3.3 - Fare Analisi con l'Algebra

La teoria delle varietà prende alcuni spunti dalla geometria algebrica, dove uno spazio si sostituisce con lo spazio delle funzioni definite su di esso.

Ad esempio, preso $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, abbiamo già definito l'insieme

$$C^k(U) = \{f : U \to \mathbb{R} : f \text{ di classe } C^k\},$$

con $k \geq 0$ intero oppure $k \in \{\infty, \omega\}$;
abbiamo visto che questo diventa una $\mathbb{R}$-*algebra commutativa, associativa e unitaria*, con la somma e i due prodotti standard.

Vediamo altri fatti su questo spazio.

Osservazione 3.3.1 ($C^k(U)$ non è mai integro).

Notiamo che $C^k(U)$ non è mai integro come anello, nemmeno per $n = 1$ e $k = \infty$.

Infatti, consideriamo la funzione f dell'Esempio 3.1.4, e la funzione $g : x \mapsto f(-x)$;
queste sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, e vale $(f \cdot g)(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 3.3.2 ($C^k(U)$ non ha elementi nilpotenti non banali).

Osserviamo che, al di fuori della funzione costante nulla, $C^k(U)$ non possiede elementi nilpotenti.

Infatti, data $f : U \to \mathbb{R}$ e fissato $x \in U$, abbiamo $\big(f(x)\big)^h = 0$ con $h \geq 1$ intero, se e solo se $f(x) = 0$;
dunque, f^n è la funzione identicamente nulla su U se e solo se f è essa stessa identicamente nulla su U.

Valutazione di funzioni in un punto; l'ideale $\mathfrak{m}_p$

Prendiamo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, e consideriamo l'algebra $C^k(U)$.
Fissato un punto $p \in U$, possiamo pensare di inviare ogni $f \in C^k(U)$ nel valore che tale funzione assume in p;
nasce allora il concetto di *valutazione di una funzione*:

⌘ Definizione 3.3.3 (Valutazione di una funzione in un punto).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, e sia $p \in U$;
si consideri l'algebra $C^k(U)$.

Si definisce la *valutazione in p delle funzioni in $C^k(U)$* come la funzione $\mathrm{ev}_p : C^k(U) \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$\mathrm{ev}_p(f) := f(p).$$

Si vede piuttosto immediatamente che ev_p è un omomorfismo suriettivo di $\mathbb{R}$-algebre (ossia è un omomorfismo tra questi spazi, sia come anelli che come $\mathbb{R}$-spazi vettoriali).

Interpretiamo quindi $C^k(U)$ e $\mathbb{R}$ come anelli, e definiamo il seguente ideale di $C^k(U)$:

$$\mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p) = \{f \in C^k(U) : f(p) = 0\};$$

essendo ev_p suriettiva, dal primo teorema dell'omomorfismo troviamo che

$$\frac{C^k(U)}{\mathfrak{m}_p} \cong \mathbb{R}.$$

Essendo $\mathbb{R}$ un campo, deduciamo che $\mathfrak{m}_p$ è un *ideale massimale* di $C^k(U)$.

Grazie al Lemma di Hadamard (Proposizione 3.1.5) sotto le sue ipotesi possiamo ricavare dei generatori per $\mathfrak{m}_p$:

Proposizione 3.3.4 (Generatori per l'ideale $\mathfrak{m}_p$).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, stellato rispetto a un punto $p = (p^1, \dots, p^n) \in U$;
al variare di $i \in \{1, \dots, n\}$, sia $x^i : U \to \mathbb{R}$ la proiezione sulla i-esima componente: $x \mapsto x^i$.

In $C^k(U)$ si ha $\mathfrak{m}_p = \langle x^1 - p^1, \dots, x^n - p^n \rangle$.

Dimostrazione

Che le funzioni $x^i - p^i$ appartengano a $\mathfrak{m}_p$ è evidente.

D'altra parte, data una funzione $f \in \mathfrak{m}_p$, dal Lemma di Hadamard (Proposizione 3.1.5) otteniamo un'espressione del tipo

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) \cdot g_i(x),$$

con $g_i \in C^k(U)$.

