4 - Misura di non Compattezza, Equi-limitatezza

Premesse

> Totale limitatezza

Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $A \subseteq Y$.

A si dice totalmente limitato quando
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_1, \dots, A_n \subseteq A : \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \wedge \operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Ovviamente, la totale limitatezza implica la limitatezza.

> Caratterizzazione della compattezza di uno spazio metrico

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. X è compatto;
2. X è sequenzialmente compatto;
3. X è completo e totalmente limitato.

> Convenzione: Estremi inferiore e superiore dell'insieme vuoto

Si pone per convenzione $\inf(\varnothing) = +\infty$ e $\sup(\varnothing) = -\infty$.

Notazione: Insieme delle funzioni limitate

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
$\mathcal{B}(X, Y)$ denota l'insieme delle funzioni limitate da X in Y.

Metrica uniforme

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$.

Si definisce la **metrica uniforme** su $\mathcal{F}$ come la metrica ρ_d (si dimostra che è una metrica) definita ponendo $\rho_d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ per ogni $f, g \in \mathcal{F}$.

Una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ converge convergente a f secondo ρ_d se e solo se $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$.

Limite uniforme di una successione di funzioni limitate

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ una successione convergente a f secondo ρ_d, cioè tale che $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$.

Allora, $f \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Notazione: $\mathcal{F}(A)$

Siano X e Y due insiemi non vuoti.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y.
Sia $A \subseteq X$.

Si pone $\mathcal{F}(A) = \{f(x) \mid x \in A, f \in \mathcal{F}\}$.

Misura di non compattezza secondo Kuratowski

Definizione: Misura di non compattezza secondo Kuratowski

Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $A \subseteq Y$ non vuoto.

Sia $\alpha(A) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \exists A_1, \ldots, A_n \subseteq A : \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \wedge \operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$.
$\alpha(A)$ prende il nome di **misura di non compattezza secondo Kuratowski**.

Osservazione

$\alpha(A) \geq 0$; in particolare:

- $\alpha(A) = 0$ se e solo se A è totalmente limitato;
- $\alpha(A) < +\infty$ (ossia l'insieme di cui α è l'estremo inferiore è non vuoto) se e solo se A è limitato.

A livello intuitivo, la misura di non compattezza è indice di quanto un insieme in uno spazio metrico si discosta dall'essere compatto.

Infatti, un insieme compatto in uno spazio metrico è totalmente limitato, dunque ha misura nulla secondo Kuratowski.

Totale limitatezza di una funzione

Definizione: Oscillazione di una funzione a valori in uno spazio metrico

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $f : X \to Y$ una funzione.

Si dice **oscillazione** di f su $A \subseteq X$ il valore $\text{diam}(f(A))$.
Essa si denota con $\omega_f(A)$.

Definizione: Funzione totalmente limitata

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $f : X \to Y$ una funzione.

f si dice **totalmente limitata** quando la sua immagine $f(X)$ è totalmente limitata.

L'insieme delle funzioni $f : X \to Y$ totalmente limitate si denota con $TB(X, Y)$.

Osservazione

Si ha $TB(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$; allora, esso è spazio metrico con la metrica uniforme ρ_d.

La totale limitatezza di una funzione può essere caratterizzata nel seguente modo:

Proposizione 4.1: Caratterizzazione della totale limitatezza di una funzione

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $f : X \to Y$ una funzione.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è totalmente limitata;
2. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $X_1, \dots, X_n \subseteq X$ con $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$, tali che $\omega_f(X_i) < \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga f totalmente limitata.

Si fissi $\varepsilon > 0$.
Per totale limitatezza di f, esistono $Y_1, \dots, Y_n \subseteq f(X)$ con $\bigcup_{i=1}^{n} Y_i = f(X)$ tali che $\operatorname{diam}(Y_i) < \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$
.
Posto $X_i = f^{-1}(Y_i)$, si ha $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$ e $f(X_i) = f(f^{-1}(Y_i)) \subseteq Y_i$.
Allora, $\omega_f(X_i) = \operatorname{diam}(f(X_i)) \leq \operatorname{diam}(Y_i) < \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.
$\blacksquare$

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Si supponga verificata la condizione 2.

Si fissi $\varepsilon > 0$.
Per ipotesi, esistono $X_1, \dots, X_n \subseteq X$ con $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$ tali che $\omega_f(X_i) < \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.
Posto $Y_i = f(X_i)$, si ha $\bigcup_{i=1}^{n} Y_i = Y$ e $\operatorname{diam}(Y_i) = \operatorname{diam}(f(X_i)) = \omega_f(X_i) < \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.
$\blacksquare$

Equi-limitatezza e equi-totale limitatezza

Definizione: Famiglia di funzioni equi-limitate

Sia X un insieme non vuoto.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y.

