6 - Introduzione agli Spazi normati e di Banach

Premesse

> Convenzione: Campo degli scalari di uno spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale si intenderà sempre su $\mathbb{R}$.

> Sottospazio generato da un sottoinsieme di uno spazio vettoriale

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $A \subseteq E$.

Si dice sottospazio generato da A (o inviluppo lineare di A), e si denota con $\mathrm{span}(A)$, l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali di E contenenti A.

> Norma di uno spazio vettoriale

Sia E uno spazio vettoriale.

Si dice norma una funzione $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_0^+$ tale che:

1. Assoluta omogeneità: $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$;
2. Sub-additività: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$;
3. Positiva definitività: $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La coppia costituita da uno spazio vettoriale e da una norma su di esso è detta spazio normato.

> Metrica indotta da una norma

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

La norma $\|\cdot\|$ induce su E una metrica d; essa è definita ponendo $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Spazio di Banach

Uno spazio normato si dice **spazio di Banach** quando è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Alcune proprietà degli spazi normati

Proposizione 6.1: Lemma di Riesz

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $F \subsetneq E$ un sottospazio vettoriale di E, chiuso rispetto alla metrica d indotta dalla norma.

Si ha $\sup\limits_{\substack{\mathbf{x} \in E \\ \|\mathbf{x}\| = 1}} d(\mathbf{x}, F) = 1$.

Osservazioni preliminari

Sia $\mathbf{x} \in E$ tale che $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Essendo F sottospazio vettoriale di E, si ha $\mathbf{0} \in F$.

Allora, $d(\mathbf{x}, F) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\| = 1$.

Segue $\sup\limits_{\substack{\mathbf{x}\in E\\ \|\mathbf{x}\|=1}} d(\mathbf{x},F) \le 1$ per arbitrarietà di $\mathbf{x}\in E$ con $\|\mathbf{x}\|=1$.

Dimostrazione

In virtù dell'osservazione preliminare, basta mostrare che $\sup\limits_{\substack{\mathbf{x}\in E\\ \|\mathbf{x}\|=1}} d(\mathbf{x},F) \ge 1$.

Essendo $F \subsetneq E$, esiste $\mathbf{x}_0 \in E \setminus F$.
Essendo F chiuso e $\mathbf{x}_0 \notin F$, esiste un intorno sferico di $\mathbf{x}_0$ disgiunto da F; pertanto, si ha $d(\mathbf{x}_0,F)>0$.

Sia $\varepsilon>0$; si provi che $\sup\limits_{\substack{\mathbf{x}\in E\\ \|\mathbf{x}\|=1}} d(\mathbf{x},F) \ge 1-\varepsilon$.

Si supponga $\varepsilon<1$ senza perdere di generalità; ne segue che $\frac{1}{1-\varepsilon}>1$.

Si ha allora $d(\mathbf{x}_0,F) < \frac{1}{1-\varepsilon} d(\mathbf{x}_0,F)$; dalla definizione di $d(\mathbf{x}_0,F)$ segue allora l'esistenza di $\mathbf{x}_1\in F$ tale che $\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1\| < \frac{1}{1-\varepsilon} d(\mathbf{x}_0,F)$.

Poiché $\mathbf{x}_0\notin F$ e $\mathbf{x}_1\in F$, si ha $\mathbf{x}_0\ne\mathbf{x}_1$, per cui $\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1\|\ne 0$
Allora, si può porre $\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1\|}$; evidentemente, $\|\tilde{\mathbf{x}}\|=1$.
Si valuti $d(\tilde{\mathbf{x}},F)$.

