# 06 - Gli Spazi normati e di Banach

## **Premesse**

> Convenzione: Campo degli scalari di uno spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale si intenderà sempre su  $\mathbb{R}$ .

> Sottospazio generato da un sottoinsieme di uno spazio vettoriale

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia  $A \subseteq E$ .

Si dice sottospazio generato da A (o inviluppo lineare di A), e si denota con  $\operatorname{span}(A)$ , l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali di E contenenti A.

> Norma di uno spazio vettoriale

Sia E uno spazio vettoriale.

Si dice norma una funzione  $\|\cdot\|:E o\mathbb{R}^+_0$  tale che:

- 1. Assoluta omogeneità:  $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$  per ogni  $\mathbf{x} \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- 2. Sub-additività:  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ;
- 3. Positiva definitività:  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Dati uno spazio vettoriale E e una norma  $\|\cdot\|:E\to\mathbb{R}^+_0$ , la coppia  $(E,\|\cdot\|)$  prende il nome di spazio normato.

> Seconda disuguaglianza triangolare delle norme

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

La norma  $\|\cdot\|$  soddisfa la seguente proprietà, detta seconda disuguaglianza triangolare:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \ge \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|$$
 per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ .

Fissati infatti  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ , si ha:

- $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} + (\mathbf{x} \mathbf{y})\| \le \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x} \mathbf{y}\|$  per subadditività, da cui segue  $\|\mathbf{x} \mathbf{y}\| \ge \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ ;
- $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + (\mathbf{y} \mathbf{x})\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y} \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} \mathbf{y}\|$  per subadditività e assoluta omogeneità, da cui segue  $\|\mathbf{x} \mathbf{y}\| \ge \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{x}\|$ .

Ne segue che  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \ge \max\{\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|, \|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|\} = \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\|$ .

#### > Metrica indotta da una norma

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

La norma  $\|\cdot\|$  induce su E una metrica d; essa è definita ponendo  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ .

#### ₩ Spazio di Banach

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia d la metrica indotta da  $\|\cdot\|$ .

 $(E, \|\cdot\|)$  si dice **spazio di Banach** quando è completo rispetto a d.

# Alcune proprietà degli spazi normati

## Proposizione 6.1: Lemma di Riesz

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $F\subsetneq E$  un sottospazio vettoriale di E, chiuso rispetto alla metrica d indotta dalla norma.

Si ha 
$$\sup_{\mathbf{x} \in E} d(\mathbf{x}, F) = 1.$$
  $\|\mathbf{x}\| = 1$ 

## Osservazioni preliminari

Sia  $\mathbf{x} \in E$  tale che  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .

Essendo F sottospazio vettoriale di E, si ha  $\mathbf{0} \in F$ .

Allora, 
$$d(\mathbf{x}, F) \le ||\mathbf{x} - \mathbf{0}|| = ||\mathbf{x}|| = 1$$
.

Segue  $\sup_{\mathbf{x} \in E} \ d(\mathbf{x}, F) \leq 1$  per arbitrarietà di  $\mathbf{x} \in E$  con  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .  $\|\mathbf{x}\| = 1$ 

## Dimostrazione

In virtù dell'osservazione preliminare, basta mostrare che  $\sup_{\mathbf{x} \in E} d(\mathbf{x}, F) \geq 1$ .

$$\mathbf{x} \in E$$
 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 

$$\|\mathbf{x}\| = 1$$

Essendo  $F \subseteq E$ , esiste  $\mathbf{x}_0 \in E \setminus F$ .

Essendo F chiuso e  $\mathbf{x}_0 \notin F$ , esiste un intorno sferico di  $\mathbf{x}_0$  disgiunto da F; pertanto, si ha  $d(\mathbf{x}_0, F) > 0$ .

Sia  $\varepsilon > 0$ ; si provi che  $\sup_{\mathbf{x} \in E} d(\mathbf{x}, F) \geq 1 - \varepsilon$ .

$$\mathbf{x} \in E$$
 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 

Si supponga  $\varepsilon < 1$  senza perdere di generalità; ne segue che  $\frac{1}{1-\varepsilon} > 1$ .

