18 - Generalizzazione del Teorema delle Funzioni Implicite e del Moltiplicatore di Lagrange

Teorema 18.1: Teorema delle Funzioni Implicite generalizzato

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(E, \|\cdot\|_E)$ tre spazi di Banach.
Sia $A \subseteq X \times Y$ aperto.
$f : A \to E$ una funzione di classe C^1.
Sia $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$, tale che $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}_E$, e $f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{O}(Y, E)$.

Allora, esistono un intorno aperto U di $\mathbf{x}_0$, un intorno aperto V di $\mathbf{y}_0$ e una funzione $\mathscr{y} : U \to V$ di classe C^1, dimodoché:

- $U \times V \subseteq A$;
- $\text{Graph}(\mathscr{y}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$.

Inoltre, si ha
$\mathscr{y}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = -\big(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\big)^{-1}\big(f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})\big)$ per ogni $\mathbf{u} \in X$.

Dimostrazione

Si definisca la funzione $g : A \to X \times E$ ponendo
$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$ per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A$.

Le componenti di g di classe C^1;
infatti, la prima pari alla proiezione π_X, lineare, e la seconda pari a f, per ipotesi di classe C^1.

Allora, g è essa stessa di classe C^1 per la [Proposizione 17.2], e sempre per tale proposizione si ha

$$g'(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \big(\pi'_X(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v}), f'(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v})\big)$$

$= \big(\mathbf{u}, f'(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{u},\mathbf{v})\big)$ Essendo π_X lineare, si ha $\pi'_X(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \pi_X(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}$

$= \big(\mathbf{u}\,,\ f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{u}) + f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{v})\big)$ Per la [Proposizione 17.2], essendo f di classe C^1

per ogni $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in A$ e per ogni $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in X \times Y$.

Si provi che $g'(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) \in \mathcal{O}(X \times Y, X \times E)$;
essendo lineare, basta mostrare che $g'(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ è biunivoca; la continuità della funzione inversa sarà automaticamente acquisita ([Proposizione 13.2]).

Fissato allora $(\mathbf{z},\mathbf{w}) \in X \times E$, si vogliono ricavare $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in X \times Y$ soluzioni all'equazione
$g'(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{z},\mathbf{w})$.

Si ha

$$g'(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{z},\mathbf{w}) \iff \big(\mathbf{u}\,,\ f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{u}) + f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})(\mathbf{v})\big) = (\mathbf{z},\mathbf{w})$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{z} \\ f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{u}) + f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{z} \\ f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{z}) + f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \end{cases}$$

Dunque, le soluzioni all'equazione $g'(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{z},\mathbf{w})$ sono tutte e sole del tipo $(\mathbf{z},\mathbf{v}_s)$, con $\mathbf{v}_s \in Y$ soluzione all'equazione $f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{z}) + f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{v}_s) = \mathbf{w}$.

Essendo $f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) \in \mathcal{O}(Y,E)$ per ipotesi, esiste un'unico $\tilde{\mathbf{v}} \in Y$ tale che $f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{w} - f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{z})$.

Dunque, $(\mathbf{z},\tilde{\mathbf{v}})$ è l'unica soluzione in $X \times Y$ all'equazione
$g'(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)(\mathbf{z},\tilde{\mathbf{v}}) = (\mathbf{z},\mathbf{w})$.

È stato allora acquisito che $g'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{O}(X \times Y, X \times E)$;
dunque, si può allora applicare il teorema dell'inversione locale ([Teorema 14.5]) a g in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Esiste cioè un intorno aperto W di $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ contenuto in A, tale che $g(W)$ sia aperto e $g_{|W}$ sia un diffeomorfismo di classe C^1 tra W e $g(W)$.

Essendo W un intorno di $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ rispetto alla topologia prodotto su $X \times Y$, esistono un intorno I aperto di $\mathbf{x}_0$ e un intorno aperto V di $\mathbf{y}_0$, tali che $I \times V \subseteq W$;

è evidente che, essendo $g(W)$ aperto e $g_{|W}$ un diffeomorfismo di classe C^1 tra W e $g(W)$, avendo $I \times V \subseteq W$ aperto si ha anche che $g(I \times V)$ è aperto e $g_{|I \times W}$ è un diffeomorfismo di classe C^1 tra $I \times V$ e $g(I \times V)$.

