# 4 - Misura di non Compattezza

## **Premesse**

> Totale limitatezza

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia  $A \subseteq Y$ .

A si dice totalmente limitato quando

$$orall arepsilon > 0, \ \exists A_1, \ldots, A_n \subseteq A: igcup_{i=1}^n A_i = A \wedge \operatorname{diam}(A_i) < arepsilon \ orall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ovviamente, la totale limitatezza implica la limitatezza.

> Caratterizzazione della compattezza di uno spazio metrico

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1. X è compatto;
- 2. X è sequenzialmente compatto;
- 3. X è completo e totalmente limitato.

> Relativa (sequenziale) compattezza

Sia X uno spazio topologico.

Sia  $A \subseteq X$ .

A si dice relativamente (sequenzialmente) compatto quando  $\overline{A}$  è (sequenzialmente) compatto.

> Convenzione: Estremi inferiore e superiore dell'insieme vuoto

Si pone per convenzione  $\inf(\varnothing) = +\infty$  e  $\sup(\varnothing) = -\infty$ .

#### > Metrica uniforme

Sia X un insieme non vuoto.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni limitate da X in Y.

Si definisce la **metrica uniforme** su  $\mathcal F$  come la metrica  $\rho_d$  (si dimostra che è una metrica) definita ponendo  $\rho_d(f,g)=\sup_{x\in X}d(f(x),g(x))$  per ogni  $f,g\in\mathcal F.$ 

 $\rightarrow$  Notazione:  $\mathcal{F}(A)$ 

Siano X e Y non vuoti.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni da X in Y.

Sia  $A \subseteq X$ .

Si pone  $\mathcal{F}(A) = \{f(x) \mid x \in A, f \in \mathcal{F}\}.$ 

## Misura di non compattezza secondo Kuratowski

#### □ Definizione: Misura di non compattezza secondo Kuratowski

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia  $A \subseteq Y$  non vuoto.

$$\mathsf{Sia}\; \alpha(A) = \inf\bigg\{ \varepsilon > 0 : \exists A_1, \dots, A_n \subseteq A : \bigcup_{i=1}^n A_i = A \wedge \mathrm{diam}(A_i) < \varepsilon \; \forall i \in \{1, \dots, n\} \bigg\}.$$

 $\alpha(A)$  prende il nome di misura di non compattezza secondo Kuratowski.

#### **Osservazione**

 $\alpha(A) \geq 0$ ; in particolare:

- $\alpha(A) = 0$  se e solo se A è totalmente limitato;
- $\alpha(A) < +\infty$  (ossia l'insieme di cui  $\alpha$  è l'estremo inferiore è non vuoto) se e solo se A è limitato.

A livello intuitivo, la misura di non compattezza è indice di quanto un insieme in uno spazio metrico si discosta dall'essere compatto.

Infatti, un insieme compatto in uno spazio metrico è totalmente limitato, dunque ha misura nulla secondo Kuratowski.

## **Funzioni totalmente limitate**

### ☐ Definizione: Oscillazione di una funzione a valori in uno spazio metrico

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia  $f: X \rightarrow Y$  una funzione.

Si dice **oscillazione** di f su  $A\subseteq X$  il valore  $\operatorname{diam}(f(A))$ . Essa si denota con  $\omega_f(A)$ .

#### □ Definizione: Funzione totalmente limitata

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia  $f: X \rightarrow Y$  una funzione.

f si dice **totalmente limitata** quando la sua immagine f(X) è totalmente limitata.

L'insieme delle funzioni  $f: X \to Y$  totalmente limitate si denota con TB(X,Y).

#### **Q** Osservazione

L'insieme TB(X,Y) è costituito da funzioni limitate, essendo queste totalmente limitate; allora, esso è spazio metrico con la metrica uniforme  $\rho_d$ .

La totale limitatezza di una funzione può essere caratterizzata nel seguente modo:

### Proposizione 4.1: Caratterizzazione della totale limitatezza di una funzione

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia  $f: X \rightarrow Y$  una funzione.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è totalmente limitata;

2. Per ogni  $\varepsilon>0$ , esiste  $X_1,\ldots,X_n\subseteq X$  con  $\bigcup_{i=1}^n X_i=X$ , tali che  $\omega_f(X_i)<\varepsilon$  per ogni  $i\in\{1,\ldots,n\}$ .

### ightharpoonup Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)

Si supponga f totalmente limitata.

