

# 4 - Misura di non Compattezza, Equi-limitatezza

## Premesse

### > Totale limitatezza

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $A \subseteq Y$ .

$A$  si dice totalmente limitato quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_1, \dots, A_n \subseteq A : \bigcup_{i=1}^n A_i = A \wedge \text{diam}(A_i) < \varepsilon \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ovviamente, la totale limitatezza implica la limitatezza.

### > Caratterizzazione della compattezza di uno spazio metrico

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1.  $X$  è compatto;
2.  $X$  è sequenzialmente compatto;
3.  $X$  è completo e totalmente limitato.

### > Convenzione: Estremi inferiore e superiore dell'insieme vuoto

Si pone per convenzione  $\inf(\emptyset) = +\infty$  e  $\sup(\emptyset) = -\infty$ .

### > Notazione: Insieme delle funzioni limitate

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

$\mathcal{B}(X, Y)$  denota l'insieme delle funzioni limitate da  $X$  in  $Y$ .

### > Metrica uniforme

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ .

Si definisce la **metrica uniforme** su  $\mathcal{F}$  come la metrica  $\rho_d$  (si dimostra che è una metrica) definita ponendo

$$\rho_d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \text{ per ogni } f, g \in \mathcal{F}.$$

Una successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$  converge convergente a  $f$  secondo  $\rho_d$  se e solo se  $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ .

### > Limite uniforme di una successione di funzioni limitate

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$  una successione convergente a  $f$  secondo  $\rho_d$ , cioè tale che  $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ .

Allora,  $f \in \mathcal{B}(X, Y)$ .

### > Notazione: $\mathcal{F}(A)$

Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi non vuoti.  
Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni da  $X$  in  $Y$ .  
Sia  $A \subseteq X$ .  
Si pone  $\mathcal{F}(A) = \{f(x) \mid x \in A, f \in \mathcal{F}\}$ .

## Misura di non compattezza secondo Kuratowski

### 📖 Definizione: Misura di non compattezza secondo Kuratowski

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.  
Sia  $A \subseteq Y$  non vuoto.

Sia  $\alpha(A) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \exists A_1, \dots, A_n \subseteq A : \bigcup_{i=1}^n A_i = A \wedge \text{diam}(A_i) < \varepsilon \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}$ .

$\alpha(A)$  prende il nome di **misura di non compattezza secondo Kuratowski**.

### 🔍 Osservazione

$\alpha(A) \geq 0$ ; in particolare:

- $\alpha(A) = 0$  se e solo se  $A$  è totalmente limitato;
- $\alpha(A) < +\infty$  (ossia l'insieme di cui  $\alpha$  è l'estremo inferiore è non vuoto) se e solo se  $A$  è limitato.

A livello intuitivo, la misura di non compattezza è indice di quanto un insieme in uno spazio metrico si discosta dall'essere compatto.

Infatti, un insieme compatto in uno spazio metrico è totalmente limitato, dunque ha misura nulla secondo Kuratowski.

# Totale limitatezza di una funzione

## 📖 Definizione: Oscillazione di una funzione a valori in uno spazio metrico

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione.

Si dice **oscillazione** di  $f$  su  $A \subseteq X$  il valore  $\text{diam}(f(A))$ .

Essa si denota con  $\omega_f(A)$ .

## 📖 Definizione: Funzione totalmente limitata

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione.

$f$  si dice **totalmente limitata** quando la sua immagine  $f(X)$  è totalmente limitata.

L'insieme delle funzioni  $f : X \rightarrow Y$  totalmente limitate si denota con  $TB(X, Y)$ .

## 🔍 Osservazione

Si ha  $TB(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$  è costituito da funzioni limitate, essendo queste totalmente limitate; allora, esso è spazio metrico con la metrica uniforme  $\rho_d$ .

La totale limitatezza di una funzione può essere caratterizzata nel seguente modo:

## 📄 Proposizione 4.1: Caratterizzazione della totale limitatezza di una funzione

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1.  $f$  è totalmente limitata;
2. Per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $X_1, \dots, X_n \subseteq X$  con  $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$ , tali che  $\omega_f(X_i) < \varepsilon$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

#### Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)

Si supponga  $f$  totalmente limitata.

