16 - Il Teorema dell'Omeomorfismo

Proposizione 16.1: Caratterizzazione delle funzioni di classe C^1 a valori reali

Sia $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $A \subseteq X$ aperto.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è di classe C^1, ossia f è G-derivabile in A, e f' è continua in A.
2. f è G-derivabile in A, e $\dot{f}$ è continua in A.

Dimostrazione

Basta mostrare che, se f è G-derivabile in A, la continuità di f' in A equivale alla continuità di $\dot{f}$ in A.

Ciò segue dal fatto che $f' = \left(X \to X^* : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle\right) \circ \dot{f}$, e la mappa $X \to X^* : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle$ è un'isometria lineare per la [Proposizione 10.15], dunque un omeomorfismo.

Infatti, se $\dot{f}$ è continua, si ha f' continua in quanto composizione di due funzioni continue;
viceversa, se f' è continua, si ha $\dot{f} = \left(X \to X^* : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle\right)^{-1} \circ f'$, continua in quanto composizione di due funzioni continue.
■

Proposizione 16.2 - Derivabilità della distanza al quadrato

Sia $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.
Sia $\mathbf{x}_0 \in X$.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Si hanno i seguenti fatti:

- f è di classe C^1, e si ha $f'(\mathbf{x}) = 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \cdot \rangle$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.
- Se $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è di Hilbert, si ha $\dot{f}(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in X$ (dove $\dot{f}$ denota la derivata nel senso dato per funzioni a valori reali).

Osservazioni preliminari

La mappa $X \to X^* : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle$ è continua.

Infatti, fissato $\mathbf{x}_0 \in X$, per ogni $\mathbf{z} \in X$ si ha

$$\begin{aligned} & |\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle - \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{z} \rangle| = |\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{z} \rangle| && \text{Per bilinearità di } \langle \cdot, \cdot \rangle \\ & \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{z}\| && \text{Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz} \end{aligned}$$

Dunque si ha $\|\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle - \langle \mathbf{x}_0, \cdot \rangle\|_{X^*} \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, per definizione di $\|\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle - \langle \mathbf{x}_0, \cdot \rangle\|_{X^*}$.

Poiché si ha anche $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = 0$, segue allora per confronto che

$\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle = \langle \mathbf{x}_0, \cdot \rangle$.

Dimostrazione

Si provi che f è G-derivabile in X, con $f'(\mathbf{x}) = \langle 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \cdot \rangle = 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \cdot \rangle$ per ogni $\mathbf{x} \in X$;

Fissato $\mathbf{x} \in X$, si ha

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|\mathbf{x}+\lambda\mathbf{v}-\mathbf{x}_0\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2}{\lambda} \quad \text{Per definizione di } f$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^2 \|\mathbf{v}\|^2 + 2\lambda \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \rangle}{\lambda}$$ Per definizione di $\| \cdot \|$ come norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e per bilinearità di $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \lambda \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \rangle = 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \rangle.$$

Dunque, $f'(\mathbf{x}) = \langle 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \cdot \rangle$.

La continuità di f' segue dall'osservazione preliminare.

Se X è di Hilbert, si ha $\dot{f}(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ per definizione di $\dot{f}$.

■

Proposizione 16.3: Caratterizzazione della continuità in spazi metrici

Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici.
Sia $x_0 \in X$.
Sia $f : X \to Y$.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è continua in x_0;
2. Ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ convergente a x_0 , ammette un'estratta $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\lim_k f(x_{n_k}) = f(x_0)$.

Dimostrazione

Se f è continua in x_0, essendo una funzione tra spazi metrici essa è ivi anche sequenzialmente continua;
allora, ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ convergente a x_0 è essa stessa tale che $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$.

Per acquisire il viceversa, si provi la contronominale.
Si supponga dunque che f non sia continua in x_0.
Si provi l'esistenza di una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergente a x_0 tale che, per ogni estratta $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ si abbia $\lim_k f(x_{n_k}) \neq f(x_0)$.

