01 - Successioni Generalizzate e Limiti

Successioni generalizzate

⌘ Definizione: Relazione filtrante, insieme diretto

Sia D un insieme.
Sia $\preceq$ una relazione d'ordine parziale su D.

$\preceq$ si dice **relazione filtrante** quando
$\forall \alpha, \beta \in D, \ \exists \gamma \in D : \gamma \succeq \alpha \wedge \gamma \succeq \beta$.

Data una relazione filtrante $\preceq$ su D, l'insieme ordinato $(D, \preceq)$ si dice **insieme diretto**.

⌘ Definizione: Successione generalizzata

Sia $(D, \preceq)$ un insieme diretto.
Sia X un insieme non vuoto.

Si dice **successione generalizzata** su X una funzione del tipo $\varphi : D \to X$.

Fissato $\alpha \in D$, l'elemento $\varphi(\alpha)$ si denota con x_α, e la successione generalizzata φ si denota con $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$.

Per indicare che il codominio della successione è X, si scrive $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$.

Limiti e punti limite di successioni generalizzate

⌘ Definizione: Limiti e punti limite di una successione generalizzata

Sia X uno spazio topologico.
Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ una successione generalizzata su X.
Sia $x \in X$.

x si dice **limite** di $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ quando
$\forall U \text{ intorno di } x,\ \exists \alpha_0 \in D : \forall \alpha \succeq \alpha_0,\ x_\alpha \in U.$
In tal caso, si scrive $x = \lim\limits_{\alpha} x_\alpha$.

x si dice **punto limite** di $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ quando
$\forall U \text{ intorno di } x, \forall \alpha \in D : \exists \beta \succeq \alpha,\ x_\beta \in U.$

Osservazione: Relazione tra limiti e punti limiti

Un limite per una successione generalizzata è anche punto limite per questa.
Il viceversa generalmente non è vero.

Caratterizzazioni di enti e proprietà topologiche tramite le successioni generalizzate

Proposizione 1.1: Limite di una successione generalizzata su uno spazio di Hausdorff è unico

Sia X uno spazio topologico.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. X è di Hausdorff;
2. Vale l'unicità del limite di successioni generalizzate in X, ossia
   Per ogni successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ e per ogni $x, y \in X$ limiti per $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$, si ha $x = y$.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga per assurdo che $x \neq y$.
Essendo X di Hausdorff, esistono U intorno di x e V intorno di y tali che $U \cap V = \varnothing$.

Essendo $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$, in corrispondenza all'intorno U esiste $\alpha_x \in D$ tale che $x_\alpha \in U$ per ogni $x \succeq \alpha_x$;
essendo $y = \lim_{\alpha} x_\alpha$, in corrispondenza all'intorno V esiste $\alpha_y \in D$ tale che $x_\alpha \in V$ per ogni $x \succeq \alpha_y$.

Per filtranza di $\preceq$, esiste $\beta \succeq \alpha_x, \alpha_y$.
Allora, $x_\beta \in U$ e $x_\beta \in V$, il che è contraddittorio in quanto $U \cap V = \varnothing$.
■

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Si provi la contronominale.

Dunque, si supponga che esistano $x, y \in X$ con $x \neq y$, tali che, per ogni U intorno di x e V intorno di y, si abbia $U \cap V \neq \varnothing$;

l'obiettivo è provare l'esistenza di una successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ che possiede almeno due limiti distinti.

Sia $\mathcal{U}$ la famiglia degli intorni di x.
Sia $\mathcal{V}$ la famiglia degli intorni di y.

Si consideri l'insieme $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, e si consideri su di esso la relazione $\preceq$, definita ponendo
$(U, V) \preceq (U', V')$ quando $U' \subseteq$ e $V' \subseteq V$.

$\preceq$ è filtrante; infatti, dati $(U_1, V_1), (U_2, V_2) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, si ha $(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, in quanto l'intersezione di due intorni di uno stesso punto è ancora un suo intorno, e inoltre $(U_1, V_1), (U_2, V_2) \preceq (U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2)$.

Per ogni $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, sia $z_{U,V} \in X$ tale che $z_{U,V} \in U \cap V$, che esiste per ipotesi.
Sorge così la successione generalizzata $\{z_{U,V}\}_{(U,V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}} \subseteq X$.

x e y sono entrambi limiti di $\{z_{U,V}\}_{(U,V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}}$.

Infatti, per ogni U intorno di x, ossia per ogni $U \in \mathcal{U}$, fissato $V \in \mathcal{V}$ si ha $z_{U,V} \in U \cap V \subseteq U$;
inoltre, per ogni $(U', V') \succeq (U, V)$ si ha allora $z_{U',V'} \in U' \cap V' \subseteq U \cap V \subseteq U$.
■

Proposizione 1.2: Caratterizzazione della chiusura di un insieme in uno spazio topologico

Sia X uno spazio topologico.
Sia $A \subseteq X$.
Sia $x \in X$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. $x \in \overline{A}$;
2. Esiste una successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq A$ tale che $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$.

Dimostrazione $(2. \Rightarrow 1.)$

Si supponga che esiste una successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq A$ tale che $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$.
Sia U un intorno di x.

