

03 - Sequenzializzazione di una Topologia

Insiemi sequenzialmente chiusi e aperti

⌘ Definizione: Insieme sequenzialmente chiuso

Sia X uno spazio topologico.

Un insieme $C \subseteq X$ si dice **sequenzialmente chiuso** quando, per ogni successione $\{x_n\}_n \subseteq C$ convergente a un certo $x \in X$, si ha $x \in C$.

🔍 Osservazione: Relazione tra chiusi e chiusi sequenziali

Sia X uno spazio topologico.

Sia $C \subseteq X$ chiuso.

Allora, C è anche sequenzialmente chiuso.

📄 Dimostrazione

Sia $\{x_n\}_n \subseteq C$ una successione in C convergente a un certo $x \in X$.

Allora, per ogni U intorno di x , esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq \nu$.

Poiché $x_n \in C$ per costruzione, segue che $U \cap C \neq \emptyset$ per ogni U intorno di x .

Allora, $x \in \overline{C}$ ossia, essendo C chiuso per ipotesi, $x \in C$.

■

Il viceversa non vale generalmente; esso vale sotto le seguenti condizioni:

Proposizione 3.1: Equivalenza tra chiusi e chiusi sequenziali in spazi primo-numerabili

Sia X uno spazio topologico 1° -numerabile.

Sia $C \subseteq X$ sequenzialmente chiuso.

Allora, C è chiuso.

Dimostrazione

Sia $x \in \overline{C}$.

Allora, per ogni U intorno di x , si ha $U \cap C \neq \emptyset$, ossia esiste $x_U \in U$ tale che $x_U \in C$.

Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x , che esiste per 1° -numerabilità di x .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $\bigcap_{i=1}^n U_i$ è un intorno di x ; allora, esiste $x_n \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ tale che $x_n \in C$ per quanto affermato prima.

Si consideri la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; si ha che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ per costruzione.

Inoltre, essa converge a x .

Infatti, si fissi U intorno di x ; essendo $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x , esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $U_{n_0} \subseteq U$; pertanto, per ogni $n \geq n_0$ si ha $x_n \in \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq U_{n_0} \subseteq U$.

Essendo C sequenzialmente chiuso, risulta $x \in C$.

Allora, ne segue che $\overline{C} \subseteq C$ per arbitrarietà di x , ossia C chiuso.



Definizione: Insieme sequenzialmente aperto

Sia X uno spazio topologico.

Un insieme $A \subseteq X$ si dice **sequenzialmente aperto** quando $X \setminus A$ è sequenzialmente chiuso.

Q Osservazione: Caratterizzazione degli insiemi sequenzialmente aperti

Sia X uno spazio topologico.

Un insieme $A \subseteq X$ è sequenzialmente aperto se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}_n \subseteq A$ convergente a un certo $x \in X$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in A$ per ogni $n \geq \nu$.

📄 Proposizione 3.2: Insiemi sequenzialmente aperti di X costituiscono una topologia

Sia X uno spazio topologico con topologia τ .

Sia τ_s la famiglia degli insiemi sequenzialmente aperti di X .

τ_s è una topologia su X .

📄 Dimostrazione

Mi secco.



⌘ Definizione: Sequenzializzazione di una topologia

Sia X uno spazio topologico con topologia τ .

La famiglia τ_s degli insiemi sequenzialmente aperti di X secondo τ , che dunque è una topologia, prende il nome di **sequenzializzazione** di τ .

Q Osservazione: Finezza di una topologia rispetto alla sua sequenzializzazione

Sia X uno spazio topologico con topologia τ .

Sia τ_s la sequenzializzazione di τ .

Allora, $\tau_s \supseteq \tau$.

Infatti, i chiusi di X secondo τ sono sequenzialmente chiusi, ossia chiusi secondo τ_s .

Proposizione 3.3: Equivalenza tra sequenziale semicontinuità inferiore e semicontinuità inferiore rispetto alla sequenzializzazione

Sia X uno spazio topologico con topologia τ .

Sia τ_s la sequenzializzazione di τ .

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è sequenzialmente semicontinua inferiormente secondo τ ;
2. f è semicontinua inferiormente secondo τ_s .

Dimostrazione (1. \Rightarrow 2.)

Si supponga f sequenzialmente semicontinua inferiormente secondo τ .

Si provi la semicontinuità inferiore secondo τ_s tramite la caratterizzazione nella [Proposizione 2.1], mostrando dunque che, per ogni $r \in \mathbb{R}$, l'insieme $f^{-1}([-\infty; r])$ è chiuso secondo τ_s , ossia sequenzialmente chiuso.

Sia dunque $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq f^{-1}([-\infty; r])$, tale cioè che $f(x_n) \leq r$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, convergente a un certo $x^* \in X$.

Per sequenziale semicontinuità di f si ha $f(x^*) \leq \liminf_n f(x_n)$; d'altra parte, essendo $f(x_n) \leq r$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, segue

$\liminf_n f(x_n) \leq r$ per confronto.

Allora, $f(x^*) \leq r$, ossia $x^* \in f^{-1}(]-\infty; r])$.

■

📄 Dimostrazione (2. \Rightarrow 1.)

Si supponga f semicontinua inferiormente secondo τ_s .

Sia $\tilde{x} \in X$.

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ una successione convergente a \tilde{x} .

Si provi che $f(\tilde{x}) \leq \liminf_n f(x_n)$.

Si proceda per assurdo, supponendo che $f(\tilde{x}) > \liminf_n f(x_n)$.

Sia $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $f(\tilde{x}) > \gamma > \liminf_n f(x_n)$.

Per ipotesi di semicontinuità inferiore di f secondo τ_s , l'insieme $f^{-1}(]-\infty; \gamma])$ è chiuso secondo τ_s , per la [Proposizione 2.1]; cioè, $f^{-1}(]-\infty; \gamma])$ è sequenzialmente chiuso.

Inoltre, essendo $\gamma > \liminf_n f(x_n)$, esiste un'estratta $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che valga $x_{n_k} < \gamma$ definitivamente.

Poiché $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a \tilde{x} e $f^{-1}(]-\infty; \gamma])$ è sequenzialmente chiuso, si ha che $\tilde{x} \in f^{-1}(]-\infty; \gamma])$, ossia $f(\tilde{x}) \leq \gamma$.

Tuttavia, ciò è contraddittorio con il fatto che γ è stato scelto dimodoché $f(\tilde{x}) > \gamma$.

■

📄 Proposizione 3.4: Caratterizzazioni della sequenziale semicontinuità inferiore

Sia X uno spazio topologico.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è sequenzialmente semicontinua inferiormente su X .
2. $f^{-1}(]r; +\infty[)$ è sequenzialmente aperto per ogni $r \in \mathbb{R}$;
3. $f^{-1}(]-\infty; r])$ è sequenzialmente chiuso per ogni $r \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione

Per la [Proposizione 3.3], f è sequenzialmente semicontinua inferiormente su X se e solo se è semicontinua inferiormente su X rispetto alla sequenzializzazione della topologia su X .

Dalla [Proposizione 2.1] applicata a quest'ultima topologia, segue allora l'equivalenza tra 1. , 2. e 3.

■

Proposizione 3.4': Caratterizzazione della sequenziale semicontinuità superiore

Sia X uno spazio topologico.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è sequenzialmente semicontinua superiormente su X .
2. $f^{-1}(]-\infty; r])$ è sequenzialmente aperto per ogni $r \in \mathbb{R}$;
3. $f^{-1}([r; +\infty[)$ è sequenzialmente chiuso per ogni $r \in \mathbb{R}$.