Si fissi $\mathbf{y}\in F$.
Si ha

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}\| &= \left\| \frac{\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1\|} - \mathbf{y} \right\| && \text{Per definizione di } \tilde{\mathbf{x}} \\
&= \left\| \frac{\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1-\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1\|\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1\|} \|\mathbf{x}_0-(\mathbf{x}_1+\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1\|\mathbf{y})\| && \text{Proprietà dei vettori e della norma}
\end{aligned}
$$

$\geq \dfrac{1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} d(\mathbf{x}_0, F)$	Segue dalla definizione di $d(\mathbf{x}_0, F)$. Infatti, $\mathbf{x}_1 + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|\mathbf{y} \in F$ essendo $\mathbf{x}_1, \mathbf{y} \in F$ e $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| \in \mathbb{R}$, pertanto $\|\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_1 + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|\mathbf{y})\|$ è distanza tra $\mathbf{x}_0$ è un vettore in F
$> 1 - \varepsilon$	Segue dalla disuguaglianza $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| < \frac{1}{1-\varepsilon} d(\mathbf{x}_0, F)$

Dunque, $\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| > 1 - \varepsilon$ per ogni $\mathbf{y} \in F$; ne segue che $d(\tilde{\mathbf{x}}, F) \geq 1 - \varepsilon$.

Allora, $\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} d(\mathbf{x}, F) \geq 1 - \varepsilon$, che è ciò che si voleva ottenere.

La tesi è allora acquisita, essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario.
■

Proposizione 6.2: Sottospazi vettoriali di dimensione finita sono chiusi

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale di dimensione finita.

Allora, F è chiuso in E rispetto alla metrica d indotta dalla norma.

Proposizione 6.3: Non totale limitatezza dell'insieme dei versori in spazi normati di dimensione infinita

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Si supponga che E abbia dimensione infinita.
Sia $S = \{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

Allora, S non è totalmente limitato.

Dimostrazione

Sia $\mathbf{x}_0 \in S$.
Sia $F_0 = \mathrm{span}(\mathbf{x}_0) = \{\lambda \mathbf{x}_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; esso ha dimensione 1.
Pertanto, $F_0 \subsetneq E$ in quanto E ha dimensione infinita per ipotesi, e per la [Proposizione 6.2] esso è chiuso.
Allora, $\sup\limits_{\mathbf{x} \in S} d(\mathbf{x}, F_0) = 1$ (> $\frac{1}{2}$) per la [Proposizione 6.1], da cui segue che esiste $\mathbf{x}_1 \in S$ tale che $d(\mathbf{x}_1, F_0) > \frac{1}{2}$.

Sia $F_1 = \mathrm{span}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$; esso ha dimensione 2.
Pertanto, $F_1 \subsetneq E$ in quanto E ha dimensione infinita per ipotesi, e per la [Proposizione 6.2] esso è chiuso.
Allora, $\sup\limits_{\mathbf{x} \in S} d(\mathbf{x}, F_1) = 1$ (> $\frac{1}{2}$) per la [Proposizione 6.1], da cui segue che esiste $\mathbf{x}_2 \in S$ tale che $d(\mathbf{x}_2, F_1) > \frac{1}{2}$.

Procedendo induttivamente si ottiene una successione $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ dimodoché $d(\mathbf{x}_n, \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})) > \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si provi che $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è totalmente limitato.

Siano $N_1, \dots, N_k \subseteq \mathbb{N}$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{k} = \mathbb{N}$; almeno uno di essi è infinito (altrimenti $\mathbb{N}$ sarebbe unione finita di insiemi finiti, cioè sarebbe un insieme finito, il che è falso), sia esso N_{i_0}.
Essendo N_{i_0} infinito, esso ammette due elementi distinti; siano essi m e n, e si supponga $n > m$.
Essendo $n > m$, si ha $\mathbf{x}_m \in \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$; allora, $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \geq d(\mathbf{x}_n, \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})) > \frac{1}{2}$.

Dunque, ogni ricoprimento finito di $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette due elementi nello stesso insieme aventi distanza maggiore di $\frac{1}{2}$; ne segue che $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è totalmente limitato.

Allora, a maggior ragione S non è totalmente limitato, in quanto $S \supseteq \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
■

Osservazione

In $\mathbb{R}^n$, S è compatto essendo chiuso e limitato.

Invece, in uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ con E di dimensione infinita, per la [Proposizione 6.3] S non è totalmente limitato, per cui non è compatto.

Si dimostra che, in uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ con E di dimensione infinita, si ha $\alpha(S) = 2$.

Lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$

Definizione: Operatore lineare

Siano X, Y due spazi vettoriali.
Sia $T : X \to Y$ una funzione.

