

# 07 - Il Teorema di Hahn-Banach e il Teorema di Separazione

## ⌘ Definizione: Sub-additività, Positiva omogeneità

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  si dice:

- **sub-additiva**, quando  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ;
- **positivamente omogenea**, quando  $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$  e per ogni  $\lambda \geq 0$ .

## Il teorema di Hahn-Banach

### 📄 Lemma 7.1: Lemma di estensione

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale.

Sia  $\mathbf{x}_0 \in E \setminus F$ .

Sia  $G = \text{span}(F \cup \{\mathbf{x}_0\})$ .

Sia  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare.

Sia  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sub-additiva e positivamente omogenea.

Si supponga che  $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ .

Allora, esiste  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi|_F = \varphi$  e  $\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $x \in G$ .

### 🔍 Osservazioni preliminari

1. Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  due insiemi separati, con  $a \leq b$  per ogni  $a \in A$  e per ogni  $b \in B$ .

Allora,  $\sup(A) \leq \inf(B)$ .

2. Si ha  $G = F + \text{span}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{u} + \lambda \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{u} \in F, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , e tale scrittura è unica in quanto

$$F \cap \text{span}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{0}\}.$$

3. Siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , e siano  $h, k \in \mathbb{R}$ .

Sia  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_u + \lambda_u \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{x}_v + \lambda_v \mathbf{x}_0$ ; tali scritture sono uniche per l'osservazione preliminare 2.

Si ha  $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = \underbrace{h\mathbf{x}_u + k\mathbf{x}_v}_{\in F} + \underbrace{(h\lambda_u + k\lambda_v)}_{\in \mathbb{R}} \mathbf{x}_0$ , da cui segue

$\mathbf{x}_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\mathbf{x}_u + k\mathbf{x}_v$  e  $\lambda_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\lambda_u + k\lambda_v$ , sempre per unicità della scrittura degli elementi di  $G$  data dall'osservazione preliminare 2.

### Dimostrazione

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$ .

Per le proprietà di  $\varphi$  ed  $f$ , si ha

$$\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Linearità di  $\varphi$

$$\leq f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Poiché  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in F$  e  $f$  maggiora  $\varphi$  in  $F$

$$= f((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (\mathbf{x}_0 + \mathbf{y})) \leq f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) \quad \text{Per subadditività di } f$$

Dal primo e dall'ultimo membro della catena di disuguaglianze segue allora che  $\varphi(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y})$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$ .

Ciò significa che gli insiemi  $A = \{\varphi(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mid \mathbf{x} \in F\}$  e  $B = \{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in F\}$  sono separati; in particolare, si ha  $\sup(A) \leq \inf(B)$  per l'osservazione preliminare 1.

Sia  $r \in \mathbb{R}$  tale che  $\sup(A) \leq r \leq \inf(B)$ .

Sia  $\mathbf{u} \in G$ ; si ha  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_u + \lambda_u \mathbf{x}_0$  per unici  $\mathbf{x}_u \in F$  e  $\lambda_u \in \mathbb{R}$ , per l'osservazione preliminare 2.

Si definisca allora  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo  $\psi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}_u) + \lambda_u r$  per ogni  $\mathbf{u} \in G$ .

Si provi che  $\psi$  soddisfa le proprietà espresse nella tesi.

Vale  $\psi|_F = \varphi$ ; infatti, per ogni  $\mathbf{u} \in F$  si ha  $\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0\mathbf{x}_0$ , dunque  $\mathbf{x}_u = \mathbf{u}$  e  $\lambda_u = 0$  per unicità della scrittura degli elementi di  $G$ .

$\psi$  è un funzionale lineare; infatti, per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$  e per ogni  $h, k \in \mathbb{R}$ , si ha  $\mathbf{x}_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\mathbf{x}_u + k\mathbf{x}_v$  e  $\lambda_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\lambda_u + k\lambda_v$  per l'osservazione preliminare 3.

Allora,  $\psi(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = \varphi(h\mathbf{x}_u + k\mathbf{x}_v) + (h\lambda_u + k\lambda_v)r$ ; sfruttando la linearità di  $\varphi$  si ottiene  $\psi(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = h(\varphi(\mathbf{x}_u) + \lambda_u r) + k(\varphi(\mathbf{x}_v) + \lambda_v r) = h\psi(\mathbf{u}) + k\psi(\mathbf{v})$ , che mostra la linearità di  $\psi$ .

Resta da provare che  $\psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$  per ogni  $\mathbf{u} \in G$

Sia dunque  $\mathbf{u} \in G$ .

Si può supporre  $\mathbf{u} \notin F$  senza perdere di generalità, in quanto se  $\mathbf{u} \in F$  si ha  $\psi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$  in quanto  $\psi|_F = \varphi$  e  $f$  maggiore  $\varphi$  in  $F$ .

Sia quindi  $\mathbf{u} \in G \setminus F$ ; si ha  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_u + \lambda_u \mathbf{x}_0$ , per unici  $\mathbf{x}_u \in F$  e  $\lambda_u$ .

Essendo  $\mathbf{u} \notin F$ , si ha  $\lambda_u \neq 0$ .

Si supponga  $\lambda_u > 0$ .

