22 - Misurabilità e Forte μ-Misurabilità

Premesse

> **Notazioni: $\mathscr{L}_n$, μ**

Sia $n \in \mathbb{N}$.

$\mathscr{L}_n$ denota l'insieme dei sottoinsiemi si $\mathbb{R}^n$, misurabili secondo Lebesgue.

Fissato $S \in \mathscr{L}_n$, si denota con $\mu(S)$ la misura di Lebesgue di S.

> **Densità**

Sia X uno spazio topologico.
Siano $A \subseteq X$, e $B \subseteq A$.

B si dice denso in A quando $\overline{B} = \overline{A}$ (dove la chiusura effettuata si considera per entrambi rispetto a X).

Osservazione

L'inclusione $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ segue automaticamente dal fatto che $B \subseteq A$.

Dunque, B è denso in A se e solo se $\overline{B} \supseteq \overline{A}$.

> **Separabilità**

Sia X uno spazio topologico.
Sia $A \subseteq X$.

A si dice separabile quando esiste $D \subseteq A$ al più numerabile e denso in A.

Proprietà della separabilità

Sia X uno spazio topologico.

Si hanno i seguenti fatti:

- Fissato $A \subseteq X$ separabile, $\overline{A}$ è separabile;
- Fissata una successione $\{A_n \subseteq X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di insiemi separabili, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è separabile.
- Se X è metrizzabile, fissati $A \subseteq X$ separabile e $B \subseteq A$, B è separabile.
- Se X è metrizzabile, fissato $A \subseteq X$ totalmente limitato, A è separabile.

Continuità della distanza da un insieme fissato

Sia (X, d) uno spazio metrico.
Sia $S \subseteq X$.

La mappa $d(\cdot, S) : X \to \mathbb{R}$ definita ponendo $x \mapsto d(x, S)$ è continua.

Misurabilità di funzioni

⌘ Definizione: Funzione misurabile

Sia $T \in \mathscr{L}_n$.
Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : T \to X$ una funzione.

f si dice **misurabile** quando
per ogni $A \subseteq X$ aperto, $f^{-1}(A) \in \mathscr{L}_n$.

Osservazione

f è misurabile se e solo se,
per ogni $C \subseteq X$ chiuso, $f^{-1}(C) \in \mathscr{L}_n$.

Infatti, si hanno i seguenti fatti:

- Per ogni $S \subseteq X$, si ha $f^{-1}(X \setminus S) = T \setminus f^{-1}(S)$.
- Per ogni $M, N \in \mathscr{L}_n$, si ha $M \setminus N \in \mathscr{L}_n$.

Allora, se f è misurabile, per ogni $C \subseteq X$ chiuso sia $A = X \setminus C$, che dunque è aperto;
si ha $f^{-1}(C) = f^{-1}(X \setminus A) = T \setminus f^{-1}(A) \in \mathscr{L}_n$.

Viceversa, se $f^{-1}(C) \in \mathscr{L}_n$ è misurabile per ogni $C \subseteq X$ chiuso, per ogni $A \subseteq X$ aperto sia $C = X \setminus A$, che dunque è chiuso;
si ha $f^{-1}(A) = f^{-1}(X \setminus C) = T \setminus f^{-1}(C) \in \mathscr{L}_n$.

Osservazione: Funzioni continue sono misurabili

Sia $T \in \mathscr{L}_n$.
Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : T \to X$ una funzione continua.

Allora, f è misurabile.

Infatti, per ogni $A \subseteq X$ aperto si ha $f^{-1}(A)$ aperto in $\mathbb{R}^n$ per ipotesi di continuità di f.

Poiché gli insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$ sono misurabili per definizione di μ, ne segue che $f^{-1}(A)$ è misurabile.

⌘ Definizione: Dilatazioni di un insieme

Sia (X, d) uno spazio metrico.
Sia $S \subseteq X$.
Sia $r > 0$.

Si dice **dilatazione** di S di raggio r l'insieme
$B(S, r) := \{x \in X : d(x, S) < r\}$

Osservazione

Si osservano i seguenti fatti:

- $B(S, r) = \bigcup\limits_{x \in S} B(x, r)$;
- $B(S, r)$ è aperto.