T si dice **operatore lineare** quando $T(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda T(\mathbf{x}) + \mu T(\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Se X e Y sono dotati di norma, si può parlare anche di continuità degli operatori lineari.

Osservazione: Continuità di un operatore lineare in tutto il dominio equivale alla sua continuità nel solo zero

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare.

T è continuo in X se e solo se è continuo in $\mathbf{0}_X$.

Dimostrazione

Se T è continuo in X, chiaramente T è continuo in $\mathbf{0}_X$.

Viceversa, si supponga T continuo in $\mathbf{0}_X$;
si fissi $\mathbf{x}_0 \in X$, e si provi la continuità di T in $\mathbf{x}_0$.

Si fissi $\varepsilon > 0$.

Per continuità di T in $\mathbf{0}_X$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\|_X < \delta$, si abbia $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{0}_X)\|_Y < \varepsilon$, ossia $\|T(\mathbf{x})\|_Y < \varepsilon$ in quanto $T(\mathbf{0}_X) = \mathbf{0}_Y$ per linearità di T.

Sia $\mathbf{x}' \in X$ con $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\|_X < \delta$;
per costruzione di δ vale $\|T(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)\|_Y < \varepsilon$, vale a dire $\|T(\mathbf{x}') - T(\mathbf{x}_0)\|_Y < \varepsilon$ per linearità di T.

Allora, risulta verificata la definizione di continuità in $\mathbf{x}_0$, dunque in tutto X per arbitrarietà di questo.
■

Proposizione 6.4: Criterio di continuità degli operatori lineari

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. T è continuo;
2. Esiste $k > 0$ tale che $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq k\|\mathbf{x}\|_X$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione: $1. \Rightarrow 2.$

Si supponga T continuo.

Allora, T è continuo in $\mathbf{0}_X$, per cui in corrispondenza a $\varepsilon = 1$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\|_X < \delta$, si abbia $\|T(\mathbf{x})\|_Y < 1$.

Si provi la disuguaglianza espressa nel punto 2.
Si fissi dunque $\mathbf{x} \in X$, e si supponga per il momento $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_X$ cosicché $\|\mathbf{x}\|_X \neq 0$.

Allora, è ben definito il vettore $\dfrac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|_X}$, che ha norma $\frac{\delta}{2} < \delta$.

Per costruzione di δ, si ha allora $\left\| T\left(\dfrac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|_X}\right)\right\|_Y < 1$, ossia $\dfrac{\delta}{2\|\mathbf{x}\|_X}\|T(\mathbf{x})\|_Y < 1$ per linearità di T e per assoluta omogeneità di $\|\cdot\|_Y$.

Ne segue che $\|T(\mathbf{x})\|_Y < \dfrac{2}{\delta}\|\mathbf{x}\|_X$; questa disuguaglianza vale per ogni $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}$ per arbitrarietà di $\mathbf{x}$.
D'altra parte, per $\mathbf{x} = \mathbf{0}_X$ si ha $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y$ per linearità di T, e dunque $\|T(\mathbf{x})\|_Y = \dfrac{2}{\delta}\|\mathbf{x}\|_X = 0$.

Ne segue che $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \dfrac{2}{\delta}\|\mathbf{x}\|_X$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

■

Dimostrazione: $2. \Rightarrow 1.$

Si supponga l'esistenza di $k > 0$ tale che $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq k\|\mathbf{x}\|_X$ per ogni $x \in X$;
si provi la continuità di T in $\mathbf{0}_X$, che per l'osservazione precedente ne implica la continuità in tutto X.

Sia dunque $\varepsilon > 0$.
Sia $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$; per ogni $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\|_X < \delta$ si ha per ipotesi $\|T(\mathbf{x})\| \leq k\|\mathbf{x}\|_X < k\delta = \varepsilon$, per cui la tesi è acquisita.
■

Notazione: Lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.

Si denota con $\mathcal{L}(X,Y)$ lo spazio degli operatori lineari continui da X in Y.

Evidentemente, $\mathcal{L}(X,Y)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per una costante.

Il prossimo obiettivo è quello di rendere $\mathcal{L}(X,Y)$ uno spazio normato.