Si consideri  $\frac{\mathbf{x}_u}{\lambda_u} \in F$ ; si ha

$$r \leq f\left(\mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{x}_u}{\lambda_u}\right) - \varphi\left(\frac{\mathbf{x}_u}{\lambda_u}\right) \quad \text{Essendo } r \text{ minorante dell'insieme } B \text{ ed essendo } \frac{\mathbf{x}_u}{\lambda_u} \in F$$

$$\implies \lambda_u r \leq f(\mathbf{x}_u + \lambda_u \mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x}_u) \quad \text{Moltiplicando per } \lambda_u \text{ ambo i membri, sfruttando la linearità di } \varphi \text{ e la positiva omogeneità di } f, \text{ essendo } \lambda_u > 0 \text{ nel caso in esame}$$

$$\implies \varphi(\mathbf{x}_u) + \lambda_u r \leq f(\mathbf{x}_u + \lambda_u \mathbf{x}_0)$$

$$\implies \psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u}) \quad \text{Per scrittura di } \mathbf{u} \text{ e per definizione di } \psi$$

Si supponga ora  $\lambda_{\mathbf{u}} < 0$ .

Si consideri  $\frac{\mathbf{x}_{\mathbf{u}}}{-\lambda_{\mathbf{u}}} \in F$ ; si ha

$$\varphi\left(\frac{\mathbf{x}_{\mathbf{u}}}{-\lambda_{\mathbf{u}}}\right) - f\left(\frac{\mathbf{x}_{\mathbf{u}}}{-\lambda_{\mathbf{u}}} - \mathbf{x}_0\right) \leq r \quad \text{Essendo } r \text{ maggiorante dell'insieme } A \text{ ed essendo } \frac{\mathbf{x}_{\mathbf{u}}}{-\lambda_{\mathbf{u}}} \in F$$

$$\implies \varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{u}}) - f(\lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\mathbf{u}}) \leq \lambda_{\mathbf{u}}r \quad \text{Moltiplicando per } \lambda_{\mathbf{u}} \text{ ambo i membri, sfruttando la linearità di } \varphi \text{ e la positiva omogeneità di } f, \text{ essendo } \lambda_{\mathbf{u}} > 0 \text{ nel caso in esame}$$

$$\implies \varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{u}}) + \lambda_{\mathbf{u}}r \leq f(\lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\mathbf{u}})$$

$$\implies \psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u}) \quad \text{Per scrittura di } \mathbf{u} \text{ e per definizione di } \psi$$

■

### Teorema 7.2: Teorema di Hahn-Banach

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale di  $E$

Sia  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare.

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sub-additiva e positivamente omogenea.

Si supponga che  $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ .

Allora, esiste  $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi|_F = \varphi$  e  $\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $x \in E$ .

### Dimostrazione

Si consideri il seguente insieme:

$$\mathcal{S} = \{(G, \eta) \mid G \subseteq E \text{ sottospazio vettoriale di } E : G \supseteq F \\ \eta : G \rightarrow \mathbb{R} \text{ funzionale lineare : } \eta|_F = \varphi \quad \wedge \quad \forall \mathbf{x} \in G, \eta(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})\}$$

.

Si introduca su tale insieme la relazione d'ordine  $\preceq$  definita ponendo

$(G_1, \eta_1) \preceq (G_2, \eta_2)$  quando  $G_1 \subseteq G_2$  e  $\eta_2|_{G_1} = \eta_1$ .

Si provi che l'insieme ordinato  $(\mathcal{S}, \preceq)$  ammette un elemento massimale, tramite il lemma di Zorn.

Intanto,  $\mathcal{S} \neq \emptyset$  in quanto  $(F, \varphi) \in \mathcal{S}$ .

Sia  $\mathcal{C} = \{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{S}$  una catena in  $\mathcal{S}$ ; si mostri che essa ammette maggiorante in  $\mathcal{S}$ .

Sia  $G = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} G_i$ , e si definisca  $\eta : G \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo, per ogni  $\mathbf{u} \in G$ ,  $\eta(\mathbf{u}) = \eta_i(\mathbf{u})$ , con  $i \in \mathcal{I}$  tale che  $\mathbf{u} \in G_i$ .

Si mostri che  $(G, \eta) \in \mathcal{S}$ .

### Osservazione preliminare

Per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , esiste  $i \in \mathcal{I}$  tale che  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ .

Infatti, essendo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$  si ha  $\mathbf{u} \in G_{i_1}$  e  $\mathbf{v} \in G_{i_2}$  per qualche  $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$ .

Essendo  $\{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  una catena, essa è totalmente ordinata rispetto a  $\preceq$ , per cui si ha  $G_{i_1} \subseteq G_{i_2}$  oppure  $G_{i_2} \subseteq G_{i_1}$ , da cui seguono rispettivamente  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_{i_1}$  oppure  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_{i_2}$ .

Fatta questa osservazione, si proceda con la dimostrazione.

Per quanto concerne  $G$  si ha evidentemente  $F \subseteq G \subseteq E$ ;

$G$  è un sottospazio vettoriale di  $E$ . Infatti, fissati  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , sia  $i \in \mathcal{I}$  per cui  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ , che esiste per l'osservazione preliminare; ne viene che  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in G_i \subseteq G$  essendo  $G_i$  uno spazio vettoriale.

Per quanto concerne  $\eta$ , essa è intanto ben definita.

Infatti, sia  $\mathbf{u} \in G$ , e siano  $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$  tali che  $\mathbf{u} \in G_{i_1}$  e  $\mathbf{u} \in G_{i_2}$ ;

essendo  $\{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  una catena, essa è totalmente ordinata rispetto a  $\preceq$ , per cui si ha  $G_{i_1} \subseteq G_{i_2}$  e  $\eta_{i_2}|_{G_{i_1}} = \eta_{i_1}$ , oppure  $G_{i_2} \subseteq G_{i_1}$  e  $\eta_{i_1}|_{G_{i_2}} = \eta_{i_2}$ .

In entrambi i casi, si ha allora che  $\eta_{i_1}(\mathbf{u}) = \eta_{i_2}(\mathbf{u})$ .

$\eta$  è un funzionale lineare.

