Premessa

D'ora in poi si denoterà con u' il simbolo $\dot{u}$, inteso come derivata nel senso di funzioni di variabile reale.

⌘ Definizione: Equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma implicita

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $A \subseteq \mathbb{R} \times X \times X$.
Sia $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio normato.
Sia $f : A \to Y$.

Si denota con $f(t, u, u') = \mathbf{0}$ l'**equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma implicita**, associata a f;

essa consiste nella ricerca di intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$ e di funzioni $u : I \to X$ di classe C^1, tali che $\big(t, u(t), u'(t)\big) \in A$ e $f\big(t, u(t), u'(t)\big) = \mathbf{0}_Y$, per ogni $t \in I$.

Se f ha una legge del tipo $(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{y} - g(t, \mathbf{x})$ per qualche funzione g, l'equazione differenziale si scrive allora come $u' - g(t, u) = \mathbf{0}$ oppure $u' = g(t, u)$;
un'equazione di questo tipo si dice **in forma normale**.

⌘ Definizione: Problema di Cauchy

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $A \subseteq \mathbb{R} \times X \times X$.
Sia $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio normato.
Sia $f : A \to Y$.
Sia $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ tale che $f(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$.
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Si denota con $\begin{cases} f(t,u,u') = \mathbf{0} \ \ \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ u'(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$ il **problema di Cauchy** associato a f e $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$;

esso consiste nella ricerca di funzioni $u : I \to X$ di classe C^1, tali che:

- $\big(t, u(t), u'(t)\big) \in A$ e $f\big(t, u(t), u'(t)\big) = 0$, per ogni $t \in I$;
- $u(t_0) = \mathbf{x}_0$;
- $u'(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Teorema 27.1: Esistenza e unicità della soluzione al problema di Cauchy in forma normale

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Sia $f : I \times X \to X$ una funzione continua;
si supponga che esista una funzione $L : I \to \mathbb{R}_0^+$ continua, tale che
$\|f(t,\mathbf{x}) - f(t,\mathbf{y})\| \leq L(t) \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, per ogni $t \in I$ e per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.
Sia $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times X$.

Il problema $\begin{cases} u' = f(t,u) = \mathbf{0} \ \ \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$ ammette un'unica soluzione

Dimostrazione

Si supponga dapprima I compatto, ossia del tipo $[a;b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Si definisca l'operatore $\Phi : C^0\big([a;b], X\big) \to C^0\big([a;b], X\big)$ ponendo
$\Phi(u)(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\, ds$ per ogni $u \in C^0\big([a;b], X\big)$ e per ogni $t \in [a;b]$;
esso è ben definito, cioè $\Phi(u)$ è continuo per ogni $u \in C^0\big([a;b], X\big)$, essendo la funzione integrale $t \mapsto \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\, ds$ di classe C^1 per il teorema fondamentale del calcolo integrale ([Teorema 21.9]).

Sempre per tramite di tale teorema, si osserva che u è soluzione del problema $\begin{cases} u' = f(t,u) = \mathbf{0} \ \ \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$, se e solo se $\Phi(u) = u$.

Per acquisire la tesi, si provi dunque che Φ ammette un unico punto fisso, facendo uso del teorema di Banach-Caccioppoli.

Poiché la funzione L è continua su I compatto, essa ammette massimo;
sia dunque $L^* = \max\limits_{t \in [a;b]} L(t)$ (che si nota essere nonnegativo in quanto L è nonnegativa) e sia $M > L^*$.

Si definisca la funzione $\| \cdot \|^*_{C^0([a;b],X)} : C^0\big([a;b], X\big) \to \mathbb{R}$, ponendo $u \mapsto \|u\|^*_{C^0([a;b],X)} := \sup\limits_{t \in [a;b]} e^{-M|t-t_0|} \cdot \|u(t)\|$ per ogni $u \in C^0\big([a;b], X\big)$;

essa è una norma su $C^0\big([a;b], X\big)$, e si osserva che
$e^{-M(b-a)} \|u\|_{C^0([a;b],X)} \leq \|u\|^*_{C^0([a;b],X)} \leq \|u\|_{C^0([a;b],X)}$ per ogni $u \in C^0\big([a;b], X\big)$, dove $\| \cdot \|_{C^0([a;b],X)}$ è la norma usuale su $C^0\big([a;b], X\big)$.

Allora, le due norme $\| \cdot \|^*_{C^0([a;b],X)}$ e $\| \cdot \|_{C^0([a;b],X)}$ sono equivalenti;
essendo $\Big(C^0\big([a;b], X\big), \| \cdot \|_{C^0([a;b],X)}\Big)$ completo, ne viene allora che anche $\Big(C^0\big([a;b], X\big), \| \cdot \|^*_{C^0([a;b],X)}\Big)$ è completo.

