cdot)$ è allora somma di una funzione Lipschitziana di costante L e una totalmente limitata; pertanto, per la [Proposizione 28.8] si ha che $g(t, \cdot)$ è α-Lipschitziana di costante L, per ogni $t \in [a; b]$.

g soddisfa allora le ipotesi del [Teorema 29.3];
dunque, esistono $b^* \in]a; b]$ e $h \in C^1([a; b^*], C^1([c; d], \mathbb{R}))$, dimodoché si abbia

$$\begin{cases} h'(t) = g(t, h(t)) & \forall t \in [a; b^*] \\ h(a) = \varphi \end{cases}.$$

Sia allora $u : [a; b^*] \times [c; d] \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $u(t, x) = h(t)(x)$ per ogni $(t, x) \in [a; b^*] \times [c; d]$.

Per la [Proposizione 26.4], u è di classe C^1, possiede derivata seconda mista u_{tx} continua in $[a; b^*] \times [c; d]$, e $h'(t)(x) = u_t(t, x)$ per ogni $(t, x) \in I \times [c; d]$.

Per ogni $(t,x) \in [a;b^*] \times [c;d]$, si ha allora

$u_t(t,x) = h'(t)(x)$	Per quanto appena osservato
$= f\big(t, h(t)\big)(x)$	Per costruzione di h
$= \alpha(t)\big(h(t)(x) - h(t)(x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} g\big(t, h(t)(s)\big)\, ds + \beta(t)$	Per definizione di f
$= \alpha(t)\big(u(t,x) - u(t,x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} g\big(t, u(t,s)\big)\, ds + \beta(t)$	Per definizione di u

e inoltre si ha $u(t_0,x) = h(t_0)(x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in [c;d]$, per definizione di u e per costruzione di h.

Poiché u ammette in $[a;b^*] \times [c;d]$ derivata mista per quanto osservato prima, u_t è parzialmente derivabile rispetto alla seconda variabile;
derivando quindi la legge ottenuta per u_t rispetto alla seconda variabile, si ricava che

$u_{tx}(t,x) = \alpha(t)\, u_x(t,x) + g\big(x, u(t,x)\big)$ per ogni $(t,x) \in [a;b^*] \times [c;d]$.

Inoltre, sempre dalla legge di u_t si ricava che $u_t(t,x_0) = \beta(t)$ per ogni $t \in [a;b^*]$.

Allora, u soddisfa le condizioni espresse nella tesi, che risulta pertanto acquisita.
■