Proposizione 28.1: Misura di non compattezza di successioni limitate la cui distanza dai termini corrispondenti è infinitesima

Sia (X, d) uno spazio metrico.
Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ due successioni limitate.
Si supponga che $\lim\limits_{n} d(x_n, y_n) = 0$.

Allora, $\alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \alpha\left(\bigcup\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Osservazioni preliminari

Sia (X, d) uno spazio metrico.
Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione limitata.

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $N_1, \dots, N_k \subseteq \mathbb{N}$ con $\bigcup\limits_{i=1}^{k} N_i = \mathbb{N}$, tali che
$\operatorname{diam}\left(\{x_n \mid n \in N_i\}\right) < \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$

Infatti, essendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, $\alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ è un valore reale;

per sua definizione, esistono allora $V_1, \dots, V_k \subseteq \bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i = \bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tali che
$\operatorname{diam}(V_i) < \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$.

Per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$, sia allora $N_i = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_i\}$.

Si ha $\bigcup_{i=1}^{k} N_i = \mathbb{N}$;
inoltre, fissato $i \in \{1, \ldots, k\}$, per ogni $m, n \in N_i$ si ha $x_m, x_n \in V_i$, dunque

$d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(V_i) < \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Ne segue che $\operatorname{diam}\left(\{x_n \mid n \in N_i\}\right) \leq \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \varepsilon$, per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Dimostrazione

Essendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitate per ipotesi, si ha

$\alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right), \ \alpha\left(\bigcup\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) < +\infty$.

Si fissi ora $\varepsilon > 0$.

Poiché $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, y_n) < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu + 1$.

Dalle osservazioni preliminari, segue l'esistenza di $N_1, \ldots, N_k \subseteq \mathbb{N}$ con $\bigcup_{i=1}^{k} N_i = \mathbb{N}$, tali che
$\operatorname{diam}\left(\{x_n \mid n \in N_i\}\right) < \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, sia ora $Y_i = \{y_n \mid n \in N_i \ , \ n \geq \nu + 1\}$.

Si ha $\bigcup_{n=1}^{\nu} \{y_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} Y_i = \bigcup\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;
infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $n \leq \nu$ si ha $y_n \in \{y_n\}$, mentre se $n \geq \nu + 1$ si ha $y_n \in Y_i$, dove $i \in \{1, \ldots, k\}$ è tale che $n \in N_i$ (che esiste in quanto $N_1, \ldots, N_k$ ricoprono $\mathbb{N}$).

Si ha anche che $\operatorname{diam}\{y_n\} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \leq \nu$;
fissato $i \in \{1, \ldots, k\}$, per ogni $m, n \in N_i$ con $m, n \geq \nu + 1$ si ha

$d(y_m, y_n) \le d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n)$	Applicando due volte la disuguaglianza triangolare delle distanze
$< \frac{\varepsilon}{3} + d(x_m, x_n) + \frac{\varepsilon}{3} = d(x_m, x_n) + \frac{2\varepsilon}{3}$	Per costruzione di ν, essendo $m, n \ge \nu + 1$
$\le \operatorname{diam}\left(\{x_n \mid n \in N_i\}\right) + \frac{2\varepsilon}{3}$	Avendo supposto $m, n \in N_i$
$< \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \varepsilon$	Per costruzione di N_i

da cui segue che $\operatorname{diam}(Y_i) \le \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \varepsilon$, per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$.

Allora, gli insiemi $\{y_1\}, \dots, \{y_\nu\}, Y_1, \dots, Y_k$ ricoprono $\bigcup\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e hanno diametro non superiore a $\alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \varepsilon$;

ne segue che $\alpha\left(\bigcup\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \le \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) + \varepsilon$, da cui $\alpha\left(\bigcup\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \le \alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Ragionando in maniera analoga, si ricava che $\alpha\left(\bigcup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \le \alpha\left(\bigcup\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$;

dunque,

Lemma 28.2: Misura di non compattezza della valutazione di una famiglia

Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y, equi-uniformemente continue.
Si supponga $\mathcal{F}(x)$ limitato per ogni $x \in X$.
Sia $x \in X$.

