1.2 - Geometria Differenziale e Cartografia

Gauss è il padre della geometria differenziale.

Tra le molte altre cose, egli era un cartografo;
difatti, molti termini nella moderna geometria differenziale (carta, atlante, mappa, sistema di coordinate, geodetica, ecc.) riflettono queste origini.

Fu portato al suo Theorema Egregium dalla domanda se fosse possibile disegnare una mappa di una porzione del nostro pianeta su un foglio piano, preservando le lunghezze (vedremo che questo non sarà possibile).

Cominciamo formulando questo problema matematicamente.

Consideriamo la sfera bidimensionale $\mathbf{S}^2$ nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$;
essa è individuata dall'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ora, una mappa di una piccola regione $U \subset \mathbf{S}^2$ nel senso della cartografia, la possiamo pensare come una corrispondenza biunivoca con una piccola regione nel piano bidimensionale $\mathbb{R}^2$;
abbiamo quindi una funzione $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$ che chiameremo *carta* o *intorno di coordinate*.

Varietà Topologiche

Alla base della geometria differenziale abbiamo le *varietà*.

In termini molto semplici, una varietà è uno spazio che "localmente assomiglia" a uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, su cui è quindi possibile introdurre coordinate locali e fare analisi differenziale.

Gli esempi più familiari, oltre agli spazi euclidei stessi, sono le curve piane lisce come cerchi e parabole, e le superfici lisce come sfere, tori, paraboloidi, ellissoidi e iperboloidi.

Esempi di dimensioni superiori includono l'insieme di punti in $\mathbb{R}^{n+1}$ a una distanza costante dall'origine (detto n-sfera) e i grafici di funzioni lisce tra spazi euclidei.

Le varietà più basilari sono le *varietà topologiche*, che sono spazi topologici con determinate proprietà che codificano cosa intendiamo quando diciamo che "localmente assomigliano" a $\mathbb{R}^n$.

Prima di fornire le definizioni precise, introduciamo quindi alcune terminologie preliminari fornendo alcuni esempi.

> **⌘ Definizione 1.2.1 (Spazi localmente euclidei).**
>
> Sia M uno spazio topologico.
>
> Esso si dice *localmente euclideo di dimensione* m quando ogni $p \in M$ appartiene a un intorno (aperto) U_p omeomorfo ad un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^m$.

Precisiamo che *gli intorni di un punto saranno sempre assunti aperti*, a meno di dichiarare esplicitamente il contrario.

> ***Osservazione:*** Poiché gli intorni sferici / cubici aperti in $\mathbb{R}^m$ costituiscono una base di aperti per la sua topologia, possiamo assumere che U_p sia omeomorfo a *un intorno sferico /cubico aperto* in $\mathbb{R}^n$.

A questo punto, possiamo definire le varietà topologiche in maniera rigorosa.

> **⌘ Definizione 1.2.2 (Varietà topologica).**
>
> Uno spazio topologico M si dice *varietà topologica di dimensione* m (o m-*varietà topologica*) quando:
>
> - È di Hausdorff;
> - È a base numerabile;
> - È localmente euclideo di dimensione m.

Si denota con $\dim M$ la dimensione di M.

> ***Nota:*** Affinché la dimensione sia ben definita, dovremmo assicurarci che M non può essere localmente euclideo di dimensioni m e n contemporaneamente, con $m \neq n$.
>
> Questo fatto è vero, ed è una conseguenza del *Teorema di invarianza della dimensione*:
> esso afferma che *due aperti non vuoti di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente, non sono mai omeomorfi, quando* $m \neq n$.
>
> Per la teoria che svilupperemo, ci basterà la versione più debole di questo fatto, data dalla Proposizione 1.1.14.

Vediamo adesso alcuni esempi di varietà topologiche.

Esempio 1.2.3 (Sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto con la topologia indotta da $\mathbb{R}^n$;
allora U è una n-varietà.

Infatti, le proprietà di Hausdorff e secondo-numerabilità sono ereditarie, cioè valgono per ogni sottospazio di uno spazio che le possiede.

Vediamo poi che U è localmente euclideo prendendo, per ogni $p \in U$, lo stesso U come intorno di p, e l'identità id_U come omeomorfismo.

Quindi, una n-varietà non necessariamente è globalmente omeomorfa a tutto lo spazio euclideo;
questa è una nozione più generale.

Esempio 1.2.4 (Grafici di funzioni continue).

Gli esempi più semplici di varietà non omeomorfe a sottoinsiemi aperti dello spazio euclideo sono i grafici di funzioni continue.

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e prendiamo una funzione $f : U \to \mathbb{R}^m$ continua.

Consideriamone il grafico $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$;
vogliamo far vedere che questo insieme è una n-varietà topologica con la topologia indotta da $\mathbb{R}^{m+n}$.

