# 15 - Convessità e Derivabilità

#### Proposizione 15.1: Maggiorazione della derivata direzionale in un punto di G-derivabilità di una funzione convessa

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $A \subseteq X$  convesso.

Sia  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$ .

Sia  $f:A \to \mathbb{R}$  una funzione convessa, G-derivabile in  $\mathbf{x}_0$ .

Si ha  $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\mathbf{x} \in A$ .

#### **Dimostrazione**

Sia  $\mathbf{x} \in A$ ; si provi che  $f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ .

Dalla definizione di G-derivabilità di f in  $\mathbf{x}_0$ , si ha

$$\lim_{\lambda o 0}rac{f(\mathbf{x}_0+\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))-f(\mathbf{x}_0)}{\lambda}=f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0).$$

Per ogni $\lambda \in ]0;1]$ , si ha

$$\begin{split} &\frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = \frac{f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \\ &\leq \frac{\lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} & \text{Per convessità di } f, \text{ essendo } \lambda \in ]0;1] \\ &= \frac{\lambda f(\mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \end{split}$$

Segue allora per confronto che

$$\lim_{\lambda o 0^+} rac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda o 0^+} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0);$$

essendo anche 
$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$
 per quanto visto prima, si ha allora

$$f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0).$$

#### Corollario 15.2: Punti in cui una funzione convessa è G-derivabile e ha derivata nulla sono di minimo assoluto

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $A \subseteq X$  convesso.

Sia  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$ .

Sia  $f:A o\mathbb{R}$  una funzione convessa, G-derivabile in  $\mathbf{x}_0$ .

Si supponga che  $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$ .

Allora,  $\mathbf{x}_0$  è di minimo assoluto per f.

#### Dimostrazione

Sia  $\mathbf{x} \in A$ ; si provi che  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ .

Essendo f G-derivabile in  $\mathbf{x}_0$  con  $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$  per ipotesi, si ha in particolare che

$$f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

Allora, dalla [Proposizione 15.1] segue che

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \ge f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $A \subseteq X$  aperto e convesso.

Sia  $f: A \to \mathbb{R}$  una funzione G-derivabile in A.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1. f è convessa;
- 2.  $f(\mathbf{y}) \ge f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} \mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ .

#### $\bigcap$ Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)

Si supponga f convessa.

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ ; si provi che  $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ .

f è convessa per ipotesi, e sempre per ipotesi è anche G-derivabile in  ${f x}$ ;

dalla [Proposizione 15.1] segue allora che

$$f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}).$$

#### $\bigcap$ Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga  $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ .

Siano  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$ , e sia  $\lambda \in [0; 1]$ ;

si provi che  $f(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \le \lambda f(\mathbf{x}_2) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_1)$ .

Si hanno le seguenti disuguaglianze:

$$f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) + f'(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1 - \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))$$
 Per ipotesi

$$f = fig(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig) + f'ig(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig)ig(-\lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig)$$

$$f_{1}=fig(\mathbf{x}_{1}+\lambda(\mathbf{x}_{2}-\mathbf{x}_{1})ig)-\lambda f'ig(\mathbf{x}_{1}+\lambda(\mathbf{x}_{2}-\mathbf{x}_{1})ig)(\mathbf{x}_{2}-\mathbf{x}_{1})$$

Per linearità di  $f'(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))$ 

da cui segue che  $(1 - \lambda)f(\mathbf{x}_1) \ge (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) - \lambda(1 - \lambda)f'(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ , moltiplicando ambo i membri per  $1 - \lambda \ge 0$ ;

$$f(\mathbf{x}_2) \geq fig(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig) + f'ig(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig)ig(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 - \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig)$$

$$f(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) + f'(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) ((1 - \lambda)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))$$

$$f = fig(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig) + (1 - \lambda)f'ig(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

Per linearità di  $f'ig(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig)$ 

da cui segue che  $\lambda f(\mathbf{x}_2) \ge \lambda f(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) + \lambda(1 - \lambda)f'(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ , moltiplicando ambo i membri per  $\lambda \ge 0$ .