Per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ tali che $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ e $\operatorname{diam}\left(\mathcal{F}_i(x)\right) < \alpha\big(\mathcal{F}(x)\big) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dimostrazione

Dalla definizione di $\alpha\big(\mathcal{F}(x)\big)$, segue l'esistenza di $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq \mathcal{F}(x)$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i = \mathcal{F}(x)$ e $\operatorname{diam}(Y_i) < \alpha\big(\mathcal{F}(x)\big) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, sia allora $\mathcal{F}_i = \{f \in \mathcal{F} : f(x) \in Y_i\}$.

Si ha $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$.
Infatti, per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha $f(x) \in \mathcal{F}(x)$;
essendo $Y_1, \ldots, Y_n$ un ricoprimento di $\mathcal{F}(x)$ segue che $f(x) \in Y_i$, ossia $f \in \mathcal{F}_i$, per qualche $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Si ha anche $\operatorname{diam}\big(\mathcal{F}_i(x)\big) < \alpha\big(\mathcal{F}(x)\big) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Infatti, $\mathcal{F}_i(x) \subseteq Y_i$ per definizione di $\mathcal{F}_i$;
dunque, dalle proprietà del diametro e per costruzione di $Y_1, \ldots, Y_n$ si ha che
$\operatorname{diam}\big(\mathcal{F}_i(x)\big) \leq \operatorname{diam}(Y_i) < \alpha\big(\mathcal{F}(x)\big) + \varepsilon$, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.
■

Proposizione 28.3: Uniforme continuità della misura di non compattezza

Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y, equi-uniformemente continue.
Si supponga $\mathcal{F}(x)$ limitato per ogni $x \in X$.

La funzione $\alpha\big(\mathcal{F}(\cdot)\big) : X \to \mathbb{R}_0^+$, definita ponendo $x \mapsto \alpha\big(\mathcal{F}(x)\big)$ per ogni $x \in X$, è allora uniformemente continua.

Dimostrazione

Si fissi $\varepsilon > 0$.

Essendo le funzioni in $\mathcal{F}$ equi-uniformemente continue, esiste $\delta > 0$ tale che $\rho\big(f(x), f(z)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $x, z \in X$ con $d(x, z) < \delta$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Siano quindi $x, z \in X$ con $d(x, z) < \delta$.

Applicando il [Lemma 28.2] a $\mathcal{F}(z)$, esistono $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$, e $\textbf{diam}\,\big(\mathcal{F}_i(z)\big) < \alpha\big(\mathcal{F}(z)\big) + \frac{\varepsilon}{3}$.

Si considerino ora $\mathcal{F}_1(x), \dots, \mathcal{F}_n(x)$;
questi ricoprono $\mathcal{F}(x)$ in quanto $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ ricoprono $\mathcal{F}$ per costruzione.

Si vuole stimare $\textbf{diam}\,\big(\mathcal{F}_i(x)\big)$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Fissato quindi $i \in \{1, \dots, n\}$, siano $f, g \in \mathcal{F}_i$.
Si ha

$\rho\big(f(x), g(x)\big) \leq \rho\big(f(x), f(z)\big) + \rho\big(f(z), g(z)\big) + \rho\big(g(z), g(x)\big)$	Applicando due volte la disuguaglianza triangolare delle distanze
$< \frac{\varepsilon}{3} + \rho\big(f(z), g(z)\big) + \frac{\varepsilon}{3} = \rho\big(f(z), g(z)\big) + \frac{2}{3}\varepsilon$	Per costruzione di δ, essendo $d(x, z) < \delta$ ed essendo $f, g \in \mathcal{F}$
$\textbf{diam}\,\big(\mathcal{F}_i(z)\big) + \frac{2}{3}\varepsilon$	Dalla definizione di diametro; essendo $\mathcal{F}(z)$ limitato per ipotesi, anche $\mathcal{F}_i(z)$ lo è; dunque, $\textbf{diam}\,\big(\mathcal{F}(z)\big)$ è un valore reale
$\alpha\big(\mathcal{F}(z)\big) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \alpha\big(\mathcal{F}(z)\big) + \varepsilon$	Per costruzione di $\mathcal{F}_i$

