1.3 - Varietà Topologiche come Spazi Quoziente

In questa sezione discuteremo le varietà topologiche, ottenute come *spazi topologici quoziente*.

Il primo esempio è lo *spazio proiettivo* (reale);
il secondo, tecnicamente più difficile da definire rispetto a ogni esempio incontrato finora, è la *Grassmanniana*, composta da tutti i k-piani che passano per l'origine in $\mathbb{R}^n$, con $n > k$, che sarà trattata più approfonditamente in seguito.

Entrambi gli esempi, difatti il primo è un caso particolare del secondo, si ottengono come insiemi quoziente modulo una certa relazione di equivalenza definita su una varietà più semplice, in cui la topologia è definita in un certo modo.

Spazi topologici quoziente

Vediamo quindi come definire la topologia sull'insieme quoziente di uno spazio topologico X modulo una relazione di equivalenza $\sim$ su X.

Indichiamo con $[x] = \{y \in X \,:\, y \sim x\}$ la classe di equivalenza di x;
dato un sottoinsieme $A \subseteq X$, indichiamo con $[A]$ l'insieme $\bigcup\limits_{a \in A} [a]$, cioè l'insieme di tutti gli elementi equivalenti a qualche elemento di A.

Denotiamo con $X/\sim$ l'insieme quoziente, costituito delle classi di equivalenza, e indichiamo con $\pi : X \to X/\sim$ la *proiezione canonica*, che associa ad ogni $x \in X$ la sua classe di equivalenza: $\pi(x) = [x]$.

> ⌘ **Definizione 1.3.1 (Topologia quoziente).**
>
> Sia X uno spazio topologico, e $\sim$ una relazione di equivalenza su X;
>
> Si definisce la *topologia quoziente* su $X/\sim$ dichiarando $V \subset X/\sim$ aperto quando $\pi^{-1}(V)$ è aperto in X.
>
> Lo spazio $X/\sim$ dotato di questa topologia prende il nome di *spazio quoziente* di X modulo $\sim$.

Segue quindi che la proiezione π è una funzione continua.

Esempio 1.3.2 ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$).

Come esempio semplice, prendiamo come spazio $\mathbb{R}$ e consideriamo $\mathbb{Z}$, l'insieme degli interi.

Definiamo la relazione $\sim$ su $\mathbb{R}$ dichiarando $x \sim y$ quando $x - y \in \mathbb{Z}$, e denotiamo con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ lo spazio quoziente associato.

Notiamo che questo spazio quoziente può essere naturalmente identificato con $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| = 1\}$, il cerchio unitario nel piano complesso; l'identificazione è data dall'omeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbf{S}^1 : [x] \mapsto e^{2\pi i x}$.

Quindi la proiezione canonica $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ si identifica con la mappa $\bar{\pi} : \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1 : \pi(x) = e^{2\pi i x}$.

Continuità su uno spazio quoziente

Consideriamo uno spazio X con una relazione di equivalenza $\sim$;
supponiamo che $f : X \to Y$ sia una funzione da X a un altro spazio topologico Y, *costante su ogni classe di equivalenza*.

Allora, essa induce la mappa ben definita $\overline{f} : X/\!\sim\, \to Y$ definita ponendo $\overline{f}([p]) = f(p)$ per $p \in S$;
in altri termini, si ha $f = \overline{f} \circ \pi$.

La seguente proposizione fornisce un criterio per stabilire se le funzioni indotte in questo modo sul quoziente sono continue.

Proposizione 1.3.3 (Continuità delle funzioni indotte sul quoziente).

Siano X e Y due spazi topologici, e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X;
sia $f : X \to Y$ una mappa costante su ogni classe di equivalenza di $\sim$.

La mappa indotta sul quoziente $\overline{f} : X/\!\sim\, \to Y : [p] \mapsto f(p)$ è continua se e solo se f è continua.

Dimostrazione

Se $\overline{f}$ è continua, la continuità di f si deduce dal fatto che $f = \overline{f} \circ \pi$, e π è continua.

Se f è continua, dato $A \subseteq Y$ aperto si ha $\overline{f}^{-1}(A)$ aperto in $X/\sim$, in quanto $\pi^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(A)\right) = f^{-1}(A)$ è aperto in X.

