

22 - Misurabilità e Forte μ -Misurabilità di Funzioni

Premesse

> **Notazioni:** \mathcal{L}_n, μ

Sia $n \in \mathbb{N}$.

\mathcal{L}_n denota l'insieme dei sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , misurabili secondo Lebesgue.

Fissato $S \in \mathcal{L}_n$, si denota con $\mu(S)$ la misura di Lebesgue di S .

> **Densità**

Sia X uno spazio topologico.

Siano $A \subseteq X$, e $B \subseteq A$.

B si dice denso in A quando $\overline{B} = \overline{A}$ (dove la chiusura effettuata si considera per entrambi rispetto a X).

> **Separabilità**

Sia X uno spazio topologico.

Sia $A \subseteq X$.

A si dice separabile quando esiste $D \subseteq A$ al più numerabile e denso in A .

> Proprietà della separabilità

Sia X uno spazio topologico.

Si hanno i seguenti fatti:

- Fissato $A \subseteq X$ separabile, \overline{A} è separabile;
- Fissata una successione $\{A_n \subseteq X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di insiemi separabili, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è separabile.
- Se X è metrizzabile, fissati $A \subseteq X$ separabile e $B \subseteq A$, B è separabile.
- Se X è metrizzabile, fissato $A \subseteq X$ totalmente limitato, A è separabile.

> Continuità della distanza da un insieme fissato

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Sia $S \subseteq X$.

La mappa $d(\cdot, S) : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $x \mapsto d(x, S)$ è continua.

Misurabilità di funzioni

⌘ Definizione: Funzione misurabile

Sia $T \in \mathcal{L}_n$.

Sia X uno spazio topologico.

Sia $f : T \rightarrow X$ una funzione.

f si dice **misurabile** quando
per ogni $A \subseteq X$ aperto, $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}_n$.

Q Osservazione

f è misurabile se e solo se,
per ogni $C \subseteq X$ chiuso, $f^{-1}(C) \in \mathcal{L}_n$.

Infatti, si hanno i seguenti fatti:

- Per ogni $S \subseteq X$, si ha $f^{-1}(X \setminus S) = T \setminus f^{-1}(S)$.
- Per ogni $M, N \in \mathcal{L}_n$, si ha $M \setminus N \in \mathcal{L}_n$.

Allora, se f è misurabile, per ogni $C \subseteq X$ chiuso sia $A = X \setminus C$, che dunque è aperto;
si ha $f^{-1}(C) = f^{-1}(X \setminus A) = T \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{L}_n$.

Viceversa, se $f^{-1}(C) \in \mathcal{L}_n$ è misurabile per ogni $C \subseteq X$ chiuso, per ogni $A \subseteq X$ aperto sia $C = X \setminus A$, che dunque è chiuso;
si ha $f^{-1}(A) = f^{-1}(X \setminus C) = T \setminus f^{-1}(C) \in \mathcal{L}_n$.

Q Osservazione: Funzioni continue sono misurabili

Sia $T \in \mathcal{L}_n$.

Sia X uno spazio topologico.

Sia $f : T \rightarrow X$ una funzione continua.

Allora, f è misurabile.

Infatti, per ogni $A \subseteq X$ aperto si ha $f^{-1}(A)$ aperto in \mathbb{R}^n per ipotesi di continuità di f .

Poiché gli insiemi aperti in \mathbb{R}^n sono misurabili per definizione di μ , ne segue che $f^{-1}(A)$ è misurabile.

Q Osservazione: Misurabilità di una funzione composta

Sia $T \in \mathcal{L}_p$.

Siano X e Y due spazi topologici.

Sia $f : T \rightarrow X$ una funzione misurabile.

Sia $g : X \rightarrow Y$ una funzione continua.

Allora, $g \circ f$ è misurabile.

Infatti, fissato $A \subseteq Y$ aperto, si ha $g^{-1}(A)$ aperto in X per ipotesi di continuità di g .

Allora, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(A))$ è misurabile, essendo $g^{-1}(A)$ aperto e f misurabile per ipotesi

Q Osservazione: Misurabilità di una funzione ristretta a insiemi di un ricoprimento numerabile del dominio ne implica la misurabilità

Sia $T \in \mathcal{L}_p$.

Sia X uno spazio topologico.

