

13 - Derivabilità delle Funzioni Composte, Omeomorfismi e Derivabilità delle Funzioni Inverse

Proposizione 13.1: F-derivabilità delle funzioni composte (Regola della catena)

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tre spazi normati.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $B \subseteq Y$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.

Sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione F-derivabile in \mathbf{x}_0 , tale che $f(A) \subseteq B$ e $f(\mathbf{x}_0) \in \overset{\circ}{B}$.

Sia $g : B \rightarrow Z$ una funzione F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$.

Si hanno i seguenti fatti:

- $g \circ f$ è F-derivabile in \mathbf{x}_0 ;
- $(g \circ f)'(\mathbf{x}_0) = g'(f(\mathbf{x}_0)) \circ f'(\mathbf{x}_0)$.

Dimostrazione

Per mostrare le due affermazioni, si provi che

$$\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{g(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})) - g(f(\mathbf{x}_0)) - g'(f(\mathbf{x}_0))(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z.$$

Sia intanto $\delta_0 > 0$ tale che $B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \subseteq A$; esso esiste in quanto $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.

Si definiscano le funzioni $\varphi : B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \rightarrow Y$ e $\psi : f(B(\mathbf{x}_0, \delta_0)) \rightarrow Z$, ponendo rispettivamente:

- $\varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{0}_X, \delta_0)$;

- $\psi(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{v}) - g(f(\mathbf{x}_0)) - g'(f(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v})$, per ogni $\mathbf{v} \in f(B(\mathbf{x}_0, \delta_0))$.

Per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{0}_X, \delta_0) \setminus \{\mathbf{0}_X\}$, si ha

$$\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)) = g(f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{u}) - g(f(\mathbf{x}_0)) - g'(f(\mathbf{x}_0))(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))$$

Per definizione di ψ

$$\implies g(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})) - g(f(\mathbf{x}_0)) = \psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)) + g'(f(\mathbf{x}_0))(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))$$

$$\implies g(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})) - g(f(\mathbf{x}_0)) = \psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)) + g'(f(\mathbf{x}_0))(\varphi(\mathbf{u}) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}))$$

Dalla definizione di φ , in quanto $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) = \varphi(\mathbf{u}) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})$

$$\implies g(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})) - g(f(\mathbf{x}_0)) = \psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)) + g'(f(\mathbf{x}_0))(\varphi(\mathbf{u})) + g'(f(\mathbf{x}_0))(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}))$$

Per linearità di $g'(f(\mathbf{x}_0))$

$$\implies g(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})) - g(f(\mathbf{x}_0)) - g'(f(\mathbf{x}_0))(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})) = \psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)) + g'(f(\mathbf{x}_0))(\varphi(\mathbf{u}))$$

$$\implies \frac{g(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})) - g(f(\mathbf{x}_0)) - g'(f(\mathbf{x}_0))(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{u}\|_X} + \frac{g'(f(\mathbf{x}_0))(\varphi(\mathbf{u}))}{\|\mathbf{u}\|_X}$$

Dividendo ambo i membri per $\|\mathbf{u}\|_X$, non nullo in quanto $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_X$

Dall'uguaglianza ottenuta segue che, per provare quanto si vuole, basta mostrare che

$$\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{u}\|_X} + \frac{g'(f(\mathbf{x}_0))(\varphi(\mathbf{u}))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z .$$

$$\text{Si ha } \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{g'(f(\mathbf{x}_0))(\varphi(\mathbf{u}))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z .$$

Infatti, $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{g'(f(\mathbf{x}_0))(\varphi(\mathbf{u}))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} g'(f(\mathbf{x}_0)) \left(\frac{\varphi(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X} \right)$ per linearità di $g'(f(\mathbf{x}_0))$;

inoltre, $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{\varphi(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X} = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Y$ per F-derivabilità di f in \mathbf{x}_0 .

Segue quindi $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} g'(f(\mathbf{x}_0)) \left(\frac{\varphi(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X} \right) = \mathbf{0}_Z$ per continuità di $g'(f(\mathbf{x}_0))$.

