21 - Introduzione al Calcolo Integrale negli Spazi di Banach

Decomposizioni

⌘ Definizione: Decomposizione di un intervallo chiuso e limitato

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Si dice **decomposizione** di $[a;b]$ una tupla $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$ tale che $a = x_1 < \dots < x_n = b$.

I punti $x_1, \dots, x_{n+1}$ si dicono **capisaldi** di Δ.

L'insieme delle decomposizioni di $[a;b]$ si denota con $\mathcal{D}[a;b]$.

Fissato $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a;b]$, si dice **modulo** di Δ il valore $|\Delta| := \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_n)$.

⌘ Definizione: Decomposizioni canoniche

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $n \in \mathbb{N}$.

Si dice **decomposizione canonica n-esima** di $[a;b]$ la tupla
$\Delta_n := (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+1})$, dove $\tilde{x}_i = a + \frac{i-1}{n}(b-a)$ per ogni $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Essa è una decomposizione di $[a;b]$, essendo i suoi elementi ordinati in maniera strettamente crescente ed essendo $x_1 = a$ e $x_{n+1} = b$.

Osservazione

Si ha $|\Delta_n| = \frac{b-a}{n}$, essendo $\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i = \frac{b-a}{n}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dunque, si ha in particolare $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

⌘ Definizione: Decomposizione unione

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Siano $\Delta_1 = (x_1, \ldots, x_{n+1}), \Delta_2 = (y_1, \ldots, y_{m+1}) \in \mathcal{D}[a;b]$.

Si dice **decomposizione unione** di Δ_1 e Δ_2 la tupla $\Delta_1 \cup \Delta_2 = (z_1, \ldots, z_{p+1})$, definita dimodoché:

- $\{z_1, \ldots, z_{p+1}\} = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \cup \{y_1, \ldots, y_{m+1}\}$;
- $z_1 < \cdots < z_{p+1}$.

Essa esiste, è unica ed è una decomposizione di $[a;b]$.

Integrabilità secondo Riemann

⌘ Definizione: Integrabilità secondo Riemann, Integrale

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a;b] \to X$ una funzione.

f si dice integrabile secondo Riemann quando esiste $\mathbf{u} \in X$ tale che:

Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che
per ogni $\Delta = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a;b]$ con $|\Delta| < \delta$, per ogni $(t_1, \ldots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n; x_{n+1}]$, si ha
$\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| < \varepsilon$.

Osservazione

$\mathbf{u}$ è unico.

Infatti, siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ per cui si verifica quanto espresso nella definizione, e si fissi $\varepsilon > 0$.

In corrispondenza a $\frac{\varepsilon}{2}$, esistono allora $\delta_{\mathbf{u}}, \delta_{\mathbf{v}} > 0$ per cui

$$\left\| \sum_{i=1}^{h} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) - \mathbf{u} \right\| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \text{ per ogni } \Delta = (x_1, \ldots, x_{h+1}) \in \mathcal{D}[a;b] \text{ con } |\Delta| < \delta_{\mathbf{u}} \;;$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} (y_{i+1} - y_i) f(y_i) - \mathbf{v} \right\| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \text{ per ogni } \Delta = (y_1, \ldots, y_{k+1}) \in \mathcal{D}[a;b] \text{ con } |\Delta| < \delta_{\mathbf{v}} \;.$$

Si consideri la decomposizione canonica $\Delta_n = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n+1})$ di $[a;b]$, con $n \in \mathbb{N}$ tale che $|\Delta_n| < \min\{\delta_{\mathbf{u}}, \delta_{\mathbf{v}}\}$, che esiste essendo $\lim\limits_{n} |\Delta_n| = 0$.

Si ha allora $\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$;

si ottiene allora

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \left\| \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| && \text{sommando membro a membro le due disuguaglianze} \\
&= \left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| \\
&\geq \left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| && \text{Per sub-additività delle norme}
\end{aligned}$$

Ne segue che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, per cui $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Avendo acquisito l'unicità di $\mathbf{u}$, tale vettore prende il nome di **integrale** di f sull'intervallo $[a;b]$;
esso si denota con $\int_a^b f(x)\, dx$.

