

11 - Introduzione al Calcolo Differenziale negli Spazi di Banach

Premesse

> Definizione: Segmento, Poligonale

Sia E uno spazio vettoriale.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Si dice **segmento** di estremi \mathbf{x} e \mathbf{y} l'insieme

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mid \lambda \in [0; 1]\}.$$

Siano $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in E$.

Si dice **poligonale** di vertici $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ l'insieme

$$[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] := [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \cup \dots \cup [\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n].$$

I punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_n sono detti **estremi** della poligonale.

Derivabilità secondo Gateaux e secondo Fréchet

⌘ Definizione: Derivabilità e derivata, secondo Gateaux

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.

Sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione.

f si dice **derivabile secondo Gateaux** (o G-derivabile) in \mathbf{x}_0 quando esiste $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = \varphi(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in X$.

Tale φ è unico (per unicità del limite); esso prende il nome di **derivata secondo Gateaux** di f in \mathbf{x}_0 , e si denota con $f'(\mathbf{x}_0)$.

Q Osservazione

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.

Sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione G-derivabile in \mathbf{x}_0 .

Allora, per ogni $\mathbf{v} \in X$ si ha $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})$.

Infatti, si ha $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})$ per definizione di derivata secondo Gateaux in \mathbf{x}_0 , che esiste per ipotesi.

D'altra parte, si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 - \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{-\lambda} = - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda(-\mathbf{v})) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = -f'(\mathbf{x}_0)(-\mathbf{v}),$$

che per linearità di $f'(\mathbf{x}_0)$ è pari a $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})$.

⌘ Definizione: Derivabilità e derivata, secondo Fréchet

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.

Sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione.

f si dice **derivabile secondo Fréchet** (o F-derivabile) in \mathbf{x}_0 quando esiste $\psi \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_X} = \mathbf{0}_Y$.

Un tale ψ prende il nome di **derivata secondo Fréchet** di f in \mathbf{x}_0 .

Proposizione 11.1: F-derivabilità implica G-derivabilità

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.

Sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione F-derivabile in \mathbf{x}_0 .

Si hanno i seguenti fatti:

- f è G-derivabile in \mathbf{x}_0 ;
- La derivata secondo Fréchet di f in \mathbf{x}_0 è unica, e coincide con $f'(\mathbf{x}_0)$.

Dimostrazione

Sia ψ una derivata secondo Fréchet di f in \mathbf{x}_0 , che esiste per ipotesi di F-derivabilità.

Sia $\mathbf{v} \in X$.

Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}_X$, si ha $\psi(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$ per linearità; d'altra parte, si ha $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{0}_X) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{0}_Y}{\lambda} = \mathbf{0}_Y$, per cui $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$.

Ne segue che $\psi(\mathbf{0}_X) = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{0}_X)$.

Si supponga ora $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_X$, cosicché $\|\mathbf{v}\|_X \neq 0$.

Si ha $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Y$ per definizione di ψ ;

restringendo tale espressione ai vettori del tipo $\lambda \mathbf{v}$, con $\lambda > 0$, si ottiene che $\mathbf{0}_X$ è ancora punto di accumulazione per questo insieme, e il limite di sopra effettuato sulla restrizione, che dunque ha senso, è lo stesso.

Risulta cioè che

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) - \psi(\lambda \mathbf{v})}{\|\lambda \mathbf{v}\|_X} = \mathbf{0}_Y.$$

Si osservi ora che $\frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) - \psi(\lambda \mathbf{v})}{\|\lambda \mathbf{v}\|_X} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_X} \left(\frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} - \psi(\mathbf{v}) \right)$ per ogni $\lambda > 0$, per linearità di ψ e per assoluta omogeneità di $\|\cdot\|_X$.

$$\text{Si ha allora che } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|\mathbf{v}\|_X \cdot \underbrace{\frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) - \psi(\lambda \mathbf{v})}{\|\lambda \mathbf{v}\|_X}}_{\rightarrow \mathbf{0}_Y} + \psi(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}).$$

Dall'arbitrarietà di $\mathbf{v} \in X$ segue allora che f è G-derivabile in \mathbf{x}_0 , e $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in X$, da cui viene l'unicità di ψ per unicità della derivata secondo Gateaux.