Si ha la seguente proposizione:

Proposizione 6.5: Norma su $\mathcal{L}(X,Y)$.

Siano $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Fissato $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, si definiscano i seguenti valori:

- $\rho_1(T) = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X=1} \|T(\mathbf{x})\|_Y$;
- $\rho_2(T) = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X\leq 1} \|T(\mathbf{x})\|_Y$;
- $\rho_3(T) = \sup\limits_{\mathbf{x}\in X\setminus\{\mathbf{0_X}\}} \dfrac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X}$.

Valgono i seguenti fatti:

1. $\rho_1(T), \rho_2(T), \rho_3(T) < +\infty$;
2. $\rho_1(T) = \rho_2(T) = \rho_3(T)$;

3. La funzione $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)} : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{R}_0^+$ definita ponendo $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \rho_1(T) = \rho_2(T) = \rho_3(T)$ per ogni $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ è una norma su $\mathcal{L}(X,Y)$.

Dimostrazione: Punto 1.

Essendo T un operatore lineare continuo per definizione di $\mathcal{L}(X,Y)$, per la [Proposizione 6.5] esiste $k > 0$ tale che $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq k\|\mathbf{x}\|_X$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Allora:

- Per ogni $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\|_X \leq 1$, si ha $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq k\|\mathbf{x}\|_X \leq k$, dunque sia $\rho_1(T)$ che $\rho_2(T)$ sono finiti;
- Per ogni $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$, si ha $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq k\|\mathbf{x}\|_X$ ossia, essendo $\|\mathbf{x}\|_X \neq 0$, $\dfrac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} \leq k$; ne segue che $\rho_3(T)$ è finito.

  ■

Osservazioni preliminari

Vale $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \rho_1(T)\ \|\mathbf{x}\|_X$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Infatti, se $\mathbf{x} = \mathbf{0}_X$, tale disuguaglianza è vera per linearità di T, in quanto $\|T(\mathbf{0}_X)\|_Y = \|\mathbf{0}_Y\|_Y = 0 \leq \rho_1(T)$.

Se invece $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_X$, si ha $\|\mathbf{x}\|_X \neq 0$, per cui risulta ben definito il vettore $\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X}$, che ha norma 1.

Allora,

$$
\begin{aligned}
& \left\|T\left(\tfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X}\right)\right\|_Y \leq \rho_1(T) && \text{Per definizione di } \rho_1(T)\text{, essendo } \tfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_X} \text{ di norma } 1 \\
\implies\ & \tfrac{1}{\|\mathbf{x}\|_X}\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \rho_1(T) && \text{Per linearità di } T \text{ e per assoluta omogeneità di } \|\cdot\|_Y \\
\implies\ & \|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \rho_1(T)\ \|\mathbf{x}\|_1 && \text{Segue moltiplicando ambo i membri per } \|\mathbf{x}\|_X
\end{aligned}
$$

Dimostrazione: Punto 2.

Evidentemente, $\rho_1(T) \leq \rho_2(T)$ in quanto, per ogni $\mathbf{x}' \in X$ con $\|\mathbf{x}'\|_X = 1$, vale $\|T(\mathbf{x}')\|_Y \leq \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X \leq 1} \|T(\mathbf{x})\|_Y = \rho_2(T)$.

Si provi $\rho_1(T) \leq \rho_2(T)$.
Sia $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\|_X \leq 1$; si mostri che $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \rho_1(T)$.

Per l'osservazione preliminare ed essendo $\|\mathbf{x}\|_X \leq 1$, si ha allora $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \rho_1(T)\ \|\mathbf{x}\|_X \leq \rho_1(T)$, da cui segue quindi che $\rho_2(T) \leq \rho_1(T)$.

La disuguaglianza $\rho_3(T) \leq \rho_1(T)$ segue immediatamente dall'osservazione preliminare;
infatti, per ogni $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}$ si ha $\|T(\mathbf{x})\|_Y \leq \rho_1(T)\ \|\mathbf{x}\|_X$ ossia, essendo $\|\mathbf{x}\|_X \neq 0$,
$\frac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} \leq \rho_1(T)$, da cui segue proprio $\rho_3(T) \leq \rho_1(T)$.