Sommando membro a membro le due disuguaglianze ottenute e semplificando, si ricava che

$$\lambda f(\mathbf{x}_2) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_1) \geq fig(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)ig),$$

che è esattamente ciò che si voleva provare.

Г

#### ₩ Definizione: Monotonia

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $A \subseteq X$ .

Un operatore  $T:A \to X^*$  si dice **monotono** quando

$$(T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y}))(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \ge 0$$
 per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ .

#### ○ Osservazione

Si consideri R come spazio euclideo, che è di Hilbert rispetto al prodotto di numeri reali;

sia  $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$  la funzione definita ponendo  $\phi(x) = \langle x, \cdot \rangle = x \cdot (\cdot)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , che è un'isometria lineare per la [Proposizione 10.15].

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

Un operatore  $T:A\to\mathbb{R}^*$  è monotono se e solo se la funzione  $\tilde{T}:=\phi^{-1}\circ T$  è non decrescente in A.

# **Dimostrazione**

Siano  $x, y \in A$ .

Sia 
$$x_0 = \tilde{T}(x)$$
, e sia  $y_0 = \tilde{T}(y)$ .

Si osserva intanto che

$$(T(x) - T(y))(x - y)$$
 Per monotonia di  $T$ 

$$=ig(\phi(x_0)-\phi(y_0)ig)(x-y)$$
 Per definizione di  $x_0$  e  $y_0$  e di  $ilde T$ 

$$=ig(\phi(x_0-y_0)ig)(x-y)$$
 Per linearità di  $\phi$ 

$$=(x_0-y_0)\cdot(x-y)$$
 Per definizione di  $\phi$ 

$$=\left( ilde{T}(x)- ilde{T}(y)
ight)\cdot(x-y)$$
 Per definizione di  $x_0$  e  $y_0$ 

Si supponga dapprima T monotono.

Fissati  $x, y \in A$  con x < y, si ha  $(T(x) - T(y))(x - y) \ge 0$  per ipotesi di monotonia di T, ossia

$$ig( ilde{T}(x) - ilde{T}(y)ig) \cdot (x-y) \geq 0$$
 per la catena di uguaglianze osservata prima;

essendo x < y, segue allora  $\tilde{T}(x) \leq \tilde{T}(y)$ , da cui la non decrescenza di  $\tilde{T}$  per arbitrarietà di  $x,y \in A$ .

Viceversa, se  $\varphi^{-1} \circ T$  è non decrescente, si ha

 $(\tilde{T}(x) - \tilde{T}(y)) \cdot (x - y) \ge 0$  per ogni  $x, y \in A$  (si verifica per ispezione sui casi  $x \le y$  e x > y),  $(T(x) - T(y))(x - y) \ge 0$  per la catena di uguaglianze osservata prima;

# Proposizione 15.3: Seconda caratterizzazione della convessità di funzioni G-derivabili

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $A \subseteq X$  aperto e convesso.

Sia  $f: A \to \mathbb{R}$  una funzione G-derivabile in A.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1. f è convessa;
- 2. f' è un operatore monotono.

#### Q Osservazioni preliminari

Fissati  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ , si definisca  $\varphi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} : [0; 1] \to \mathbb{R}$  ponendo

$$arphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) = fig(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})ig)$$
 per ogni  $\lambda \in [0;1]$ .

Allora:

- 1. Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ ,  $\varphi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  è derivabile in [0; 1], e si ha  $\dot{\varphi}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\lambda) = f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} \mathbf{x}))(\mathbf{y} \mathbf{x})$  per ogni  $\lambda \in [0; 1]$ ;
- 2. f è convessa in A se e solo se  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  è convessa in [0;1] per ogni  $\mathbf{x},\mathbf{y}\in A;$
- 3. f è convessa in A se e solo se  $\dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  è non decrescente in [0;1] per ogni  $\mathbf{x},\mathbf{y}\in A$ .