Si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Per totale limitatezza di f, esistono  $Y_1,\ldots,Y_n\subseteq f(X)$  con  $\bigcup_{i=1}^nY_i=f(X)$  tali che  $\mathrm{diam}(Y_i)<arepsilon$  per ogni  $i\in\{1,\ldots,n\}$ 

Posto  $X_i=f^{-1}(Y_i)$ , si ha  $igcup_{i=1}^n X_i=X$  e  $f(X_i)=f(f^{-1}(Y_i))\subseteq Y_i$ .

Allora,  $\omega_f(X_i) = \operatorname{diam}(f(X_i)) \leq \operatorname{diam}(Y_i) < arepsilon$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

### $holdsymbol{ holdsymbol{eta}}$ Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga verificata la condizione 2.

Si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Per ipotesi, esistono  $X_1,\dots,X_n\subseteq X$  con  $igcup_{i=1}^n X_i=X$  tali che  $\omega_f(X_i)<arepsilon$  per ogni  $i\in\{1,\dots,n\}.$ 

Posto  $Y_i=f(X_i)$ , si ha  $igcup_{i=1}^n Y_i=Y$  e  $\operatorname{diam}(Y_i)=\operatorname{diam}(f(X_i))=\omega_f(X_i)$  <arepsilon per ogni  $i\in\{1,\dots,n\}.$ 

## Funzioni equi-totalmente limitate

□ Definizione: Famiglia di funzioni equi-totalmente limitate

Sia X un insieme non vuoto.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni da X in Y.

Le funzioni in  $\mathcal F$  si dicono **equi-totalmente limitate** quando

$$orall arepsilon>0,\;\exists X_1,\ldots,X_n\subseteq X_1:\quad igcup_{i=1}^n X_i=X\quad \wedge\quad orall i\in\{1,\ldots,n\},\; orall f\in\mathcal{F},\; \omega_f(X_i)$$

#### **Q** Osservazione

Sia X un insieme non vuoto.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni da X in Y, equi-totalmente limitate.

Allora, tali funzioni sono tutte totalmente limitate per la [Proposizione 4.1].

La seguente proposizione fornisce una formula per la misura di non compattezza di certe famiglie di funzioni equitotalmente limitate:

#### Misura di non compattezza di insiemi limitati di funzioni equi-tot. limitate

Sia X un insieme non vuoto.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Si consideri lo spazio TB(X,Y) con la metrica uniforme  $\rho_d$ .

Sia  $\mathcal{F} \subseteq TB(X,Y)$  un insieme tale che:

- 1.  $\mathcal{F}$  sia limitato in TB(X,Y) rispetto a  $\rho_d$ ;
- 2. Le funzioni in  $\mathcal F$  siano equi-totalmente limitate.

Allora, 
$$lpha(\mathcal{F}) = \sup_{x \in X} lpha(\mathcal{F}(x)) = lpha(\mathcal{F}(X)).$$

Sia  $\varepsilon > 0$ .

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in  $\mathcal{F}$ , esistono  $X_1,\ldots,X_n\subseteq X$  con  $\bigcup_{i=1}^n X_1=X$ , per cui  $\omega_f(X_i)<\frac{\varepsilon}{3}$  per ogni  $i\in\{1,\ldots,n\}$  e per ogni  $f\in\mathcal{F}$ .

Per definizione di  $\alpha(\mathcal{F})$ , che è finito in quanto  $\mathcal{F}$  è limitato, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che esistono  $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_m\subseteq\mathcal{F}$  con  $\bigcup_{j=1}^m\mathcal{F}_j=\mathcal{F}$ , per cui  $\mathrm{diam}_{\rho_d}(\mathcal{F}_j)<\alpha(\mathcal{F})+\frac{\varepsilon}{3}$  per ogni  $j\in\{1,\ldots,m\}$ .

Si considerino gli insiemi  $\mathcal{F}_j(X_i)$  al variare di  $i\in\{1,\dots,n\}$  e  $j\in\{1,\dots,m\}$ ; si ha  $\bigcup\limits_{i=1}^n\bigcup\limits_{j=1}^m\mathcal{F}_j(X_i)=\mathcal{F}(X).$ 

Si stimi  $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_j(X_i))$  per ogni  $i\in\{1,\ldots,n\}$  e per ogni  $j\in\{1,\ldots,m\}$ .

Siano  $y_1,y_2\in \mathcal{F}_i(X_i)$ .

Per definizione di  $\mathcal{F}_i(X_i)$ , si ha  $y_1 = f(x_1)$  e  $y_2 = g(x_2)$ , con  $f, g \in \mathcal{F}_i$  e  $x_1, x_2 \in X_i$ .