Al solito, le proprietà di Hasudorff e di secondo-numerabilità sono acquisite in quanto ereditarie.

Per mostrare che $\Gamma(f)$ è localmente euclideo, consideriamo la proiezione

$$\pi : \Gamma(f) \to \mathbb{R}^n : (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

Questa funzione è biunivoca, in quanto le coordinate di posizione $n+1, \dots, m$ dei punti di $\Gamma(f)$ sono univocamente determinate dalle prime n
;
inoltre, essa è continua, e l'inversa ha legge $x \mapsto (x, f(x))$, per cui è anch'essa continua.

Dunque, $\Gamma(f)$ è esso stesso omeomorfo a tutto $\mathbb{R}^n$, per cui è una n-varietà topologica.

Esempio 1.2.5 (n-Sfera).

Un altro esempio notevole di varietà topologica è la n-sfera $\mathbf{S}^n$, l'insieme di tutti i punti di $\mathbb{R}^{n+1}$ distanti 1 dall'origine $(0, \dots, 0)$.

Questi vanno presi con la topologia di sottospazio, per cui le proprietà di Hausdorff e secondo-numerabilità sono immediate.

Vediamo ora che $\mathbf{S}^n$ è localmente euclideo di dimensione n.

Fissato $p = (a^1, \dots, a^{n+1}) \in \mathbf{S}^n$, sicuramente almeno una delle coordinate, sia essa la i-esima, non è nulla.

Si consideri allora l'aperto $U = \mathbf{S}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i \cdot a^i > 0\}$ (cioè la semisfera aperta le coordinate i-esime dei quali punti hanno lo stesso segno di quella di p), e la proiezione $\pi^i : U \to \mathbb{R}^n : (a^1, \dots, a^{n+1}) \mapsto (a^1, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^{n+1})$.

Si vede che $\pi^i(U)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ e che π^i è un omeomorfismo tra U e $\pi^i(U)$, per cui $\mathbf{S}^n$ è localmente euclideo di dimensione n.

> Notiamo che $\mathbf{S}^n$, essendo non vuoto e compatto, non è omeomorfo ad alcun sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Date due varietà topologiche, potremmo chiederci cosa succede al loro prodotto topologico;
la risposta è fornita dalla seguente

Proposizione 1.2.6 (Sul prodotto di varietà topologiche).

Siano M e N due varietà topologiche, di dimensioni rispettivamente m e n.

Lo spazio $M \times N$ dotato della topologia prodotto è una varietà topologica di dimensione $m+n$.

Dimostrazione

Le proprietà di Hausdorff e secondo-numerabilità sono soddisfatte in quanto il prodotto di due spazi con tali proprietà continua a soddisfarle.

Per verificare che $M \times N$ è localmente euclideo di dimensione $m+n$, fissiamo $(p,q) \in M \times N$;
essendo M e N localmente euclidei di dimensioni rispettivamente m e n, abbiamo:

- U_p intorno di p in M, omeomorfo a un certo $V_p \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto;
- U_q intorno di q in N, omeomorfo a un certo $V_q \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Allora, $U_p \times U_q$ è un intorno di (p,q) in $M \times N$, omeomorfo a $V_p \times V_q \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, aperto.

Poiché $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ è a sua volta omeomorfo a $\mathbb{R}^{m+n}$, ne viene che $M \times N$ è localmente euclideo di dimensione $m+n$.

■

Esempio 1.2.7 (n-Toro).

Si dice n-*toro* lo spazio $\mathbf{T}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{S}^1$.

Essendo $\mathbf{S}^1$ una 1-varietà topologica, tramite la Proposizione 1.2.6 otteniamo che questo spazio è una n-varietà topologica.

Coordinate locali su una varietà topologica; le carte

Come detto prima, la caratteristica delle varietà topologiche è quella di comportarsi localmente come uno spazio euclideo; possiamo quindi introdurre formalmente il concetto di *coordinate locali*.

⌘ Definizione 1.2.8 (Carte).

Sia M una m-varietà topologica.

Si dice *carta di coordinate* (o semplicemente *carta*) su M una coppia (U, φ), dove:

- U è un sottoinsieme aperto di M;
- $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ è tale che $\varphi(U)$ sia aperto in $\mathbb{R}^n$, e φ sia un omeomorfismo tra U e $\varphi(U)$.

Per definizione di varietà topologica, *ogni punto* $p \in M$ *appartiene al dominio di qualche carta* (U, φ).

Se $\varphi(p) = 0$, diciamo che la carta è *centrata* in p.

> ***Osservazione:*** Se (U, φ) è una qualsiasi carta il cui dominio contiene p, è possibile ottenere facilmente una nuova carta centrata in p sottraendo il vettore costante $\varphi(p)$.

