14 - Funzioni di Classe C¹ e Diffeomorfismi

Funzioni di classe C^1

⌘ Definizione: Funzione di classe C^1.

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$ aperto.

Una funzione $f : A \to Y$ si dice **di classe** C^1 quando è G-derivabile in A, e f' è continua in A.

Osservazione 1

Per la [Proposizione 12.3], Le funzioni di classe C^1 sono F-derivabili, dunque anche continue, in A.

Osservazione 2

Gli operatori lineari continui sono di classe C^1.
Infatti, sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

T è F-derivabile in X.
Inoltre, si ha $T'(\mathbf{x}) = T$ per ogni $\mathbf{x} \in X$; pertanto, T' è costante, dunque continua, in X.

Proposizione 14.1: Combinazione lineare di funzioni di classe C^1 è di classe C^1

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$ aperto.
Siano $f, g : A \to Y$ due funzioni di classe C^1.
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Allora, $\alpha f + \beta g$ è di classe C^1.

Dimostrazione

f e g sono G-derivabili in A in quanto di classe C^1.

Per la [Proposizione 12.1], $\alpha f + \beta g$ è G-derivabile in A, e inoltre si ha
$(\alpha f + \beta g)'(\mathbf{x}) = \alpha f'(\mathbf{x}) + \beta g'(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.

Cioè, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$;
essendo f' e g' continue in A essendo f e g di classe C^1, ne segue che anche $\alpha f' + \beta g' = (\alpha f + \beta g)'$ è continua in A.

Pertanto, $\alpha f + \beta g$ è di classe C^1.
■

Proposizione 14.2: Composizione di funzioni di classe C^1 è di classe C^1

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tre spazi normati.
Sia $A \subseteq X$ aperto.
Sia $B \subseteq Y$ aperto.
Sia $f : A \to Y$ una funzione di classe C^1, tale che $f(A) \subseteq B$.
Sia $g : B \to Z$ una funzione di classe C^1.

Allora, $g \circ f : A \to Z$ è di classe C^1.

Osservazioni preliminari

Sia $\varphi_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$, e sia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ una successione convergente a φ_0.
Sia $\psi_0 \in \mathcal{L}(Y, Z)$, e sia $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(Y, Z)$ una successione convergente a ψ_0.

Allora, data la successione $\{\psi_n \circ \varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Z)$, si ha $\lim\limits_n \psi_n \circ \varphi_n = \psi_0 \circ \varphi_0$.

Dimostrazione

Si provi che $\lim\limits_n \|\psi_n \circ \varphi_n - \psi_0 \circ \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Z)} = 0$.

Intanto, si osservi che vale

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha
$\|\psi_n \circ \varphi_n - \psi_0 \circ \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Z)} = \|\psi_n \circ \varphi_n - \psi_n \circ \varphi_0 + \psi_n \circ \varphi_0 - \psi_0 \circ \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Z)}$	
$\leq \|\psi_n \circ \varphi_n - \psi_n \circ \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Z)} + \|\psi_n \circ \varphi_0 - \psi_0 \circ \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Z)}$	Sub-additività delle norme
$= \|\psi_n \circ (\varphi_n - \varphi_0)\|_{\mathcal{L}(X,Z)} + \|(\psi_n - \psi_0) \circ \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Z)}$	$\psi_n \circ \varphi_n - \psi_n \circ \varphi_0 = \psi_n \circ (\varphi_n - \varphi_0)$ per linearità di ψ_n $\psi_n \circ \varphi_0 - \psi_0 \circ \varphi_0 = (\psi_n - \psi_0) \circ \varphi_0$ per definizione di $\psi_n - \psi_0$
$\leq \|\psi_n\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot \|\varphi_n - \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|\psi_n - \psi_0\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot \|\varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$	Per submoltiplicatività della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Z)}$ ([Proposizione 6.7])

Si ha:

- $\lim\limits_n \|\varphi_n - \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$ in quanto $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a φ_0.
- $\lim\limits_n \|\psi_n - \psi_0\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} = 0$ in quanto $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ψ_0.
- $\lim\limits_n \|\psi_n\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} = \|\psi_0\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}$ per continuità della norma, in quanto $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ψ_0.