Siano infatti  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , e siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;

sia  $i \in \mathcal{I}$  per cui  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ , che esiste per l'osservazione preliminare.

Allora,  $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in G_i$ ; si ha allora

$$\begin{aligned} \eta(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) &= \eta_i(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) && \text{Essendo } \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in G_i \\ &= \lambda \eta_i(\mathbf{u}) + \mu \eta_i(\mathbf{v}) && \text{Essendo } \eta_i \text{ lineare} \\ &= \lambda \eta(\mathbf{u}) + \mu \eta(\mathbf{v}) && \text{Essendo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i \end{aligned}$$

La proprietà  $\eta|_F = \varphi$  è immediata;

essa segue infatti dal fatto che, fissato  $\mathbf{u} \in F$  e fissato un qualunque  $i \in \mathcal{I}$ , si ha  $\eta(\mathbf{u}) = \eta_i(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u})$ , per definizione di  $\eta$  essendo  $F \subseteq G_i$  per costruzione, e per costruzione di  $\eta_i$ .

Altrettanto immediata risulta la disuguaglianza  $\eta(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in G$ .

Infatti, fissato  $\mathbf{x} \in G$  e fissato  $i \in \mathcal{I}$  tale che  $\mathbf{x} \in G_i$ , si ha  $\eta(\mathbf{x}) = \eta_i(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per definizione di  $\eta$  e per costruzione di  $\eta_i$ .

Dunque,  $(G, \eta) \in \mathcal{S}$ , per cui le ipotesi del lemma di Zorn sono verificate.

Allora,  $\mathcal{S}$  ammette un elemento massimale  $(H, \psi)$ .

Per concludere la dimostrazione, resta da provare che  $H = E$ ; fatto questo, la tesi è acquisita dal momento che  $\psi$  soddisfa le proprietà da essa richieste per definizione di  $\mathcal{S}$ .

Si proceda per assurdo, supponendo quindi  $H \subsetneq E$ ; esiste quindi  $\mathbf{x}_0 \in E \setminus H$ .

Allora, per il [Lemma 7.1], posto  $\tilde{H} = \text{span}(H, \mathbf{x}_0) \supsetneq H$  si ha che esiste  $\tilde{\psi} : \tilde{H} \rightarrow \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\tilde{\psi}|_H = \psi$  e  $\tilde{\psi}(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in \tilde{H}$ .

Ma allora, da ciò seguirebbe che  $(\tilde{H}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{S}$  e che  $(\tilde{H}, \tilde{\psi}) \succneq (H, \psi)$ , contro la massimalità di  $(H, \psi)$ .

Dunque,  $H = E$ .



## Corollari del teorema di Hahn-Banach

📄 **Proposizione 7.3: Estensione di un funzionale lineare continuo ad un funzionale lineare continuo avente stessa norma**

Sia  $(E, \|\cdot\|_E)$  uno spazio normato.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale di  $E$ .

Sia  $\varphi \in F^*$ .

Allora, esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\psi|_F = \varphi$  e  $\|\psi\|_{E^*} = \|\varphi\|_{F^*}$ .

### 📄 Dimostrazione

Se  $\varphi = \mathbf{0}_{F^*}$ , la tesi è acquisita immediatamente con  $\psi = \mathbf{0}_{E^*}$ , che soddisfa le proprietà richieste.

Si supponga ora  $\varphi \neq \mathbf{0}_{F^*}$ .

Poiché  $\varphi \in F^*$ , per la disuguaglianza fondamentale della norma  $\|\cdot\|_{F^*}$  ([Proposizione 6.6]) si ha  $|\varphi(\mathbf{x})| \leq \|\varphi\|_{F^*} \|\mathbf{x}\|_E$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ .

Si definisca  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo  $f(\mathbf{x}) = \|\varphi\|_{F^*} \|\mathbf{x}\|_E$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Essendo  $\varphi \neq \mathbf{0}_{F^*}$ , si ha  $\|\varphi\|_{F^*} \neq 0$ , per cui  $f$  è una norma su  $E$ ;  
 inoltre, si ha  $|\varphi(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ , per quanto osservato prima.

Per il [Teorema 7.2], esiste allora  $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi|_F = \varphi$  e  
 $|\psi(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Si provi che  $\psi$  è continua e che  $\|\psi\|_{E^*} = \|\varphi\|_{F^*}$ , così da acquisire la tesi.

La continuità di  $\psi$  segue subito dalla [Proposizione 6.4], in quanto per ogni  $\mathbf{x} \in E$  vale  $|\psi(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{x}) = \|\varphi\|_{F^*} \|\mathbf{x}\|_E$ .

L'uguaglianza tra le norme segue dalle due seguenti osservazioni:

- Per ogni  $\mathbf{x} \in E$  con  $\|\mathbf{x}\| = 1$  si ha  $|\psi(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{x}) = \|\varphi\|_{F^*} \|\mathbf{x}\|_E = \|\varphi\|_{F^*}$ ;

ne segue che  $\|\psi\|_{E^*} \leq \|\varphi\|_{F^*}$  per definizione di  $\|\cdot\|_{E^*}$  quale  $\rho_1$ .

- Poiché  $\psi|_F = \varphi$ , si ha  $\|\varphi\|_{F^*} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} |\varphi(\mathbf{x})| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in F \\ \|\mathbf{x}\|=1}} |\psi(\mathbf{x})| \leq \sup_{\substack{\mathbf{x} \in E \\ \|\mathbf{x}\|=1}} |\psi(\mathbf{x})| = \|\psi\|_{E^*}$ .

Pertanto si ha  $\|\psi\|_{E^*} \leq \|\varphi\|_{F^*} \leq \|\psi\|_{E^*}$ , cioè  $\|\psi\|_{E^*} = \|\varphi\|_{F^*}$ .