Data una carta (U, φ), chiamiamo l'insieme U un *dominio di coordinate*, o anche un *intorno di coordinate* di ciascuno dei suoi punti;
se, inoltre, U_φ è un intorno sferico / cubico di $\mathbb{R}^n$, allora U viene chiamato *intorno sferico / cubico di coordinate*.

La funzione φ è detta invece *mappa di coordinate (locali)*.

Il motivo per cui una carta (U, φ) codifica le coordinate locali sta nel fatto che, per ogni $p \in U$, la legge di φ è del tipo $\varphi(p) = \big(x^1(p), \dots, x^m(p)\big)$;
le funzioni x^i sono difatti dette *coordinate locali* su U.

Se vogliamo enfatizzare le funzioni coordinate $x^1, \dots, x^n$ della carta (U, φ), a volte scriviamo questa come
$(U, x^1, \dots, x^n)$ o, ancora più semplicemente, come (U, x^i).

A volte faremo affermazioni come "La carta (U, φ) possiede p" per indicare brevemente "La carta (U, φ) è tale che il dominio U possegga p".

Problemi ed Esercizi

> **Esercizio 1.2.9 (Uno spazio localmente euclideo a base numerabile, non di Hausdorff: La retta reale con due origini).**
>
> Sia $X = \mathbb{R} \cup \{O\}$ l'insieme dei reali più un elemento aggiuntivo;
> per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ consideriamo gli insiemi di questo tipo:
>
> $$\begin{aligned} &]a; b[, && a < b; \\ &(\,]a; b[\setminus \{0\}) \cup \{O\}, && a < 0 < b. \end{aligned}$$
>
> Questi insiemi costituiscono una base di aperti per una topologia su X;
> con questa topologia, X è detto *retta reale con due origini*.
>
> X è a base numerabile.
> Infatti, abbiamo ancora una base se consideriamo solo gli insiemi indicati con $a, b \in \mathbb{Q}$.

X non è di Hausdorff.
Infatti, un aperto di base che possiede 0 e uno che possiede O si intersecano sempre.

X è localmente euclideo di dimensione 1.
Infatti, per ogni $x \in X \smallsetminus \{O\}$ possiamo considerare un aperto di base $]a;b[\ni x$, che è omeomorfo a sé stesso nella retta reale $\mathbb{R}$ tramite l'identità;
nel caso $x = O$, l'aperto di base $(\,]a;b[\smallsetminus \{0\}) \cup \{O\}$ con $a < 0 < b$ è omeomorfo a $]a;b[$ nella retta reale $\mathbb{R}$, tramite la mappa che invia O in 0 ed è identica altrove.

Esercizio 1.2.10 (Uno spazio localmente euclideo di Hausdorff, non a base numerabile: L'unione disgiunta più che numerabile di rette reali).

Consideriamo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e prendiamo su di esso gli insiemi del tipo

$$]a;b[\times \{c\}, \quad a < b,\ c \in \mathbb{R}.$$

Questi insiemi formano una base di aperti per una topologia su X;
studiamo X con questa topologia.

X è evidentemente di Hausdorff.

X è localmente euclideo di dimensione 1.
Infatti, $\mathbb{R} \times \{c\}$ è omeomorfo alla retta reale $\mathbb{R}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, tramite la proiezione sulle ascisse.

X non è a base numerabile.
Infatti, il sottospazio $\{0\} \times \mathbb{R}$ è più che numerabile con la topologia discreta, dunque non è a base numerabile;
essendo la secondo-numerabilità ereditaria, ne viene che nemmeno X è a base numerabile.

Esercizio 1.2.11 (Uno spazio di Hausdorff a base numerabile, non localmente euclideo: La sfera con un capello).

Consideriamo l'insieme $\mathbf{S}^2 \cup I \subseteq \mathbb{R}^3$, dove I è il segmento di estremi $(0,0,1)$ e $(0,0,2)$.
Consideriamo su di esso la topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.

X è evidentemente di Hausdorff e a base numearabile, in quanto queste due proprietà sono ereditarie.

X non è localmente euclideo.
Infatti, consideriamo il punto $p = (0,0,1)$;
se esistesse un intorno U contenente p omeomorfo ad un certo sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, prendendo l'aperto $U \setminus \{p\}$ avremmo questi due fatti tra loro contraddittori:

- La componente connessa di $U \setminus \{p\}$ contenuta in $\mathbf{S}^2$ sarebbe un aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, dunque $n = 2$ in quanto $\mathbf{S}^2$ è localmente euclideo di dimensione 2;
- La componente connessa di $U \setminus \{p\}$ contenuta in I sarebbe un aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, dunque $n = 1$ in quanto I è localmente euclideo di dimensione 1.