■

Algebra dei germi di funzioni

Procediamo ora come in 3.2 - Vettori Tangenti > Germi di funzioni per definire lo spazio dei germi di funzioni, di una classe di differenziabilità qualsiasi.

⌘ Definizione 3.3.5 (Germi di funzioni di classe C^k in un punto).

Sia $p \in \mathbb{R}^n$, e si fissi $k \geq 0$ intero oppure $k \in \{\infty, \omega\}$;
consideriamo l'insieme

$$C^k(p) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ di classe } C^k \mid U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ intorno di } p\}$$

Definiamo la relazione $\overset{p}{\sim}$ dichiarando $(f : U \to \mathbb{R}) \overset{p}{\sim} (g : V \to \mathbb{R})$ quando esiste $W \subseteq U \cap V$ intorno di p, tale che $f|_W = g|_W$.

Questa relazione è di equivalenza;
diciamo allora *germe di f in p* la classe di equivalenza $[f]_{\overset{p}{\sim}}$.

Chiamiamo inoltre *spiga dei germi di classe C^k in p* l'insieme quoziente $C^k(p)/\overset{p}{\sim}$, che denotiamo semplicemente con C^k_p.

Anche qui, se non c'è rischio di ambiguità, denoteremo il germe di una funzione f in p con lo stesso simbolo f, ricordando che l'uguaglianza è riferita a un intorno di p.

Come abbiamo visto nella sezione precedente, queste operazioni sono compatibili con $\overset{p}{\sim}$;
su C_p^k disponiamo quindi delle operazioni indotte naturalmente da $C^k(U)$ al variare di U intorno di p:

$$
\begin{aligned}
[f_1]_{\overset{p}{\sim}} + [f_1]_{\overset{p}{\sim}} &:= [f_1 + f_2]_{\overset{p}{\sim}} \\
k \cdot [f_1]_{\overset{p}{\sim}} &:= [k \cdot f2]_{\overset{p}{\sim}} \\
[f_1]_{\overset{p}{\sim}} \cdot [f_1]_{\overset{p}{\sim}} &:= [f_1 \cdot f_2]_{\overset{p}{\sim}}
\end{aligned}
$$

che rendono C_p^k una $\mathbb{R}$-algebra commutativa, associativa e unitaria.

In analogia con l'Osservazione 3.2.3, facciamo la seguente

Osservazione 3.3.6 (Valutazione in p rispetto ai germi di funzioni).

Come nel caso delle derivate direzionali, possiamo fare la stessa modifica per la valutazione $\mathbf{ev}_p$, e rimpiazzare il dominio $C^k(U)$ con C_p^k.

Infatti, tutte le funzioni definite in un intorno di p possono essere valutate in p, e le funzioni di uno stesso germa hanno uguale valutazione, quindi questa resta ben definita.

Inoltre, così facendo, per compatibilità delle operazioni la valutazione resta un omomorfismo suriettivo di $\mathbb{R}$-algebre;
quindi, $\mathfrak{m}_p = \ker(\mathbf{ev}_p)$ è ancora un ideale massimale, però di C_p^k.

Infine, come nella Proposizione 3.3.4, vale anche qui $\mathfrak{m}_p = \langle x^1 - p^1, \dots, x^n - p^n \rangle$;
dato un germe in p possiamo sempre restringere il rappresentante ad un intorno sferico aperto centrato in p (il germe non cambia) che è stellato in p, e applicare tale proposizione.

Quindi, d'ora in poi lavoreremo con $\mathbf{ev}_p : C_p^k \to \mathbb{R}$.

Anelli locali

Lo spazio C_p^k dei germi di funzioni C^k in p come anello non è di tipo qualsiasi, bensì ha proprietà piuttosto specifiche; ad esempio, mostreremo ora che questo è un cosiddetto *anello locale*.

⌘ Definizione 3.3.7 (Anello locale).

Sia A un anello commutativo unitario.

A si dice *locale* quando ammette un unico ideale massimale $\mathfrak{m} \subsetneq A$.

Prima di procedere con la dimostrazione che C_p^k è un anello locale, facciamo la seguente

Osservazione 3.3.8 (Condizione sufficiente per anelli locali).

Consideriamo A anello commutativo unitario, e $\mathfrak{m} \subsetneq A$ ideale massimale;
supponiamo che ogni $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ sia invertibile.