Il punto 1. segue dal fatto che, fissati  $\mathbf{x},\mathbf{y}\in A$  e fissato  $\lambda_0\in[0;1]$ , si ha

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\varphi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\lambda_0 + \mu) - \varphi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\lambda_0)}{\mu} = \lim_{\mu \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\mu} \quad \text{Per definizione di } \varphi_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \lim_{\mu \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\mu}$$

$$=f'ig(\mathbf{x}+\lambda_0(\mathbf{y}-\mathbf{x})ig)(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

Per G-derivabilità di f in  $\mathbf{x}+\lambda_0(\mathbf{y}-\mathbf{x})\in A$  (A è convesso, e  $\mathbf{x},\mathbf{y}\in A$ ), e per definizione di f'

Si mostri il punto 2.

Si fissino  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ .

Se  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  è convessa in [0;1], si ha in particolare che

$$egin{aligned} fig(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})ig) &= arphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) & ext{ Per definzione di } arphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \ &= arphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(0+\lambda(1-0)) \ &\leq \lambda arphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(1) + (1-\lambda)arphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(0) & ext{ Per convessità di } arphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \ &= \lambda f(\mathbf{y}) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}) & ext{ Per definizione di } arphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Ne segue che, se  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{v}}$  è convessa in [0;1] per ogni  $\mathbf{x},\mathbf{y}\in A,f$  è convessa in A.

Viceversa, si supponga f convessa in A.

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ ;

siano  $\lambda_1, \lambda_2 \in [0; 1]$ , e sia  $\mu \in [0; 1]$ .

Si ha

$$\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda_{1} + \mu(\lambda_{2} - \lambda_{1})) = f(\mathbf{x} + (\lambda_{1} + \mu(\lambda_{2} - \lambda_{1}))(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$
Per definizione di  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ 
$$= f(\mathbf{x} + \lambda_{1}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mu(\lambda_{2} - \lambda_{1})(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$
$$= f(\mathbf{x} + \lambda_{1}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x} + \lambda_{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - (\mathbf{x} + \lambda_{1}(\mathbf{y} - \mathbf{x}))))$$
$$\leq \mu f(\mathbf{x} + \lambda_{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) + (1 - \mu)f(\mathbf{x} + \lambda_{1}(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$
Per convessità di  $f$ 
$$= \mu \varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda_{2}) + (1 - \mu)\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda_{1})$$
Per definizione di  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ 

da cui segue la convessità di  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ .

Infine, essendo  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  derivabile in [0;1] per ogni  $\mathbf{x},\mathbf{y} \in A$  e a valori reali, per un risultato noto si ha che  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  è convessa se e solo se  $\dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  è non decrescente in [0;1].

Essendo la convessità di  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  equivalente alla convessità di f per il punto precedente, è acquisito anche il punto 3.

#### $\bigcirc$ Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)

Si supponga f convessa;

si provi che f' è monotona, cioè  $\big(f'(\mathbf{x})-f'(\mathbf{y})\big)(\mathbf{x}-\mathbf{y})\geq 0$  per ogni  $\mathbf{x},\mathbf{y}\in A.$ 

Si fissino dunque  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ .

In virtù delle osservazioni preliminari, si ha che  $\varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  è derivabile in [0;1] con  $\dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) = f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  per ogni  $\lambda \in [0;1]$ ;

inoltre, essendo f convessa, si ha  $\dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  non decrescente in [0;1].

Ne viene in particolare che  $\dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(0) \leq \dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(1)$ , ossia

$$f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq f'(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$
, da cui la tesi.

### $\bigcirc$ Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga f' monotona;

in virtù delle osservazioni preliminari, si per provare la convessità di f basta mostrare che  $\dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$  è non decrescente in [0;1] per ogni  $\mathbf{x},\mathbf{y}\in A$ .

Siano dunque  $\lambda, \mu \in [0; 1]$ , con  $\lambda < \mu$ ;

si provi che  $\dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) \leq \dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mu)$ .

