3.2 - Vettori Tangenti

L'idea centrale del calcolo differenziale è l'*approssimazione lineare*.

Questo concetto ricorre frequentemente nello studio del calcolo differenziale negli spazi euclidei;
ad esempio, una funzione di una variabile può essere approssimata dalla sua retta tangente, una curva parametrica in $\mathbb{R}^n$ dal suo vettore velocità, una superficie in $\mathbb{R}^3$ dal suo piano tangente, o una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ dalla sua derivata totale.

Per poter rendere sensato il calcolo differenziale sulle varietà, dobbiamo quindi introdurre la nozione di *spazio tangente a una varietà in un punto,* che possiamo pensare come una sorta di "modello lineare" per la varietà vicino al punto.

Introduzione ai vettori tangenti

Iniziamo studiando oggetti molto più concreti: vettori tangenti geometrici in $\mathbb{R}^n$, che possono essere visualizzati come "frecce" attaccate ai punti.

Immaginiamo una varietà nello spazio euclideo, ad esempio la sfera unitaria $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$;
cosa intendiamo per "vettore tangente" in un punto di $\mathbf{S}^{n-1}$?

Per poter rispondere a questa domanda, dobbiamo prima stabilire come interpretare gli elementi di $\mathbb{R}^n$.
Da un lato, solitamente li consideriamo come *punti* nello spazio, la cui unica proprietà è la posizione, espressa dalle coordinate $x_1, \dots, x_n$.
D'altra parte, quando facciamo analisi, talvolta li consideriamo invece come *vettori,* oggetti con modulo, direzione e verso, ma la cui posizione è irrilevante.
Un vettore $\boldsymbol{v} = \sum\limits_i \boldsymbol{v}^i \boldsymbol{e}_i$ (dove $\boldsymbol{e}_i$ denota l'$\boldsymbol{i}$-esimo vettore della base canonica) può essere visualizzato come una freccia con il suo punto iniziale ovunque in $\mathbb{R}^n$;
ciò che conta dal punto di vista del vettore è solo dove punta e quanto è lungo.

Con questa seconda interpretazione in mente, abbiamo quindi essenzialmente una copia separata di $\mathbb{R}^n$ in ogni punto.
Quando parliamo di vettori tangenti alla sfera in un punto $\boldsymbol{a}$, ad esempio, li immaginiamo in una copia di $\mathbb{R}^n$ con l'origine traslata in $\boldsymbol{a}$.

Vettori tangenti geometrici

Ecco una definizione preliminare di vettori tangenti nello spazio euclideo.

> **⌘ Definizione 3.2.1 (Spazio tangente geometrico, Vettori tangenti geometrici).**
>
> Dato un punto $p \in \mathbb{R}^n$, definiamo lo *spazio tangente geometrico* a $\mathbb{R}^n$ in p, indicato con $\mathbb{R}^n_p$, come l'insieme $\{p\} \times \mathbb{R}^n = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$.
>
> I suoi elementi sono detti *vettori tangenti geometrici* a $\mathbb{R}^n$ in p.

Per comodità di notazione, abbreviamo (p, v) come v_p (o $v|_p$ per evitare ambiguità con altri eventuali pedici).
L'idea è di pensare a v_p come al vettore v con il punto iniziale in p:

$\mathbb{R}^n_p$ come spazio vettoriale

L'insieme $\mathbb{R}^n_p$ è uno spazio vettoriale reale con le operazioni naturali

$$v_p + w_p := (v + w)_p \quad , \quad k \cdot v_p = (k \cdot v)_p.$$

I vettori $e_i|_p$ al variare di $i \in \{1, \ldots, n\}$ formano una base per $\mathbb{R}^n_p$.

In effetti, come spazio vettoriale, $\mathbb{R}^n_p$ è essenzialmente lo stesso di $\mathbb{R}^n$ stesso, tramite l'identificazione naturale $v_p \leftrightarrow v$;
l'unico motivo per cui aggiungiamo il pedice p è per distinguere spazi tangenti geometrici $\mathbb{R}^n_p$ e $\mathbb{R}^n_q$ in punti distinti p e q, che sono insiemi disgiunti.

