2.1 - Varietà Lisce

La definizione di varietà topologica che abbiamo dato nella sezione precedente è sufficiente per studiare proprietà topologiche come compattezza, connessione e così via.

Tuttavia, nell'intera teoria delle varietà topologiche non abbiamo traccia dell'analisi.

C'è una buona ragione per questo:
comunque cerchiamo di dare un senso alle derivate delle funzioni su una varietà, tali derivate non possono essere invarianti rispetto agli omeomorfismi.

Ad esempio, la funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di legge $\varphi(u, v) = (u^{1/3}, v^{1/3})$ è un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e sé stesso;
la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di legge $f(x, y) = x$ è differenziabile, ma $f \circ \varphi$ non è differenziabile all'origine.

Per dare un senso alle derivate di funzioni a valori reali, curve o mappe tra varietà, dobbiamo introdurre un nuovo tipo di varietà chiamata *varietà liscia*;
questa sarà una varietà topologica con una struttura aggiuntiva oltre alla sua topologia, che ci permetterà di decidere quali funzioni su o nella varietà sono lisce.

Come definire la struttura differenziabile su una varietà

C^∞-Compatibilità e atlanti

Per capire quale struttura aggiuntiva potrebbe essere appropriata su una varietà topologica per estendere il concetto di liscezza, consideriamo una varietà topologica arbitraria M.

Ogni punto $p \in M$ è nel dominio di una carta di coordinate (U, φ).
Una definizione plausibile di una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ liscia in p potrebbe allora consistere nel dichiarare che la funzione composta $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ sia liscia nel senso dell'analisi ordinaria.

Tuttavia, questa definizione dipende dalla carta di coordinate, per cui bisogna introdurre una condizione che renda la definizione indipendente dalle carte.

Con questa motivazione in mente, descriviamo ora i dettagli della costruzione.

⌘ Definizione 2.1.1 (Mappe di transizione, C^∞-Compatibilità, Atlante).

Sia M una n-varietà topologica.

Date due carte (U, φ) e (V, ψ) tali che $U \cap V \neq \varnothing$, la composizione $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ è detta *mappa di transizione* da φ a ψ; essa è una composizione di omeomorfismi, quindi è essa stessa un omeomorfismo.

Due carte (U, φ) e (V, ψ) sono dette C^∞-*compatibili* quando $U \cap V = \varnothing$ oppure la mappa di transizione $\psi \circ \varphi^{-1}$ è un diffeomorfismo (la biunivocità è automatica in quanto φ e ψ sono omeomorfismi).
Sia M una n-varietà topologica.

Si dice *atlante* per M una famiglia di carte $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ i cui domini coprono M;

> se, inoltre, ogni coppia di carte in $\mathcal{A}$ è C^∞-compatibile, l'atlante è detto C^∞-*atlante* o *atlante liscio*.

Date due carte (U,φ) e (V,ψ) con $U \cap V \neq \varnothing$, è spesso più semplice dimostrare che sono C^∞-compatibili verificando che $\psi \circ \varphi^{-1}$ è di classe C^∞, iniettiva, con Jacobiana non singolare in ogni punto. (Corollario 1.1.16)

Inoltre, per semplificare ulteriormente la verifica della C^∞-compatibilità abbiamo la seguente

Proposizione 2.1.2 (Compatibilità con un atlante è transitiva).

Sia M uno spazio localmente euclideo;

sia $\mathcal{A}$ un atlante liscio per M.

Siano (V,ψ) e (W,σ) due carte compatibili con l'atlante $\mathcal{A}$.

Allora, esse sono compatibili tra loro.

Dimostrazione

Supponiamo che $V \cap W \neq \varnothing$, altrimenti non c'è nulla da mostrare;
data la simmetria del problema, basta mostrare che $\psi \circ \sigma^{-1}$ è di classe C^∞.

Dall'ipotesi di compatibilità segue che, per ogni $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$, la composizione $(\psi \circ \varphi) \circ (\varphi \circ \sigma^{-1})$ è di classe C^∞;

essa corrisponde a $\psi \circ \sigma^{-1}$, ristretta all'insieme $\sigma(U \cap V \cap W)$.

Quindi, $\psi \circ \sigma^{-1}$ è di classe C^∞ su $\sigma(U \cap V \cap W)$, per ogni dominio U dell'atlante $\mathcal{A}$;

poiché i domini di un atlante ricoprono M per definizione, ne viene che $\psi \circ \sigma^{-1}$ è di classe C^∞ su tutti i punti di $\sigma(V \cap W)$, e la tesi è acquisita.

■

Atlanti massimali

Il nostro piano è definire una "struttura differenziabile" su una varietà M dandole un atlante liscio, e definire una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ come "liscia" quando $f \circ \varphi^{-1}$ è liscia nel senso dell'analisi ordinaria, per ogni carta di coordinate (U, φ) nell'atlante.

