

# 1 - Successioni Generalizzate e Limiti

## Successioni generalizzate

### ≡ Definizione: Relazione filtrante, insieme diretto

Sia  $D$  un insieme.

Sia  $\preceq$  una relazione d'ordine parziale su  $D$ .

$\preceq$  si dice **relazione filtrante** quando

$$\forall \alpha, \beta \in D, \exists \gamma \in D : \gamma \succeq \alpha \wedge \gamma \succeq \beta.$$

Data una relazione filtrante  $\preceq$  su  $D$ , l'insieme ordinato  $(D, \preceq)$  si dice **insieme diretto**.

### ≡ Definizione: Successione generalizzata

Sia  $(D, \preceq)$  un insieme diretto.

Sia  $X$  un insieme non vuoto.

Si dice **successione generalizzata** su  $X$  una funzione del tipo  $\varphi : D \rightarrow X$ .

Fissato  $\alpha \in D$ , l'elemento  $\varphi(\alpha)$  si denota con  $x_\alpha$ , e la successione generalizzata  $\varphi$  si denota con  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ .

Per indicare che il codominio della successione è  $X$ , si scrive  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ .

## Limiti e punti limite di successioni generalizzate

### ≡ Definizione: Limiti e punti limite di una successione generalizzata

Sia  $X$  uno spazio topologico.

Sia  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$  una successione generalizzata su  $X$ .

Sia  $x \in X$ .

$x$  si dice **limite** di  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$  quando

$\forall U$  intorno di  $x$ ,  $\exists \alpha_0 \in D : \forall \alpha \succeq \alpha_0, x_\alpha \in U$ .

In tal caso, si scrive  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ .

$x$  si dice **punto limite** di  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$  quando

$\forall U$  intorno di  $x$ ,  $\forall \alpha \in D : \exists \beta \succeq \alpha, x_\beta \in U$ .

### Q Osservazione: Unicità del limite

Non vale generalmente l'unicità del limite per successioni generalizzate.

Tuttavia, essa vale sotto le seguenti condizioni:

#### **Proposizione 1.1:** Limite di una successione generalizzata su uno spazio di Hausdorff è unico

Sia  $X$  uno spazio di Hausdorff.

Sia  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$  una successione generalizzata su  $X$ .

Siano  $x, y \in X$  due limiti per  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ .

Allora,  $x = y$ .

#### **Dimostrazione**

Si supponga per assurdo che  $x \neq y$ .

Essendo  $X$  di Hausdorff, esistono  $U$  intorno di  $x$  e  $V$  intorno di  $y$  tali che  $U \cap V = \emptyset$ .

Essendo  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ , in corrispondenza all'intorno  $U$  esiste  $\alpha_x \in D$  tale che  $x_\alpha \in U$  per ogni  $\alpha \succeq \alpha_x$ ;

essendo  $y = \lim_{\alpha} x_\alpha$ , in corrispondenza all'intorno  $V$  esiste  $\alpha_y \in D$  tale che  $x_\alpha \in V$  per ogni  $\alpha \succeq \alpha_y$ .

Per filtranza di  $\preceq$ , esiste  $\beta \succeq \alpha_x, \alpha_y$ .

Allora,  $x_\beta \in U$  e  $x_\beta \in V$ , il che è contraddittorio in quanto  $U \cap V = \emptyset$ .

■

### Q Osservazione: Relazione tra limiti e punti limiti

Un limite per una successione generalizzata è anche punto limite per questa.

Il viceversa generalmente non è vero.

## Caratterizzazioni di enti e proprietà topologiche tramite le successioni generalizzate

### Proposizione 1.2: Caratterizzazione della chiusura di un insieme in uno spazio topologico

Sia  $X$  uno spazio topologico.

Sia  $A \subseteq X$ .

Sia  $x \in X$ .

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1.  $x \in \overline{A}$ ;
2. Esiste una successione generalizzata  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq A$  tale che  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ .

### Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga che esista una successione generalizzata  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq A$  tale che  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ .

Sia  $U$  un intorno di  $x$ .

Per definizione di limite, esiste  $\alpha_0 \in D$  tale che  $x_\alpha \in U$  per ogni  $\alpha \succeq \alpha_0$ .

Poiché  $x_\alpha \in A$  per ogni  $\alpha \in D$  per ipotesi, si ha  $x_\alpha \in U \cap A$  per ogni  $\alpha \succeq \alpha_0$ , dunque  $U \cap A$ .

Allora,  $A \cap U \neq \emptyset$  per ogni  $U$  intorno di  $x$ , ossia  $x \in \overline{A}$ .

■

#### Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga che  $x \in \overline{A}$ .

Sia  $\mathcal{U}$  la famiglia degli intorni di  $x$  ordinata con  $\subseteq$ .

$\subseteq$  è filtrante; infatti, fissati  $U, V \in \mathcal{U}$ , si ha  $U \cup V \in \mathcal{U}$  e  $U, V \subseteq U \cup V$ .

