# 19 - Operatori Bilineari Continui, Derivabilità Doppia e Formula di Taylor

**Definizione: Operatore bilineare**

Siano $X, Y, E$ tre spazi vettoriali.
Sia $T : X \times Y \to E$ una funzione.

$T$ si dice **operatore bilineare** quando $T(\cdot, \mathbf{y})$ è lineare per ogni $\mathbf{y} \in Y$, e $T(\mathbf{x}, \cdot)$ è lineare per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Se $X, Y$ e $E$ sono dotati di norma, si può parlare anche di continuità degli operatori bilineari.

**Proposizione 19.1: Criterio di continuità degli operatori bilineari**

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(E, \|\cdot\|_E)$ tre spazi normati.
Sia $T : X \times Y \to E$ un operatore bilineare.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $T$ è continuo;
2. $T$ è continuo in $(\mathbf{0}_X, \mathbf{0}_Y)$;
3. Esiste $k > 0$ tale che $\|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_E \le k \|\mathbf{x}\|_X \|\mathbf{y}\|_Y$ per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$.

**Dimostrazione: 1. $\Rightarrow$ 2.**

Evidente.
■

### Dimostrazione: 2. $\Rightarrow$ 3.

Si supponga $T$ continuo in $(\mathbf{0}_X, \mathbf{0}_Y)$;
si provi la disuguaglianza espressa nel punto **3.**

In corrispondenza a $\varepsilon = 1$ esiste allora $\delta > 0$ tale che, per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$ con $\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{X \times Y} < \delta$, si abbia $\|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_E < 1$.

Si consideri su $X \times Y$ la norma $\| \cdot \|_\infty$.

Si fissi quindi $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$, e si supponga per il momento $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_X$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_Y$ cosicché $\|\mathbf{x}\|_X \neq 0$ e $\|\mathbf{y}\|_Y \neq 0$.

Allora, è ben definita la coppia $\left( \dfrac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|_X}, \dfrac{\delta \mathbf{y}}{2\|\mathbf{y}\|_X} \right)$, che ha norma $\frac{\delta}{2} < \delta$.

Per costruzione di $\delta$, si ha allora $\left\| T\left( \dfrac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|_X}, \dfrac{\delta \mathbf{y}}{2\|\mathbf{y}\|_X} \right) \right\|_E < 1$, ossia $\dfrac{\delta^2}{4\,\|\mathbf{x}\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y} \|T(\mathbf{x})\|_E < 1$ per linearità di $T$ e per assoluta omogeneità di $\| \cdot \|_Y$.

Ne segue che $\|T(\mathbf{x})\|_Y < \dfrac{4}{\delta^2}\,\|\mathbf{x}\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y$; questa disuguaglianza vale per ogni $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}$ e per ogni $\mathbf{y} \in Y \setminus \{\mathbf{0}_Y\}$.

D'altra parte, per $\mathbf{x} = \mathbf{0}_X$ oppure per $\mathbf{y} = \mathbf{0}_Y$ si ha $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}_E$ per bilinearità di $T$, e dunque $\|T(\mathbf{x})\|_E = 0 = \dfrac{4}{\delta^2}\,\|\mathbf{x}\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y$.

Ne segue che $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \dfrac{4}{\delta^2}\,\|\mathbf{x}\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y$ per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$.

■

### Dimostrazione: 3. $\Rightarrow$ 1.

Si supponga l'esistenza di $k > 0$ tale che $\|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_E \leq k\,\|\mathbf{x}\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y$ per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$;

si provi la continuità di $T$ in tutto $X \times Y$.

Si fissi dunque $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in X \times Y$, e si mostri la continuità di $T$ in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Si osserva intanto che, per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$, si ha

$$\begin{aligned}
&\|T(\mathbf{x},\mathbf{y}) - T(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\|_E = \|T(\mathbf{x},\mathbf{y}) - T(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}) + T(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}) - T(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\|_E \\
&= \|T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,\mathbf{y}) + T(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)\|_E && \text{Per bilinearità di } T \\
&\leq \|T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,\mathbf{y})\|_E + \|T(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)\|_E && \text{Per sub-additività delle norme} \\
&\leq k\,\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y + k\,\|\mathbf{x}_0\|_X\,\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|_Y && \text{Per ipotesi}
\end{aligned}$$

Poiché $\lim\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\to(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)} k\,\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y + k\,\|\mathbf{x}_0\|_X\,\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|_Y = 0$, segue per confronto che

$\lim\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y}\to(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)} \|T(\mathbf{x},\mathbf{y}) - T(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\|_E = 0$, cioè $T$ è continua in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

■

### ⌘ Notazione: Lo spazio $\mathcal{BL}(X \times Y, E)$

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(E, \|\cdot\|_E)$ tre spazi normati.