Allora, $\lim\limits_n \|\psi_n\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot \|\varphi_n - \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|\psi_n - \psi_0\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot \|\varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$;
ne segue per confronto che

$$\lim_n \|\psi_n \circ \varphi_n - \psi_0 \circ \varphi_0\|_{\mathcal{L}(X,Z)} = 0.$$

■

Dimostrazione

f e g sono F-derivabili nel loro dominio, essendo di classe C^1.

Per la [Proposizione 13.1], $g \circ f$ è F-derivabile in A, e inoltre si ha $(g \circ f)'(\mathbf{x}) = g'\big(f(\mathbf{x})\big) \circ f'(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.

Si provi la continuità di $(g \circ f)'$ per successioni.

Si fissino dunque $\mathbf{x}_0 \in A$ e una successione $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ convergente a $\mathbf{x}_0$;
si mostri che $\lim_n (g \circ f)'(\mathbf{x}_n) = (g \circ f)'(\mathbf{x}_0)$, ossia

$$\lim_n g'\big(f(\mathbf{x}_n)\big) \circ f'(\mathbf{x}_n) = g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) \circ f'(\mathbf{x}_0).$$

Essendo f di classe C^1, si ha $\lim_n f'(\mathbf{x}_n) = f'(\mathbf{x}_0)$;
inoltre, sempre in quanto f è di classe C^1, si ha $\lim_n f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_0)$.

Essendo g di classe C^1 ed essendo $\lim_n f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_0)$, si ha $\lim_n g'\big(f(\mathbf{x}_n)\big) = g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)$.

Per l'osservazione preliminare, si ha allora
$\lim_n g'\big(f(\mathbf{x}_n)\big) \circ f'(\mathbf{x}_n) = g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) \circ f'(\mathbf{x}_0)$.

■

Diffeomorfismi di classe C^1 e il teorema dell'inversione locale

⌘ Definizione: Diffeomorfismo

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$ aperto.
Sia $B \subseteq Y$ aperto.

Una funzione $f : A \to B$ si dice **diffeomorfismo di classe** C^1 quando è di classe C^1, biunivoca e con inversa di classe C^1.

Proposizione 14.3: Prima caratterizzazione dei diffeomorfismi di classe C^1

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.
Sia $A \subseteq X$ aperto.
Sia $B \subseteq Y$ aperto.
Sia $f : A \to B$.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è un diffeomorfismo di classe C^1;
2. f è un omeomorfismo di classe C^1, e $f'(A) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga che f sia un diffeomorfismo di classe C^1.

Allora, f è un omeomorfismo in quanto essendo una funzione biunivoca, continua essendo di classe C^1, e con inversa continua essendo di classe C^1.

Inoltre, essendo l'inversa di classe C^1, essa è F-derivabile in A; dunque, per la [Proposizione 13.4] si ha $f'(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}(X, Y)$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.
■

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Si supponga che f sia un omeomorfismo di classe C^1, e che $f'(A) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$.
Basta allora provare che $f^{-1} : B \to A$ è di classe C^1.

Essendo $f'(A) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$, per la [Proposizione 13.4] f^{-1} è F-derivabile in B, e si ha

$(f^{-1})'(\mathbf{y}) = \left(f'\left(f^{-1}(\mathbf{y})\right)\right)^{-1}$, per ogni $\mathbf{y} \in B$.

Per acquisire la tesi, resta dunque da mostrare che la funzione $(f^{-1})' : \underset{\mathbf{y} \mapsto (f^{-1})'(\mathbf{y}) = \left(f'\left(f^{-1}(\mathbf{y})\right)\right)^{-1}}{B \to \mathcal{L}(Y, X)}$ è continua.