Le funzioni in $\mathcal{F}$ si dicono **equi-limitate** quando $\mathcal{F}(X)$ è limitato in (Y, d).

Osservazione

Sia X un insieme non vuoto.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y, equi-limitate.

Allora, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$.

Definizione: Famiglia di funzioni equi-totalmente limitate

Sia X un insieme non vuoto.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y.

Le funzioni in $\mathcal{F}$ si dicono **equi-totalmente limitate** quando

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists X_1, \ldots, X_n \subseteq X_1 : \quad \bigcup_{i=1}^{n} X_i = X \quad \wedge \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall f \in \mathcal{F},\ \omega_f(X_i) < \varepsilon.$$

Osservazione

Sia X un insieme non vuoto.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y, equi-totalmente limitate.

Allora, $\mathcal{F} \subseteq TB(X, Y)$ per la [Proposizione 4.1].

Osservazione

Sia X un insieme non vuoto.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y, equi-totalmente limitate.

Non è detto che esse siano equi-limitate.

Ad esempio, posto (Y, d) pari a $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea, si consideri $\mathcal{F} = \{f_k \mid k \in \mathbb{R}\}$, dove f_k è definita ponendo $f_k(x) = k$ per ogni $x \in X$.

Le sue funzioni sono equi-totalmente limitate in quanto $\omega_f(X) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Tuttavia, $\mathcal{F}(X) = \mathbb{R}$, che non è limitato.

La seguente proposizione fornisce una formula per la misura di non compattezza di certe famiglie di funzioni equi-totalmente limitate:

Teorema 4.2: Misura di non compattezza di insiemi limitati di funzioni equi-tot. limitate

Sia X un insieme non vuoto.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Si consideri lo spazio $TB(X,Y)$ con la metrica uniforme ρ_d.
Sia $\mathcal{F} \subseteq TB(X,Y)$ un insieme tale che:

1. $\mathcal{F}$ sia limitato in $TB(X,Y)$ rispetto a ρ_d;
2. Le funzioni in $\mathcal{F}$ siano equi-totalmente limitate.

Allora, $\alpha(\mathcal{F}) = \sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) = \alpha(\mathcal{F}(X))$.

Dimostrazione: $\alpha(\mathcal{F}) \geq \alpha(\mathcal{F}(X))$

Sia $\varepsilon > 0$.

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in $\mathcal{F}$, esistono $X_1, \dots, X_n \subseteq X$ con $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_1 = X$, per cui $\omega_f(X_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Per definizione di $\alpha(\mathcal{F})$, che è finito in quanto $\mathcal{F}$ è limitato, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che esistono $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}$ con $\bigcup\limits_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j = \mathcal{F}$, per cui $\mathrm{diam}_{\rho_d}(\mathcal{F}_j) < \alpha(\mathcal{F}) + \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$.

Si considerino gli insiemi $\mathcal{F}_j(X_i)$ al variare di $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$;
si ha $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \bigcup\limits_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j(X_i) = \mathcal{F}(X)$.

Si stimi $\mathrm{diam}(\mathcal{F}_j(X_i))$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$.
Siano $y_1, y_2 \in \mathcal{F}_j(X_i)$.
Per definizione di $\mathcal{F}_j(X_i)$, si ha $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = g(x_2)$, con $f, g \in \mathcal{F}_j$ e $x_1, x_2 \in X_i$.
Si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$$
\begin{aligned}
& d(y_1, y_2) = d(f(x_1), g(x_2)) \\
& \leq d(f(x_1), g(x_1)) + d(g(x_1), g(x_2)) && \text{Disuguaglianza triangolare} \\
& \leq \rho_d(f, g) + d(g(x_1), g(x_2)) && \text{In quanto } \rho_d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))
\end{aligned}
$$

$< \alpha(\mathcal{F}) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \alpha(\mathcal{F}) + \frac{2\varepsilon}{3}$ In quanto $\rho_d(f,g) \leq \mathrm{diam}_{\rho_d}(\mathcal{F}_j) < \alpha(\mathcal{F}) + \frac{\varepsilon}{3}$ e $d(g(x_1), g(x_2)) \leq \omega_f(X_i) < \frac{\varepsilon}{3}$

Dunque, si ha $\mathrm{diam}(\mathcal{F}_j(X_i)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \frac{2\varepsilon}{3} < \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Allora, la famiglia $\{\mathcal{F}_j(X_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$ è un ricoprimento finito di $\mathcal{F}(X)$ costituito da insiemi di diametro minore di $\alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$.
Pertanto, $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$ per definizione di $\alpha(\mathcal{F}(X))$.

Segue $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F})$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.
■

Dimostrazione ($\alpha(\mathcal{F}) \leq \alpha(\mathcal{F}(X))$)

Sia $\varepsilon > 0$.