Infatti, sia $x_0 \in \bigcup\limits_{x \in S} B(x, r)$;
esiste allora $\tilde{x} \in S$ tale che $x_0 \in B(\tilde{x}, r)$, ossia $d(x_0, \tilde{x}) < r$.
Si ha allora $d(x_0, S) = \inf\limits_{x \in S} d(x_0, x) \leq d(x_0, \tilde{x}) < r$, per cui
$x_0 \in B(S, r)$.

Viceversa, sia $x_0 \notin \bigcup\limits_{x \in S} B(x, r)$;
per ogni $x \in S$ si ha allora $x_0 \notin B(x, r)$, ossia $d(x_0, x) \geq r$.

Ne viene che $d(x_0, S) = \inf_{x \in S} d(x_0, x) \geq r$, per cui
$x_0 \notin B(S, r)$.

Il primo punto è dunque acquisito;
da questo segue il secondo, in quanto $B(S, r)$ si scrive allora come unione di aperti, e dunque è aperto.

Proposizione 22.1: Limite di funzioni misurabili è misurabile

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia (X, d) uno spazio metrico.
Sia $\{f_n : T \to X\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili da T in X.
Si supponga che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga puntualmente su T;
sia $f : T \to X$ il suo limite puntuale.

f è misurabile.

Richiamo: Unione e intersezione numerabili di insiemi misurabili

Sia $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_p$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili.

Allora, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \in \mathscr{L}_n$, e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \in \mathscr{L}_n$.

Dimostrazione

Sia $C \subseteq X$ chiuso;
si provi che $f^{-1}(C) \in \mathscr{L}_n$.

Si vuole provare che $f^{-1}(C) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} f_n^{-1}\Big(B\big(C, \frac{1}{h}\big)\Big)$;

così facendo, la tesi sarà acquisita in quanto:

- $B\big(C, \frac{1}{h}\big)$ è aperto per ogni $h \in \mathbb{N}$, per quanto osservato sulle dilatazioni di un insieme;
- $f_n^{-1}\Big(B\big(C, \frac{1}{h}\big)\Big) \in \mathscr{L}_p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $h \in \mathbb{N}$, per il punto precedente ed essendo f_n misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ipotesi;
- $\bigcap_{h\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} f_n^{-1}\Big(B\big(C, \frac{1}{h}\big)\Big) \in \mathscr{L}_p$ per il punto precedente e per quanto richiamato prima sull'unione e l'intersezione numerabili di insiemi misurabili.

Intanto, si osserva che, per ogni $t \in T$, si ha

$$\begin{aligned}
& t \in \bigcap_{h\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} f_n^{-1}\Big(B\big(C, \tfrac{1}{h}\big)\Big) \\
\iff \quad & \text{per ogni } h \in \mathbb{N}, \text{ esiste } k \in \mathbb{N} \text{ tale che, per ogni } n \geq k, \text{ valga } d\big(f_n(t), C\big) < \tfrac{1}{h} \\
\iff \quad & \lim_n d\big(f_n(t), C\big) = 0 \\
& d\big(f(t), C\big) = 0 && \lim_n d\big(f_n(t), C\big) = d\big(f(t), C\big), \text{ in quanto la successione } \{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge per ipotesi a } f(t) \text{ e } d(\cdot, C) \text{ è continua per le osservazioni preliminari}
\end{aligned}$$

Dunque, basta mostrare che $t \in f^{-1}(C)$ se e solo se $d\big(f(t), C\big) = 0$.

Se $t \in f^{-1}(C)$, si ha $f(t) \in C$; dunque si ha evidentemente $d\big(f(t), C\big) = 0$.

Viceversa, se $d\big(f(t), C\big) = 0$, essendo C chiuso e $\{f(t)\}$ compatto si ha $C \cap \{f(t)\} \neq \varnothing$, cioè $f(t) \in C$.

La dimostrazione è perciò conclusa.

■

Proposizione 22.2: Criterio della misurabilità e dell'immagine separabile

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia (X, d) uno spazio metrico.
Sia $f : T \to X$ una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è misurabile e $f(T)$ è separabile (ammette cioè un sottoinsieme denso al più numerabile);
2. Esiste una successione $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente uniformemente in T a f, tale che $f_n(T)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
3. Esiste una successione $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente puntualmente in T a f, tale che $f_n(T)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: 2. $\Rightarrow$ 3.

