Proposizione 27.1: Caratterizzazione della continuità di funzioni uniformemente Lipschitziane

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Sia $f : I \times X \to X$ una funzione;
si supponga che esista una funzione $L : I \to \mathbb{R}_0^+$ continua, tale che
$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| \leq L(t) \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, per ogni $t \in I$ e per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.
Sia $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times X$.

Sono equivalenti le due affermazioni:

- f è continua;
- $f(\cdot, \mathbf{x})$ è continua per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Dimostrazione

Che la continuità di f implichi la continuità di $f(\cdot, \mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in X$ è evidente.

Si supponga ora che $f(\cdot, \mathbf{x})$ sia continua per ogni $\mathbf{x} \in X$;
fissato $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times X$, si mostri la continuità di f in $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Per ogni $(t, \mathbf{x}) \in I \times X$, si ha

$$
\begin{aligned}
&\|f(t, \mathbf{x}) - f(t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}_0) + f(t, \mathbf{x}_0) - f(t_0, \mathbf{x}_0)\| \\
&\leq \|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}_0)\| + \|f(t, \mathbf{x}_0) - f(t_0, \mathbf{x}_0)\| && \text{Per sub-additività delle norme} \\
&\leq L(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|f(t, \mathbf{x}_0) - f(t_0, \mathbf{x}_0)\|. && \text{Per ipotesi su } L
\end{aligned}
$$

$$\lim_{(t,\mathbf{x})\to(t_0,\mathbf{x}_0)} L(t)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| = L(t_0)\cdot 0 = 0$$ per continuità della norma e di L;

$$\lim_{(t,\mathbf{x})\to(t_0,\mathbf{x}_0)} \|f(t,\mathbf{x}_0)-f(t_0,\mathbf{x}_0)\| = 0$$ per ipotesi di continuità di $f(\cdot,\mathbf{x}_0)$.

Segue per confronto dei limiti che $\lim_{(t,\mathbf{x})\to(t_0,\mathbf{x}_0)} \|f(t,\mathbf{x})-f(t_0,\mathbf{x}_0)\| = 0$, ossia f è continua in $(t_0,\mathbf{x}_0)$.

■

Teorema 27.2: Esistenza e unicità della soluzione a un sistema numerabile di equazioni differenziali

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ una successione crescente.
Sia $\{g_n : [a;b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue, tale che:

- $g_n(t,0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in [a;b]$;
- Le g_n siano equi-continue in $(t,0)$, per ogni $t \in [a;b]$;
- Esista $L > 0$ tale che $|g_n(t,x) - g_n(t,y)| \le L|x-y|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni $t \in [a;b]$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Sia $t_0 \in [a;b]$.
Sia $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

Esiste un'unica successione $\{u_n : [a;b] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni di classe C^1 equi-derivabili, tale che:

- Le u_n siano equi-continue ed equi-limitate;
- $\lim_n u_n(t) = \lim_n u_n'(t) = 0$;

- Valga $\begin{cases} u_n'(t) = g_n\big(t, u_{k_n}(t)\big) & \forall t \in [a;b] \\ u_n(t_0) = \alpha_n \end{cases}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione

Si osserva intanto che, per ogni $(t,x) \in [a;b] \times \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} &|g_n(t,x)| = |g_n(t,x) - g_n(t,0)| && \text{Essendo } g_n(t,0) = 0 \text{ per ipotesi} \\ &\le L|x| && \text{Per ipotesi su } L \end{aligned}$$

Sia $f : [a;b] \times c_0 \to c_0$ la funzione definita ponendo
$f\big(t, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big) = \big\{g_n(t, x_{k_n})\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni $t \in [a;b]$ e per ogni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

Questa è ben definita, cioè $\big\{g_n(t, x_{k_n})\big\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ per ogni $t \in [a;b]$ e per ogni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $|g_n(t, x_{k_n})| \le L|x_{k_n}|$ per la disuguaglianza iniziale, e $\lim_n x_{k_n} = 0$ essendo $\{x_n\} \in c_0$ ed essendo $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sua estratta;

dunque, $\lim_n g_n(t, x_{k_n}) = 0$, ossia $\big\{g_n(t, x_{k_n})\big\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

Si provi che f soddisfa le ipotesi del [Teorema 26.5].