Si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$$d(y_1, y_2) = d(f(x_1), g(x_2))$$

 $d \leq d(f(x_1),g(x_1)) + d(g(x_1),g(x_2))$  Disuguaglianza triangolare

$$\leq 
ho_d(f,g) + d(g(x_1),g(x_2))$$
 In quanto  $ho_d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x),g(x))$ 

$$0 In quanto  $ho_d(f,g)\leq \mathrm{diam}_{
ho_d}(\mathcal{F}_j) e  $d(g(x_1),g(x_2))\leq \omega_f(X_i)<rac{arepsilon}{3}$$$$

Dunque, si ha  $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_j(X_i)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \frac{2\varepsilon}{3} < \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$  per ogni  $i \in \{1,\dots,n\}$  e  $j \in \{1,\dots,m\}$ .

Allora, la famiglia  $\{\mathcal{F}_j(X_i) \mid i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,m\}\}$  è un ricoprimento finito di  $\mathcal{F}(X)$  costituito da insiemi di diametro minore di  $\alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$ .

Pertanto,  $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$  per definizione di  $\alpha(\mathcal{F}(X))$ .

## 

Sia  $\varepsilon > 0$ .

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in  $\mathcal{F}$ , esistono  $X_1,\ldots,X_n\subseteq X$  con  $\bigcup_{i=1}^m X_i=X$ , per cui  $\omega_f(X_i)<\frac{\varepsilon}{4}$  per ogni  $i\in\{1,\ldots,n\}$  e per ogni  $f\in\mathcal{F}$ .

Per definizione di  $\alpha(\mathcal{F}(X))$ , che è finito in quanto  $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) < +\infty$  per la disuguaglianza provata prima, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che esistono  $Y_1,\ldots,Y_k\subseteq\mathcal{F}(X)$  con  $\bigcup_{j=1}^kY_j=\mathcal{F}(X)$ , per cui  $\mathrm{diam}(Y_j)<\alpha(\mathcal{F}(X))+\frac{\varepsilon}{4}$  per ogni  $j\in\{1,\ldots,k\}$ .

Si supponga senza perdere di generalità che  $Y_1,\ldots,Y_k$  siano a due a due disgiunti; infatti, in caso contrario basta considerare  $\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_k$  definiti ponendo  $\tilde{Y}_j=Y_j \smallsetminus \bigcup_{h=1}^{j-1} Y_h$  per ogni  $j\in\{1,\ldots,k\}$ .

Per ogni  $i \in \{1, ..., n\}$ , si fissi  $x_i \in X_i$ .

Per ogni  $f \in \mathcal{F}$ , sia  $\varphi_f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\}$  l'applicazione definita ponendo  $\varphi_f(i) = j$ , dove j è l'unico indice in  $\{1, \dots, k\}$  tale che  $f(x_i) \in Y_j$  (esso è unico in quanto  $Y_1, \dots, Y_k$  sono stati supposti a due a due disgiunti). Si introduca in  $\mathcal{F}$  la relazione  $\sim$  definita ponendo  $f \sim g$  quando  $\varphi_f = \varphi_g$ , che è di equivalenza.

Allora, la relazione in questione induce una partizione di  $\mathcal{F}$  indotta dalle classi di equivalenza; tali classi sono in numero finito, in quanto l'insieme quoziente  $\mathcal{F}/\sim$  è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme delle funzioni da  $\{1,\ldots,n\}$  a  $\{1,\ldots,k\}$ , che ha cardinalità finita (pari a  $k^n$ ).

Siano dunque  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  tali classi di equivalenza.

Si stimi  $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_p)$  per ogni  $p \in \{1,\dots,m\}.$  Siano  $f,g \in \mathcal{F}_p.$ 

Sia  $x\in X$ , e sia  $i\in\{1,\dots,n\}$  per cui  $x\in X_i$  (che esiste perché  $X_1,\dots,X_n$  ricoprono X). Si ha

$$d(f(x),g(x)) \leq d(f(x),f(x_i)) + d(f(x_i),g(x_i)) + d(g(x_i),g(x))$$

Disuguaglianza triangolare applicata due volte

$$\leq \omega_f(X_i) + \operatorname{diam}(Y_j) + \omega_g(X_i)$$

Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dal fatto che  $x,x_i\in X_i$ 

La maggiorazione del secondo segue dal fatto che  $f,g\in\mathcal{F}_p$  , dunque  $f\sim g$  e quindi esiste  $j\in\{1,\ldots,k\}$  per cui  $f(x_i),g(x_i)\in Y_j$ 

Per costruzione di 
$$X_i$$
 e  $Y_i$ 

$$<\frac{\varepsilon}{4} + \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{3\varepsilon}{4}$$

Dunque, si ha  $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_p) \leq \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{3\varepsilon}{4} < \alpha(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$  per ogni  $p \in \{1, \dots, m\}$ .

