2.3 - Mappe Lisce

L'obiettivo principale nell'introdurre una struttura differenziabile su una varietà topologica era quello di consentire la definizione di funzioni lisce sulle varietà e di mappe lisce tra varietà;
adesso porteremo a termine questo piano.

Funzioni e mappe

Sebbene i termini "funzione" e "mappa" siano tecnicamente sinonimi, nello studio delle varietà lisce è spesso conveniente fare una leggera distinzione tra di essi.

Riserveremo infatti il termine "*funzione*" per indicare una mappa il cui codominio è $\mathbb{R}$ (detta *funzione scalare*) o $\mathbb{R}^k$ per qualche $k > 1$ (detta *funzione vettoriale*).
Il termine "*mappa*" si riferisce invece a una mappa tra due varietà arbitrarie.

Funzioni lisce su varietà

Cominciamo definendo le funzioni lisce scalari e vettoriali, per poi generalizzare il concetto a mappe lisce tra varietà.

> ⌘ **Definizione 2.3.1 (Funzione liscia).**
>
> Sia M sia una n-varietà liscia;
> sia k un numero intero non negativo.
>
> Una funzione $f : M \to \mathbb{R}^k$ si dice *liscia* quando, per ogni $p \in M$, esiste una carta (U, φ) di M che possiede p e tale che la funzione composta $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$ sia liscia nel senso dell'analisi ordinaria.

Il caso speciale più importante è quello delle funzioni lisce a valori reali $f : M \to \mathbb{R}$;
l'insieme di tutte queste funzioni è indicato con $C^\infty(M)$.

Poiché la somma puntuale e i multipli costanti di funzioni lisce sono lisce, $C^\infty(M)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$;
inoltre, anche il prodotto puntuale di funzioni lisce è una funzione liscia, e rende $C^\infty(M)$ un'algebra commutativa e associativa.

Facciamo vedere alcuni fatti di base su questa definizione di funzione liscia.

Proposizione 2.3.2 (Proprietà notevoli della liscezza).

Sia M una n-varietà liscia.

Si hanno i seguenti fatti:

- Per ogni carta (U, φ) di M, la mappa coordinata $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ è liscia su U (dotato della struttura di sottovarietà aperta di M);
- Se $f : M \to \mathbb{R}^k$ è una funzione liscia, automaticamente $f \circ \varphi^{-1}$ è liscia (nel senso dell'analisi ordinaria) per ogni carta (U, φ) di M.

Dimostrazione

Mostriamo il primo punto.

Fissiamo $p \in U$ e consideriamo come carta di U la stessa (U, φ);
abbiamo che $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi(U)}$, che è evidentemente liscia.

Mostriamo ora il secondo punto.

Consideriamo una funzione $f : M \to \mathbb{R}^k$ liscia, e una carta (U, φ) di M;
per mostrare che $f \circ \varphi^{-1}$ è liscia (nel senso ordinario), fissiamo un punto $p \in U$ e consideriamo $\varphi(p) \in \varphi(U)$.

Essendo f liscia per ipotesi, esiste una carta (V_p, ψ_p) di M con $f \circ \psi_p^{-1}$ liscia (nel senso ordinario);
essendo anche $\psi_p \circ \varphi^{-1}$ liscia per compatibilità, ne viene che la composizione $(f \circ \psi_p^{-1}) \circ (\psi_p \circ \varphi^{-1}) = (f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap V_p)}$ è liscia (nel senso ordinario) su $\varphi(U \cap V_p)$.

Allora, $f \circ \varphi^{-1}$ è liscia (nel senso ordinario) su $\varphi(U \cap V_p) \ni \varphi(p)$ per ogni $p \in U$, dunque su tutto il dominio $\varphi(U)$.

■

Notiamo che il secondo punto di questa proposizione significa che la *liscezza di una funzione non dipende dalla carta di coordinate*;
in altri termini, per vedere se una funzione $f : M \to \mathbb{R}^k$ è liscia basta considerare per ogni $p \in M$ una qualunque carta (U, φ) di M contenente p, e verificare che $f \circ \varphi^{-1}$ sia liscia nel senso ordinario.