Si ha allora  $d(\mathbf{x}_0, F) < \frac{1}{1-\varepsilon}d(\mathbf{x}_0, F)$ ; dalla definizione di  $d(\mathbf{x}_0, F)$  segue allora l'esistenza di  $\mathbf{x}_1 \in F$  tale che  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| < \frac{1}{1-\varepsilon}d(\mathbf{x}_0, F)$ .

Poiché  $\mathbf{x}_0 \notin F$  e  $\mathbf{x}_1 \in F$ , si ha  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$ , per cui  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| \neq 0$ Allora, si può porre  $\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|}$ ; evidentemente,  $\|\tilde{\mathbf{x}}\| = 1$ . Si valuti  $d(\tilde{\mathbf{x}}, F)$ .

Si fissi  $\mathbf{y} \in F$ .

Si ha

$$\begin{split} &\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| = \left\| \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} - \mathbf{y} \right\| \\ &= \left\| \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1 - \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} \|\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_1 + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|\mathbf{y})\| \\ &\geq \frac{1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} d(\mathbf{x}_0, F) \end{split}$$

Per definizione di  $\tilde{\mathbf{x}}$ 

Proprietà dei vettori e della norma

Segue dalla definizione di  $d(\mathbf{x}_0, F)$ . Infatti,  $\mathbf{x}_1 + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|\mathbf{y} \in F$  essendo  $\mathbf{x}_1, \mathbf{y} \in F$  e  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| \in \mathbb{R}$ , pertanto  $\|\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_1 + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|\mathbf{y})\|$  è distanza tra  $\mathbf{x}_0$  è un vettore in F

 $> 1 - \varepsilon$ 

Segue dalla disuguaglianza

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| < rac{1}{1-arepsilon}d(\mathbf{x}_0,F)$$

Dunque,  $\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| > 1 - \varepsilon$  per ogni  $\mathbf{y} \in F$ ; ne segue che  $d(\tilde{\mathbf{x}}, F) \ge 1 - \varepsilon$ .

Allora,  $\sup_{\|\mathbf{x}\|=1} d(\mathbf{x},F) \geq 1-arepsilon$ , che è ciò che si voleva ottenere.

La tesi è allora acquisita, essendo  $\varepsilon > 0$  arbitrario.

## Proposizione 6.2: Sottospazi vettoriali di dimensione finita sono chiusi

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale di dimensione finita.

Allora, F è chiuso in E rispetto alla metrica d indotta dalla norma.

## Proposizione 6.3: Non totale limitatezza della sfera unitaria in spazi normati di dimensione infinita

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Si supponga che E abbia dimensione infinita.

Sia 
$$S = \{ \mathbf{x} \in E : ||\mathbf{x}|| = 1 \}$$
.

Allora, S non è totalmente limitato.

#### Dimostrazione

Sia  $\mathbf{x}_0 \in S$ .

Sia  $F_0 = \operatorname{span}(\mathbf{x}_0) = \{\lambda \mathbf{x}_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ; esso ha dimensione 1.

Pertanto,  $F_0 \subseteq E$  in quanto E ha dimensione infinita per ipotesi, e per la [Proposizione 6.2] esso è chiuso.

Allora,  $\sup_{\mathbf{x} \in S} d(\mathbf{x}, F_0) = 1 \ (\geq \frac{1}{2})$  per la [Proposizione 6.1], da cui segue che esiste  $\mathbf{x}_1 \in S$  tale che  $d(\mathbf{x}_1, F_0) > \frac{1}{2}$ .

Sia  $F_1 = \operatorname{span}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ ; esso ha dimensione 2.

Pertanto,  $F_1 \subseteq E$  in quanto E ha dimensione infinita per ipotesi, e per la [Proposizione 6.2] esso è chiuso.