Si denota con $\mathcal{BL}(X \times Y, E)$ lo spazio degli operatori bilineari continui da $X \times Y$ in $E$.

Evidentemente, $\mathcal{BL}(X \times Y, E)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per una costante.

Il prossimo obiettivo è quello di rendere $\mathcal{BL}(X \times Y, E)$ uno spazio normato.

Si ha questo fatto:

### Proposizione 19.2: Identificazione degli operatori bilineari

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(E, \|\cdot\|_E)$ tre spazi normati.
Sia $\mathcal{K} : \mathcal{BL}(X \times Y, E) \to \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(Y, E)\big)$ la mappa definita ponendo

$\mathcal{K}(T) = T(\circ, \cdot)$ per ogni $T \in \mathcal{BL}(X \times Y, E)$
($T(\circ, \cdot) : X \to \mathcal{L}(Y, E)$ è definita ponendo $T(\circ, \cdot)(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}, \cdot)$ per ogni $\mathbf{x} \in X$).

$\mathcal{K}$ è lineare e biunivoca.

**Osservazioni preliminari**

$\mathcal{K}$ è ben definita, cioè che $T(\circ, \cdot) \in \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(Y, Z)\big)$ per ogni $T \in \mathcal{BL}(X \times Y, E)$.

La linearità di $T(\circ, \cdot)$ è evidente; si mostri la continuità.

Fissati $\mathbf{x} \in X$ e $\mathbf{y} \in Y$, si ha

| | |
|---|---|
| $\big\|\big(T(\circ, \cdot)(\mathbf{x})\big)(\mathbf{y})\big\|_E = \|T(\mathbf{x}, \cdot)(\mathbf{y})\|_E$ | Per definizione di $T(\circ, \cdot)$ |
| $= \|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_E$ | Per definizione di $T(\mathbf{x}, \cdot)$ |
| $\leq k \\|\mathbf{x}\\|_X \\|\mathbf{y}\\|_Y$, per qualche $k > 0$ | Per la [Proposizione 19.1], essendo $T$ bilineare e continua |

Per arbitrarietà di $\mathbf{y} \in Y$, ne segue che $T(\circ, \cdot)(\mathbf{x})$ è continua e $\big\|T(\circ, \cdot)(\mathbf{x})\big\|_{\mathcal{L}(Y,E)} \leq k \|\mathbf{x}\|_X$ ;
per arbitrarietà di $\mathbf{x} \in X$, ne segue che $T(\circ, \cdot)$ è continua e $\big\|T(\circ, \cdot)\big\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))} \leq k$.

**Dimostrazione**

Si provi ora la linearità di $\mathcal{K}$.

Siano dunque $S, T \in \mathcal{BL}(X \times Y, E)$, e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Per ogni $\mathbf{x} \in X$, si ha

$$
\begin{aligned}
\text{Ж}(\lambda S+\mu T)(\mathbf{x}) &= (\lambda S+\mu T)(\mathbf{x},\cdot) && \text{Per definizione di Ж}\\
&= \lambda\, S(\mathbf{x},\cdot)+\mu\, T(\mathbf{x},\cdot) && \text{Per linearità della mappa } \mathcal{BL}(X\times Y,E)\to\mathcal{L}(Y,E): T\mapsto T(\mathbf{x},\cdot)\\
&= \lambda\,\text{Ж}(S)(\mathbf{x})+\mu\,\text{Ж}(T)(\mathbf{x}) && \text{Per definizione di Ж}
\end{aligned}
$$

Dunque, si ha $\text{Ж}(\lambda S+\mu T)=\lambda\,\text{Ж}(S)+\mu\,\text{Ж}(T)$, da cui segue la linearità di Ж.

Si provi ora che Ж è biunivoca.

