# 7 - Il Teorema di Hahn-Banach e il Teorema di Separazione

#### **☆ Definizione: Sub-additività, Positiva omogeneità**

Sia E uno spazio vettoriale.

Una funzione  $f:E\to\mathbb{R}$  si dice:

- sub-additiva, quando  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \le f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ;
- positivamente omogenea, quando  $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$  e per ogni  $\lambda \geq 0$ .

## II teorema di Hahn-Banach

#### **P** Lemma 7.1: Lemma di estensione

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale.

Sia  $\mathbf{x}_0 \in E \setminus F$ .

Sia  $G = \operatorname{span}(F \cup \{\mathbf{x}_0\})$ .

Sia  $\varphi: F \to \mathbb{R}$  un funzionale lineare.

Sia  $f:G\to\mathbb{R}$  una funzione sub-additiva e positivamente omogenea.

Si supponga che  $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ .

Allora, esiste  $\psi:G \to \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi_{|F}=\varphi$  e  $\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $x \in G$ .

#### **Q** Osservazioni preliminari

- 1. Siano  $A,B\subseteq\mathbb{R}$  due insiemi separati, con  $a\leq b$  per ogni  $a\in A$  e per ogni  $b\in B$ . Allora,  $\sup(A)\leq\inf(B)$ .
- 2. Si ha  $G = F + \operatorname{span}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{u} + \lambda \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{u} \in F, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ , e tale scrittura è unica in quanto  $F \cap \operatorname{span}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{0}\}.$
- 3. Siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , e siano  $h, k \in \mathbb{R}$ .

Sia  $\mathbf{u} = \mathbf{x_u} + \lambda_{\mathbf{u}} \mathbf{x_0}$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{x_v} + \lambda_{\mathbf{v}} \mathbf{x_0}$ ; tali scritture sono uniche per l'osservazione preliminare 2.

Si ha 
$$h\mathbf{u}+k\mathbf{v}=\underbrace{h\mathbf{x_u}+k\mathbf{x_v}}_{\in F}+\underbrace{(h\lambda_\mathbf{u}+k\lambda_\mathbf{v})}_{\in \mathbb{R}}\mathbf{x_0}$$
, da cui segue

 $\mathbf{x}_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\mathbf{x}_{\mathbf{u}} + k\mathbf{x}_{\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\lambda_{\mathbf{u}} + k\lambda_{\mathbf{v}}$ , sempre per unicità della scrittura degli elementi di G data dall'osservazione preliminare 2.

#### **Dimostrazione**

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$ .

Per le proprietà di  $\varphi$  ed f, si ha

$$egin{aligned} arphi(\mathbf{x}) + arphi(\mathbf{y}) &= arphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \end{aligned} & ext{Linearità di } arphi \\ &\leq f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \end{aligned} & ext{Poiché } \mathbf{x} + \mathbf{y} \in F \text{ e } f \text{ maggiora } arphi \text{ in } F \end{aligned} \\ &= f((\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + (\mathbf{x_0} + \mathbf{y})) \leq f(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + f(\mathbf{x_0} + \mathbf{y}) \end{aligned} & ext{Per subadditività di } f$$

Dal primo e dall'ultimo membro della catena di disuguaglianze segue allora che  $\varphi(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y})$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$ .

Ciò significa che gli insiemi  $A = \{\varphi(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mid \mathbf{x} \in F\}$  e  $B = \{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in F\}$  sono separati; in particolare, si ha  $\sup(A) < \inf(B)$  per l'osservazione preliminare 1.

Sia  $r \in \mathbb{R}$  tale che  $\sup(A) \leq r \leq \sup(B)$ .

Sia  $\mathbf{u} \in G$ ; si ha  $\mathbf{u} = \mathbf{x_u} + \lambda_{\mathbf{u}} \mathbf{x_0}$  per unici  $\mathbf{x_u} \in F$  e  $\lambda_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$ , per l'osservazione preliminare 2.

Si definisca allora  $\psi:G \to \mathbb{R}$  definita ponendo  $\psi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x_u}) + \lambda_\mathbf{u} r$  per ogni  $\mathbf{u} \in G$ .

Si provi che  $\psi$  soddisfa le proprietà espresse nella tesi.

Vale  $\psi_{|F} = \varphi$ ; infatti, per ogni  $\mathbf{u} \in F$  si ha  $\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0\mathbf{x}_0$ , dunque  $\mathbf{x}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$  e  $\lambda_{\mathbf{u}} = 0$  per unicità della scrittura degli elementi di G.

 $\psi$  è un funzionale lineare; infatti, per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$  e per ogni  $h, k \in \mathbb{R}$ , si ha  $\mathbf{x}_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\mathbf{x}_{\mathbf{u}} + k\mathbf{x}_{\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\lambda_{\mathbf{u}} + k\lambda_{\mathbf{v}}$  per l'osservazione preliminare 3.

Allora,  $\psi(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = \varphi(h\mathbf{x}_{\mathbf{u}} + k\mathbf{x}_{\mathbf{v}}) + (h\lambda_{\mathbf{u}} + k\lambda_{\mathbf{v}})r$ ; sfruttando la linearità di  $\varphi$  si ottiene  $\psi(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = h(\varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{u}}) + \lambda_{\mathbf{u}}r) + k(\varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{v}}) + \lambda_{\mathbf{v}}r) = h \psi(\mathbf{u}) + k \psi(\mathbf{v})$ , che mostra la linearità di  $\psi$ .

Resta da provare che  $\psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$  per ogni  $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$ 

Sia dunque  $\mathbf{u} \in G$ .