Si supponga che esiste una successione $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili convergente uniformemente in T a f, tale che $f_n(T)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;

la tesi segue immediatamente dal fatto che la convergenza uniforme implica quella puntuale, e dunque $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente anche puntualmente in T a f.

Dimostrazione: 3. $\Rightarrow$ 1.

Si supponga l'esistenza di una successione $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili convergente puntualmente in T a f, tale che $f_n(T)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

f è misurabile per la [Proposizione 22.1], essendo $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ per ipotesi una successione di funzioni misurabili convergente puntualmente in T a f.

Resta da provare che $f(T)$ è separabile.

Essendo $f_n(T)$ al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ipotesi, si ha che anche $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(T)$ è al più numerabile, essendo unione numerabile di insiemi al più numerabili;

allora, l'insieme $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(T)}$ è separabile, in quanto chiusura di un insieme al più numerabile (che dunque ha come sottoinsieme denso al più numerabile proprio l'insieme di cui si fa la chiusura).

Si osserva infine che $f(T) \subseteq \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(T)}$;
infatti, per ogni $t \in T$ si ha $f(t) = \lim\limits_{n} f_n(t)$ per ipotesi, e $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(T)$.

Allora, $f(T)$ è anch'esso separabile per l'osservazione preliminare, e la tesi è acquisita.
■

Dimostrazione: 1. $\Rightarrow$ 2.

Si supponga f misurabile e $f(T)$ separabile.

Sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq f(T)$ una successione densa in $f(T)$, che esiste per ipotesi.

Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, si ponga $A_{n,k} = f^{-1}\Big(B\big(x_k, \frac{1}{n}\big)\Big)$.

$A_{n,k}$ è misurabile per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, essendo $B\big(x_k, \frac{1}{n}\big)$ aperto e f misurabile per ipotesi.

Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, si definisca ora

$$B_{n,k} = \begin{cases} A_{n,1} \ , & n = 1 \\ A_{n,k} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_{n,i} \ , & n > 1 \end{cases}$$

Si ha:

- $B_{n,k}$ misurabile per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, essendo misurabili gli insiemi $A_{n,k}$;

- $B_{n,h} \cap B_{n,k} = \varnothing$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ con $h \neq k$;

- $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si osserva anche che $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} = T$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
infatti, vale $\subseteq$ in quanto $A_{n,k} \subseteq T$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, essendo $A_{n,k} = f^{-1}\Big(B\big(y_k, \frac{1}{n}\big)\Big)$ per definizione.

Viceversa, vale $\supseteq$ in quanto, fissato $t \in T$ e fissato $n \in \mathbb{N}$, per costruzione di $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $d\big(f(x), y_k\big) < \frac{1}{n}$, ossia $f(t) \in B\big(x_k, \frac{1}{n}\big)$, cioè $t \in f^{-1}\Big(B\big(x_k, \frac{1}{n}\big)\Big) = A_{n,k}$.

Da queste tre proprietà segue che la famiglia $\{B_{n,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ è una partizione di T per ogni $n \in \mathbb{N}$.

per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca ora la funzione $f_n : T \to X$ ponendo $f_n(t) = x_k$, con $k \in \mathbb{N}$ tale che $t \in B_{n,k}$.
Si hanno i seguenti fatti:

- f_n è ben definita per ogni $n \in \mathbb{N}$, essendo k unico in quanto $\{B_{n,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ è una partizione di T.

- f_n è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
  infatti, addirittura per ogni $S \subseteq X$ si ha $f_n^{-1}(S) = \bigcup\limits_{k\,\in\,\mathbb{N}\,:\,x_k\in S} B_{n,k}$ per definizione di f_n; tale insieme è misurabile in quanto unione al più numerabile degli insiemi $B_{n,k}$, misurabili.