Essendo  $x \in \overline{A}$  per ipotesi, si ha  $U \cap A \neq \emptyset$  per ogni  $U \in \mathcal{U}$ .

Dunque, per ogni  $U \in \mathcal{U}$ , sia  $x_U$  tale che  $x_U \in U \cap A$ .

Si consideri la successione generalizzata  $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ .

Si ha  $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}} \subseteq A$  per come è stato definito  $x_U$ .

Inoltre, si ha  $x = \lim_U x_U$ . Infatti, per ogni intorno  $U$  di  $x$ , ossia per ogni  $U \in \mathcal{U}$ , si ha  $x_U \in U$  per definizione di  $x_U$ ;

allora,  $x_U \in V$  per ogni  $V \in \mathcal{U}$  tale che  $V \supseteq U$ .

■

#### Proposizione 1.3: Caratterizzazione della finezza di topologie

Sia  $X \neq \emptyset$  uno spazio topologico.

Siano  $\tau_1, \tau_2$  due topologie su  $X$ .

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1.  $\tau_1$  è meno fine di  $\tau_2$ , ossia  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ;
2. Per ogni successione generalizzata  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$  e per ogni  $x \in X$ , si ha  
$$x = \lim_{\alpha} x_\alpha \text{ in } \tau_2 \implies x = \lim_{\alpha} x_\alpha \text{ in } \tau_1.$$

### Osservazioni preliminari

$\tau_1$  è meno fine di  $\tau_2$ , se e solo se ogni chiuso secondo  $\tau_1$  è chiuso secondo  $\tau_2$ .

### Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)

Si supponga  $\tau_1$  meno fine di  $\tau_2$ .

Sia  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$  una successione generalizzata.

Sia  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$  in  $\tau_2$ ;

si provi che  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$  in  $\tau_1$ .

Sia  $U$  un intorno di  $x$  secondo  $\tau_1$ .

Allora, esso è intorno di  $x$  anche secondo  $\tau_2$  per ipotesi;

dunque, per definizione di  $x$ ,

$\exists \alpha_0 \in D : \forall \alpha \succeq \alpha_0, x_\alpha \in U$ .

Pertanto,  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$  in  $\tau_1$ .

■

### Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Intanto, si denoti con  $\text{cl}_\tau(A)$  la chiusura dell'insieme  $A$  rispetto alla topologia  $\tau$ .

Sia  $C$  un insieme chiuso secondo  $\tau_1$ .

Sia  $x \in \text{cl}_{\tau_2}(C)$ .

Si provi che  $x \in C$ , mostrando così che  $\text{cl}_{\tau_2}(C) \subseteq C$ , ossia  $C$  è chiuso secondo  $\tau_2$ .

Per la [proposizione 1.2], esiste  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$  tale che  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$  in  $\tau_2$ .

Per ipotesi, segue allora  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$  in  $\tau_1$ .

Pertanto,  $x \in \text{cl}_{\tau_1}(C)$  ossia, essendo  $C$  chiuso secondo  $\tau_1$  per definizione,  $x \in C$ , come volevasi dimostrare.

■

#### **Proposizione 1.4: Caratterizzazione della compattezza**

Sia  $X$  uno spazio topologico.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1.  $X$  è compatto;
2. Ogni successione generalizzata in  $X$  ammette almeno un punto limite.

#### **Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)**

Si supponga  $X$  compatto.

Sia  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$  una successione generalizzata in  $X$ .

Si supponga per assurdo che ogni  $x \in X$  non è punto limite per  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ .

Cioè, per ogni  $x \in X$ , esistono  $U_x$  intorno aperto di  $x$  e  $\alpha_x \in D$  tali che  $x_\beta \notin U_x$  per ogni  $\beta \succeq \alpha_x$ .

Si consideri la famiglia  $\{U_x \mid x \in X\}$ ; essa è un ricoprimento di aperti per  $X$  in quanto  $x \in U_x$  per ogni  $x \in X$ . Per compattezza di  $X$ , esistono allora  $x_1, \dots, x_n \in X$  tali che  $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = X$ .

Si considerino  $\alpha_{x_1}, \dots, \alpha_{x_n}$ ; per filtranza di  $\preceq$ , esiste  $\beta \in D$  tale che  $\beta \succeq \alpha_{x_i}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Ma allora, per definizione di  $\alpha_{x_1}, \dots, \alpha_{x_n}$ , essendo  $\beta$  successivo a ognuno di questi si ha  $x_\beta \notin U_{x_i}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , segue allora  $x_\beta \notin \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ ;

ciò risulta contraddittorio in quanto  $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = X$ , e  $x_\beta \in X$  in quanto  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ .

■

#### Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga che ogni successione generalizzata in  $X$  ammetta almeno un punto limite.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di chiusi con la proprietà d'intersezione finita.

