2.5 - Diffeomorfismi tra Varietà

Avendo generalizzato il concetto di liscezza alle varietà, possiamo conseguentemente estendere anche il concetto di *diffeomorfismo*.

⌘ Definizione 2.5.1 (Diffeomorfismo tra varietà).

Siano M e N varietà lisce.

Si dice *diffeomorfismo* da M a N una mappa liscia e biunivoca $F : M \to N$ la cui inversa $F^{-1} : N \to M$ è anch'essa liscia.

Diciamo che M e N sono *diffeomorfe* se esiste un diffeomorfismo tra di loro.

Facciamo un esempio.

Esempio 2.5.2 (Diffeomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e un intorno sferico aperto).

Consideriamo la mappa $F : \mathbb{R}^n \to B(\mathbf{0}, 1)$ di legge

$$F(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}}$$

Questa è liscia e biunivoca, con inversa di legge

$$F^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{1 + \|\mathbf{y}\|^2}}$$

anch'essa liscia.

Ne viene che F è un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e $B(\mathbf{0}, 1)$.

Vediamo alcune proprietà di base dei diffeomorfismi.

Proposizione 2.5.3 (Proprietà dei diffeomorfismi).

Si hanno i seguenti fatti:

1. Se M è una varietà liscia e (U, φ) è una carta liscia su M, allora $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo;
2. Ogni composizione di diffeomorfismi è un diffeomorfismo;
3. Ogni prodotto finito di diffeomorfismi tra varietà lisce è un diffeomorfismo;
4. Ogni diffeomorfismo è un omeomorfismo e una mappa aperta;
5. La restrizione di un diffeomorfismo a una sottovarietà aperta è un diffeomorfismo sulla sua immagine;
6. La relazione di diffeomorfismo è di equivalenza sulla classe di tutte le varietà lisce.

Dimostrazione

Dimostriamo il punto **1.**
Che φ sia liscia segue dalla Proposizione 2.3.2;
il fatto che anche φ^{-1} è liscia segue dal fatto che la rappresentazione in coordinate $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi(U)}$ è liscia nel senso ordinario.

Il punto **2.** segue dal punto **4.** della Proposizione 2.3.11 e dal fatto che $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$ per mappe biunivoche.

Il punto **3.** segue dalla Proposizione 2.3.13 e dal fatto che $(F_1 \times \cdots \times F_k)^{-1} = F_1^{-1} \times \cdots \times F_k^{-1}$ per mappe biunivoche.

Il punto **4.** segue dal fatto che la liscezza implica la continuità (Proposizione 2.3.5), e dal fatto che la continuità di F^{-1} corrisponde al fatto che F è aperta, per mappe biunivoche.

Il punto **5**. segue dalla Proposizione 2.3.7 e dal fatto che $F|_U^{-1} = F^{-1}|_{F(U)}$ per mappe biunivoche.

Dimostriamo il punto **6.**
La relazione di diffeomorfismo tra varietà è riflessiva, in quanto $\mathrm{id}_M : M \to M$ è un diffeomorfismo (Proposizione 2.3.11);
la simmetria segue dal fatto che, dato $F : M \to N$ diffeomorfismo, $F^{-1} : N \to M$ è un diffeomorfismo;
la transitività segue dal punto **2.**

■

Mostriamo ora la Proposizione 1.1.14 nel caso generale delle varietà lisce.

Teorema 2.5.4 (Invarianza della dimensione di varietà lisce per diffeomorfismi).

Due varietà lisce M e N non vuote di dimensioni m e n rispettivamente, non possono essere diffeomorfe se $m \neq n$.

Dimostrazione

Supponiamo che $F : M \to N$ sia un diffeomorfismo tra le due varietà.

Fissiamo $p \in M$, e consideriamo due carte, (U, φ) di M contenente p e (V, ψ) di N contenente $F(p)$.
Per la Proposizione 2.3.9 abbiamo che $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ è un diffeomorfismo tra un aperto di $\mathbb{R}^m$ e un aperto di $\mathbb{R}^n$;
dalla Proposizione 1.1.14 deduciamo allora che $m = n$.

■

Diffeomorfismi e strutture lisce

Proprio come due spazi topologici sono considerati "gli stessi" se sono omeomorfi, due varietà lisce sono essenzialmente indistinguibili se sono diffeomorfe.

La preoccupazione centrale della teoria delle varietà lisce è lo studio delle proprietà delle varietà lisce che sono preservate dai diffeomorfismi.
Un esempio è la dimensione, come mostra il Teorema 2.5.4.