Si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Per totale limitatezza di  $f$ , esistono  $Y_1, \dots, Y_n \subseteq f(X)$  con  $\bigcup_{i=1}^n Y_i = f(X)$  tali che  $\text{diam}(Y_i) < \varepsilon$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Posto  $X_i = f^{-1}(Y_i)$ , si ha  $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$  e  $f(X_i) = f(f^{-1}(Y_i)) \subseteq Y_i$ .

Allora,  $\omega_f(X_i) = \text{diam}(f(X_i)) \leq \text{diam}(Y_i) < \varepsilon$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

■

#### Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga verificata la condizione 2.

Si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Per ipotesi, esistono  $X_1, \dots, X_n \subseteq X$  con  $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$  tali che  $\omega_f(X_i) < \varepsilon$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Posto  $Y_i = f(X_i)$ , si ha  $\bigcup_{i=1}^n Y_i = Y$  e  $\text{diam}(Y_i) = \text{diam}(f(X_i)) = \omega_f(X_i) < \varepsilon$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

■

# Equi-limitatezza e equi-totale limitatezza

## 📖 Definizione: Famiglia di funzioni equi-limitate

Sia  $X$  un insieme non vuoto.

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni da  $X$  in  $Y$ .

Le funzioni in  $\mathcal{F}$  si dicono **equi-limitate** quando  $\mathcal{F}(X)$  è limitato in  $(Y, d)$ .

## 🔍 Osservazione

Sia  $X$  un insieme non vuoto.

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni da  $X$  in  $Y$ , equi-limitate.

Allora,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ .

## 📖 Definizione: Famiglia di funzioni equi-totalmente limitate

Sia  $X$  un insieme non vuoto.

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni da  $X$  in  $Y$ .

Le funzioni in  $\mathcal{F}$  si dicono **equi-totalmente limitate** quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X_1, \dots, X_n \subseteq X : \bigcup_{i=1}^n X_i = X \quad \wedge \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall f \in \mathcal{F}, \omega_f(X_i) < \varepsilon.$$

### Q Osservazione

Sia  $X$  un insieme non vuoto.

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni da  $X$  in  $Y$ , equi-totalmente limitate.

Allora,  $\mathcal{F} \subseteq TB(X, Y)$  per la [Proposizione 4.1].

### Q Osservazione

Sia  $X$  un insieme non vuoto.

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni da  $X$  in  $Y$ , equi-totalmente limitate.

Non è detto che esse siano equi-limitate.

Ad esempio, posto  $(Y, d)$  pari a  $\mathbb{R}$  con la metrica euclidea, si consideri  $\mathcal{F} = \{f_k \mid k \in \mathbb{R}\}$ , dove  $f_k$  è definita ponendo  $f_k(x) = k$  per ogni  $x \in X$ .

Le sue funzioni sono equi-totalmente limitate in quanto  $\omega_f(X) = 0$  per ogni  $f \in \mathcal{F}$ .

Tuttavia,  $\mathcal{F}(X) = \mathbb{R}$ , che non è limitato.

La seguente proposizione fornisce una formula per la misura di non compattezza di certe famiglie di funzioni equi-totalmente limitate:

### Teorema 4.2: Misura di non compattezza di insiemi limitati di funzioni equi-tot. limitate

Sia  $X$  un insieme non vuoto.

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Si consideri lo spazio  $TB(X, Y)$  con la metrica uniforme  $\rho_d$ .

Sia  $\mathcal{F} \subseteq TB(X, Y)$  un insieme tale che:

1.  $\mathcal{F}$  sia limitato in  $TB(X, Y)$  rispetto a  $\rho_d$ ;
2. Le funzioni in  $\mathcal{F}$  siano equi-totalmente limitate.

Allora,  $\alpha(\mathcal{F}) = \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) = \alpha(\mathcal{F}(X))$ .

 **Dimostrazione:**  $\alpha(\mathcal{F}) \geq \alpha(\mathcal{F}(X))$

Sia  $\varepsilon > 0$ .

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in  $\mathcal{F}$ , esistono  $X_1, \dots, X_n \subseteq X$  con  $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$ , per cui  $\omega_f(X_i) < \frac{\varepsilon}{3}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e per ogni  $f \in \mathcal{F}$ .