Allora, la famiglia  $\{\mathcal{F}_p \mid p \in \{1, \dots, m\}\}$  è un ricoprimento finito di  $\mathcal{F}(X)$  costituito da insiemi di diametro minore di  $\alpha(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$ .

Pertanto,  $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$  per definizione di  $\alpha(\mathcal{F}(X))$ .

Segue  $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F})$  per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ .

## 

È evidente che  $\sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \le \alpha(\mathcal{F}(X))$ ; infatti,  $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}(X)$  per ogni  $x \in X$ , da cui segue che  $\alpha(\mathcal{F}(x)) \le \alpha(\mathcal{F}(X))$  per ogni  $x \in X$ .

Si provi ora  $\sup_{x\in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \geq \alpha(\mathcal{F}).$ 

Sia  $\varepsilon > 0$ .

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in  $\mathcal{F}$ , esistono  $X_1,\ldots,X_n\subseteq X$  con  $\bigcup_{i=1}^m X_i=X$ , per cui  $\omega_f(X_i)<\frac{\varepsilon}{4}$  per ogni  $i\in\{1,\ldots,n\}$  e per ogni  $f\in\mathcal{F}$ .

Per ogni  $i \in \{1, \ldots, n\}$ , si fissi  $x_i \in X_i$  e si consideri  $\mathcal{F}(x_i)$ ; per definizione di  $\alpha(\mathcal{F}(x_i))$ , che è finito in quanto  $\alpha(\mathcal{F}(x_i)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X)) < +\infty$  per la disuguaglianza provata prima, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che

esistono  $Y_{i,1},\ldots,Y_{i,k_i}$  tale che  $igcup_{j=1}^{k_i}Y_{i,j}=\mathcal{F}(x_i)$  e  $\mathrm{diam}(Y_{i,j})<lpha(\mathcal{F}(x_i))+rac{arepsilon}{4}$  per ogni  $j\in\{1,\ldots,k_i\}$  .

Sia 
$$\mathcal{F}_{i,j}=\{f\in\mathcal{F}:f(x_i)\in Y_{i,j}\mid i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,k_i\}\}$$
; si ha  $igcup_{i=1}^nigcup_{i=1}^{k_i}\mathcal{F}_{i,j}=\mathcal{F}.$ 

Si stimi  $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_{i,j})$  per ogni  $i \in \{1,\ldots,n\}$  e per ogni  $j \in \{1,\ldots,k_i\}$ .

Siano  $f,g\in\mathcal{F}_{i,j}$ .

Sia  $x \in X$ , e sia  $i \in \{1, \dots, n\}$  per cui  $x \in X_i$  (che esiste perché  $X_1, \dots, X_n$  ricoprono X).

Si ha

$$d(f(x),g(x)) \leq d(f(x),f(x_i)) + d(f(x_i),g(x_i)) + d(g(x_i),g(x))$$

 $\leq \omega_f(X_i) + \operatorname{diam}(Y_{i,j}) + \omega_f(X_i)$ 

Disuguaglianza triangolare applicata due volte

Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dal fatto che  $x, x_i \in X_i$ 

La maggiorazione del secondo segue dal fatto che  $f(x_i), g(x_i) \in Y_{i,j}$ 

$$0<rac{arepsilon}{4}+lpha(\mathcal{F}(x_i))+rac{arepsilon}{4}+rac{arepsilon}{4}=lpha(\mathcal{F}(x_i))+rac{3arepsilon}{4}$$

 $0 \leq \sup_{x \in X} lpha(\mathcal{F}(x)) + rac{3arepsilon}{4}$ 

Per costruzione di  $X_i$  e  $Y_{i,j}$ 

Per definizione di  $\sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x))$ 

Dunque, si ha  $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_{i,j}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \frac{3\varepsilon}{4} < \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$  per ogni  $i \in \{1,\dots,n\}$  e per ogni  $j \in \{1,\dots,k_i\}$ .

Allora, la famiglia  $\{\mathcal{F}_{i,j}\mid i\in\{1,\ldots,n\}, j\in\{1,\ldots,k_i\}\}$  è un ricoprimento finito di  $\mathcal{F}$  costituito da insiemi di diametro minore di  $\sup_{x\in X}\alpha(\mathcal{F}(x))+\varepsilon$ .

Pertanto,  $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$  per definizione di  $\alpha(\mathcal{F})$ .