Osservazione

Se $X = \mathbb{R}$, le nozioni di integrabilità e di integrale secondo Riemann fornite sopra coincidono con quelle definite originariamente per le sole funzioni reali.

Proposizione 21.1: Integrale delle funzioni costanti

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
$\mathbf{k} \in X$.
Sia $c_{\mathbf{k}} : [a;b] \to X$ la funzione costantemente pari a $\mathbf{k}$, definita cioè ponendo $c_{\mathbf{k}}(x) = \mathbf{k}$ per ogni $x \in [a;b]$.

$c_{\mathbf{k}}$ è integrabile secondo Riemann, e $\int_a^b c_{\mathbf{k}}(x)\,dx = (b-a)\mathbf{k}$.

Dimostrazione

Si osserva che, per ogni $\Delta = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a;b]$ e per ogni $(t_1, \ldots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n; x_{n+1}]$ vale

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) c_{\mathbf{k}}(t_i) - (b-a)\mathbf{k} \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)\mathbf{k} - (b-a)\mathbf{k} \right\| && \text{Per definizione di } c_{\mathbf{k}} \\
&= \|(b-a)\mathbf{k} - (b-a)\mathbf{k}\| && \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1 = b - a \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da questo fatto segue allora che $c_{\mathbf{k}}$ è integrabile, con $\int_a^b c_{\mathbf{k}}(x)\,dx = (b-a)\mathbf{k}$.
■

Proposizione 21.2: Caratterizzazione dell'integrabilità

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a;b] \to X$ una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- f è integrabile secondo Riemann;
- Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $\Delta_2 = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathcal{D}[a;b]$ con $|\Delta_1| < \delta$ e $|\Delta_2| < \delta$, per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n; x_{n+1}]$ e per ogni $(s_1, \dots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \cdots \times [y_m; y_{m+1}]$, si ha $\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^{m} (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| < \varepsilon$.

Dimostrazione

Se f è integrabile secondo Riemann, esistono $\mathbf{u} \in X$ e $\delta > 0$ tale che $\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a;b]$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n; x_{n+1}]$.

Allora, date due decomposizioni $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $\Delta_2 = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathcal{D}[a;b]$ con $|\Delta_1| < \delta$ e $|\Delta_2| < \delta$, e fissate due tuple $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n; x_{n+1}]$ e $(s_1, \dots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \cdots \times [y_m; y_{m+1}]$, si ha

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^{m} (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} + \mathbf{u} - \sum_{j=1}^{m} (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \mathbf{u} - \sum_{j=1}^{m} (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| \qquad \text{Per sub-additività delle norme}$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{m} (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \mathbf{u} \right\| \qquad \text{Per sub-additività delle}$$

norme

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ Per costruzione di $\mathbf{u}$

Viceversa, si supponga verificata la condizione del secondo punto.
Per ogni $\varepsilon > 0$, si fissi dunque $\delta_\varepsilon > 0$ dimodoché si verifichi quanto descritto in corrispondenza a ε.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, posta $\Delta_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_{n+1}^{(n)})$ la decomposizione canonica n-esima, si consideri $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right)$.

La successione $\left\{\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ è di Cauchy;

infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|\Delta_n| < \delta_\varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$, in quanto $\lim_n |\Delta_n| = 0$.
Allora, per ogni $m, n \geq \nu$ si ha $|\Delta_m|, |\Delta_n| < \delta_\varepsilon$, e dunque
$\left\|\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right) - \sum_{j=1}^{m} f\left(x_j^{(m)}\right)\left(x_{j+1}^{(m)} - x_j^{(m)}\right)\right\| < \varepsilon$, per costruzione di δ_ε.

Essendo X completo in quanto di Banach per ipotesi, $\left\{\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge;
sia $\mathbf{u} \in X$ il suo limite.