Tuttavia, c'è un piccolo problema tecnico con questo approccio:
in generale, ci saranno molti atlanti possibili che danno la "stessa" struttura liscia, nel senso che tutti determinano la stessa collezione di funzioni lisce su M.

Ad esempio, consideriamo i seguenti due atlanti su $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{(B(x,1), \mathrm{Id}_{B(x,1)}) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Questi sono atlanti lisci differenti, ma è evidente che una qualunque funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è liscia rispetto a uno qualsiasi dei due atlanti se e solo se è liscia nel senso dell'analisi ordinaria.

Possiamo ovviare a questo problema di ambiguità considerando tra gli atlanti lisci quelli *massimali rispetto all'inclusione*;
per definizione di atlante liscio, ciò significa che *ogni carta C^∞-compatibile con tutte le carte di $\mathcal{A}$ sta essa stessa in $\mathcal{A}$.*

La definizione di varietà liscia

Ora possiamo definire l'oggetto principale della geometria differenziale.

> ⌘ **Definizione 2.1.3 (Struttura liscia, Varietà liscia).**
>
> Data una varietà topologica M, si dice *struttura liscia* (o *differenziabile* o C^∞) su M un atlante liscio massimale.
>
> Si dice quindi *varietà liscia* (o *differenziabile* o C^∞) una coppia $(M, \mathcal{A})$, dove M è una varietà topologica e $\mathcal{A}$ è una struttura liscia su M.

Quando la struttura liscia è sottintesa, solitamente ne omettiamo la menzione e denotiamo la varietà liscia semplicemente con M.

Nota: Sottolineiamo che una struttura liscia è un'informazione aggiuntiva che deve essere aggiunta a una varietà topologica prima di poterla chiamare una "varietà liscia";
difatti, una data varietà topologica può avere molte strutture lisce differenti (Esempio 2.2.4 e Esercizio 2.1.5), e di contro esistono varietà topologiche che non ammettono alcuna struttura liscia.

Generalmente non è molto conveniente definire una struttura liscia descrivendo esplicitamente un atlante liscio massimale, perché questo contiene molte carte;
fortunatamente, ci basta specificare semplicemente un atlante liscio per individuare una struttura differenziale, come mostra la seguente

Proposizione 2.1.4 (Atlante liscio identifica la struttura differenziabile).

Sia M una varietà topologica;

sia $\mathcal{U}$ un atlante liscio per M.

Esiste un unico atlante massimale $\mathcal{A}$ per M, che contiene $\mathcal{U}$;
esso è dato dall'insieme delle carte (A, ψ) i M, compatibili con tutte le carte di $\mathcal{U}$.

Inoltre, due atlanti lisci $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono contenuti nella stessa struttura liscia, se e solo se $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ è ancora un atlante liscio.

Dimostrazione

Per prima cosa, osserviamo che l'unicità segue subito dalla proprietà di massimalità delle strutture differenziabili.

Mostriamo ora che la struttura differenziabile indicata è data dall'insieme

$$\mathcal{A} = \{(A, \psi) \text{ carta su } M : (A, \psi) \text{ è compatibile con tutte le carte di } \mathcal{U}\}$$

La compatibilità delle carte di $\mathcal{A}$ segue dalla Proposizione 2.1.2;
date due carte (A, φ) e (A', ψ') in $\mathcal{A}$, per definizione esse sono compatibili con le carte dell'atlante $\mathcal{U}$, dunque sono compatibili tra loro.

Infine, per dedurre il secondo punto basta osservare che due atlanti lisci $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono contenuti nella stessa struttura liscia se e solo se le carte di $\mathcal{U}$ sono compatibili con le carte di $\mathcal{V}$, il che significa che $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ è ancora un atlante liscio.

■

Rappresentazione in coordinate locali

Se M è una varietà liscia, data una carta (U, φ) appartenente alla struttura liscia di M diremo semplicemente che questa è una carta di M;
se ci riferiamo alle carte su M come sola varietà topologica, lo diremo espressamente.

Ecco come solitamente si pensa alle carte di una varietà liscia.

Una volta scelta una carta (U, φ) di M, la mappa delle coordinate $\varphi : U \to U_\varphi \subseteq \mathbb{R}^n$ può essere considerata come una temporanea identificazione tra U e U_φ;
utilizzando questa identificazione, mentre lavoriamo in questa carta possiamo pensare a U contemporaneamente come un sottoinsieme aperto di M e come un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$:

Con questa identificazione, possiamo rappresentare un punto $p \in U$ mediante le sue coordinate
$(x^1, \ldots, x^n) = \varphi(p)$, e pensare a questa n-upla come il punto p.
Diciamo quindi che "$(x^1, \ldots, x^n)$ è la rappresentazione in coordinate (locali) per p" o "$p = (x^1, \ldots, x^n)$ in coordinate locali".

Un altro modo di vedere le cose è che mediante la nostra identificazione $U \cong U_\varphi$, possiamo pensare a φ come alla mappa identità e ometterla dalla notazione.