Fissati $t \in [a;b]$ e $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, si ha

$$\begin{aligned} &\|f(t,x) - f(t,y)\|_{c_0} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n(t, x_{k_n}) - g_n(t, y_{k_n})| && \text{Per definizione di } f \text{ e di } \|\cdot\|_{c_0} \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} L|x_{k_n} - y_{k_n}| && \text{In quanto } |g_n(t, x_{k_n}) - g_n(t, y_{k_n})| \le L|x_{k_n} - y_{k_n}| \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, \text{ per ipotesi su } L \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} L|x_n - y_n| \qquad \text{In quanto } \{x_{k_n} - y_{k_n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n - y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$= L\|x - y\|_{c_0}. \qquad \text{Per definizione di } \|\cdot\|_{c_0}$$

Resta da provare che f è continua;
in virtù della [Proposizione 27.1], basta mostrare che $f(\cdot, x)$ è continua per ogni $x \in c_0$.

Sia dunque $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$;
sia $\tilde{t} \in [a; b]$;
si fissi $\varepsilon > 0$.

Per ipotesi, le g_n sono equi-continue in $(\tilde{t}, 0)$;
supponendo di dotare $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ della norma del massimo, esiste allora $\rho > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $(t, x) \in [a; b] \times \mathbb{R}$ con $\max\{|t - \tilde{t}|, |x|\} < \rho$, si abbia
$|g_n(t, x) - g_n(\tilde{t}, 0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, ossia $|g_n(t, x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ essendo $g_n(\tilde{t}, 0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ipotesi.

Poiché $x \in c_0$ ed essendo $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sua estratta, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|x_{k_n}| < \rho$ per ogni $n \geq \nu + 1$.

Per ogni $i \in \{1, \ldots, \nu\}$, si considerino le funzioni $g_i(\cdot, x_{k_i})$;
esse sono continue essendo le g_i continue per ipotesi.
Per ogni $i \in \{1, \ldots, \nu\}$, sia allora $\delta_i > 0$ tale che, per ogni $t \in [a; b]$ con $|t - \tilde{t}| < \delta_i$, si abbia
$|g_i(t, x_{k_i}) - g_i(t_0, x_{k_i})| < \frac{2}{3}\varepsilon$.

Sia $\delta = \min\{\rho, \delta_1, \ldots, \delta_\nu\}$.

Si provi che, fissato $t \in [a; b]$ con $|t - \tilde{t}| < \delta$, vale
$\|f(t, x) - f(\tilde{t}, x)\|_{c_0} < \varepsilon$, ossia $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |g_n(t, x_{k_n}) - g_n(\tilde{t}, x_{k_n})| < \varepsilon$ per definizione di f e di $\|\cdot\|_{c_0}$.

Sia dunque $n \in \mathbb{N}$.

Se $n \geq \nu + 1$, si ha

$\lvert g_n(t, x_{k_n}) - g_n(\tilde{t}, x_{k_n})\rvert \leq \lvert g(t, x_{k_n})\rvert + \lvert g(\tilde{t}, x_{k_n})\rvert$	Dalla disuguaglianza triangolare
$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon.$	Per costruzione di ν e di ρ, essendo $n \geq \nu + 1$ ed essendo $\lvert t - \tilde{t}\rvert < \delta \leq \rho$

Se $n \in \{1, \dots, \nu\}$, si ha invece $\lvert g_i(t, x_{k_i}) - g_i(\tilde{t}, x_{k_i})\rvert < \frac{\varepsilon}{2}$ per costruzione di δ_n, in quanto $\lvert t - t_0\rvert < \delta \leq \delta_n$.

Allora, ne viene che $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \lvert g_n(t, x_{k_n}) - g_n(\tilde{t}, x_{k_n})\rvert \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$, come si voleva.

Allora, f soddisfa le ipotesi del [Teorema 26.5];
esiste dunque un'unica $u \in C^1\big([a; b], c_0\big) : t \mapsto \{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) & \forall t \in [a; b] \\ u(t_0) = \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}.$$

In virtù delle [Proposizioni 26.3.1 , 26.3.2] e per definizione di f, la successione $\{u_n : [a; b] \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ risulta allora l'unica successione di funzioni di classe C^1 equi-derivabili, tale che:

- Le u_n siano equi-continue ed equi-limitate;
- $\lim\limits_{n} u_n(t) = \lim\limits_{n} u_n'(t) = 0$;
- $\begin{cases} u_n'(t) = g_n\big(t, u_{k_n}(t)\big) & \forall t \in [a; b] \\ u_n(t_0) = \alpha_n \end{cases}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  ■

Teorema 27.3: Unicità della soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Sia $[c; d] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Si supponga che esista una funzione $L : I \to [0; +\infty[$ continua, tale che $|g(t, x) - g(t, y)| \leq L(t)|x - y|$ per ogni $t \in I$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
Sia $t_0 \in I$.
Sia $x_0 \in [c; d]$.
Siano $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue.
Sia $\varphi \in C^1\big([c; d], \mathbb{R}\big)$.