Relazioni aperte

In generale, uno spazio quoziente può non avere le proprietà di cui gode lo spazio originario.

Nel caso delle varietà, può quindi capitare che lo spazio quoziente di una varietà topologica non sia anch'esso una varietà topologica; perdipiù, in generale non disponiamo di buone condizioni affinché la proprietà di Hausdorff e di secondo-numerabilità passino al quoziente.

Fortunatamente, abbiamo più informazioni se ci restringiamo ad una categoria di relazioni di equivalenza, dette *aperte*.

⌘ Definizione 1.3.4 (Relazione aperta).

Sia X uno spazio topologico.

Una relazione di equivalenza $\sim$ su X è detta *aperta* quando, per ogni $A \subseteq X$ aperto, $[A]$ è aperto.

Diamo intanto un criterio per determinare se una relazione è aperta:

Lemma 1.3.5 (Condizione equivalente per relazioni aperte).

Sia X uno spazio topologico.

Una relazione di equivalenza $\sim$ su X è aperta se e solo se π è una mappa aperta (ossia manda aperti del dominio in aperti del codominio).

Dimostrazione

Sia $A \subseteq X$ aperto;
osserviamo che $[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$.

Dalla definizione di topologia quoziente su $X/\sim$ segue allora che $[A]$ è aperto se π è aperta e, viceversa, se $[A]$ è aperto allora $\pi(A)$ è aperto.

■

Tramite le relazioni aperte, possiamo vedere che la secondo-numerabilità passa sempre al quoziente, e possiamo esibire una condizione affinché la proprietà di Hausdorff passi anch'essa al quoziente.

Proposizione 1.3.6 (Secondo-numerabilità passando al quoziente).

Sia X uno spazio topologico a base numerabile;
sia $\sim$ una relazione di equivalenza aperta su X.

Allora, anche $X/\sim$ è a base numerabile.

Dimostrazione

Sia $\{U_i\}$ una base numerabile di aperti di X.

Dato $W \subseteq X/\sim$ aperto, abbiamo allora $\pi^{-1}(W) = \bigcup_j U_j$ per qualche sottofamiglia di $\{U_i\}$, e per il Lemma 1.3.5 possiamo scrivere
$W = \pi(\pi^{-1}(W)) = \bigcup_j \pi(U_j)$.

Ne segue quindi che $\{\pi(U_i)\}$ è una base di aperti per $X/\sim$, che è numerabile.

■

Proposizione 1.3.7 (Proprietà di Hausdorff passando al quoziente).

Sia X uno spazio topologico, e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X;
sia $\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$.

Se $X/\sim$ è di Hausdorff allora $\mathcal{R}$ è chiuso in $X \times X$.
Inoltre, supponendo $\sim$ è aperta, vale anche il viceversa:
se $\mathcal{R}$ è chiuso in $X \times X$, allora $X/\sim$ è di Hausdorff.

Dimostrazione

Supponiamo dapprima che $X/\sim$ sia di Hausdorff e mostriamo che $(X \times X) \setminus \mathcal{R}$ è aperto.

Fissiamo dunque $x, y \in X$ con $(x, y) \notin \mathcal{R}$, cioè $x \nsim y$;
ciò significa che $\pi(x) \neq \pi(y)$, per cui per ipotesi esistono aperti disgiunti $U \ni \pi(x)$ e $V \ni \pi(y)$ in $X/\sim$.

Definiamo allora gli aperti $A = \pi^{-1}(U)$ e $B = \pi^{-1}(V)$ in X, che posseggono x e y rispettivamente.

L'insieme aperto $A \times B \subseteq X \times X$ è allora un intorno di (x, y), e perdipiù è disgiunto da $\mathcal{R}$;
se infatti $A \times B$ intersecasse $\mathcal{R}$ in un certo punto (x', y'), si avrebbe $x' \sim y'$ e dunque $\underbrace{\pi(x')}_{\in U} = \underbrace{\pi(y')}_{\in V}$, in contrasto con il fatto che U e V sono insiemi disgiunti.

Ne segue che $(X \times X) \setminus \mathcal{R}$ è aperto, come volevamo.