Si può supporre  $\mathbf{u} \notin F$  senza perdere di generalità, in quanto se  $\mathbf{u} \in F$  si ha  $\psi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$  in quanto  $\psi_{|F} = \varphi$  e f maggiora  $\varphi$  in F.

Sia quindi  $\mathbf{u} \in G \setminus F$ ; si ha  $\mathbf{u} = \mathbf{x_u} + \lambda_{\mathbf{u}} \mathbf{x_0}$ , per unici  $\mathbf{x_u} \in F$  e  $\lambda_{\mathbf{u}}$ . Essendo  $\mathbf{u} \notin F$ , si ha  $\lambda_{\mathbf{u}} \neq 0$ .

Si supponga  $\lambda_{\mathbf{u}} > 0$ .

Si consideri  $\frac{\mathbf{x_u}}{\lambda_\mathbf{u}} \in F$ ; si ha

$$r \leq f\left(\mathbf{x}_0 + rac{\mathbf{x_u}}{\lambda_\mathbf{u}}
ight) - arphi\left(rac{\mathbf{x_u}}{\lambda_\mathbf{u}}
ight)$$
 Essendo  $r$  minorante dell'insieme  $B$  ed essendo  $rac{\mathbf{x_u}}{\lambda_\mathbf{u}} \in F$ 

$$\implies \lambda_{\mathbf{u}}r \leq f(\mathbf{x}_{\mathbf{u}} + \lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_{0}) - \varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{u}})$$
 Moltiplicando per  $\lambda_{\mathbf{u}}$  ambo i membri, sfruttando la linearità di  $\varphi$  e la positiva omogeneità di  $f$ , essendo  $\lambda_{\mathbf{u}} > 0$  nel caso in esame

$$\implies \varphi(\mathbf{x_u}) + \lambda_{\mathbf{u}}r \leq f(\mathbf{x_u} + \lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{x_0})$$

$$\implies \psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$$
 Per scrittura di  $\mathbf{u}$  e per definizione di  $\psi$ 

Si supponga ora  $\lambda_{\mathbf{u}} < 0$ .

Si consideri  $\frac{\mathbf{x_u}}{-\lambda_{\mathbf{u}}} \in F$ ; si ha

$$arphi\left(rac{\mathbf{x}_{\mathrm{u}}}{-\lambda_{\mathrm{u}}}
ight) - f\left(rac{\mathbf{x}_{\mathrm{u}}}{-\lambda_{\mathrm{u}}} - \mathbf{x}_{0}
ight) \leq r$$

Essendo r maggiorante dell'insieme A ed essendo  $rac{\mathbf{x_u}}{-\lambda_{\mathbf{u}}} \in F$ 

$$\implies \ arphi(\mathbf{x_u}) - f(\lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x_u}) \leq \lambda_{\mathbf{u}} r$$

Moltiplicando per  $\lambda_{\bf u}$  ambo i membri, sfruttando la linearità di  $\varphi$  e la positiva omogeneità di f, essendo  $\lambda_{\bf u}>0$  nel caso in esame

$$\implies \ arphi(\mathbf{x_u}) + \lambda_{\mathbf{u}}r \leq f(\lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{x_0} + \mathbf{x_u})$$

$$\implies \psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$$

Per scrittura di  ${\bf u}$  e per definizione di  $\psi$ 

#### \_

## **☐** Teorema 7.2: Teorema di Hahn-Banach

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale di E

Sia  $\varphi: F \to \mathbb{R}$  un funzionale lineare.

Sia  $f:E o\mathbb{R}$  una funzione sub-additiva e positivamente omogenea.

Si supponga che  $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ .

Allora, esiste  $\psi: E \to \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi_{|F} = \varphi$  e  $\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $x \in E$ .

#### **Dimostrazione**

Si consideri il seguente insieme:

$$\mathcal{S} = ig\{ (G, \eta) \mid \;\; G \subseteq E ext{ sottospazio vettoriale di } E: \;\;\; G \supseteq F \ \eta: G o \mathbb{R} ext{ funzionale lineare}: \;\;\; \eta_{|_F} = arphi \quad \land \quad orall \mathbf{x} \in G, \; \eta(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) ig\}$$

•

Si introduca su tale insieme la relazione d'ordine  $\preceq$  definita ponendo

$$(G_1,\eta_1)\preceq (G_2,\eta_2)$$
 quando  $G_1\subseteq G_2$  e  $\eta_2|_{G_1}=\eta_1.$ 

Si provi che l'insieme ordinato  $(S, \preceq)$  ammette un elemento massimale, tramite il lemma di Zorn. Intanto,  $S \neq \emptyset$  in quanto  $(F, \varphi) \in S$ .

Sia  $C = \{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{S}$  una catena in  $\mathcal{S}$ ; si mostri che essa ammette maggiorante in  $\mathcal{S}$ .

Sia  $G=igcup_{i\in\mathcal{I}}G_i$ , e si definisca  $\eta:G o\mathbb{R}$  ponendo, per ogni  $\mathbf{u}\in G$ ,  $\eta(\mathbf{u})=\eta_i(\mathbf{u})$ , con  $i\in\mathcal{I}$  tale che  $\mathbf{u}\in G_i$ .

Si mostri che  $(G, \eta) \in \mathcal{S}$ .

#### **Q** Osservazione preliminare

Per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$  esiste  $i \in \mathcal{I}$  tale che  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ .

Infatti, essendo  $\mathbf{u},\mathbf{v}\in G$  si ha  $\mathbf{u}\in G_{i_1}$  e  $\mathbf{v}\in G_{i_2}$  per qualche  $i_1,i_2\in\mathcal{I}.$ 

Essendo  $\{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  una catena, essa è totalmente ordinata rispetto a  $\leq$ , per cui si ha  $G_{i_1} \subseteq G_{i_2}$  oppure  $G_{i_2} \subseteq G_{i_1}$ , da cui seguono rispettivamente  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_{i_1}$  oppure  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_{i_2}$ .