Dunque, $\textbf{diam}\,\big(\mathcal{F}_i(x)\big) < \alpha\big(\mathcal{F}(z)\big) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Allora, $\mathcal{F}_1(x), \dots, \mathcal{F}_n(x)$ costituiscono un ricoprimento finito di $\mathcal{F}(x)$, e hanno diametro minore di $\alpha\big(\mathcal{F}(z)\big) + \varepsilon$;

ne segue che $\alpha\big(\mathcal{F}(x)\big) \leq \alpha\big(\mathcal{F}(z)\big) + \varepsilon$.

Dall'arbitrarietà di $x, z \in X$ con $d(x, z) < \delta$, segue che vale anche

$\alpha\big(\mathcal{F}(z)\big) \leq \alpha\big(\mathcal{F}(x)\big) + \varepsilon;$

pertanto, si ha $\big|\alpha\big(\mathcal{F}(x)\big) - \alpha\big(\mathcal{F}(z)\big)\big| < \varepsilon$.

■

Proposizione 28.4: Maggiorazione della misura di non compattezza di una famiglia di integrali

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da $[a; b]$ in X, equi-continue ed equi-limitate.
Sia $\Gamma = \left\{\int_a^b f(t)\, dt \mid f \in \mathcal{F}\right\}$.

Si ha $\alpha(\Gamma) \leq \int_a^b \alpha\big(\mathcal{F}(t)\big)\, dt$.

Osservazioni preliminari

1. Essendo equi-continue e definite su $[a; b]$ compatto, le funzioni in $\mathcal{F}$ sono equi-uniformemente continue ([Proposizione 5.1]).

2. $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni equi-uniformemente continue per il punto precedente:
$\mathcal{F}(\mathbf{x})$ è limitato per ogni $\mathbf{x} \in X$, essendo $\mathcal{F}(X)$ limitato in quanto le funzioni in $\mathcal{F}$ sono per ipotesi equi-limitate;
per la [Proposizione 28.2], $\alpha\big(\mathcal{F}(\cdot)\big)$ è una funzione uniformemente continua, dunque continua, dunque integrabile secondo Riemann.
Allora, risulta ben definito l'integrale $\int_a^b \alpha\big(\mathcal{F}(t)\big)\, dt$.

3. Sia $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua;
   f è uniformemente continua in quanto continua su $[a;b]$ compatto.
   Fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora $\delta > 0$ tale che $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$,
   per ogni $t, s \in [a;b]$ con $|t-s| < \delta$.
   Nella dimostrazione dell'integrabilità secondo Riemann di funzioni continue a valori reali, si deduce che, data una decomposizione $\Delta = (t_1, \dots, t_{n+1})$ di $[a;b]$ con $\max\limits_{1 \le i \le n}(t_{i+1} - t_i) < \delta$, si ha allora
   $\left| \sum\limits_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i) f(t_i) - \int_a^b f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$

   Data una famiglia $\mathcal{G} \subseteq C^0\big([a;b], \mathbb{R}\big)$ di funzioni equi-continue, si ha allora che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $\Delta = (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathcal{D}[a;b]$ con $\max\limits_{1 \le i \le n}(t_{i+1} - t_i) < \delta$, valga
   $\left| \sum\limits_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i) f(t_i) - \int_a^b f(t)\, dt \right| < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{G}$.

4. Sia $u : X \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua.
   Allora, la famiglia $u \circ \mathcal{F} = \{u \circ f \mid f \in \mathcal{F}\}$ è costituita da funzioni equi-continue.