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in $\mathcal{F}$, esistono $X_1, \ldots, X_n \subseteq X$ con $\bigcup_{i=1}^{m} X_i = X$, per cui $\omega_f(X_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Per definizione di $\alpha(\mathcal{F}(X))$, che è finito in quanto $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) < +\infty$ per la disuguaglianza provata prima, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che esistono $Y_1, \ldots, Y_k \subseteq \mathcal{F}(X)$ con $\bigcup_{j=1}^{k} Y_j = \mathcal{F}(X)$, per cui $\mathrm{diam}(Y_j) < \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Si supponga senza perdere di generalità che $Y_1, \ldots, Y_k$ siano a due a due disgiunti; infatti, in caso contrario basta considerare $\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_k$ definiti ponendo $\tilde{Y}_j = Y_j \setminus \bigcup_{h=1}^{j-1} Y_h$ per ogni $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, si fissi $x_i \in X_i$.
Per ogni $f \in \mathcal{F}$, sia $\varphi_f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ l'applicazione definita ponendo $\varphi_f(i) = j$, dove j è l'unico indice in $\{1, \ldots, k\}$ tale che $f(x_i) \in Y_j$ (esso è unico in quanto $Y_1, \ldots, Y_k$ sono stati supposti a due a due disgiunti).
Si introduca in $\mathcal{F}$ la relazione $\sim$ definita ponendo $f \sim g$ quando $\varphi_f = \varphi_g$, che è di equivalenza.

Allora, la relazione in questione induce una partizione di $\mathcal{F}$ indotta dalle classi di equivalenza; tali classi sono in numero finito, in quanto l'insieme quoziente $\mathcal{F}/\sim$ è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme delle funzioni da $\{1,\dots,n\}$ a $\{1,\dots,k\}$, che ha cardinalità finita (pari a k^n).

Siano dunque $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_m$ tali classi di equivalenza.

Si stimi $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_p)$ per ogni $p \in \{1,\dots,m\}$.
Siano $f, g \in \mathcal{F}_p$.
Sia $x \in X$, e sia $i \in \{1,\dots,n\}$ per cui $x \in X_i$ (che esiste perché $X_1,\dots,X_n$ ricoprono X).
Si ha

$d(f(x),g(x)) \leq d(f(x),f(x_i)) + d(f(x_i),g(x_i)) + d(g(x_i),g(x))$	Disuguaglianza triangolare applicata due volte
$\leq \omega_f(X_i) + \operatorname{diam}(Y_j) + \omega_g(X_i)$	Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dal fatto che $x, x_i \in X_i$ La maggiorazione del secondo segue dal fatto che $f, g \in \mathcal{F}_p$, dunque $f \sim g$ e quindi esiste $j \in \{1,\dots,k\}$ per cui $f(x_i), g(x_i) \in Y_j$
$< \frac{\varepsilon}{4} + \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{3\varepsilon}{4}$	Per costruzione di X_i e Y_j

Dunque, si ha $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_p) \leq \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{3\varepsilon}{4} < \alpha(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$ per ogni $p \in \{1,\dots,m\}$.

Allora, la famiglia $\{\mathcal{F}_p \mid p \in \{1,\dots,m\}\}$ è un ricoprimento finito di $\mathcal{F}(X)$ costituito da insiemi di diametro minore di $\alpha(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$.
Pertanto, $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$ per definizione di $\alpha(\mathcal{F}(X))$.

Segue $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F})$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.
■

Dimostrazione: $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X))$

È evidente che $\sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X))$; infatti, $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}(X)$ per ogni $x \in X$, da cui segue che $\alpha(\mathcal{F}(x)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X))$ per ogni $x \in X$.

Si provi ora $\sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \geq \alpha(\mathcal{F})$.

Sia $\varepsilon > 0$.
Per equi-totale limitatezza delle funzioni in $\mathcal{F}$, esistono $X_1, \ldots, X_n \subseteq X$ con $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i = X$, per cui $\omega_f(X_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, si fissi $x_i \in X_i$ e si consideri $\mathcal{F}(x_i)$;
per definizione di $\alpha(\mathcal{F}(x_i))$, che è finito in quanto $\alpha(\mathcal{F}(x_i)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X)) < +\infty$ per la disuguaglianza provata prima, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che
esistono $Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,k_i}$ tale che $\bigcup\limits_{j=1}^{k_i} Y_{i,j} = \mathcal{F}(x_i)$ e $\operatorname{diam}(Y_{i,j}) < \alpha(\mathcal{F}(x_i)) + \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $j \in \{1, \ldots, k_i\}$.