Per acquisire la tesi, resta perciò da provare che $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z$.

Sia quindi $\mathbf{u} \in B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \neq \{\mathbf{0}_X\}$.

Se $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0)$, si ha $\frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z$, per come è definita ψ .

Si supponga ora $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) \neq f(\mathbf{x}_0)$; si ha

$$\frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} \frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y}{\|\mathbf{u}\|_X}.$$

Si vogliono studiare questi due rapporti in funzione di \mathbf{u} .

$\frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y}{\|\mathbf{u}\|_X}$ è limitato in un opportuno intorno di $\mathbf{0}_X$.

Infatti, per F-derivabilità di f in \mathbf{x}_0 , in corrispondenza a $\varepsilon = 1$ esiste $\delta_1 > 0$ tale che, se $\|\mathbf{u}\|_X < \delta_1$, allora

$$\left\| \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X} \right\|_Y < 1.$$

Allora, se $\|\mathbf{u}\|_X < \delta_1$, si ha

$$\frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y}{\|\mathbf{u}\|_X} < 1$$

Assoluta omogeneità di $\|\cdot\|_Y$

$$\implies \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y < \|\mathbf{u}\|_X$$

$$\implies \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y - \|f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y < \|\mathbf{x}\|_X$$

Dalla seconda disuguaglianza triangolare delle norme

$$\implies \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y < \|\mathbf{u}\|_X + \|f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y$$

$$\implies \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y < \|\mathbf{u}\|_X + \|f'(\mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{u}\|_X$$

Dalla disuguaglianza fondamentale della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

$$\implies \frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y}{\|\mathbf{u}\|_X} < 1 + \|f'(\mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

Dividendo ambo i membri per $\|\mathbf{u}\|_X$, non nullo in quanto $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_X$

$$\frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} \text{ è infinitesimo per } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X.$$

Infatti, $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_X$ in quanto f è continua in \mathbf{x}_0 , essendo ivi F-derivabile.

$$\text{Inoltre, } \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}_Y} \frac{\psi(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_Y} = \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}_Y} \frac{g(f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{v}) - g(f(\mathbf{x}_0)) - g'(f(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_Y} = \mathbf{0}_Z \text{ per F-derivabilità di } g \text{ in } f(\mathbf{x}_0).$$

$$\text{Dunque, ne segue che } \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_Z.$$

Pertanto, $\frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{u}\|_X}$ è nullo se $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0)$, altrimenti è prodotto di un'espressione limitata in un opportuno intorno di $\mathbf{0}_X$ per \mathbf{u} , con un'espressione infinitesima per $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X$.

$$\text{Ne segue che } \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_X} \frac{\psi(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z, \text{ come si voleva ottenere.}$$

■

⌘ Notazione: $\mathcal{O}(X, Y)$

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.

Si denota con $\mathcal{O}(X, Y)$ l'insieme degli omeomorfismi lineari da X in Y , ossia le funzioni da X in Y lineari, continue, biunivoche e con inversa continua.

Osservazione

Si ha $\mathcal{O}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$.

Proposizione 13.2: Caratterizzazione degli omeomorfismi lineari

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.

Sia $f : X \rightarrow Y$ un operatore lineare continuo e biunivoco.

Allora, f^{-1} è anch'essa continua.

In altri termini, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- $f \in \mathcal{O}(X, Y)$;
- f è lineare, continua e biunivoca.

Proposizione 13.3: Insieme degli omeomorfismi lineari è aperto nell'insieme degli operatori lineari continui

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.

Si hanno i seguenti fatti:

- $\mathcal{O}(X, Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X, Y)$;
- L'operatore $\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ è continuo.
 $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$

Dimostrazione

Se $X = \{\mathbf{0}\}$, l'unico operatore lineare è la funzione identicamente nulla.

Allora, $\mathcal{L}(Y, X)$ è un singoletto, per cui la topologia definita su di esso è discreta.