Fatta questa osservazione, si proceda con la dimostrazione.

Per quanto concerne G si ha evidentemente  $F \subseteq G \subseteq E$ ;

G è un sottospazio vettoriale di E. Infatti, fissati  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , sia  $i \in \mathcal{I}$  per cui  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ , che esiste per l'osservazione preliminare; ne viene che  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in G_i \subseteq G$  essendo  $G_i$  uno spazio vettoriale.

Per quanto concerne  $\eta_i$  essa è intanto ben definita.

Infatti, sia  $\mathbf{u} \in G$ , e siano  $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$  tali che  $\mathbf{u} \in G_{i_1}$  e  $\mathbf{u} \in G_{i_2}$ ;

essendo  $\{(G_i,\eta_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$  una catena, essa è totalmente ordinata rispetto a  $\preceq$ , per cui si ha  $G_{i_1}\subseteq G_{i_2}$  e  $\eta_{i_2}|_{G_{i_1}}=\eta_{i_1}$ , oppure  $G_{i_2}\subseteq G_{i_1}$  e  $\eta_{i_1}|_{G_{i_2}}=\eta_{i_2}$ .

In entrambi i casi, si ha allora che  $\eta_{i_1}(\mathbf{u}) = \eta_{i_2}(\mathbf{u})$ .

 $\eta$  è un funzionale lineare.

Siano infatti  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , e siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;

sia  $i \in \mathcal{I}$  per cui  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ , che esiste per l'osservazione preliminare.

Allora,  $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in G_i$ ; si ha allora

$$\eta(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \eta_i(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v})$$
 Essendo  $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in G_i$ 

$$\lambda = \lambda \eta_i(\mathbf{u}) + \mu \eta_i(\mathbf{v})$$
 Essendo  $\eta_i$  lineare

$$\lambda = \lambda \, \eta(\mathbf{u}) + \mu \, \eta(\mathbf{v})$$
 Essendo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ 

La proprietà  $\eta|_F=arphi$  è immediata;

essa segue infatti dal fatto che, fissato  $\mathbf{u} \in F$  e fissato un qualunque  $i \in \mathcal{I}$ , si ha  $\eta(\mathbf{u}) = \eta_i(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u})$ , per definizione di  $\eta$  essendo  $F \subset G_i$  per costruzione, e per costruzione di  $\eta_i$ .

Altrettanto immediata risulta la disuguaglianza  $\eta(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in G$ .

Infatti, fissato  $\mathbf{x} \in G$  e fissato  $i \in \mathcal{I}$  tale che  $\mathbf{x} \in G_i$ , si ha  $\eta(\mathbf{x}) = \eta_i(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per definizione di  $\eta$  e per costruzione di  $\eta_i$ .

Dunque,  $(G, \eta) \in \mathcal{S}$ , per cui le ipotesi del lemma di Zorn sono verificate.

Allora, S ammette un elemento massimale  $(H, \psi)$ .

Per concludere la dimostrazione, resta da provare che H=E; fatto questo, la tesi è acquisita dal momento che  $\psi$  soddisfa le proprietà da essa richieste per definizione di S.

Si proceda per assurdo, supponendo quindi  $H \subseteq E$ ; esiste quindi  $\mathbf{x}_0 \in E \setminus H$ .

Allora, per il [Lemma 7.1], posto  $\tilde{H}=\mathrm{span}(H,\mathbf{x}_0)\supsetneq H$  si ha che esiste  $\tilde{\psi}:\tilde{H}\to\mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\tilde{\psi}_{|H}=\psi$  e  $\tilde{\psi}(\mathbf{x})\le f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x}\in\tilde{H}$ .

Ma allora, da ciò seguirebbe che  $(\tilde{H},\tilde{\psi})\in\mathcal{S}$  e che  $(\tilde{H},\tilde{\psi})\succeq(H,\psi)$ , contro la massimalità di  $(H,\psi)$ .

Dunque, H = E.

## Corollari del teorema di Hahn-Banach

Proposizione 7.3: Estensione di un funzionale lineare continuo ad un funzionale lineare continuo avente stessa norma

Sia  $(E, \|\cdot\|_E)$  uno spazio normato.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale di E.

Sia  $\varphi \in F^*$ .

Allora, esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\psi|_F = arphi$  e  $\|\psi\|_{E^*} = \|arphi\|_{F^*}$  .

#### **Dimostrazione**

Se  $\varphi = \mathbf{0}_{F^*}$ , la tesi è acquisita immediatamente con  $\psi = \mathbf{0}_{E^*}$ , che soddisfa le proprietà richieste.

Si supponga ora  $\varphi \neq \mathbf{0}_{F^*}$  .

Poiché  $\varphi \in F^*$ , per la [Proposizione 6.6] si ha  $|\varphi(\mathbf{x})| \leq \|\varphi\|_{F^*} \|\mathbf{x}\|_E$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ .

Si definisca  $f: E \to \mathbb{R}$  ponendo  $f(\mathbf{x}) = \|\varphi\|_{F^*} \|\mathbf{x}\|_E$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Essendo  $\varphi \neq \mathbf{0}_{F^*}$ , si ha  $\|\varphi\|_{F^*} \neq 0$ , per cui f è una norma su E; inoltre, si ha  $|\varphi(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ , per quanto osservato prima.

Per il [Teorema 7.2], esiste allora  $\psi: E \to \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi|_F = \varphi$  e  $|\psi(\mathbf{x})| \le f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Si provi che  $\psi$  è continua e che  $\|\psi\|_{E^*} = \|\varphi\|_{F^*}$  , così da acquisire la tesi.

