7 - Il Teorema di Separazione

Definizione: Sub-additività, Positiva omogeneità

Sia E uno spazio vettoriale.
Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dice:

- **sub-additiva**, quando $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$;
- **positivamente omogenea**, quando $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in E$ e per ogni $\lambda \geq 0$.

Lemma 7.1: Lemma di estensione

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale.
Sia $\mathbf{x}_0 \in E \setminus F$.
Sia $G = \operatorname{span}(F \cup \{\mathbf{x}_0\})$.
Sia $\varphi : F \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare.
Sia $f : G \to \mathbb{R}$ una funzione sub-additiva e positivamente omogenea.
Si supponga che $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in F$.

Allora, esiste $\psi : G \to \mathbb{R}$ funzionale lineare tale che $\psi_{|F} = \varphi$ e $\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $x \in G$.

Osservazioni preliminari

1. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ due insiemi separati, con $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$.
   Allora, $\sup(A) \leq \inf(B)$.

2. Si ha $G = F + \text{span}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{u} + \lambda\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{u} \in F,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, e tale scrittura è unica in quanto $F \cap \text{span}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{0}\}$.

3. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$, e siano $h, k \in \mathbb{R}$.
   Sia $\mathbf{u} = \mathbf{x_u} + \lambda_\mathbf{u}\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{v} = \mathbf{x_v} + \lambda_\mathbf{v}\mathbf{x}_0$; tali scritture sono uniche per l'osservazione preliminare 2.
   Si ha $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = \underbrace{h\mathbf{x_u} + k\mathbf{x_v}}_{\in F} + \underbrace{(h\lambda_\mathbf{u} + k\lambda_\mathbf{v})}_{\in \mathbb{R}}\mathbf{x}_0$, da cui segue
   $\mathbf{x}_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\mathbf{x_u} + k\mathbf{x_v}$ e $\lambda_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\lambda_\mathbf{u} + k\lambda_\mathbf{v}$, sempre per unicità della scrittura degli elementi di G data dall'osservazione preliminare 2.

Dimostrazione

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$.
Per le proprietà di φ ed f, si ha

$\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$	Linearità di φ
$\leq f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$	Poiché $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in F$ e f maggiora φ in F
$= f((\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + (\mathbf{x}_0 + \mathbf{y})) \leq f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y})$	Per subadditività di f

Dal primo e dall'ultimo membro della catena di disuguaglianze segue allora che $\varphi(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$.

Ciò significa che gli insiemi $A = \{\varphi(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in F\}$ e $B = \{f(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) - \varphi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in F\}$ sono separati; in particolare, si ha $\sup(A) \leq \inf(B)$ per l'osservazione preliminare 1.

Sia $r \in \mathbb{R}$ tale che $\sup(A) \leq r \leq \sup(B)$.

Sia $\mathbf{u} \in G$; si ha $\mathbf{u} = \mathbf{x_u} + \lambda_\mathbf{u}\mathbf{x}_0$ per unici $\mathbf{x_u} \in F$ e $\lambda_\mathbf{u} \in \mathbb{R}$, per l'osservazione preliminare 2.

Si definisca allora $\psi : G \to \mathbb{R}$ definita ponendo $\psi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x_u}) - \lambda_\mathbf{u} r$ per ogni $\mathbf{u} \in G$.
Si provi che ψ soddisfa le proprietà espresse nella tesi.

Vale $\psi_{|F} = \varphi$; infatti, per ogni $\mathbf{u} \in F$ si ha $\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0\mathbf{x}_0$, dunque $\mathbf{x_u} = \mathbf{u}$ e $\lambda_\mathbf{u} = 0$ per unicità della scrittura degli elementi di G.

ψ è un funzionale lineare; infatti, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ e per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, si ha $\mathbf{x}_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\mathbf{x_u} + k\mathbf{x_v}$ e $\lambda_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\lambda_\mathbf{u} + k\lambda_\mathbf{v}$ per l'osservazione preliminare 3.

Allora, $\psi(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = \varphi(h\mathbf{x_u} + k\mathbf{x_v}) - (h\lambda_\mathbf{u} + k\lambda_\mathbf{v})r$; sfruttando la linearità di φ si ottiene $\psi(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = h(\varphi(\mathbf{x_u}) - \lambda_\mathbf{u} r) + k(\varphi(\mathbf{x_v}) - \lambda_\mathbf{v} r) = h\,\psi(\mathbf{u}) + k\,\psi(\mathbf{v})$, che mostra la linearità di ψ.