Segue allora che $\mathcal{O}(X, Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X, Y)$, e l'operatore $\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ è continuo (le funzioni su uno spazio discreto sono automaticamente continue).

Si supponga ora $X \neq \{\mathbf{0}\}$.

Si fissi $\varphi \in \mathcal{O}(X, Y)$;

essendo $X \neq \{\mathbf{0}\}$ e φ biunivoca, né φ né φ^{-1} sono identicamente nulle, per cui $\|\varphi\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \neq 0$ e $\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \neq 0$.

Per provare che $\mathcal{O}(X, Y)$ è aperto, si mostri che $B\left(\varphi, \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)}}\right) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$.

Sia dunque $\psi \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che $\|\psi - \varphi\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)}}$;

si provi che ψ è biunivoca; facendo uso della [Proposizione 13.2], basta dunque mostrare che ψ è biunivoca (la linearità e la continuità di ψ sono garantite dal fatto che $\psi \in \mathcal{L}(X, Y)$).

Fissato allora $\mathbf{y} \in Y$, si vuole provare l'esistenza e l'unicità di $\mathbf{x} \in X$ tale che $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Si definisca la funzione $g : X \rightarrow X$ ponendo $g(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}))$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Si osserva che

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \iff \mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$$

$$\iff \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{Per biunivocità di } \varphi$$

$$\iff g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \text{Per definizione di } g$$

Cioè, $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ se e solo se \mathbf{x} è un punto fisso per g .

Per provare che ψ è biunivoca, basta allora provare che g ammette un solo punto fisso in X .

🔗 Richiamo: Teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli

Sia (S, d) uno spazio metrico completo.

Sia $f : S \rightarrow S$ una contrazione (tale cioè che esista $L \in [0; 1[$ per cui $d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$).

Allora, f ammette un unico punto fisso, vale a dire un unico $\tilde{x} \in S$ tale che $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Essendo X completo in quanto spazio di Banach e $g : X \rightarrow X$, in virtù di tale teorema si mostri che g è una contrazione.

Fissati $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in X$, si ha

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z}) &= \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})) - \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{z}) - \psi(\mathbf{z})) && \text{Per definizione di } g \\
 &= \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) - (\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{z}) - \psi(\mathbf{z}))) && \text{Per linearità di } \varphi^{-1} \text{ (L'inversa di una funzione lineare è anch'essa lineare)} \\
 &= \varphi^{-1}(\psi(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{z})) && \text{Per linearità di } \varphi \text{ e } \psi \\
 &= \varphi^{-1}((\psi - \varphi)(\mathbf{x} - \mathbf{z})) && \text{Per definizione di } \psi - \varphi \\
 \implies \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})\|_X &= \|\varphi^{-1}((\psi - \varphi)(\mathbf{x} - \mathbf{z}))\|_X && \text{Per quanto appena ottenuto} \\
 &\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \cdot \|(\psi - \varphi)(\mathbf{x} - \mathbf{z})\|_X && \text{Per la disuguaglianza fondamentale della norma } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \\
 &\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \cdot \|\psi - \varphi\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_X && \text{Per la disuguaglianza fondamentale della norma } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}
 \end{aligned}$$

Dunque, $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})\|_X \leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \cdot \|\psi - \varphi\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_X$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in X$;

essendo $\|\psi - \varphi\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)}}$, ne segue che $\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \cdot \|\psi - \varphi\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < 1$, per cui g è una contrazione.

Pertanto, $\mathcal{O}(X, Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X, Y)$.

Fissato $\psi \in B\left(\varphi, \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}\right)$, che è biunivoco per quanto appena mostrato, si vuole ora fornire una stima di $\|\psi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$.

Dunque, si fissi $\mathbf{y} \in X$, e si definisca $g : X \rightarrow X$ come prima ($\mathbf{x} \mapsto \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}))$).