Mostriamo ora che la liscezza di una funzione generalizza la liscezza nel senso ordinario.

Proposizione 2.3.3 (Liscezza di una funzione rispetto all'analisi ordinaria).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Una funzione $f : U \to \mathbb{R}^k$ è liscia nel senso della Definizione 2.3.1 se e solo se è liscia nel senso dell'analisi ordinaria.

Dimostrazione

Ricordiamo che, a meno che non specifichiamo diversamente, dotiamo $\mathbb{R}^n$ della struttura differenziabile standard (Esempio 2.2.2) e diamo ai suoi aperti la struttura di sottovarietà aperta (Esempio 2.2.6).

Supponiamo dapprima f liscia nel rispetto alla Definizione 2.3.1, e fissiamo $p \in U$.
Per ipotesi esiste una carta (V_p, φ_p) di U che possiede p, tale che $f \circ \varphi_p^{-1}$ sia liscia nel senso dell'analisi ordinaria.

Come altra carta di U consideriamo (U, id_U);
per compatibilità abbiamo che $\varphi_p \circ \mathrm{id}_U^{-1} = \varphi_p$ è liscia su V_p nel senso ordinario.

Allora, la mappa $(f \circ \varphi_p^{-1}) \circ \varphi_p = f|_{V_p}$ è liscia nel senso ordinario;
cioè, f è liscia su V_p per ogni $p \in U$ da cui segue che f è liscia su tutto U.

Viceversa, supponiamo f liscia nel senso ordinario, e come carta di U consideriamo nuovamente (U, id_U);
abbiamo che $f \circ \mathrm{id}_U^{-1} = f$ è liscia nel senso ordinario per ipotesi, per cui f è liscia anche nel senso della Definizione 2.3.1.

■

Rappresentazione di funzioni in coordinate

Consideriamo una varietà liscia M.
Data una funzione $f : M \to \mathbb{R}^k$ e una carta (U, φ) di M, la funzione $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$ è denominata *rappresentazione in coordinate* di f rispetto a (U, φ).

Secondo la Definizione 2.3.1, f è liscia se e solo se la sua rappresentazione in coordinate è liscia rispetto a qualche carta di M intorno a ogni punto; grazie alla Proposizione 2.3.2 abbiamo che le funzioni lisce hanno rappresentazioni in coordinate lisce rispetto a ogni carta di M.

Prendiamo ad esempio la funzione scalare reale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, e consideriamo le coordinate polari su, ad esempio, l'insieme

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Il cambio a coordinate polari è dato dalla funzione

$$\varphi : \; U \to \mathbb{R}^+ \times \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\;:\quad (x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}\,,\; \arctan(y/x) \right)$$

che è biunivoca e ha inversa $\varphi^{-1} : (\rho,\theta) \mapsto \big(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)\big)$;
essendo φ un diffeomorfismo, la carta (U,φ) fa parte della struttura differenziabile standard di $\mathbb{R}^2$, e la rappresentazione in coordinate di f rispetto a (U,φ) è data da $\hat{f} : (\rho,\theta) \mapsto \rho^2$, che è liscia.

In linea con la nostra pratica di utilizzare coordinate locali per identificare un sottoinsieme aperto di una varietà con un sottoinsieme aperto dello spazio euclideo, nei casi in cui non causa confusione spesso non distinguiamo nemmeno $\hat{f}$ e f, e invece diciamo qualcosa come "f è liscia su U perché la sua rappresentazione in coordinate $f(\rho,\theta) = \rho^2$ è liscia".

Mappe lisce tra varietà

La nozione di liscezza di funzione si estende facilmente a mappe tra varietà.

⌘ Definizione 2.3.4 (Mappa liscia).

Siano M e N varietà lisce.

Una mappa $F : M \to N$ si dice *liscia* quando, per ogni punto $p \in M$ esistono una carta (U,φ) di M contenente p e una carta (V,ψ) di N contenente $F(p)$, dimodoché $F(U) \subseteq V$ e la mappa composta $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ sia liscia (nel senso dell'analisi ordinaria).