La continuità di  $\psi$  segue subito dalla [Proposizione 6.4], in quanto per ogni  $\mathbf{x} \in E$  vale  $|\psi(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{x}) = \|\varphi\|_{F^*} \, \|\mathbf{x}\|_E$ 

•

L'uguaglianza tra le norme segue dalle due seguenti osservazioni:

• Per ogni  $\mathbf{x} \in E$  con  $\|\mathbf{x}\|=1$  si ha  $|\psi(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{x}) = \|arphi\|_{F^*} \, \|\mathbf{x}\|_E = \|arphi\|_{F^*}$ ;

ne segue che  $\|\psi\|_{E^*} \leq \|\varphi\|_{F^*}$  per definizione di  $\|\cdot\|_{E^*}$  quale  $\rho_1$ .

 $\bullet \ \ \mathsf{Poich\'e} \ \psi|_F = \varphi \text{, si ha } \|\varphi\|_{F^*} = \sup_{\mathbf{x} \in F} |\varphi(\mathbf{x})| = \sup_{\mathbf{x} \in F} |\psi(\mathbf{x})| \leq \sup_{\mathbf{x} \in E} |\psi(\mathbf{x})| = \|\psi\|_{E^*} \ .$ 

Pertanto si ha  $\|\psi\|_{E^*}\leq \|arphi\|_{F^*}\leq \|\psi\|_{E^*}$ , cioè  $\|\psi\|_{E^*}=\|arphi\|_{F^*}$  .

# Proposizione 7.4: Esistenza di un funzionale lineare continuo di norma unitaria che in un punto ha come valore la sua norma

Sia  $(E, \|\cdot\|_E)$  uno spazio normato.

Sia  $\mathbf{x}_0 \in E$ .

Esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\psi(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_0\|_E$  e  $\|\psi\|_{E^*} = 1$ .

#### Dimostrazione

Se  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , si ha  $\|\mathbf{x}_0\|_E = 0$ .

Sia  $\varphi \in E^* \setminus \{\mathbf{0}_{E^*}\}$ ; si ha  $\varphi(\mathbf{x}_0) = 0$  per linearità di  $\varphi$ , e si ha  $\|\varphi\|_{E^*} \neq 0$ .

La tesi è allora acquisita con  $\psi=\dfrac{arphi}{\|arphi\|_{E^*}}$ , che soddisfa le proprietà richieste.

Si supponga ora  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ .

Sia 
$$F = \operatorname{span}(\mathbf{x}_0) = \{\lambda \mathbf{x}_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Si definisca  $\varphi: F \to \mathbb{R}$  ponendo  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda \|\mathbf{x}_0\|_E$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Evidentemente,  $\varphi$  è lineare; la definizione stessa di  $\varphi$  ne implica la continuità per la [Proposizione 6.4]. Dunque,  $\varphi \in F^*$ .

Allora, per la [Proposizione 7.3] esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\psi|_F = \varphi$ , ossia  $\psi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda \|\mathbf{x}_0\|_E$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e anche  $\|\psi\|_{E^*} = \|\varphi\|_{F^*}$ .

Dalla prima proprietà per  $\lambda=1$ , si ha  $\psi(\mathbf{x}_0)=\|\mathbf{x}_0\|_E$ ;

resta da verificare che  $\|\psi\|_{E^*}=1$ , ossia  $\|\varphi\|_{F^*}=1$  in quanto le due norme coincidono per la seconda proprietà.

Per definizione di  $\|\varphi\|_{F^*}$  come  $\rho_1$ , si ottiene

$$\|arphi\|_{F^*} = \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \ \|\lambda \mathbf{x}_0\|_E = 1}} |arphi(\lambda \mathbf{x}_0)| = \sup_{|\lambda| = rac{1}{\|\mathbf{x}_0\|_E}} \left|\lambda \|\mathbf{x}_0\|_E 
ight| = \sup_{|\lambda| = rac{1}{\|\mathbf{x}_0\|_E}} |\lambda| \, \|\mathbf{x}_0\|_E = 1.$$

## II funzionale di Minkowski

#### **Premesse**

> Insiemi convessi e stellati

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia  $A \subseteq E$ .

A si dice convesso quando, per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  e per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ , vale  $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in A$ .

#### Equivalentemente,

A è convesso quando, per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  e per ogni  $\lambda, \mu \geq 0$  tali che  $\lambda + \mu = 1$ , vale  $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in A$ .

A si dice stellato rispetto a un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  quando, per ogni  $\mathbf{x} \in A$  e per ogni  $\lambda \in [0; 1]$ , vale  $\lambda \mathbf{x}_0 + (1 - \lambda)\mathbf{x} \in A$ .

#### Equivalentemente,

A è stellato rispetto a  $\mathbf{x}_0 \in A$  quando, per ogni  $\mathbf{x} \in A$  e per ogni  $\lambda, \mu \geq 0$  tali che  $\lambda + \mu = 1$ , vale  $\lambda \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{x} \in A$ .

#### **Q** Osservazione

A è convesso se e solo se è stellato rispetto a ogni suo punto.

### Proposizione 7.5: Criterio di continuità delle funzioni sub-additive che si annullano nello zero

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $f:E o\mathbb{R}$  una funzione sub-additiva, tale che  $f(\mathbf{0})=0$ .

f è continua in E se e solo se f è continua in  $\mathbf{0}$ .

## **Dimostrazione**

Se f è continua in E, chiaramente f è continua in  $\mathbf{0}$ .