Resta da provare che $\psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{G}$
Sia dunque $\mathbf{u} \in G$.
Si può supporre $\mathbf{u} \notin F$ senza perdere di generalità, in quanto se $\mathbf{u} \in F$ si ha $\psi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$ in quanto $\psi_{|F} = \varphi$ e f maggiora φ in F.

Sia quindi $\mathbf{u} \in G \setminus F$; si ha $\mathbf{u} = \mathbf{x_u} + \lambda_\mathbf{u}\mathbf{x}_0$, per unici $\mathbf{x_u} \in F$ e $\lambda_\mathbf{u}$.
Essendo $\mathbf{u} \notin F$, si ha $\lambda_\mathbf{u} \neq 0$.

Si supponga $\lambda_\mathbf{u} > 0$.
Si consideri $\frac{\mathbf{x_u}}{\lambda_\mathbf{u}} \in F$; si ha

	$\varphi\left(\frac{\mathbf{x_u}}{\lambda_\mathbf{u}}\right) - f\left(\mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{x_u}}{\lambda_\mathbf{u}}\right) \leq r$	Essendo r maggiorante dell'insieme A ed essendo $\frac{\mathbf{x_u}}{\lambda_\mathbf{u}} \in F$
$\Longrightarrow$	$\varphi(\mathbf{x_u}) - f(\lambda_\mathbf{u}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x_u}) \leq \lambda r$	Moltiplicando per $\lambda_\mathbf{u}$ ambo i membri, sfruttando la linearità di φ e la positiva omogeneità di f, essendo $\lambda_\mathbf{u} > 0$ nel caso in esame
$\Longrightarrow$	$\varphi(\mathbf{x_u}) - \lambda_\mathbf{u} r \leq f(\lambda_\mathbf{u}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x_u})$	
$\Longrightarrow$	$\psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$	Per scrittura di $\mathbf{u}$ e per definizione di ψ

Si supponga ora $\lambda_\mathbf{u} < 0$.
Si consideri $\frac{\mathbf{x_u}}{-\lambda_\mathbf{u}} \in F$; si ha

$r \leq f\left(\frac{\mathbf{x_u}}{-\lambda_\mathbf{u}} - \mathbf{x}_0\right) - \varphi\left(\frac{\mathbf{x_u}}{-\lambda_\mathbf{u}}\right)$	Essendo r minorante dell'insieme B ed essendo $\frac{\mathbf{x_u}}{-\lambda_\mathbf{u}} \in F$
$\implies -\lambda_\mathbf{u} r \leq f(\mathbf{x_u} + \lambda_\mathbf{u}\mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x_u})$	Moltiplicando per $-\lambda_\mathbf{u}$ ambo i membri, sfruttando la linearità di φ e la positiva omogeneità di f, essendo $-\lambda_\mathbf{u} > 0$ nel caso in esame
$\implies \varphi(\mathbf{x_u}) - \lambda_\mathbf{u} r \leq f(\mathbf{x_u} + \lambda_\mathbf{u}\mathbf{x}_0)$	
$\implies \psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$	Per scrittura di $\mathbf{u}$ e per definizione di ψ

■

Teorema 7.2: Teorema di Hahn-Banach

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale di E
Sia $\varphi : F \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare.
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione sub-additiva e positivamente omogenea.
Si supponga che $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in F$.

Allora, esiste $\psi : E \to \mathbb{R}$ funzionale lineare tale che $\psi_{|F} = \varphi$ e $\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $x \in E$.

Dimostrazione

Si consideri il seguente insieme:

$$\mathcal{S} = \Big\{(G, \eta) \;\Big|\; \begin{array}{l} G \subseteq E \text{ sottospazio vettoriale di } E : \quad G \supseteq F \\ \eta : G \to \mathbb{R} \text{ funzionale lineare} : \quad \eta_{|_F} = \varphi \quad \wedge \quad \forall \mathbf{x} \in G,\ \eta(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \end{array}\Big\}$$

.

Si introduca su tale insieme la relazione d'ordine $\preceq$ definita ponendo $(G_1, \eta_1) \preceq (G_2, \eta_2)$ quando $G_1 \subseteq G_2$ e $\eta_2|_{G_1} = \eta_1$.

Si provi che l'insieme ordinato $(\mathcal{S}, \preceq)$ ammette un elemento massimale, tramite il lemma di Zorn.
Intanto, $\mathcal{S} \neq \varnothing$ in quanto $(F, \varphi) \in \mathcal{S}$.

Sia $\mathcal{C} = \{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{S}$ una catena in $\mathcal{S}$; si mostri che essa ammette maggiorante in $\mathcal{S}$.