Osservazione: Notiamo che la liscezza della Definizione 2.3.1 può essere vista come un caso particolare di questa, con le posizioni $N = \mathbb{R}^k$ e $(V, \psi) = (\mathbb{R}^k, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k})$.

La prima importante proprietà delle mappe lisce è, come ci si potrebbe aspettare, la continuità.

Proposizione 2.3.5 (Continuità delle mappe lisce).

Siano M e N varietà lisce;
sia $F : M \to N$ una mappa liscia.

F è continua.

Dimostrazione

Fissiamo $p \in M$, e mostriamo che F è continua in p.

Per ipotesi di liscezza di F, esistono (U, φ) carta di M contenente p e (V, ψ) carta di N contenente $F(p)$, con $F(U) \subseteq V$ e $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ liscia nel senso ordinario, quindi continua.

Poiché $\varphi : U \to \varphi(U)$ e $\psi^{-1} : V \to \psi^{-1}(V)$ sono omeomorfismi, segue la continuità di

$$\psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi : U \to V,$$

che coincide con $F_{|U}$;
ne viene che $F|_U$, dunque F, è continua in p.

■

Nota: L'inclusione $F(U) \subseteq V$ nella definizione di liscezza serve a rendere $\psi \circ F$ ben definita su tutto U;
in effetti, questo requisito è necessario affinché la liscezza implichi automaticamente la continuità.
(L'Esercizio 2.3.14 illustra cosa può andare storto se questo requisito viene omesso.)

Ci sono altri modi di caratterizzare la liscezza di mappe tra varietà; nella seguente proposizione ne diamo due.

Proposizione 2.3.6 (Prima caratterizzazione della liscezza).

Siano M e N varietà lisce;
sia $F : M \to N$ una mappa.

I seguenti fatti sono equivalenti:

1. F è liscia;
2. Per ogni $p \in M$, esistono una carta (U, φ) di M contenente p e una carta (V, ψ) di N contenente $F(p)$, dimodoché $U \cap F^{-1}(V)$ sia aperto in M e la mappa composta $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi\big(U \cap F^{-1}(V)\big) \to \psi(V)$ sia liscia nel senso dell'analisi ordinaria;

Dimostrazione

Se F è liscia, segue il punto **2.** direttamente dalla definizione di liscezza;
per ogni $p \in M$ prendiamo una carta (U, φ) di M e una carta (V, ψ) di N come nella Definizione 2.3.4 di liscezza, e avendo $F(U) \subseteq V$ abbiamo $U \cap F^{-1}(V) = U$, aperto in M.

Supponiamo ora che valga il punto **2.**

Intanto, F è continua;
infatti, per ogni $p \in M$ prendiamo carte (U, φ) e (V, ψ) come nel punto **2.**, e deduciamo la continuità di $\psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$, che coincide con F ristretta a un intorno di p.

Se ora prendiamo l'aperto $W = U \cap F^{-1}(V)$ e consideriamo la carta $(W, \varphi|_W)$ di M che contiene ancora p, la rappresentazione in coordinate $\psi \circ F \circ \varphi|_W^{-1} = (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(W)}$ è ancora liscia, e si ha $F(W) \subseteq V$;
dunque, F è liscia nel senso della Definizione 2.3.4, per cui vale il punto **1**.

■

Vediamo ora si comporta la liscezza con le restrizioni ad insiemi aperti.

Proposizione 2.3.7 (Liscezza è una proprietà locale).

Siano M e N varietà lisce;
sia $F : M \to N$ una mappa.

Si hanno i seguenti fatti:

- Se F è liscia, allora la restrizione $F|_U$ è liscia per ogni $U \subseteq M$ aperto;
- Se ogni punto $p \in M$ ha un intorno U_p tale che la restrizione $F|_{U_p}$ è liscia, allora F è liscia.

Dimostrazione

Proviamo il primo punto.
Supponiamo F liscia, prendiamo $U \subseteq M$ aperto e fissiamo $p \in U$.
Per liscezza, prendiamo una carta (V, φ) di M contenente p e una carta (W, ψ) di N contenente $F(p)$, soddisfacenti la Definizione 2.3.4 di liscezza.