Sia $f : T \rightarrow X$.

Sia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_p$ una successione tale che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = T$, e $f|_{T_n}$ sia misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora, f è misurabile.

Infatti, fissato $A \subseteq X$ aperto, si ha

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= f^{-1}(A) \cap T && \text{Essendo } f^{-1}(A) \subseteq T \\ &= f^{-1}(A) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n && \text{Essendo } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = T \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A) \cap T_n \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f|_{T_n}^{-1}(A) && \text{Essendo } f|_{T_n}^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap T_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

L'ultimo insieme è misurabile, in quanto unione numerabile di insiemi che sono misurabili per ipotesi di misurabilità di $f|_{T_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

⌘ Definizione: Dilatazioni di un insieme

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Sia $S \subseteq X$.

Sia $r > 0$.

Si dice **dilatazione** di S di raggio r l'insieme

$$B(S, r) := \{x \in X : d(x, S) < r\}$$

🔍 Osservazione

Si osservano i seguenti fatti:

- $B(S, r) = \bigcup_{x \in S} B(x, r)$;
- $B(S, r)$ è aperto.

Infatti, sia $x_0 \in \bigcup_{x \in S} B(x, r)$;

esiste allora $\tilde{x} \in S$ tale che $x_0 \in B(\tilde{x}, r)$, ossia $d(x_0, \tilde{x}) < r$.

Si ha allora $d(x_0, S) = \inf_{x \in S} d(x_0, x) \leq d(x_0, \tilde{x}) < r$, per cui $x_0 \in B(S, r)$.

Viceversa, sia $x_0 \notin \bigcup_{x \in S} B(x, r)$;

per ogni $x \in S$ si ha allora $x_0 \notin B(x, r)$, ossia $d(x_0, x) \geq r$.

Ne viene che $d(x_0, S) = \inf_{x \in S} d(x_0, x) \geq r$, per cui

$x_0 \notin B(S, r)$.

Il primo punto è dunque acquisito;

da questo segue il secondo, in quanto $B(S, r)$ si scrive allora come unione di aperti, e dunque è aperto.

Proposizione 22.1: Limite di funzioni misurabili è misurabile

Sia $T \in \mathcal{L}_p$.

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Sia $\{f_n : T \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili da T in X .

Si supponga che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga puntualmente su T ;

sia $f : T \rightarrow X$ il suo limite puntuale.

f è misurabile.

⌘ Richiamo: Unione e intersezione numerabili di insiemi misurabili

Sia $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_p$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili.

Allora, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \in \mathcal{L}_p$, e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \in \mathcal{L}_p$.

📄 Dimostrazione

Sia $C \subseteq X$ chiuso;

si provi che $f^{-1}(C) \in \mathcal{L}_p$.

Si vuole provare che $f^{-1}(C) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} f_n^{-1}\left(B(C, \frac{1}{h})\right)$;

così facendo, la tesi sarà acquisita in quanto:

- $B(C, \frac{1}{h})$ è aperto per ogni $h \in \mathbb{N}$, per quanto osservato sulle dilatazioni di un insieme;
- $f_n^{-1}\left(B(C, \frac{1}{h})\right) \in \mathcal{L}_p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $h \in \mathbb{N}$, per il punto precedente ed essendo f_n misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ipotesi;
- $\bigcap_{h \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} f_n^{-1}\left(B(C, \frac{1}{h})\right) \in \mathcal{L}_p$ per il punto precedente e per quanto richiamato prima sull'unione e l'intersezione numerabili di insiemi misurabili.

Intanto, si osserva che, per ogni $t \in T$, si ha

$$t \in \bigcap_{h \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} f_n^{-1}\left(B(C, \frac{1}{h})\right)$$

\Longleftrightarrow per ogni $h \in \mathbb{N}$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq k$, valga $d(f_n(t), C) < \frac{1}{h}$

$\Longleftrightarrow \lim_n d(f_n(t), C) = 0$

$$d(f(t), C) = 0$$

$\lim_n d(f_n(t), C) = d(f(t), C)$, in quanto la successione $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge per ipotesi a $f(t)$ e $d(\cdot, C)$ è continua per le osservazioni preliminari

Dunque, basta mostrare che $t \in f^{-1}(C)$ se e solo se $d(f(t), C) = 0$.