Ci vuole un po' per abituarcisi, ma il vantaggio è una semplificazione enorme della notazione in molte situazioni;
basta ricordare che l'identificazione è in generale solo locale e dipende fortemente dalla scelta della carta delle coordinate.

Il fatto che le varietà non vengano fornite con alcuna scelta predefinita di coordinate è sia un bene che un male.

La flessibilità di scegliere le coordinate in modo più o meno arbitrario può essere un grande vantaggio nell'affrontare problemi nella teoria delle varietà, perché le coordinate possono spesso essere scelte per semplificare qualche aspetto del problema in questione.

Tuttavia, paghiamo questa flessibilità con l'obbligo di assicurarci che gli oggetti che desideriamo definire globalmente su una varietà non dipendano da una scelta particolare di coordinate.
In genere ci sono due modi di farlo:
o scrivendo una definizione dipendente dalle coordinate, che poi si dimostra dare gli stessi risultati in qualsiasi carta delle coordinate, oppure scrivendo una definizione che è esplicitamente indipendente dalle coordinate.

Problemi ed esercizi

Esercizio 2.1.5 (Strutture lisce distinte su una stessa varietà topologica con almeno una struttura liscia).

Sia M una varietà topologica non vuota di dimensione $n \geq 1$.

Supponiamo che M disponga di una struttura liscia $\mathcal{A}$;
Vogliamo far vedere che su di esso possiamo definire una quantità più che numerabile di strutture lisce a due a due distinte.

Per fare ciò, consideriamo intanto l'intorno sferico aperto $B^n(\mathbf{0},1)$ di $\mathbb{R}^n$;
al variare di $s > 0$ consideriamo la funzione

$$h_s : B^n(\mathbf{0},1) \to B^n(\mathbf{0},1) : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^{s-1} \cdot \mathbf{x}$$

Questa è un omeomorfismo su $B^n(\mathbf{0},1)$, con inversa

$$h_s^{-1} : \mathbf{y} \mapsto \|\mathbf{y}\|^{(1-s)/s} \cdot \mathbf{y} \qquad \Longrightarrow \qquad h_s^{-1} = h_{(1-s)/s}$$

Con un po' di analisi ordinaria troviamo che h_s è di classe C^∞ se e solo se s è intero, e dunque $h_s^{-1} = h_{(1-s)/s}$ è di classe C^∞ se e solo se $(1-s)/s$ è intero, ossia $1/s$ è intero.

Quindi h_s è un diffeomorfismo se e solo se entrambi i casi si possono verificare, ossia quando $s = 1$;
osserviamo inoltre che la restrizione $h_s|_{\mathbf{x}\neq 0}$ è un diffeomorfismo per ogni $s > 0$.

A questo punto, dalla struttura liscia $\mathcal{A}$ di M estraiamo un atlante liscio $\mathcal{U}$ dimodoché, fissato un punto $p \in M$, esista un unica carta (U_p, φ_p) contenente p; imponiamo poi che tale carta sia circolare centrata in p, ossia si abbia $\varphi_p : U_p \leftrightarrow B^n(\mathbf{0}, 1)$ con $\varphi_p(p) = \mathbf{0}$.

Prendiamo ora la famiglia $\mathcal{U}_s = \mathcal{U} \setminus \{(U_p, \varphi_p)\} \cup \{(U_p, h_s \circ \varphi_p)\}$;
osserviamo che questa costituisce un atlante liscio per M.

Infatti, per ogni $(U, \varphi) \in \mathcal{U} \setminus \{(U_p, \varphi_p)\}$ la mappa $h_s \circ \varphi_p \circ \varphi^{-1}$ è un diffeomorfismo;
ciò segue dal fatto che $p \notin U$ per scelta dell'atlante $\mathcal{U}$, dunque φ_p nella composizione non manda alcun elemento in $\mathbf{0}$.
Pertanto, h_s è un diffeomorfismo in quanto riceve solo valori diversi da $\mathbf{0}$, e $\varphi_p \circ \varphi^{-1}$ è un diffeomorfismo per compatibilità.

Osserviamo infine che gli atlanti $\mathcal{U}_s$ inducono a due a due strutture lisce differenti;
ciò segue dal fatto che le carte $(U_p, h_s \circ \varphi_p)$ e $(U_p, h_{s'} \circ \varphi_p)$ non sono compatibili per $s \neq s'$, in quanto la mappa

$$(h_s \circ \varphi_p) \circ (h_{s'} \circ \varphi_p)^{-1} = h_s \circ h_{s'}^{-1} : B^n(\mathbf{0}, 1) \to B^n(\mathbf{0}, 1)$$

non è un diffeomorfismo (per rendersi conto di questa cosa basta ricordare che $h_t^{-1} = h_{(1-t)/t}$ e osservare che $h_s \circ h_t = h_{2t+s-2}$, per poi accertarsi che la composizione in questione non sia h_1).