Allora,  $\sup_{\mathbf{x} \in S} d(\mathbf{x}, F_1) = 1 \ (\geq \frac{1}{2})$  per la [Proposizione 6.1], da cui segue che esiste  $\mathbf{x}_2 \in S$  tale che  $d(\mathbf{x}_2, F_1) > \frac{1}{2}$ .

Procedendo induttivamente si ottiene una successione  $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S$  dimodoché  $d(\mathbf{x}_n,\operatorname{span}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1}))>\frac{1}{2}$  per ogni  $n\in\mathbb{N}$ .

Si provi che  $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  non è totalmente limitato.

Siano  $N_1, \ldots, N_k \subseteq \mathbb{N}$  tali che  $\bigcup_{i=1}^k = \mathbb{N}$ ; almeno uno di essi è infinito (altrimenti  $\mathbb{N}$  sarebbe unione finita di insiemi finiti, cioè sarebbe un insieme finito, il che è falso), sia esso  $N_{i_0}$ .

Essendo  $N_{i_0}$  infinito, esso ammette due elementi distinti; siano essi m e n, e si supponga n > m.

Essendo n > m, si ha  $\mathbf{x}_m \in \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ; allora,  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \ge d(\mathbf{x}_n, \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})) > \frac{1}{2}$ .

Dunque, ogni ricoprimento finito di  $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  ammette due elementi nello stesso insieme aventi distanza maggiore di  $\frac{1}{2}$ ; ne segue che  $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  non è totalmente limitato.

Allora, a maggior ragione S non è totalmente limitato, in quanto  $S \supseteq \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### **Q** Osservazione

In  $\mathbb{R}^n$ , S è compatto essendo chiuso e limitato.

Invece, in uno spazio normato  $(E, \|\cdot\|)$  con E di dimensione infinita, per la [Proposizione 6.3] S non è totalmente limitato, per cui non è compatto.

Si dimostra che, in uno spazio normato  $(E, \|\cdot\|)$  con E di dimensione infinita, si ha  $\alpha(S) = 2$ .

# Lo spazio $\mathcal{L}(X,Y)$

#### ₩ Definizione: Operatore lineare

Siano X, Y due spazi vettoriali.

Sia  $T: X \to Y$  una funzione.

T si dice **operatore lineare** quando  $T(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda T(\mathbf{x}) + \mu T(\mathbf{y})$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$  e per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Se X e Y sono dotati di norma, si può parlare anche di continuità degli operatori lineari.

### Osservazione: Continuità di un operatore lineare in tutto il dominio equivale alla sua continuità nel solo zero

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi normati.

Sia  $T: X \to Y$  un operatore lineare.

T è continuo in X se e solo se è continuo in  $\mathbf{0}_X$ .

#### **Dimostrazione**

Se T è continuo in X, chiaramente T è continuo in  $\mathbf{0}_X$ .

Viceversa, si supponga T continuo in  $\mathbf{0}_X$ ;

si fissi  $\mathbf{x}_0 \in X$ , e si provi la continuità di T in  $\mathbf{x}_0$ .

Si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Per continuità di T in  $\mathbf{0}_X$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $\mathbf{x} \in X$  con  $\|\mathbf{x}\|_X < \delta$ , si abbia  $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{0}_X)\|_Y < \varepsilon$ , ossia  $\|T(\mathbf{x})\|_Y < \varepsilon$  in quanto  $T(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$  per linearità di T.

Sia  $\mathbf{x}' \in X$  con  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\|_X < \delta$ ;

per costruzione di  $\delta$  vale  $||T(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)||_Y < \varepsilon$ , vale a dire  $||T(\mathbf{x}') - T(\mathbf{x}_0)||_Y < \varepsilon$  per linearità di T.

Allora, risulta verificata la definizione di continuità in  $\mathbf{x}_0$ , dunque in tutto X per arbitrarietà di questo.

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi normati.

Sia  $T: X \to Y$  un operatore lineare.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- 1. T è continuo;
- 2. Esiste k > 0 tale che  $||T(\mathbf{x})||_Y \le k ||\mathbf{x}||_X$  per ogni  $\mathbf{x} \in X$ .