■

In virtù della proposizione precedente, la derivata secondo Gateaux e secondo Fréchet verranno denominate semplicemente "derivata".

Q Osservazione: Operatori lineari continui sono F-derivabili

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.

Sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Allora, T è F-derivabile in X , con derivata pari a T .

Infatti, per ogni $\mathbf{v} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ si ha $\frac{T(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_X} = \mathbf{0}_Y$ per linearità di T .

Ne segue quindi che $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{T(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_X} = \mathbf{0}_Y$.

■

Proposizione 11.2: F-Derivabilità implica continuità

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in A$.

Sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione F-derivabile in \mathbf{x}_0 .

Allora, f è continua in \mathbf{x}_0 .

Dimostrazione

Si ha $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_X} = \mathbf{0}_Y$ per ipotesi.

Per acquisire la continuità di f in \mathbf{x}_0 , si mostri che $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}_X} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_Y$.

Si osservi intanto che $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}_X} f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$, essendo $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$, cioè lineare e continuo.

$$\text{Si ha } \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}_X} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}_X} \|\mathbf{v}\|_X \underbrace{\frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_X}}_{\rightarrow \mathbf{0}_Y} + \underbrace{f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})}_{\rightarrow \mathbf{0}_Y} = \mathbf{0}_Y.$$

■

Osservazione

La G-derivabilità non implica la continuità (dunque neanche la F-derivabilità, per il teorema precedente).

Ad esempio, si definisca $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

f è G-derivabile in $(0, 0)$.

Fissati infatti $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \neq 0$, si ha $\frac{f((0,0)+\lambda(u,v))-f(0,0)}{\lambda} = \begin{cases} \lambda \frac{v^3}{u}, & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}$; ne segue che

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f((0,0)+\lambda(u,v))-f(0,0)}{\lambda} = \mathbf{0}_Y \text{ per ogni } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Pertanto, $f'(0, 0) = \mathbf{0}_{(\mathbb{R}^2)^*}$.

f non è continua in $(0, 0)$.

Infatti, restringendo f all'insieme $\gamma_1 = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ si ottiene $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{\gamma_1}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t} = 0$.

D'altra parte, restringendo f all'insieme $\gamma_2 = \{(t^3, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ si ottiene $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{\gamma_2}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t^3, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^3} = 1$.

Derivata di funzioni a valori reali

Q Osservazione

Sia $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione G-derivabile in \mathbf{x}_0 .

Per il [Teorema 10.15], la mappa $X \rightarrow X^* : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle$ è un'isometria lineare biunivoca;

pertanto, esiste un unico $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ tale che $f'(\mathbf{x}_0) = \langle \tilde{\mathbf{x}}, \cdot \rangle$.

⌘ Definizione: Derivata, per funzioni a valori reali

L'unico $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ tale che $f'(\mathbf{x}_0) = \langle \tilde{\mathbf{x}}, \cdot \rangle$ si denota con $\dot{f}(\mathbf{x}_0)$.

Derivata di funzioni di variabile reale

⌘ Definizione: Derivabilità e derivata, per funzioni di variabile reale

Sia $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $x_0 \in I$.

Sia $f : I \rightarrow Y$ una funzione.

f si dice **derivabile** in x_0 quando esiste $\omega \in Y$ tale che $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda) - f(x_0)}{\lambda} = \omega$.

Tale ω è unico (per unicità del limite); esso prende il nome di **derivata** di f in x_0 , e si denota con $\dot{f}(x_0)$.

📄 Proposizione 11.3: Legame tra derivabilità e F-derivabilità

Sia $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

Sia $f : I \rightarrow Y$ una funzione.

Si hanno i seguenti fatti:

- f è derivabile in x_0 se e solo se f è F-derivabile in x_0 ;
- In caso di derivabilità, si ha $f'(x_0)(x) = \dot{f}(x_0)x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

🔍 Osservazioni preliminari

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$ se e solo se esiste $\alpha \in Y$ tale che $f(x) = \alpha x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Infatti, le funzioni di questo tipo sono lineari e continue.

Viceversa, data una funzione $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$, si ha $f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per linearità di f .

Dunque, $f(x) = \alpha x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con $\alpha = f(1)$.