■

**Proposizione 7.4:** Esistenza di un funzionale lineare continuo di norma unitaria che in un punto ha come valore la sua norma

Sia  $(E, \|\cdot\|_E)$  uno spazio normato.

Sia  $\mathbf{x}_0 \in E$ .

Esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\psi(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_0\|_E$  e  $\|\psi\|_{E^*} = 1$ .



### Dimostrazione

Se  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , si ha  $\|\mathbf{x}_0\|_E = 0$ .

Sia  $\varphi \in E^* \setminus \{\mathbf{0}_{E^*}\}$ ; si ha  $\varphi(\mathbf{x}_0) = 0$  per linearità di  $\varphi$ , e si ha  $\|\varphi\|_{E^*} \neq 0$ .

La tesi è allora acquisita con  $\psi = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{E^*}}$ , che soddisfa le proprietà richieste.

Si supponga ora  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ .

Sia  $F = \text{span}(\mathbf{x}_0) = \{\lambda \mathbf{x}_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Si definisca  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda \|\mathbf{x}_0\|_E$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Evidentemente,  $\varphi$  è lineare; la definizione stessa di  $\varphi$  ne implica la continuità per la [Proposizione 6.4]. Dunque,  $\varphi \in F^*$ .

Allora, per la [Proposizione 7.3] esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\psi|_F = \varphi$ , ossia  $\psi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda \|\mathbf{x}_0\|_E$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e anche  $\|\psi\|_{E^*} = \|\varphi\|_{F^*}$ .

Dalla prima proprietà per  $\lambda = 1$ , si ha  $\psi(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_0\|_E$ ;

resta da verificare che  $\|\psi\|_{E^*} = 1$ , ossia  $\|\varphi\|_{F^*} = 1$  in quanto le due norme coincidono per la seconda proprietà.

Per definizione di  $\|\varphi\|_{F^*}$  come  $\rho_1$ , si ottiene

$$\|\varphi\|_{F^*} = \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \|\lambda \mathbf{x}_0\|_E = 1}} |\varphi(\lambda \mathbf{x}_0)| = \sup_{|\lambda| = \frac{1}{\|\mathbf{x}_0\|_E}} |\lambda \|\mathbf{x}_0\|_E| = \sup_{|\lambda| = \frac{1}{\|\mathbf{x}_0\|_E}} |\lambda| \|\mathbf{x}_0\|_E = 1.$$

■

### Corollario 7.5: Valutazione identica sullo spazio duale

Sia  $(E, \|\cdot\|_E)$  uno spazio normato.

Sia  $\mathbf{x}_0 \in E$ .

Si hanno i seguenti fatti:

- Se  $\mathbf{x} \in E$  è tale che  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$  per ogni  $\varphi \in X^*$ , allora  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- Se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$  sono tali che  $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$  per ogni  $\varphi \in X^*$ , allora  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

#### Dimostrazione

Sia  $\mathbf{x} \in E$  tale che  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$  per ogni  $\varphi \in X^*$ .

Per la [Proposizione 7.4], esiste  $\psi \in X^*$  tale che  $\psi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ ;

d'altra parte, per ipotesi si ha  $\psi(\mathbf{x}) = 0$ .

Ne segue che  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Il primo punto è dunque acquisito;

il secondo segue direttamente dal fatto che, dati  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$  sono tali che  $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$  per ogni  $\varphi \in X^*$ , si ha  $\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$  per ogni  $\varphi \in X^*$ , per linearità di tali funzionali.

Dunque, per il punto precedente, si ha  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ , cioè  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .



## Il funzionale di Minkowski

### Premesse

⌘ Definizione: Insiemi convessi e stellati

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Sia  $A \subseteq E$ .

$A$  si dice convesso quando, per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  e per ogni  $\lambda \in [0; 1]$ , vale  $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in A$ .

Equivalentemente,

$A$  è convesso quando, per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  e per ogni  $\lambda, \mu \geq 0$  tali che  $\lambda + \mu = 1$ , vale  $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in A$ .

$A$  si dice stellato rispetto a un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  quando, per ogni  $\mathbf{x} \in A$  e per ogni  $\lambda \in [0; 1]$ , vale  $\lambda\mathbf{x}_0 + (1 - \lambda)\mathbf{x} \in A$ .

Equivalentemente,

$A$  è stellato rispetto a  $\mathbf{x}_0 \in A$  quando, per ogni  $\mathbf{x} \in A$  e per ogni  $\lambda, \mu \geq 0$  tali che  $\lambda + \mu = 1$ , vale  $\lambda\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{x} \in A$ .

#### Q Osservazione

$A$  è convesso se e solo se è stellato rispetto a ogni suo punto.

#### Q Osservazione: Sottospazi vettoriali sono convessi

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale di  $E$ .

Allora,  $F$  è convesso.

Infatti, per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$  e per ogni  $\lambda \in [0; 1]$  si ha  $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in F$  per chiusura rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalari.

### Q Osservazione 2: Chiusura di un insieme convesso è convessa

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $A \subseteq E$  convesso.

Allora,  $\overline{A}$  è convesso.

Infatti, siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{A}$ , e sia  $\lambda \in [0; 1]$ .

Siano  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  e  $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  due successioni in  $A$ , convergenti rispettivamente a  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Allora, la successione  $\{\lambda\mathbf{x}_n + (1 - \lambda)\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è contenuta in  $A$  per convessità di  $A$ , e converge a  $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ , che dunque appartiene a  $\overline{A}$ .

### 📄 Proposizione 7.6: Criterio di continuità delle funzioni sub-additive che si annullano nello zero

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sub-additiva, tale che  $f(\mathbf{0}) = 0$ .