   Infatti, si fissi $\varepsilon > 0$.
   Sia $\rho > 0$ tale che $|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \rho$;
   sia $\delta > 0$ tale che $\|f(t) - f(s)\| < \rho$ per ogni $t, s \in [a;b]$ con $|t-s| < \delta$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.
   Allora, per ogni $t, s \in [a;b]$ con $|t-s| < \delta$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$, si ha
   $\big|u\big(f(t)\big) - u\big(f(s)\big)\big| < \varepsilon.$

Dimostrazione

Si consideri la famiglia di funzioni reali $\mathcal{G} = \big\{\|f(\cdot) - g(\cdot)\| : f, g \in \mathcal{F}\big\}$;
esse sono equi-continue.

Infatti, essendo le funzioni in $\mathcal{F}$ equi-uniformemente continue per le osservazioni preliminari, fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $\|f(t) - f(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ con $|t - s| < \delta$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.

per ogni $t, s \in [a; b]$ con $|t - s| < \delta$ e per ogni $f, g \in \mathcal{F}$, si ha allora

$$\begin{aligned}
&\big|\|f(t) - g(t)\| - \|f(s) - g(s)\|\big| \\
&\leq \big\|f(t) - g(t) - \big(f(s) - g(s)\big)\big\| && \text{Dalla seconda disuguaglianza triangolare delle norme} \\
&= \|f(t) - f(s) + g(s) - g(t)\| \\
&\leq \|f(t) - f(s)\| + \|g(s) - g(t)\| && \text{Dalla sub-additività delle norme} \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon && \text{Per costruzione di } \delta \text{, essendo \$}
\end{aligned}$$

Si fissi ora $\varepsilon > 0$.

La famiglia $\mathcal{G}$ è stata vista essere costituita da funzioni equi-continue.

Inoltre, $\alpha\big(\mathcal{F}(\cdot)\big)$ è uniformemente continua per le osservazioni preliminari;
sempre per le osservazioni preliminari, si ha allora che anche la famiglia $\alpha\big(\mathcal{F}(\cdot)\big) \circ \mathcal{F}$ è costituita da funzioni equi-continue.

Facendo ancora uso delle osservazioni preliminari, esiste perciò $\Delta = (t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ dimodoché $\max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}(t_{i+1} - t_i)\|f(t_i) - g(t_i)\| - \int_a^b \|f(t) - g(t)\|\,dt\right|, \left|\sum_{i=1}^{n}(t_{i+1} - t_i)\alpha\big(\mathcal{F}(t_i)\big) - \int_a^b \alpha\big(\mathcal{F}(t)\big)\,dt\right|\right\} < \frac{\varepsilon}{4}$, per ogni $f, g \in \mathcal{F}$.

Fissato $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, applicando il [Lemma 28.2] a $\mathcal{F}(t_i)$, esistono $\mathcal{F}_{i,1}, \ldots, \mathcal{F}_{i,k_i} \subseteq \mathcal{F}$ con $\bigcup_{j=1}^{k_i} \mathcal{F}_{i,j} = \mathcal{F}$, tali che $\operatorname{diam}\big(\mathcal{F}_{i,j}(t_i)\big) < \alpha\big(\mathcal{F}(t_i)\big) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ per ogni $j \in \{1, \ldots, k_i\}$.

Sia $\mathcal{D} = \prod_{i=1}^{n}\{1, \ldots, k_i\} = \{(j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n : \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ j_i \leq k_i\}$.

Si considerino gli insiemi non vuoti del tipo $\mathcal{F}_{1,j_1} \cap \mathcal{F}_{2,j_2} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{n,j_n}$ al variare di $(j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{D}$;

si osserva intanto che questi ricoprono $\mathcal{F}$, in quanto $\bigcup\limits_{j=1}^{k_i} \mathcal{F}_{i,j} = \mathcal{F}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ per costruzione.

