3 - Sequenzializzazione di una Topologia

Insiemi sequenzialmente chiusi e aperti

Definizione: Insieme sequenzialmente chiuso

Sia X uno spazio topologico.

Un insieme $C \subseteq X$ si dice **sequenzialmente chiuso** quando, per ogni successione $\{x_n\}_n \subseteq C$ convergente a un certo $x \in X$, si ha $x \in C$.

Osservazione: Relazione tra chiusi e chiusi sequenziali

Sia X uno spazio topologico.
Sia $C \subseteq X$ chiuso.

Allora, C è anche sequenzialmente chiuso.

Dimostrazione

Sia $\{x_n\}_n \subseteq C$ una successione in C convergente a un certo $x \in X$.
Allora, per ogni U intorno di x, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq \nu$.

Poiché $x_n \in C$ per costruzione, segue che $U \cap C \neq \varnothing$ per ogni U intorno di x_n.
Allora, $x \in \overline{C}$ ossia, essendo C chiuso per ipotesi, $x \in C$.
■

Il viceversa non vale generalmente; esso vale sotto le seguenti condizioni:

Proposizione 3.1: Equivalenza tra chiusi e chiusi sequenziali in spazi primo-numerabili

Sia X uno spazio topologico 1°-numerabile.
Sia $C \subseteq X$ sequenzialmente chiuso.

Allora, C è chiuso.

Dimostrazione

Sia $x \in \overline{C}$.
Allora, per ogni U intorno di x, si ha $U \cap C \neq \varnothing$, ossia esiste $x_U \in U$ tale che $x_U \in C$

Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x, che esiste per 1°-numerabilità di x.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ è un intorno di x; allora, esiste $x_n \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ tale che $x_n \in C$ per quanto affermato prima.

Si consideri la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; si ha che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ per costruzione.
Inoltre, essa converge a x.
Infatti, si fissi U intorno di x; essendo $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $U_{n_0} \subseteq U$; pertanto, per ogni $n \geq n_0$ si ha $x_n \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U_{n_0} \subseteq U$.

Essendo C sequenzialmente chiuso, risulta $x \in C$.
Allora, ne segue che $\overline{C} \subseteq C$ per arbitrarietà di x, ossia C chiuso.
■

Definizione: Insieme sequenzialmente aperto

Sia X uno spazio topologico.

Un insieme $A \subseteq X$ si dice **sequenzialmente aperto** quando $X \setminus A$ è sequenzialmente chiuso.

Osservazione: Caratterizzazione degli insiemi sequenzialmente aperti

Sia X uno spazio topologico.

Un insieme $A \subseteq X$ è sequenzialmente aperto se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}_n \subseteq A$ convergente a un certo $x \in X$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in A$ per ogni $n \geq \nu$.

Proposizione 3.2: Insiemi sequenzialmente aperti di X costituiscono una topologia

Sia X uno spazio topologico con topologia τ.
Sia τ_s la famiglia degli insiemi sequenzialmente aperti di X.

τ_s è una topologia su X.

Dimostrazione

Mi secco.
■

Definizione: Sequenzializzazione di una topologia

Sia X uno spazio topologico con topologia τ.

La famiglia τ_s degli insiemi sequenzialmente aperti di X secondo τ, che è una topologia per la [Proposizione 3.2], prende il nome di **sequenzializzazione** di τ.

Osservazione: Finezza tra una topologia e la sua sequenzializzazione

Sia X uno spazio topologico con topologia τ.
Sia τ_s la sequenzializzazione di τ.

Allora, $\tau_s \supseteq \tau$.

Proposizione 3.3: Equivalenza tra sequenziale semicontinuità inferiore e semicontinuità inferiore rispetto alla sequenzializzazione

Sia X uno spazio topologico con topologia τ.
Sia τ_s la sequenzializzazione di τ.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è sequenzialmente semicontinua inferiormente secondo τ;
2. f è semicontinua inferiormente secondo τ_s.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga f sequenzialmente semicontinua inferiormente secondo τ.

Si provi la semicontinuità inferiore secondo τ_s tramite la caratterizzazione nella [Proposizione 2.1], mostrando dunque che, per ogni $r \in \mathbb{R}$, l'insieme $f^{-1}\left(\left]-\infty; r\right]\right)$ è chiuso secondo τ_s, ossia sequenzialmente chiuso.

Sia dunque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f^{-1}\big(]-\infty; r]\big)$, tale cioè che $f(x_n) \le r$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, convergente a un certo $x^* \in X$.
Per sequenziale semicontinuità di f si ha $f(x^*) \le \liminf_n f(x_n)$; d'altra parte, essendo $f(x_n) \le r$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, segue $\liminf_n f(x_n) \le r$ per confronto.
Allora, $f(x^*) \le r$, ossia $x^* \in f^{-1}\big(]-\infty; r]\big)$.
■

Dimostrazione $(2. \Rightarrow 1.)$

Si supponga f semicontinua inferiormente secondo τ_s.
Sia $\tilde{x} \in X$.
Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione convergente a $\tilde{x}$.

Si provi che $f(\tilde{x}) \le \liminf_n f(x_n)$.

Si proceda per assurdo, supponendo che $f(\tilde{x}) > \liminf_n f(x_n)$.
Sia $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $f(\tilde{x}) > \gamma > \liminf_n f(x_n)$.

Per ipotesi di semicontinuità inferiore di f secondo τ_s, l'insieme $f^{-1}\big(]-\infty; \gamma]\big)$ è chiuso secondo τ_s, per la [Proposizione 2.1]; cioè, $f^{-1}\big(]-\infty; \gamma]\big)$ è sequenzialmente chiuso.

Inoltre, essendo $\gamma > \liminf_n f(x_n)$, esiste un'estratta $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che valga $x_{n_k} < \gamma$ definitivamente.

Poiché $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\tilde{x}$ e $f^{-1}\big(]-\infty; \gamma]\big)$ è sequenzialmente chiuso, si ha che $\tilde{x} \in f^{-1}\big(]-\infty; \gamma]\big)$, ossia $f(\tilde{x}) \le \gamma$.
Tuttavia, ciò è contraddittorio con il fatto che γ è stato scelto dimodoché $f(\tilde{x}) > \gamma$.
■