Viceversa, supponiamo che $\sim$ sia una relazione aperta e che $\mathcal{R}$ sia chiuso, e consideriamo due punti distinti $\pi(x)$ e $\pi(y)$ in $X/\sim$;
si ha $x \nsim y$, ossia $(x, y) \notin \mathcal{R}$, per cui per ipotesi esiste un aperto $U \times V$ in $X \times X$ contenente (x, y) e disgiunto da $\mathcal{R}$.

Questo implica che $\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono intorni di $\pi(x)$ e $\pi(y)$ (sono aperti per il Lemma 1.3.5, essendo $\sim$ aperta), disgiunti in $X/\sim$; dunque, $X/\sim$ è Hausdorff.

■

Esempi notevoli di varietà topologiche come spazi quoziente

A questo punto siamo pronti per analizzare le varietà indicate all'inizio.

Esempio 1.3.8 (Spazio proiettivo reale).

Lo spazio proiettivo reale n-dimensionale, denotato da $\mathbb{RP}^n$ è definito come l'insieme dei sottospazi lineari 1-dimensionali di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Consideriamo l'operatore suriettivo $\mathbf{span} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n$, che invia $\mathbf{x}$ al sottospazio da esso generato;
nasce una relazione naturale $\sim$ su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, definita dichiarando $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ quando $\mathbf{span}(\mathbf{x}) = \mathbf{span}(\mathbf{y})$, ossia esiste $\lambda \neq 0$ tale che $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$.

Sappiamo in generale che il dominio di una funzione quozientato con la sua relazione naturale è in corrispondenza biunivoca con la sua immagine;
in questo caso, $\mathbf{span}$ induce una biiezione tra $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$ e $\mathbb{RP}^n$.

Allora, identificheremo i due insiemi, cosicché possiamo introdurre la topologia quoziente sullo spazio proiettivo.

Osserviamo che $\sim$ è una relazione aperta;
dato un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, l'insieme $[A] = \{\lambda\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in A, \lambda \neq 0\} = \bigcup_{\lambda \neq 0} \lambda A$ è infatti ancora aperto.

Inoltre, $\mathcal{R} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})^2 : \mathbf{x} \sim \mathbf{y}\}$ è un insieme chiuso in $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})^2$.
Basta infatti osservare che $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{rk}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix} \neq 2$, il che equivale a imporre che si annullino tutti i minori di ordine 2, i quali sono funzioni continue;
ciò corrisponde all'intersezione di controimmagini di 0 tramite questi minori, che dunque è chiusa.

In virtù di queste osservazioni, abbiamo automaticamente acquisite la secondo-numerabilità e la proprietà di Hausdorff per $\mathbb{RP}^n$.

Facciamo ora vedere che $\mathbb{RP}^n$ è localmente euclideo di dimensione n.

Al variare di $i \in \{1, \dots, n+1\}$, poniamo $A_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} : x^i \neq 0\}$ e $U_i = \pi(A_i)$ (dove π è la proiezione sul quoziente), dopodiché definiamo $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\phi_i[\mathbf{x}] = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$

Gli U_i sono aperti in $\mathbb{RP}^n$ perché π è una mappa aperta (Lemma 1.3.5), ed essi ricoprono tutto lo spazio.

Si verifica immediatamente che ϕ_i è ben definita e iniettiva, ossia $\phi_i[\mathbf{x}] = \phi_i[\mathbf{y}]$ se e solo se $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$;
osservando che $U_i = A_i/\sim$ e $\pi|_{A_i}$ è la proiezione canonica relativa a questo insieme quoziente, dalla Proposizione 1.3.3 segue che $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ è continua, e si vede anche che è suriettiva.

Infine, l'inversa ϕ_i^{-1} ha legge $(z^1, \dots, z^n) \mapsto \pi(z^1, \dots, z^{i-1}, 1, z^{i+1}, \dots, z^n)$, per cui è anch'essa continua.

Quindi, $\mathbb{RP}^n$ è una varietà topologica di dimensione n.

Lo spazio proiettivo rientra in una categoria più ampia di varietà topologiche, dette *Grassmanniane*.

Esempio 1.3.9 (Grassmanniana reale $\mathrm{Gr}(k, n)$).