Dimostrazione

Si supponga f F-derivabile in x_0 .

Sia $\alpha \in Y$ tale che $f'(x_0)(x) = \alpha x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (che esiste per l'osservazione preliminare).

Si ha allora $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)}{|h|} = \mathbf{0}$, ossia $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha h}{|h|} = \mathbf{0}$

Allora, si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)(h) - \alpha h}{|h|}}_{\rightarrow \mathbf{0}} + \alpha = \alpha.$$

Dunque, f è derivabile in x_0 , e $\dot{f}(x_0) = \alpha$; dunque, $f'(x_0)(x) = \dot{f}(x_0) x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Viceversa, si supponga f derivabile in x_0 .

Sia $\psi : \mathbb{R} \rightarrow Y$ definita ponendo $\psi(x) = \dot{f}(x_0) x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; si ha $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$ per l'osservazione preliminare.

$$\text{Si ha } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \psi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \dot{f}(x_0)h}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{|h|} \underbrace{\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \dot{f}(x_0) \right)}_{\rightarrow \mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

Dunque, $\psi = f'(x_0)$.

■

Q Osservazione: Equivalenza delle definizioni di \dot{f} , per f funzione reale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in x_0 .

La definizione di $\dot{f}(x_0)$ data per funzioni a valori reali e per funzioni di variabile reale è la stessa.

Infatti, sia $\dot{f}_1(x_0)$ la derivata $\dot{f}(x_0)$ intesa nella definizione per funzioni di variabile reale;

sia $\dot{f}_2(x_0)$ la derivata $\dot{f}(x_0)$ intesa nella definizione per funzioni a valori reali.

Per definizione di $\dot{f}_1(x_0)$, esso è l'unico $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = \tilde{x} \cdot (\cdot)$.

D'altra parte, per la [Proposizione 11.3] si ha $f'(x_0) = \dot{f}_2(x_0) \cdot (\cdot)$.

Pertanto, $\dot{f}_1(x_0) = \dot{f}_2(x_0)$.

Involucri e chiusure convesse

⌘ Definizione: Involucro convesso

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia $A \subseteq E$.

Si dice **involucro convesso** (o inviluppo convesso) di A l'insieme

$\text{conv}(A) := \bigcap \{C \subseteq E : C \text{ convesso}, C \supseteq A\}.$

Q Osservazione

$\text{conv}(A)$ è il minimo sottoinsieme convesso di E contenente A , rispetto all'inclusione.

Infatti, $\text{conv}(A)$ è contenuto in ogni sottoinsieme convesso di E contenente A per definizione; inoltre, esso è convesso in quanto l'intersezione arbitraria di insiemi convessi è convessa (segue direttamente dalla definizione di convessità).

Proposizione 11.4: Caratterizzazione di Carathéodory dell'involucro convesso

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia $A \subseteq E$.

Si ha $\text{conv}(A) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mid n \in \mathbb{N}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 : \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}$.

Osservazioni preliminari

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ tali che $\lambda_{n+1} \neq 1$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$.

Allora:

- $\lambda_{n+1} \leq 1$;
- Se $\lambda_{n+1} = 1$, si ha $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$;
- Se $\lambda_{n+1} \neq 1$, si ha $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}, \dots, \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \geq 0$;
- Se $\lambda_{n+1} \neq 1$, si ha $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$.

Il primo punto si acquisisce osservando che $1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} \geq \lambda_{n+1}$, essendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ per ipotesi.

Il secondo punto si acquisisce osservando che, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$0 \leq \lambda_i \quad \text{Per ipotesi}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_n && \text{Essendo } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ per ipotesi} \\
&= 1 - \lambda_{n+1} && \text{In quanto } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1 \text{ per ipotesi} \\
&= 0 && \text{In quanto si è supposto } \lambda_{n+1} = 1
\end{aligned}$$

Il terzo punto si acquisisce osservando che $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ per ipotesi e $1 - \lambda_{n+1} > 0$ per il primo punto ed essendo $\lambda_{n+1} \neq 1$.

Il quarto punto si acquisisce osservando che

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \\
&= \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \\
&= \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1 && \text{In quanto } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1 \text{ per ipotesi}
\end{aligned}$$

Dimostrazione

Si ponga $B = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mid n \in \mathbb{N}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 : \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}$.