Sia $\mathbf{x}_0 = \psi^{-1}(\mathbf{y})$; si ha

$\ \mathbf{x}_0\ _X = \ g(\mathbf{x}_0)\ _X$	\mathbf{x}_0 è punto fisso per g per quanto visto prima, in quanto $\psi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}$
$= \ \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{x}_0))\ _X$	Per definizione di g
$= \ \varphi^{-1}(\mathbf{y} + (\varphi - \psi)(\mathbf{x}_0))\ _X$	Per definizione di $\varphi - \psi$
$= \ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \ \mathbf{y} + (\varphi - \psi)(\mathbf{x}_0)\ _X$	Per la disuguaglianza fondamentale della norma $\ \cdot\ _{\mathcal{L}(Y,X)}$
$\leq \ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot (\ \mathbf{y}\ _Y + \ (\varphi - \psi)(\mathbf{x}_0)\ _Y)$	Per subadditività delle norme
$\leq \ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot (\ \mathbf{y}\ _Y + \ \varphi - \psi\ _{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \ \mathbf{x}_0\ _X)$	Per la disuguaglianza fondamentale della norma $\ \cdot\ _{\mathcal{L}(X,Y)}$

Dunque,

$\ \mathbf{x}_0\ _X \leq \ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot (\ \mathbf{y}\ _Y + \ \varphi - \psi\ _{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \ \mathbf{x}_0\ _X)$	
$\implies (1 - \ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \ \varphi - \psi\ _{\mathcal{L}(X,Y)}) \ \mathbf{x}_0\ _X \leq \ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \ \mathbf{y}\ _Y$	Portando a primo membro tutti i termini con fattore $\ \mathbf{x}_0\ _X$
$\implies \ \mathbf{x}_0\ _X \leq \frac{\ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)}}{1 - \ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \ \varphi - \psi\ _{\mathcal{L}(X,Y)}} \cdot \ \mathbf{y}\ _Y$	Dividendo ambo i membri per $1 - \ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \ \varphi - \psi\ _{\mathcal{L}(X,Y)}$, valore strettamente positivo in quanto
	$\psi \in B\left(\varphi, \frac{1}{\ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)}}\right)$
$\implies \ \psi^{-1}(\mathbf{y})\ _X \leq \frac{\ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)}}{1 - \ \varphi^{-1}\ _{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \ \varphi - \psi\ _{\mathcal{L}(X,Y)}} \cdot \ \mathbf{y}\ _Y$	Per definizione di \mathbf{x}_0

Quest'ultima disuguaglianza vale per ogni $\mathbf{y} \in Y$;

dalla definizione di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ segue che

$$\|\psi^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1 - \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}.$$

Questa è la stima cercata.

Per provare la continuità dell'operatore $\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$, se ne mostri la sequenziale continuità.
 $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$

Fissati dunque $\varphi \in \mathcal{O}(X, Y)$ e una successione $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$ convergente a φ , si provi che $\{\varphi_n^{-1}\}$ converge a φ^{-1} , ossia

$$\lim_n \|\varphi_n^{-1} - \varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = 0.$$

Poiché $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{L}(X,Y)} \varphi$, in corrispondenza a $\varepsilon = \frac{1}{2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \nu$, si abbia

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{1}{2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}.$$

Ricordando che $\|\varphi_n^{-1} - \varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \sup_{\|\mathbf{y}\|_Y=1} \|\varphi_n^{-1}(\mathbf{y}) - \varphi^{-1}(\mathbf{y})\|_X$, si fissi $\mathbf{y} \in Y$ tale che $\|\mathbf{y}\|_Y = 1$;

si ponga inoltre $\mathbf{x}_n = \varphi_n^{-1}(\mathbf{y})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e anche $\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{y})$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} \|\varphi(\mathbf{x}_n) - \varphi(\mathbf{x})\|_Y &= \|\varphi(\mathbf{x}_n) - \varphi_n(\mathbf{x}_n)\|_Y && \text{In quanto } \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \varphi_n(\mathbf{x}_n) \\ &= \|(\varphi - \varphi_n)(\mathbf{x}_n)\|_Y && \text{Per definizione di } \varphi - \varphi_n \\ &\leq \|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{x}_n\|_X && \text{Per la disuguaglianza fondamentale di } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \end{aligned}$$