Si ha che $\mathcal{F} = \Phi \circ f' \circ f^{-1}$, dove:

- $f^{-1} : \underset{\mathbf{y} \mapsto f^{-1}(\mathbf{y})}{B \to A}$;
- $f' : \underset{\mathbf{x} \mapsto f'(\mathbf{x})}{A \to \mathcal{O}(X, Y)}$;
- $\Phi : \underset{\varphi \mapsto \varphi^{-1}}{\mathcal{O}(X, Y) \to \mathcal{L}(X, Y)}$.

f^{-1} è continua essendo f un omeomorfismo per ipotesi;
f' è continua essendo f di classe C^1 per ipotesi;
Φ è continua per la [Proposizione 13.3].

Dunque $(f^{-1})'$ è continua.
$\blacksquare$

Proposizione 14.4: Proprietà della somma tra una contrazione e l'identità

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $A \subseteq X$ aperto.
Sia $g : A \to X$ una contrazione di costante $L \in [0; 1[$ (cioè, $\|g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$).
Sia $f : A \to X$ la funzione definita ponendo $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.

Si hanno i seguenti fatti:

- f è iniettiva;
- La funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$, ben definita per il punto precedente, è Lipschitziana di costante $\frac{1}{1-L}$;
- $f(A)$ è aperto in X.

Dimostrazione

Siano intanto $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$; si ha che $\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| \geq (1 - L)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$.
Infatti,

$$
\begin{aligned}
&\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| = \|g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\| && \text{Per definizione di } f \\
&\geq \big|\|g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2)\| - \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|\big| && \text{Dalla seconda proprietà triangolare} \\
&\geq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| - \|g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2)\| && \\
&\geq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| - L\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| && \text{Essendo } g \text{ contrazione di costante } L \\
&= (1 - L)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| && \text{Per assoluta omogeneità della norma}
\end{aligned}
$$

Da tale disuguaglianza segue l'iniettività di f.
Infatti, se $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$, si ha $0 = \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| \geq (1 - L)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$;
ne segue, essendo $L < 1$, che $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \leq 0$, da cui necessariamente $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Da tale disuguaglianza segue anche la Lipschitzianità di f^{-1} di costante $\frac{1}{1-L}$.

Infatti, per ogni $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in f(A)$ si ha
$\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| = \left\|f\big(f^{-1}(\mathbf{y}_1)\big) - f\big(f^{-1}(\mathbf{y}_2)\big)\right\| \geq (1-L)\|f^{-1}(\mathbf{y}_1) - f^{-1}(\mathbf{y}_2)\|$, da cui segue che

$\|f^{-1}(\mathbf{y}_1) - f^{-1}(\mathbf{y}_2)\| \leq \frac{1}{1-L}\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$.

Resta da provare che $f(A)$ è aperto.

Sia dunque $\mathbf{y}_0 \in f(A)$; si provi che $\mathbf{y}_0$ è interno a $f(A)$.

Sia $\mathbf{x}_0 = f^{-1}(\mathbf{y}_0)$; essendo A aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $\overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \subseteq A$.

Si vuole provare che $B\big(\mathbf{y}_0, (1-L)\delta\big) \subseteq f(A)$;
fissato $\mathbf{y} \in B\big(\mathbf{y}_0, (1-L)\delta\big)$, si mostri che esiste $\mathbf{x} \in A$ tale che $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

Si osserva che

$$\begin{aligned} & \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \iff \mathbf{y} = g(\mathbf{x}) + \mathbf{x} && \text{Per definizione di } f \\ & \iff \mathbf{y} - g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Dunque, definendo la funzione $h : A \to X$ ponendo $h(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - g(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A$, si ha che $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ se e solo se $\mathbf{x}$ è punto fisso per h.