Sia $\mathcal{F}_{i,j} = \{f \in \mathcal{F} : f(x_i) \in Y_{i,j} \mid i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, k_i\}\}$; si ha $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \bigcup\limits_{j=1}^{k_i} \mathcal{F}_{i,j} = \mathcal{F}$.
Si stimi $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_{i,j})$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni $j \in \{1, \ldots, k_i\}$.
Siano $f, g \in \mathcal{F}_{i,j}$.
Sia $x \in X$, e sia $i \in \{1, \ldots, n\}$ per cui $x \in X_i$ (che esiste perché $X_1, \ldots, X_n$ ricoprono X).
Si ha

$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x))$	Disuguaglianza triangolare applicata due volte
$\leq \omega_f(X_i) + \operatorname{diam}(Y_{i,j}) + \omega_f(X_i)$	Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dal fatto che $x, x_i \in X_i$ La maggiorazione del secondo segue dal fatto che $f(x_i), g(x_i) \in Y_{i,j}$
$< \frac{\varepsilon}{4} + \alpha(\mathcal{F}(x_i)) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \alpha(\mathcal{F}(x_i)) + \frac{3\varepsilon}{4}$	Per costruzione di X_i e $Y_{i,j}$
$\leq \sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \frac{3\varepsilon}{4}$	Per definizione di $\sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x))$

Dunque, si ha $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_{i,j}) \leq \sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \frac{3\varepsilon}{4} < \sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, k_i\}$.

Allora, la famiglia $\{\mathcal{F}_{i,j} \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k_i\}\}$ è un ricoprimento finito di $\mathcal{F}$ costituito da insiemi di diametro minore di $\sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$.
Pertanto, $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$ per definizione di $\alpha(\mathcal{F})$.

Segue $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup\limits_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x))$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

■

Proposizione 4.3: Equivalenza della totale limitatezza di un insieme di funzioni totalmente limitate

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $\mathcal{F} \subseteq TB(X, Y)$.

Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

1. $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $(TB(X, Y), \rho_d)$.
2. Le funzioni in $\mathcal{F}$ sono equi-totalmente limitate, e $\mathcal{F}(X)$ è totalmente limitato in (Y, d).
3. Le funzioni in $\mathcal{F}$ sono equi-totalmente limitate, e $\mathcal{F}(x)$ è totalmente limitato in (Y, d) per ogni $x \in X$.

Dimostrazione

In virtù del teorema precedente, basta mostrare che, se $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $TB(X, Y)$ rispetto a ρ_d , allora le sue funzioni sono equi-totalmente limitate.

Sia $\varepsilon > 0$.
Essendo $\mathcal{F}$ totalmente limitato per ipotesi, esistono $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ con $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$, tali che $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni

$i \in \{1, \dots, n\}$.

Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, sia $f_i \in \mathcal{F}_i$.
Essendo $\mathcal{F} \subseteq TB(X, Y)$, f_i è totalmente limitata per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.
Allora, esistono $X_{i,1}, \dots, X_{i,k_1} \subseteq X$ con $\bigcup\limits_{j=1}^{k_i} X_j^{(i)} = X$ tali che $\omega_{f_i}(X_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $j \in \{1, \dots, k_i\}$.

Sia $\mathcal{D} = \prod\limits_{i=1}^{n} \{1, \dots, k_i\} = \{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n : \forall i \in \{1, \dots, n\},\ j_i \le k_i\}$.
Si considerino gli insiemi del tipo $X_{1,j_1} \cap X_{2,j_2} \cap \dots \cap X_{n,j_n}$ al variare di $(j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{D}$; si osserva intanto che questi ricoprono X.

Si vuole studiare l'oscillazione di una qualsiasi funzione $f \in \mathcal{F}$, sugli insiemi $X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}$ al variare di $(j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{D}$.

Siano dunque $x, y \in X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}$;
sia $f \in \mathcal{F}$, e sia i tale che $f \in \mathcal{F}_i$.

Si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y))$	Disuguaglianza triangolare applicata due volte
$\le \rho_d(f, f_i) + \omega_{f_i}(X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}) + \rho_d(f, f_i)$	Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dalla definizione di $\rho_d(f, f_i)$
	La maggiorazione del secondo segue dal fatto che $x, y \in X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}$
$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}$	Segue dal fatto che $\rho_d(f, f_i) \le \operatorname{diam}(\mathcal{F}_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ e $\omega_{f_i}(X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}) \le \omega_{f_i}(X_{i,j_i}) < \frac{\varepsilon}{4}$

Dunque, $\omega_f(X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}) \le \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ e per ogni $(j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{D}$.

Allora, la famiglia $\{X_{1,j_1} \cap X_{2,j_2} \cap \dots \cap X_{n,j_n} \mid (j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{D}\}$ è un ricoprimento finito di X costituito da insiemi su cui l'oscillazione di una qualsiasi funzione in $\mathcal{F}$ è minore di ε.

Segue che le funzioni in $\mathcal{F}$ sono equi-totalmente limitate per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

$\blacksquare$