Sia ora $U = \{\mathbf{x} \in I : (\mathbf{x}, \mathbf{0}_E) \in g(I \times V)\}$; esso è un intorno aperto di $\mathbf{x}_0$, contenuto in I.

Infatti, si ha evidentemente $U \subseteq I$ dalla definizione, e $\mathbf{x}_0 \in U$ in quanto $g(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \big(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\big) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{0}_E)$, essendo $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}_E$ per ipotesi;

Infine, si osserva che $U = I \cap \text{‘}\,\mathrm{id}, \mathbf{0}\text{’}^{-1}\big(g(I \times V)\big)$;
la mappa $\text{‘}\,\mathrm{id}, \mathbf{0}_E\text{’} : X \to X \times E$ è definita ponendo $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{0}_E)$ per ogni $\mathbf{x} \in X$ ed è dunque continua, I è aperto per costruzione e $g(I \times V)$ è aperto per quanto osservato prima.
Dunque, U è aperto.

Si definisca ora la funzione $\mathscr{y} : U \to V$ ponendo $\mathscr{y}(\mathbf{x}) \in V$ dimodoché $f\big(\mathbf{x}, \mathscr{y}(\mathbf{x})\big) = \mathbf{0}_E$.

- $\mathscr{y}$ è ben definita.

  Infatti, fissato $\mathbf{x} \in U$, si ha $(\mathbf{x}, \mathbf{0}_E) \in g(I \times V)$ per definizione di U;

  essendo g una biiezione tra $I \times V$ e $g(I \times V)$, esiste un unico $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \in I \times V$ tale che $g(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}_E)$, ossia $\big(\tilde{\mathbf{x}}, f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})\big) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}_E)$, che equivale a $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ e $f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}_E$.

Dunque, $\tilde{\mathbf{y}}$ è l'unica soluzione in V all'equazione $f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}_E$, e da ciò segue la buona definizione di $\mathscr{y}$.

- $\mathscr{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$.

  Infatti, si ha $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}_E$ per ipotesi, da cui segue $\mathbf{y}_0 = \mathscr{y}(\mathbf{x}_0)$ per buona definizione di $\mathscr{y}$.

- Si ha $\mathrm{Graph}(\mathscr{y}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}_E\}$.

  Infatti, fissato $\mathbf{x} \in U$, si ha $f\big(\mathbf{x}, \mathscr{y}(\mathbf{x})\big) = \mathbf{0}_E$ per definizione di $\mathscr{y}$; dunque, vale l'inclusione $\subseteq$.

  D'altra parte, fissato $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V$ tale che $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}_E$, si ha $\mathbf{y} = \mathscr{y}(\mathbf{x})$ per buona definizione di $\mathscr{y}$; dunque, vale l'inclusione $\supseteq$.

- $\mathscr{y}$ è di classe C^1.

  Infatti, si ha $\mathscr{y} = \pi_Y \circ g^{-1}_{|I \times V} \circ \text{‘}\,\mathbf{id}, \mathbf{0}_E\text{’}$, in quanto $\mathbf{x} \xmapsto{\text{‘}\mathbf{id}, \mathbf{0}_E\text{’}} (\mathbf{x}, \mathbf{0}_E) = g\big(\mathbf{x}, \mathscr{y}(\mathbf{x})\big) \xmapsto{g^{-1}_{|I\times V}} \big(\mathbf{x}, \mathscr{y}(\mathbf{x})\big) \xmapsto{\pi_Y} \mathscr{y}(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in U$.

  Essendo π_Y e $\text{‘}\,\mathbf{id}, \mathbf{0}_E\text{’}$ lineari e continue, esse sono di classe C^1;

  $g^{-1}_{|I \times V}$ è di classe C^1 essendo $g_{|I \times V}$ un diffeomorfismo di classe C^1 tra $I \times V$ e $g(I \times V)$.