Per provare che h ammette punto fisso, si vuole fare uso del teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli su un'opportuna restrizione.

h è una contrazione di costante L; infatti, per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ si ha

$$\begin{aligned} & \|h(\mathbf{x}_1) - h(\mathbf{x}_2)\| = \|\mathbf{y} - g(\mathbf{x}_1) - (\mathbf{y} - g(\mathbf{x}_2))\| && \text{Per definizione di } h \\ & = \|g(\mathbf{x}_2) - g(\mathbf{x}_1)\| \\ & \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| && \text{Essendo } g \text{ una contrazione di costante } L \end{aligned}$$

Si osserva anche che $h(\overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)) \subseteq \overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)$;
Infatti, fissato $\mathbf{u} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)$, si ha

$\lVert h(\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0 \rVert = \lVert \mathbf{y} - g(\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0 \rVert$	Per definizione di h
$= \lVert (g(\mathbf{x}_0) - g(\mathbf{u})) + (\mathbf{y} - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0) \rVert$	
$\leq \lVert g(\mathbf{x}_0) - g(\mathbf{u}) \rVert + \lVert \mathbf{y} - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 \rVert$	Per sub-additività della norma
$= \lVert g(\mathbf{x}_0) - g(\mathbf{u}) \rVert + \lVert \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \rVert$	$\mathbf{x}_0 = f^{-1}(\mathbf{y}_0)$ per definizione, per cui $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0$ per definizione di f
$\leq L \lVert \mathbf{x}_0 - \mathbf{u} \rVert + (1-L)\delta$	Essendo g una contrazione di costante L, e $\mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{y}_0, (1-L)\delta)$
$< L\delta + (1-L)\delta = \delta$	Essendo $\mathbf{u} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)$

Dunque, si consideri la restrizione $h_{|\overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)} : \overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta) \to \overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)$, il cui codominio è ben definito per quanto appena osservato.

L'insieme $\overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)$ è completo con la metrica indotta da X;
infatti, esso è chiuso in X, e X è completo con la metrica della norma $\lVert \cdot \rVert$ essendo uno spazio di Banach per ipotesi.

Infine, $h_{|\overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)}$ è una contrazione su $\overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)$ avendo visto che h è una contrazione su tutto A.

Allora, $h_{|\overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)}$ soddisfa le ipotesi del teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli; pertanto, esiste (un unico) $\tilde{\mathbf{x}} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta)$ tale che $h(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}$.

La tesi è dunque acquisita.
■

Teorema 14.5: Teorema dell'inversione locale

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.
Sia $A \subseteq X$ aperto.
Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.
Sia $f : A \to Y$ una funzione di classe C^1.
Si supponga che $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$.

Allora, esiste $\delta > 0$ tale che:

- $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subseteq A$;
- $f\big(B(\mathbf{x}_0, \delta)\big)$ è aperto in Y;
- $f_{|B(\mathbf{x}_0,\delta)}$ è un diffeomorfismo di classe C^1 tra $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ e $f\big(B(\mathbf{x}_0, \delta)\big)$.

Dimostrazione

Essendo $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$, esiste $\delta_0 > 0$ tale che $B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \subseteq A$.

$\mathcal{O}(X, Y)$ è aperto per la [Proposizione 13.3];
dunque, esiste $\rho > 0$ tale che $B(f'(\mathbf{x}_0), \rho) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$.

Essendo f' continua in quanto f è di classe C^1 per ipotesi,
esiste $\delta_1 > 0$ (si supponga $\delta_1 < \delta_0$) tale che $f'\big(B(\mathbf{x}_0, \delta_1)\big) \subseteq B\big(f'(\mathbf{x}_0), \rho\big)$;

si ha allora $f'\big(B(\mathbf{x}_0, \delta_1)\big) \subseteq B\big(f'(\mathbf{x}_0), \rho\big) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$, per cui $f'(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}(X, Y)$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta_1)$.

Sia ora $\varphi = \big(f'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}$, ben definita essendo $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$ per ipotesi.