Fissato allora $n \geq \nu$, si ha

$$\begin{aligned} \varphi_n &\in B\left(\varphi, \frac{1}{2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}\right) \subseteq B\left(\varphi, \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}\right) && \text{Per costruzione di } \nu \\ \implies \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} &\leq \frac{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1 - \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}} && \text{Per la stima sulla norma dell'inversa ricavata prima} \end{aligned}$$

$$\implies \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq 2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$$

In quanto $\|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{1}{2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}$, e dunque
 $1 - \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} > \frac{1}{2}$

Si osservano ora i seguenti fatti:

1. $\|\mathbf{x}_n\|_X \leq \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Infatti,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_n\|_X &= \|\varphi_n^{-1}(\mathbf{y})\|_X && \text{Per definizione di } \mathbf{x}_n \\ &\leq \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\mathbf{y}\|_Y && \text{Per la disuguaglianza fondamentale di } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \\ &= \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} && \text{In quanto era stato posto } \|\mathbf{y}\|_Y = 1 \end{aligned}$$

2. $\|\mathbf{z}\|_X \leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{z})\|_Y$.

Infatti,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|_X &= \|\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{z}))\|_X && \text{Per biunivocità di } \varphi \\ &\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{z})\|_Y && \text{Per la disuguaglianza fondamentale di } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \end{aligned}$$

Sia dunque $n \geq \nu$; si ha

$$\begin{aligned} \|\varphi_n^{-1}(\mathbf{y}) - \varphi^{-1}(\mathbf{y})\|_X &= \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_X && \text{Per definizione di } \mathbf{x}_n \text{ e } \mathbf{x} \\ &\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})\|_Y && \text{Per il fatto 2.} \\ &= \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{x}_n) - \varphi(\mathbf{x})\|_Y && \text{Per linearità di } \varphi \\ &= \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{x}_n) - \varphi_n(\mathbf{x}_n)\|_Y && \text{In quanto } \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \varphi_n(\mathbf{x}_n) \\ &= \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|(\varphi - \varphi_n)(\mathbf{x}_n)\|_Y && \text{Per definizione di } \varphi - \varphi_n \\ &\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{x}_n\|_X && \text{Per la disuguaglianza fondamentale di } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \\ &\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} && \text{Per il fatto 1.} \end{aligned}$$

$$< 2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^2 \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

Avendo mostrato che $\|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq 2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$ per $n \geq \nu$

Dunque, per $n \geq \nu$ si ha $\|\varphi_n^{-1}(\mathbf{y}) - \varphi^{-1}(\mathbf{y})\|_X < 2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^2 \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ per ogni $\mathbf{y} \in Y$ tale che $\|\mathbf{y}\|_Y = 1$.

Ne viene che $\|\varphi_n^{-1} - \varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq 2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^2 \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ per ogni $n \geq \nu$.

Essendo $\lim_n \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$ per ipotesi su $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, segue per confronto che

$$\lim_n \|\varphi_n^{-1} - \varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = 0.$$

■

Proposizione 13.4: F-derivabilità delle funzioni inverse.

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione;

si supponga che f sia un omeomorfismo tra A e $f(A)$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$, tale che $f(\mathbf{x}_0) \in (f(A))^\circ$.

Si supponga f F-derivabile in \mathbf{x}_0 .

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f^{-1} è F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$;
2. $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$.

In tal caso, si ha inoltre $(f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)) = (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}$.

Osservazioni preliminari

1. Siano U e V due insiemi.

Siano $h : U \rightarrow V$ e $k : V \rightarrow U$ tali che $k \circ h = \text{id}_U$ e $h \circ k = \text{id}_V$ (id_S denota l'identità sull'insieme S).

Allora, h e k sono biunivoche, e sono l'una l'inversa dell'altra.