  Dunque, $\mathscr{y}$ è di classe C^1.

- Si ha $\mathscr{y}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = -\big(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\big)^{-1}\big(f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})\big)$ per ogni $\mathbf{u} \in X$.

  Infatti, la mappa $\psi : U \to E$ definita ponendo $\psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathscr{y}(\mathbf{x}))$ per ogni $\mathbf{x} \in U$, è identicamente nulla per definizione di $\mathscr{y}$; dunque, $\psi'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_E$ per ogni $\mathbf{x} \in U$ e per ogni $\mathbf{u} \in X$.

D'altra parte, dalla [Proposizione 17.4] segue che

$\psi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \psi(\mathbf{x}_0))(\mathrm{id}'_X(\mathbf{x})(\mathbf{u})) + f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \psi(\mathbf{x}_0))\left(\psi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\right)$, ossia

$\psi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u}) + f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\left(\psi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\right)$, per ogni $\mathbf{u} \in X$.

Si ha allora $f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\left(\psi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\right) = -f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u} \in X$ da cui segue, essendo $f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{O}(Y, E)$ per ipotesi, che

$\psi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = -\left(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\right)^{-1}\left(f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{u})\right)$, per ogni $\mathbf{u} \in X$.

■

Teorema 18.2: Teorema del moltiplicatore di Lagrange generalizzato

Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach.
Sia $A \subseteq X$ aperto.
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1.
Sia $\mathbf{x}_0 \in A$ tale che $g(\mathbf{x}_0) = 0$ e $g'(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}_{X^*}$;
sia dunque $\mathbf{w} \in X$ tale che $g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}) \neq 0$.
Si supponga che $\mathbf{x}_0$ sia di estremo relativo per $f_{|g^{-1}(\{0\})}$.

Allora, $f'(\mathbf{x}_0) = \frac{f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})}{g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})} \cdot g'(\mathbf{x}_0)$.

Dimostrazione

Sia $\Omega = \{(\mathbf{x}, t) \in A \times \mathbb{R} : \mathbf{x} + t\mathbf{w} \in A\}$;

si definisca la funzione $h : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo $h(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} + t\mathbf{w})$ per ogni $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$.

Si osserva che la mappa $\mathscr{s} : \underset{(\mathbf{x},t)\,\mapsto\,\mathbf{x}+t\mathbf{w}}{A \times \mathbb{R} \to X}$ è di classe C^1;

infatti, essa è parzialmente derivabile in $A \times \mathbb{R}$, e per ogni $(\mathbf{x}, t) \in A \times \mathbb{R}$ si ha
$\mathscr{s}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in X$;
$\mathscr{s}'_t(\mathbf{x}, t)(v) = v\,\mathbf{w}$ per ogni $v \in \mathbb{R}$.
Essendo $\mathscr{s}'_{\mathbf{x}}$ e $\mathscr{s}'_t$ costanti su $A \times \mathbb{R}$, esse sono continue; dunque, $\mathscr{s}$ è di classe C^1 per la [Proposizione 17.3].

Ne segue che Ω è aperto, essendo pari a $\mathscr{s}^{-1}(A)$, e avendo A aperto e $\mathscr{s}$ continua;

ne segue anche che h è di classe C^1, essendo pari a $g \circ \mathscr{s}$, e avendo g di classe C^1 per ipotesi e $\mathscr{s}$ anch'essa di classe C^1;