Esiste allora un'unica funzione $u \in C^1\big(I \times [c; d], \mathbb{R}\big)$, dotata di derivata parziale seconda mista continua, tale che, per ogni $(t, x) \in I \times [c; d]$, si abbia

$$\begin{cases} u_{tx}(t, x) = \alpha(t)\, u_x(t, x) + g\big(t, u(t, x)\big) \\ u_t(t, x_0) = \beta(t) \\ u(t_0, x) = \varphi(x) \end{cases}.$$

Dimostrazione

Sia $f : I \times C^1\big([c; d], \mathbb{R}\big) \to C^1\big([c; d], \mathbb{R}\big)$ la funzione definita ponendo

$f(t, v)(x) = \alpha(t)\big(v(x) - v(x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} g\big(t, v(s)\big)\, ds + \beta(t)$, per ogni $t \in I$, per ogni $v \in C^1\big([c; d], \mathbb{R}\big)$ e per ogni $x \in [c; d]$.

questa è ben definita, in quanto $f(t, v)$ è di classe C^1 per ogni $t \in I$ e per ogni $v \in C^1\big([c; d], \mathbb{R}\big)$.

Si provi che f soddisfa le ipotesi del [Teorema 26.5].

Si doti $C^1\big([c; d], \mathbb{R}\big)$ della norma del massimo puntualmente rispetto a x_0.

Si fissi $t \in I$, e siano $v, w \in C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$;
si ha

$\|f(t,v) - f(t,w)\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$	
$= \max\left\{\big\|\alpha(t)\big(v'(x) - w'(x)\big) + g\big(t,v(x)\big) - g\big(t,w(x)\big)\big\|, \lvert\beta(t)-\beta(t)\rvert\right\}$	Per definizione di $\|\cdot\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$, derivando $f(t,v) - f(t,w)$, e avendosi $f(t,v)(x_0) = f(t,w)(x_0) = \beta(t)$
$= \big\|\alpha(t)\big(v'(x) - w'(x)\big) + g\big(t,v(x)\big) - g\big(t,w(x)\big)\big\|$	
$\leq \lvert\alpha(t)\rvert \cdot \|v'(x) - w'(x)\| + \big\|g\big(t,v(x)\big) - g\big(t,w(x)\big)\big\|$	Per sub-additività della norma
$\leq \lvert\alpha(t)\rvert \cdot \|v'(x) - w'(x)\| + L(t) \cdot \|v(x) - w(x)\|$	
$\leq \max\left\{\lvert\alpha(t)\rvert, L(t)\right\} \cdot \big(\|v'(x) - w'(x)\| + \|v(x) - w(x)\|\big)$	
$\leq \max\left\{\lvert\alpha(t)\rvert, L(t)\right\} \cdot \|v - w\|^*_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$	Denotando con $\|\cdot\|^*_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$ la norma della somma in $C^1([c;d],\mathbb{R})$, la disuguaglianza segue dalla sua definizione
$\leq k \cdot \max\left\{\lvert\alpha(t)\rvert, L(t)\right\} \cdot \|v - w\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$, per qualche $k > 0$	Per equivalenza tra le norme $\|\cdot\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$ e $\|\cdot\|^*_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$ ([Proposizione 26.1])

Resta da provare che f è continua;
in virtù della [Proposizione 27.1], basta mostrare che, fissato $v \in C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$, la funzione $f(\cdot, v)$ è continua per ogni $v \in C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$.

Si fissi dunque $\tilde{t} \in I$, e sia $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ una successione convergente a $\tilde{t}$;
si mostri che $\lim\limits_n \|f(t_n, v) - f(\tilde{t}, v)\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})} = 0$.

Si nota intanto che

$\lim_n |f(t_n, v)(x_0) - f(\tilde{t}, v)(x_0)| = \lim_n |\beta(t_n) - \beta(t_0)| = 0,$
per legge di f ed essendo β continua per ipotesi.