Abbiamo già visto che ogni varietà di dimensione positiva ammette molteplici strutture lisce, distinte tra loro. (Esercizio 2.1.5)
Una domanda più sottile e interessante è se una data varietà topologica ammette strutture lisce, addirittura non diffeomorfe tra loro.

Ad esempio, sia $\mathbb{R}'$ la varietà topologica $\mathbb{R}$, ma dotata della struttura liscia descritta nell'Esempio 2.2.4 (definita dalla carta $(\mathbb{R}, h)$ con $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^3$);
abbiamo già notato che $\mathbb{R}'$ è una varietà distinta da $\mathbb{R}$ con la sua struttura liscia standard.
Tuttavia, le due sono diffeomorfe.

Infatti, prendiamo la mappa $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ definita ponendo $\Phi(t) = \sqrt[3]{t}$;
essa è continua, e date le carte $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ e $(\mathbb{R}, h)$ per $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}'$ rispettivamente troviamo che la rappresentazione in coordinate $h \circ \Phi \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ è un diffeomorfismo.

Quindi Φ è un diffeomorfismo su $\mathbb{R}$ con le due strutture lisce date.
(Questo è un caso in cui è importante mantenere la distinzione tra una mappa e la sua rappresentazione in coordinate!)

Problemi ed esercizi

Esercizio 2.5.5 (Pullback sull'algebra delle funzioni continue e lisce).

Dato uno spazio topologico M, denotiamo con $C^0(M)$ l'algebra delle funzioni continue $f : M \to \mathbb{R}$ con le operazioni standard.
Data una mappa continua $F : M \to N$, definiamo il *pullback* da F la mappa

$$F^* : \ C^0(N) \to C^0(M) : \quad F^*(f) = f \circ F.$$

È immediato far vedere che F^* è una mappa lineare.

Supponiamo ora che M e N siano varietà lisce;
facciamo vedere che F è liscia se e solo se $F^*\big(C^\infty(N)\big) \subseteq C^\infty(M)$.

Chiaramente, se F è liscia allora $F^*(f) = f \circ F$ è liscia per ogni $f \in C^\infty(N)$.

Viceversa, se vale $F^*\big(C^\infty(N)\big) \subseteq C^\infty(M)$, per ogni $p \in M$ consideriamo una carta (U, φ) di N contenente $F(p)$; sappiamo che $\varphi^{-1} \in C^\infty(N)$ (punto **1.** della Proposizione 2.5.3), per cui $F^*(\varphi^{-1}) = \varphi^{-1} \circ F$ è liscia per ipotesi.
Per arbitrarietà di p, troviamo allora che F è una funzione liscia.

Supponiamo adesso che $F : M \to N$ sia un omeomorfismo tra varietà lisce;
facciamo vedere che F è un diffeomorfismo se e solo se F^* si restringe a un isomorfismo da $C^\infty(N)$ a $C^\infty(M)$.

Supponiamo F diffeomorfismo.
Dal punto precedente abbiamo ben definite le restrizioni $F^*|_{C^\infty(N)} : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ e anche $(F^{-1})^*|_{C^\infty(M)} : C^\infty(M) \to C^\infty(N)$;
queste sono una l'inversa dell'altra, in quanto

$$F^* \circ (F^{-1})^* : \quad f \mapsto F^*(f \circ F^{-1}) = f \circ F^{-1} \circ F = f \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

$$(F^{-1})^* \circ F^* : \quad f \mapsto (F^{-1})^*(f \circ F) = f \circ F \circ F^{-1} = f \qquad \forall f \in C^\infty(N)$$

Essendo le due mappe anche lineari, esse sono isomorfismi tra $C^\infty(N)$ e $C^\infty(M)$.

Viceversa, supponiamo che $F^*|_{C^\infty(N)} : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ sia un isomorfismo.
La sua funzione inversa $(F^*|_{C^\infty(N)})^{-1} : C^\infty(M) \to C^\infty(N)$ invia $f \in C^\infty(M)$ nella funzione $g \in C^\infty(N)$ tale che $g \circ F = f$;
moltiplicando ambo i membri per F^{-1} (F per ipotesi è un omeomorfismo), troviamo che $g = f \circ F^{-1} = (F^{-1})^*(f)$, da cui segue che $(F^*|_{C^\infty(N)})^{-1} = (F^{-1})^*|_{C^\infty(M)}$.
Allora, sempre per il punto precedente abbiamo che anche F^{-1} è liscia.

Nota: questo risultato mostra che, in un certo senso, l'intera struttura liscia di M è codificata nel sottoinsieme $C^\infty(M) \subseteq C^0(M)$. Infatti, alcuni autori definiscono una struttura liscia su una varietà topologica M come una sottoalgebra di $C(M)$ con determinate proprietà.