Allora, $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale massimale, dunque A è un anello locale.

Infatti sappiamo che, se un ideale contiene un elemento invertibile, per assorbimento esso contiene 1 e dunque tutto A;
dunque, se $\mathfrak{i} \subseteq A$ è un ideale con $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{i}$, allora $\mathfrak{i} = A$.

Proposizione 3.3.9 (C_p^k è un anello locale).

L'anello C_p^k ha $\mathfrak{m}_p$ come unico ideale massimale.

Dimostrazione

Sappiamo che $\mathfrak{m}_p$ è massimale;
in virtù dell'Osservazione 3.3.8 dobbiamo solo far vedere che ogni $f \in C_p^k \setminus \mathfrak{m}_p$ è invertibile.

Prendiamo dunque un tale f.
Abbiamo che $f(p) \neq 0$, dunque per continuità esiste tutto un intorno di p in cui $f(x) \neq 0$, e dunque è definito il germe $g = 1/f$.

Abbiamo allora $f \cdot g = 1$ (ricordiamo che, trattando dei germi, l'uguaglianza è da interpretare in senso locale intorno a p).

■

Dimostriamo adesso che C_p^∞ *non è un anello noetheriano* (ricordiamo che un anello si dice noetheriano quando ogni suo ideale è finitamente generato);
premettiamo prima un risultato che ci servirà, che non dimostreremo.

Per prima cosa, introduciamo la seguente notazione:
dato un insieme $S \subseteq A$, denotiamo con S^r l'insieme dei *prodotti di r elementi in S*.

Lemma 3.3.10 (Teorema di intersezione di Krull).

Sia A un anello commutativo unitario, locale e noetheriano;
sia $I \subsetneq A$ un ideale proprio di A.

Si ha $\bigcap_{r=1}^{\infty} I^r = \{0\}$.

Proposizione 3.3.11 (L'anello C_p^∞ non è noetheriano).

L'anello C_p^∞ non è noetheriano.

Dimostrazione

Forniamo la dimostrazione solo nel caso $n = 1$, cioè con germi di funzioni di una variabile.
Supporremo inoltre $p = 0$, per semplicità.

Consideriamo gli ideali $\mathfrak{m}^r$ al variare di $r \geq 1$ intero.
Sappiamo dall'Osservazione 3.3.6 che $\mathfrak{m} = \langle x \rangle$, e deduciamo abbastanza immediatamente che segue allora $\mathfrak{m}^r = \langle x^r \rangle$ (dove x^r è il prodotto r volte della funzione x).

Prendiamo adesso la funzione h come nell'Esempio 3.1.4;
questa appartiene a C_0^∞, e si ha $\frac{\partial^r h}{\partial x^r}\Big|_{x=0} = 0$ per ogni $r \geq 0$ intero.

Ne viene che $h \in \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}^r$.
L'idea sta nel considerare, fissato $r \geq 1$ intero, la funzione g pari a h/x^r, estesa per continuità in $x = 0$ (in cui dunque vale 0);
questa è ancora in C_0^∞ (per vederlo basta applicare il teorema di L'Hopital), e vale $h = x^r \cdot g$.

Poiché $h \neq 0$ identicamente ed essendo C_0^∞ un anello locale (Proposizione 3.3.9), dal Lemma 3.3.10 deduciamo che C_0^∞ non è Noetheriano.

■

Da questa proposizione segue quindi che anche $C^\infty(U)$ *non è noetheriano*, per alcun $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto;
se infatti un ideale $I \subseteq C^\infty(U)$ è finitamente generato da $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(U)$, passando ai germi in un punto $p \in U$ otterremmo sempre $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, per compatibilità delle operazioni tra i due spazi.

L'insieme $\mathfrak{m}_p^2$ e il quoziente $\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2$

Adesso, consideriamo negli spazi $C^k(U)$ e C_p^k l'insieme

$$\mathfrak{m}_p^2 = \operatorname{span}\{f \cdot g \mid f, g \in \mathfrak{m}_p\} \subseteq \mathfrak{m}_p \ ,$$

costituito dalle combinazioni lineari di prodotti di elementi in $\mathfrak{m}_p$.