## $\triangleright$ Dimostrazione: 1. $\Rightarrow$ 2.

Si supponga T continuo.

Allora, T è continuo in  $\mathbf{0}_X$ , per cui in corrispondenza a  $\varepsilon = 1$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $\mathbf{x} \in X$  con  $\|\mathbf{x}\|_X < \delta$ , si abbia  $\|T(\mathbf{x})\|_Y < 1$ .

Si provi la disuguaglianza espressa nel punto 2.

Si fissi dunque  $\mathbf{x} \in X$ , e si supponga per il momento  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_X$  cosicché  $\|\mathbf{x}\|_X \neq 0$ .

Allora, è ben definito il vettore  $\frac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|_X}$ , che ha norma  $\frac{\delta}{2} < \delta$ .

Per costruzione di  $\delta$ , si ha allora  $\left\|T\left(\frac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|_X}\right)\right\|_Y < 1$ , ossia  $\frac{\delta}{2\|\mathbf{x}\|_X}\|T(\mathbf{x})\|_Y < 1$  per linearità di T e per assoluta omogeneità di  $\|\cdot\|_Y$ .

Ne segue che  $\|T(\mathbf{x})\|_Y < \frac{2}{\delta} \|\mathbf{x}\|_X$ ; questa disuguaglianza vale per ogni  $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}$  per arbitrarietà di  $\mathbf{x}$ .

D'altra parte, per  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_X$  si ha  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y$  per linearità di T, e dunque  $\|T(\mathbf{x})\|_Y = \frac{2}{\delta} \|\mathbf{x}\|_X = 0$ .

Ne segue che  $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \frac{2}{\delta} \|\mathbf{x}\|_X$  per ogni  $\mathbf{x} \in X$ .

#### $\smile$ Dimostrazione: $2. \Rightarrow 1.$

Si supponga l'esistenza di k>0 tale che  $\|T(\mathbf{x})\|_Y\leq k\|\mathbf{x}\|_X$  per ogni  $x\in X$ ;

si provi la continuità di T in  $\mathbf{0}_X$ , che per l'osservazione precedente ne implica la continuità in tutto X.

Sia dunque  $\varepsilon > 0$ .

Sia  $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ ; per ogni  $\mathbf{x} \in X$  con  $\|\mathbf{x}\|_X < \delta$  si ha per ipotesi  $\|T(\mathbf{x})\| \le k\|\mathbf{x}\|_X < k\delta = \varepsilon$ , per cui la tesi è acquisita.

## $\mathcal{H}$ Notazione: Lo spazio $\mathcal{L}(X,Y)$

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi normati.

Si denota con  $\mathcal{L}(X,Y)$  lo spazio degli operatori lineari continui da X in Y.

Evidentemente,  $\mathcal{L}(X,Y)$  è uno spazio vettoriale con le operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per una costante.

Il prossimo obiettivo è quello di rendere  $\mathcal{L}(X,Y)$  uno spazio normato.

Si ha la seguente proposizione:

## Proposizione 6.5: Norma su $\mathcal{L}(X,Y)$ .

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi normati.

Fissato  $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ , si definiscano i seguenti valori:

$$ullet 
ho_1(T) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|T(\mathbf{x})\|_Y \; ;$$

$$ullet 
ho_2(T) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_X \le 1} \|T(\mathbf{x})\|_Y \, ;$$

$$\bullet \ \ \rho_3(T) = \sup_{\mathbf{x} \in X \smallsetminus \{\mathbf{0}_{\mathbf{X}}\}} \frac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} \ .$$

Valgono i seguenti fatti:

- 1.  $\rho_1(T), \rho_2(T), \rho_3(T) < +\infty;$
- 2.  $\rho_1(T) = \rho_2(T) = \rho_3(T)$ ;
- 3. La funzione  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}:\mathcal{L}(X,Y)\to\mathbb{R}_0^+$  definita ponendo  $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}:=\rho_1(T)=\rho_2(T)=\rho_3(T)$  per ogni  $T\in\mathcal{L}(X,Y)$  è una norma su  $\mathcal{L}(X,Y)$ .