Si provi che $\mathbf{u}$ verifica la condizione per l'integrabilità di f.

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.

Sia $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\left\|\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^{(n)}\right)\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right) - \mathbf{u}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n \geq \nu_1$, che esiste per definizione di $\mathbf{u}$.

Sia $\nu \in \mathbb{N}$ (si supponga $\nu \geq \nu_1$) tale che $|\Delta_n| < \delta_{\varepsilon/2}$ per ogni $n \geq \nu$, che esiste in quanto $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

Sia $\Delta = (x_1, \dots, x_{p+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ con $|\Delta| < \delta_{\varepsilon/2}$, e sia $(t_1, \dots, t_p) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_p; x_{p+1}]$.

Si ha

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\mathbf{u}\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{p}(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\sum_{i=1}^{\nu} f\left(x_i^{(\nu)}\right)\left(x_{i+1}^{(\nu)}-x_i^{(\nu)}\right)+\sum_{i=1}^{\nu} f\left(x_i^{(\nu)}\right)\left(x_{i+1}^{(\nu)}-x_i^{(\nu)}\right)-\mathbf{u}\right\|$$

$$\leq \left\|\sum_{i=1}^{p}(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\sum_{i=1}^{\nu} f\left(x_i^{(\nu)}\right)\left(x_{i+1}^{(\nu)}-x_i^{(\nu)}\right)\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{\nu} f\left(x_i^{(\nu)}\right)\left(x_{i+1}^{(\nu)}-x_i^{(\nu)}\right)-\mathbf{u}\right\|$$

Per subadditività delle norme

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

La maggiorazione del primo addendo segue dall'ipotesi per costruzione di $\delta_{\varepsilon/2}$, avendo posto $

La tesi è pertanto acquisita.

■

Proposizione 21.3: Integrabilità delle funzioni continue

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a;b] \to X$ una funzione continua.

Allora, f è integrabile secondo Riemann su $[a;b]$.

Dimostrazione

In virtù della [Proposizione 21.2], si vuole provare la continuità di f mostrando la condizione equivalente da essa indicata

In virtù della [Proposizione 21.2], si vuole provare la continuità di f mostrando la condizione equivalente da essa indicata.

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.

Essendo f continua per ipotesi su $[a;b]$ compatto in $\mathbb{R}$, essa è uniformemente continua;
ne segue che esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $s, t \in [a;b]$ con $|s-t| < \delta$, si ha $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Siano $\Delta_1 = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ e $\Delta_2 = (y_1, \ldots, y_{m+1})$ due decomposizioni di $[a;b]$ con $|\Delta_1|, |\Delta_2| < \delta$;

si provi che, fissati $(t_1, \ldots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n; x_{n+1}]$ e $(s_1, \ldots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \cdots \times [y_m; y_{m+1}]$, si ha
$\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^{m} (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| < \varepsilon$.

Si consideri la decomposizione unione $\Delta_1 \cup \Delta_2 = (w_1, \ldots, w_{p+1})$;

si provi che $\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^{p} (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\left\| \sum_{j=1}^{m} (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \sum_{h=1}^{p} (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Intanto, per ogni $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, sia $h_i \in \{1, \ldots, p+1\}$ tale che $w_{h_i} = x_i$, che esiste ed è unico per definizione di $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Si osserva che $1 = h_1 < \cdots < h_{n+1} = p+1$ per definizione di $\Delta_1 \cup \Delta_2$; ne segue che gli insiemi
$\{h_1, \ldots, h_2 - 1\}, \ldots, \{h_n, \ldots, h_{n+1} - 1\}$ costituiscono una partizione di $\{1, \ldots, p\}$.