$f$  è continua in  $E$  se e solo se  $f$  è continua in  $\mathbf{0}$ .

#### 📄 Dimostrazione

Se  $f$  è continua in  $E$ , chiaramente  $f$  è continua in  $\mathbf{0}$ .

Viceversa, si supponga  $f$  continua in  $\mathbf{0}$ ;

si fissi  $\mathbf{x}_0 \in E$ , e si provi la continuità di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ .

Si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Per continuità di  $f$  in  $\mathbf{0}$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $\mathbf{x} \in E$  con  $\|\mathbf{x}\| < \delta$ , si abbia  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})| < \varepsilon$ , ossia  $|f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ , in quanto  $f(\mathbf{0}) = 0$  per ipotesi.

Sia  $\mathbf{x}' \in X$  con  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ; si provi che  $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ .

Per costruzione di  $\delta$ , si ha  $|f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ .

Per subadditività di  $f$ , si ha  $f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)) \leq f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)$ , da cui segue che  $f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) \leq |f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ .

D'altra parte, essendo  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\| < \delta$ , si ha anche  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'\| < \delta$ .

Per costruzione di  $\delta$ , si ha allora  $|f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}')| < \varepsilon$ .

Per subadditività di  $f$ , si ha  $f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}' + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}')) \leq f(\mathbf{x}') + f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}')$ , da cui segue che  $f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}') \leq f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}') \leq |f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}')| < \varepsilon$ .

Allora, si ha  $f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}_0) < \varepsilon$  e  $f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}') < \varepsilon$ , da cui  $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ , come si voleva provare.

La continuità di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  è dunque acquisita.

■

### ⌘ Definizione: Funzionale di Minkowski

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $V$  un intorno di  $\mathbf{0}$ .

Si dice funzionale di Minkowski associata a  $V$  la funzione  $\varphi_V : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definita ponendo

$$p_V(\mathbf{x}) = \inf\{\lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda V\}.$$

### Q Osservazione

$p_V$  è ben definita, cioè  $0 \leq \inf\{\lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda V\} < +\infty$ .

Il fatto che  $\inf\{\lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda V\} \geq 0$  segue direttamente da come è definito l'insieme.

Si provi  $\inf\{\lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda V\} < +\infty$ , ossia  $\{\lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda V\} \neq \emptyset$ .

Se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  si ha  $\mathbf{0} \in \lambda V$  per ogni  $\lambda > 0$ .

Si supponga allora  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

Essendo  $V$  un intorno di  $\mathbf{0}$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $B(\mathbf{0}, \delta) \subseteq V$ .

Allora, si ha  $\frac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|} \in B(\mathbf{0}, \delta) \subseteq V$ , dunque  $\mathbf{x} \in \frac{2\|\mathbf{x}\|}{\delta} V$ .

Segue che  $\frac{2\|\mathbf{x}\|}{\delta} \in \{\lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda V\}$ .

### ≡ Proprietà del funzionale di Minkowski

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $V$  un intorno di  $\mathbf{0}$ .

Sia  $p_V$  il funzionale di Minkowski associato a  $V$ .

Esso soddisfa le seguenti proprietà:

- $p_V(\mathbf{0}) = 0$ .  
Infatti,  $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0} \in V$  per ogni  $\lambda > 0$ .
- $p_V$  è positivamente omogenea.  
Infatti, si fissi  $k \geq 0$ . Se  $k = 0$ , per la proprietà precedente si ha  $p_V(0\mathbf{x}) = 0 = 0 p_V(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Si supponga quindi  $k > 0$ , e sia  $\mathbf{x} \in E$ .

Sia  $\lambda > 0$  tale che  $\mathbf{x} \in \lambda V$ ; allora,  $k\mathbf{x} \in k\lambda V$ , per cui  $p_V(k\mathbf{x}) \leq k\lambda$ . Per arbitrarietà di  $\lambda$ , segue  $p_V(k\mathbf{x}) \leq k p_V(\mathbf{x})$ .

Sia  $\mu > 0$  tale che  $k\mathbf{x} \in \mu V$ ; allora,  $\mathbf{x} \in \frac{\mu}{k} V$ , per cui  $p_V(\mathbf{x}) \leq \frac{\mu}{k}$ , ossia  $\mu \geq k p_V(\mathbf{x})$ . Per arbitrarietà di  $\mu$ , segue  $p_V(k\mathbf{x}) \geq k p_V(\mathbf{x})$ .

- Si ha  $V \subseteq p_V^{-1}([0; 1])$ .

Infatti, per ogni  $\mathbf{x} \in V$  si ha che  $1 \in \{\lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda V\}$ , per cui  $p_V(\mathbf{x}) \leq 1$ .

- Se  $V$  è stellato rispetto a  $\mathbf{0}$ , si ha  $p_V^{-1}([0; 1]) \subseteq V$ .

Infatti, sia  $\mathbf{x} \in p_V^{-1}([0; 1])$ .

Esiste allora  $\lambda \in ]0; 1]$  tale che  $\mathbf{x} \in \lambda V$ ; dunque,  $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} \in V$ .

Essendo  $\frac{1}{\lambda} \geq 1$ ,  $\mathbf{x}$  appartiene al segmento di estremi  $\mathbf{0}$  e  $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$ ; essendo  $V$  stellato rispetto a  $\mathbf{0}$  e  $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} \in V$ , segue dunque  $\mathbf{x} \in V$ .

- Se  $V$  è convesso,  $p_V$  è sub-additiva.

Siano infatti  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ; sia  $\varepsilon > 0$ .