## Dimostrazione: Punto 1.

Essendo T un operatore lineare continuo per definizione di  $\mathcal{L}(X,Y)$ , per la [Proposizione 6.4] esiste k>0 tale che  $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq k\|\mathbf{x}\|_X$  per ogni  $\mathbf{x} \in X$ .

Allora:

- Per ogni  $\mathbf{x} \in X$  con  $\|\mathbf{x}\|_X \le 1$ , si ha  $\|T(\mathbf{x})\|_Y \le k \|\mathbf{x}\|_X \le k$ , dunque sia  $\rho_1(T)$  che  $\rho_2(T)$  sono finiti;
- Per ogni  $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ , si ha  $\|T(\mathbf{x})\|_Y \le k \|\mathbf{x}\|_X$  ossia, essendo  $\|\mathbf{x}\|_X \ne 0$ ,  $\frac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} \le k$ ; ne segue che  $\rho_3(T)$  è finito.

## Q Osservazioni preliminari

Vale  $||T(\mathbf{x})||_Y \leq \rho_1(T) ||\mathbf{x}||_X$  per ogni  $\mathbf{x} \in X$ .

Infatti, se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_X$ , tale disuguaglianza è vera per linearità di T, in quanto  $||T(\mathbf{0}_X)||_Y = ||\mathbf{0}_Y||_Y = 0 \le \rho_1(T)$ .

Se invece  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_X$ , si ha  $\|\mathbf{x}\|_X \neq 0$ , per cui risulta ben definito il vettore  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X}$ , che ha norma 1. Allora,

$$\left\|T\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X}\right)\right\|_Y \leq 
ho_1(T)$$
 Per definizione di  $ho_1(T)$ , essendo  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X}$  di norma  $1$ 

$$\implies \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_X} \|T(\mathbf{x})\|_Y \leq 
ho_1(T)$$
 Per linearità di  $T$  e per assoluta omogeneità di  $\|\cdot\|_Y$ 

$$\implies \|T(\mathbf{x})\|_Y \leq 
ho_1(T) \ \|\mathbf{x}\|_1 \quad ext{Segue moltiplicando ambo i membri per } \|\mathbf{x}\|_X$$

## Dimostrazione: Punto 2.

Evidentemente,  $\rho_1(T) \leq \rho_2(T)$  in quanto, per ogni  $\mathbf{x}' \in X$  con  $\|\mathbf{x}'\|_X = 1$ , vale  $\|T(\mathbf{x}')\|_Y \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|_X \leq 1} \|T(\mathbf{x})\|_Y = \rho_2(T)$ .

Si provi  $\rho_1(T) \leq \rho_2(T)$ .

Sia  $\mathbf{x} \in X$  con  $\|\mathbf{x}\|_X \le 1$ ; si mostri che  $\|T(\mathbf{x})\|_Y \le \rho_1(T)$ .

Per l'osservazione preliminare ed essendo  $\|\mathbf{x}\|_X \leq 1$ , si ha allora  $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \rho_1(T) \|\mathbf{x}\|_X \leq \rho_1(T)$ , da cui segue quindi che  $\rho_2(T) \leq \rho_1(T)$ .

La disuguaglianza  $\rho_3(T) \leq \rho_1(T)$  segue immediatamente dall'osservazione preliminare; infatti, per ogni  $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}$  si ha  $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \rho_1(T) \|\mathbf{x}\|_X$  ossia, essendo  $\|\mathbf{x}\|_X \neq 0$ ,  $\frac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} \leq \rho_1(T)$ , da cui segue proprio  $\rho_3(T) \leq \rho_1(T)$ .

D'altra parte, la disuguaglianza  $\rho_1(T) \leq \rho_3(T)$  è evidente in quanto, per ogni  $\mathbf{x}' \in X$  con  $\|\mathbf{x}'\|_X = 1$ , si ha  $\|T(\mathbf{x}')\|_Y = \frac{\|T(\mathbf{x}')\|_Y}{\|\mathbf{x}'\|_X} \leq \sup_{\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}} \frac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} = \rho_3(T)$ .