Osservazione 3.3.12 (Ideale $\mathfrak{m}_p^2$ nel caso $k = 0$).

Se $k = 0$ (cioè per funzioni / germi di classe C^0, ossia continue), si ha $\mathfrak{m}_p^2 = \mathfrak{m}_p$.

Infatti, fissata $f \in \mathfrak{m}_p$ continua, si ha $f = \sqrt[3]{f} \cdot \sqrt[3]{f^2} \in \mathfrak{m}_p^2$.

Vediamo subito che questo insieme è sia un *ideale* che un $\mathbb{R}$-*sottospazio vettoriale* di $C^k(U)$ (o C_p^k), contenuto in $\mathfrak{m}_p$;
ha senso dunque considerare il quoziente $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, che diventa una $\mathbb{R}$-algebra con le operazioni indotte da $C^k(U)$ (o C_p^k).

Proposizione 3.3.13 ($\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ come spazio vettoriale).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e stellato rispetto a un punto $p = (p^1, \ldots, p^n) \in U$;
lavoriamo nello spazio $C^k(U)$ oppure C_p^k.

Gli elementi $\overline{x^1} - p^1, \ldots, \overline{x^n} - p^n$ sono linearmente indipendenti in $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ visto come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.
Se inoltre $k = \infty$, essi costituiscono una base per tale spazio.

Dimostrazione

Facciamo intanto vedere che tali funzioni sono linearmente indipendenti;
consideriamo quindi una generica combinazione lineare nulla in $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, che corrisponde a una funzione del tipo $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x^i - p^i) \in \mathfrak{m}_p^2$, e mostriamo che $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Essendo un elemento di $\mathfrak{m}_p^2$, f ha in generale una legge del tipo

$$f(x) = \sum_{j=1}^{s} g_j(x) \cdot h_j(x), \quad g_j, h_j \in \mathfrak{m}_p \ ;$$

Basta ora osservare che

$$\alpha_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{j=1}^{s} \left(\left.\frac{\partial g_j}{\partial x^i}\right|_p \cdot \underbrace{h_j(p)}_{=0} + \underbrace{g_j(p)}_{=0} \cdot \left.\frac{\partial h_j}{\partial x^i}\right|_p \right) = 0.$$

Dobbiamo ora far vedere che nel caso $k = \infty$ le funzioni indicate generino anche tutto $\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2$.
Prendiamo quindi una generica funzione $f \in \mathfrak{m}_p$ di classe C^∞, e applichiamo il Lemma di Hadamard (Proposizione 3.1.5):

$$f(x) = \underbrace{f(p)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) \cdot g_i(x), \quad g_i \text{ di classe } C^\infty$$

Adesso, a ciascuna delle g_i applichiamo nuovamente il Lemma di Hadamard:

$$g_i(x) = g_i(p) + \sum_{j=1}^{n} (x^j - p^j) \cdot h_{i,j}(x), \quad h_{i,j} \text{ di classe } C^\infty$$

Otteniamo così l'espressione

$$f = \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) \cdot g_i(p) + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} (x^i - p^i)(x^j - p^j) \cdot h_{i,j}}_{\in \mathfrak{m}_p} \ ;$$

passando al quoziente modulo $\mathfrak{m}_p^2$ otteniamo quindi ciò che volevamo.

■

Corollario 3.3.14 (Dimensione dello spazio vettoriale $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ per $k = \infty$).

Si consideri lo spazio $C^\infty(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto stellato, o C^∞_p con $p \in \mathbb{R}^n$.

Lo spazio $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale ha dimensione n;
una sua base è data dai vettori $\overline{x^1} - p^1, \dots, \overline{x^n} - p^n$.

Dimensione di $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ nel caso $k < \infty$

La Proposizione 3.3.13 fornisce una base solo nel caso $k = \infty$;
infatti, il Lemma di Hadamard (Proposizione 3.1.5) nel caso $k < \infty$ ci permette esprimere una funzione di classe C^k per mezzo di funzioni di classe C^{k-1}, ma non necessariamente C^k (addirittura questo Lemma non può essere applicato per $k = 0$).