Se $t \in f^{-1}(C)$, si ha $f(t) \in C$; dunque si ha evidentemente $d(f(t), C) = 0$.

Viceversa, se $d(f(t), C) = 0$, essendo C chiuso e $\{f(t)\}$ compatto si ha $C \cap \{f(t)\} \neq \emptyset$, cioè $f(t) \in C$.

La dimostrazione è perciò conclusa.



Proposizione 22.2: Criterio della misurabilità e dell'immagine separabile

Sia $T \in \mathcal{L}_p$.

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Sia $f : T \rightarrow X$ una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è misurabile e $f(T)$ è separabile (ammette cioè un sottoinsieme denso al più numerabile);
2. Esiste una successione $\{f_n : T \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente uniformemente in T a f , tale che $f_n(T)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;

3. Esiste una successione $\{f_n : T \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente puntualmente in T a f , tale che $f_n(T)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

 **Dimostrazione:** 2. \Rightarrow 3.

Si supponga che esista una successione $\{f_n : T \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili convergente uniformemente in T a f , tale che $f_n(T)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;

la tesi segue immediatamente dal fatto che la convergenza uniforme implica quella puntuale, e dunque $\{f_n : T \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente anche puntualmente in T a f .

 **Dimostrazione:** 3. \Rightarrow 1.

Si supponga l'esistenza di una successione $\{f_n : T \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili convergente puntualmente in T a f , tale che $f_n(T)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

f è misurabile per la [Proposizione 22.1], essendo $\{f_n : T \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ per ipotesi una successione di funzioni misurabili convergente puntualmente in T a f .

Resta da provare che $f(T)$ è separabile.

Essendo $f_n(T)$ al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ipotesi, si ha che anche $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(T)$ è al più numerabile, essendo unione numerabile di insiemi al più numerabili;

allora, l'insieme $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(T)}$ è separabile, in quanto chiusura di un insieme al più numerabile (che dunque ha come sottoinsieme denso al più numerabile proprio l'insieme di cui si fa la chiusura).

Si osserva infine che $f(T) \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(T)}$;

infatti, per ogni $t \in T$ si ha $f(t) = \lim_n f_n(t)$ per ipotesi, e $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(T)$.

Allora, $f(T)$ è anch'esso separabile per l'osservazione preliminare, e la tesi è acquisita.

■

📄 Dimostrazione: 1. \Rightarrow 2.

Si supponga f misurabile e $f(T)$ separabile.

Sia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq f(T)$ una successione densa in $f(T)$, che esiste per ipotesi.

Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, si ponga $A_{n,k} = f^{-1}\left(B\left(x_k, \frac{1}{n}\right)\right)$.

$A_{n,k}$ è misurabile per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, essendo $B\left(x_k, \frac{1}{n}\right)$ aperto e f misurabile per ipotesi.

Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, si definisca ora

$$B_{n,k} = \begin{cases} A_{n,1} & , \quad n = 1 \\ A_{n,k} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_{n,i} & , \quad n > 1 \end{cases}$$

Si ha:

- $B_{n,k}$ misurabile per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, essendo misurabili gli insiemi $A_{n,k}$;
- $B_{n,h} \cap B_{n,k} = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ con $h \neq k$;
- $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{n,k}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si osserva anche che $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{n,k} = T$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

infatti, vale \subseteq in quanto $A_{n,k} \subseteq T$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, essendo $A_{n,k} = f^{-1}\left(B(y_k, \frac{1}{n})\right)$ per definizione.

Viceversa, vale \supseteq in quanto, fissato $t \in T$ e fissato $n \in \mathbb{N}$, per costruzione di $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $d(f(x), y_k) < \frac{1}{n}$, ossia $f(t) \in B(x_k, \frac{1}{n})$, cioè $t \in f^{-1}\left(B(x_k, \frac{1}{n})\right) = A_{n,k}$.

Da queste tre proprietà segue che la famiglia $\{B_{n,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ è una partizione di T per ogni $n \in \mathbb{N}$.

per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca ora la funzione $f_n : T \rightarrow X$ ponendo $f_n(t) = x_k$, con $k \in \mathbb{N}$ tale che $t \in B_{n,k}$.