Allora, essendo una funzione tra spazi metrici, f non è neanche sequenzialmente continua in x_0.
Cioè, esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergente a x_0, tale che $\lim_n f(x_n) \neq f(x_0)$.
Esiste dunque un intorno U di x_0 tale che, per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, esiste $n_\nu \geq \nu$ tale che $f(x_{n_\nu}) \notin U$.

Segue allora la costruzione induttiva di un'estratta $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, tale che $f(x_{n_k}) \notin U$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Infatti, per $k = 1$ si costruisce $n_1 \geq 1$ tale che $f(x_{n_1}) \notin U$;
costruito n_k, si costruisce $n_{k+1} \geq n_k$ tale che $f(x_{n_{k+1}}) \notin U$.

La successione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, essendo estratta di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0.
avendo $f(x_{n_k}) \notin U$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ogni estratta $\{x_{n_{k_r}}\}_{r\in\mathbb{N}}$ è tale che $\lim_r f(x_{n_{k_r}}) \neq f(x_0)$.
■

Proposizione 16.4: Legame tra convergenza forte e debole in uno spazio con prodotto scalare

Sia $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.
Sia $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione in X.
Sia $\mathbf{x} \in X$.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente a $\mathbf{x}$, vale a dire $\lim_n \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0$;
2. $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a $\mathbf{x}$ e $\lim_n \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|$.

Dimostrazione

Se $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente a $\mathbf{x}$, tale successione converge ivi anche debolmente (Si veda l'[Osservazione 1] del capitolo 8); inoltre, si ha $\lim\limits_n \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|$ per continuità della norma.

Si supponga ora che $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a $\mathbf{x}$ e $\lim\limits_n \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|$.

per definizione di $\|\cdot\|$ come norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e per bilinearità di $\langle\cdot,\cdot\rangle$, si ha
$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_n\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle\mathbf{x}_n, \mathbf{x}\rangle$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per ipotesi, si ha $\lim\limits_n \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|$, dunque $\lim\limits_n \|\mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$;
essendo $\langle\cdot, \mathbf{x}\rangle \in X^*$, per ipotesi di convergenza debole si ha $\lim\limits_n \langle\mathbf{x}_n, \mathbf{x}\rangle = \langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2$.

Ne segue allora che $\lim\limits_n \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|^2 = \lim\limits_n \|\mathbf{x}_n\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle\mathbf{x}_n, \mathbf{x}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|^2 = 0$, dunque

$\lim\limits_n \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0$.
■

Proposizione 16.5: Stime dei limiti massimo e minimo di una somma di successioni

Siano $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ due successioni di numeri reali.

Si ha:

1. $\liminf\limits_n (\alpha_n + \beta_n) \geq \liminf\limits_n \alpha_n + \liminf\limits_n \beta_n$;
2. $\limsup\limits_n (\alpha_n + \beta_n) \geq \limsup\limits_n \alpha_n + \liminf\limits_n \beta_n$.

Dimostrazione

Si ricordi che, data una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si ha

$\liminf_n x_n = \lim_n \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n} x_n$;

$\limsup_n x_n = \lim_n \sup_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n} x_n$.

Si provi il punto **1.**

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}(\alpha_n + \beta_n) \geq \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}\alpha_n + \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}\beta_n;$$

per confronto dei limiti segue allora che

$$\lim_n \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}(\alpha_n + \beta_n) \geq \lim_n \left(\inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}\alpha_n + \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}\beta_n\right)$$