Infatti, k è per ipotesi inversa destra e sinistra di h ; pertanto h è biunivoca, e k è la sua inversa.

Analogamente, h è per ipotesi inversa destra e sinistra di k , per cui anche k è biunivoca, con inversa h .

2. Siano X, Y e Z tre spazi topologici.

Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo.

Sia $g : Y \rightarrow Z$.

Sia $y_0 \in Y$ non isolato (dimodoché si possano effettuare limiti per $y \rightarrow y_0$)

Sia $z \in Z$.

Si ha $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow \varphi^{-1}(y_0)} g(\varphi(x)) = z$.

Infatti, si supponga $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z$.

Sia V un intorno di z .

Per ipotesi, esiste U intorno di y_0 tale che $g(U) \subseteq V$.

Essendo φ un omeomorfismo tra X e Y , l'insieme $W = \varphi^{-1}(U)$ è un intorno di $\varphi^{-1}(y_0)$, e si ha $g(\varphi(W)) = g(U) \subseteq V$.

Ne segue che $\lim_{x \rightarrow \varphi^{-1}(y_0)} g(\varphi(x)) = z$

Viceversa, si supponga $\lim_{x \rightarrow \varphi^{-1}(y_0)} g(\varphi(x)) = z$.

Sia V un intorno di z .

Per ipotesi, esiste W intorno di $\varphi^{-1}(y_0)$ tale che $g(\varphi(W)) \subseteq V$.

Essendo φ un omeomorfismo tra X e Y , l'insieme $U = \varphi(W)$ è un intorno di y_0 , e si ha $g(U) = g(\varphi(W)) \subseteq V$.

Ne segue che $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z$.



Dimostrazione (1. \Rightarrow 2.)

Si supponga f^{-1} F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$;
si provi che $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$.

Sono soddisfatte le ipotesi della regola della catena ([Proposizione 13.1]), per $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$, su \mathbf{x}_0 e $f(\mathbf{x}_0)$ rispettivamente.

dunque, esse sono F-derivabili in \mathbf{x}_0 e $f(\mathbf{x}_0)$ rispettivamente, e si ha

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)'(\mathbf{x}_0) &= (f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)) \circ f'(\mathbf{x}_0); \\ (f \circ f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)) &= f'(f^{-1}(f(\mathbf{x}_0))) \circ (f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)) = f'(\mathbf{x}_0) \circ (f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)).\end{aligned}$$

D'altra parte, si ha $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \text{id}_{f(A)}$.

id_A è restrizione su A di $\text{id}_X \in \mathcal{L}(X, X)$; quest'ultimo è F-derivabile in \mathbf{x}_0 con derivata pari a id_X stesso, essendo un operatore lineare continuo.

Allora, essendo $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$, anche id_A è F-derivabile in \mathbf{x}_0 , e $\text{id}'_A(\mathbf{x}_0) = \text{id}'_X(\mathbf{x}_0) = \text{id}_X$.

Analogamente, $\text{id}_{f(A)}$ è restrizione su A di $\text{id}_Y \in \mathcal{L}(Y, Y)$; quest'ultimo è F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$ con derivata pari a id_Y stesso, essendo un operatore lineare continuo.

Allora, essendo $f(\mathbf{x}_0) \in (f(A))^\circ$, anche $\text{id}_{f(A)}$ è F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$, e $\text{id}'_{f(A)}(f(\mathbf{x}_0)) = \text{id}'_Y(f(\mathbf{x}_0)) = \text{id}_Y$.

Dall'uguaglianza delle derivate segue che

$$\begin{aligned}\text{id}_X &= (f^{-1} \circ f)'(\mathbf{x}_0) = (f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)) \circ f'(\mathbf{x}_0); \\ \text{id}_Y &= (f \circ f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)) = f'(\mathbf{x}_0) \circ (f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)).\end{aligned}$$

Dall'osservazione preliminare 1. segue allora che $f'(\mathbf{x}_0)$ è biunivoca; essendo anche $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$, segue allora che $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$ per la [Proposizione 13.2];

inoltre, sempre per tale osservazione si ha $(f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)) = (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}$.