Si provi intanto che B è convesso.

Siano dunque $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n$ e $\mu_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{y}_m$ con le proprietà descritte da B ;

siano $\alpha, \beta \geq 0$ tali che $\alpha + \beta = 1$.

Si ha $\alpha(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n) + \beta(\mu_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{y}_m) \in B$.

Infatti,

$$\alpha(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n) + \beta(\mu_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{y}_m) = \alpha\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha\lambda_n \mathbf{x}_n + \beta\mu_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \beta\mu_m \mathbf{y}_m;$$

si ha $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n, \beta\mu_1, \dots, \beta\mu_m \geq 0$, e anche

$$\alpha\lambda_1 + \cdots + \alpha\lambda_n + \beta\mu_1 + \cdots + \beta\mu_m$$

$$= \alpha(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) + \beta(\mu_1 + \cdots + \mu_m)$$

$$= \alpha + \beta$$

$$= 1$$

In quanto $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ e $\mu_1 + \cdots + \mu_m = 1$ per costruzione

Per costruzione di α e β

Ciò mostra che A è convesso.

Per acquisire la tesi resta allora da provare che, fissato $C \supseteq A$ convesso, si ha $B \subseteq C$.

Si provi induttivamente che:

per ogni $n \in \mathbb{N}$, ogni vettore del tipo $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n$, con $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in A$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ tali che $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, appartiene a C .

Per $n = 1$, l'insieme di tali vettori è esattamente A (in quanto del tipo $\lambda_1 \mathbf{x}_1$, con $\mathbf{x}_1 \in A$ e $\lambda_1 = 1$); avendo posto $A \subseteq C$, il passo base è quindi acquisito.

Sia ora $n \in \mathbb{N}$ tale che valga l'enunciato indicato sopra, e si provi questo in corrispondenza a $n + 1$.

Si consideri dunque $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}$, con $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1} \in A$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ tali che $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$.

Se $\lambda_{n+1} = 1$, per le osservazioni preliminari si ha $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}$, che per il passo base appartiene a C .

Se invece $\lambda_{n+1} \neq 1$, si ha

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}$$

$$= \lambda_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} \mathbf{x}_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \mathbf{x}_n \right)$$

$\in C$

Infatti, $\mathbf{x}_{n+1} \in A \subseteq C$;

$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} \mathbf{x}_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \mathbf{x}_n \in C$ per ipotesi induttiva, in

quanto $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} \mathbf{x}_1, \dots, \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} \geq 0$ e

$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} \mathbf{x}_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$ per le osservazioni preliminari;

$\lambda_{n+1} \in [0; 1]$, e C è convesso

Ne segue che $B \subseteq C$.

Pertanto, $B = \text{conv}(A)$, come si voleva.

■

Proposizione 11.5: Diametro dell'involucro convesso

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $A \subseteq E$.

Si ha $\text{diam}(\text{conv}(A)) = \text{diam}(A)$.

Q Osservazioni preliminari

Siano $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in A$;

siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ tali che $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Si ha $\|\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \leq \lambda_1 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| + \cdots + \lambda_n \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|$.

Infatti,

$$\begin{aligned}
& \|\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \\
&= \|\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \mathbf{x}_0\| \quad \text{Essendo } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \text{ per ipotesi} \\
&= \|\lambda_1 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_n (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)\| \\
&\leq \lambda_1 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| + \cdots + \lambda_n \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \quad \text{Per sub-additività e assoluta omogeneità delle norme, essendo } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \\
&\quad \text{per ipotesi}
\end{aligned}$$

Dimostrazione

Poiché $A \subseteq \text{conv}(A)$, si ha $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(\text{conv}(A))$.

Dunque, se A non è limitato, essendo $\text{diam}(A) = +\infty$ si ha anche $\text{diam}(\text{conv}(A)) = +\infty$.

Si supponga ora A limitato, e sia $d = \text{diam}(A)$;

si provi che $\text{diam}(A) \geq \text{diam}(\text{conv}(A))$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{conv}(A)$;

per la [Proposizione 11.4], si ha

$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n$, con $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in A$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ tali che $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$;

$\mathbf{y} = \mu_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{y}_m$, con $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m \in A$ e μ_1, \dots, μ_m tali che $\mu_1 + \cdots + \mu_m = 1$.