Ж è iniettiva;
infatti, dato $T\in\mathcal{BL}(X\times Y,E)$ tale che $\text{Ж}(T)=\mathbf{0}_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))}$, si ha

$$
\begin{aligned}
& T(\circ,\cdot)=\mathbf{0}_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))} && \text{Per definizione di Ж}\\
\implies\ & T(\circ,\cdot)(\mathbf{x})=\mathbf{0}_{\mathcal{L}(Y,E)} \text{ per ogni } \mathbf{x}\in X\\
\implies\ & T(\mathbf{x},\cdot)=\mathbf{0}_{\mathcal{L}(Y,E)} \text{ per ogni } \mathbf{x}\in X && \text{Per definizione di } T(\circ,\cdot)\\
\implies\ & T(\mathbf{x},\cdot)(\mathbf{y})=\mathbf{0}_E \text{ per ogni } \mathbf{x}\in X \text{ e per ogni } \mathbf{y}\in Y\\
\implies\ & T(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}_E \text{ per ogni } \mathbf{x}\in X \text{ e per ogni } \mathbf{y}\in Y && \text{Per definizione di } T(\mathbf{x},\cdot)\\
\implies\ & T=\mathbf{0}_{\mathcal{BL}(X\times Y),E} \text{ per ogni } \mathbf{x}\in X \text{ e per ogni } \mathbf{y}\in Y
\end{aligned}
$$

Ж è suriettiva;
infatti, si fissi $\Phi\in\mathcal{L}\big(X,\mathcal{L}(Y,E)\big)$;
sia $T: X\times Y\to E$ la mappa definita ponendo $T(\mathbf{x},\mathbf{y})=\big(\Phi(\mathbf{x})\big)(\mathbf{y})$ per ogni $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in X\times Y$.

$T$ è bilineare, essendo $\Phi$ lineare ed essendo $\Phi(\mathbf{x})$ lineare per ogni $\mathbf{x}\in X$.

$\text{Ж}(T)=\Phi$; infatti, per ogni $\mathbf{x}\in X$, si ha

$$
\text{Ж}(T)(\mathbf{x})=T(\circ,\cdot)(\mathbf{x}) \qquad \text{Per definizione di Ж}
$$

$= T(\mathbf{x}, \cdot)$ Per definizione di $T(\circ, \cdot)$

$= \Phi(\mathbf{x})$ Per definizione di $T$

■

**⌘ Definizione: Norma su $\mathcal{BL}(X \times Y, E)$**

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(E, \|\cdot\|_E)$ tre spazi normati.
Sia $\mathcal{K} : \mathcal{BL}(X \times Y, E) \to \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(Y, Z)\big)$ la mappa definita come nella [Proposizione 19.2].

Si definisca $\|\cdot\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} : \mathcal{BL}(X \times Y, E) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ponendo
$\|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} = \|\mathcal{K}(T)\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))}$ per ogni $T \in \mathcal{BL}(X \times Y, E)$

**Osservazioni**

- $\|\cdot\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)}$ è una norma ben definita;
- $\mathcal{K}$ è un'isometria lineare tra $\mathcal{BL}(X \times Y, E)$ e $\mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(Y, Z)\big)$;
- $$\|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in X\,,\,\|\mathbf{x}\|_X=1 \\ \mathbf{y}\in Y\,,\,\|\mathbf{y}\|_Y=1}} \|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_E = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in X\,,\,\|\mathbf{x}\|_X\leq 1 \\ \mathbf{y}\in Y\,,\,\|\mathbf{y}\|_Y\leq 1}} \|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_E = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in X\setminus\{\mathbf{0}_X\} \\ \mathbf{y}\in Y\setminus\{\mathbf{0}_Y\}}} \frac{\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\|_E}{\|\mathbf{x}\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y}\,,$$

  per ogni $T \in \mathcal{BL}(X \times Y, E)$.

Infatti, $\|\cdot\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)}$ è assolutamente omogenea e sub-additiva per linearità di $\mathcal{K}$ e per assoluta omogeneità e sub-additività di

$\| \cdot \|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))}$;

$\| \cdot \|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)}$ è definita positiva per positiva definitività di $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))}$ e per iniettività di $\mathcal{Ж}$.