Come carta di U prendiamo allora $(V \cap U, \varphi|_{V\cap U})$;
si ha $F(V \cap U) \subseteq F(U) \subseteq W$, e la mappa $\psi \circ F \circ \varphi|_{V\cap U}^{-1} = (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(V\cap U)}$ è liscia nel senso ordinario, essendo restrizione di $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, liscia nel senso ordinario per scelta di ψ e φ, ad un sottoinsieme aperto di $\varphi(V)$.

Proviamo il secondo punto.
Per ogni $p \in M$ prendiamo una carta (V_p, φ_p) di U_p contenente p e una carta (W_p, ψ_p) di N contenente $F(p)$, soddisfacenti la Definizione 2.3.4 di liscezza per $F|_{U_p}$.

Poiché le carte la struttura di sottovarietà aperta è contenuta nella struttura liscia di M (Esempio 2.2.6), (V_p, φ_p) è anche una carta di M; allora, le carte indicate soddisfano la Definizione 2.3.4 di liscezza per F in corrispondenza a p.

■

Il corollario che segue è essenzialmente solo una riformulazione secondo punto della proposizione appena enunciata, ma fornisce un modo altamente utile per costruire mappe lisce.

Lemma 2.3.8 (Incollamento di mappe lisce).

Siano M e N varietà lisce;
sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di M.
Supponiamo che per ogni $\alpha \in A$, ci sia data una mappa liscia $F_\alpha : U_\alpha \to N$ tale che le mappe coincidano sulle intersezioni: $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ per ogni α e β.

Esiste allora un'unica mappa (liscia) $F : M \to N$ tale che $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$.

Dimostrazione

Basta osservare che tale F è unica e ben definita per le ipotesi che abbiamo dato, ed è liscia per il secondo punto della Proposizione 2.3.7.

■

Rappresentazione di mappe in coordinate

Come nel caso delle funzioni, data una mappa liscia $F : M \to N$ e due carte (U, φ) e (V, ψ) di M e N rispettivamente, chiamiamo $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi\big(U \cap F^{-1}(V)\big) \to V$ la *rappresentazione in coordinate* di F rispetto alle carte date.

Anche nel caso più generale delle mappe, abbiamo che la liscezza non dipende dalla carta di coordinate:

Proposizione 2.3.9 (Liscezza di una mappa non dipende dalle coordinate).

Siano M e N varietà lisce;
sia $F : M \to N$ una mappa liscia.

Per ogni (U, φ) carta di M e (V, ψ) carta di N, la rappresentazione in coordinate $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi\big(U \cap F^{-1}(V)\big) \to \psi(V)$ è liscia (nel senso dell'analisi ordinaria).

Dimostrazione

Fissiamo (U, ψ) carta di M e (V, ψ) carta di N.
Per ogni $p \in U \cap F^{-1}(V)$, prendiamo poi (U_p, φ_p) carta di M contenente p e (V_p, ψ_p) carta di N contenente $F(p)$, come nella Definizione 2.3.4 di liscezza per F in corrispondenza a p.

Sappiamo che $F_p = \psi_p \circ F \circ \varphi_p^{-1} : \varphi_p(U_p) \to \psi_p(V_p)$ è liscia (nel senso ordinario);
sfruttando la compatibilità delle carte, deduciamo la liscezza (nel senso ordinario) della mappa

$$(\psi \circ \psi_p^{-1}) \circ F_p \circ (\varphi_p \circ \varphi^{-1})$$

che coincide con $\hat{F}$ ristretta ad un certo intorno di $\varphi(p)$.

Pertanto, $\hat{F}$ è liscia in $\varphi(p)$ per ogni $p \in U \cap F^{-1}(V)$, dunque su tutto il dominio.

■

Come con le funzioni a valori reali o vettoriali, una volta scelti specifici sistemi di coordinate locali sia nel dominio che nel codominio, possiamo spesso ignorare la distinzione tra F e $\hat{F}$.

Applichiamo la proposizione appena enunciata per mostrare un'altra caratterizzazione delle mappe lisce.

Proposizione 2.3.10 (Seconda caratterizzazione della liscezza).

Siano M e N varietà lisce;
sia $F : M \to N$ una mappa.