- $f_n(T)$ è al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, essendo $f_n(T) \subseteq \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

- La successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f;
  infatti, fissati $n \in \mathbb{N}$ e $t \in T$ e posto $k \in \mathbb{N}$ tale che $t \in B_{n,k}$, si ha $d\big(f_n(t), f(t)\big) = d(x_k, f(t)) < \frac{1}{n}$, essendo $t \in B_{n,k} \subseteq A_{n,k} = f^{-1}\Big(B\big(x_k, \frac{1}{n}\big)\Big)$.

La successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa allora le proprietà richieste dal punto $\mathbf{2.}$;
la tesi è perciò acquisita.
■

Forte μ-misurabilità di funzioni

⌘ Definizione: Funzione fortemente μ-misurabile

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione.

f si dice **fortemente μ-misurabile** quando
esiste $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, tale che $f_{|T \setminus T_0}$ è misurabile e $f(T \setminus T_0)$ è separabile.

Osservazione

In virtù della [Proposizione 22.2], f è fortemente μ-misurabile se e solo se:

- esistono $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, e una successione $\{f_n : T \setminus T_0 \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente uniformemente in $T \setminus T_0$ a $f_{|T\setminus T_0}$, tale che $f_n(T \setminus T_0)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- esistono $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, e una successione $\{f_n : T \setminus T_0 \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente puntualmente in $T \setminus T_0$ a $f_{|T\setminus T_0}$, tale che $f_n(T \setminus T_0)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

> [prop] Proposizione 22.3: Forte μ-misurabilità di una combinazione lineare
> Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
> Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Siano $f, g : T \to X$ due funzioni fortemente μ-misurabili.
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Allora, $\alpha f + \beta g$ è fortemente μ-misurabile.

Proposizione 22.4: Limite quasi ovunque di funzioni fortemente μ-misurabili è fortemente μ-misurabile

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni fortemente μ-misurabili da T in X.
Si supponga che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga quasi ovunque su T;
sia $f : T \to X$ limite puntuale quasi-ovunque di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

f è fortemente μ-misurabile.

Dimostrazione

Per ipotesi di convergenza di $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ a f quasi ovunque su T, sia $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, tale che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga puntualmente a f su $T \setminus T_0$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, f_n è fortemente μ-misurabile per ipotesi;
esiste dunque $T_n \subseteq T$ con $\mu(T_n) = 0$, tale che $(f_n)_{|T\setminus T_n}$ è misurabile e $f_n(T \setminus T_n)$ è separabile.

Sia ora $\tilde{T} = T_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$.
Per numerabile sub-additività della misura di Lebesgue, si ha $\mu(\tilde{T}) \leq \mu(T_0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T_n) = 0$; dunque, ne viene che $\mu(\tilde{T}) = 0$.

Inoltre, $(f_n)_{|T\setminus\tilde{T}}$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
infatti, per ogni $A \subseteq X$ aperto si ha $(f_n)^{-1}_{|T\setminus\tilde{T}}(A) = (f_n)^{-1}_{|T\setminus T_n}(A) \cap (T \setminus \tilde{T})$ misurabile, in quanto $(f_n)_{|T\setminus T_n}$ è misurabile per costruzione di T_n, e $T \setminus \tilde{T}$ è misurabile.

Ne viene che $f_{|T\setminus\tilde{T}}$ è misurabile.
Infatti, poiché $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f in $T \setminus T_0$ per costruzione di T_0, essendo $T_0 \subseteq \tilde{T}$ si ha a maggior ragione che

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f su $T \setminus \tilde{T}$;
la misurabilità di $f_{|T\setminus\tilde{T}}$ segue allora dalla [Proposizione 22.1].

Infine, $f(T \setminus \tilde{T})$ è separabile.
Infatti, $f_n(T \setminus T_n)$ è separabile per ogni $n \in \mathbb{N}$ per costruzione di T_n; ne viene allora che

	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(T \setminus T_n)$ è separabile	Essendo unione numerabile di insiemi separabili
$\Longrightarrow$	$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(T \setminus T_n)}$ è separabile	In quanto chiusura di un insieme separabile
$f(T \setminus \tilde{T})$ è separabile	Infatti, $f(T \setminus \tilde{T}) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(T \setminus T_n)}$ in quanto $f(t) = \lim_n f_n(t)$ per ogni $t \in T \setminus \tilde{T}$, dunque è separabile essendo sottoinsieme di un insieme separabile	

Avendo dedotto che $\mu(\tilde{T}) = 0$, $f_{|T\setminus\tilde{T}}$ è misurabile e $f(T \setminus \tilde{T})$ è separabile, la tesi è acquisita.
■

Teorema 22.5: Teorema di Lusin

Sia $T \in \mathscr{L}_p$ con $\mu(T) < +\infty$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è fortemente μ-misurabile;
2. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $K \subseteq T$ compatto con $\mu(T \setminus K) < \varepsilon$, tale che $f_{|K}$ sia continua.

Osservazioni preliminari

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : T \to X$.
Sia $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_p$ una successione tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = T$, e $f_{|T_n}$ sia misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora, f è misurabile.

Infatti, fissato $A \subseteq X$ aperto, si ha

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(A) &= f^{-1}(A) \cap T && \text{Essendo } f^{-1}(A) \subseteq T \\
&= f^{-1}(A) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n && \text{Essendo } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = T \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A) \cap T_n && \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_{|T_n}^{-1}(A) && \text{Essendo } f_{|T_n}^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap T_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

L'ultimo insieme è misurabile, in quanto unione numerabile di insiemi che sono misurabili per ipotesi di misurabilità di $f_{|T_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: 2. $\Rightarrow$ 1.

Si supponga che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista $K \subseteq T$ compatto con $\mu(T \setminus K) < \varepsilon$, tale che $f_{|K}$ sia continua.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia allora $K_n \subseteq T$ compatto con $\mu(T \setminus K_n) < \frac{1}{n}$, tale che $f_{|K_n}$ sia continua.

In quanto continua, $f_{|K_n}$ è allora anche misurabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Inoltre, sempre per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(K_n)$ compatto per compattezza di K_n e continuità di $f_{|K_n}$; allora, $f(K_n)$ è totalmente limitato essendo compatto in uno spazio metrico, dunque separabile.

Sia $T_0 = T \smallsetminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} (T \smallsetminus K_n)$; per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$\mu(T_0) \leq \mu(T \smallsetminus K_n)$	Per monotonia della misura di Lebesgue, in quanto $T_0 \subseteq T \smallsetminus K_n$
$< \frac{1}{n}$	Per costruzione di K_n

Ne segue che $\mu(T_0) = 0$.

$f_{|T \smallsetminus T_0}$ è misurabile.
Infatti, dalla definizione di T_0 segue che $T \smallsetminus T_0 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$; avendo osservato prima che $f_{|K_n}$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, dall'osservazione preliminare viene la misurabilità di $f_{|T \smallsetminus T_0}$.

$f(T \smallsetminus T_0)$ è separabile.
Infatti, dalla definizione di T_0 segue che $T \smallsetminus T_0 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$; si ha dunque
$f(T \smallsetminus T_0) = f\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n\right) \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} f(K_n)$.
Avendo osservato prima che $f(K_n)$ è separabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, ne segue che $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} f(K_n)$ è separabile in quanto unione numerabile di insiemi separabili, e dunque $f(T \smallsetminus T_0)$ è separabile in quanto sottoinsieme di un insieme separabile.

Avendo dedotto che $\mu(T_0) = 0$, $f_{|T \smallsetminus T_0}$ è misurabile e $f(T \smallsetminus T_0)$ è separabile, la tesi è acquisita.
■

Dimostrazione: 1. $\Rightarrow$ 2.

Si supponga f fortememte μ-misurabile.

Ciò significa che esistono $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, e una successione $\{f_n : T \smallsetminus T_0 \to X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente uniformemente in $T \setminus T_0$ a $f_{|T \setminus T_0}$, tale che $f_n(T \setminus T_0)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Essendo al più numerabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ponga allora $f_n(T \setminus T_0) = \{\mathbf{x}_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Si fissi adesso $\varepsilon > 0$.
Si fissi anche $n \in \mathbb{N}$.

Ricordando che $\mu(T) < +\infty$ per ipotesi, si osserva che vale

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} = T \setminus T_0 \qquad \text{In quanto } \{\mathbf{x}_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}} = f_n(T \setminus T_0)$$

$$\implies \lim_r \mu\left(\bigcup_{k=1}^{r} f^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}\right) = \mu(T \setminus T_0) \qquad \text{Per continuità verso l'alto della misura di Lebesgue}$$

$$\implies \lim_r \mu\left((T \setminus T_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{r} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_k\}\right) = 0 \qquad \text{Per sottrattività della misura di Lebesgue}$$

Esiste allora $r_n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu\left((T \setminus T_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Per ogni $k \in \{1, \dots, r_n\}$, sia $H_{n,k} \subseteq f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}$ compatto, tale che
$\mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \setminus H_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1} r_n}$.

Si ha che:

- Tali $H_{n,k}$ esistono;

  infatti, per definizione di μ si ha che $\mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}) = \sup\{H \subseteq f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} : H \text{ chiuso e limitato}\}$; dunque, esiste $H_{n,k} \subseteq f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}$ chiuso e limitato, cioè compatto essendo sottoinisieme di $\mathbb{R}^p$, tale che $\mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}) < \mu(H_{n,k}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1} r_n}$.

  Segue allora dalla sottrattività di μ che $\mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \setminus H_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1} r}$.

- $H_{n,i} \cap H_{n,j} = \varnothing$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, r_n\}$ con $i \neq j$;

infatti, si ha $H_{n,i} \subseteq f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,i}\}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, r_n\}$, e si ha $f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,i}\} \cap f^{-1}\{\mathbf{x}_{n,j}\} = \varnothing$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, r_n\}$ con $i \neq j$.

Sempre per ogni $k \in \{1, \ldots, r_n\}$, si definisca la funzione $\varphi_{n,k} : T \to [0; 1]$ ponendo

$$\varphi_{n,k}(t) = \frac{d\left(t, \bigcup\limits_{\substack{1 \le i \le r_n \\ i \neq k}} H_{n,i}\right)}{d(t, H_{n,k}) + d\left(t, \bigcup\limits_{\substack{1 \le i \le r_n \\ i \neq k}} H_{n,i}\right)}$$ per ogni $t \in T$; si ha che:

- $\varphi_{n,k}$ è ben definita per ogni $k \in \{1, \ldots, r_n\}$;
  infatti, si ha evidentemente $\varphi_{n,k} \in [0; 1]$.
  Il denominatore è sempre strettamente positivo in quanto, se $d(t, H_{n,k}) = 0$, essendo H_k chiuso in quanto compatto si ha $t \in H_{n,k}$, dunque $t \notin \bigcup\limits_{\substack{1 \le i \le r_n \\ i \neq k}} H_{n,i}$ in quanto gli $H_{n,i}$ sono a due a due disgiunti per quanto osservato prima, dunque
  $d\left(t, \bigcup\limits_{\substack{1 \le i \le r_n \\ i \neq k}} H_i\right) > 0$ essendo $\bigcup\limits_{\substack{1 \le i \le r_n \\ i \neq k}} H_i$ chiuso in quanto unione finita di compatti, che sono chiusi.

- $\varphi_{n,k}$ è continua per ogni $k \in \{1, \ldots, r_n\}$, essendo la distanza da un fissato insieme continua.

Si definisca ora la funzione $\psi_n : T \to X$ ponendo
$\psi_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{r_n} \varphi_{n,k}(t)\, \mathbf{x}_{n,k}$ per ogni $t \in T$.

Si ha che:

- ψ_n è continua, evidentemente;

- $\psi_n(t) = f_n(t)$ per ogni $t \in \bigcup\limits_{k=1}^{r_n} H_{n,k}$.

Infatti, fissato $t \in \bigcup_{k=1}^{r_n}$, per quanto osservato prima sugli $H_{n,k}$ esiste un unico $k_0 \in \{1, \ldots, r_n\}$ tale che $t \in H_{n,k_0}$.

Ricordando che gli $H_{n,k}$ chiusi in quanto compatti, e che la distanza di un punto da un insieme chiuso nulla se e solo se tale punto vi appartiene, si ha allora che $\varphi_{n,k_0} = 1$ e $\varphi_{n,k} = 0$ per ogni $k \in \{1, \ldots, r_n\}$ con $k \neq k_0$.

Dunque, $\psi_n(t) = \mathbf{x}_{n,k_0}$;

d'altra parte, si ha $f_n(t) = \mathbf{x}_{n,k_0}$ in quanto $t \in H_{n,k_0}$ e $H_{n,k_0} \subseteq f^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k_0}\}$ per costruzione.

Si ponga adesso $K_n = \bigcup_{k=1}^{r_n} H_{n,k}$; si ha che:

- K_n è compatto, essendo un sottoinsieme di $\mathbb{R}^p$ chiuso e limitato in quanto unione finita degli $H_{n,k}$, chiusi e limitati in quanto compatti;
- $(f_n)_{|K_n}$ è continua, essendo pari a $(\psi_n)_{|K_n}$ ed essendo questa continua, per quanto osservato prima su ψ_n;

Inoltre, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \smallsetminus K_n\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{r_n} \mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \smallsetminus K_n) \qquad \text{Per finita sub-additività di } \mu$$

$$\leq \sum_{k=1}^{r_n} \mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \smallsetminus H_{n,k}) \qquad \text{Per monotonia di } \mu \text{, essendo } K_n \subseteq H_{n,k} \text{ per ogni } k \in \{1, \ldots, r_n\} \text{ per costruzione di } K_n$$

$$< \sum_{k=1}^{r_n} \frac{\varepsilon}{2^{n+1} r_n} \qquad \text{Per costruzione degli } H_{n,k}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

da cui segue che

$$\mu\big((T \smallsetminus T_0) \smallsetminus K_n\big)$$

$$\leq \mu\left((T \smallsetminus T_0) \smallsetminus \bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \smallsetminus K_n\right) \qquad \text{Per sub-additività di } \mu \text{, in quanto}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$(T \setminus T_0) \setminus K_n = \left((T \setminus T_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} f_n^{-1}\{ \right.$$

Per costruzione di r_n, e per la catena di disuguaglianze appena ot

Si ponga infine $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$; esso è compatto in quanto intersezione di compatti.

Si ha

$\mu(T \setminus K) = \mu\big((T \setminus K) \setminus T_0\big)$	In quanto T_0 ha misura nulla per costruzione
$= \mu\big((T \setminus T_0) \setminus K\big)$	Facendo uso dell'uguaglianza insiemistica $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$
$= \mu\left((T \setminus T_0) \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n\right)$	Per definizione di K
$= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T \setminus T_0) \setminus K_n\right)$	In quanto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T \setminus T_0) \setminus K_n = (T \setminus T_0) \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$
$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\big((T \setminus T_0) \setminus K_n\big)$	Per numerabile sub-additività della misura di Lebesgue
$< \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n}$	Per confronto delle serie numeriche, essendo $\mu\big(T \setminus (T_0 \cup K_n)\big) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per quanto osservato prima
$= \varepsilon$	Dall'espressione della somma di una serie geometrica

Inoltre, $f_{|K}$ è continua.
Infatti, $(f_n)_{|K_n}$ è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$, per quanto osservato prima sui K_n;
allora, anche $(f_n)_{|K}$ è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$, avendo $K \subseteq K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ dalla definizione di K.
Dal fatto che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f per costruzione, segue quindi la continuità di $f_{|K}$, essendo limite uniforme di una successione di funzioni continue.

In corrispondenza a ε, il compatto K soddisfa perciò le proprietà richieste nella tesi, che dunque risulta acquisita.
■

Proposizione 22.6: Criterio di forte μ-misurabilità tramite la topologia debole

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è fortemente μ-misurabile;
2. Esiste $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, tale che $f_{|T \setminus T_0}$ sia misurabile rispetto alla topologia debole, e $f(T \setminus T_0)$ sia separabile.

Dimostrazione

Sia f fortemente μ-misurabile.
Cioè, esiste $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, tale che $f_{|T \setminus T_0}$ sia misurabile rispetto alla topologia forte, e $f(T \setminus T_0)$ sia separabile.

Allora, $f_{|T \setminus T_0}$ è misurabile anche rispetto alla topologia debole, essendo questa meno fine di quella forte.

Dunque, l'implicazione $\mathbf{1.} \Rightarrow \mathbf{2.}$ è acquisita.

Si provi ora l'implicazione $\mathbf{2.} \Rightarrow \mathbf{1.}$.

Si supponga quindi l'esistenza di $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, per cui $f_{|T \setminus T_0}$ è misurabile rispetto alla topologia debole, e $f(T \setminus T_0)$ è separabile.

Sia allora $D \subseteq f(T \setminus T_0)$ un insieme denso in $f(T \setminus T_0)$, al più numerabile, che esiste per ipotesi.

Sia $A \subseteq X$ aperto, e sia $V = \{(\mathbf{x}, r) \in D \times \mathbb{Q}^+ : \overline{B}(\mathbf{x}, r) \subseteq A\}$.

Si osserva che $\bigcup\limits_{(\mathbf{x}, r) \in V} \left(\overline{B}(\mathbf{x}, r) \cap f(T \setminus T_0)\right) = A \cap f(T \setminus T_0)$;

infatti, vale $\subseteq$ in quanto $\overline{B}(\mathbf{x}, r) \subseteq A$ per ogni $(\mathbf{x}, r) \in V$, per definizione di V.

Viceversa, si fissi $\mathbf{x}_0 \in A \cap f(T \setminus T_0)$.
Essendo A aperto e $\mathbf{x}_0 \in A$, esiste $r_0 \in \mathbb{Q}^+$ tale che $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r_0) \subseteq A$;
inoltre, essendo $\mathbf{x}_0 \in f(T \setminus T_0)$, per costruzione di D si ha $D \cap B\left(\mathbf{x}_0, \frac{r_0}{2}\right) \neq \varnothing$.
Sia dunque $\tilde{\mathbf{x}} \in D \cap B\left(\mathbf{x}_0, \frac{r_0}{2}\right)$;
si ha allora $\mathbf{x}_0 \in B\left(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{r_0}{2}\right) \subseteq \overline{B}\left(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{r_0}{2}\right)$, e al contempo si osserva che $B\left(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{r_0}{2}\right) \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}_0, r_0)$ in quanto $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \frac{r_0}{2}$ implica $\|x - x_0\| \leq \underbrace{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}_{<r_0/2} + \underbrace{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0\|}_{<r_0/2} < r_0$.
Allora, ne viene che $\left(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{r_0}{2}\right) \in V$, e $\mathbf{x}_0 \in \overline{B}\left(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{r_0}{2}\right)$; essendo anche $\mathbf{x}_0 \in f(T \setminus T_0)$, segue l'inclusione $\supseteq$.

Dall'uguaglianza insiemistica appena acquisita segue allora che l'insieme $f^{-1}_{|T \setminus T_0}(A) = \{t \in T \setminus T_0 : f(t) \in A\}$ è pari a $\bigcup\limits_{(\mathbf{x},r) \in V} \{t \in T \setminus T_0 : f(t) \in \overline{B}(\mathbf{x}, r)\} = \bigcup\limits_{(\mathbf{x},r) \in V} f^{-1}_{|T \setminus T_0}\left(\overline{B}(\mathbf{x}), r\right)$.

Essendo $\overline{B}(\mathbf{x}, r)$ chiuso e convesso, esso è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3], per ogni $(\mathbf{x}, r) \in V$;
allora, $f^{-1}_{|T \setminus T_0}\left(\overline{B}(\mathbf{x}), r\right)$ è misurabile per ogni $(\mathbf{x}, r) \in V$ per ipotesi, e dunque $\bigcup\limits_{(\mathbf{x},r) \in V} f^{-1}_{|T \setminus T_0}\left(\overline{B}(\mathbf{x}), r\right)$ è misurabile in quanto unione al più numerabile (essendo V numerabile) di insiemi misurabili.

Essendo $\bigcup\limits_{(\mathbf{x},r) \in V} f^{-1}_{|T \setminus T_0}\left(\overline{B}(\mathbf{x}), r\right) = f^{-1}_{|T \setminus T_0}(A)$, ne segue che $f^{-1}_{|T \setminus T_0}(A)$ è misurabile.
Dall'aribrarietà di $A \subseteq X$ aperto viene la misurabilità di $f_{|T \setminus T_0}$.
La tesi è allora acquisita.
■