Fissato ora $(j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{D}$, siano $f, g \in \mathcal{F}_{1,j_1} \cap \mathcal{F}_{2,j_2} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{n,j_n}$;

si ha

$\left\| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt \right\| = \left\| \int_a^b f(t) - g(t)\,dt \right\|$	Per linearità dell'integrale di Riemann ([Proposizione 21.5])
$\leq \int_a^b \\|f(t) - g(t)\\|\,dt$	Per maggiorazione della norma dell'integrale di Riem ([Proposizione 21.6])
$< \sum\limits_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i) \\|f(t_i) - g(t_i)\\| + \frac{\varepsilon}{4}$	Per costruzione di Δ
$< \sum\limits_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i) \left(\alpha\big(\mathcal{F}(t_i)\big) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) + \frac{\varepsilon}{4}$	Avendo supposto $f, g \in \mathcal{F}_{1,j_1} \cap \mathcal{F}_{2,j_2} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{n,j_n}$ ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ si ha allora $\\|f(t_i) - g(t_i)\\| \leq \mathbf{diam}(\mathcal{F}_{i,j_i}(t_i)) < \alpha\big(\mathcal{F}(t_i)\big) +$, per costruzione dei $\mathcal{F}_{i,j}$
$= \sum\limits_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i)\, \alpha\big(\mathcal{F}(t_i)\big) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \sum\limits_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i)\, \alpha\big(\mathcal{F}(t_i)\big) + \frac{3\varepsilon}{4}$	
$< \int_a^b \alpha\big(\mathcal{F}(t)\big)\,dt + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \int_a^b \alpha\big(\mathcal{F}(t)\big)\,dt + \varepsilon$	Per costruzione di Δ

Allora, la famiglia $\Big\{ \big\{ \int_a^b f(t)\,dt \mid f \in \mathcal{F}_{1,j_1} \cap \mathcal{F}_{2,j_2} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{n,j_n} \big\} \mid (j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{D} \Big\}$ è un ricoprimento finito di Γ, essendo $\{\mathcal{F}_{1,j_1} \cap \mathcal{F}_{2,j_2} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{n,j_n} \mid (j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{D}\}$ un ricoprimento finito di $\mathcal{F}$.

Inoltre, per quanto appena osservato si ha che $\mathbf{diam}\left(\big\{ \int_a^b f(t)\,dt \mid f \in \mathcal{F}_{1,j_1} \cap \mathcal{F}_{2,j_2} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{n,j_n} \big\} \right) \leq \int_a^b \alpha\big(\mathcal{F}(t)\big)\,dt + \varepsilon$ per ogni $(j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{D}$.

Dalla definizione di $\alpha(\Gamma)$ viene allora che $\alpha(\Gamma) \leq \int_a^b \alpha\big(\mathcal{F}(t)\big)\,dt + \varepsilon$;

dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue infine che

$\alpha(\Gamma) \leq \int_a^b \alpha\big(\mathcal{F}(t)\big)\, dt$, come si voleva.
■

Proposizione 28.5: Lemma di Gronwall

Sia $[a;b) \subseteq \mathbb{R}$, con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Sia $f : [a;b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Si supponga che esistano $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tali che
$f(t) \leq \beta + \gamma \int_a^b f(\tau)\, d\tau$ per ogni $t \in [a;b)$.

Allora, $f(t) \leq \beta e^{\gamma(t-a)}$ per ogni $t \in [a;b)$.

Corollario 28.6: Condizione sufficiente affinché una funzione continua nonnegativa sia identicamente nulla

Sia $[a;b) \subseteq \mathbb{R}$, con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Sia $f : [a;b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e nonnegativa.
Si supponga che esista $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $f(t) \leq \gamma \int_a^b f(\tau)\, d\tau$ per ogni $t \in [a;b)$.

Allora, $f(t) = 0$ per ogni $t \in [a;b)$.

Dimostrazione

Per la [Proposizione 28.5], $f(t) \leq 0 e^{\gamma(t-a)} = 0$ per ogni $t \in [a;b)$.