I seguenti fatti sono equivalenti:

1. F è liscia;
2. F è continua e esistono atlanti lisci $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ e $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ di M e N rispettivamente dimodoché, per ogni α e β, la mappa $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\big(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)\big) \to \psi_\beta(V_\beta)$ sia liscia nel senso dell'analisi ordinaria.

Dimostrazione

Intanto, il punto **2**. implica immediatamente il punto **2**. della Proposizione 2.3.6, per cui F è liscia.

Viceversa, si supponga F liscia;
allora, per la Proposizione 2.3.9 ogni carta (U, φ) di M e ogni carta (V, ψ) di N rendono la rappresentazione in coordinate $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ liscia.
Da questo deduciamo allora il punto **2**.

■

Alcune classi di mappe lisce

Esaminiamo ora alcune classi semplici di mappe lisce.

Proposizione 2.3.11 (Alcune classi di mappe lisce).

Siano M, N e P varietà lisce.

Si hanno i seguenti fatti:

1. Ogni mappa costante $c : M \to N$ è liscia;
2. L'identità $\mathrm{id}_M : M \to M$ è liscia;
3. Se $U \subseteq M$ è una sottovarietà aperta, allora l'inclusione $\imath : U \to M$ è liscia;
4. Se $F : M \to N$ e $G : N \to P$ sono lisce, allora anche la composizione $G \circ F : M \to P$ è liscia.

Dimostrazione

Dimostriamo il punto **1**.
Prendiamo una carta (V, ψ) di N contenente c, e per ogni $p \in M$ prendiamo una carta (U, φ) di M contenente p; chiaramente, $c(U) = \{c\} \subseteq V$.
La rappresentazione in coordinate è $\psi \circ c \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$, ed è la funzione costante $\psi(c)$, che è liscia nel senso ordinario.

Dimostriamo il punto **2**.
Per ogni $p \in M$ prendiamo una carta (U, φ) di M contenente p; chiaramente, $\mathrm{id}_M(U) = U$.
La rappresentazione in coordinate è $\varphi \circ \mathrm{id}_M \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \varphi(U)$, ed è la funzione identità $\mathrm{id}_{\varphi(U)}$, che è liscia nel senso ordinario.

Dimostriamo il punto **3**.
Per ogni $p \in U$ prendiamo una carta (U, φ) di U (che è anche di M avendo consideranto U come sottovarietà aperta) contenente p; chiaramente, $\imath(U) = U$.
La rappresentazione in coordinate è $\varphi \circ \imath \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \varphi(U)$, ed è la funzione identità $\mathrm{id}_{\varphi(U)}$, che è liscia nel senso ordinario.

Dimostriamo il punto **3**.
Per ogni $p \in M$ prendiamo una carta (W, ψ) di P contenente $G(F(p))$;

per continuità di G (Proposizione 2.3.5) esiste una carta (V, ϕ) di N contenente $F(p)$, tale che $G(V) \subseteq W$;
per continuità di F esiste una carta (U, φ) di M contenente p, tale che $F(U) \subseteq V$.

Grazie alla Proposizione 2.3.9 sappiamo che $\psi \circ G \circ \phi^{-1} : \phi(V) \to \psi(W)$ e $\phi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \phi(V)$ sono lisce (nel senso ordinario);
dunque, la loro composizione, pari a $\psi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(W)$, è anch'essa liscia nel senso ordinario.

■

Proposizione 2.3.12 (Liscezza rispetto alle varietà prodotto).

Siano $M, N_1, \dots, N_k$ varietà lisce.
Per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$, sia $\pi_i : N_1 \times \dots \times N_k \to N_i$ la proiezione canonica su N_i.

π_i è una mappa liscia per ogni i.

Inoltre, una mappa $F : M \to N_1 \times \dots \times N_k$ è liscia se e solo se ogni mappa componente $F_i = \pi_i \circ F : M \to N_i$ è liscia.

Dimostrazione

Vediamo intanto che π_i è liscia.