Si ha

$$0 \le \left(f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\right)\left(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - (\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\right)$$
 Per ipotesi di monotonia di  $f'$ 

$$f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})))((\lambda - \mu)(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$

$$f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))((\lambda - \mu)(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x}))((\lambda - \mu)(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$

$$f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$

$$=(\lambda-\mu)f'(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}))(\mathbf{y}-\mathbf{x})-(\lambda-\mu)f'(\mathbf{x}+\mu(\mathbf{y}-\mathbf{x}))(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

Per linearità di 
$$f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$
 e

$$f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$

$$\mathbf{x} = (\lambda - \mu)\dot{\mathbf{\phi}}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) - (\lambda - \mu)\dot{\mathbf{\phi}}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mu)$$

$$= (\lambda - \mu) (\dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{v}}(\lambda) - \dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{v}}(\mu))$$

Per legge di  $\dot{arphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ 

Da questa catena di disuguaglianze e dal fatto che  $\lambda < \mu$ , segue che

 $\dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\lambda) - \dot{\varphi}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mu) \leq 0$ , che è ciò che si voleva mostrare.

# ho Dimostrazione alternativa (1. $\Rightarrow$ 2.) (non voglio usare $\varphi_{x,y}$ )

Si supponga f convessa;

si provi che f' è monotona, cioè  $(f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{y}))(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ .

Si fissino dunque  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ .

Essendo f convessa e G-derivabile su A per ipotesi, dalla [Proposizione 15.2] segue che

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

e anche

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) + f'(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Sommando membro a membro le due disuguaglianze ottenute e semplificando, si ottiene

$$0 \geq f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + f'(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$
  
=  $-f'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + f'(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  Per linearità di  $f'(\mathbf{x})$ 

Si ha dunque  $f'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - f'(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \ge 0$ , che corrisponde a quanto si voleva mostrare.

# $\square$ Dimostrazione alternativa (2. $\Rightarrow$ 1.) (non voglio usare $\varphi_{x,y}$ parte 2)

Si supponga f' monotona.

Essendo f G-derivabile su A, in virtù della [Proposizione 15.2] si provi che

$$f(\mathbf{y}) \ge f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$
 per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ .

Si fissino  $\lambda, \mu \in [0; 1]$  con  $\lambda < \mu$ .

Si ha che

$$0 \leq (f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})))(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - (\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})))$$
 Per ipotesi di monotonia di  $f'$ 

$$0 \leq (f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})))(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - (\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})))$$
 Per ipotesi di monotonia di  $f'$ 

$$= (f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})))((\lambda - \mu)(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$

$$= (\lambda - \mu)(f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})))(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$
 Per linearità di 
$$f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$

Avendo supposto  $\lambda < \mu$ , ne segue che

$$(f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x})))(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \le 0$$
, ossia  $f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \le f'(\mathbf{x} + \mu(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ .

Ne segue che la funzione  $[0;1] \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  è monotona non decrescente; in particolare, si ha allora

$$\underbrace{f'\big(\mathbf{x}+0(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)(\mathbf{y}-\mathbf{x})}_{=f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \leq f'\big(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \leq \underbrace{f'\big(\mathbf{x}+1(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)(\mathbf{y}-\mathbf{x})}_{=f'(\mathbf{y})(\mathbf{y}-\mathbf{x})},$$

per ogni  $\lambda \in [0;1]$ .

Sia ora  $C = \{f'(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mid \lambda \in ]0; 1[\};$  per quanto appena osservato, si ha  $C \subseteq [f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}); f'(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})].$ 

Perdipiù, essendo  $[f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}); f'(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})]$  un insieme chiuso e convesso, ne viene che  $\overline{\operatorname{conv}}(C) \subseteq [f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}); f'(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})].$ 

Si osserva infine che f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange ([Teorema 11.7]) rispetto a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , pertanto

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \in \overline{\operatorname{conv}}(C) \subseteq \big[f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\,;\, f'(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big]$$
, da cui segue in ultima battuta che

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \ge f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$
, che è ciò che si voleva mostrare.