Allora,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^{p} (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| \qquad \sum_{h=1}^{p} \cdots = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} \ldots \text{ per quanto osservato sugli } h_i$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) f(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| \quad \text{In quanto } \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) = w_{h_{i+1}} - w_{h_i} = x_{i+1} - x_i \text{ per}$$

definizione degli h_i

$$= \left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1}(w_{h+1}-w_h)\big(f(t_i)-f(w_h)\big)\right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1}\left\|(w_{h+1}-w_h)\big(f(t_i)-f(w_h)\big)\right\|$$

Per subadditività delle norme

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1}(w_{h+1}-w_h)\|f(t_i)-f(w_h)\|$$

Per assoluta omogeneità delle norme, essendo $w_{h+1}-w_h>0$ per ogni $h\in\{1,\dots,p\}$

$$< \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1}(w_{h+1}-w_h)\tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Per costruzione di δ;
infatti, per ogni $i\in\{1,\dots,n\}$ si è posto $t_i\in[x_i;x_{i+1}]$ e per ogni $h\in\{h_i,\dots,h_{i+1}-1\}$ si ha
$w_h=[w_{h_i};w_{h_{i+1}}]=[x_i;x_{i+1}]$; essendo $

$$= \tfrac{\varepsilon}{2}$$

In quanto
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1}(w_{h+1}-w_h)=\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)=x_{n+1}-x_1=b-a$

Analogamente si ricava che, $\left\|\sum_{j=1}^{m}(y_{j+1}-y_j)f(s_j)-\sum_{h=1}^{p}(w_{h+1}-x_h)f(w_h)\right\|<\tfrac{\varepsilon}{2}$.

Si ottiene allora

$$\varepsilon > \left\|\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\sum_{h=1}^{p}(w_{h+1}-x_h)f(w_h)\right\|+\left\|\sum_{j=1}^{m}(y_{j+1}-y_j)f(s_j)-\sum_{h=1}^{p}(w_{h+1}-x_h)f(w_h)\right\|$$

Sommando membro a membro le due disuguaglianze appena acquisite

$$= \left\|\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\sum_{h=1}^{p}(w_{h+1}-x_h)f(w_h)\right\|+\left\|\sum_{h=1}^{p}(w_{h+1}-x_h)f(w_h)-\sum_{j=1}^{m}(y_{j+1}-y_j)f(s_j)\right\|$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\sum_{h=1}^{p}(w_{h+1}-x_h)f(w_h)+\sum_{h=1}^{p}(w_{h+1}-x_h)f(w_h)-\sum_{j=1}^{m}(y_{j+1}-y_j)f(s_j)\right\|$$

Per sub-additività delle

norme

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\sum_{j=1}^{m}(y_{j+1}-y_j)f(s_j)\right\|$$

come si voleva.

■

Proposizione 21.4: Integrale della composizione di funzionali lineari continui con funzioni continue

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f:[a;b] \to X$ una funzione continua.
Sia $\varphi \in X^*$.

Si ha $\int_a^b \varphi\big(f(x)\big)\,dx = \varphi\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$.

Osservazioni preliminari

Dalle ipotesi si ha che $\varphi \circ f$ e f sono continue, dunque integrabili ([Proposizione 21.3]); pertanto, gli integrali indicati nella tesi sono ben definiti.

Dimostrazione

Se $\varphi = \mathbf{0}_{X^*}$, si ha $\varphi\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = 0$ essendo φ identicamente nulla su X, e si ha anche $\int_a^b \varphi\big(f(x)\big)\,dx = 0$ per la [Proposizione 21.1], essendo $\varphi \circ f$ identicamente nulla su $[a;b]$.
La tesi è dunque acquisita in questo caso.

Si supponga adesso $\varphi \neq \mathbf{0}_{X^*}$.

Si provi che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni decomposizione $\Delta = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \ldots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n, x_{n+1}]$ si ha
$\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)\varphi\big(f(t_i)\big) - \varphi\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) \right\| < \varepsilon.$

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.