Essendo f nonnegativa per ipotesi, si ha allora che $f(t) = 0$ per ogni $t \in [a; b)$.

■

Proposizione 28.7: Limitatezza dell'immagine di una funzione uniformemente continua su un convesso limitato

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $A \subseteq X$ convesso e limitato.
Sia $f : A \to Y$ una funzione uniformemente continua.

$f(A)$ è limitato.

Dimostrazione

Per uniforme continuità di f, in corrispondenza a $\varepsilon = 1$ esiste $\delta > 0$ tale che $d\big(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{z})\big) < 1$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in A$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$.

Sia $d = \operatorname{diam}(A)$; esso è un valore reale in quanto A è limitato per ipotesi.

Si fissi ora $\mathbf{x}_0 \in A$.

Sia $\mathbf{z} \in A$;
per convessità di A, si ha che $\mathbf{x}_0 + \frac{i}{n}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $i \in \{0, \dots, n\}$.

Sia $n > \frac{d}{\delta}$, e sia $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_0 + \frac{i}{n}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0)$ per ogni $i \in \{0, \dots, n\}$;

per ogni $i \in \{0, \dots, n-1\}$ si ha

$$\|\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i\| = \frac{1}{n}\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \quad \text{Per legge degli } \mathbf{z}_i$$

$\leq \frac{d}{n}$ Per definizione di d

$< \delta$ per costruzione di n

Si ha allora

$d(f(\mathbf{z}), f(\mathbf{x}_0)) = d(f(\mathbf{z}_n), f(\mathbf{z}_0))$ Per legge degli $\mathbf{z}_i$

$\leq \sum_{i=0}^{n-1} d(f(\mathbf{z}_i), f(\mathbf{z}_{i+1}))$ Applicando la disuguaglianza triangolare $n-1$ volte

$< \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$ Per costruzione di δ, avendo osservato che $\|\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_n\| < \delta$ per ogni $i \in \{0, \dots, n-1\}$

Per arbitrarietà di $\mathbf{z} \in A$, si ha allora $f(A) \subseteq B(f(\mathbf{x}_0), n)$;
dunque, $f(A)$ è limitato.
■

⌘ Definizione: Funzione α-Lipschitziana

Siano (X, d) e (Y, ρ) due spazi metrici.
Sia $f : X \to Y$ una funzione.
Sia $L > 0$.

f si dice **α-Lipschitziana** di costante L, quando
$\alpha(f(A)) \leq L \cdot \alpha(A)$, per ogni $A \subseteq X$ limitato.

Proposizione 28.8: Somma di una funzione totalmente limitata con una Lipschitziana è α-Lipschitziana

Sia (X, d) uno spazio metrico.
Sia $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $f : X \to Y$ una funzione totalmente limitata
Sia $g : X \to Y$ una funzione Lipschitziana, di costante $L > 0$.

Allora, $f + g$ è α-Lipschitziana, di costante L.

Osservazioni preliminari

- Sia (X, d) uno spazio metrico.
  Siano $A, B \subseteq X$, con $B \subseteq A$.

  Allora, $\alpha(B) \leq \alpha(A)$.

  Infatti, se A non è limitato, si ha $\alpha(A) = +\infty$, e la proprietà è acquisita.
  Si supponga ora A limitato; dunque, $\alpha(A) \in \mathbb{R}_0^+$.
  Si fissi $\varepsilon > 0$;
  per definizione di $\alpha(A)$, esistono $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ tali che $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$, e $\mathbf{diam}(A_i) < \alpha(A) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$
  .

  Sia ora $B_i = A_i \cap B$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$;
  si ha che $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B$, e $\mathbf{diam}(B_i) \leq \mathbf{diam}(A_i) < \alpha(A) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.

  Ne viene che $\alpha(B) \leq \alpha(A) + \varepsilon$, da cui $\alpha(B) \leq \alpha(A)$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

- Sia $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
  Siano $A, B \subseteq X$.

