5 - Equi-continuità

Premesse

> Insieme delle funzioni continue

Siano X e Y due spazi topologici.
$C^0(X, Y)$ denota l'insieme delle funzioni continue da X in Y.

Insieme delle funzioni continue su un compatto a valori in uno spazio metrico

Sia X uno spazio topologico compatto.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $b(X, Y)$ l'insieme delle funzioni limitate da X a Y.

Si hanno i seguenti fatti:

1. $C^0(X, Y) \subseteq b(X, Y)$
2. $C^0(X, Y)$ è chiuso in $b(X, Y)$ rispetto alla metrica ρ_d.

Infatti, vale la $1.$ in quanto funzioni continue su un compatto sono limitate avendo immagine compatta.

Vale la $2.$ In quanto il limite uniforme di funzioni continue è anch'essa una funzione continua.

> Uniforme continuità

Siano (X, ρ) e (Y, d) due spazi metrici.

Una funzione $f : X \to Y$ si dice uniformemente continua quando
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : \rho(x, y) < \delta,\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

L'uniforme continuità non è definibile su spazi topologici, in quanto è necessaria la nozione di distanza.

Le funzioni uniformemente continue sono continue; il viceversa generalmente non vale.

Equi-continuità

Equi-continuità

Siano (X, ρ) e (Y, d) due spazi metrici.
Sia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$.
Le funzioni in $\mathcal{F}$ si dicono equi-continue quando
$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_x > 0 : \forall y \in X : d(x, y) < \delta_x,\ \forall f \in \mathcal{F},\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

Equi-uniforme continuità

Siano (X, ρ) e (Y, d) due spazi metrici.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y.
Le funzioni in $\mathcal{F}$ si dicono equi-uniformemente continue quando
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : \rho(x, y) < \delta, \forall f \in \mathcal{F},\ d(f(x), g(x)) < \varepsilon.$

Osservazione

Ogni funzione in un insieme di funzioni equi-(uniformemente) continue è (uniformemente) continua.

Equi-continuità di funzioni su un compatto implica la equi-uniforme continuità

Siano (X, ρ) e (Y, d) due spazi metrici, con X compatto.
Sia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ una famiglia di funzioni equi-continue.

Allora, esse sono anche equi-uniformemente continue.

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$.
Per equicontinuità delle funzioni in $\mathcal{F}$, per ogni $x \in X$ esiste $\delta_x > 0$ per cui valga $d(f(x), f(y))$ per ogni $y \in X$ con $\rho(x, y) < \delta_x$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Si consideri l'insieme $\left\{B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right) \mid x \in X\right\}$;
questo è un ricoprimento di aperti per X, che è compatto.
Allora, esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$.

Sia $\delta^* = \frac{1}{2} \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} \delta_{x_i}$; si provi che tale valore è valido per far valere la condizione della definizione di equi-uniforme continuità.

Siano dunque $x, y \in X$ con $\rho(x, y) < \delta^*$, e sia $f \in \mathcal{F}$;
si valuti $d(f(x), f(y))$.

Sia $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $x \in B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$, che esiste essendo $\left\{B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)\right\}_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ un ricoprimento di X.

Si osservi che

$\rho(x_i, y) \leq \rho(x_i, x) + \rho(x, y)$	Disuguaglianza triangolare
$< \frac{\delta_{x_i}}{2} + \delta^*$	In quanto $x \in B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$ e $\rho(x, y) < \delta^*$
$\leq \delta_{x_i}$	In quanto $\delta^* = \frac{1}{2} \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} \delta_{x_i}$

Allora,

$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(y))$	Disuguaglianza triangolare
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$	Per definizione di δ_{x_i} , in quanto $x, y \in B(x_i, \delta_{x_i})$

Segue dunque la tesi.

■