La Grassmanniana $\mathbf{Gr}(k, n)$ è l'insieme di tutti i sottospazi vettoriali k-dimensionali di $\mathbb{R}^n$ o, equivalentemente, i k-piani di $\mathbb{R}^n$ passanti per l'origine.

Per definire una topologia su questo insieme, definiamo intanto $F(k, n)$ come l'insieme dei k-telai in $\mathbb{R}^n$. (un k-telaio è semplicemente una k-upla di elementi linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$)

Un k-telaio $(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ può essere identificato con la matrice $\mathbf{x}$ di tipo $k \times n$, le cui righe sono $x_1, \dots, x_k$.
poiché il rango di una matrice è il numero di righe linearmente indipendenti, segue dalla definizione di telaio che $F(k, n)$ si identifica in $\mathbb{R}^{k,n}$

nell'insieme delle matrici $k \times n$ di rango k.

Questo insieme è aperto in $\mathbb{R}^{k,n}$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}^{kn}$;

infatti, l'insieme delle matrici di rango $< k$ è chiuso (in quanto tale insieme si ottiene imponendo che i minori di ordine $\geq k$ siano tutti nulli, il che corrisponde a un sistema di equazioni lineari) e quindi l'insieme delle matrici di rango k è aperto.

Quindi $F(k,n)$ è una sottovarietà aperta di $\mathbb{R}^{k,n}$.

Ora, ogni k-telaio $(x_1, \dots, x_k)$ individua un k-piano, ossia un punto di $\mathbf{Gr}(k,n)$, ovvero lo spazio $\mathbf{span}(x_1, \dots, x_k)$;

pertanto, $\mathbf{span}$ è una mappa naturale da $F(k,n)$ a $\mathbf{Gr}(k,n)$.

Inoltre, due k-telai $x = (x_1, \dots, x_k)$ e $y = (y_1, \dots, y_k)$ individuano lo stesso k-piano se e solo se $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, dove A è una matrice non singolare $k \times k$.

È naturale definire allora la relazione $\sim$, dichiarando $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ quando $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ per qualche $A \in \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$;

in virtù di quanto osservato poc'anzi, possiamo quindi identificare $\mathbf{Gr}(k,n)$ con $F(k,n)/\sim$, e la mappa naturale $\mathbf{span}$ con π.

Ora, mostriamo che $\mathbf{Gr}(k,n)$, con la topologia dello spazio quoziente, ha la struttura di una varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$.

(Notiamo che nel caso $k=1$, allora $\mathbf{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbf{Gr}(k,n)$ diventa $\mathbb{RP}^{n-1}$)

La dimostrazione che $\sim$ è una relazione aperta è analoga all'^b8e44b;

la dimostrazione che $\mathbf{Gr}(k,n)$ è di Hausdorff è un po' più complicata, ma sorvoliamo anche questa essendo il ragionamento comunque simile.

Ci vogliamo invece soffermare sull'esibizione di un atlante per $\mathbf{Gr}(k,n)$.

Sia $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ un insieme di k elementi distinti di $\{1, \dots, n\}$.

Data una matrice $\mathbf{x} \in F(k,n)$, denotiamo con $\mathbf{x}_J$ la sottomatrice $k \times k$ ottenuta selezionando le colonne corrispondenti agli indici in J, mentre con $\mathbf{x}_{J'}$ indichiamo la sottomatrice complementare $k \times (n-k)$ ottenuta eliminando le colonne corrispondenti agli indici di J. di x.

A questo punto, denotiamo con A_J l'insieme aperto in $F(k,n)$ costituito dalle matrici $\mathbf{x}$ per cui $\mathbf{x}_J$ è non singolare, e poniamo $U_J = \pi(A_J)$ l'insieme aperto corrispondente in $\mathrm{Gr}(k,n)$.