Applicando la seconda proprietà dell'estremo inferiore a  $p_V$ , esiste  $\lambda > 0$  tale che  $\mathbf{x} \in \lambda V$  e  $\lambda < p_V(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon}{2}$ ;

analogamente, esiste  $\mu > 0$  tale che  $\mathbf{y} \in \mu V$  e  $\mu < p_V(\mathbf{y}) + \frac{\varepsilon}{2}$ .

Sommando membro a membro si ottiene  $\lambda + \mu < p_V(\mathbf{x}) + p_V(\mathbf{y}) + \varepsilon$ .

Si ha l'identità  $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{\mathbf{x}}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{\mathbf{y}}{\mu}$ .

Essendo  $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \frac{\mu}{\lambda+\mu} > 0$  e  $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1$ , ne segue che  $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\lambda+\mu}$  appartiene al segmento di estremi  $\frac{\mathbf{x}}{\lambda}$  e  $\frac{\mathbf{y}}{\mu}$ .

Essendo  $\frac{\mathbf{x}}{\lambda}, \frac{\mathbf{y}}{\mu} \in V$  per costruzione di  $\lambda$  e  $\mu$  ed essendo  $V$  convesso per ipotesi, si ha allora  $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\lambda+\mu} \in V$ , ossia

$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in (\lambda + \mu)V$ .

Allora,  $p_V(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \lambda + \mu$  per definizione di  $p_V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ; d'altra parte, era stato ricavato che  $\lambda + \mu < p_V(\mathbf{x}) + p_V(\mathbf{y}) + \varepsilon$ .

Pertanto,  $p_V(\mathbf{x} + \mathbf{y}) < p_V(\mathbf{x}) + p_V(\mathbf{y}) + \varepsilon$ ; segue  $p_V(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq p_V(\mathbf{x}) + p_V(\mathbf{y})$  per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ .

- $p_V$  è continua in  $\mathbf{0}$ .

Infatti, si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Si consideri l'insieme  $\frac{\varepsilon}{2}V$ , che è un intorno di  $\mathbf{0}$  essendolo  $V$ ;

esiste allora  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $\mathbf{x} \in E$  con  $\|\mathbf{x}\| < \delta$ , vale  $\mathbf{x} \in \frac{\varepsilon}{2}V$ .

Pertanto, per ogni  $\mathbf{x} \in E$  con  $\|\mathbf{x}\| < \delta$ , vale  $\mathbf{x} \in \frac{\varepsilon}{2}V$ , dunque  $p_V(\mathbf{x}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  per definizione di  $p_V$ .

Ne segue che, per ogni  $\mathbf{x} \in E$ , vale  $p_V(\mathbf{x}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , ossia  $|p_V(\mathbf{x})| < \varepsilon$  per nonnegatività di  $p_V$ .

- Se  $V$  è convesso,  $p_V$  è continua.  
 Infatti,  $p_V$  è continua in  $\mathbf{0}$  e sub-additiva essendo  $V$  convesso.  
 Segue la continuità in tutto  $E$  dalla [Proposizione 7.6].

**Proposizione 7.7: Esistenza di un funzionale lineare continuo con estremo inferiore positivo su un convesso la cui chiusura non possiede lo zero**

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $A \subseteq E$  convesso e tale che  $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$  e  $\mathbf{0} \notin \overline{A}$ .

Allora, esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\inf_{\mathbf{y} \in A} \psi(\mathbf{y}) > 0$ .

**Q Osservazioni preliminari**

Fissati  $\mathbf{x}_0 \in E$ , la funzione  $g : E \rightarrow E; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$  è un omeomorfismo.

Ne segue che  $(g(A))^\circ = g(\overset{\circ}{A})$  e  $\overline{g(A)} = g(\overline{A})$  per ogni  $A \subseteq E$ .

Inoltre,  $g$  preserva la convessità, ossia  $g(A)$  è convesso per ogni  $A \subseteq E$  convesso.

**Dimostrazione**

Sia  $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$ , che esiste per ipotesi.

Sia  $V = \mathbf{x}_0 - A = \{\mathbf{x}_0 - \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in A\}$ .

Dalle osservazioni preliminari segue che  $\mathbf{0} \in \mathbf{x}_0 - \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{V}$ , cioè  $V$  è un intorno di  $\mathbf{0}$ , ed inoltre è convesso essendo  $A$  convesso per ipotesi.



Allora,  $p_V$  è una funzione positivamente omogenea e sub-additiva, essendo associata a un intorno convesso di  $\mathbf{0}$ .

Sia  $F = \text{span}(\mathbf{x}_0) = \{\lambda \mathbf{x}_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Si definisca la funzione  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda p_V(\mathbf{x}_0)$ ;  
questa è evidentemente un funzionale lineare continuo, ossia  $\varphi \in F^*$ .

Si ha  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) \leq p_V(\lambda \mathbf{x}_0)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;

infatti, per  $\lambda < 0$  si ottiene la catena  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda p_V(\mathbf{x}_0) \leq 0 \leq p_V(\lambda \mathbf{x}_0)$ , sfruttando la nonnegatività di  $p_V$ .

Per  $\lambda \geq 0$  si ha  $\varphi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda p_V(\mathbf{x}_0) = p_V(\lambda \mathbf{x}_0)$ , sfruttando la positiva omogeneità di  $p_V$ .

Allora, per il [Teorema 7.2] esiste  $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi|_F = \varphi$ , ossia  $\psi(\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda p_V(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e tale che  $\psi(\mathbf{x}) \leq p_V(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Per acquisire la tesi, si provi che  $\psi$  è continua, dimodoché  $\psi \in E^*$ , e che  $\inf_{\mathbf{y} \in A} \psi(\mathbf{y}) > 0$ .

Si provi dapprima la continuità di  $\psi$ , mostrando che  $\psi$  è continua in  $\mathbf{0}$ .

