

# 03 - Sequenzializzazione di una Topologia

## Insiemi sequenzialmente chiusi e aperti

### ⌘ Definizione: Insieme sequenzialmente chiuso

Sia  $X$  uno spazio topologico.

Un insieme  $C \subseteq X$  si dice **sequenzialmente chiuso** quando, per ogni successione  $\{x_n\}_n \subseteq C$  convergente a un certo  $x \in X$ , si ha  $x \in C$ .

### 🔍 Osservazione: Relazione tra chiusi e chiusi sequenziali

Sia  $X$  uno spazio topologico.

Sia  $C \subseteq X$  chiuso.

Allora,  $C$  è anche sequenzialmente chiuso.

### 📄 Dimostrazione

Sia  $\{x_n\}_n \subseteq C$  una successione in  $C$  convergente a un certo  $x \in X$ .

Allora, per ogni  $U$  intorno di  $x$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $x_n \in U$  per ogni  $n \geq \nu$ .

Poiché  $x_n \in C$  per costruzione, segue che  $U \cap C \neq \emptyset$  per ogni  $U$  intorno di  $x_n$ .

Allora,  $x \in \overline{C}$  ossia, essendo  $C$  chiuso per ipotesi,  $x \in C$ .

■

Il viceversa non vale generalmente; esso vale sotto le seguenti condizioni:

### Proposizione 3.1: Equivalenza tra chiusi e chiusi sequenziali in spazi primo-numerabili

Sia  $X$  uno spazio topologico  $1^\circ$ -numerabile.

Sia  $C \subseteq X$  sequenzialmente chiuso.

Allora,  $C$  è chiuso.

#### Dimostrazione

Sia  $x \in \overline{C}$ .

Allora, per ogni  $U$  intorno di  $x$ , si ha  $U \cap C \neq \emptyset$ , ossia esiste  $x_U \in U$  tale che  $x_U \in C$ .

Sia  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un sistema fondamentale di intorni di  $x$ , che esiste per  $1^\circ$ -numerabilità di  $x$ .

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  l'insieme  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  è un intorno di  $x$ ; allora, esiste  $x_n \in \bigcap_{i=1}^n U_i$  tale che  $x_n \in C$  per quanto affermato prima.

Si consideri la successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ; si ha che  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$  per costruzione.

Inoltre, essa converge a  $x$ .

Infatti, si fissi  $U$  intorno di  $x$ ; essendo  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un sistema fondamentale di intorni di  $x$ , esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $U_{n_0} \subseteq U$ ; pertanto, per ogni  $n \geq n_0$  si ha  $x_n \in \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq U_{n_0} \subseteq U$ .

Essendo  $C$  sequenzialmente chiuso, risulta  $x \in C$ .

Allora, ne segue che  $\overline{C} \subseteq C$  per arbitrarietà di  $x$ , ossia  $C$  chiuso.

■

### ⌘ Definizione: Insieme sequenzialmente aperto

Sia  $X$  uno spazio topologico.

Un insieme  $A \subseteq X$  si dice **sequenzialmente aperto** quando  $X \setminus A$  è sequenzialmente chiuso.

### Q Osservazione: Caratterizzazione degli insiemi sequenzialmente aperti

Sia  $X$  uno spazio topologico.

Un insieme  $A \subseteq X$  è sequenzialmente aperto se e solo se, per ogni successione  $\{x_n\}_n \subseteq A$  convergente a un certo  $x \in X$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $x_n \in A$  per ogni  $n \geq \nu$ .

### 📄 Proposizione 3.2: Insiemi sequenzialmente aperti di $X$ costituiscono una topologia

Sia  $X$  uno spazio topologico con topologia  $\tau$ .

Sia  $\tau_s$  la famiglia degli insiemi sequenzialmente aperti di  $X$ .

$\tau_s$  è una topologia su  $X$ .

#### 📄 Dimostrazione

Mi secco.



### ⌘ Definizione: Sequenzializzazione di una topologia

Sia  $X$  uno spazio topologico con topologia  $\tau$ .

La famiglia  $\tau_s$  degli insiemi sequenzialmente aperti di  $X$  secondo  $\tau$ , che dunque è una topologia, prende il nome di **sequenzializzazione** di  $\tau$ .

### Q Osservazione: Finezza di una topologia rispetto alla sua sequenzializzazione

Sia  $X$  uno spazio topologico con topologia  $\tau$ .

Sia  $\tau_s$  la sequenzializzazione di  $\tau$ .