Viceversa, si supponga f continua in  $\mathbf{0}$ ; si fissi  $\mathbf{x}_0 \in E$ , e si provi la continuità di f in  $\mathbf{x}_0$ .

Si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Per continuità di f in  $\mathbf{0}$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $\mathbf{x} \in E$  con  $\|\mathbf{x}\| < \delta$ , si abbia  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})| < \varepsilon$ , ossia  $|f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ , in quanto  $f(\mathbf{0}) = 0$  per ipotesi.

Sia  $\mathbf{x}' \in X$  con  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ; si provi che  $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ .

Per costruzione di  $\delta$ , si ha  $|f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ .

Per subadditività di f, si ha  $f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)) \le f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)$ , da cui segue che  $f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) \le |f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ .

D'altra parte, essendo  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\| < \delta$ , si ha anche  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'\| < \delta$ .

Per costruzione di  $\delta$ , si ha allora  $|f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}')| < \varepsilon$ .

Per subadditività di f, si ha  $f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}' + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}')) \le f(\mathbf{x}') + f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}')$ , da cui segue che  $f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}') \le f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}') \le |f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}')| < \varepsilon$ .

Allora, si ha  $f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}_0) < \varepsilon$  e  $f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}') < \varepsilon$ , da cui  $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ , come si voleva provare. La continuità di f in  $\mathbf{x}_0$  è dunque acquisita.

#### **☆ Definizione: Funzionale di Minkowski**

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia V un intorno di 0.

Si dice funzionale di Minkowski associata a V la funzione  $\varphi_V: E \to \mathbb{R}_0^+$  definita ponendo  $p_V(\mathbf{x}) = \inf\{\lambda > 0: \mathbf{x} \in \lambda V\}.$ 

#### **Q** Osservazione

 $p_V$  è ben definita, cioè  $0 \leq \inf\{\lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda V\} < +\infty$ .

Il fatto che  $\inf\{\lambda>0: \mathbf{x}\in\lambda V\}\geq 0$  segue direttamente da come è definito l'insieme.

Si provi  $\inf\{\lambda>0:\mathbf{x}\in\lambda V\}<+\infty$ , ossia  $\{\lambda>0:\mathbf{x}\in\lambda V\}\neq\varnothing$ .

Se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  si ha  $\mathbf{0} \in \lambda V$  per ogni  $\lambda > 0$ .

Si supponga allora  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

Essendo V un intorno di  $\mathbf{0}$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $B(\mathbf{0}, \delta) \subseteq V$ .

Allora, si ha  $\frac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|} \in B(\mathbf{0}, \delta) \subseteq V$ , dunque  $\mathbf{x} \in \frac{2\|\mathbf{x}\|}{\delta}V$ .

Segue che  $rac{2\|\mathbf{x}\|}{\delta} \in \{\lambda > 0: \mathbf{x} \in \lambda V\}.$ 

## **¡** Proprietà del funzionale di Minkowski

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia V un intorno di 0.

Sia  $p_V$  il funzionale di Minkowski associato a V.

Esso soddisfa le seguenti proprietà:

- $p_V(\mathbf{0}) = 0.$ Infatti,  $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0} \in V$  per ogni  $\lambda > 0.$
- $p_V$  è positivamente omogenea. Infatti, si fissi  $k \geq 0$ . Se k = 0, per la proprietà precedente si ha  $p_V(0\mathbf{x}) = 0 = 0$   $p_V(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Si supponga quindi k > 0, e sia  $\mathbf{x} \in E$ .

Sia  $\lambda > 0$  tale che  $\mathbf{x} \in \lambda V$ ; allora,  $k\mathbf{x} \in k\lambda V$ , per cui  $p_V(k\mathbf{x}) \leq k\lambda$ . Per arbitrarietà di  $\lambda$ , segue  $p_V(k\mathbf{x}) \leq k\,p_V(\mathbf{x})$ .

Sia  $\mu > 0$  tale che  $k\mathbf{x} \in \mu V$ ; allora,  $\mathbf{x} \in \frac{\mu}{k} V$ , per cui  $p_V(\mathbf{x}) \leq \frac{\mu}{k}$ , ossia  $\mu \geq k \, p_V(\mathbf{x})$ . Per arbitrarietà di  $\mu$ , segue  $p_V(k\mathbf{x}) \geq k p_V(\mathbf{x})$ .

- Si ha  $V\subseteq p_V^{-1}([0;1]).$  Infatti, per ogni  $\mathbf{x}\in V$  si ha che  $1\in\{\lambda>0:\mathbf{x}\in\lambda V\}$ , per cui  $p_V(\mathbf{x})\leq 1.$
- Se V è stellato rispetto a  ${\bf 0}$ , si ha  $p_V^{-1}([0;1])\subseteq V.$  Infatti, sia  ${\bf x}\in p_V^{-1}([0;1]).$

Esiste allora  $\lambda \in ]0;1]$  tale che  $x \in \lambda V$ ; dunque,  $\frac{1}{\lambda} \mathbf{x} \in V$ .

Essendo  $\frac{1}{\lambda} \ge 1$ ,  $\mathbf{x}$  appartiene al segmento di estremi  $\mathbf{0}$  e  $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$ ; essendo V stellato rispetto a  $\mathbf{0}$  e  $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} \in V$ , segue dunque  $\mathbf{x} \in V$ .

• Se V è convesso,  $p_V$  è sub-additiva.

Siano infatti  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ; sia  $\varepsilon > 0$ .

Applicando la seconda proprietà dell'estremo inferiore a  $p_V$ , esiste  $\lambda > 0$  tale che  $\mathbf{x} \in \lambda V$  e  $\lambda < p_V(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon}{2}$ ; analogamente, esiste  $\mu > 0$  tale che  $\mathbf{y} \in \mu V$  e  $\mu < p_V(\mathbf{y}) + \frac{\varepsilon}{2}$ .