Si trova che $\mathbf{y} \in A_J$ è equivalente esattamente a una matrice $\mathbf{x} \in A_J$ di tipo $k \times n$ in cui la sottomatrice $\mathbf{x}_J$ è la matrice identità $k \times k$;

ad esempio, se $J = \{1, 2, \dots, k\}$, allora $\mathbf{x}$ ha la forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{1,k+1} & \dots & x_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{2,k+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{k,k+1} & \dots & x_{k,n} \end{pmatrix}$$

(si trova nello specifico che $\mathbf{x} = \mathbf{y}_J^{-1} \cdot \mathbf{y}$)

Fatta questa osservazione, definiamo la mappa $\phi_J : U_J \to \mathbb{R}^{k,n-k}$ ponendo $[\mathbf{y}] \mapsto \mathbf{x}_{J'}$;

cioè, si invia la classe di $\mathbf{y}$ nella matrice ottenuta eliminando le k colonne corrispondenti a J nel rappresentante speciale $\mathbf{x}$.

Si fa vedere che ϕ_J è un omeomorfismo ben definito di U_J in $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ e che le carte (U_J, ϕ_J) al variare di J costituiscono un atlante, pertanto $\mathrm{Gr}(k,n)$ è una varietà C^∞.

Problemi ed esercizi

Esercizio 1.3.10 (Spazio proiettivo complesso).

Lo spazio proiettivo complesso di dimensione n, indicato con $\mathbb{CP}^n$, è l'insieme di tutti i $\mathbb{C}$-sottospazi complessi 1-dimensionali di $\mathbb{C}^{n+1}$.

Come nel caso reale, abbiamo la mappa naturale $\mathbf{span} : \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{CP}^n$ con la relazione associata $\sim$ definita dichiarando $\mathbf{z} \sim \mathbf{w}$ quando $\mathbf{span}(\mathbf{z}) = \mathbf{span}(\mathbf{w})$, ossia esiste $\alpha \neq 0$ complesso tale che $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{z}$;
questa induce una biiezione $(\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{\mathbf{0}\})/\sim \leftrightarrow \mathbb{CP}^n$, per cui identifichiamo i due insiemi e dotiamo $\mathbb{CP}^n$ della topologia quoziente indotta da $\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ (dove utilizziamo la corrispondenza $(x_1 + iy_1; \dots; x_{n+1} + iy_{n+1}) \leftrightarrow (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1})$ per identificare a sua volta $\mathbb{C}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^{2n+2}$).

Procediamo in maniera analoga all'Esempio 1.3.8 per dimostrare che $\mathbb{CP}^n$ è una varietà topologica di dimensione $2n$.

Intanto, la relazione $\sim$ è aperta;
infatti, dato $A \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ aperto abbiamo che $[A] = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \alpha A$, aperto.

Inoltre, il grafico $\mathcal{R} = \{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})^2 : \mathbf{z} \sim \mathbf{w}\}$ è chiuso in $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})^2$;
infatti, questo insieme si ottiene imponendo che i minori di ordine 2 della matrice avente $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$ come righe siano tutti nulli, il che corrisponde ad un'intersezione di controimmagini dello zero tramite funzioni continue.

Allora, $\mathbb{CP}^n$ è di Hausdorff e a base numerabile.

Facciamo vedere che questo spazio è localmente euclideo di dimensione $2n$.

Chiamiamo $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{CP}^n$ la proiezione sul quoziente;
al variare di $i \in \{1, \dots, n+1\}$ consideriamo l'aperto $A_i = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} : z^i \neq 0\}$, dunque l'aperto $U_i = \pi(A_i)$ in $\mathbb{CP}^n$ (la mappa π è aperta perché $\sim$ è aperta).

Questi aperti ricoprono tutto $\mathbb{CP}^n$;
definiamo ora la mappa

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n : [\mathbf{z}] \mapsto \left(\frac{z^1}{z^i}, \dots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{z^{i+1}}{z^i} \dots, \frac{z^{n+1}}{z^i} \right)$$

Questa è ben definita, biunivoca, e continua in quanto $\phi_i \circ \pi$ è continua (Proposizione 1.3.3);
l'inversa ϕ_i^{-1} ha legge $(z^1, \dots, z^n) \mapsto \pi(z^1, \dots, z^{i-1}, 1, z^i, \dots, z^n)$, dunque anch'essa è continua.

Allora, le coppie (U_i, ϕ_i) costituiscono un atlante liscio di carte omeomorfe a $\mathbb{C}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^{2n}$.