$= \lim_n \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}\alpha_n + \lim_n \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}\beta_n$, ossia

$$\liminf_n(\alpha_n + \beta_n) \geq \liminf_n \alpha_n + \liminf_n \beta_n.$$

Si provi ora il punto **2.**

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sup_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}\alpha_n = \sup_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}(\alpha_n + \beta_n - \beta_n)$$

$$\leq \sup_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}(\alpha_n + \beta_n) + \sup_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}(-\beta_n)$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}(\alpha_n + \beta_n) - \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n}\beta_n \;;$$

per confronto dei limiti segue allora che

$$\lim_n \sup_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n} \alpha_n \leq \lim_n \left(\sup_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n} (\alpha_n + \beta_n) - \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n} \beta_n \right)$$

$$= \lim_n \sup_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n} (\alpha_n + \beta_n) - \lim_n \inf_{k\in\mathbb{N}\,,\,k\geq n} \beta_n \text{ , ossia}$$

$$\limsup_n (\alpha_n + \beta_n) \geq \limsup_n \alpha_n + \liminf_n \beta_n .$$

Proposizione 16.6: Convergenza del prodotto scalare

Sia $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.
Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.
Sia $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione convergente a $\mathbf{x}$.
Sia $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione limitata, convergente debolmente a $\mathbf{y}$.

Allora, $\lim_n \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Dimostrazione

Essendo $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, sia $M > 0$ tale che $\|\mathbf{y}_n\| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned}
&|\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \\
&\leq |\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle| + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| && \text{Disuguaglianza triangolare} \\
&= |\langle \mathbf{x}_n - \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle| + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| && \text{Bilinearità di } \langle\cdot,\cdot\rangle \\
&\leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}_n\| + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| && \text{Bilinearità di } \langle\cdot,\cdot\rangle \\
&\leq M\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| && \text{Per costruzione di } M
\end{aligned}$$

Poiché $\lim_n \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0$ per convergenza di $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathbf{x}$ e $\lim_n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = 0$ per convergenza debole di $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathbf{y}$, si ha la tesi.

■

Teorema 16.7: Teorema dell'omeomorfismo

Sia $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, di classe C^1.
Sia $\Phi : X \to X$ la funzione definita ponendo $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \dot{f}(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Φ è un omeomorfismo.

Osservazioni preliminari

Fissato $\mathbf{y} \in X$, si definisca la funzione $J_{\mathbf{y}} : X \to \mathbb{R}$ ponendo
$J_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

$J_{\mathbf{y}}$ è strettamente convessa.

Infatti, f è convessa per ipotesi, e la mappa $X \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ è strettamente convessa per la [Proposizione 10.10].
Allora, $J_{\mathbf{y}}$ è strettamente convessa essendo somma di una funzione convessa e di una strettamente convessa.

$J_{\mathbf{y}}$ è di classe C^1, con $\dot{J}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \dot{f}(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Infatti, f è di classe C^1 per ipotesi, e la mappa $X \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ è di classe C^1 per la [Proposizione 16.2].
Allora, $J_{\mathbf{y}}$ è di classe C^1 essendo somma di funzioni di classe C^1;

dalla derivazione delle combinazioni lineari e dalla [Proposizione 16.2] segue allora
$\dot{J}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \dot{f}(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Si ha la disuguaglianza $J_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - \big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + \|\mathbf{y}\|\big)\|\mathbf{x}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2 + f(\mathbf{0})$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Infatti, fissato $\mathbf{x} \in X$ si ha

$J_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + f(\mathbf{x})$	Per definizione di $J_{\mathbf{y}}$
$= \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + f(\mathbf{x})$	Per definizione di $\|\cdot\|$ come norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e per bilinearità di $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$\geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + f(\mathbf{0}) + f'(\mathbf{0})(\mathbf{x})$	Essendo f convessa e G-derivabile in A, si ha $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{0}) + f'(\mathbf{0})(\mathbf{x})$ per la [Proposizione 15.2]
$= \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + f(\mathbf{0}) + \langle \dot{f}(\mathbf{0}), \mathbf{x} \rangle$	$f'(\mathbf{0})(\mathbf{x}) = \langle \dot{f}(\mathbf{0}), \mathbf{x} \rangle$ per definizione di $\dot{f}(\mathbf{0})$
$\geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + f(\mathbf{0}) - \|\dot{f}(\mathbf{0})\|\,\|\mathbf{x}\|$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ e $\langle \dot{f}(\mathbf{0}), \mathbf{x} \rangle \geq -\|\dot{f}(\mathbf{0})\|\,\|\mathbf{x}\|$ per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz
$= \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - \big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + \|\mathbf{y}\|\big)\|\mathbf{x}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2 + f(\mathbf{0})$	

$J_{\mathbf{y}}$ è coerciva.