Resta da mostrare che Φ è una contrazione (rispetto alla norma $\| \cdot \|^*_{C^0([a;b],X)}$).

Siano $u, v \in C^0\big([a;b], X\big)$;
per ogni $t \in [a;b]$, si ha

$\|\Phi(u)(t) - \Phi(u)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s,u(s)) - f(s,v(s)) \, ds \right\|$	Per definizione di Φ e per linearità dell'integrale di Riemann
$\leq \left\| \int_{t_0}^t \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\| \, ds \right\|$	Per maggiorazione della norma di un integrale di Riemann (il valore assoluto va scritto, per ovviare al caso in cui $t_0 > t$)
$\leq \left\| \int_{t_0}^t L(s) \cdot \|u(s) - v(s)\| \, ds \right\|$	Per ipotesi su L

$\leq \left\lvert \int_{t_0}^{t} L^* \cdot \lVert u(s) - v(s) \rVert \, ds \right\rvert$	Per definizione di L^* e per monotonia dell'integrale di Riemann per funzioni a valori reali
$\leq L^* \cdot \left\lvert \int_{t_0}^{t} \lVert u(s) - v(s) \rVert \, ds \right\rvert$	Per linearità dell'integrale di Riemann, ed essendo $L^* \geq 0$
$= L^* \cdot \left\lvert \int_{t_0}^{t} e^{M\lvert s-t_0\rvert} \cdot e^{-M\lvert s-t_0\rvert} \lVert u(s) - v(s) \rVert \, ds \right\rvert$	
$\leq L^* \cdot \left\lvert \int_{t_0}^{t} e^{M\lvert s-t_0\rvert} \cdot \lVert u - v \rVert^*_{C^0\left([a;b],X\right)} \, ds \right\rvert$	Per definizione di $\lVert \cdot \rVert^*_{C^0\left([a;b],X\right)}$ e per monotonia dell'integrale di Riemann per funzioni a valori reali
$= L^* \lVert u - v \rVert^*_{C^0\left([a;b],X\right)} \cdot \left\lvert \int_{t_0}^{t} e^{M\lvert s-t_0\rvert} \, ds \right\rvert$	Per linearità dell'integrale di Riemann e per nonnegatività delle norme
$= L^{} |u-v|_{C^0\big([a;b],X\big)}^{}\cdot \frac{1}{M}e^{ M	t-t_{0}

Si ha dunque che
$e^{-M\lvert t-t_0\rvert} \cdot \lVert \Phi(u)(t) - \Phi(u)(t) \rVert \leq \frac{L^*}{M} \lVert u - v \rVert^*_{C^0\left([a;b],X\right)}$ per ogni $t \in [a;b]$, da cui segue che

$\lVert \Phi(u) - \Phi(u) \rVert^*_{C^0\left([a;b],X\right)} \leq \frac{L^*}{M} \lVert u - v \rVert^*_{C^0\left([a;b],X\right)}$, per definizione di $\lVert \cdot \rVert^*_{C^0\left([a;b],X\right)}$.

Dunque, rispetto a $\lVert \cdot \rVert^*_{C^0\left([a;b],X\right)}$ la funzione Φ è Lipschitziana di costante $\frac{L^*}{M}$;
allora, essa è una contrazione, essendo $\frac{L^*}{M} \in [0;1[$ in quanto $0 \leq L^* < M$ per definizione di L^* e per costruzione di M.

Pertanto, Φ ammette un unico punto fisso per il teorema di Banach-Caccioppoli.

Si supponga ora che I non sia un intervallo compatto.

Allora, è comunque possibile costruire una successione non decrescente di intervalli compatti $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dimodoché $t_0 \in I_1$ e $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia allora u_n la soluzione del problema $\begin{cases} u' = f(t,u) = \mathbf{0} \ \ \forall t \in I_n \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$, che esiste ed è unica in quanto questo problema rientra nel caso precedente per costruzione di $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Si osserva che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione u_{n+1} estende u_n, in quanto $I_{n+1} \supseteq I_n$ per costruzione di $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e $(u_{n+1})_{|I_n} = u_n$ per definizione di u_n.

Allora, risulta ben definita la funzione $u : I \to X$ in cui si pone
$u(t) = u_n(t)$ per ogni $t \in I$, con $n \in \mathbb{N}$ tale che $t \in I_n$.

Essa è soluzione al problema $\begin{cases} u' = f(t,u) = \mathbf{0} \ \ \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$, ed è l'unica per unicità degli u_n.