Sia  $\mathbf{x} \in E$ ; si ha che  $\psi(\mathbf{x}) \leq p_V(\mathbf{x})$  per costruzione di  $\psi$ ;

sfruttando anche la linearità di  $\psi$  si ottiene inoltre  $-\psi(\mathbf{x}) = \psi(-\mathbf{x}) \leq p_V(-\mathbf{x})$ .

Allora,  $(0 \leq) |\psi(\mathbf{x})| \leq \max\{p_V(\mathbf{x}), p_V(-\mathbf{x})\}$ .

Essendo  $\mathbf{x} \mapsto p_V(\mathbf{x})$  continua in  $\mathbf{0}$ , è continua in  $\mathbf{0}$  anche  $\mathbf{x} \mapsto p_V(-\mathbf{x})$ ;

inoltre, essendo il massimo tra due funzioni continue in uno stesso punto anch'essa continua in tale punto, si deduce che anche  $\max\{p_V(\mathbf{x}), p_V(-\mathbf{x})\}$  è continua in  $\mathbf{0}$ ;

segue per confronto che  $\psi$  è continua in  $\mathbf{0}$ , dunque in tutto  $E$ .

Resta da provare che  $\inf_{\mathbf{y} \in A} \psi(\mathbf{y}) > 0$ .

Si osserva intanto che, per ogni  $\mathbf{y} \in A$ , vale  $\psi(\mathbf{y}) \geq p_V(\mathbf{x}_0) - 1$ .

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
p_V(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{y}) &= \psi(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{y}) && \text{In quanto } \mathbf{x}_0 \in F \text{ e } \psi(\mathbf{x}_0) = 1 \\
&= \psi(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) && \text{Per linearità di } \psi \\
&\leq p_V(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) && \text{Poiché } \psi(\mathbf{x}) \leq p_V(\mathbf{x}) \text{ per ogni } \mathbf{x} \in E \\
&\leq 1 && \text{Segue dalla definizione di } p_V, \text{ in quanto } \mathbf{x}_0 - \mathbf{y} \in \mathbf{x}_0 - A = V
\end{aligned}$$

Dal primo e dall'ultimo membro della catena segue proprio  $\psi(\mathbf{y}) \geq p_V(\mathbf{x}_0) - 1$ , per ogni  $\mathbf{y} \in A$

Dunque, si ha  $\inf_{\mathbf{y} \in A} \psi(\mathbf{y}) \geq p_V(\mathbf{x}_0) - 1$ .

Per acquisire la tesi, si vuole mostrare che  $p_V(\mathbf{x}_0) - 1 > 0$ , ossia  $p_V(\mathbf{x}_0) > 1$ .

Per l'osservazione preliminare, si ha  $\bar{V} = \mathbf{x}_0 - \bar{A}$ .

Poiché  $\mathbf{0} \notin \bar{A}$ , ne segue che  $\mathbf{x}_0 \notin \bar{V}$ .

Allora, esiste  $\delta > 0$  tale che  $B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap V = \emptyset$ .

Sia  $\bar{\lambda} = 1 + \frac{\delta}{2\|\mathbf{x}_0\|}$ ; chiaramente,  $\bar{\lambda} > 1$ .

si ha  $\bar{\lambda}\mathbf{x}_0 \notin V$ .

Infatti, si ha  $d(\bar{\lambda}\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = \|\bar{\lambda}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0\| = \frac{\delta}{2\|\mathbf{x}_0\|} \|\mathbf{x}_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ , pertanto  $\bar{\lambda}\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$  e dunque  $\bar{\lambda}\mathbf{x}_0 \notin V$  per costruzione di  $\delta$ .

Allora, si ha a maggior ragione  $\lambda\mathbf{x}_0 \notin V$  per ogni  $\lambda$  tale che  $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}$ , per cui  $p_V(\mathbf{x}_0) \geq \bar{\lambda} > 1$ , come volevasi mostrare.

■

## Il teorema di separazione

📄 **Proposizione 7.8:** Somma e ridimensionamento preservano la convessità

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Siano  $A, B \subseteq E$  convessi.

Siano  $h, k \in \mathbb{R}$ .

Allora, anche  $hA + kB$  è convesso.

#### Dimostrazione

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in hA + kB$ ;

si ha  $\mathbf{x} = h\mathbf{a}_1 + k\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{y} = h\mathbf{a}_2 + k\mathbf{b}_2$ , con  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in A$  e  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in B$ .

Fissato  $\lambda \in [0; 1]$ , si ricava che  $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} = h(\lambda\mathbf{a}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{a}_2) + k(\lambda\mathbf{b}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{b}_2)$ .

Essendo  $\lambda\mathbf{a}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{a}_2 \in A$  per convessità di  $A$  e  $\lambda\mathbf{b}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{b}_2 \in B$  per convessità di  $B$ , ne segue che  $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in hA + kB$ .

■

#### **Proposizione 7.9:** Somma di un chiuso e di un compatto in uno spazio normato è chiusa

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $C \subseteq E$  chiuso.

Sia  $K \subseteq E$  compatto.

Allora,  $C + K$  è chiuso.

#### Dimostrazione

Sia  $\mathbf{u} \in \overline{C + K}$ ; per acquisire la tesi si provi che  $\mathbf{u} \in C + K$ .

Essendo  $\mathbf{u} \in \overline{C + K}$ , esistono due successioni  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  e  $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$  tali che  $\mathbf{u} = \lim_n \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n$ .

Essendo  $K$  compatto, dunque sequenzialmente compatto, la successione  $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$  ammette un'estratta  $\{\mathbf{y}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tale che  $\lim_k \mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{y} \in K$ .