Vogliamo quindi capire cosa succede alla dimensione di $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ nel caso $k < \infty$.
Se $k = 0$ abbiamo l'Osservazione 3.3.12, che ci dice sostanzialmente che $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ è la $\mathbb{R}$-algebra nulla $\{0\}$, che dunque ha dimensione 0 come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Per $k \geq 1$ dobbiamo invece lavorare un po' di più.

Lemma 3.3.15 (Aumento di classe).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $p = (p^1, \dots, p^n) \in U$;
lavoriamo nello spazio $C^k(U)$ oppure C^k_p, con $k \geq 1$ intero.
Siano $f, g \in \mathfrak{m}_p$.

Esiste un intorno $V \subseteq U$ di p tale che $f \cdot g \in C^{k+1}(V)$ (o, in termini di germi, $f \cdot g \in C^{k+1}_p$).

Dimostrazione

Per semplicità lavoriamo con $C^k(U)$;
il procedimento si mantiene identico passando ai germi.

Applichiamo la formula di Taylor con resto secondo Peano, a f e g;
per ogni $x \in U$ abbiamo quindi la scrittura

$$f(x) = \underbrace{f(p)}_{=0} + S(x-p) + o\big(\|x-p\|^k\big),$$
$$g(x) = \underbrace{g(p)}_{=0} + T(x-p) + o\big(\|x-p\|^k\big),$$

dove S e T sono polinomi di grado almeno 1, e si annullano in p.

Moltiplicando le due espressioni membro a membro, troviamo allora $V \subseteq U$ intorno di p, tale che

$$f(x)g(x) = S(x-p)T(x-p) + o\big(\|x-p\|^{k+r}\big) \quad \forall x \in V,$$

con $r \geq 1$;
la motivazione di questa scrittura sta nel fatto che $S(x-p)/\|x-p\|$ e $T(x-p)/\|x-p\|$ sono funzioni limitate in un certo intorno di p, in quanto S e T sono polinomi di grado almeno 1 che si annullano in p.

A questo punto, è immediato dedurre che $f \cdot g \in C^{k+r}(V)$, quindi in particolare è di classe $C^{k+1}(V)$.

$\blacksquare$

Fatto ciò, possiamo vedere cosa succede alla dimensione di $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$.

Proposizione 3.3.16 (Dimensione dello spazio vettoriale $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ per $k \geq 1$ intero).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $p \in U$;
lavoriamo nello spazio $C^k(U)$ oppure C^k_p, con $k \geq 1$ intero.

Lo spazio vettoriale $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ ha dimensione almeno pari alla potenza del continuo.

Dimostrazione

Per semplicità supponiamo $p = 0$;
inoltre, per il momento supponiamo anche $n = 1$, quindi lavoriamo con funzioni in una variabile.

Per ogni $\alpha \in]0;1[$ definiamo la funzione $p_\alpha : x \mapsto x^{\alpha+k}$;
notiamo che $p_\alpha \in C_0^k \setminus C_0^{k+1}$, e anche $p_\alpha \in \mathfrak{m}_0$.

Passiamo queste funzioni al quoziente $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$;
vogliamo provare che, per ogni $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in]0;1[$ distinti, le funzioni $p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_r}$ sono linearmente indipendenti in $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$.

Dunque, consideriamo la generica combinazione lineare nulla in questo spazio, che corrisponde a una funzione $f = \lambda_1 p_{\alpha_1} + \dots + \lambda_r p_{\alpha_r} \in \mathfrak{m}_0^2$.

Stando in $\mathfrak{m}_0^2$, possiamo scrivere $f = \sum_{j=1}^{s} g_j \cdot h_j$, con $g_j, h_j \in \mathfrak{m}_0$;
per il Lemma 3.3.15, troviamo che $f \in C_0^{k+1}$.

Poiché le funzioni p_{α_i} non stanno in C_0^{k+1}, deve necessariamente seguire $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

Quindi, abbiamo acquisito la tesi per $n = 1$;
per $n \geq 1$ basta comporre le p_α a destra con la proiezione su una coordinata, ad esempio la prima, e ripetere il procedimento con queste funzioni.

■

Derivate direzionali tramite $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$; lo spazio tangente di Zariski

Perché ci siamo presi la briga di studiare lo spazio $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ così a fondo?
L'idea è che vogliamo dare una nozione algebrica dello spazio tangente, senza ricorrere al calcolo differenziale.