D'altra parte, la disuguaglianza $\rho_1(T) \leq \rho_3(T)$ è evidente in quanto, per ogni $\mathbf{x}' \in X$ con $\|\mathbf{x}'\|_X = 1$, si ha
$\|T(\mathbf{x}')\|_Y = \frac{\|T(\mathbf{x}')\|_Y}{\|\mathbf{x}'\|_X} \leq \sup\limits_{\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}_X\}} \frac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} = \rho_3(T)$.

■

Dimostrazione: Punto 3.

Si provi che ρ_1 è assolutamente omogenea.
Fissati $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$\rho_1(\lambda T) = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|\lambda\, T(\mathbf{x})\|_Y$	Per definizione di ρ_1
$= \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \lvert\lambda\rvert\ \|T(\mathbf{x})\|_Y$	Per assoluta omogeneità di $\|\cdot\|_Y$
$= \lvert\lambda\rvert \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|T(\mathbf{x})\|_Y$	Proprietà dell'estremo superiore
$= \lvert\lambda\rvert\ \rho_1(T)$	Per definizione di ρ_1.

Si provi ora che ρ_3 è definita positiva.
Chiaramente, $\rho_3(T) \geq 0$ per ogni $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Si supponga $\rho_3(T) = 0$; si provi che $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.
Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}_X$, tale uguaglianza è immediata per linearità di T.
Se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_X$, essendo $\rho_3(T) = 0$ si ha $\frac{\|T(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} = 0$, ossia $\|T(\mathbf{x})\|_Y = 0$, ossia $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y$ per definita positività di $\|\cdot\|_Y$
.

Si provi infine che ρ_1 è subadditiva.
Fissati $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, si ha

$\rho_1(T_1 + T_2) = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x})\|_Y$	Per definizione di ρ_1
$\leq \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \left(\|T_1(\mathbf{x})\|_Y + \|T_2(\mathbf{x})\|_Y\right)$	Per subadditività di $\|\cdot\|_Y$
$\leq \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|T_1(\mathbf{x})\|_Y + \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|T_2(\mathbf{x})\|_Y$	In quanto questa espressione maggiora $\|T_1(\mathbf{x})\|_Y + \|T_2(\mathbf{x})\|_Y$ per ogni $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\|_X = 1$
$= \rho_1(T_1) + \rho_1(T_2)$	Per definizione di ρ_1.

■

Dunque, $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ è uno spazio normato.

Proposizione 6.6: Condizione per la completezza dello spazio degli operatori lineari

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Si supponga $(Y, \|\cdot\|_Y)$ di Banach (cioè completo rispetto alla metrica indotta dalla norma)

Allora, lo spazio normato $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ è di Banach.

Osservazioni preliminari

Sia (S, d) uno spazio metrico.
Sia $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ una successione di Cauchy.

Allora, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

Infatti, essendo di Cauchy, in corrispondenza a $\varepsilon = 1$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \geq \nu$, valga $d(s_m, s_n) < 1$.

Sia $M = \max\left(\{1\} \cup \left\{d(s_n, s_\nu) \mid n \in \{1, \ldots, \nu - 1\}\right\}\right)$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $d(s_n, s_\nu) \leq M$, per cui $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

Dimostrazione

Sia $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ una successione di Cauchy;
si provi che essa converge.

Essendo $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \geq \nu$, si abbia $\|T_m - T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$, ossia $\sup\limits_{\mathbf{x}\in X\smallsetminus\{\mathbf{0}_X\}} \frac{\|T_n(\mathbf{x})-T_m(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} < \varepsilon$ per definizione di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ come ρ_3.

Si provi che $\{T_n(\mathbf{x}')\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ è di Cauchy per ogni $\mathbf{x}' \in X$.
Se $\mathbf{x}' = \mathbf{0}_X$, si ha $\{T_n(\mathbf{0}_X)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\mathbf{0}_Y\}_{n\in\mathbb{N}}$, che è costante e dunque di Cauchy.

Si supponga quindi $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}_X$, e si fissi $\varepsilon > 0$.