Infatti, per la disuguaglianza appena ottenuta si ha $J_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - \big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + \|\mathbf{y}\|\big)\|\mathbf{x}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2 + f(\mathbf{0})$ per ogni $\mathbf{x} \in X$; poiché $\lim_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - \big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + \|\mathbf{y}\|\big)\|\mathbf{x}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2 + f(\mathbf{0}) = +\infty$, segue per confronto che $\lim_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} J_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = +\infty$.

Dimostrazione

Φ è continua;
infatti, essa è somma dell'identità su X, continua, con $\dot{f}$, continua per la [Proposizione 16.1] essendo f di classe C^1.

Si provi ora che Φ è biunivoca.

Si fissi dunque $\mathbf{y} \in X$, e si mostri che esiste un unico $\mathbf{x} \in X$ tale che $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Si osserva che $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{x}$ è di minimo assoluto per $J_{\mathbf{y}}$;
infatti,

$$
\begin{array}{lll}
& \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \iff \mathbf{x} + \dot{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} & \text{Per definizione di } \Phi \\
\iff & \mathbf{x} - \mathbf{y} + \dot{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \\
\iff & \dot{J}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \mathbf{x} - \mathbf{y} + \dot{f}(\mathbf{x}) = \dot{J}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \text{ dalle osservazioni preliminari} \\
\iff & \mathbf{x} \text{ è di minimo assoluto per } \dot{J}_{\mathbf{y}} & \Longleftarrow \text{ segue dal teorema di Fermat ([Proposizione 12.6])} \\
& & \Longrightarrow \text{ segue dal [Corollario 15.2]}
\end{array}
$$

Basta quindi mostrare che $J_{\mathbf{y}}$ ammette un unico punto di minimo assoluto.

Dalle osservazioni preliminari segue che $J_{\mathbf{y}}$ è semi-continua inferiormente in quanto di classe C^1, quasi-convessa in quanto strettamente convessa, e coerciva.

Per la [Proposizione 10.7], $J_{\mathbf{y}}$ ammette allora minimo assoluto;
per la [Proposizione 10.9], tale minimo è unico.

Dunque, Φ è biunivoca;
inoltre, per quanto ottenuto si osserva che $\Phi^{-1}(\mathbf{y})$ è l'unico punto di minimo di $J_{\mathbf{y}}$, per ogni $\mathbf{y} \in X$.

Resta da provare che Φ^{-1} è continua.

Si fissi dunque $\mathbf{y} \in X$;
in virtù della [Proposizione 16.3], basta provare che ogni successione $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergente a $\mathbf{y}$ ammette un'estratta $\{\mathbf{y}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim\limits_k \Phi^{-1}(\mathbf{y}_{n_k}) = \Phi^{-1}(\mathbf{y})$.

Si fissi dunque una successione $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ convergente a $\mathbf{y}$.
Si osserva intanto che tale successione è limitata in quanto convergente; dunque, sia $M > 0$ tale che $\|\mathbf{y}_n\| \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ponga $\mathbf{z}_n = \Phi^{-1}(\mathbf{y}_n)$; si ha