Si hanno i seguenti fatti:

- f_n è ben definita per ogni $n \in \mathbb{N}$, essendo k unico in quanto $\{B_{n,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ è una partizione di T .
- f_n è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
infatti, addirittura per ogni $S \subseteq X$ si ha $f_n^{-1}(S) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} : x_k \in S} B_{n,k}$ per definizione di f_n ; tale insieme è misurabile in quanto unione al più numerabile degli insiemi $B_{n,k}$, misurabili.
- $f_n(T)$ è al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, essendo $f_n(T) \subseteq \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.
- La successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f ;
infatti, fissati $n \in \mathbb{N}$ e $t \in T$ e posto $k \in \mathbb{N}$ tale che $t \in B_{n,k}$, si ha $d(f_n(t), f(t)) = d(x_k, f(t)) < \frac{1}{n}$, essendo $t \in B_{n,k} \subseteq A_{n,k} = f^{-1}\left(B(x_k, \frac{1}{n})\right)$.

La successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa allora le proprietà richieste dal punto 2. ;

la tesi è perciò acquisita.

■

Forte μ -misurabilità di funzioni

⌘ Definizione: Funzione fortemente μ -misurabile

Sia $T \in \mathcal{L}_p$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : T \rightarrow X$ una funzione.

f si dice **fortemente μ -misurabile** quando

esiste $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, tale che $f|_{T \setminus T_0}$ è misurabile e $f(T \setminus T_0)$ è separabile.

Q Osservazione

In virtù della [Proposizione 22.2], la forte μ -misurabilità di f equivale a ciascuna delle seguenti due affermazioni:

- esistono $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, e una successione $\{f_n : T \setminus T_0 \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente uniformemente in $T \setminus T_0$ a $f|_{T \setminus T_0}$, tale che $f_n(T \setminus T_0)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- esistono $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, e una successione $\{f_n : T \setminus T_0 \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente puntualmente in $T \setminus T_0$ a $f|_{T \setminus T_0}$, tale che $f_n(T \setminus T_0)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Q Osservazione: Forte μ -misurabilità implica misurabilità

Sia $T \in \mathcal{L}_p$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : T \rightarrow X$ una funzione fortemente μ -misurabile.

Allora, f è misurabile.

Infatti, sia $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, tale che $f|_{T \setminus T_0}$ sia misurabile;
tale insieme esiste per ipotesi di forte μ -misurabilità di f .

Per ogni $A \subseteq X$ aperto si ha allora $f^{-1}(A) = f|_{T \setminus T_0}^{-1}(A) \cup f|_{T_0}^{-1}(A)$.

il primo insieme è misurabile per costruzione di T_0 ;

il secondo insieme è contenuto in T_0 che ha misura nulla, e dunque anch'esso ha misura nulla per completezza della misura di Lebesgue.

Dunque $f^{-1}(A)$ è misurabile, e dunque f è una funzione misurabile per arbitrarietà di $A \subseteq X$ aperto.

Proposizione 22.3: Forte μ -misurabilità di una combinazione lineare

Sia $T \in \mathcal{L}_p$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Siano $f, g : T \rightarrow X$ due funzioni fortemente μ -misurabili.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Allora, $\alpha f + \beta g$ è fortemente μ -misurabile.

Proposizione 22.4: Limite quasi ovunque di funzioni fortemente μ -misurabili è fortemente μ -misurabile

Sia $T \in \mathcal{L}_p$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $\{f_n : T \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni fortemente μ -misurabili da T in X .

Si supponga che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga quasi ovunque su T ;

sia $f : T \rightarrow X$ limite puntuale quasi-ovunque di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

f è fortemente μ -misurabile.

Dimostrazione

Per ipotesi di convergenza di $\{f_n : T \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ a f quasi ovunque su T , sia $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, tale che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga puntualmente a f su $T \setminus T_0$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, f_n è fortemente μ -misurabile per ipotesi;
esiste dunque $T_n \subseteq T$ con $\mu(T_n) = 0$, tale che $(f_n)_{|T \setminus T_n}$ è misurabile e $f_n(T \setminus T_n)$ è separabile.