Si definisca la funzione $g : A \to X$ ponendo $g = \varphi \circ f - \mathrm{id}$, ossia $g(\mathbf{x}) = \varphi\big(f(\mathbf{x})\big) - \mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.

g è di classe C^1. Infatti:

- φ è di classe C^1, in quanto appartiene a $\mathcal{L}(Y, X)$ essendo $\varphi = \big(f'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}$ e $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$;
- f è di classe C^1 per ipotesi;
- id è di classe C^1 in quanto appartiene a $\mathcal{L}(X, X)$.

Dunque, da [Proposizione 14.1] e [Proposizione 14.2] segue che g è di classe C^1.

Nello specifico, per ogni $\mathbf{x} \in A$ si ha

$g'(\mathbf{x}) = (\varphi \circ f - \mathrm{id})'(\mathbf{x})$	Per definizione di g
$= (\varphi \circ f)'(\mathbf{x}) - (\mathrm{id})'(\mathbf{x})$	Per derivazione di una combinazione lineare di funzioni derivabili
$= \varphi'(f(\mathbf{x})) \circ f'(\mathbf{x}) - \mathrm{id}$	Per derivazione delle funzioni composte; id coincide con la sua derivata in ogni punto, essendo lineare e continua
$= \varphi \circ f'(\mathbf{x}) - \mathrm{id}$	φ coincide con la sua derivata in ogni punto, essendo lineare e continua

Si osserva in particolare che

$g'(\mathbf{x}_0) = \varphi \circ f'(\mathbf{x}_0) - \mathrm{id}$	Per quanto appena ricavato
$= \mathrm{id} - \mathrm{id} = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(X,Y)}$	In quanto $\varphi = \big(f'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}$

Per quanto osservato finora, si ha che g' è continua in $\mathbf{x}_0$, e $g'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(X,Y)}$;
pertanto, in corrispondenza a $\varepsilon = \frac{1}{2}$, esiste $\delta > 0$ (si supponga $\delta < \delta_1$), tale che $\|g'(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{1}{2}$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$.

Fissati allora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$, per ogni $\lambda \in]0;1[$ si ha $\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ per convessità di $B(\mathbf{x}_0, \delta)$, dunque $\|g'(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{1}{2}$ per costruzione di δ.

Valgono allora le ipotesi del corollario al Teorema di Lagrange [Corollario 11.5], per cui si ha $\|g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2)\|_X \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_X$.

Per arbitrarietà di $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$, si ha dunque che g è una contrazione di costante $\frac{1}{2}$ su $B(\mathbf{x}_0, \delta)$.

Per la [Proposizione 14.4], la funzione $B(\mathbf{x}_0, \delta) \to X : \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \varphi\big(f(\mathbf{x})\big)$, pari cioè a $(\varphi \circ f)_{|B(\mathbf{x}_0,\delta)}$, è un omeomorfismo tra $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ e l'insieme $(\varphi \circ f)\big(B(\mathbf{x}_0, \delta)\big)$; sempre per tale proposizione quest'ultimo insieme è aperto in X.

Inoltre, φ^{-1} è un omeomorfismo tra X e Y, in quanto $\varphi^{-1} = \left(\left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\right)^{-1} = f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$.

Allora, l'insieme $f\big(B(\mathbf{x}_0, \delta)\big) = \varphi^{-1}\big((\varphi \circ f)\big(B(\mathbf{x}_0, \delta)\big)\big)$ è aperto, essendo immagine di un aperto in X tramite φ^{-1}, aperta in quanto omeomorfismo.

Inoltre, la funzione $\varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f)_{|B(\mathbf{x}_0,\delta)} = f_{|B(\mathbf{x}_0,\delta)}$ è composizione di due omeomorfismi, dunque è esso stesso un omeomorfismo, tra $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ e $f\big(B(\mathbf{x}_0), \delta\big)$.

Per di più, f è di classe C^1 su tutto A, dunque anche su $B(\mathbf{x}_0, \delta)$, e si osserva anche che $f'\big(B(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \subseteq f'\big(B(\mathbf{x}_0, \delta_1)\big) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$, per costruzione di δ_1 ed essendo $\delta < \delta_1$.