Per definizione di  $\alpha(\mathcal{F})$ , che è finito in quanto  $\mathcal{F}$  è limitato, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che esistono  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}$  con  $\bigcup_{j=1}^m \mathcal{F}_j = \mathcal{F}$ , per cui  $\text{diam}_{\rho_d}(\mathcal{F}_j) < \alpha(\mathcal{F}) + \frac{\varepsilon}{3}$  per ogni  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Si considerino gli insiemi  $\mathcal{F}_j(X_i)$  al variare di  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, \dots, m\}$ ;

si ha  $\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \mathcal{F}_j(X_i) = \mathcal{F}(X)$ .

Si stimi  $\text{diam}(\mathcal{F}_j(X_i))$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e per ogni  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Siano  $y_1, y_2 \in \mathcal{F}_j(X_i)$ .

Per definizione di  $\mathcal{F}_j(X_i)$ , si ha  $y_1 = f(x_1)$  e  $y_2 = g(x_2)$ , con  $f, g \in \mathcal{F}_j$  e  $x_1, x_2 \in X_i$ .

Si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$$d(y_1, y_2) = d(f(x_1), g(x_2))$$

$$\leq d(f(x_1), g(x_1)) + d(g(x_1), g(x_2)) \quad \text{Disuguaglianza triangolare}$$

$$\leq \rho_d(f, g) + d(g(x_1), g(x_2)) \quad \text{In quanto } \rho_d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$



$$< \alpha(\mathcal{F}) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \alpha(\mathcal{F}) + \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{In quanto } \rho_d(f, g) \leq \text{diam}_{\rho_d}(\mathcal{F}_j) < \alpha(\mathcal{F}) + \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } d(g(x_1), g(x_2)) \leq \omega_f(X_i) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dunque, si ha  $\text{diam}(\mathcal{F}_j(X_i)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \frac{2\varepsilon}{3} < \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Allora, la famiglia  $\{\mathcal{F}_j(X_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$  è un ricoprimento finito di  $\mathcal{F}(X)$  costituito da insiemi di diametro minore di  $\alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$ .

Pertanto,  $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$  per definizione di  $\alpha(\mathcal{F}(X))$ .

Segue  $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F})$  per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ .

■

### Dimostrazione ( $\alpha(\mathcal{F}) \leq \alpha(\mathcal{F}(X))$ )

Sia  $\varepsilon > 0$ .

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in  $\mathcal{F}$ , esistono  $X_1, \dots, X_n \subseteq X$  con  $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$ , per cui  $\omega_f(X_i) < \frac{\varepsilon}{4}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e per ogni  $f \in \mathcal{F}$ .

Per definizione di  $\alpha(\mathcal{F}(X))$ , che è finito in quanto  $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) < +\infty$  per la disuguaglianza provata prima, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che esistono  $Y_1, \dots, Y_k \subseteq \mathcal{F}(X)$  con  $\bigcup_{j=1}^k Y_j = \mathcal{F}(X)$ , per cui  $\text{diam}(Y_j) < \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{\varepsilon}{4}$  per ogni  $j \in \{1, \dots, k\}$ .

Si supponga senza perdere di generalità che  $Y_1, \dots, Y_k$  siano a due a due disgiunti; infatti, in caso contrario basta considerare  $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_k$  definiti ponendo  $\tilde{Y}_j = Y_j \setminus \bigcup_{h=1}^{j-1} Y_h$  per ogni  $j \in \{1, \dots, k\}$ .

Per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si fissi  $x_i \in X_i$ .

Per ogni  $f \in \mathcal{F}$ , sia  $\varphi_f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  l'applicazione definita ponendo  $\varphi_f(i) = j$ , dove  $j$  è l'unico indice in  $\{1, \dots, k\}$  tale che  $f(x_i) \in Y_j$  (esso è unico in quanto  $Y_1, \dots, Y_k$  sono stati supposti a due a due disgiunti).

Si introduca in  $\mathcal{F}$  la relazione  $\sim$  definita ponendo  $f \sim g$  quando  $\varphi_f = \varphi_g$ , che è di equivalenza.

Allora, la relazione in questione induce una partizione di  $\mathcal{F}$  indotta dalle classi di equivalenza; tali classi sono in numero finito, in quanto l'insieme quoziente  $\mathcal{F}/\sim$  è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme delle funzioni da  $\{1, \dots, n\}$  a  $\{1, \dots, k\}$ , che ha cardinalità finita (pari a  $k^n$ ).

Siano dunque  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  tali classi di equivalenza.