Essendo $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, in corrispondenza a $\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}'\|_X}$, ben definito in quanto $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}_X$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \geq \nu$, si abbia $\sup\limits_{\mathbf{x}\in X\smallsetminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|T_n(\mathbf{x})-T_m(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X} < \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}'\|_X}$;

ne segue che, per ogni $m, n \geq \nu$, vale $\frac{\|T_n(\mathbf{x}')-T_m(\mathbf{x}')\|_Y}{\|\mathbf{x}'\|_X} < \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}'\|_X}$, ossia $\|T_n(\mathbf{x}') - T_m(\mathbf{x}')\|_Y < \varepsilon$, in quanto $\frac{\|T_n(\mathbf{x}')-T_m(\mathbf{x}')\|_Y}{\|\mathbf{x}'\|_X} \leq \sup\limits_{\mathbf{x}\in X\smallsetminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\|T_n(\mathbf{x})-T_m(\mathbf{x})\|_Y}{\|\mathbf{x}\|_X}$.

Dunque, $\{T_n(\mathbf{x}')\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ è di Cauchy per ogni $\mathbf{x}' \in X$;
essendo Y di Banach, ne segue che $\{T_n(\mathbf{x}')\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge per ogni $\mathbf{x}' \in X$.

Sia definisca allora $T : X \to Y$ ponendo $T(\mathbf{x}') = \lim\limits_n T_n(\mathbf{x}')$ per ogni $x' \in X$.

Si provi che $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e che $T = \lim\limits_n T_n$.

Per mostrare la linearità di T, si consideri l'identità $T_n(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda T_n(\mathbf{x}) + \mu T_n(\mathbf{y})$, che vale per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, dal momento che $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$.
Passando al limite di indice n di entrambi i membri si ottiene proprio la linearità di T.

Si mostri la continuità di T.
Per l'osservazione preliminare, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata essendo di Cauchy;
pertanto, esiste $M > 0$ tale che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Da questa disuguaglianza e dalla [Proposizione 6.5, Osservazione Preliminare] si ottiene che
$\|T_n(\mathbf{x})\|_Y \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|\mathbf{x}\|_X \leq M\|\mathbf{x}\|_X$ per ogni $\mathbf{x} \in X$, da cui segue la continuità.

Resta da provare che $\lim\limits_n \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$ ossia che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$, ossia $\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X=1} \|T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y < \varepsilon$ per definizione di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ come ρ_1.

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.
Essendo $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ per cui, per ogni $m, n \geq \nu$, vale $\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$, ossia
$\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X=1} \|T_m(\mathbf{x}) - T_n(\mathbf{x})\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$ per definizione di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ come ρ_1.

Sia allora $n \geq \nu$;
siano $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\|_X = 1$, e sia $m \geq \nu$.
Si ha

$$\begin{aligned} \|T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y &\leq \|T_n(\mathbf{x}) - T_m(\mathbf{x})\|_Y + \|T_m(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y && \text{Disuguaglianza triangolare} \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \|T_m(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y && \text{Per costruzione di } \nu\text{, essendo } m, n \geq \nu \text{ e } \|\mathbf{x}\|_X = 1 \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $n \geq \nu$ e per ogni $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\|_X = 1$, vale la disuguaglianza
$\|T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|T_m(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y$ per ogni $m \geq \nu$;

passando allora al limite di indice m di entrambi i membri e sfruttando il fatto che $\lim\limits_{m} \|T_m(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y = 0$ per costruzione di T, segue per confronto che $\|T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Dunque, per ogni $n \geq \nu$ si ha $\|T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\|_X = 1$, dunque
$\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_X = 1} \|T_n(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, come volevasi dimostrare.
■

Spazi duali topologici

Definizione: Funzionale lineare, Spazio duale topologico

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Si consideri $\mathbb{R}$ come spazio normato.

Gli operatori lineari da X a $\mathbb{R}$ prendono il nome di **funzionali lineari** in X.

L'insieme $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ si denota con X^*, e si chiama **spazio duale topologico** di X.

Segue dalla [Proposizione 6.6] che gli spazi duali topologici sono di Banach, essendo $\mathbb{R}$ di Banach.