  Si ha $\alpha(A+B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.

  Infatti, se almeno uno tra A e B non è limitato, si ha $\alpha(A) + \alpha(B) = +\infty$, e la proprietà è acquisita.
  Si suppongano ora A e B entrambi limitati; dunque, $\alpha(A), \alpha(B) \in \mathbb{R}_0^+$.
  Si fissi $\varepsilon > 0$;
  per definizione di $\alpha(A)$, esistono $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$, e $\operatorname{diam}(A_i) < \alpha(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.
  per definizione di $\alpha(B)$, esistono $B_1, \dots, B_m \subseteq B$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = B$, e $\operatorname{diam}(B_i) < \alpha(B) + \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$.

  Sia considerino ora gli insiemi del tipo $A_i + B_j$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$;
  si ha che $\bigcup\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} A_i + B_j = A + B$.
  Inoltre, fissati $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, per ogni $a_1, a_2 \in A_i$ e per ogni $b_1, b_2 \in B_j$ si ha

  $\|a_1 + b_1 - (a_2 + b_2)\| \leq \|a_1 - a_2\| + \|b_1 - b_2\|$
  $\leq \operatorname{diam}(A_i) + \operatorname{diam}(B_j) < \alpha(A) + \alpha(B) + \varepsilon$;

  pertanto, si ha $\operatorname{diam}(A_i + B_j) \leq \alpha(A) + \alpha(B) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$.

  Ne viene che $\alpha(A+B) \leq \alpha(A) + \alpha(B) + \varepsilon$, da cui $\alpha(A+B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

- Siano (X,d) e (Y,ρ) due spazi metrici.
  Sia $f: X \to Y$ una funzione Lipschitziana, di costante $L > 0$.
  Sia $A \subseteq X$ limitato.

  Si ha $\alpha\big(f(A)\big) \leq L \cdot \alpha(A)$.

  Infatti, essendo $\alpha(A)$ un valore reale in quanto A è limitato, dalla definizione si ha che esistono $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$, e $\mathbf{diam}(A_i) < \alpha(A) + \frac{\varepsilon}{L}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

  Si considerino ora gli insiemi $f(A_1), \dots, f(A_n)$;
  si ha che $\bigcup\limits_{i=1}^{n} f(A_i) = f(A)$.
  Inoltre, fissato $i \in \{1, \dots, n\}$, per ogni $a, b \in A_i$ si ha
  $d\big(f(a), f(b)\big) \leq L \cdot d(a,b)$

  $\leq L \cdot \mathbf{diam}(A_i) < L\left(\alpha(A) + \frac{\varepsilon}{L}\right) = L \cdot \alpha(A) + \varepsilon$;

  pertanto, si ha $\mathbf{diam}\left(f(A_i)\right) \leq L \cdot \alpha(A) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

  Ne viene che $\alpha\big(f(A)\big) \leq L \cdot \alpha(A) + \varepsilon$, da cui $\alpha\big(f(A)\big) \leq L \cdot \alpha(A)$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione

Sia $A \subseteq X$ limitato.

Si ha che

$$
\begin{aligned}
&\alpha\big((f+g)(A)\big) \\
&\leq \alpha\big(f(A)+g(A)\big) && \text{Dalle osservazioni preliminari, in quanto } (f+g)(A) \subseteq f(A)+g(A) \\
&\leq \alpha\big(f(A)\big)+\alpha\big(g(A)\big) && \text{Dalle osservazioni preliminari} \\
&= \alpha\big(g(A)\big) && \alpha\big(f(A)\big)=0 \text{ in quanto } f(A) \text{ è totalmente limitato per ipotesi} \\
&\leq L \cdot \alpha(A) && \text{Dalle osservazioni preliminari, in quanto } g \text{ è Lipschitiziana di costante } L
\end{aligned}
$$

La tesi è dunque acquisita.

■