Sommando membro a membro si ottiene  $\lambda + \mu < p_V(\mathbf{x}) + p_V(\mathbf{y}) + \varepsilon$ .

Si ha l'identità  $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{\mathbf{x}}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{\mathbf{y}}{\mu}$ .

Essendo  $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \frac{\mu}{\lambda+\mu} > 0$  e  $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1$ , ne segue che  $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\lambda+\mu}$  appartiene al segmento di estremi  $\frac{\mathbf{x}}{\lambda}$  e  $\frac{\mathbf{y}}{\mu}$ .

Essendo  $\frac{\mathbf{x}}{\lambda}, \frac{\mathbf{y}}{\mu} \in V$  per costruzione di  $\lambda$  e  $\mu$  ed essendo V convesso per ipotesi, si ha allora  $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\lambda+\mu} \in V$ , ossia  $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in (\lambda+\mu)V$ .

Allora,  $p_V(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \le \lambda + \mu$  per definizione di  $p_V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ; d'altra parte, era stato ricavato che  $\lambda + \mu < p_V(\mathbf{x}) + p_V(\mathbf{y}) + \varepsilon$ . Pertanto,  $p_V(\mathbf{x} + \mathbf{y}) < p_V(\mathbf{x}) + p_V(\mathbf{y}) + \varepsilon$ ; segue  $p_V(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \le p_V(\mathbf{x}) + p_V(\mathbf{y})$  per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ .

•  $p_V$  è continua in **0**.

Infatti, si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Si consideri l'insieme  $\frac{\varepsilon}{2}V$ , che è un intorno di  $\mathbf{0}$  essendolo V; esiste allora  $\delta>0$  tale che, per ogni  $\mathbf{x}\in E$  con  $\|\mathbf{x}\|<\delta$ , vale  $\mathbf{x}\in\frac{\varepsilon}{2}V$ .

Pertanto, per ogni  $\mathbf{x} \in E$  con  $\|\mathbf{x}\| < \delta$ , vale  $\mathbf{x} \in \frac{\varepsilon}{2}V$ , dunque  $p_V(\mathbf{x}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  per definizione di  $p_V$ . Ne segue che, per ogni  $\mathbf{x} \in E$ , vale  $p_V(\mathbf{x}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , ossia  $|p_V(\mathbf{x})| < \varepsilon$  per nonnegatività di  $p_V$ .

• Se V è convesso,  $p_V$  è continua. Infatti,  $p_V$  è continua in  $\bf 0$  e sub-additiva essendo V convesso. Segue la continuità in tutto E dalla [Proposizione 7.5].

# Proposizione 7.6: Esistenza di un funzionale lineare continuo con estremo inferiore positivo su un convesso la cui chiusura non possiede lo zero

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $A \subseteq E$  convesso e tale che  $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$  e  $\mathbf{0} \notin \overline{A}$ .

Allora, esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\inf_{\mathbf{y} \in A} \psi(\mathbf{y}) > 0.$ 

#### **Q** Osservazioni preliminari

Fissati  $\mathbf{x}_0 \in E$ , la funzione  $g: E \to E$ ;  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$  è un omeomorfismo.

Ne segue che  $(g(A))^\circ=g(\overset{\circ}{A})$  e  $\overline{g(A)}=g(\overline{A})$  per ogni  $A\subseteq E.$ 

Inoltre, q preserva la convessità, ossia q(A) è convesso per ogni  $A \subseteq E$  convesso.

## **Dimostrazione**

Sia  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$ , che esiste per ipotesi.

Sia 
$$V = \mathbf{x}_0 - A = {\mathbf{x}_0 - \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in A}.$$

Dalle osservazioni preliminari segue che  $\mathbf{0} \in \mathbf{x}_0 - \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{V}$ , cioè V è un intorno di  $\mathbf{0}$ , ed inoltre è convesso essendo A convesso per ipotesi.

Allora,  $p_V$  è una funzione positivamente omogenea e sub-additiva, essendo associata a un intorno convesso di  $\mathbf{0}$ .

Sia 
$$F = \operatorname{span}(\mathbf{x}_0) = \{\lambda \mathbf{x}_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Si definisca la funzione  $\varphi: F \to \mathbb{R}$  ponendo  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda p_V(\mathbf{x}_0)$ ; questa è evidentemente un funzionale lineare continuo, ossia  $\varphi \in F^*$ .

Si ha  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) \leq p_V(\lambda \mathbf{x}_0)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;

infatti, per  $\lambda < 0$  si ottiene la catena  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda p_V(\mathbf{x}_0) \le 0 \le p_V(\lambda \mathbf{x}_0)$ , sfruttando la nonnegatività di  $p_V$ .

Per  $\lambda \geq 0$  si ha  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda p_V(\mathbf{x}_0) = p_V(\lambda \mathbf{x}_0)$ , sfruttando la positiva omogeneità di  $p_V$ .

Allora, per il [Teorema 7.2] esiste  $\psi: E \to \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi|_F = \varphi$ , ossia  $\psi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda p_V(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e tale che  $\psi(\mathbf{x}) \leq p_V(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Per acquisire la tesi, si provi che  $\psi$  è continua, dimodoché  $\psi \in E^*$ , e che  $\inf_{\mathbf{y} \in A} \psi(\mathbf{y}) > 0$ .

Si provi dapprima la continuità di  $\psi$ , mostrando che  $\psi$  è continua in  $\mathbf{0}$ .