Con questa definizione potremmo pensare allo spazio tangente a $\mathbf{S}^{n-1}$ in un punto a come a un certo sottospazio di $\mathbb{R}^n_p$, nello specifico lo spazio dei vettori ortogonali al vettore radiale unitario che punta in a (per definire l'ortogonalità utilizziamo il prodotto scalare euclideo che $\mathbb{R}^n_p$ eredita da $\mathbb{R}^n$

tramite l'identificazione naturale):

Il problema con questa definizione, tuttavia, è che non ci dà alcun suggerimento su come potremmo definire vettori tangenti su una varietà liscia in generale, dove non c'è un ambiente euclideo.

Dobbiamo perciò cercare un'altra caratterizzazione dei vettori tangenti, incline a essere generalizzata alle varietà.

Vettori tangenti geometrici e derivate direzionali

Notiamo intanto che i vettori tangenti geometrici forniscono un modo per calcolare derivate direzionali di funzioni reali.

Infatti, qualsiasi vettore tangente geometrico $v_p \in \mathbb{R}^n_p$ produce ad esempio una mappa $D_v|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, che calcola la derivata in p lungo la direzione di v:

$$D_v|_p(f) := D_v f|_p := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(p+tv).$$

Questa operazione è lineare su $\mathbb{R}$ e soddisfa la regola del prodotto:

$$D_v(f \cdot g)|_p = f(p) \cdot D_v g|_p + D_v f|_p \cdot g(p)$$

Scrivendo $v_p = \sum_i v^i \, e_i|_p$ in termini della base canonica, applicando la regola della catena alla derivata totale possiamo scrivere $D_v f|_p$ più concretamente così:

$$D_v f|_p = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p,$$

dove $\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p = D_{e_i} f|_p$ è la i-esima derivata parziale di f valutata in p.

L'associazione $v_a \mapsto D_v|_p$ della derivata direzionale a un vettore tangente geometrico offre un modo per caratterizzare i vettori tangenti come certi operatori sulle funzioni.
Per rendere questa affermazione precisa, ora studieremo in maggior dettaglio la derivata direzionale $D_v|_p$ come operatore sulle funzioni.

Germi di funzioni

Finché due funzioni coincidono in qualche intorno di un punto p, avranno le stesse derivate direzionali in p;
ciò suggerisce di introdurre una relazione di equivalenza sulle funzioni C^∞ definite in qualche intorno di p.

In $\mathbb{R}^n$, consideriamo l'insieme di tutte le funzioni $f : U \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, al variare di $U \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di p;
definiamo allora la relazione $\overset{p}{\sim}$ dichiarando $(f : U \to \mathbb{R}) \overset{p}{\sim} (g : V \to \mathbb{R})$ quando esiste $W \subseteq U \cap V$ intorno di p, tale che $f|_W = g|_W$.
Questa è chiaramente una relazione di equivalenza.

> **⌘ Definizione 3.2.2 (Germe di funzioni).**
>
> La classe di equivalenza di $f : U \to \mathbb{R}$ rispetto a $\overset{p}{\sim}$ è detta *germe di f in p*.
>
> Denotiamo con C_p^∞ l'insieme costituito da tutti i germi in p delle funzioni C^∞ definite su intorni di p.

L'idea dietro la nozione di germe è quella di identificare oggetti (in questo caso funzioni) che condividono una certa proprietà (in questo caso la legge) a livello locale.
Qualora non ci sia rischio di ambiguità, tenderemo a denotare il germe di una funzione f in p con lo stesso simbolo f;
basta ricordare che l'uguaglianza è riferita a un intorno di p.

È abbastanza immediato vedere che le operazioni definite su $C^k(U)$, con U generico intorno di p, sono compatibili con la relazione di equivalenza $\overset{p}{\sim}$
;

ciò significa che queste operazioni inducono in modo naturale operazioni corrispondenti su C_p^∞, ben definite:

$$[f_1]_{\overset{p}{\sim}} + [f_1]_{\overset{p}{\sim}} := [f_1 + f_2]_{\overset{p}{\sim}}$$

$$k \cdot [f_1]_{\overset{p}{\sim}} := [k \cdot f_2]_{\overset{p}{\sim}}$$

$$[f_1]_{\overset{p}{\sim}} \cdot [f_1]_{\overset{p}{\sim}} := [f_1 \cdot f_2]_{\overset{p}{\sim}}$$

Con queste operazioni indotte, C_p^∞ diventa anch'essa una $\mathbb{R}$-algebra commutativa, associativa e unitaria.