Si osservi ora che $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in I in quanto convergente, e v è limitata in $\mathbb{R}$ in quanto continua (avendola supposta di classe C^1) su $[c;d]$ compatto.

Ne segue che esistono due intervalli compatti $J_1 \subseteq I$ e $J_2 \subseteq \mathbb{R}$, tali che $\big(t_n, v(x)\big) \in J_1 \times J_2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in [c;d]$.

Essendo g continua su $I \times \mathbb{R}$ per ipotesi ed essendo $J_1 \times J_2$ compatto, si ha che
g è uniformemente continua su $J_1 \times J_2$.

In particolare, fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora $\delta > 0$ tale che,
per ogni $s, t \in J_1$ con $|s - t| < \delta$ e per ogni $y \in J_2$, si abbia

$|g(s, y) - g(t, y)| < \varepsilon.$

Convergendo $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\tilde{t}$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|t_n - \tilde{t}| < \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

dalla costruzione di J_1, J_2 e δ segue allora che, per ogni $n \geq \nu$, vale $\big|g\big(t_n, v(x)\big) - g\big(\tilde{t}, v(x)\big)\big| < \varepsilon$ per ogni $x \in [c;d]$.

Ne viene dunque che $\lim_n \sup_{x\in[c;d]} \big|g\big(t_n, v(x)\big) - g\big(\tilde{t}, v(x)\big)\big| = 0.$

Essendo v' limitata in $\mathbb{R}$ in quanto continua (avendo supposto v di classe C^1) su $[c;d]$ compatto, sia $N > 0$ tale che $|v'(x)| \leq N$ per ogni $x \in [c;d]$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha allora

$$\big\|\big(f(t_n, v)\big)' - \big(f(\tilde{t}, v)\big)'\big\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})}$$

$$\sup_{x\in[c;d]} \Big|\big(\alpha(t_n) - \alpha(\tilde{t})\big)v'(x) + g\big(t_n, v(x)\big) - g\big(\tilde{t}, v(x)\big)\Big| \quad \text{Per definizione di } \|\cdot\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} \text{ e di } f$$

$\leq \sup_{x\in[c;d]} M\left|\alpha(t_n)-\alpha(\tilde{t})\right| + \left|g\big(t_n, v(x)\big) - g\big(\tilde{t}, v(x)\big)\right|;$ Per sub-additività del valore assoluto, per costruzione di M e per le proprietà dell'estremo superiore

poiché $\lim_n \sup_{x\in[c;d]} M\left|\alpha(t_n)-\alpha(\tilde{t})\right| + \left|g\big(t_n, v(x)\big) - g\big(\tilde{t}, v(x)\big)\right| = 0$ per continuità di α e per quanto osservato prima, ne viene per confronto che

$$\lim_n \left\| \big(f(t_n, v)\big)' - \big(f(\tilde{t}, v)\big)' \right\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})} = 0.$$

Infine, si ha allora

$$\lim_n \|f(t_n, v) - f(\tilde{t}, v)\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$$

$$= \lim_n \max\left\{ \left\| \big(f(t_n, v)\big)' - \big(f(\tilde{t}, v)\big)' \right\|_{C^0([c;d],\mathbb{R})}, |f(t_n, v)(x_0) - f(\tilde{t}, v)(x_0)| \right\}$$ Per definizione di $\|\cdot\|_{C^1([c;d],\mathbb{R})}$

$$= 0$$ Per quanto osservato finora

come si voleva.

Allora, f soddisfa le ipotesi del [Teorema 26.5];
segue quindi l'esistenza e unicità di una funzione $h \in C^1\big(I, C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)\big)$ tale che

$$\begin{cases} h'(t) = f\big(t, h(t)\big) \ \ \forall t \in I \\ h(t_0) = \varphi \end{cases}.$$

Sia ora $u : I \times [c;d] \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $u(t,x) = h(t)(x)$ per ogni $(t,x) \in I \times [c;d]$.

Per la [Proposizione 26.4], u è di classe C^1, possiede derivata seconda mista u_{tx} continua in $I \times [c;d]$, e $h'(t)(x) = u_t(t,x)$ per ogni $(t,x) \in I \times [c;d]$.

Per ogni $(t,x) \in I \times [c;d]$, si ha allora

$u_t(t,x) = h'(t)(x)$ — Per quanto appena osservato

$= f\big(t,h(t)\big)(x)$ — Per costruzione di h

$= \alpha(t)\big(h(t)(x) - h(t)(x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} g\big(t,h(t)(s)\big)\,ds + \beta(t)$ — Per definizione di f

$= \alpha(t)\big(u(t,x) - u(t,x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} g\big(t,u(t,s)\big)\,ds + \beta(t)$ — Per definizione di u

e inoltre si ha $u(t_0,x) = h(t_0)(x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in [c;d]$, per definizione di u e per costruzione di h.