Sia  $\mathbf{x} \in E$ ; si ha che  $\psi(\mathbf{x}) \leq p_V(\mathbf{x})$  per costruzione di  $\psi$ ; sfruttando anche la linearità di  $\psi$  si ottiene inoltre  $-\psi(\mathbf{x}) = \psi(-\mathbf{x}) \leq p_V(-\mathbf{x})$ .

Allora, 
$$(0 \le) |\psi(\mathbf{x})| \le \max\{p_V(\mathbf{x}), p_V(-\mathbf{x})\}.$$

Essendo  $\mathbf{x}\mapsto p_V(\mathbf{x})$  continua in  $\mathbf{0}$ , è continua in  $\mathbf{0}$  anche  $\mathbf{x}\mapsto p_V(-\mathbf{x})$ ;

inoltre, essendo il massimo tra due funzioni continue in uno stesso punto anch'essa continua in tale punto, si deduce che anche  $\max\{p_V(\mathbf{x}),p_V(-\mathbf{x})\}$  è continua in  $\mathbf{0}$ ;

segue per confronto che  $\psi$  è continua in  $\mathbf{0}$ , dunque in tutto E.

Resta da provare che  $\inf_{\mathbf{y} \in A} \psi(\mathbf{y}) > 0.$ 

Si osserva intanto che, per ogni  $\mathbf{y} \in A$ , vale  $\psi(\mathbf{y}) \geq p_V(\mathbf{x}_0) - 1$ . Infatti, si ha

$$p_V(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{y})$$
 In quanto  $\mathbf{x}_0 \in F$  e  $\phi$ 

$$=\psi(\mathbf{x}_0-\mathbf{y})$$
 Per linearità di  $\psi$ 

$$0 \leq p_V(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y})$$
 Poiché  $\psi(\mathbf{x}) \leq p_V(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ 

$$0 \leq 1$$
 Segue dalla definizione di  $p_V$ , in quanto  $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y} \in \mathbf{x}_0 - A = V$ 

Dal primo e dall'ultimo membro della catena segue proprio  $\psi(\mathbf{y}) \geq p_V(\mathbf{x}_0) - 1$ , per ogni  $\mathbf{y} \in A$  Dunque, si ha  $\inf_{\mathbf{y} \in A} \psi(\mathbf{y}) \geq p_V(\mathbf{x}_0) - 1$ .

Per acquisire la tesi, si vuole mostrare che  $p_V(\mathbf{x}_0) - 1 > 0$ , ossia  $p_V(\mathbf{x}_0) > 1$ .

Per l'osservazione preliminare, si ha  $\overline{V}=\mathbf{x}_0-\overline{A}.$ 

Poiché  $\mathbf{0} \notin \overline{A}$ , ne segue che  $\mathbf{x}_0 \notin \overline{V}$ .

Allora, esiste  $\delta > 0$  tale che  $B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap V = \emptyset$ .

Sia  $ar{\lambda}=1+rac{\delta}{2\|\mathbf{x}_0\|}$ ; chiaramente,  $ar{\lambda}>1$ .

si ha  $\bar{\lambda}\mathbf{x}_0 \notin V$ .

Infatti, si ha  $d(\bar{\lambda}\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0) = \|\bar{\lambda}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0\| = \frac{\delta}{2\|\mathbf{x}_0\|}\|\mathbf{x}_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ , pertanto  $\bar{\lambda}\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{x}_0,\delta)$  e dunque  $\bar{\lambda}\mathbf{x}_0 \notin V$  per costruzione di  $\delta$ .

Allora, si ha a maggior ragione  $\lambda \mathbf{x}_0 \notin V$  per ogni  $\lambda$  tale che  $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}$ , per cui  $p_V(\mathbf{x}_0) \geq \bar{\lambda} > 1$ , come volevasi mostrare.

## Il teorema di separazione

## Proposizione 7.7: Somma e ridimensionamento preservano la convessità

Sia E uno spazio vettoriale.

Siano  $A, B \subseteq E$  convessi.

Siano  $h,k\in\mathbb{R}$ .

Allora, anche hA + kB è convesso.

#### **Dimostrazione**

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in hA + kB$ ;

si ha  $\mathbf{x}=h\mathbf{a}_1+k\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{y}=h\mathbf{a}_2+k\mathbf{b}_2$ , con  $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\in A$  e  $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\in B$ .

Fissato  $\lambda \in [0;1]$ , si ricava che  $\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} = h(\lambda \mathbf{a}_1 + (1-\lambda)\mathbf{a}_2) + k(\lambda \mathbf{b}_1 + (1-\lambda)\mathbf{b}_2)$ .

Essendo  $\lambda \mathbf{a}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{a}_2 \in A$  per convessità di A e  $\lambda \mathbf{b}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{b}_2 \in B$  per convessità di B, ne segue che  $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in hA + kB$ .

## Proposizione 7.8: Somma di un chiuso e di un compatto in uno spazio normato è chiusa

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $C \subseteq E$  chiuso.

Sia  $K \subseteq E$  compatto.

Allora, C + K è chiuso.

## Dimostrazione

Sia  $\mathbf{u} \in \overline{C+K}$ ; per acquisire la tesi si provi che  $\mathbf{u} \in C+K$ .

Essendo  $\mathbf{u} \in \overline{C+K}$ , esistono due successioni  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  e  $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$  tali che  $\mathbf{u} = \lim_n \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n$ .

Essendo K compatto, dunque sequenzialmente compatto, la successione  $\{\mathbf y_n\}_{n\in\mathbb N}\subseteq K$  ammette un'estratta  $\{\mathbf y_{n_k}\}_{k\in\mathbb N}$  tale che  $\lim_k \mathbf y_{n_k}=\mathbf y\in K$ .