In ultima battuta, facciamo la seguente importante

Osservazione 3.2.3 (Derivata direzionale rispetto ai germi di funzioni).

Possiamo modificare l'azione della derivata direzionale $D_v|_p$, rimpiazzando il dominio $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con C_p^∞.

Questa modifica è lecita in quanto:

- la derivata direzionale è un oggetto locale, ben definito su tutte le funzioni definite in un intorno di p;
- la derivata direzionale è uguale per tutte le funzioni appartenenti allo stesso germe;
- sono mantenute le proprietà indicate per le derivate direzionali, in quanto le operazioni su $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sono compatibili con $\overset{p}{\sim}$.

D'ora in poi, adotteremo quindi sempre C_p^∞ come dominio per queste mappe.

Derivazioni in un punto

Ora che abbiamo identificato le funzioni che coincidono localmente intorno a un punto, tenendo a mente le proprietà delle derivate direzionali siamo portati a dare la seguente definizione.

Definizione 3.2.4 (Derivazione in un punto).

Dato un punto $p \in \mathbb{R}^n$, una mappa $D : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ è chiamata *derivazione in* p (o *derivazione puntuale di* C_p^∞) se è lineare su $\mathbb{R}$ e soddisfa la seguente regola del prodotto, detta identità di Leibniz:

$$D(f \cdot g) = f(a) \cdot D(g) + g(a) \cdot D(f) \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Indichiamo con $\mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ l'insieme di tutte le derivazioni in p.

Chiaramente, $\mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni

$$(D_1 + D_2)(f) := D_1(f) + D_2(f), \quad (kD)(f) := k \cdot D(f).$$

Il fatto cruciale su $\mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ è che *questo spazio è naturalmente isomorfo allo spazio tangente geometrico* $\mathbb{R}^n_p$ che abbiamo definito prima.

La dimostrazione si baserà sul Lemma di Hadamard (Proposizione 3.1.5) e sul seguente lemma.

Lemma 3.2.5 (Proprietà delle derivazioni).

Siano $p \in \mathbb{R}^n$, $D \in \mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ e $f, g \in C^\infty_p$.

Si hanno i seguenti fatti:

- Se f è una funzione costante, allora $D(f) = 0$.
- Se $f(p) = g(p) = 0$, allora $D(fg) = 0$.

Dimostrazione

È sufficiente dimostrare il primo punto per la funzione costante $c_1(x) = 1$;
data una generica funzione costante $c_k(x) = k$, avremmo infatti $D(c_k) = D(k\, c_1) = k \cdot D(c_1) = 0$ per linearità.

Il fatto che valga $D(c_1) = 0$ segue dall'identità di Leibniz:

$$D(c_1) = D(c_1 \cdot c_1) = 2c_1(a)D(c_1) = 2D(c_1),$$

che implica $D(c_1) = 0$.

Il secondo punto segue anch'esso dall'identità di Leibniz:

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f) = 0.$$

■

A questo punto, siamo pronti per dimostrare che i vettori tangenti geometrici si identificano con le derivazioni.

Teorema 3.2.6 (Isomorfismo naturale tra $\mathbb{R}^n_p$ e $\mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$).

Sia $p \in \mathbb{R}^n$.

Si hanno i seguenti fatti:

- Per ogni vettore tangente geometrico $v_p \in \mathbb{R}^n_p$, la mappa $D_v|_p : C^\infty_p \to \mathbb{R}$ è una derivazione in p;
- La mappa $\Phi : \mathbb{R}^n_p \to \mathcal{D}_p\mathbb{R}^n : v_p \mapsto D_v|_p$ è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

Dimostrazione

Il fatto che $D_v|_p$ sia una derivazione in p è una conseguenza immediata della regola del prodotto mostrata prima;
dobbiamo quindi mostrare solo il secondo punto.