$$
\begin{array}{lll}
 & J_{\mathbf{y}_n}(\mathbf{x}) \ge J_{\mathbf{y}_n}(\mathbf{z}_n) \text{ per ogni } \mathbf{x} \in X & \text{Essendo } \mathbf{z}_n = \Phi^{-1}(\mathbf{y}_n) \text{ di minimo assoluto per } J_{\mathbf{y}_n} \\
\Longrightarrow & J_{\mathbf{y}_n}(\mathbf{0}) \ge J_{\mathbf{y}_n}(\mathbf{z}_n) & \\
\Longrightarrow & \frac{1}{2}\|\mathbf{y}_n\|^2 + f(\mathbf{0}) \ge J_{\mathbf{y}_n}(\mathbf{z}_n) & \text{Per definizione di } J_{\mathbf{y}_n} \\
 & \ge \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_n\|^2 - \big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + \|\mathbf{y}_n\|\big)\|\mathbf{z}_n\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}_n\|^2 + f(\mathbf{0}) & \text{Per la disuguaglianza ottenuta tra le osservazioni preliminari} \\
\Longrightarrow & 0 \ge \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_n\|^2 - \big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + \|\mathbf{y}_n\|\big)\|\mathbf{z}_n\| & \\
 & \ge \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_n\|^2 - \big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + M\big)\|\mathbf{z}_n\| & \text{Per costruzione di } M
\end{array}
$$

Dall'ultima disuguaglianza ne viene che $\|\mathbf{z}_n\| \le 2\big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + M\big)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora, $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}\big(\mathbf{0}, 2\big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + M\big)\big)$;
l'insieme $\overline{B}\big(\mathbf{0}, 2\big(\|\dot{f}(\mathbf{0})\| + M\big)\big)$ è chiuso, convesso e limitato, dunque debolmente compatto per la [Proposizione 8.3] e la [Proposizione 9.2], dunque sequenzialmente debolmente compatto per il teorema di Eberlein-Schmulian ([Teorema 10.4]).

Ne segue che $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un'estratta $\{\mathbf{z}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente debolmente a un certo $\mathbf{z} \in X$.

Si provi che $\mathbf{z} = \Phi^{-1}(\mathbf{y})$ e che la convergenza di $\{\mathbf{z}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a $\mathbf{z}$ è forte;
così facendo, la tesi sarà acquisita in quanto $\lim\limits_k \Phi^{-1}(\mathbf{y}_{n_k}) = \lim\limits_k \mathbf{z}_{n_k} = \mathbf{z} = \Phi^{-1}(\mathbf{y})$.

Si provi dapprima che $\mathbf{z} = \Phi^{-1}(\mathbf{y})$, mostrando che $\mathbf{z}$ è di minimo assoluto per $J_{\mathbf{y}}$;
sia quindi $\mathbf{x} \in X$, e si mostri che $J_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \ge J_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})$.

Si ha

	$J_{\mathbf{y}_{n_k}}(\mathbf{x}) \geq J_{\mathbf{y}_{n_k}}(\mathbf{z}_{n_k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$	Essendo $\mathbf{z}_{n_k} = \mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{y}_{n_k})$ di minimo assoluto per $J_{\mathbf{y}_{n_k}}$
$\Longrightarrow$	$\frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{n_k}\|^2 + f(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}\|^2 + f(\mathbf{z}_{n_k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$	Per definizione di $J_{\mathbf{y}_{n_k}}$
$\Longrightarrow$	$\liminf_k \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{n_k}\|^2 + f(\mathbf{x}) \geq \liminf_k \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}\|^2 + f(\mathbf{z}_{n_k})$	Per confronto dei limiti minimi
$\Longrightarrow$	$\frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + f(\mathbf{x}) \geq \liminf_k \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}\|^2 + f(\mathbf{z}_{n_k})$	In quanto $\lim_k \mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{y}$
	$\geq \liminf_k \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}\|^2 + \liminf_k f(\mathbf{z}_{n_k})$	Per la [Proposizione 16.5]
	$\geq \frac{1}{2}\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2 + f(\mathbf{z})$	La successione $\{\mathbf{z}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a $\mathbf{z}$; la successione $\{\mathbf{z}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a $\mathbf{z} - \mathbf{y}$, in quanto $\{\mathbf{z}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a $\mathbf{z}$ e $\{\mathbf{y}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortemente, dunque debolmente, a $\mathbf{y}$; le funzioni f e $X \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ sono debolmente semicontinue inferiormente, essendo continue e convesse (Capitolo 10, Lemma 2)
$\Longrightarrow$	$J_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \geq J_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})$	Per definizione di $J_{\mathbf{y}}$

Resta da provare che $\{\mathbf{z}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortemente a $\mathbf{z}$.