$\mathcal{Ж}$ è allora un'isometria lineare tra $\mathcal{BL}(X \times Y, E)$ e $\mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(Y, Z)\big)$, essendo lineare, suriettiva ed essendo per definizione $\|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} = \|\mathcal{Ж}(T)\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))}$ per ogni $T \in \mathcal{BL}(X \times Y, E)$;

per le osservazioni sulle isometrie lineari fatte nel Capitolo 10, tali condizioni sono sufficienti affinché $\mathcal{Ж}$ sia un'isometria lineare.

Si fissi $T \in \mathcal{BL}(X \times Y, E)$; si ha

$$
\begin{aligned}
\|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} &= \|\mathcal{Ж}(T)\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))} && \text{Per definizione di } \| \cdot \|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} \\
&= \sup_{\mathbf{x}\in X\,,\,\|\mathbf{x}\|_X=1} \|T(\mathbf{x}, \cdot)\|_{\mathcal{L}(Y,E)} && \text{Per la prima delle definizioni di } \| \cdot \|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))} \\
&= \sup_{\substack{\mathbf{x}\in X\,,\,\|\mathbf{x}\|_X=1 \\ \mathbf{y}\in Y\,,\,\|\mathbf{y}\|_Y=1}} \|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_E && \text{Per la prima delle definizioni di } \| \cdot \|_{\mathcal{L}(Y,E)}
\end{aligned}
$$

D'altra parte, si ha anche

$$
\begin{aligned}
\|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} &= \|\mathcal{Ж}(T)\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))} && \text{Per definizione di } \| \cdot \|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} \\
&= \sup_{\mathbf{x}\in X\,,\,\|\mathbf{x}\|_X\le 1} \|T(\mathbf{x}, \cdot)\|_{\mathcal{L}(Y,E)} && \text{Per la seconda delle definizioni di } \| \cdot \|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))} \\
&= \sup_{\substack{\mathbf{x}\in X\,,\,\|\mathbf{x}\|_X\le 1 \\ \mathbf{y}\in Y\,,\,\|\mathbf{y}\|_Y\le 1}} \|T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_E && \text{Per la seconda delle definizioni di } \| \cdot \|_{\mathcal{L}(Y,E)}
\end{aligned}
$$

e infine anche

$$
\|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} = \|\mathcal{Ж}(T)\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))} \qquad \text{Per definizione di } \| \cdot \|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)}
$$

$$= \sup_{\mathbf{x}\in X\setminus\{\mathbf{0}_X\}} \frac{\|T(\mathbf{x},\cdot)\|_{\mathcal{L}(Y,E)}}{\|\mathbf{x}\|_X}$$ Per la terza delle definizioni di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))}$

$$\sup_{\substack{\mathbf{x}\in X\setminus\{\mathbf{0}_X\}\\ \mathbf{y}\in Y\setminus\{\mathbf{0}_Y\}}} \frac{\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\|_E}{\|\mathbf{x}\|_X \,\|\mathbf{y}\|_Y}$$ Per la terza delle definizioni di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y,E)}$

Dunque, $(\mathcal{BL}(X\times Y,E), \|\cdot\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)})$ è uno spazio normato.
Dalla proposizione precedente segue subito la seguente disuguaglianza:

**Proposizione 19.3: Disuguaglianza fondamentale della norma degli operatori bilineari continui**

Siano $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ e $(E,\|\cdot\|_E)$ tre spazi normati.
Sia $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in X\times Y$.
Sia $T\in\mathcal{BL}(X\times Y,E)$.

Si ha $\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\|_Y \le \|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)}\cdot\|\mathbf{x}\|_X\cdot\|\mathbf{y}\|_Y$.

**Dimostrazione**

Segue direttamente dal fatto che $\|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in X\setminus\{\mathbf{0}_X\}\\ \mathbf{y}\in Y\setminus\{\mathbf{0}_Y\}}} \frac{\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\|_E}{\|\mathbf{x}\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y}$, per quanto osservato sulla norma $\|\cdot\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)}$.