Sia $G = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} G_i$, e si definisca $\eta : G \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $\mathbf{u} \in G$, $\eta(\mathbf{u}) = \eta_i(\mathbf{u})$, con $i \in \mathcal{I}$ tale che $\mathbf{u} \in G_i$.

Si mostri che $(G, \eta) \in \mathcal{S}$.

Osservazione preliminare

Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$, esiste $i \in \mathcal{I}$ tale che $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$.
Infatti, essendo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ si ha $\mathbf{u} \in G_{i_1}$ e $\mathbf{v} \in G_{i_2}$ per qualche $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$.
Essendo $\{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ una catena, essa è totalmente ordinata rispetto a $\preceq$, per cui si ha $G_{i_1} \subseteq G_{i_2}$ oppure $G_{i_2} \subseteq G_{i_1}$, da cui seguono rispettivamente $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_{i_1}$ oppure $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_{i_2}$.

Fatta questa osservazione, si proceda con la dimostrazione.

Per quanto concerne G si ha evidentemente $F \subseteq G \subseteq E$;

G è un sottospazio vettoriale di E. Infatti, fissati $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$, sia $i \in \mathcal{I}$ per cui $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$, che esiste per l'osservazione preliminare; ne viene che $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in G_i \subseteq G$ essendo G_i uno spazio vettoriale.

Per quanto concerne η, essa è intanto ben definita.
Infatti, sia $\mathbf{u} \in G$, e siano $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$ tali che $\mathbf{u} \in G_{i_1}$ e $\mathbf{u} \in G_{i_2}$;
essendo $\{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ una catena, essa è totalmente ordinata rispetto a $\preceq$, per cui si ha $G_{i_1} \subseteq G_{i_2}$ e $\eta_{i_2}|_{G_{i_1}} = \eta_{i_1}$, oppure $G_{i_2} \subseteq G_{i_1}$ e $\eta_{i_1}|_{G_{i_2}} = \eta_{i_2}$.
In entrambi i casi, si ha allora che $\eta_{i_1}(\mathbf{u}) = \eta_{i_2}(\mathbf{u})$.

η è un funzionale lineare.
Siano infatti $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$, e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

sia $i \in \mathcal{I}$ per cui $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$, che esiste per l'osservazione preliminare.
Allora, $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in G_i$; si ha allora

$$\begin{aligned} \eta(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \eta_i(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) \quad & \text{Essendo } \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in G_i \\ = \lambda\, \eta_i(\mathbf{u}) + \mu\, \eta_i(\mathbf{v}) \quad & \text{Essendo } \eta_i \text{ lineare} \\ = \lambda\, \eta(\mathbf{u}) + \mu\, \eta(\mathbf{v}) \quad & \text{Essendo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i \end{aligned}$$

La proprietà $\eta|_F = \varphi$ è immediata;
essa segue infatti dal fatto che, fissato $\mathbf{u} \in F$ e fissato un qualunque $i \in \mathcal{I}$, si ha $\eta(\mathbf{u}) = \eta_i(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u})$, per definizione di η essendo $F \subseteq G_i$ per costruzione, e per costruzione di η_i.

Altrettanto immediata risulta la disuguaglianza $\eta(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in G$.
Infatti, fissato $\mathbf{x} \in G$ e fissato $i \in \mathcal{I}$ tale che $\mathbf{x} \in G_i$, si ha $\eta(\mathbf{x}) = \eta_i(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ per definizione di η e per costruzione di η_i.

Dunque, $(G, \eta) \in \mathcal{S}$, per cui le ipotesi del lemma di Zorn sono verificate.

Allora, S ammette un elemento massimale (H, ψ).
Per concludere la dimostrazione, resta da provare che $H = E$; fatto questo, la tesi è acquisita dal momento che ψ soddisfa le proprietà da essa richieste per definizione di $\mathcal{S}$.

Si proceda per assurdo, supponendo quindi $H \subsetneq E$; esiste quindi $\mathbf{x}_0 \in E \setminus H$.

Allora, per il [Lemma 7.1], posto $\tilde{H} = \operatorname{span}(H, \mathbf{x}_0) \supsetneq H$ si ha che esiste $\tilde{\psi} : \tilde{H} \to \mathbb{R}$ funzionale lineare tale che $\tilde{\psi}_{|H} = \psi$ e $\tilde{\psi}(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \tilde{H}$.

Ma allora, da ciò seguirebbe che $(\tilde{H}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{S}$ e che $(\tilde{H}, \tilde{\psi}) \succneqq (H, \psi)$, contro la massimalità di (H, ψ).

Dunque, $H = E$.
■