Essendo f integrabile in quanto continua ([Proposizione 21.3]) esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni decomposizione $\Delta = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \ldots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n, x_{n+1}]$ si ha
$\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \int_a^b f(x)\, dx \right\| < \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_{X^*}}.$

Per ogni decomposizione $\Delta = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \ldots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n, x_{n+1}]$ si ha allora

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)\varphi\big(f(t_i)\big) - \varphi\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) \right\| \\
&= \left\| \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)(f(t_i) - \int_a^b f(x)\, dx \right) \right\| && \text{Per linearità di } \varphi \\
&\leq \|\varphi\|_{X^*} \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)(f(t_i) - \int_a^b f(x)\, dx \right\| && \text{Dalla disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori lineari continui} \\
&< \|\varphi\|_{X^*} \cdot \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_{X^*}} = \varepsilon && \text{Per costruzione di } \delta
\end{aligned}$$

La tesi è dunque acquisita anche in questo caso.

■

Proposizione 21.5: Linearità dell'integrale

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Siano $f, g : [a; b] \to X$ due funzioni continue.
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si ha $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$.

Dimostrazione

Sia $\varphi \in X^*$.

Si ha

$\varphi\left(\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, dx\right)$	
$= \int_a^b \varphi\big((\alpha f + \beta g)(x)\big)\, dx$	Per la [Proposizione 21.4]
$= \int_a^b \varphi\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx$	Per definizione di $\alpha f + \beta g$
$= \int_a^b \alpha\varphi\big(f(x)\big) + \beta\varphi\big(g(x)\big)\, dx$	Per linearità di φ
$= \alpha \int_a^b \varphi\big(f(x)\big)\, dx + \beta \int_a^b \varphi\big(g(x)\big)\, dx$	Per linearità dell'integrale di funzioni reali, essendo $\varphi \circ f$, $\varphi \circ g : [a; b] \to \mathbb{R}$
$= \alpha\varphi\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) + \beta\varphi\left(\int_a^b g(x)\, dx\right)$	Per la [Proposizione 21.4]
$= \varphi\left(\alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\right)$	Per linearità di φ

Ne segue quindi che $\varphi\left(\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, dx\right) = \varphi\left(\alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\right)$, per ogni $\varphi \in X^*$;

dal [Corollario 7.5] segue allora $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$.
■

Proposizione 21.6: Teorema della media generalizzato

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a;b] \to X$ una funzione continua.

Si ha $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \in \overline{\mathbf{conv}}\, f\big([a;b]\big)$.

Dimostrazione

Si proceda per assurdo, supponendo $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \notin \overline{\mathbf{conv}}\, f\big([a;b]\big)$.

Applicando il Teorema di Separazione ([Teorema 7.10]) all'insieme $\overline{\mathbf{conv}}\, f\big([a;b]\big)$, chiuso e convesso, e all'insieme $\left\{ \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \right\}$ compatto, convesso e disgiunto dal primo insieme per ipotesi di assurdo, esiste allora $\varphi \in Y^*$ tale che

$$\sup_{\mathbf{y} \in \overline{\mathbf{conv}}\, f([a;b])} \varphi(\mathbf{y}) < \varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\right).$$

Ne segue che, per ogni $x \in [a;b]$, vale

$$\begin{aligned} \varphi\big(f(x)\big) &< \varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\right) && \text{Essendo } f(x) \in f\big([a;b]\big) \subseteq \overline{\mathbf{conv}}\, f\big([a;b]\big) \\ &= \frac{1}{b-a}\,\varphi\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) && \text{Per linearità di } \varphi \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\big(f(x)\big)\,dx && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \end{aligned}$$

D'altra parte, essendo $\varphi \circ f$ una funzione reale continua, per il teorema della Media per funzioni reali esiste $\tilde{x} \in [a;b]$ tale che $\varphi\big(f(\tilde{x})\big) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\big(f(x)\big)\,dx$, in contrasto con quanto appena ottenuto.
■

⌘

Integrale definito su estremi arbitrari

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a;b] \to X$ una funzione continua.
Siano $\alpha, \beta \in [a;b]$.

Se $\alpha < \beta$, si ha $f_{|[\alpha;\beta]}$ integrabile essendo ivi continua; si pone allora $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f_{|[\alpha;\beta]}(x)\,dx$.

Se $\alpha = \beta$, si pone $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$.

