# 9 - Gli Spazi con Prodotto Scalare e di Hilbert

### ⌘ Definizione: Prodotto scalare, Spazio con prodotto scalare

Sia $E$ uno spazio vettoriale.
Una funzione $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ si dice prodotto scalare su $E$ quando:

1. $\langle\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \lambda\langle\mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \mu\langle\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
2. $\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$;
3. $\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in E$, e $\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dati uno spazio vettoriale $E$ e un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su $E$, la coppia $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ prende il nome di **spazio con prodotto scalare** o **spazio pre-Hilbertiano**.

### Osservazione

Sia $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.

La funzione $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ definita ponendo
Il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induce una norma $\|\cdot\|$; essa è definita ponendo $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

### Proposizione: Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Sia $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.
Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, si ha $|\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

⌘ **Definizione: Spazio di Hilbert**

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.
Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Sia $d$ la metrica indotta da $\| \cdot \|$.

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si dice **spazio di Hilbert** quando è completo rispetto a $d$.

**Osservazione**

Gli spazi di Hilbert sono di Banach.

**Proposizione 9.1: Legge del parallelogramma**

Sia $(E, \| \cdot \|)$ uno spazio normato.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. Esiste un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $E$ avente $\| \cdot \|$ come norma indotta;
2. $\| \cdot \|$ soddisfa la legge del parallelogramma, ossia $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

**Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)**

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $E$ che ha $\| \cdot \|$ come norma indotta.
Dunque, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. Si ha
$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Analogamente,
$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.

Sommando i primi e gli ultimi membri delle due catene di uguaglianze, si ottiene
$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$.
■

### Proposizione 9.2: Insiemi limitati e debolmente chiusi in uno spazio di Hilbert sono debolmente compatti

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $A \subseteq E$ limitato e debolmente chiuso.

Allora, $A$ è debolmente compatto, cioè compatto rispetto alla topologia debole su $E$.

### Proposizione 9.3: Esistenza di una funzione a valori reali continua e suriettiva sulla sfera unitaria

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Si supponga che $E$ abbia dimensione infinita.
Sia $S = \{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

Esiste una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ continua e suriettiva.

#### Osservazioni preliminari

$S$ è connesso per archi.

Infatti, siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.
Si consideri il vettore $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$, con $\lambda \in [0; 1]$.

Si ha $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$.

Infatti, sotto tali condizioni vale l'uguaglianza.
Viceversa, se vale l'uguaglianza si ha $\lambda\mathbf{x} = (\lambda - 1)\mathbf{y}$, dunque $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente dipendenti.
Essendo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ distinti, si deve allora avere $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$.
Allora, si ha $\lambda\mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}$, da cui segue $\lambda = 1 - \lambda$, ossia $\lambda = \frac{1}{2}$.

Allora, se $\mathbf{y} \neq -\mathbf{x}$, la funzione $\mathscr{s} : [0;1] \to S$ definita ponendo $\mathscr{s}(\lambda) = \frac{\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}}{\|\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\|}$ è ben definita e continua, dunque è un arco.

Se invece $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$, sia $\mathbf{u} \in S$ tale che $\mathbf{u} \notin \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$.
esso esiste; basta infatti considerare un vettore $\mathbf{z} \notin \operatorname{span}(\mathbf{x})$, che esiste essendo $\operatorname{span}(\mathbf{x})$ di dimensione $1$ e $E$ di dimensione infinita, e poi porre $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}$, vettore ben definito in quanto $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ essendo $\mathbf{z} \notin \operatorname{span}(\mathbf{x})$.

Essendo $\mathbf{u}$ distinto da $\mathbf{x}$ e $-\mathbf{x}$, per il caso precedente esistono un arco da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}$, e un arco da $\mathbf{u}$ a $-\mathbf{x}$; il loro arco unione è un arco da $\mathbf{x}$ a $-\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

### Dimostrazione

La dimostrazione della [Proposizione 6.3] mostra che esiste $D \subseteq S$ numerabile e tale che $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > \frac{1}{2}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

#### Osservazione

Si osserva che, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, si ha $\overline{B}\left(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\right) \cap \overline{B}\left(\mathbf{y}, \frac{1}{4}\right) = \varnothing$.
($\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ denota l'insieme $\{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$)

Infatti, se $\mathbf{z} \in \overline{B}\left(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\right)$, si ha

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \quad \text{Disuguaglianza triangolare}$$

$> \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| > \frac{1}{2}$ per costruzione di $D$, essendo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$
$\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \le \frac{1}{4}$ in quanto $\mathbf{z} \in \overline{B}\left(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\right)$

Pertanto, $\mathbf{z} \notin \overline{B}\left(\mathbf{y}, \frac{1}{4}\right)$.

Sia $\gamma : \underset{n \mapsto \mathbf{x}_n}{\mathbb{Z} \to D}$ una biiezione tra $\mathbb{Z}$ e $D$ (che esiste in quanto anche $\mathbb{Z}$ è numerabile).

Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $|t| \ge \frac{1}{8}$; essa esiste, basta considerare ad esempio
$\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 - 8|t|, & |t| < \frac{1}{8} \\ 0, & |t| \ge \frac{1}{8} \end{cases}$.

Sia $f : S \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} n\,\varphi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\|), & \exists n \in \mathbb{Z} : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| < \frac{1}{4} \\ 0, & \forall n \in \mathbb{Z},\ \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| \ge \frac{1}{4} \end{cases}$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

$f$ è ben definita.
Infatti, se esiste $n \in \mathbb{Z}$ per cui $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| < \frac{1}{4}$, per l'osservazione iniziale si ha $\mathbf{x} \notin \overline{B}\left(\mathbf{x}_m, \frac{1}{4}\right)$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$ con $m \ne n$, dunque tale $n$ è unico.

$f$ è continua su $S$.
Sia infatti $\mathbf{y} \in S$, e sia $\{\mathbf{y}_p\}_{p\in\mathbb{N}} \subseteq S$ una successione in $S$ convergente a $\mathbf{y}$.

Se $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_n\| < \frac{1}{4}$, ossia $\mathbf{y} \in B\left(\mathbf{x}_n, \frac{1}{4}\right)$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$, essendo tale insieme aperto si ha $\mathbf{y}_p \in B\left(\mathbf{x}_n, \frac{1}{4}\right)$ definitivamente; la continuità segue allora in questo caso dalla continuità di $\varphi$ e della norma $\|\cdot\|$.

Se $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_n\| \ge \frac{1}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si consideri l'intorno $B\left(\mathbf{y}, \frac{1}{8}\right)$; dalla definizione di $\varphi$ segue che $\varphi\left(B(\mathbf{y}, \frac{1}{8})\right) = \{0\}$. Poiché $\mathbf{y}_n \in B\left(\mathbf{y}, \frac{1}{8}\right)$ definitivamente essendo tale insieme aperto, segue anche in questo caso la continuità di $f$
.

Inoltre, $f$ è suriettiva.
Infatti, $S$ è connesso per archi per l'osservazione preliminare, dunque è connesso;
essendo $f$ continua, $f(S)$ è allora un intervallo in $\mathbb{R}$.

Essendo $f(\mathbf{x}_n) = n\,\varphi(0) = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, segue che $\mathbb{Z} \subseteq f(S)$; allora, $f(S) = \mathbb{R}$, essendo l'unico intervallo che contiene $\mathbb{Z}$.

■