Per definizione di limite, esiste $\alpha_0 \in D$ tale che $x_\alpha \in U$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_0$.

Poiché $x_\alpha \in A$ per ogni $\alpha \in D$ per ipotesi, si ha $x_\alpha \in U \cap A$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_0$, dunque $U \cap A$.

Allora, $A \cap U \neq \varnothing$ per ogni U intorno di x, ossia $x \in \overline{A}$.
■

Dimostrazione $(2. \Rightarrow 1.)$

Si supponga che $x \in \overline{A}$.
Sia $\mathcal{U}$ la famiglia degli intorni di x;
si introduca su di essa la relazione d'ordine $\subseteq^{-1}$, definita ponendo $U \subseteq^{-1} V :\Leftrightarrow V \subseteq U$.

$\subseteq^{-1}$ è filtrante;
infatti, fissati $U, V \in \mathcal{U}$, si ha $U \cap V \in \mathcal{U}$, in quanto l'intersezione di due intorni di uno stesso punto è ancora un suo intorno, e $U, V \subseteq^{-1} U \cap V$.

Essendo $x \in \overline{A}$ per ipotesi, si ha $U \cap A \neq \varnothing$ per ogni $U \in \mathcal{U}$.
Dunque, per ogni $U \in \mathcal{U}$, sia x_U tale che $x_U \in U \cap A$.
Si consideri la successione generalizzata $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}}$.

Si ha $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}} \subseteq A$ per come è stato definito x_U.
Inoltre, si ha $x = \lim\limits_{U} x_U$.
Infatti, per ogni intorno U di x, ossia per ogni $U \in \mathcal{U}$, si ha $x_U \in U$ per definizione di x_U;
inoltre, per ogni $V \in \mathcal{U}$ tale che $V \supseteq^{-1} U$, ossia $V \subseteq U$, si ha $x_V \in V \subseteq U$.
■

Proposizione 1.3: Caratterizzazione della finezza di topologie

Sia $X \neq \varnothing$ uno spazio topologico.
Siano τ_1, τ_2 due topologie su X.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. τ_1 è meno fine di τ_2, ossia $\tau_1 \subseteq \tau_2$;
2. Per ogni successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ e per ogni $x \in X$, si ha $x = \lim\limits_\alpha x_\alpha \text{ in } \tau_2 \implies x = \lim\limits_\alpha x_\alpha \text{ in } \tau_1.$

Osservazioni preliminari

τ_1 è meno fine di τ_2, se e solo se ogni chiuso secondo τ_1 è chiuso secondo τ_2.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga τ_1 meno fine di τ_2.
Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ una successione generalizzata.
Sia $x = \lim\limits_\alpha x_\alpha \text{ in } \tau_2$;
si provi che $x = \lim\limits_\alpha x_\alpha \text{ in } \tau_1$.

Sia U un intorno di x secondo τ_1.
Allora, esso è intorno di x anche secondo τ_2 per ipotesi;
dunque, per definizione di x,
$\exists \alpha_0 \in D : \forall \alpha \succeq \alpha_0,\ x_\alpha \in U.$
Pertanto, $x = \lim\limits_\alpha x_\alpha \text{ in } \tau_1$.
■

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Intanto, si denoti con $\mathrm{cl}_\tau(A)$ la chiusura dell'insieme A rispetto alla topologia τ.
Sia C un insieme chiuso secondo τ_1.
Sia $x \in \mathrm{cl}_{\tau_2}(C)$.
Si provi che $x \in C$, mostrando così che $\mathrm{cl}_{\tau_2}(C) \subseteq C$, ossia C è chiuso secondo τ_2.

Per la [proposizione 1.2], esiste $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ tale che $x = \lim_\alpha x_\alpha \text{ in } \tau_2$.

Per ipotesi, segue allora $x = \lim_\alpha x_\alpha \text{ in } \tau_1$.

Pertanto, $x \in \mathrm{cl}_{\tau_1}(C)$ ossia, essendo C chiuso secondo τ_1 per definizione, $x \in C$, come volevasi dimostrare.
■

Proposizione 1.4: Caratterizzazione della compattezza

Sia X uno spazio topologico.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. X è compatto;
2. Ogni successione generalizzata in X ammette almeno un punto limite.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga X compatto.
Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ una successione generalizzata in X.

Si supponga per assurdo che ogni $x \in X$ non è punto limite per $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$.
Cioè, per ogni $x \in X$, esistono U_x intorno aperto di x e $\alpha_x \in D$ tali che $x_\beta \notin U_x$ per ogni $\beta \succeq \alpha_x$.

Si consideri la famiglia $\{U_x \mid x \in X\}$; essa è un ricoprimento di aperti per X in quanto $x \in U_x$ per ogni $x \in X$.
Per compattezza di X, esistono allora $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$.
Si considerino $\alpha_{x_1}, \ldots, \alpha_{x_n}$; per filtranza di $\preceq$, esiste $\beta \in D$ tale che $\beta \succeq \alpha_{x_i}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ma allora, per definizione di $\alpha_{x_1}, \dots, \alpha_{x_n}$, essendo β successivo a ognuno di questi si ha $x_\beta \notin U_{x_i}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, segue allora $x_\beta \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$;
ciò risulta contraddittorio in quanto $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = X$, e $x_\beta \in X$ in quanto $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$.