Avendo già acquisita la convergenza debole, in virtù della [Proposizione 16.4] basta mostrare che $\lim_k \|\mathbf{z}_{n_k}\| = \|\mathbf{z}\|$.

Si ha

	$J_{\mathbf{y}_{n_k}}(\mathbf{x}) \geq J_{\mathbf{y}_{n_k}}(\mathbf{z}_{n_k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $\mathbf{x} \in X$	Essendo $\mathbf{z}_{n_k} = \mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{y}_{n_k})$ di minimo assoluto per $J_{\mathbf{y}_{n_k}}$
$\Longrightarrow$	$J_{\mathbf{y}_{n_k}}(\mathbf{z}) \geq J_{\mathbf{y}_{n_k}}(\mathbf{z}_{n_k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$	
$\Longrightarrow$	$\frac{1}{2}\|\mathbf{z} - \mathbf{y}_{n_k}\|^2 + f(\mathbf{z}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}\|^2 + f(\mathbf{z}_{n_k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$	Per definizione di $J_{\mathbf{y}_{n_k}}$

$\implies \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}_{n_k}\|^2 - \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_{n_k}\rangle + f(\mathbf{z}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{y}_{n_k}\|^2 - \langle \mathbf{z}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}\rangle + f(\mathbf{z}_{n_k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$	Per definizione di $\|\cdot\|$ come norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e per bilinearità di $\langle\cdot,\cdot\rangle$
$\implies \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2 - \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_{n_k}\rangle + f(\mathbf{z}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2 - \langle \mathbf{z}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}\rangle + f(\mathbf{z}_{n_k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$	
$\implies \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2 + f(\mathbf{z}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2 - \langle \mathbf{z} - \mathbf{z}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}\rangle + f(\mathbf{z}_{n_k})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$	Per bilinearità di $\langle\cdot,\cdot\rangle$
$\implies \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2 + f(\mathbf{z}) \geq \limsup_k \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2 - \langle \mathbf{z} - \mathbf{z}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}\rangle + f(\mathbf{z}_{n_k})$	Per confronto dei limiti massimi
$\geq \limsup_k \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2 + f(\mathbf{z}_{n_k}) - \liminf_k \langle \mathbf{z} - \mathbf{z}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}\rangle$	Per la [Proposizione 16.5]
$\geq \limsup_k \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2 + \liminf_k f(\mathbf{z}_{n_k}) - \liminf_k \langle \mathbf{z} - \mathbf{z}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}\rangle$	Per la [Proposizione 16.5]
$\geq \limsup_k \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2 + f(\mathbf{z})$	$\liminf_k f(\mathbf{z}_{n_k}) \geq f(\mathbf{z})$ in quanto $\{\mathbf{z}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a $\mathbf{z}$, e avendo osservato precedentemente che f è debolmente semicontinua inferiormente; $\lim_k \langle \mathbf{z} - \mathbf{z}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{y}\rangle = 0$ per la [Proposizione 16.6], essendo $\{\mathbf{y}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $\mathbf{y}$, mentre $\{\mathbf{z}_{n_k} - \mathbf{z}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata (in quanto è stato visto che $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata) e converge debolmente a $\mathbf{0}$

Confrontando primo e ultimo membro dell'ultima catena di disuguaglianze ricavata, si ottiene
$| \implies |\ \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2 \geq \limsup_k \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2$.

D'altra parte, si ha $\liminf_k \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2 \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2$, in quanto $\{\mathbf{z}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a $\mathbf{z}$, e la mappa $X \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$ è debolmente semicontinua inferiormente, essendo continua e convessa (Capitolo 10, Lemma 2).

Ne viene pertanto che $\lim\limits_{k} \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|^2$, cioè $\lim\limits_{k} \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_{n_k}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{z}\|$.

La dimostrazione è allora conclusa.

■