Si stimi  $\text{diam}(\mathcal{F}_p)$  per ogni  $p \in \{1, \dots, m\}$ .

Siano  $f, g \in \mathcal{F}_p$ .

Sia  $x \in X$ , e sia  $i \in \{1, \dots, n\}$  per cui  $x \in X_i$  (che esiste perché  $X_1, \dots, X_n$  ricoprono  $X$ ).

Si ha

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) && \text{Disuguaglianza triangolare applicata due volte} \\ &\leq \omega_f(X_i) + \text{diam}(Y_j) + \omega_g(X_i) && \text{Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo} \\ &&& \text{seguono dal fatto che } x, x_i \in X_i \end{aligned}$$

La maggiorazione del secondo segue dal fatto che  $f, g \in \mathcal{F}_p$ , dunque  $f \sim g$  e quindi esiste  $j \in \{1, \dots, k\}$  per cui  $f(x_i), g(x_i) \in Y_j$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{3\varepsilon}{4}$$

Per costruzione di  $X_i$  e  $Y_j$

Dunque, si ha  $\text{diam}(\mathcal{F}_p) \leq \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{3\varepsilon}{4} < \alpha(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$  per ogni  $p \in \{1, \dots, m\}$ .

Allora, la famiglia  $\{\mathcal{F}_p \mid p \in \{1, \dots, m\}\}$  è un ricoprimento finito di  $\mathcal{F}(X)$  costituito da insiemi di diametro minore di  $\alpha(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$ .

Pertanto,  $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$  per definizione di  $\alpha(\mathcal{F}(X))$ .

Segue  $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F})$  per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ .

■

 **Dimostrazione:**  $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X))$

È evidente che  $\sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X))$ ; infatti,  $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}(X)$  per ogni  $x \in X$ , da cui segue che  $\alpha(\mathcal{F}(x)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X))$  per ogni  $x \in X$ .

Si provi ora  $\sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \geq \alpha(\mathcal{F})$ .

Sia  $\varepsilon > 0$ .

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in  $\mathcal{F}$ , esistono  $X_1, \dots, X_n \subseteq X$  con  $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$ , per cui  $\omega_f(X_i) < \frac{\varepsilon}{4}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e per ogni  $f \in \mathcal{F}$ .

Per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si fissi  $x_i \in X_i$  e si consideri  $\mathcal{F}(x_i)$ ; per definizione di  $\alpha(\mathcal{F}(x_i))$ , che è finito in quanto  $\alpha(\mathcal{F}(x_i)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X)) < +\infty$  per la disuguaglianza provata prima, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che

esistono  $Y_{i,1}, \dots, Y_{i,k_i}$  tale che  $\bigcup_{j=1}^{k_i} Y_{i,j} = \mathcal{F}(x_i)$  e  $\text{diam}(Y_{i,j}) < \alpha(\mathcal{F}(x_i)) + \frac{\varepsilon}{4}$  per ogni  $j \in \{1, \dots, k_i\}$ .

Sia  $\mathcal{F}_{i,j} = \{f \in \mathcal{F} : f(x_i) \in Y_{i,j} \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\}\}$ ; si ha  $\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} \mathcal{F}_{i,j} = \mathcal{F}$ .

Si stimi  $\text{diam}(\mathcal{F}_{i,j})$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e per ogni  $j \in \{1, \dots, k_i\}$ .

Siano  $f, g \in \mathcal{F}_{i,j}$ .

Sia  $x \in X$ , e sia  $i \in \{1, \dots, n\}$  per cui  $x \in X_i$  (che esiste perché  $X_1, \dots, X_n$  ricoprono  $X$ ).

Si ha

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) \quad \text{Disuguaglianza triangolare applicata due volte}$$

$$\leq \omega_f(X_i) + \text{diam}(Y_{i,j}) + \omega_g(X_i) \quad \text{Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dal fatto che } x, x_i \in X_i$$

La maggiorazione del secondo segue dal fatto che  $f(x_i), g(x_i) \in Y_{i,j}$

Per costruzione di  $X_i$  e  $Y_{i,j}$

Per definizione di  $\sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x))$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \alpha(\mathcal{F}(x_i)) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \alpha(\mathcal{F}(x_i)) + \frac{3\varepsilon}{4}$$

$$\leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \frac{3\varepsilon}{4}$$

Dunque, si ha  $\text{diam}(\mathcal{F}_{i,j}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \frac{3\varepsilon}{4} < \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e per ogni  $j \in \{1, \dots, k_i\}$ .