Dunque, se $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}_X$ e $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}_Y$, si ha

$\frac{\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X\,\|\mathbf{y}\|_Y} \le \|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)}$, da cui

$\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\|_Y \le \|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)}\cdot\|\mathbf{x}\|_X\cdot\|\mathbf{y}\|_Y$;

d'altra parte, se $\mathbf{x}=\mathbf{0}_X$ oppure $\mathbf{y}=\mathbf{0}_Y$ si ha

$\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\|_Y = 0 = \|T\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)} \cdot \|\mathbf{x}\|_X \cdot \|\mathbf{y}\|_Y$.

■

**Proposizione 19.4: Condizione per la completezza dello spazio degli operatori bilineari continui**

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(E, \|\cdot\|_E)$ due spazi normati.
Si supponga $(E, \|\cdot\|_E)$ di Banach.

Allora, lo spazio normato $(\mathcal{BL}(X\times Y, E), \|\cdot\|_{\mathcal{BL}(X\times Y,E)})$ è di Banach.

**Dimostrazione**

Essendo $E$ di Banach per ipotesi, per la [Proposizione 6.8] lo spazio $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ è anch'esso di Banach;

allora, sempre per la [Proposizione 6.8] anche lo spazio $\left(\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E)), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,E))}\right)$ è di Banach.

Infine, essendo lo spazio $\mathcal{BL}(X\times Y,E)$ linearmente isometrico a $\mathcal{L}\big(X,\mathcal{L}(Y,E)\big)$ (tramite la mappa $\mathcal{K}$ definita precedentemente) e preservando le isometrie la completezza, segue allora la completezza di $\mathcal{BL}(X\times Y,E)$.

■

## Derivabilità doppia

**⌘ Definizione: Derivabilità doppia, Derivata seconda**

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.
Sia $f : A \to Y$ una funzione.

Si dice che $f$ è **derivabile due volte** secondo Gateaux (rispett. Fréchet) in $\mathbf{x}_0$ quando
esiste un intorno aperto $U \subseteq A$ di $\mathbf{x}_0$ tale che $f$ sia derivabile in $U$ secondo Gateaux (rispett. Fréchet), e $f'$ è anch'essa derivabile in $\mathbf{x}_0$ secondo Gateaux (rispett. Fréchet).

La derivata $(f')'(\mathbf{x}_0)$ appartiene a $\mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X, Y)\big)$;
si dice **derivata doppia** di $f$ in $\mathbf{x}_0$, e si denota con $f''(\mathbf{x}_0)$, l'operatore bilineare continuo
$\mathcal{K}^{-1}\big((f')'(\mathbf{x}_0)\big)$.

Cioè, si ha $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \big((f')'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\big)(\mathbf{v})$ per ogni $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in X \times X$.

### ⌘ Definizione: Funzioni di classe $C^2$

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$.
Sia $f : A \to Y$.

$f$ si dice **di classe** $C^2$ quando $f$ è di classe $C^1$, e $f'$ è anch'essa di classe $C^1$.

### Osservazione: Operatori lineari continui sono di classe $C^2$

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Allora, $T$ è di classe $C^2$, e si ha $T''(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}_Y$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$.

Infatti, per ogni $\mathbf{x} \in X$, è già stato osservato che $T$ è di classe $C^1$, e si ha

$T'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u} \in U$.

Ne segue che $T'$ è costante, dunque anch'essa di classe $C^1$, e si ha

$T''(\mathbf{x})(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \big((T')'(\mathbf{x})(\mathbf{u})\big)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(X,Y)}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_Y$.

**Proposizione 19.5: Derivazione della valutazione della derivata**

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$.
Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.
Sia $f : A \to Y$ una funzione G-derivabile due volte in $\mathbf{x}_0$;
sia dunque $U \subseteq A$ un intorno aperto di $\mathbf{x}_0$ tale che $f$ sia derivabile in $U$, che esiste essendo $f$ derivabile due volte in $\mathbf{x}_0$.
Sia $\mathbf{v} \in X$.
Sia $f'(\cdot)(\mathbf{v}) : U \to Y$ la mappa definita ponendo $\mathbf{x} \mapsto f'(\mathbf{x})(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{x} \in U$.

$f'(\cdot)(\mathbf{v})$ è G-derivabile in $\mathbf{x}_0$, e $\big(f'(\cdot)(\mathbf{v})\big)'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u},\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{u} \in X$.

**Dimostrazione**

Si fissi $\mathbf{v} \in X$.