Ne segue che,  $\lim_k \mathbf{x}_{n_k} = \lim_k (\mathbf{x}_{n_k} + \mathbf{y}_{n_k}) - \mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{u} - \mathbf{y}$ ;

essendo  $C$  chiuso e  $\{\mathbf{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$  convergente a  $\mathbf{u} - \mathbf{y}$ , ne segue che  $\mathbf{u} - \mathbf{y} \in C$ .

Allora,  $\mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{u} - \mathbf{y})}_{\in C} + \underbrace{\mathbf{y}}_{\in K} \in C + K$ .

■

### Q Osservazione

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Siano  $C, D \subseteq E$  chiusi.

Generalmente,  $C + D$  non è chiuso.

Ad esempio, nello spazio euclideo  $\mathbb{R}$ , si considerino gli insiemi  $C = \mathbb{Z}$  e  $D = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Essi sono chiusi in quanto discreti.

Tuttavia,  $C + D$  non è chiuso.

Infatti,  $0$  è un punto di accumulazione per  $C + D$  in quanto, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha  $\frac{1}{n} = \underbrace{-n}_{\in C} + \underbrace{(n + \frac{1}{n})}_{\in D} \in C + D$ ;

Ma  $\mathbf{0} \notin C + D$  in quanto, se esistessero  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$  tali che  $\mathbf{0} = m + n + \frac{1}{n}$ , si avrebbe  $\mathbb{Z} \ni m + n = -\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$ , il che è contraddittorio.

### Teorema 7.10: Teorema di Separazione

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $C \subseteq E$  chiuso e convesso.

Sia  $K \subseteq E$  compatto e convesso.

Si supponga  $C \cap K = \emptyset$ .

Allora, esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\sup_{\mathbf{y} \in C} \psi(\mathbf{y}) < \inf_{\mathbf{z} \in K} \psi(\mathbf{z})$ .

#### Dimostrazione

Si consideri l'insieme  $K - C$ ; esso è convesso per la [Proposizione 7.8], e chiuso per la [Proposizione 7.9].

Inoltre,  $\mathbf{0} \notin K - C$ ;

infatti, se fosse  $\mathbf{0} \in K - C$ , si avrebbe  $\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  con  $\mathbf{x} \in K$  e  $\mathbf{y} \in C$ , e dunque  $K \ni \mathbf{x} = \mathbf{y} \in C$ , contro il fatto che  $K \cap C = \emptyset$ .

Essendo allora  $K - C$  chiuso e  $\mathbf{0} \notin K - C$ , esiste  $r > 0$  tale che  $B(\mathbf{0}, r) \cap (K - C) = \emptyset$ .

Si ponga ora  $A = K - C + B(\mathbf{0}, \frac{r}{2})$ ; esso è convesso per la [Proposizione 7.8].

Inoltre,  $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ .

Infatti, per ogni  $\mathbf{x} \in K - C$  si ha  $B(\mathbf{x}, \frac{r}{2}) = \mathbf{x} + B(\mathbf{0}, \frac{r}{2}) \in K - C + B(\mathbf{0}, \frac{r}{2}) = A$ .

Infine,  $\mathbf{0} \notin \overline{A}$ .

Infatti, per ogni  $\mathbf{x} \in C$ , per ogni  $\mathbf{y} \in K$  e per ogni  $\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, \delta)$  si ha

$$\begin{aligned} d(\mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{z}) &\geq d(\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{0}, \mathbf{z}) && \text{Disuguaglianza triangolare} \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| - \|\mathbf{z}\| && \text{Definizione di } d, \text{ metrica indotta dalla norma } \|\cdot\| \\ &\geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} && \begin{array}{l} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq r \text{ in quanto } \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K - C \text{ e } B(\mathbf{0}, r) \cap (K - C) = \emptyset \\ \|\mathbf{z}\| < \delta \text{ in quanto } \mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, \delta) \end{array} \end{aligned}$$

Dunque si ha  $d(\mathbf{0}, A) \geq \frac{r}{2}$ , per cui  $B(\mathbf{0}, \frac{r}{2}) \cap A = \emptyset$ , quindi  $\mathbf{0} \notin \overline{A}$ .

Pertanto, per la [Proposizione 7.7] esiste  $\psi \in E^*$  tale che  $\inf_{\mathbf{x} \in A} \psi(\mathbf{x}) = m > 0$ .

Si provi che  $\sup_{\mathbf{y} \in C} \psi(\mathbf{y}) < \inf_{\mathbf{z} \in K} \psi(\mathbf{z})$ .

Si fissino  $\mathbf{y} \in C$  e  $\mathbf{z} \in K$ ;

vale  $\mathbf{z} - \mathbf{y} \in A$ , per cui  $\psi(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \geq m$ , ossia  $\psi(\mathbf{z}) - \psi(\mathbf{y}) \geq m$  per linearità di  $\psi$ .

Dunque, si ha  $\psi(\mathbf{z}) \geq \psi(\mathbf{y}) + m$  per ogni  $\mathbf{y} \in C, \mathbf{z} \in K$ ;

allora, gli insiemi  $\{\psi(\mathbf{z}) \mid \mathbf{z} \in K\}$  e  $\{\psi(\mathbf{y}) + m \mid \mathbf{y} \in C\}$  sono separati, e per come è diretta la disuguaglianza si deduce quindi che

$$\inf_{\mathbf{z} \in K} \psi(\mathbf{z}) \geq \sup_{\mathbf{y} \in C} (\psi(\mathbf{y}) + m) = \left( \sup_{\mathbf{y} \in C} \psi(\mathbf{y}) \right) + m > \sup_{\mathbf{y} \in C} \psi(\mathbf{y}).$$

■