■

Dimostrazione (2. \Rightarrow 1.)

Si supponga $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$.

Per provare sia la F-derivabilità di f^{-1} in $f(\mathbf{x}_0)$ che l'uguaglianza $(f^{-1})'(f(\mathbf{x}_0)) = (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}$, si mostri che

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow f(\mathbf{x}_0)} \frac{f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{y}_0) - (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(\mathbf{y} - f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{y} - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X.$$

Essendo f un omeomorfismo tra A e $f(A)$, per l'osservazione preliminare 2. ciò equivale a provare che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X.$$

Si definisca $\varphi : A \setminus \{\mathbf{x}_0\} \rightarrow Y$ ponendo $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X}$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;

si osserva che, per definizione di F-derivabilità di f in \mathbf{x}_0 , si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y.$$

Si definisca $\psi : A \setminus \{\mathbf{x}_0\} \rightarrow X$ ponendo $\psi(\mathbf{x}) = (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(\varphi(\mathbf{x}))$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Sempre per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, tale legge si può scrivere così:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= (f'(\mathbf{x}_0))^{-1} \left(\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} \right) && \text{Per definizione di } \varphi \\ &= \frac{(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X} && \text{Per linearità di } (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}, \text{ appartenendo a } \mathcal{O}(X, Y) \text{ per ipotesi} \end{aligned}$$

Ne segue che $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot \psi(\mathbf{x}) = (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;

provare che $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))}{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X$ equivale allora a provare che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot \psi(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X.$$

Si osserva intanto che vale $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_X$.

Infatti, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \psi(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(\varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}_X$, in quanto $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y$ e $(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}$ è lineare e continua essendo $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$ per ipotesi.

In corrispondenza a $\varepsilon = 1$, sia allora $\delta > 0$ (si supponga tale che $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subseteq A$, il che è lecito in quanto $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$), dimodoché $\|\psi(\mathbf{x})\|_X < 1$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Si consideri l'uguaglianza

$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot \psi(\mathbf{x}) = (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, che era stata ottenuta prima per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, e dunque vale a maggior ragione per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, si ricava che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X = \|(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|_X$$

Passando alla norma in X di entrambi i membri e applicando l'assoluta omogeneità al primo membro

$$\geq \left| \|(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))\|_X - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \right|$$

Seconda disuguaglianza triangolare delle norme

$$\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X - \|(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))\|_X$$

$$\implies \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot (1 - \|\psi(\mathbf{x})\|_X) \leq \|(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))\|_X$$

Manipolando il primo e l'ultimo membro della catena di disuguaglianze appena ottenuta

$$\leq \|(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \cdot \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y$$

Per la disuguaglianza fondamentale della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y, X)}$

$$\implies \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot (1 - \|\psi(\mathbf{x})\|_X) \leq \|(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \cdot \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y$$

$$\implies \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X}{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} \leq \frac{\|(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X}{1 - \|\psi(\mathbf{x})\|_X}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\|\psi(\mathbf{x})\|_X$, e dividendo ambo i membri per $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y$, strettamente positivo in quanto $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e f è un omeomorfismo, e per $1 - \|\psi(\mathbf{x})\|_X$, strettamente positivo in quanto $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$

Ciò significa in particolare che

$$\left\| \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot \psi(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} \right\|_X \leq \frac{\|(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X}{1 - \|\psi(\mathbf{x})\|_X} \text{ per ogni } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \setminus \{\mathbf{x}_0\}.$$

Poiché $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|(f'(\mathbf{x}_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X}{1 - \|\psi(\mathbf{x})\|_X} = 0$, segue per confronto che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \left\| \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot \psi(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} \right\|_X = 0, \text{ ossia}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X \cdot \psi(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X, \text{ come si voleva provare.}$$

■