Allora,  $\tau_s \supseteq \tau$ .

Infatti, i chiusi di  $X$  secondo  $\tau$  sono sequenzialmente chiusi, ossia chiusi secondo  $\tau_s$ .

### Proposizione 3.3: Equivalenza tra sequenziale semicontinuità inferiore e semicontinuità inferiore rispetto alla sequenzializzazione

Sia  $X$  uno spazio topologico con topologia  $\tau$ .

Sia  $\tau_s$  la sequenzializzazione di  $\tau$ .

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1.  $f$  è sequenzialmente semicontinua inferiormente secondo  $\tau$ ;
2.  $f$  è semicontinua inferiormente secondo  $\tau_s$ .

#### Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)

Si supponga  $f$  sequenzialmente semicontinua inferiormente secondo  $\tau$ .

Si provi la semicontinuità inferiore secondo  $\tau_s$  tramite la caratterizzazione nella [Proposizione 2.1], mostrando dunque che, per ogni  $r \in \mathbb{R}$ , l'insieme  $f^{-1}([-\infty; r])$  è chiuso secondo  $\tau_s$ , ossia sequenzialmente chiuso.

Sia dunque  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq f^{-1}(]-\infty; r])$ , tale cioè che  $f(x_n) \leq r$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , convergente a un certo  $x^* \in X$ . Per sequenziale semicontinuità di  $f$  si ha  $f(x^*) \leq \liminf_n f(x_n)$ ; d'altra parte, essendo  $f(x_n) \leq r$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , segue  $\liminf_n f(x_n) \leq r$  per confronto.

Allora,  $f(x^*) \leq r$ , ossia  $x^* \in f^{-1}(]-\infty; r])$ .

■

#### Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga  $f$  semicontinua inferiormente secondo  $\tau_s$ .

Sia  $\tilde{x} \in X$ .

Sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  una successione convergente a  $\tilde{x}$ .

Si provi che  $f(\tilde{x}) \leq \liminf_n f(x_n)$ .

Si proceda per assurdo, supponendo che  $f(\tilde{x}) > \liminf_n f(x_n)$ .

Sia  $\gamma \in \mathbb{R}$  tale che  $f(\tilde{x}) > \gamma > \liminf_n f(x_n)$ .

Per ipotesi di semicontinuità inferiore di  $f$  secondo  $\tau_s$ , l'insieme  $f^{-1}(]-\infty; \gamma])$  è chiuso secondo  $\tau_s$ , per la [Proposizione 2.1]; cioè,  $f^{-1}(]-\infty; \gamma])$  è sequenzialmente chiuso.

Inoltre, essendo  $\gamma > \liminf_n f(x_n)$ , esiste un'estratta  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tale che valga  $x_{n_k} < \gamma$  definitivamente.

Poiché  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $\tilde{x}$  e  $f^{-1}(]-\infty; \gamma])$  è sequenzialmente chiuso, si ha che  $\tilde{x} \in f^{-1}(]-\infty; \gamma])$ , ossia  $f(\tilde{x}) \leq \gamma$ .

Tuttavia, ciò è contraddittorio con il fatto che  $\gamma$  è stato scelto dimodoché  $f(\tilde{x}) > \gamma$ .

■

Sia  $X$  uno spazio topologico.

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1.  $f$  è sequenzialmente semicontinua inferiormente su  $X$ .
2.  $f^{-1}(]r; +\infty[)$  è sequenzialmente aperto per ogni  $r \in \mathbb{R}$ ;
3.  $f^{-1}(]-\infty; r])$  è sequenzialmente chiuso per ogni  $r \in \mathbb{R}$ .

#### Dimostrazione

Per la [Proposizione 3.3],  $f$  è sequenzialmente semicontinua inferiormente su  $X$  se e solo se è semicontinua inferiormente su  $X$  rispetto alla sequenzializzazione della topologia su  $X$ .

Dalla [Proposizione 2.1] applicata a quest'ultima topologia, segue allora l'equivalenza tra 1. , 2. e 3.

■

#### Proposizione 3.4': Caratterizzazione della sequenziale semicontinuità superiore

Sia  $X$  uno spazio topologico.

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1.  $f$  è sequenzialmente semicontinua superiormente su  $X$ .
2.  $f^{-1}(]-\infty; r])$  è sequenzialmente aperto per ogni  $r \in \mathbb{R}$ ;
3.  $f^{-1}([r; +\infty[)$  è sequenzialmente chiuso per ogni  $r \in \mathbb{R}$ .