Se $\alpha > \beta$, si ha $f_{|[\beta;\alpha]}$ integrabile essendo ivi continua; si pone allora $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f_{|[\beta;\alpha]}(x)\,dx$.

Proposizione 21.7: Additività dell'integrale rispetto all'unione di intervalli contigui

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a;b] \to X$ una funzione continua.
Siano $\alpha, \beta, \gamma \in [a;b]$.

Si ha $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$.

Dimostrazione

Se almeno due tra α, β, γ sono uguali, la tesi è di immediata acquisizione.

Si supponga dunque che α, β, γ siano a due a due distinti;
sia $\varphi \in X^*$.

Si ha

$$\varphi\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)$$

$= \int_\alpha^\beta \varphi(f(x))\,dx$ Per la [Proposizione 21.4]

$= \int_\alpha^\gamma \varphi(f(x))\,dx + \int_\gamma^\beta \varphi(f(x))\,dx$ Per additività rispetto all'unione dell'integrale di funzioni reali, essendo $\varphi \circ f : [a;b] \to \mathbb{R}$

$= \varphi\left(\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx\right) + \varphi\left(\int_\gamma^\beta f(x)\,dx\right)$ Per la [Proposizione 21.4]

$= \varphi\left(\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx\right)$ Per linearità di φ

Ne segue quindi che $\varphi\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right) = \varphi\left(\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx\right)$, per ogni $\varphi \in X^*$;

dal [Corollario 7.5] segue allora $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$.

■

Funzioni Primitive, Teorema fondamentale del calcolo integrale su spazi di Banach

⌘ Primitiva di una funzione di variabile reale

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Sia $f : I \to X$ una funzione.

Una funzione $F : I \to X$ si dice **primitiva** di F quando:

- F è derivabile in I (nel senso dato per funzioni di variabile reale);
- $\dot{F}(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Proposizione 21.8: Famiglia delle primitive di una funzione che le ammette

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Sia $f : I \to X$ una funzione.
Sia $F : I \to X$ una primitiva di f.

Le primitive di f sono allora tutte e sole del tipo $F + c_{\mathbf{k}}$, con $\mathbf{k} \in X$ ($c_{\mathbf{k}} : I \to X$ è la funzione costantemente pari a $\mathbf{k}$, definita cioè ponendo $c_{\mathbf{k}}(x) = \mathbf{k}$ per ogni $x \in I$).

Dimostrazione

Chiaramente, $F + c_{\mathbf{k}}$ è primitiva di f per ogni $\mathbf{k} \in X$;
infatti, fissato $x \in I$ si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{(F+c_{\mathbf{k}})(x+h)-(F+c_{\mathbf{k}})(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)+\mathbf{k}-F(x)-\mathbf{k}}{h} && \text{Per definizione di } F + c_{\mathbf{k}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} && \\
&= f(x) && \text{Essendo } F \text{ una primitiva di } f \text{ per ipotesi}
\end{aligned}
$$

Viceversa, sia G una seconda primitiva per f, e si mostri che esiste $\mathbf{k} \in X$ tale che $G = F + c_{\mathbf{k}}$, ossia
$G(x) - F(x) = \mathbf{k}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Essendo F e G entrambe primitive di f, si ha $\dot{G}(x) = f(x) = \dot{F}(x)$ per ogni $x \in I$.

Per derivazione di una combinazione lineare di funzioni (che si acquisisce allo stesso modo della derivazione di una combinazione lineare di funzioni reali), si ottiene che
$(F - G)^{\cdot}(x) = \mathbf{0}$ per ogni $x \in I$.

Ne segue allora che $F - G$ è costante, come si voleva.
■

⌘ Definizione: Funzione integrale

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a;b] \to X$ una funzione continua.
Sia $x_0 \in [a;b]$.

Si dice **funzione integrale** di f con piede x_0, la funzione $F_{x_0} : [a;b] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ per ogni $x \in [a;b]$.