Sia  $\mathcal{G}$  la famiglia delle sottofamiglie finite di  $\mathcal{F}$  con la relazione d'ordine  $\subseteq$ ;  
essa è filtrante in quanto, fissati  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{G}$ , si ha  $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \in \mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ .

Poiché  $\mathcal{F}$  soddisfa la proprietà d'intersezione finita, per ogni  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}$  si ha  $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ ;

Per ogni  $G \in \mathcal{G}$ , sia dunque  $x_G \in \bigcap \mathcal{G}$ .

Si consideri la successione generalizzata  $\{x_G\}_{G \in \mathcal{G}} \subseteq X$ .

Per ipotesi, esiste  $x^* \in X$  tale da essere un punto limite di  $\{x_G\}_{G \in \mathcal{G}}$ .

Si provi che  $x^* \in \bigcap \mathcal{F}$ .

Sia  $C \in \mathcal{F}$ ; si provi che  $x^* \in C$ .

Sia  $U$  un intorno di  $x^*$ ;

si ha  $\{C\} \in \mathcal{G}$  essendo sottofamiglia finita di  $\mathcal{F}$ .

Per definizione di  $x^*$  quale punto limite di  $\{x_G\}_{G \in \mathcal{G}}$ , esiste  $G \in \mathcal{G}$  con  $G \supseteq \{C\}$ , ossia  $C \in G$ , tale che  $x_G \in U$ .

Essendo  $x_G \in \bigcap \mathcal{G}$  per definizione e  $C \in G$ , si ha anche  $x_G \in C$ .

Dunque,  $x_g \in U \cap C$ .

Allora,  $U \cap C \neq \emptyset$  per ogni  $U$  intorno di  $x^*$ , ossia  $x^* \in \overline{C}$ .

Essendo  $C$  chiuso, segue  $x^* \in C$ , come volevasi dimostrare.



### **Proposizione 1.5: Caratterizzazione della continuità**

Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici.

Sia  $x \in X$ .

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1.  $f$  è continua in  $x$ ;
2. Per ogni successione generalizzata  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$  convergente a  $x$ , si ha  $f(x) = \lim_{\alpha} f(x_\alpha)$ .

#### **Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)**

Si supponga  $f$  continua in  $x$ .

Sia  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$  una successione generalizzata convergente a  $x$ .

Sia  $V$  un intorno di  $f(x)$ .

Per continuità di  $f$ , esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che  $f(U) \subseteq V$ .

Poiché  $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$  per ipotesi, esiste  $\alpha_0 \in D$  tale che  $x_\alpha \in U$  per ogni  $\alpha \succeq \alpha_0$ .

Essendo  $f(U) \subseteq V$ , si ha allora  $f(x_\alpha) \in V$  per ogni  $\alpha \succeq \alpha_0$ .

Ne segue allora che  $f(x) = \lim_{\alpha} f(x_\alpha)$ .





### ☑ Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga che valga quanto dichiarato nel punto 2.

Si supponga per assurdo che  $f$  non sia continua in  $x$ ;

cioè, esiste  $\tilde{V}$  intorno di  $f(x)$  tale che, per ogni  $U$  intorno di  $x$ ,  $f(U) \not\subseteq \tilde{V}$ .

Per ogni intorno  $U$  di  $x$ , sia dunque  $x_U \in U$  tale che  $f(x_U) \notin \tilde{V}$ .

Sia  $\mathcal{U}$  la famiglia degli intorni di  $x$  con la relazione d'ordine  $\subseteq$ , che è filtrante.

Si consideri quindi la successione generalizzata  $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ .

Si ha  $x = \lim_U x_U$ ;

infatti, per ogni  $U$  intorno di  $x$ , ossia per ogni  $U \in \mathcal{U}$ , si ha  $x_U \in U$ , dunque  $x_U \in V$  per ogni  $V \in \mathcal{U}$  con  $V \supseteq U$ .

Allora, per ipotesi si ha  $f(x) = \lim_U f(x_U)$ .

Tuttavia ciò contraddice il fatto che, in corrispondenza all'intorno  $\tilde{V}$  di  $f(x)$ , si ha  $f(x_U) \notin \tilde{V}$  per ogni  $U \in \mathcal{U}$  per definizione di  $x_U$ .

■

## Minimo e massimo limite per successioni generalizzate

### ≡ Definizione: Limite minimo e limite massimo di una successione generalizzata

Sia  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq \mathbb{R}$  una successione generalizzata in  $\mathbb{R}$ .

Si dice **limite minimo** di  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$  l'elemento  $\liminf_{\alpha} x_\alpha = \sup_{\alpha \in D} \inf_{\beta \geq \alpha} x_\beta$ .

Si dice **limite massimo** di  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$  l'elemento  $\limsup_{\alpha} x_\alpha = \inf_{\alpha \in D} \sup_{\beta \geq \alpha} x_\beta$ .