La linearità di Φ è immediata.

Per l'iniettività, prendiamo $v_p \in \mathbb{R}^n_p$ tale che $D_v|_p$ sia la derivazione nulla.
Scriviamo $v_p = \sum_{i=1}^n v^i\, e_i|_p$ in termini della base canonica, e come funzione prendiamo la proiezione sulla coordinata j-esima
$x^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x^j$, che è liscia su $\mathbb{R}^n$;otteniamo

$$0 = D_v|_p(x^j) = v^j$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\left.\dfrac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_p = \delta_{i,j}$, la delta di Kronecker.
Dall'arbitrarietà di j segue che v_p è il vettore nullo.

Per dimostrare la suriettività, prendiamo $D \in \mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ ad arbitrio.
Motivati dal calcolo precedente, definiamo il vettore $v = \sum_{i=1}^n D(x^i)\, e_i$, e mostriamo che $D = D_v|_p$.
A tale scopo, prendiamo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, e applichiamo il Lemma di Hadamard (Proposizione 3.1.5):

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x^i - a^i) g_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

con le g_i definite come nel Lemma.

Valutando la derivazione D in f e facendo uso delle proprietà , troviamo

$$D(f) = D\big(x \mapsto f(a)\big) + \sum_{i=1}^n D(x \mapsto x^i - a^i) \cdot g_i(a) + 0 \cdot D(g_i)$$

Per il Lemma 3.2.5, il primo addendo è nullo e anche $D(x \mapsto x^i - a^i) = D(x^i)$;
inoltre, $g_i(a) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$ per il Lemma di Hadamard (Proposizione 3.1.5).
Allora, abbiamo in definitiva

$$D(f) = \sum_{i=1}^n D(x^i) \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p,$$

che per come abbiamo definito v coincide proprio con $D_v f|_p$.

■

Questo teorema permette di identificare lo spazio $\mathbb{R}^n_p$ dei vettori tangenti geometrici in p con lo spazio $\mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$ delle derivazioni in p; questa nuova interpretazione dei vettori tangenti come derivazioni è più adatta a essere generalizzata alle varietà.

Corollario 3.2.7 (Base per lo spazio delle derivazioni).

Sia $a \in \mathbb{R}^n$.

Le n derivate

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ \dots \ , \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p : C_p^\infty \to \mathbb{R}$$

definite ponendo $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(f) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p$ formano una base per $\mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$, che quindi ha dimensione n.

Dimostrazione

Basta notare che l'isomorfismo Φ del Teorema 3.2.6 manda la base canonica $\{e_i\}$ nei vettori $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$.

■

Vettori tangenti su varietà

L'identificazione trovata nel Teorema 3.2.6 ci rende ora in grado di definire i vettori tangenti su qualsiasi varietà liscia.

⌘ Definizione 3.2.8 (Derivazioni e Spazi Tangenti su una varietà).

Sia M una varietà liscia, e sia $p \in M$.

Si dice *derivazione in* p una mappa $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto vf$ che è lineare e soddisfa l'identità di Leibniz:

$$X(f \cdot g) = f(p) \cdot vg + g(p) \cdot vf \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

L'insieme di tutte le derivazioni di $C^\infty(M)$ in p è detto *spazio tangente a* M *in* p, e si denota con T_pM;
in virtù di questa definizione, le derivazioni di $C^\infty(M)$ in p verranno chiamate *vettori tangenti a* M *in* p.

Abbiamo l'analogo del Lemma 3.2.5 per le varietà.

Lemma 3.2.9 (Proprietà dei Vettori Tangenti sulle Varità).

Sia M una varietà liscia;
siano $p \in M$, $\boldsymbol{v} \in T_p M$, $f, g \in C^\infty(M)$.

Si hanno i seguenti fatti:

- Se f è una funzione costante, allora $\boldsymbol{v} f = 0$;
- Se $f(p) = g(p) = 0$, allora $\boldsymbol{v}(fg) = 0$.

Dimostrazione

Identica a quella del Lemma 3.2.5.

■