2.4 - Esempi di Mappe Lisce

Ora abbiamo abbastanza informazioni per produrre diversi esempi interessanti di mappe lisce.

Nonostante l'apparente complessità della definizione, di solito non è difficile dimostrare che una particolare mappa è liscia Fondamentalmente, ci sono solo tre modi comuni per farlo:

- Esprimere la mappa in coordinate locali lisce e riconoscere le sue funzioni componente come composizioni di funzioni elementari lisce.
- Presentare la mappa come una composizione di mappe che sono note essere lisce.
- Utilizzare qualche risultato che si applica al caso particolare preso in considerazione.

Esempio 2.4.1 (Mappe su una varietà di dimensione zero).

Qualsiasi mappa da una varietà di dimensione zero in una varietà liscia con o senza bordo è automaticamente liscia, perché ogni sua rappresentazione in coordinate è costante.

Esempio 2.4.2 (Mappa liscia sulla 1-sfera).

Dotiamo $\mathbf{S}^1$ della sua struttura liscia standard, e introduciamo la mappa $\phi : \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1$ definita ponendo $\phi(t) = e^{2\pi i t}$.

Esempio 2.4.3 (Mappa liscia sull'n-toro).

La mappa $\varepsilon_n : \mathbb{R}^n \to \mathbf{T}^n$ definita ponendo $\varepsilon_n(x^1, \dots, x^n) = (e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n})$ è liscia per l'Esempio 2.4.2 e per la Proposizione 2.3.12.

Esempio 2.4.4 (Inclusione della n-sfera nello spazio euclideo $(n+1)$-dimensionale).

Consideriamo la n-sfera $\mathbf{S}^n$ con la sua struttura liscia standard;
mostriamo che la mappa di inclusione $\imath : \mathbf{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ è liscia.

È una funzione liscia in quanto, rispetto alle carte $(U_i^{\pm}, \pi_i|_{U_i^{\pm}})$ indicate nell'Esempio 2.2.8, troviamo

$$\imath \circ \pi_i|_{U_i^{\pm}}^{-1} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}, x^i, \dots, x^n)$$

che è liscia nel dominio $B^n(\mathbf{0}, 1)$.

Esempio 2.4.5 (Proiezione nello spazio proiettivo).

La proiezione $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n$ utilizzata per definire $\mathbb{RP}^n$ è liscia;
infatti, date le carte (U_i, ϕ_i) indicate nell'Esempio 2.2.9 abbiamo che

$$\phi_i \circ \pi : (x^1, \dots, x^{n+1}) \overset{\pi}{\mapsto} [x^1, \dots, x^{n+1}] \overset{\phi_i}{\mapsto} \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right)$$

che è liscia nel dominio $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Esempio 2.4.6 (Restrizione della proiezione nello spazio proiettivo alla n-sfera).

Data la mappa $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n$ nell'Esempio 2.4.5, la restrizione $\pi|_{\mathbf{S}^n} : \mathbf{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ è ancora liscia.

> Infatti, essa è pari alla composizione di mappe lisce $\pi \circ \iota$, dove ι è l'inclusione dell'Esempio 2.4.4.