Per acquisire la tesi, basta mostrare che

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f'(\mathbf{x}_0+\lambda\mathbf{u})(\mathbf{v}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})}{\lambda} = f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Si ha

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{f'(\mathbf{x}_0+\lambda\mathbf{u})(\mathbf{v}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})}{\lambda} - f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u},\mathbf{v}) \right\|_Y = \lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{f'(\mathbf{x}_0+\lambda\mathbf{u})(\mathbf{v}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})}{\lambda} - \big((f')'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\big)(\mathbf{v}) \right\|_Y \quad \text{Per definizione di } f'$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \left( \frac{f'(\mathbf{x}_0+\lambda \mathbf{u})-f'(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \right)(\mathbf{v}) - ((f')'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}))(\mathbf{v}) \right\|_Y$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left\| \left( \frac{f'(\mathbf{x}_0+\lambda \mathbf{u})-f'(\mathbf{x}_0)}{\lambda} - (f')'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) \right)(\mathbf{v}) \right\|_Y$$

$$\leq \lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{f'(\mathbf{x}_0+\lambda \mathbf{u})-f'(\mathbf{x}_0)}{\lambda} - (f')'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) \right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{v}\|_X$$

Per confronto dei lin disuguaglianza fonda norme di operatori li

$$= 0$$

Essendo $\lim_{\lambda \to 0} \frac{f'(\mathbf{x}_0+\lambda \mathbf{u})-f'(\mathbf{x}}{\lambda}$ per doppia derivabili

Dunque, $\lim_{\lambda \to 0} \frac{f'(\mathbf{x}_0+\lambda \mathbf{u})(\mathbf{v})-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})}{\lambda} = f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, come si voleva.

■

**Teorema 19.6: Teorema di Schwartz, di simmetria della derivata seconda**

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$.
Sia $\mathbf{x}_0 \in \mathring{A}$.
Sia $f : A \to Y$ una funzione F-derivabile due volte in $\mathbf{x}_0$.

Si ha $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ per ogni $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in X \times X$.

## Formule di Taylor

**Proposizione 19.7: Formula di Taylor nella forma di Lagrange**

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$ aperto e convesso.
Sia $f : A \to Y$ una funzione di classe $C^2$.
Siano $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in A$.

Si ha $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x}) \in \frac{1}{2}\overline{\operatorname{conv}}\left(\{f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))(\mathbf{z}-\mathbf{x}, \mathbf{z}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in ]0;1[\}\right)$.

**Osservazioni preliminari**

Sia $\varphi \in Y^*$.
Sia $\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $\gamma(\lambda) = \varphi\big(f\big(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x})\big)\big)$ per ogni $\lambda \in [0;1]$.

$\gamma$ è di classe $C^2$.
Infatti:

- La mappa $\mathcal{s} : [0;1] \to A$ definita ponendo $\lambda \mapsto \mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x})$ è di classe $C^2$ essendo somma di una funzione costante ($\lambda \mapsto \mathbf{x}$) e una lineare continua ($\lambda \mapsto \lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x})$);
- $f$ è di classe $C^2$ per ipotesi;
- $\varphi$ è di classe $C^2$ essendo lineare continua.

$\gamma$ è allora di classe $C^2$ essendo pari a $\varphi \circ f \circ \mathcal{s}$, composizione di funzioni di classe $C^2$.

Applicando due volte la derivazione delle funzioni composte si ricava che, per ogni $\lambda \in [0;1]$, vale

$\dot{\gamma}(\lambda) = \varphi\big(f'\big(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x})\big)(\mathbf{z}-\mathbf{x})\big)$.

$\ddot{\gamma}(\lambda) = \varphi\big(f''\big(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x})\big)(\mathbf{z}-\mathbf{x}, \mathbf{z}-\mathbf{x})\big)$.