Si ha

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\
&= \|\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n - \mu_1 \mathbf{y}_1 - \cdots - \mu_m \mathbf{y}_m\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|\mathbf{x}_i - \mu_1 \mathbf{y}_1 - \cdots - \mu_m \mathbf{y}_m\| \quad \text{Per l'osservazione preliminare} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \|\mu_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{y}_m - \mathbf{x}_i\|
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j \|\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_i\|$$

$$\|\mu_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{y}_m - \mathbf{x}_i\| \leq \sum_{j=1}^m \mu_j \|\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_i\| \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ per}$$

l'osservazione preliminare

$$\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j d$$

Per definizione di d , essendo $\mathbf{y}_j, \mathbf{x}_i \in A$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$

$$= d \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \right)$$

$$= d$$

Essendo $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ e $\mu_1 + \cdots + \mu_m = 1$ per costruzione

Dunque, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq d = \text{diam}(A)$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{conv}(A)$;

ne segue che $\text{diam}(A) \geq \text{diam}(\text{conv}(A))$, come si voleva.

■

⌘ Definizione: Chiusura convessa

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $A \subseteq X$.

Si dice **chiusura convessa** di A l'insieme

$$\overline{\text{conv}}(A) := \bigcap \{C \subseteq E : C \text{ chiuso e convesso}, C \supseteq A\}.$$

🔍 Osservazioni

- $\overline{\text{conv}}(A)$ è il minimo sottoinsieme chiuso e convesso di E contenente A , rispetto all'inclusione.

Infatti, $\overline{\text{conv}}(A)$ è contenuto in ogni sottoinsieme chiuso e convesso di E contenente A per definizione; inoltre, esso è chiuso e convesso in quanto l'intersezione arbitraria di insiemi chiusi e convessi è chiusa e convessa.

- $\overline{\text{conv}}(A) = \overline{\text{conv}(A)}$.

Infatti, $\overline{\text{conv}(A)}$ è chiuso, e convesso essendo chiusura di un insieme convesso (Si veda l'Osservazione 2 sulla convessità, capitolo 7).

Dunque, $\overline{\text{conv}(A)} \supseteq \overline{\text{conv}}(A)$.

D'altra parte, $\overline{\text{conv}}(A)$ è convesso e contiene A ;

allora, $\overline{\text{conv}}(A) \supseteq \text{conv}(A)$.

Essendo $\overline{\text{conv}}(A)$ anche chiuso, contenendo $\text{conv}(A)$ si ha $\overline{\text{conv}}(A) \supseteq \overline{\text{conv}(A)}$.

- $\text{diam}(\overline{\text{conv}}(A)) = \text{diam}(A)$.

Infatti,

$$\text{diam}(\overline{\text{conv}}(A)) = \text{diam}(\overline{\text{conv}(A)}) \quad \text{Per l'osservazione precedente}$$

$$= \text{diam}(\text{conv}(A)) \quad \text{In quanto il diametro di un insieme coincide con il diametro della sua chiusura}$$

$$= \text{diam}(A) \quad \text{Per la [Proposizione 11.5]}$$

Proposizione 11.6: Maggiorazione della distanza tra un punto in un insieme e un punto nella sua chiusura convessa

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $\mathbf{x} \in A$.

Sia $\mathbf{y} \in \overline{\text{conv}}(A)$.

Allora, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \text{diam}(A)$.

Dimostrazione

Essendo $\mathbf{x} \in A \subseteq \overline{\text{conv}}(A)$ e $\mathbf{y} \in \overline{\text{conv}}(A)$ per ipotesi, si ha

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \text{diam}(\overline{\text{conv}}(A));$$

poiché $\text{diam}(\overline{\text{conv}}(A)) = \text{diam}(A)$ per quanto osservato prima.

■

Dimostrazione alternativa: Senza fare uso dell'osservazione $\text{diam}(\overline{\text{conv}}(A)) = \text{diam}(A)$, che utilizza le [Proposizioni 11.4, 11.5]

Se A non è limitato, la tesi è di immediata acquisizione essendo $\text{diam}(A) = +\infty$.