Segue  $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x))$  per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ .

#### P Equivalenza della totale limitatezza di un insieme di funzioni totalmente limitate

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F} \subseteq TB(X,Y)$ .

Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

- 1.  $\mathcal{F}$  è totalmente limitato in TB(X,Y) rispetto a  $\rho_d$ .
- 2. Le funzioni in  $\mathcal{F}$  sono equi-totalmente limitate, e  $\mathcal{F}(X)$  è totalmente limitato in Y rispetto a d.
- 3. Le funzioni in  $\mathcal F$  sono equi-totalmente limitate, e  $\mathcal F(x)$  è totalmente limitato in Y rispetto a d per ogni  $x \in X$ .

#### **Dimostrazione**

Basta mostrare che, se  $\mathcal F$  è totalmente limitato in TB(X,Y) rispetto a  $\rho_d$ , allora le sue funzioni sono equitotalmente limitate.

Sia  $\varepsilon > 0$ .

Essendo  $\mathcal F$  totalmente limitato per ipotesi, esistono  $\mathcal F_1,\dots,\mathcal F_n\subseteq\mathcal F$  con  $\bigcup_{i=1}^n\mathcal F_i=\mathcal F$ , tali che  $\mathrm{diam}(\mathcal F_i)<\frac{\varepsilon}{4}$  per ogni  $i\in\{1,\dots,n\}.$ 

Per ogni  $i \in \{1, \ldots, n\}$ , sia  $f_i \in \mathcal{F}_i$ .

Essendo  $\mathcal{F} \subseteq TB(X,Y)$ ,  $f_i$  è totalmente limitata per ogni  $i \in \{1,\ldots,n\}$ .

Allora, esistono  $X_{i,1},\ldots,X_{i,k_1}\subseteq X$  con  $igcup_{j=1}^{k_i}X_j^{(i)}=X$  tali che  $\omega_{f_i}(X_{i,j})<rac{arepsilon}{4}$  per ogni  $j\in\{1,\ldots,k_i\}.$ 

Sia 
$$\mathcal{D}=\prod\limits_{i=1}^n\{1,\ldots,k_i\}=\{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n: orall i\in\{1,\ldots,n\},\ j_i\leq k_i\}.$$

Si considerino gli insiemi del tipo  $X_{1,j_1}\cap X_{2,j_2}\cap \cdots \cap X_{n,j_n}$  al variare di  $(j_1,\ldots,j_n)\in \mathcal{D}$ ; si osserva intanto che questi ricoprono X.

Si vuole studiare l'oscillazione di una qualsiasi funzione  $f \in \mathcal{F}$ , sugli insiemi  $X_{1,j_1} \cap \cdots \cap X_{n,j_n}$  al variare di  $(j_1,\ldots,j_n) \in \mathcal{D}$ .

Siano dunque  $x,y\in X_{1,j_1}\cap\cdots\cap X_{n,j_n}$ ; sia  $f\in\mathcal{F}$ , e sia i tale che  $f\in\mathcal{F}_i$ .

Si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$$d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y))$$

$$0 \leq 
ho_d(f,f_i) + \omega_{f_i}(X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}) + 
ho_d(f,f_i)$$

Disuguaglianza triangolare applicata due volte

Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dalla definizione di  $ho_d(f,f_i)$ 

La maggiorazione del secondo segue dal fatto che  $x,y\in X_{1,j_1}\cap\cdots\cap X_{n,j_n}$ 

Segue dal fatto che 
$$ho_d(f,f_i) \leq \operatorname{diam}(\mathcal{F}_i) < rac{arepsilon}{4}$$
 e  $\omega_{f_i}(X_{1,j_1} \cap \cdots \cap X_{n,j_n}) \leq \omega_{f_i}(X_{i,j_i}) < rac{arepsilon}{4}$ 

 $<\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}$ 

Dunque,  $\omega_f(X_{1,j_1}\cap\cdots\cap X_{n,j_n})\leq rac{3arepsilon}{4}<arepsilon$  per ogni  $f\in\mathcal{F}$  e per ogni  $(j_1,\ldots,j_n)\in\mathcal{D}$ .

Allora, la famiglia  $\{X_{1,j_1} \cap X_{2,j_2} \cap \cdots \cap X_{n,j_n} \mid (j_1,\ldots,j_n) \in \mathcal{D}\}$  è un ricoprimento finito di X costituito da insiemi su cui l'oscillazione di una qualsiasi funzione in  $\mathcal{F}$  è minore di  $\varepsilon$ .

Segue che le funzioni in  $\mathcal{F}$  sono equi-totalmente limitate per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ .