15 - Altri Fatti Notevoli del Calcolo Differenziale

Proposizione 15.1: Punti in cui una funzione convessa e G-derivabile ha derivata nulla sono di minimo assoluto

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $A \subseteq X$ convesso.
Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e G-derivabile in $\mathbf{x}_0$.
Si supponga che $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$.

Allora, $\mathbf{x}_0$ è di minimo assoluto per f.

Dimostrazione

Sia $\mathbf{x} \in A$; si provi che $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

Essendo f G-derivabile in $\mathbf{x}_0$ con derivata ivi nulla per ipotesi, si ha in particolare che $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$, ossia

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = 0.$$

Per ogni $\lambda \in]0;1]$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} &= \frac{f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \\
&\leq \frac{\lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} && \text{Per convessità di } f\text{, essendo } \lambda \in]0;1] \\
&= \frac{\lambda f(\mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)
\end{aligned}$$

Segue allora per confronto che

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0+\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))-f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda \to 0^+} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0);$$

essendo anche $\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0+\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))-f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = 0$ per quanto visto prima, si ha allora

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq 0.$$

■

Proposizione 15.2: Caratterizzazione delle funzioni convesse di classe C^1

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $A \subseteq X$ aperto e convesso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è convessa;
2. $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga f convessa.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$; si provi che $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})$.

f è G-derivabile in $\mathbf{x}$ essendo di classe C^1 per ipotesi; dunque,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}))-f(\mathbf{x})}{\lambda} = f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

Per ogni $\lambda \in \left]0; 1\right]$, si ha

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}))-f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = \frac{f(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x})-f(\mathbf{x})}{\lambda} \\
&\leq \frac{\lambda f(\mathbf{y})+(1-\lambda)f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})}{\lambda} && \text{Per convessità di } f\text{, essendo } \lambda \in \,]0;1] \\
&= \frac{\lambda f(\mathbf{x})-\lambda f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Segue allora per confronto che

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}))-f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda\to 0^+} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x});$$

essendo anche $\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0+\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))-f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ per quanto visto prima, si ha allora

$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})$, che corrisponde a ciò che si voleva mostrare.
■

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Si supponga $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y} \in A$.

Siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$, e sia $\lambda \in [0;1]$;
si provi che $f(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \leq \lambda f(\mathbf{x}_2) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_1)$.

Se $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$, la disuguaglianza è chiaramente verificata.
Si supponga $\lambda \in \,]0;1[$.

Si hanno le seguenti disuguaglianze:

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}_1) \geq f\big(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\big) + f'\big(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\big)\big(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1-\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\big) && \text{Per ipotesi} \\
&= f\big(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\big) + f'\big(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\big)\big(-\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\big) \\
&= f\big(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\big) - \lambda f'\big(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\big)(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1) && \text{Per linearità di } f'\big(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\big)
\end{aligned}
$$

da cui segue che $f'\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) \geq \frac{f\left(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\right)-f(\mathbf{x}_1)}{\lambda}$, dividendo ambo i membri per $\lambda > 0$;

$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{x}_2) \geq f\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) + f'\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big)\big(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 - \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) \\
& = f\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) + f'\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big)\big((1-\lambda)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) \\
& = f\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) + (1-\lambda) f'\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) && \text{Per linearità di } f'\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big)
\end{aligned}
$$

da cui segue che $f'\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) \leq \frac{f(\mathbf{x}_2)-f\left(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\right)}{1-\lambda}$, dividendo ambo i membri per $1 - \lambda > 0$.

Si ha dunque la catena di disuguaglianze

$$\frac{f\left(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\right)-f(\mathbf{x}_1)}{\lambda} \leq f'\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) \leq \frac{f(\mathbf{x}_2)-f\left(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\right)}{1-\lambda} \ ;$$

confrontando il primo e il terzo membro si ottiene

$$
\begin{aligned}
& \frac{f\left(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\right)-f(\mathbf{x}_1)}{\lambda} \leq \frac{f(\mathbf{x}_2)-f\left(\mathbf{x}_1+\lambda(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\right)}{1-\lambda} \\
\implies \quad & (1-\lambda)\Big(f\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) - f(\mathbf{x}_1)\Big) \leq \lambda\Big(f(\mathbf{x}_2) - f\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big)\Big) && \text{Moltiplicando entrambi i membri per } \lambda > 0 \text{ e per } 1-\lambda > 0 \\
\implies \quad & f\big(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) \leq \lambda f(\mathbf{x}_2) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_1)
\end{aligned}
$$

La tesi è dunque acquisita.

■