Si osserva anche che $h(\mathbf{x}_0, 0) = g(\mathbf{x}_0) = 0$ per ipotesi;

infine, si nota che

$h'_t(\mathbf{x}_0, 0) = g'\big(\mathscr{s}(\mathbf{x}_0, 0)\big) \circ \mathscr{s}'_t(\mathbf{x}_0, 0)$	Dal teorema di derivazione di funzioni composte e dalla definizione di derivata parziale
$= g'(\mathbf{x}_0) \circ (\cdot)\mathbf{w}$	In quanto $\mathscr{s}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ e $\mathscr{s}'_t(\mathbf{x}_0, 0)(v) = v\,\mathbf{w}$ per ogni $v \in \mathbb{R}$
$= (\cdot)g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})$	In quanto $g'(\mathbf{x}_0)(v\,\mathbf{w}) = v\,g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})$ per ogni $v \in \mathbb{R}$, per linearità di $g'(\mathbf{x}_0)$
$\neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^*}$	Essendo $g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}) \neq 0$ per ipotesi

h soddisfa allora in $(\mathbf{x}_0, 0)$ le ipotesi del teorema delle funzioni implicite generalizzato ([Teorema 18.1]);
dunque, esistono un intorno aperto U di $\mathbf{x}_0$, con $U \subseteq A$, ed esiste una funzione $\mathscr{y} : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che:

- $\mathscr{y}(\mathbf{x}_0) = 0$;
- $\mathrm{Graph}(\mathscr{y}) \subseteq \Omega$, dunque $\big(\mathbf{x}, \mathscr{y}(\mathbf{x})\big) \in \Omega$ per ogni $\mathbf{x} \in U$;
- $h\big(\mathbf{x}, \mathscr{y}(\mathbf{x})\big) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U$.

Per completezza, si ricavi la legge di $h'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, 0)$;

$h'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, 0) = g'\big(\mathscr{s}(\mathbf{x}_0, 0)\big) \circ \mathscr{s}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, 0)$	Dal teorema di derivazione di funzioni composte e dalla definizione di derivata parziale
$= g'(\mathbf{x}_0) \circ \mathrm{id}_X$	In quanto $\mathscr{s}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ e $\mathscr{s}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, 0)(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in X$

$= g'(\mathbf{x}_0)$

Si supponga $\mathbf{x}_0$ di minimo relativo per $f_{|g^{-1}(\{0\})}$;
esiste allora un intorno aperto V intorno aperto di $\mathbf{x}_0$ (si supponga $V \subseteq U$) tale che $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in V \cap g^{-1}(\{0\})$.

La mappa $V \to X : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathscr{y}(\mathbf{x})\mathbf{w}$ è continua e tale che $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}_0$;
in corrispondenza all'intorno V di $\mathbf{x}_0$, esiste allora un intorno aperto W di $\mathbf{x}_0$ (si supponga $W \subseteq U$) tale che $\mathbf{x} + \mathscr{y}(\mathbf{x})\mathbf{w} \in V$ per ogni $\mathbf{x} \in W$.

Si osserva anche che $\mathbf{x} + \mathscr{y}(\mathbf{x})\mathbf{w} \in g^{-1}(\{0\})$ per ogni $\mathbf{x} \in W$;
infatti, fissato $\mathbf{x} \in W$ si ha $g(\mathbf{x} + \mathscr{y}(\mathbf{x})\mathbf{w}) = h(\mathbf{x}, \mathscr{y}(\mathbf{x})) = 0$,per definizione di h e per costruzione di $\mathscr{y}$.

Si definisca ora la funzione $\psi : W \to \mathbb{R}$ ponendo $\psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathscr{y}(\mathbf{x})\mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.

Si osserva che $\psi(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)$, ed era già stato osservato che $\mathbf{x} + \mathscr{y}(\mathbf{x})\mathbf{w} \in V \cap g^{-1}(\{0\})$ per ogni $\mathbf{x} \in V$;
per costruzione di V, ne viene allora che $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x} + \mathscr{y}(\mathbf{x})\mathbf{w})$, ossia $\psi(\mathbf{x}_0) \leq \psi(\mathbf{x})$, per ogni $\mathbf{x} \in V$.
Cioè, $\mathbf{x}_0$ è di minimo assoluto per ψ.

Essendo ψ di classe C^1, si ha allora $\psi'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$, cioè $\psi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = 0$ per ogni $\mathbf{u} \in X$.