Ne segue che,  $\lim_k \mathbf{x}_{n_k} = \lim_k \ (\mathbf{x}_{n_k} + \mathbf{y}_{n_k}) - \mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{u} - \mathbf{y}$ ; essendo C chiuso e  $\{\mathbf{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$  convergente a  $\mathbf{u} - \mathbf{y}$ , ne segue che  $\mathbf{u} - \mathbf{y} \in C$ .

Allora, 
$$\mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{u} - \mathbf{y})}_{\in C} + \underbrace{\mathbf{y}}_{\in K} \in C + K.$$

## **Q** Osservazione

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Siano  $C, D \subseteq E$  chiusi.

Generalmente, C + D non è chiuso.

Ad esempio, nello spazio euclideo  $\mathbb{R}$ , si considerino gli insiemi  $C=\mathbb{Z}$  e  $D=\left\{n+\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ . Essi sono chiusi in quanto discreti.

Tuttavia, C + D non è chiuso.

Infatti, 0 è un punto di accumulazione per C+D in quanto, per ogni  $n\in\mathbb{N}$ , si ha  $\frac{1}{n}=\underbrace{-n}_{\in C}+\underbrace{\left(n+\frac{1}{n}\right)}_{\in D}\in C+D$ ;

Ma  $0 \notin C + D$  in quanto, se esistessero  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$  tali che  $0 = m + n + \frac{1}{n}$ , si avrebbe  $\mathbb{Z} \ni m + n = -\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$ , il che è contraddittorio.

### **☐** Teorema 7.9: Teorema di Separazione

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $C \subseteq E$  chiuso e convesso.

Sia  $K \subseteq E$  compatto e convesso.

Si supponga  $C \cap K = \emptyset$ .

Allora, esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\sup_{\mathbf{y} \in C} \psi(\mathbf{y}) < \inf_{\mathbf{z} \in K} \psi(\mathbf{z}).$ 

#### **Dimostrazione**

Si consideri l'insieme K-C; esso è convesso per la [Proposizione 7.7], e chiuso per la [Proposizione 7.8].

Inoltre,  $\mathbf{0} \notin K - C$ ;

infatti, se fosse  $\mathbf{0} \in K - C$ , si avrebbe  $\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  con  $\mathbf{x} \in K$  e  $\mathbf{y} \in C$ , e dunque  $K \ni \mathbf{x} = \mathbf{y} \in C$ , contro il fatto che  $K \cap C = \emptyset$ .

Essendo allora K-C chiuso e  $\mathbf{0} \notin K-C$ , esiste r>0 tale che  $B(\mathbf{0},r)\cap (K-C)=\varnothing$ .

Si ponga ora  $A = K - C + B\left(\mathbf{0}, \frac{r}{2}\right)$ ; esso è convesso per la [Proposizione 7.7].

Inoltre,  $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$ .

Infatti, per ogni  $\mathbf{x} \in K-C$  si ha  $B\left(\mathbf{x}, \frac{r}{2}\right) = \mathbf{x} + B\left(\mathbf{0}, \frac{r}{2}\right) \in K-C+B\left(\mathbf{0}, \frac{r}{2}\right) = A$ .

Infine,  $\mathbf{0} \notin \overline{A}$ .

Infatti, per ogni  $\mathbf{x} \in C$ , per ogni  $\mathbf{y} \in K$  e per ogni  $\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, \delta)$  si ha

 $d(\mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{z}) \ge d(\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{0}, \mathbf{z})$  Disuguaglianza triangolare

 $= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| - \|\mathbf{z}\|$ 

 $\geq r - rac{r}{2} = rac{r}{2}$ 

Definizione di  $d_i$  metrica indotta dalla norma  $\|\cdot\|$ 

 $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \ge r$  in quanto  $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in K - C$  e  $B(\mathbf{0}, r) \cap (K - C) = \emptyset$   $\|\mathbf{z}\| < \delta$  in quanto  $\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, \delta)$ 

Dunque si ha  $d(\mathbf{0},A)\geq \frac{r}{2}$ , per cui  $B\left(\mathbf{0},\frac{r}{2}\right)\cap A=\varnothing$ , quindi  $\mathbf{0}
otin \overline{A}$ .

Pertanto, per la [Proposizione 7.6] esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\inf_{\mathbf{x} \in A} \psi(\mathbf{x}) = m > 0$ .

Si provi che  $\sup_{\mathbf{y} \in C} \psi(\mathbf{y}) < \inf_{\mathbf{z} \in K} \psi(\mathbf{z}).$ 

Si fissino  $\mathbf{y} \in C$  e  $\mathbf{z} \in K$ ;

vale  $\mathbf{z} - \mathbf{y} \in A$ , per cui  $\psi(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \ge m$ , ossia  $\psi(\mathbf{z}) - \psi(\mathbf{y}) \ge m$  per linearità di  $\psi$ .

Dunque, si ha  $\psi(\mathbf{z}) \geq \psi(\mathbf{y}) + m$  per ogni  $\mathbf{y} \in C, \mathbf{z} \in K$ ;

allora, gli insiemi  $\{\psi(\mathbf{z}) \mid \mathbf{z} \in K\}$  e  $\{\psi(\mathbf{y}) + m \mid \mathbf{y} \in C\}$  sono separati, e per come è diretta la disuguaglianza si deduce quindi che

$$\inf_{\mathbf{z} \in K} \psi(\mathbf{z}) \geq \sup_{\mathbf{y} \in C} (\psi(\mathbf{y}) + m) = \left( \sup_{\mathbf{y} \in C} \psi(\mathbf{y}) 
ight) + m > \sup_{\mathbf{y} \in C} \psi(\mathbf{y}).$$