### Dimostrazione

Si proceda per assurdo, supponendo che

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x}) \notin \tfrac{1}{2}\overline{\operatorname{conv}}\left(\left\{f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))(\mathbf{z}-\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in \left]0;1\right[\right\}\right).$$

Per il Teorema di Separazione ([Teorema 7.10]) applicato all'insieme $\frac{1}{2}\overline{\operatorname{conv}}\left(\left\{f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))(\mathbf{u}-\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in \left]0;1\right[\right\}\right)$, chiuso e convesso, e all'insieme $\{f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x})\}$ compatto, convesso e disgiunto dal primo insieme per ipotesi di assurdo, esiste allora $\varphi \in Y^*$ tale che

$$\frac{1}{2}\sup_{\mathbf{y}\in\overline{\operatorname{conv}}(C)} \varphi(\mathbf{y}) < \varphi\big(f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x})\big).$$

In particolare, essendo $C \subseteq \overline{\operatorname{conv}}(C)$, ne segue che $\frac{1}{2}\varphi\big(f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))(\mathbf{z}-\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{x})\big) < \varphi\big(f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x})\big)$ per ogni $\lambda \in \left]0;1\right[$ .

Si definisca ora la funzione $\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}$ ponendo $\gamma(\lambda) = \varphi\Big(f\big(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x})\big)\Big)$ per ogni $\lambda \in [0;1]$.

Per le osservazioni preliminari, $\gamma$ è di classe $C^2$ e, per ogni $\lambda \in [0;1]$, si ha

$$\dot\gamma(\lambda) = \varphi\big(f'(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{u}-\mathbf{x}))(\mathbf{u}-\mathbf{x})\big).$$

$$\ddot\gamma(\lambda) = \varphi\big(f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{u}-\mathbf{x}))(\mathbf{u}-\mathbf{x},\mathbf{u}-\mathbf{x})\big).$$

Allora, su $\gamma$ è applicabile la formula di Taylor per funzioni reali con resto nella forma di Lagrange, secondo cui esiste $\tilde\lambda \in \left]0;1\right[$ tale per cui

$$\gamma(1) = \gamma(0) + \dot\gamma(0) + \tfrac{1}{2}\ddot\gamma(\tilde\lambda);$$

si ha cioè

$\varphi(f(\mathbf{z})) = \varphi(f(\mathbf{x})) - \varphi\big(f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}-\mathbf{x})\big) - \frac{1}{2}\varphi\big(f''(\mathbf{x}+\tilde\lambda(\mathbf{u}-\mathbf{x}))(\mathbf{u}-\mathbf{x},\mathbf{u}-\mathbf{x})\big)$, da cui segue

$\varphi\big(f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x})\big) = \frac{1}{2}\varphi\big(f''(\mathbf{x} + \tilde{\lambda}(\mathbf{z}-\mathbf{x}))(\mathbf{z}-\mathbf{x}, \mathbf{z}-\mathbf{x})\big)$, in contraddizione con la disuguaglianza ottenuta inizialmente per costruzione di $\varphi$.

■

**Corollario 19.8: Maggiorazione dell'errore della formula di Taylor**

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$ aperto e convesso.
Sia $f : A \to Y$ una funzione di classe $C^2$.
Siano $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in A$.

Si ha $\|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x})\|_Y \leq \frac{1}{2} \sup\limits_{\lambda \in ]0;1[} \|f''(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))\|_{\mathcal{BL}(X\times X, Y)} \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_X^2$.

**Dimostrazione**

Per ogni $\lambda \in ]0;1[$, si ha

$$\|f''(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))(\mathbf{z}-\mathbf{x}, \mathbf{z}-\mathbf{x})\|_Y \leq \|f''(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))\|_{\mathcal{BL}(X\times X, Y)} \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_X^2$$

Per la disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori bilineari continui

$$\leq \sup_{\lambda \in ]0;1[} \|f''(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))\|_{\mathcal{BL}(X\times X, Y)} \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_X^2$$

Ne viene quindi che

$$\left\{f''(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))(\mathbf{z}-\mathbf{x}, \mathbf{z}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in ]0;1[\right\} \subseteq \overline{B}\left(\mathbf{0}, \sup_{\lambda \in ]0;1[} \|f''(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))\|_{\mathcal{BL}(X\times X, Y)} \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_X^2\right);$$

essendo il secondo insieme chiuso e convesso, ne viene allora che

$\overline{\operatorname{conv}}\left(\{f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))(\mathbf{z}-\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in ]0;1[\}\right) \subseteq \overline{B}\Big(\mathbf{0}, \sup\limits_{\lambda \in ]0;1[} \|f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))\|_{\mathcal{BL}(X\times X,Y)} \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_X^2\Big)$, per definizione di chiusura convessa.