Sia ora $\tilde{T} = T_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Per numerabile sub-addittività della misura di Lebesgue, si ha $\mu(\tilde{T}) \leq \mu(T_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T_n) = 0$; dunque, ne viene che $\mu(\tilde{T}) = 0$.

Inoltre, $(f_n)_{|T \setminus \tilde{T}}$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;

infatti, per ogni $A \subseteq X$ aperto si ha $(f_n)_{|T \setminus \tilde{T}}^{-1}(A) = (f_n)_{|T \setminus T_n}^{-1}(A) \cap (T \setminus \tilde{T})$ misurabile, in quanto $(f_n)_{|T \setminus T_n}$ è misurabile per costruzione di T_n , e $T \setminus \tilde{T}$ è misurabile.

Ne viene che $f_{|T \setminus \tilde{T}}$ è misurabile.

Infatti, poiché $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a f in $T \setminus T_0$ per costruzione di T_0 , essendo $T_0 \subseteq \tilde{T}$ si ha a maggior ragione che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a f su $T \setminus \tilde{T}$;

la misurabilità di $f_{|T \setminus \tilde{T}}$ segue allora dalla [Proposizione 22.1].

Infine, $f(T \setminus \tilde{T})$ è separabile.

Infatti, $f_n(T \setminus T_n)$ è separabile per ogni $n \in \mathbb{N}$ per costruzione di T_n ; ne viene allora che

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(T \setminus T_n)$ è separabile

Essendo unione
numerabile di insiemi
separabili

$\Rightarrow \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(T \setminus T_n)}$ è separabile

In quanto chiusura di un insieme separabile

$f(T \setminus \tilde{T})$ è separabile
Infatti, $f(T \setminus \tilde{T}) \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(T \setminus T_n)}$ in quanto $f(t) = \lim_n f_n(t)$ per ogni $t \in T \setminus \tilde{T}$, dunque è separabile essendo sottoinsieme di un insieme separabile

Avendo dedotto che $\mu(\tilde{T}) = 0$, $f|_{T \setminus \tilde{T}}$ è misurabile e $f(T \setminus \tilde{T})$ è separabile, la tesi è acquisita.

■

Teorema 22.5: Teorema di Lusin

Sia $T \in \mathcal{L}_p$ con $\mu(T) < +\infty$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : T \rightarrow X$ una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è fortemente μ -misurabile;
2. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $K \subseteq T$ compatto con $\mu(T \setminus K) < \varepsilon$, tale che $f|_K$ sia continua.

Dimostrazione: 2. \Rightarrow 1.

Si supponga che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista $K \subseteq T$ compatto con $\mu(T \setminus K) < \varepsilon$, tale che $f|_K$ sia continua.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia allora $K_n \subseteq T$ compatto con $\mu(T \setminus K_n) < \frac{1}{n}$, tale che $f|_{K_n}$ sia continua.

In quanto continua, $f|_{K_n}$ è allora anche misurabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Inoltre, sempre per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(K_n)$ compatto per compattezza di K_n e continuità di $f|_{K_n}$; allora, $f(K_n)$ è totalmente limitato essendo compatto in uno spazio metrico, dunque separabile.

Sia $T_0 = T \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (T \setminus K_n)$; per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \mu(T_0) &\leq \mu(T \setminus K_n) && \text{Per monotonia della misura di Lebesgue, in quanto } T_0 \subseteq T \setminus K_n \\ &< \frac{1}{n} && \text{Per costruzione di } K_n \end{aligned}$$

Ne segue che $\mu(T_0) = 0$.

$f|_{T \setminus T_0}$ è misurabile.

Infatti, dalla definizione di T_0 segue che $T \setminus T_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$; avendo osservato prima che $f|_{K_n}$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, ne viene la misurabilità di $f|_{T \setminus T_0}$.

$f(T \setminus T_0)$ è separabile.

Infatti, dalla definizione di T_0 segue che $T \setminus T_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$; si ha dunque

$$f(T \setminus T_0) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n\right) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(K_n).$$

Avendo osservato prima che $f(K_n)$ è separabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, ne segue che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(K_n)$ è separabile in quanto unione numerabile di insiemi separabili, e dunque $f(T \setminus T_0)$ è separabile in quanto sottoinsieme di un insieme separabile.

Avendo dedotto che $\mu(T_0) = 0$, $f|_{T \setminus T_0}$ è misurabile e $f(T \setminus T_0)$ è separabile, la tesi è acquisita.