Fissiamo $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k) \in N_1 \times \cdots \times N_k$, e per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$ prendiamo una carta (V_i, ψ_i) di N_i contenente q_i.
Come carta di $N_1 \times \cdots \times N_k$ contenente $\mathbf{q}$ consideriamo $(V_1 \times \cdots \times V_k, \psi_1 \times \cdots \times \psi_k)$; chiaramente, si ha $\pi(V_1 \times \cdots \times V_k) = V_i$.

La rappresentazione in coordinate è data da

$$\psi_i \circ \pi_i \circ (\psi_1 \times \cdots \times \psi_k)^{-1} = \psi_i \circ \pi_i \circ (\psi_1^{-1} \times \cdots \times \psi_k^{-1}) : \psi_1(V_1) \times \cdots \times \psi_k(V_k) \to \psi_i(V_i)$$

che non è altro che la proiezione $\tilde{\pi}_i$ del dominio sull'i-esimo fattore, ed è liscia nel senso ordinario.

Avendo acquisito la prima parte, possiamo allora dedurre subito che F liscia implica F_i lisce, grazie al punto **4.** della Proposizione 2.3.11.

Resta da vedere che le F_i lisce implicano F liscia.

Fissiamo $p \in M$, e poniamo $\mathbf{q} = F(p)$; per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$ prendiamo una carta (V_i, ψ_i) di N_i contenente q_i;
la liscezza delle F_i, la loro continuità (Proposizione 2.3.5) e la Proposizione 2.3.9 permettono di prendere una singola carta (U, φ) di M contenente p dimodoché $F_i(U) \subseteq V_i$ per ogni i e le rappresentazioni in coordinate $\psi_i \circ F_i \circ \varphi$ siano tutte lisce nel senso ordinario.

Considerando ora la carta $(V_1 \times \dots \times V_k, \psi_1 \times \dots \times \psi_k)$ di $N_1 \times \dots \times N_k$ contenente $\mathbf{q}$,
abbiamo che $F(U) \subseteq V_1 \times \dots \times V_k$ e la rappresentazione in coordinate $(\psi_1 \times \dots \times \psi_k) \circ F \circ \varphi^{-1}$ ha come componenti proprio le $\psi_i \circ F_i \circ \varphi$;
dunque, questa rappresentazione è anch'essa liscia nel senso ordinario, per cui F è liscia.

■

Proposizione 2.3.13 (Liscezza di mappe prodotto).

Siano $M_1, N_1, \dots, M_k, N_k$ varietà lisce;
per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$ sia $F_i : M_i \to N_i$ una mappa liscia.

Il prodotto $F_1 \times \dots \times F_k : M_1 \times \dots \times M_k \to N_1 \times \dots \times N_k$ è anch'esso una mappa liscia.

Dimostrazione

Fissato $i \in \{1, \dots, k\}$, la componente i-esima di $F_1 \times \dots \times F_k$ è data da $F_i \circ \pi_i$, dove $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \to M_i$ è la proiezione canonica sul primo fattore.

Per la Proposizione 2.3.12 e il punto **4.** della Proposizione 2.3.11 , troviamo che tali componenti sono lisce, dunque F è liscia.

■

Problemi ed esercizi

Esercizio 2.3.14 (Una funzione non continua, con rappresentazione in coordinate liscia).

Definiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Facciamo vedere che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, ci sono due carte (U, φ) e (V, ψ) di $\mathbb{R}$ (con la struttura liscia standard), contenenti x e $f(x)$ rispettivamente, tale che $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big) \to \psi(V)$ sia liscia nel senso dell'analisi ordinaria.

Se $x \geq 0$, sia $(U =]-1; +\infty[, \varphi = \mathrm{id}_U)$ e $\big(V = \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[, \psi = \mathrm{id}_V\big)$;
si ha $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : [0; +\infty[\to \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$ di legge $x \mapsto 1$, che dunque è liscia nel senso dell'analisi ordinaria.

Se $x < 0$, sia $(U = \mathbb{R}^-, \varphi = \mathrm{id}_U)$ e $\big(V = \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[, \psi = \mathrm{id}_V\big)$;
si ha $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^- \to \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ di legge $x \mapsto 0$, che dunque è liscia nel senso dell'analisi ordinaria.

Tuttavia, f non è continua in 0, dunque non può essere nemmeno liscia nel senso della Definizione 2.3.4.