Si ha allora

$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{z})-f(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x}) \in \tfrac{1}{2}\overline{\operatorname{conv}}\left(\{f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))(\mathbf{z}-\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in ]0;1[\}\right) && \text{Per la formula di Taylor nella forma di Lagrange ([Proposizione 19.7])} \\
& \subseteq \tfrac{1}{2}\overline{B}\Big(\mathbf{0}, \sup_{\lambda \in ]0;1[} \|f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))\|_{\mathcal{BL}(X\times X,Y)} \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_X^2\Big) && \text{Per quanto osservato finora} \\
& = \overline{B}\Big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}\sup_{\lambda \in ]0;1[} \|f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))\|_{\mathcal{BL}(X\times X,Y)} \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_X^2\Big)
\end{aligned}
$$

da cui segue che
$\|f(\mathbf{z})-f(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x})(\mathbf{z}-\mathbf{x})\|_Y \leq \frac{1}{2}\sup\limits_{\lambda \in ]0;1[} \|f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{z}-\mathbf{x}))\|_{\mathcal{BL}(X\times X,Y)} \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|_X^2$.

■

### Proposizione 19.9: Formula di Taylor nella forma di Peano

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$ aperto e convesso.
Sia $f : A \to Y$ una funzione di classe $C^2$.
Sia $\mathbf{x}_0 \in A$.

Si ha $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})-f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u},\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X^2} = \mathbf{0}_Y$.

#### Osservazioni preliminari

Si definisca la funzione $g : A \to Y$ ponendo $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) - \frac{1}{2}f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.

$g$ è di classe $C^2$ in quanto tutti gli addendi lo sono, e fissato $\mathbf{x} \in A$ si ha

$g'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) - f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, per ogni $\mathbf{u} \in X$;

$g''(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f''(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$.

**Dimostrazione**

Si definisca la funzione $g : A \to Y$ ponendo $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in A$.

$g$ è di classe $C^2$ in quanto tutti gli addendi lo sono; fissati $\mathbf{x} \in A$ e $\mathbf{u} \in X$, si ha

| | |
|---|---|
| $g'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) - \mathbf{0}_Y - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) - \frac{1}{2}\left(f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{u})\right)$ | Per derivazione di una combinazione lineare di funzioni, e usando la [Proposizione 17.4] per derivare $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ |
| $= f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) - f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ | $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, per il teorema di Schwartz ([Teorema 19.6]) |

fissati quindi $\mathbf{x} \in A$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$, si ha allora

$g''(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f''(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, per derivazione di una combinazione lineare di funzioni.

Si fissi ora $\varepsilon > 0$;
si provi che esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$, si ha
$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) - f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u})\|_Y < \varepsilon \|\mathbf{u}\|_X^2$.
Così facendo, la tesi sarebbe allora acquisita.

Per continuità di $f''$ essendo $f$ di classe $C^2$ per ipotesi ed essendo $\mathbf{x}_0 \in A$ aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subseteq A$ e

$\|f''(\mathbf{x}) - f''(\mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{BL}(X\times X,Y)} < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$.

Per legge di $g''$, si ha allora $\|g''(\mathbf{x})\|_{\mathcal{BL}(X\times X,Y)} < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$;
in particolare, si ha dunque $\|g''(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{u})\|_{\mathcal{BL}(X\times X,Y)} < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{0}, \delta)$ e per ogni $\lambda \in \,]0;1[$ ;

Per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$, si ha allora $\sup\limits_{\lambda \in ]0;1[} \|f''(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u})\|_{\mathcal{BL}(X\times X,Y)} \leq \varepsilon$, e dal [Corollario 19.8] viene quindi che

$$\|g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - g(\mathbf{x}_0) - g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y \leq \tfrac{1}{2} \sup_{\lambda \in ]0;1[} \|f''(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{u})\|_{\mathcal{BL}(X\times X,Y)} \|\mathbf{u}\|_X^2 \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon\|\mathbf{u}\|_X^2.$$

Infine, si osserva che vale
$g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - g(\mathbf{x}_0) - g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) - \frac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u} \in X$.

Dunque, per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ si ha

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}) - \tfrac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u})\|_Y = \|g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - g(\mathbf{x}_0) - g'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon\|\mathbf{u}\|_X^2,$$

come volevasi ottenere.
■