Si supponga quindi A limitato, e sia $d = \text{diam}(A)$.

Dalla definizione di d segue che, per ogni $\mathbf{z} \in A$ si ha $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leq d$;

si ha cioè $A \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}, d)$.

Essendo $\overline{B}(\mathbf{x}, d)$ un intorno sferico chiuso, esso è chiuso e convesso;

segue allora dalla definizione di chiusura convessa che $\overline{\text{conv}}(A) \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}, d)$.

Essendo allora $\mathbf{y} \in \overline{\text{conv}}(A)$, si ha $\mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{x}, d)$, ossia

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq d = \text{diam}(A), \text{ come si voleva.}$$

■

Il teorema di Lagrange

Teorema 11.7: Teorema di Lagrange

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione, continua su $A \setminus \overset{\circ}{A}$, e G-derivabile su $\overset{\circ}{A}$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in A$ tali che $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \in \overset{\circ}{A}$ per ogni $\lambda \in]0; 1[$.

Sia $C = \{f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \mid \lambda \in]0; 1[\}$.

Allora, $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) \in \overline{\text{conv}}(C)$.

Dimostrazione

Si proceda per assurdo, supponendo $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) \notin \overline{\text{conv}}(C)$.

Dalle osservazioni sulla chiusura convessa, si ha che $\overline{\text{conv}}(C)$ è chiuso e convesso.

$\{f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})\}$ è compatto e convesso, e disgiunto da $\overline{\text{conv}}(C)$ per ipotesi di assurdo.

Per il Teorema di Separazione ([Teorema 7.10]), esiste allora $\varphi \in Y^*$ tale che

$$\sup_{\mathbf{y} \in \overline{\text{conv}}(C)} \varphi(\mathbf{y}) < \varphi(f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})).$$

In particolare, essendo $C \subseteq \overline{\text{conv}}(C)$, ne segue che $\varphi(f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x})) < \varphi(f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}))$ per ogni $\lambda \in]0; 1[$.

Si definisca ora la funzione $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $\gamma(\lambda) = \varphi(f(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x})))$ per ogni $\lambda \in [0; 1]$.

Si provi che γ è derivabile in $]0; 1[$.

Si fissi dunque $\lambda_0 \in]0; 1[$; fissato $h \in \mathbb{R}$ dimodoché $\lambda_0 + h \in]0; 1[$, si ha

$$\frac{\gamma(\lambda_0 + h) - \gamma(\lambda_0)}{h} = \frac{\varphi(f(\mathbf{x} + (\lambda_0 + h)(\mathbf{z} - \mathbf{x}))) - \varphi(f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x})))}{h} \quad \text{Definizione di } \gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varphi(f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + h(\mathbf{z} - \mathbf{x}))) - \varphi(f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x})))}{h} \\
&= \varphi\left(\frac{f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + h(\mathbf{z} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}))}{h}\right) \quad \text{Per linearità di } \varphi
\end{aligned}$$

Per ipotesi, $\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \in \overset{\circ}{A}$, e f è G-derivabile su $\overset{\circ}{A}$;

$$\text{pertanto, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + h(\mathbf{z} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}))}{h} = f'(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x}).$$

Dalla continuità di φ (essendo $\varphi \in Y^*$) segue allora che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(\lambda_0 + h) - \gamma(\lambda_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi\left(\frac{f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + h(\mathbf{z} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}))}{h}\right) = \varphi(f'(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x})).$$

Dunque, è stato ricavato che γ è derivabile in $]0; 1[$, e che

$$\dot{\gamma}(\lambda) = \varphi(f'(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x})) \text{ per ogni } \lambda \in]0; 1[.$$

Si ha inoltre che γ è continua in 0 e 1.

Infatti, la funzione $[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $\lambda \mapsto f(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))$ è continua in 0 e 1;

questo fatto si acquisisce osservando che, su \mathbf{x} e su \mathbf{z} , la restrizione di f al segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{z}]$ è continua per G-derivabilità di f , se $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \overset{\circ}{A}$, oppure per ipotesi di continuità di f su $A \setminus \overset{\circ}{A}$, se $\mathbf{x}, \mathbf{z} \notin \overset{\circ}{A}$.

Essendo γ composizione di φ , continua, con tale funzione, segue la continuità di γ in 0 e 1.