D'altra parte, per derivazione delle funzioni composte si ha $\psi'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x} + \mathscr{y}(\mathbf{x})\mathbf{w})\big(\mathbf{u} + \mathscr{y}'(\mathbf{x})(\mathbf{u})\,\mathbf{w}\big)$ per ogni $\mathbf{x} \in W$ e per ogni $\mathbf{u} \in X$;

in particolare, si ha perciò
$\psi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x}_0)\big(\mathbf{u} + \mathscr{y}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\,\mathbf{w}\big) = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) + \mathscr{y}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) \cdot f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})$.

Allora, per ogni $\mathbf{u} \in X$ si ha

$f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = -\mathscr{y}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\; f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})$	Essendo $0 = \psi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) + \mathscr{y}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) \cdot f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})$
$= \big(h'_t(\mathbf{x}_0, 0)\big)^{-1}\big(h'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, 0)(\mathbf{u})\big) \cdot f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})$	Dal teorema delle funzioni implicite generalizzato ([Teorema 18.1])
$= \big((\cdot)\, g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})\big)^{-1}\big(g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\big) \cdot f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})$	Per legge di $h'_t(\mathbf{x}_0, 0)$ e $h'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, 0)$

$$= \frac{g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})}{g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})} \cdot f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}) \qquad \text{In quanto } \frac{g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})}{g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})} \cdot g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w}) = g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})$$

da cui segue che $f'(\mathbf{x}_0) = \dfrac{f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})}{g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{w})} \cdot g'(\mathbf{x}_0)$, come si voleva.

■

Corollario 18.3: Esistenza di soluzioni a un'equazione del tipo $\lambda\mathbf{x} = \dot{f}(\mathbf{x})$ con norma arbitrariamente piccola

Sia $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente.
Sia $r > 0$.

Esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che l'equazione $\lambda\mathbf{x} = \dot{f}(\mathbf{x})$ abbia almeno una soluzione $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\| \le r$.

Dimostrazione

L'insieme $\overline{B}(\mathbf{0}, r)$ è limitato, chiuso e convesso.

Essendo f sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente, per la [Proposizione 10.4] segue che f ammette minimo assoluto su $\overline{B}(\mathbf{0}, r)$.

Sia dunque $\mathbf{x}_0 \in \overline{B}(\mathbf{0}, r)$ un punto di minimo assoluto per f su $\overline{B}(\mathbf{0}, r)$.

Se $\|\mathbf{x}_0\| < r$, si ha $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{0}, r)$ aperto, dunque $\mathbf{x}_0$ è di minimo relativo per f su X;
dunque, si ha $\dot{J}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, e la tesi è acquisita in quanto $0\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} = \dot{J}(\mathbf{x}_0)$ e $\|\mathbf{x}_0\| < r$.

Se $\|\mathbf{x}_0\| = r$, si definisca la funzione $g : X \to \mathbb{R}$ ponendo $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - r^2$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Si ha che g è di classe C^1 e $g(\mathbf{x}_0) = 0$;
inoltre, per la [Proposizione 16.2] ed essendo $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ in quanto $\|\mathbf{x}_0\| = r > 0$, si ha

$\dot{g}(\mathbf{x}_0) = 2\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$.

Per il teorema del moltiplicatore di Lagrange generalizzato ([Teorema 18.2]), fissato $\mathbf{w} \in X$ tale che $\langle \dot{g}(\mathbf{x}_0), \mathbf{w} \rangle \neq 0$ si ha
$\dot{f}(\mathbf{x}_0) = \frac{\langle \dot{f}(\mathbf{x}_0), \mathbf{w} \rangle}{\langle \dot{g}(\mathbf{x}_0), \mathbf{w} \rangle} \cdot \dot{g}(\mathbf{x}_0) = \frac{\langle \dot{f}(\mathbf{x}_0), \mathbf{w} \rangle}{\langle 2\mathbf{x}_0, \mathbf{w} \rangle} \cdot 2\mathbf{x}_0 = \frac{\langle \dot{f}(\mathbf{x}_0), \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{w} \rangle} \cdot \mathbf{x}_0;$

la tesi è allora acquisita anche in questo caso.

■