Teorema 21.9: Teorema fondamentale del calcolo integrale generalizzato

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a;b] \to X$ una funzione continua.
Sia $x_0 \in [a;b]$.
Sia F_{x_0} la funzione integrale di f con piede x_0.

F_{x_0} è una primitiva di f.

Osservazioni preliminari

Sia $x \in [a;b]$.
Sia $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x + h \in [a;b]$.

Si ha $\lim\limits_{h \to 0^+} \operatorname{diam} f\big([x; x+h]\big) = \lim\limits_{h \to 0^-} \operatorname{diam} f\big([x+h; x]\big) = 0.$

Infatti, si fissi $\varepsilon > 0$.

Essendo f continua per ipotesi su $[a;b]$ compatto in $\mathbb{R}$, essa è uniformemente continua;
esiste allora $\delta > 0$ tale che, per ogni $s,t \in [a;b]$ con $|s-t| < \delta$, si abbia $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sia allora $h \in \,]0;\delta[$;

Per ogni $s,t \in [x, x+h]$ si ha allora $|s-t| \leq h < \delta$, e dunque $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ per costruzione di δ.

Essendo $\operatorname{\mathbf{diam}} f\big([x;x+h]\big) = \sup\limits_{s,t\in[x;x+h]} \|f(s) - f(t)\|$, ne segue allora che

$\operatorname{\mathbf{diam}} f\big([x;x+h]\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Pertanto, $\lim\limits_{h\to 0^+} \operatorname{diam} f\big([x;x+h]\big) = 0$.

Il limite $\lim\limits_{h\to 0^-} \operatorname{diam} f\big([x+h;x]\big) = 0$ si mostra in maniera analoga.

Dimostrazione

Si fissi $x \in [a;b]$;
si provi che

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = 0.$$

Si studi il limite destro; per il limite sinistro si procede in maniera analoga.

Per ogni $h > 0$ tale che $x + h \in [a;b]$, si ha

$\frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{h}$	Per definizione di F_{x_0}
$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$	Per la [Proposizione 21.7]
$\in \overline{\operatorname{conv}}\, f\big([x;x+h]\big)$	Per il teorema della media ([Proposizione 21.6])

Essendo $f(x) \in f\big([x; x+h]\big)$ e avendo appena ricavato che $\frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} \in \overline{\text{conv}}\, f\big([x; x+h]\big)$, dalla [Proposizione 11.6] segue che

$$\left\| \frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} - f(x) \right\| \leq \text{diam}\, f\big([x; x+h]\big).$$

Poiché $\lim\limits_{h \to 0^+} \text{diam}\, f\big([x; x+h]\big) = 0$ per le osservazioni preliminari, ne segue che

$\lim\limits_{h \to 0^+} \left\| \frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} - f(x) \right\| = 0$, che corrisponde a ciò che si voleva provare.

■

Corollario 21.10: Teorema di Torricelli-Barrow generalizzato

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a; b] \to X$ una funzione continua.
Sia $F : [a; b] \to X$ una primitiva di f, che esiste per il [Teorema 21.9].

Si ha $\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$.

Dimostrazione

Fissato $x_0 \in [a; b]$, sia F_{x_0} la funzione integrale di f con piede x_0.
Essendo F e F_{x_0} due primitive di f, per la [Proposizione 21.8] esiste $\mathbf{k} \in X$ tale che $F_{x_0}(x) = F(x) + \mathbf{k}$ per ogni $x \in [a; b]$.

Si ha

$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^{x_0} f(t)\, dt + \int_{x_0}^b f(t)\, dt$	Per la [Proposizione 21.7]
$= \int_{x_0}^b f(t)\, dt - \int_{x_0}^a f(t)\, dt$	Per definizione di integrale definito su estremi arbitrari

$$= F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a) \qquad \text{Per definizione di } F_{x_0}$$

$$= F(b) + \mathbf{k} - (F(a) + \mathbf{k}) \qquad \text{Per quanto osservato prima}$$

$$= F(b) - F(a)$$

La tesi è dunque aquisita.

■