Allora, γ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.

Pertanto, esiste $\tilde{\lambda} \in]0; 1[$ tale che $\gamma(1) - \gamma(0) = \dot{\gamma}(\tilde{\lambda})$, ossia

$$\varphi(f(\mathbf{z})) - \varphi(f(\mathbf{x})) = \varphi(f'(\mathbf{x} + \tilde{\lambda}(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x}));$$

sfruttando la linearità di φ al primo membro, si ottiene allora

$\varphi(f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})) = \varphi(f'(\mathbf{x} + \tilde{\lambda}(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x}))$, in contraddizione con la disuguaglianza ottenuta inizialmente per costruzione di φ .

■

Nel caso in cui $Y = \mathbb{R}$, il teorema di Lagrange si può dimostrare senza procedere per assurdo:

Teorema 11.7*: Teorema di Lagrange (per funzioni a valori reali)

Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, continua su $A \setminus \overset{\circ}{A}$, e G-derivabile su $\overset{\circ}{A}$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in A$ tali che $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \in \overset{\circ}{A}$ per ogni $\lambda \in]0; 1[$.

Sia $C = \{f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \mid \lambda \in]0; 1[\}$.

Allora, $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) \in \overline{\text{conv}}(C)$.

Dimostrazione

Sia $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $\gamma(\lambda) = f(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))$ per ogni $\lambda \in [0; 1]$.

Tale funzione è derivabile in $]0; 1[$;

infatti, fissato $\lambda_0 \in]0; 1[$, si ha $\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \in \overset{\circ}{A}$, e f G-derivabile su $\overset{\circ}{A}$ per ipotesi; pertanto,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(\lambda_0 + h) - \gamma(\lambda_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + (\lambda_0 + h)(\mathbf{z} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + h(\mathbf{z} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}))}{h} = f'(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Inoltre, γ è continua in 0 e 1;

questo fatto si acquisisce osservando che, su \mathbf{x} e su \mathbf{v} , la restrizione di f al segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{z}]$ è continua per G-derivabilità di f , se

$\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \overset{\circ}{A}$, oppure per ipotesi di continuità di f su $A \setminus \overset{\circ}{A}$, se $\mathbf{x}, \mathbf{z} \notin \overset{\circ}{A}$.

Allora, γ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.

Pertanto, esiste $\tilde{\lambda} \in]0; 1[$ tale che $\gamma(1) - \gamma(0) = \dot{\gamma}(\tilde{\lambda})$, ossia

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x} + \tilde{\lambda}(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \in C \subseteq \overline{\text{conv}}(C).$$

■

↪ Corollario 11.8: Corollario al teorema di Lagrange

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione.

Si supponga f continua su $A \setminus \overset{\circ}{A}$, e G-derivabile su $\overset{\circ}{A}$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in A$ tali che, per ogni $\lambda \in]0; 1[$, si abbia $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \in \overset{\circ}{A}$ ed esista $M > 0$ tale che $\|f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$.

Allora, $\|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})\|_Y \leq M\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_X$.

✓ Dimostrazione

Valgono tutte le ipotesi del teorema di Lagrange ([Teorema 11.7]);

dunque, $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) \in \overline{\text{conv}}(C)$, dove $C = \{f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \mid \lambda \in]0; 1[\}$.

Per ogni $\lambda \in]0; 1[$, si ha

$$\|f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x})\|_Y \leq \|f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_X \quad \text{Per come è definita la norma } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

$$\implies \|f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x})\|_Y \leq M\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_X \quad \text{Essendo } \|f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M \text{ per ipotesi}$$

$$\implies f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \in \overline{B}(\mathbf{0}_Y, M\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_X)$$

Pertanto, si ha $C \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_Y, M\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_X)$.

Essendo $\overline{B}(\mathbf{0}_Y, M\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_X)$ un intorno sferico chiuso in Y , esso è chiuso e convesso; contenendo C , si ha che $\overline{\text{conv}}(C) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_Y, M\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_X)$.

Per quanto osservato inizialmente si ha allora $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) \in \overline{\text{conv}}(C) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_Y, M\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_X)$, per cui vale

$$\|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})\|_Y \leq M\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_X .$$

■