In questa sezione vedremo come $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ torna utile per definire questo spazio tangente.

Come abbiamo visto in 3.2 - Vettori Tangenti > Vettori tangenti geometrici e derivate direzionali e nell'Osservazione 3.2.3, al variare di $v \in \mathbb{R}_p^n$ risulta ben definita la mappa *derivata direzionale*

$$D_v|_p : C_p^\infty \to \mathbb{R} : \quad f \longmapsto D_v f|_p := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p+tv) = \sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p .$$

Quello che facciamo adesso è restringere il dominio a $\mathfrak{m}_p$, e quozientarlo con $\mathfrak{m}_p^2$;
siamo motivati a fare questa scelta in quanto derivare è come prendere la migliore approssimazione lineare, il che significa eliminare termini quadratici e superiori.
Distinguiamo questa nuova mappa dalla precedente aggiungendo una barra di sopra:

$$\overline{D}_v|_p : \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \to \mathbb{R} : \quad [f \bmod \mathfrak{m}^2] \mapsto D_v f|_p$$

Questa mappa è ancora ben definita: data infatti una funzione $f \in \mathfrak{m}_p^2$, questa è del tipo $\sum_i g_i \cdot h_i$ con $g_i, h_i \in \mathfrak{m}_p$, ed essendo $D_v|_p$ una derivazione in p (Teorema 3.2.6), troviamo che $D_v f|_p = 0$ (Lemma 3.2.5, secondo punto).
Essendo le operazioni sul quoziente quelle indotte naturalmente da $\mathfrak{m}_p$, troviamo anche che questa mappa è ancora una derivazione in p.

Adesso, facciamo la seguente cruciale

Osservazione 3.3.17 (Osservazione: Lo spazio $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$).

Le mappe $\overline{D}_v|_p$ al variare di $v_p \in \mathbb{R}_p^n$ sono funzionali lineari su $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, ossia sono elementi dello spazio duale $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$.

Consideriamo in particolare le derivate parziali $\left.\overline{\frac{\partial}{\partial x^i}}\right|_p = \overline{D}_{e_i}|_p$ al variare di $i \in \{1, \dots, n\}$;
queste sono strettamente correlate con la base $\mathcal{B} = \{\overline{x^1 - p^1}, \dots, \overline{x^n - p^n}\}$ per $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, indicata nel Corollario 3.3.14;
infatti, valutando le derivate parziali in questi elementi abbiamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (\overline{x^j} - p^j) = \delta_{i,j}$$

per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dove $\delta_{i,j}$ è la delta di Kronecker.

Ma allora, troviamo che $\left\{ \left.\overline{\frac{\partial}{\partial x^1}}\right|_p, \dots, \left.\overline{\frac{\partial}{\partial x^n}}\right|_p \right\}$ corrisponde esattamente alla *base duale* $\mathcal{B}^*$ *di* $\mathcal{B}$, per $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$.

A questo punto, sappiamo allora dove andare a parare:
vogliamo identificare canonicamente lo spazio $\mathbb{R}^n_p$ con lo spazio duale $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$.

Teorema 3.3.18 (Isomorfismo naturale tra $\mathbb{R}^n_p$ e $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$).

Sia $p \in \mathbb{R}^n$.
Lavoriamo nello spazio C^∞_p.

La mappa $\Psi : \mathbb{R}^n_p \to (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^* : v_p \mapsto \overline{D}_v|_p$ è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.

Dimostrazione

La linearità di Ψ è immediata.

Basta ora considerare l'Osservazione 3.3.17 per dedurre che $\mathcal{D}$ invia una base del dominio in una base del codominio;
dunque, $\mathcal{D}$ è un isomorfismo.

■

Similmente al Teorema 3.2.6, questo teorema identifica lo spazio dei vettori tangenti geometrici $\mathbb{R}^n_p$ con lo spazio astratto $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$;
a questo spazio diamo un nome preciso.

⌘ Definizione 3.3.19 (Spazio tangente di Zariski).

Sia $p \in \mathbb{R}^n$, e consideriamo lo spazio C_p^∞.

Si dice *spazio tangente di Zariski* lo spazio $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$.