## Dimostrazione: Punto 3.

Si provi che  $\rho_1$  è assolutamente omogenea.

Fissati  $T \in \mathcal{L}(X,Y)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si ha

$$ho_1(\lambda T) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|\lambda \ T(\mathbf{x})\|_Y$$
 Per definizione di  $ho_1$ 

$$= \sup_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} |\lambda| \ \|T(\mathbf{x})\|_Y$$
 Per assoluta omogeneità di  $\|\cdot\|_Y$ 

$$= |\lambda| \sup_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|T(\mathbf{x})\|_Y$$
 Proprietà dell'estremo superiore

$$= |\lambda| \rho_1(T)$$
 Per definizione di  $\rho_1$ .

Si provi ora che  $\rho_3$  è definita positiva.

Chiaramente,  $\rho_3(T) \geq 0$  per ogni  $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ .

Si supponga  $\rho_3(T) = 0$ ; si provi che  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y$  per ogni  $\mathbf{x} \in X$ .

Se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_X$ , tale uguaglianza è immediata per linearità di T.

Se 
$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_X$$
, essendo  $\rho_3(T) = 0$  si ha  $\frac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} = 0$ , ossia  $\|T(\mathbf{x})\|_Y = 0$ , ossia  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y$  per definita positività di  $\|\cdot\|_Y$ .

Si provi infine che  $\rho_1$  è subadditiva.

Fissati  $T_1,T_2\in\mathcal{L}(X,Y)$ , si ha

$$ho_1(T_1+T_2)=\sup_{\|\mathbf{x}\|_X=1}\|T_1(\mathbf{x})+T_2(\mathbf{x})\|_Y$$
 Per definizione di  $ho_1$ 

$$\leq \sup_{\|\mathbf{x}\|_X=1} \left(\|T_1(\mathbf{x})\|_Y + \|T_2(\mathbf{x})\|_Y
ight)$$
 Per subadditività di  $\|\cdot\|_Y$ 

$$\leq \sup_{\|\mathbf{x}\|_X=1} \|T_1(\mathbf{x})\|_Y + \sup_{\|\mathbf{x}\|_X=1} \|T_2(\mathbf{x})\|_Y$$
 In quanto questa espressione maggiora  $\|T_1(\mathbf{x})\|_Y + \|T_2(\mathbf{x})\|_Y$  per ogni  $\mathbf{x} \in X$  con  $\|\mathbf{x}\|_X = 1$ 

$$=
ho_1(T_1)+
ho_1(T_2)$$
 Per definizione di  $ho_1$ .

Dunque,  $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$  è uno spazio normato.

Dalla proposizione precedente segue subito la seguente disuguaglianza:

## 

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi normati.

Sia  $\mathbf{x} \in X$ .

Sia  $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ .

Si ha  $||T(\mathbf{x})||_Y \le ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot ||\mathbf{x}||_X$ .

## Dimostrazione

Segue direttamente da [Proposizione 6.6, Osservazioni preliminari], facendo uso della definizione di  $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}$  come  $\rho_1(T)$ .

Alternativamente, si può utilizzare la definizione di  $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}$  come  $\rho_3(T)$ .

Ne segue infatti che  $\frac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$  per ogni  $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}$ , da cui  $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{x}\|_X$  per ogni  $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}$ .

Per  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_X$  si ha  $T(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$  per linearità di T, per cui  $||T(\mathbf{0}_X)||_Y = 0 = ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot ||\mathbf{0}_X||_X$ .

# ho Proposizione 6.7: Sub-moltiplicatività della norma in $\mathcal{L}(X,Z)$

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  e  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  tre spazi normati.

Sia  $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ .

Sia  $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ .

Data la funzione  $S \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$ , si ha

 $||S \circ T||_Z \le ||S||_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}.$ 

## Dimostrazione

Sia  $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}$ .

```
Si ha
|\cdot|\cdot| | | | | | | |
|\cdot|-|\cdot|
|\cdot|(S \circ T)(\mathbf{x})||_Z = ||S(T(\mathbf{x}))||_Z \mid |\cdot|
|\leq ||S||_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot ||T(\mathbf{x})||_Y \mid \text{Applicando la [Proposizione 6.6]} \mid
|\leq ||S||_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot ||\mathbf{x}||_X \mid \text{Applicando nuovamente la [Proposizione 6.6]} \mid
Dunque, si ha \frac{||(S \circ T)(\mathbf{x})||_Z}{||\mathbf{x}||_X} \leq ||S||_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \text{ per ogni } \mathbf{x} \in X.
Segue dalla definizione di ||S \circ T||_{\mathcal{L}(X,Z)} \text{ come } \rho_3(S \circ T) \text{ che}
||S \circ T||_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq ||S||_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}.
```

## Proposizione 6.8: Condizione per la completezza dello spazio degli operatori lineari

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi normati.

Si supponga  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  di Banach (cioè completo rispetto alla metrica indotta dalla norma)

Allora, lo spazio normato  $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$  è di Banach.

#### Osservazioni preliminari

Sia (S, d) uno spazio metrico.

Sia  $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S$  una successione di Cauchy.

Allora,  $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  è limitata.

Infatti, essendo di Cauchy, in corrispondenza a  $\varepsilon=1$  esiste  $\nu\in\mathbb{N}$  tale che, per ogni  $m,n\geq\nu$ , valga  $d(s_m,s_n)<1$ .

Sia 
$$M = \maxig(\{1\} \cup ig\{d(s_n, s_
u) \mid n \in \{1, \dots, 
u-1\}ig\}ig).$$

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha  $d(s_n, s_{\nu}) \leq M$ , per cui  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è limitata.

#### **Dimostrazione**

Sia  $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{L}(X,Y)$  una successione di Cauchy; si provi che essa converge.

Essendo  $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  di Cauchy, per ogni  $\varepsilon>0$  esiste  $\nu\in\mathbb{N}$  tale che, per ogni  $m,n\geq\nu$ , si abbia  $\|T_m-T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}<\varepsilon$ , ossia  $\sup_{\mathbf{x}\in X\smallsetminus\{\mathbf{0}_X\}}\frac{\|T_n(\mathbf{x})-T_m(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X}<\varepsilon \text{ per definizione di }\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \text{ come }\rho_3.$ 

Si provi che  $\{T_n(\mathbf{x}')\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq Y$  è di Cauchy per ogni  $\mathbf{x}'\in X$ .

Se  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}_X$ , si ha  $\{T_n(\mathbf{0}_X)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\mathbf{0}_Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ , che è costante e dunque di Cauchy.

Si supponga quindi  $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}_X$ , e si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Essendo  $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  di Cauchy, in corrispondenza a  $\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}'\|_X}$ , ben definito in quanto  $\mathbf{x}'\neq\mathbf{0}_X$ , esiste  $\nu\in\mathbb{N}$  tale che, per ogni  $m,n\geq\nu$ , si abbia  $\sup_{\mathbf{x}\in X\smallsetminus\{\mathbf{0}\}}\frac{\|T_n(\mathbf{x})-T_m(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X}<\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}'\|_X}$ ;

ne segue che, per ogni  $m,n\geq \nu$ , vale  $\frac{\|T_n(\mathbf{x}')-T_m(\mathbf{x}')\|_Y}{\|\mathbf{x}'\|_X}<\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}'\|_X}$ , ossia  $\|T_n(\mathbf{x}')-T_m(\mathbf{x}')\|_Y<\varepsilon$ , in quanto  $\frac{\|T_n(\mathbf{x}')-T_m(\mathbf{x}')\|_Y}{\|\mathbf{x}'\|_X}\leq \sup_{\mathbf{x}\in X\smallsetminus\{\mathbf{0}\}}\frac{\|T_n(\mathbf{x})-T_m(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X}$ .