Allora, la famiglia  $\{\mathcal{F}_{i,j} \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\}\}$  è un ricoprimento finito di  $\mathcal{F}$  costituito da insiemi di diametro minore di  $\sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$ .

Pertanto,  $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$  per definizione di  $\alpha(\mathcal{F})$ .

Segue  $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x))$  per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ .

■

#### Proposizione 4.3: Equivalenza della totale limitatezza di un insieme di funzioni totalmente limitate

Sia  $X \neq \emptyset$ .

Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $\mathcal{F} \subseteq TB(X, Y)$ .

Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

1.  $\mathcal{F}$  è totalmente limitato in  $(TB(X, Y), \rho_d)$ .
2. Le funzioni in  $\mathcal{F}$  sono equi-totalmente limitate, e  $\mathcal{F}(X)$  è totalmente limitato in  $(Y, d)$ .
3. Le funzioni in  $\mathcal{F}$  sono equi-totalmente limitate, e  $\mathcal{F}(x)$  è totalmente limitato in  $(Y, d)$  per ogni  $x \in X$ .

#### Dimostrazione

In virtù del teorema precedente, basta mostrare che, se  $\mathcal{F}$  è totalmente limitato in  $TB(X, Y)$  rispetto a  $\rho_d$ , allora le sue funzioni sono equi-totalmente limitate.

Sia  $\varepsilon > 0$ .

Essendo  $\mathcal{F}$  totalmente limitato per ipotesi, esistono  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$  con  $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ , tali che  $\text{diam}(\mathcal{F}_i) < \frac{\varepsilon}{4}$  per ogni

$i \in \{1, \dots, n\}$ .

Per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sia  $f_i \in \mathcal{F}_i$ .

Essendo  $\mathcal{F} \subseteq TB(X, Y)$ ,  $f_i$  è totalmente limitata per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Allora, esistono  $X_{i,1}, \dots, X_{i,k_i} \subseteq X$  con  $\bigcup_{j=1}^{k_i} X_j^{(i)} = X$  tali che  $\omega_{f_i}(X_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{4}$  per ogni  $j \in \{1, \dots, k_i\}$ .

Sia  $\mathcal{D} = \prod_{i=1}^n \{1, \dots, k_i\} = \{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n : \forall i \in \{1, \dots, n\}, j_i \leq k_i\}$ .

Si considerino gli insiemi del tipo  $X_{1,j_1} \cap X_{2,j_2} \cap \dots \cap X_{n,j_n}$  al variare di  $(j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{D}$ ; si osserva intanto che questi ricoprono  $X$ .

Si vuole studiare l'oscillazione di una qualsiasi funzione  $f \in \mathcal{F}$ , sugli insiemi  $X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}$  al variare di  $(j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{D}$ .

Siano dunque  $x, y \in X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}$ ;

sia  $f \in \mathcal{F}$ , e sia  $i$  tale che  $f \in \mathcal{F}_i$ .

Si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y))$  Disuguaglianza triangolare applicata due volte

$\leq \rho_d(f, f_i) + \omega_{f_i}(X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}) + \rho_d(f, f_i)$

Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dalla definizione di  $\rho_d(f, f_i)$

La maggiorazione del secondo segue dal fatto che  $x, y \in X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}$

$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}$

Segue dal fatto che  $\rho_d(f, f_i) \leq \text{diam}(\mathcal{F}_i) < \frac{\varepsilon}{4}$  e  $\omega_{f_i}(X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}) \leq \omega_{f_i}(X_{i,j_i}) < \frac{\varepsilon}{4}$

Dunque,  $\omega_f(X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}) \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$  per ogni  $f \in \mathcal{F}$  e per ogni  $(j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{D}$ .

Allora, la famiglia  $\{X_{1,j_1} \cap X_{2,j_2} \cap \dots \cap X_{n,j_n} \mid (j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{D}\}$  è un ricoprimento finito di  $X$  costituito da insiemi su cui l'oscillazione di una qualsiasi funzione in  $\mathcal{F}$  è minore di  $\varepsilon$ .

Segue che le funzioni in  $\mathcal{F}$  sono equi-totalmente limitate per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ .

■