Segue allora dalla [Proposizione 14.3] che $f_{|B(\mathbf{x}_0,\delta)}$ è un diffeomorfismo di classe C^1 tra $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ e $f\big(B(\mathbf{x}_0), \delta\big)$.
■

Corollario 14.6: Funzioni di classe C^1 la cui derivata è un omeomorfismo su tutto il dominio sono aperte

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.
Sia $A \subseteq X$ aperto.
Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$
Sia $f : A \to Y$ una funzione di classe C^1.
Si supponga che $f'(A) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$.

Allora, f è aperta (cioè, per ogni $U \subseteq A$ aperto in A, $f(U)$ è aperto in Y).

Richiamo: Aperti nella topologia indotta su un aperto

Sia X uno spazio topologico.
Sia $A \subseteq X$ aperto in X.
Sia $U \subseteq A$ aperto in A con la topologia indotta.

Allora, U è aperto in X.

Infatti, per definizione di aperto nella topologia indotta su A, si ha che $U = V \cap A$, con $V \subseteq X$ aperto in X.

Essendo anche A aperto in X ed essendo l'intersezione di due aperti in uno spazio topologico anch'essa aperta in tale spazio, si ha allora $V \cap A = U$ aperto in X.

Dimostrazione

Sia $U \subseteq A$ aperto in A (dunque in X per quanto richiamato);
si provi che $f(U)$ è aperto in Y.

Sia $\mathbf{y}_0 \in f(U)$, e sia quindi $\mathbf{x}_0 \in U$ tale che $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$.
Si provi che $\mathbf{y}_0$ è interno a $f(U)$.

f è di classe C^1 in A, dunque in U, e si ha $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$ per ipotesi.

Pertanto, per il [Teorema 14.5] applicato a f su U (che è aperto in X), esiste allora $\delta > 0$ tale che $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subseteq U$, e $f\big(B(\mathbf{x}_0, \delta)\big)$ è un aperto in Y, contenuto in $f(U)$.

Possedendo $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$, $f\big(B(\mathbf{x}_0, \delta)\big)$ è allora un intorno di $\mathbf{y}_0$ contenuto in $f(U)$, per cui $\mathbf{y}_0$ è interno a $f(U)$.

La tesi è dunque acquisita.
■

Corollario 14.7: Seconda caratterizzazione dei diffeomorfismi di classe C^1

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.
Sia $A \subseteq X$ aperto.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.
Sia $f : A \to Y$ una funzione di classe C^1.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è un diffeomorfismo di classe C^1 tra A e $f(A)$, e $f(A)$ è aperto;
2. f è iniettiva e di classe C^1, e $f'(A) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga che f sia un diffeomorfismo di classe C^1 tra A e $f(A)$, e che $f(A)$ sia aperto.

Allora, f è iniettiva e di classe C^1 per definizione di diffeomorfismo di classe C^1.

Inoltre, per ipotesi f^{-1} è di classe C^1, dunque F-derivabile, su $f(A)$;
per la [Proposizione 13.4], si ha dunque che $f'(A) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$.
$\blacksquare$

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Si supponga f iniettiva e di classe C^1, e $f'(A) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$.

Per iniettività, f è automaticamente biunivoca tra A e $f(A)$.
Per ipotesi, f è di classe C^1.

Valgono inoltre le ipotesi della [Proposizione 14.6];
dunque, f è aperta.

Allora, f^{-1} è continua su $f(A)$;
infatti, fissato $U \subseteq A$ aperto in A, l'insieme $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ è aperto in Y per apertura di f, ed è contenuto in $f(A)$; dunque $f(U)$ è aperto in A.

Dunque, f è un omeomorfismo di classe C^1 tra A e $f(A)$;
per la [Proposizione 14.3], f è un diffeomorfismo di classe C^1 tra A e $f(A)$.
■