■

 **Dimostrazione:** 1. \Rightarrow 2.

Si supponga f fortemente μ -misurabile.

Ciò significa che esistono $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, e una successione $\{f_n : T \setminus T_0 \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, convergente uniformemente in $T \setminus T_0$ a $f|_{T \setminus T_0}$, tale che $f_n(T \setminus T_0)$ sia al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Essendo al più numerabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ponga allora $f_n(T \setminus T_0) = \{\mathbf{x}_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Si fissi adesso $\varepsilon > 0$.

Si fissi anche $n \in \mathbb{N}$.

Ricordando che $\mu(T) < +\infty$ per ipotesi, si osserva che vale

$$\begin{aligned} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} &= T \setminus T_0 && \text{In quanto } \{\mathbf{x}_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}} = f_n(T \setminus T_0) \\ \implies \lim_r \mu \left(\bigcup_{k=1}^r f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \right) &= \mu(T \setminus T_0) && \text{Per continuità verso l'alto della misura di Lebesgue} \\ \implies \lim_r \mu \left((T \setminus T_0) \setminus \bigcup_{k=1}^r f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \right) &= 0 && \text{Per sottrattività della misura di Lebesgue} \end{aligned}$$

Esiste allora $r_n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu \left((T \setminus T_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Per ogni $k \in \{1, \dots, r_n\}$, sia $H_{n,k} \subseteq f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}$ compatto, tale che $\mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \setminus H_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}r_n}$.

Si ha che:

- Tali $H_{n,k}$ esistono;

infatti, per definizione di μ si ha che $\mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}) = \sup\{H \subseteq f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} : H \text{ chiuso e limitato}\}$; dunque, esiste $H_{n,k} \subseteq f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}$ chiuso e limitato, cioè compatto essendo sottoinsieme di \mathbb{R}^p , tale che $\mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}) < \mu(H_{n,k}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}r_n}$.

Segue allora dalla sottrattività di μ che $\mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \setminus H_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}r}$.

- $H_{n,i} \cap H_{n,j} = \emptyset$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, r_n\}$ con $i \neq j$;

infatti, si ha $H_{n,i} \subseteq f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,i}\}$ per ogni $i \in \{1, \dots, r_n\}$, e si ha $f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,i}\} \cap f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,j}\} = \emptyset$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, r_n\}$ con $i \neq j$.

Sempre per ogni $k \in \{1, \dots, r_n\}$, si definisca la funzione $\varphi_{n,k} : T \rightarrow [0; 1]$ ponendo

$$\varphi_{n,k}(t) = \frac{d\left(t, \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq r_n \\ i \neq k}} H_{n,i}\right)}{d(t, H_{n,k}) + d\left(t, \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq r_n \\ i \neq k}} H_{n,i}\right)} \text{ per ogni } t \in T; \text{ si ha che:}$$

- $\varphi_{n,k}$ è ben definita per ogni $k \in \{1, \dots, r_n\}$;

infatti, si ha evidentemente $\varphi_{n,k} \in [0; 1]$.

Il denominatore è sempre strettamente positivo in quanto, se $d(t, H_{n,k}) = 0$, essendo H_k chiuso in quanto compatto si ha $t \in H_{n,k}$, dunque $t \notin \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq r_n \\ i \neq k}} H_{n,i}$ in quanto gli $H_{n,i}$ sono a due a due disgiunti per quanto osservato prima, dunque

$$d\left(t, \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq r_n \\ i \neq k}} H_i\right) > 0 \text{ essendo } \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq r_n \\ i \neq k}} H_i \text{ chiuso in quanto unione finita di compatti, che sono chiusi.}$$

- $\varphi_{n,k}$ è continua per ogni $k \in \{1, \dots, r_n\}$, essendo la distanza da un fissato insieme continua.

Si definisca ora la funzione $\psi_n : T \rightarrow X$ ponendo

$$\psi_n(t) = \sum_{k=1}^{r_n} \varphi_{n,k}(t) \mathbf{x}_{n,k} \text{ per ogni } t \in T.$$

Si ha che:

- ψ_n è continua, evidentemente;
- $\psi_n(t) = f_n(t)$ per ogni $t \in \bigcup_{k=1}^{r_n} H_{n,k}$.