■

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Si supponga che ogni successione generalizzata in X ammetta almeno un punto limite.

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di chiusi con la proprietà d'intersezione finita.
Sia $\mathscr{G}$ la famiglia delle sottofamiglie finite di $\mathcal{F}$ con la relazione d'ordine $\subseteq$;
essa è filtrante in quanto, fissati $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathscr{G}$, si ha $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \in \mathscr{G}$ e $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$.

Poiché $\mathcal{F}$ soddisfa la proprietà d'intersezione finita, per ogni $\mathcal{G} \in \mathscr{G}$ si ha $\bigcap \mathcal{G} \neq \varnothing$;
Per ogni $G \in \mathscr{G}$, sia dunque $x_\mathcal{G} \in \bigcap \mathcal{G}$.
Si consideri la successione generalizzata $\{x_\mathcal{G}\}_{\mathcal{G} \in \mathscr{G}} \subseteq X$.

Per ipotesi, esiste $x^* \in X$ tale da essere un punto limite di $\{x_\mathcal{G}\}_{\mathcal{G} \in \mathscr{G}}$.
Si provi che $x^* \in \bigcap \mathcal{F}$.

Sia $C \in \mathcal{F}$; si provi che $x^* \in C$.
Sia U un intorno di x^*;
si ha $\{C\} \in \mathscr{G}$ essendo sottofamiglia finita di $\mathcal{F}$.
Per definizione di x^* quale punto limite di $\{x_G\}_{G \in \mathcal{H}}$, esiste $\mathcal{G} \in \mathscr{G}$ con $\mathcal{G} \supseteq \{C\}$, ossia $C \in \mathcal{G}$, tale che $x_\mathcal{G} \in U$.
Essendo $x_\mathcal{G} \in \bigcap \mathcal{G}$ per definizione e $C \in \mathcal{G}$, si ha anche $x_\mathcal{G} \in C$.
Dunque, $x_\mathcal{G} \in U \cap C$.
Allora, $U \cap C \neq \varnothing$ per ogni U intorno di x^*, ossia $x^* \in \overline{C}$.
Essendo C chiuso, segue $x^* \in C$, come volevasi dimostrare.

■

Proposizione 1.5: Caratterizzazione della continuità

Siano X e Y due spazi topologici.
Sia $x \in X$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è continua in x;
2. Per ogni successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ convergente a x, si ha $f(x) = \lim\limits_{\alpha} f(x_\alpha)$.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga f continua in x.
Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ una successione generalizzata convergente a x.

Sia V un intorno di $f(x)$.
Per continuità di f, esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subseteq V$.

Poiché $x = \lim\limits_{\alpha} x_\alpha$ per ipotesi, esiste $\alpha_0 \in D$ tale che $x_\alpha \in U$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_0$.
Essendo $f(U) \subseteq V$, si ha allora $f(x_\alpha) \in V$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_0$.
Ne segue allora che $f(x) = \lim\limits_{\alpha} f(x_\alpha)$.
$\blacksquare$

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Si supponga che valga quanto dichiarato nel punto 2.
Si supponga per assurdo che f non sia continua in x;
cioè, esiste $\tilde{V}$ intorno di $f(x)$ tale che, per ogni U intorno di x, $f(U) \nsubseteq \tilde{V}$.

Per ogni intorno U di x, sia dunque $x_U \in U$ tale che $f(x_U) \notin \tilde{V}$.

Sia $\mathcal{U}$ la famiglia degli intorni di x dotata della relazione d'ordine $\subseteq^{-1}$, che è filtrante.
Si consideri quindi la successione generalizzata $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}}$.

Si ha $x = \lim\limits_U x_U$;
infatti, per ogni U intorno di x, ossia per ogni $U \in \mathcal{U}$, si ha $x_U \in U$, dunque $x_V \in V \subseteq U$ per ogni $V \in \mathcal{U}$ con $V \supseteq^{-1} U$.

Allora, per ipotesi si ha $f(x) = \lim\limits_U f(x_U)$.
Tuttavia ciò contraddice il fatto che, in corrispondenza all'intorno $\tilde{V}$ di $f(x)$, si ha $f(x_U) \notin \tilde{V}$ per ogni $U \in \mathcal{U}$ per definizione di x_U.
■

Minimo e massimo limite per successioni generalizzate

⌘ Definizione: Limite minimo e limite massimo di una successione generalizzata

Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq \mathbb{R}$ una successione generalizzata in $\mathbb{R}$.

Si dice **limite minimo** di $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ l'elemento $\liminf\limits_\alpha x_\alpha = \sup\limits_{\alpha \in D} \inf\limits_{\beta \geq \alpha} x_\beta$.

Si dice **limite massimo** di $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ l'elemento $\limsup\limits_\alpha x_\alpha = \inf\limits_{\alpha \in D} \sup\limits_{\beta \geq \alpha} x_\beta$.