Dunque,  $\{T_n(\mathbf{x}')\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq Y$  è di Cauchy per ogni  $\mathbf{x}'\in X$ ; essendo Y di Banach, ne segue che  $\{T_n(\mathbf{x}')\}_{n\in\mathbb{N}}$  converge per ogni  $\mathbf{x}'\in X$ .

Sia definisca allora T:X o Y ponendo  $T(\mathbf{x}')=\lim_n T_n(\mathbf{x}')$  per ogni  $x'\in X$ .

Si provi che  $T \in \mathcal{L}(X,Y)$  e che  $T = \lim_n T_n$ .

Per mostrare la linearità di T, si consideri l'identità  $T_n(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda T_n(\mathbf{x}) + \mu T_n(\mathbf{y})$ , che vale per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ , per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , dal momento che  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ .

Passando al limite di indice n di entrambi i membri si ottiene proprio la linearità di T.

Si mostri la continuità di T.

Per l'osservazione preliminare,  $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  è limitata essendo di Cauchy; pertanto, esiste M>0 tale che  $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\leq M$  per ogni  $n\in\mathbb{N}$ .

Da questa disuguaglianza e dalla [Proposizione 6.6] si ottiene che  $||T_n(\mathbf{x})||_Y \le ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} ||\mathbf{x}||_X \le M ||\mathbf{x}||_X$  per ogni  $\mathbf{x} \in X$ , da cui segue la continuità.

Resta da provare che  $\lim_n \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$  ossia che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$ , ossia  $\sup_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y < \varepsilon$  per definizione di  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$  come  $\rho_1$ .

Si fissi dunque  $\varepsilon > 0$ .

Essendo  $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  di Cauchy, esiste  $\nu\in\mathbb{N}$  per cui, per ogni  $m,n\geq\nu$ , vale  $\|T_n-T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)}<\varepsilon$ , ossia  $\sup_{\|\mathbf{x}\|_X=1}\|T_m(\mathbf{x})-T_n(\mathbf{x})\|_Y<\frac{\varepsilon}{2}$  per definizione di  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$  come  $\rho_1$ .

Sia allora  $n \geq \nu$ ;

siano  $\mathbf{x} \in X$  con  $\|\mathbf{x}\|_X = 1$ , e sia  $m \ge \nu$ .

Si ha

$$\|T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y \le \|T_n(\mathbf{x}) - T_m(\mathbf{x})\|_Y + \|T_m(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y$$
 Disuguaglianza triangolare  $< \frac{\varepsilon}{2} + \|T_m(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y$  Per costruzione di  $\nu$ , essendo  $m, n \ge \nu$  e  $\|\mathbf{x}\|_X = 1$ 

Dunque, per ogni  $n \ge \nu$  e per ogni  $\mathbf{x} \in X$  con  $\|\mathbf{x}\|_X = 1$ , vale la disuguaglianza  $\|T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y \le \frac{\varepsilon}{2} + \|T_m(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y$  per ogni  $m \ge \nu$ ;

passando allora al limite di indice m di entrambi i membri e sfruttando il fatto che  $\lim_{m} ||T_m(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})||_Y = 0$  per costruzione di T, segue per confronto che  $||T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})|| \le \frac{\varepsilon}{2}$ .

Dunque, per ogni  $n \ge \nu$  si ha  $||T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})|| \le \frac{\varepsilon}{2}$  per ogni  $\mathbf{x} \in X$  con  $||\mathbf{x}||_X = 1$ , dunque  $\sup_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} ||T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})||_Y \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , come volevasi dimostrare.

# Spazi duali topologici

## ₩ Definizione: Funzionale lineare, Spazio duale topologico

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Si consideri  $\mathbb R$  come spazio normato.

Gli operatori lineari da X a  $\mathbb R$  prendono il nome di funzionali lineari in X.

L'insieme  $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$  si denota con  $X^*$ , e si chiama **spazio duale topologico** di X.

Segue dalla [Proposizione 6.8] che gli spazi duali topologici sono di Banach, essendo  $\mathbb R$  di Banach.