Infatti, fissato $t \in \bigcup_{k=1}^{r_n}$, per quanto osservato prima sugli $H_{n,k}$ esiste un unico $k_0 \in \{1, \dots, r_n\}$ tale che $t \in H_{n,k_0}$.

Ricordando che gli $H_{n,k}$ chiusi in quanto compatti, e che la distanza di un punto da un insieme chiuso nulla se e solo se tale punto vi appartiene, si ha allora che $\varphi_{n,k_0} = 1$ e $\varphi_{n,k} = 0$ per ogni $k \in \{1, \dots, r_n\}$ con $k \neq k_0$.

Dunque, $\psi_n(t) = \mathbf{x}_{n,k_0}$;

d'altra parte, si ha $f_n(t) = \mathbf{x}_{n,k_0}$ in quanto $t \in H_{n,k_0}$ e $H_{n,k_0} \subseteq f^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k_0}\}$ per costruzione.

Si ponga adesso $K_n = \bigcup_{k=1}^{r_n} H_{n,k}$; si ha che:

- K_n è compatto, essendo un sottoinsieme di \mathbb{R}^p chiuso e limitato in quanto unione finita degli $H_{n,k}$, chiusi e limitati in quanto compatti;
- $(f_n)|_{K_n}$ è continua, essendo pari a $(\psi_n)|_{K_n}$ ed essendo questa continua, per quanto osservato prima su ψ_n ;

Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} & \mu \left(\bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \setminus K_n \right) \\ & \leq \sum_{k=1}^{r_n} \mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \setminus K_n) \quad \text{Per finita sub-additività di } \mu \\ & \leq \sum_{k=1}^{r_n} \mu(f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \setminus H_{n,k}) \quad \text{Per monotonia di } \mu, \text{ essendo } K_n \subseteq H_{n,k} \text{ per ogni } k \in \{1, \dots, r_n\} \text{ per costruzione di } K_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \sum_{k=1}^{r_n} \frac{\varepsilon}{2^{n+1} r_n} \\
&= \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Per costruzione degli $H_{n,k}$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
&\mu((T \setminus T_0) \setminus K_n) \\
&\leq \mu\left((T \setminus T_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \setminus K_n\right) \quad \text{Per sub-additività di } \mu, \text{ in quanto} \\
&\quad (T \setminus T_0) \setminus K_n = \left((T \setminus T_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\}\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{r_n} f_n^{-1}\{\mathbf{x}_{n,k}\} \setminus K_n\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{Per costruzione di } r_n, \text{ e per la catena di disuguaglianze ap}
\end{aligned}$$

Si ponga infine $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$; esso è compatto in quanto intersezione di compatti.

Si ha

$$\begin{aligned}
&\mu(T \setminus K) = \mu((T \setminus K) \setminus T_0) \quad \text{In quanto } T_0 \text{ ha misura nulla per costruzione} \\
&= \mu((T \setminus T_0) \setminus K) \quad \text{Facendo uso dell'uguaglianza insiemistica } (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B \\
&= \mu\left((T \setminus T_0) \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n\right) \quad \text{Per definizione di } K \\
&= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T \setminus T_0) \setminus K_n\right) \quad \text{In quanto } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T \setminus T_0) \setminus K_n = (T \setminus T_0) \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu((T \setminus T_0) \setminus K_n) \quad \text{Per numerabile sub-additività della misura di Lebesgue} \\
&< \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{Per confronto delle serie numeriche, essendo } \mu(T \setminus (T_0 \cup K_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \\
&\quad \text{per quanto osservato prima} \\
&= \varepsilon \quad \text{Dall'espressione della somma di una serie geometrica}
\end{aligned}$$

Inoltre, $f|_K$ è continua.

Infatti, $(f_n)|_{K_n}$ è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$, per quanto osservato prima sui K_n ;

allora, anche $(f_n)|_K$ è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$, avendo $K \subseteq K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ dalla definizione di K .

Dal fatto che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f per costruzione, segue quindi la continuità di $f|_K$, essendo limite uniforme di una successione di funzioni continue.

In corrispondenza a ε , il compatto K soddisfa perciò le proprietà richieste nella tesi, che dunque risulta acquisita.