Poiché u ammette in $I \times [c;d]$ derivata mista per quanto osservato prima, u_t è parzialmente derivabile rispetto alla seconda variabile;
dalla legge ottenuta per u_t, segue quindi che

$u_{tx}(t,x) = \alpha(t)\,u_x(t,x) + g\big(x,u(t,x)\big)$ per ogni $(t,x) \in I \times [c;d]$.

Inoltre, sempre dalla legge di u_t si ricava che $u_t(t,x_0) = \beta(t)$ per ogni $t \in I$.

Allora, u soddisfa le condizioni espresse nella tesi;
resta da mostrare che tale funzione è unica.

Sia dunque $\tilde{u} \in C^1\big(I \times [c;d],\mathbb{R}\big)$, dotata di derivata parziale seconda mista continua, tale che, per ogni $(t,x) \in I \times [c;d]$, si abbia

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tx}(t,x) = \alpha(t)\,\tilde{u}_x(t,x) + g\big(t,\tilde{u}(t,x)\big) \\ \tilde{u}_t(t,x_0) = \beta(t) \\ \tilde{u}(t_0,x) = \varphi(x) \end{cases}.$$

Sia $\tilde{h} : I \to \mathbb{R}^{[c;d]}$ la funzione definita ponendo $\tilde{h}(t) = \tilde{u}(t,\cdot)$ per ogni $t \in I$.

Per la [Proposizione 26.4], si ha $\tilde{h}(t) \in C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)$ per ogni $t \in I$, e $\tilde{h} \in C^1\Big(I, C^1\big([c;d],\mathbb{R}\big)\Big)$;

inoltre, sempre per tale proposizione si ha $\tilde{u}_t(t,x) = \tilde{h}'(t)(x)$ per ogni $(t,x) \in I \times [c;d]$.

Si fissi ora $t \in I$.

Poiché vale $\tilde{u}_{tx}(t,s) = \alpha(t)\,\tilde{u}_x(t,s) + g\big(t,\tilde{u}(t,s)\big)$ per ogni $x \in [c;d]$ per ipotesi su $\tilde{u}$, integrando entrambi i membri da x_0 a x si ha

$\int_{x_0}^{x} \tilde{u}_{tx}(t,s)\,ds = \int_{x_0}^{x} \alpha(t)\,\tilde{u}_x(t,s) + g\big(t,\tilde{u}(t,s)\big)\,ds$	
$\implies \int_{x_0}^{x} \tilde{u}_{tx}(t,s)\,ds = \alpha(t)\int_{x_0}^{x} \tilde{u}_x(t,s) + \int_{x_0}^{x} g\big(t,\tilde{u}(t,s)\big)\,ds$	Per linearità dell'integrale
$\implies \tilde{u}_t(t,x) - \tilde{u}_t(t,x_0) = \alpha(t)\,\big(\tilde{u}(t,x) - \tilde{u}(t,x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} g\big(t,\tilde{u}(t,s)\big)\,ds$	Per il teorema di Torricelli-Barrow ([Corollario 21.11])
$\implies \tilde{h}'(t)(x) = \alpha(t)\,\big(\tilde{h}(t)(x) - \tilde{h}(t)(x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} g\big(t,\tilde{h}(t)(s)\big)\,ds + \beta(t)$	$\tilde{u}_t(t,x) = \tilde{h}'(t)(x)$ per quanto osservato prima; $\tilde{u}_t(t,x_0) = \beta(t)$ per ipotesi su $\tilde{u}$; $\tilde{u}(t,s) = \tilde{h}(t)(s)$ per ogni $s \in [c;d]$ per definizione di $\tilde{h}$
$= f\big(t,\tilde{h}(t)\big)$	Per definizione di f

Inoltre, si ha $\tilde{h}(t_0) = \tilde{u}(t_0,\cdot) = \varphi$, per definizione di $\tilde{h}$ e per ipotesi su $\tilde{u}$.

Ne viene allora che $\tilde{h} = h$ per unicità di h;
conseguentemente, si ha anche $\tilde{u} = u$, acquisendo così l'unicità di u.
$\blacksquare$.