25 - Lo spazio L¹

⌘ Definizione: Uguaglianza quasi ovunque

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Siano $f, g : T \to X$ due funzioni fortemente m-misurabili.

f e g sono uguali quasi ovunque su T quando $f(t) = g(t)$ per quasi ogni $t \in T$;
in tal caso, si scrive $f \overset{\text{q.o.}}{=} g$.

Osservazione

L'uguaglianza quasi ovunque è una relazione di equivalenza.

⌘ Notazione: $L^1(T, X)$

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Si denota con $L^1(T, X)$ l'insieme quoziente delle funzioni integrabili secondo Bochner, modulo la relazione di uguaglianza quasi ovunque.

Osservazione

$L^1(T,X)$ è uno spazio vettoriale, con le operazioni indotte da quelle tra funzioni integrabili secondo Bochner.

Proposizione 25.1: Norma su $L^1(T,X)$

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $\|\cdot\|_{L^1(T,X)} : L^1(T,X) \to \mathbb{R}$ la mappa definita ponendo
$f \mapsto \|f\|_{L^1(T,X)} := \int_T \|f(t)\| \, dt$, per ogni $f \in L^1(T,X)$.

$\|\cdot\|_{L^1(T,X)}$ è una norma su $L^1(T,X)$.

Dimostrazione

La nonnegatività $\|\cdot\|_{L^1(T,X)}$ viene dalla nonnegatività di $\|\cdot\|$ e dalla monotonia dell'integrale di Lebesgue.

L'assoluta omogeneità di $\|\cdot\|_{L^1(T,X)}$ segue dall'assoluta omogeneità di $\|\cdot\|$ e dalla linearità dell'integrale di Lebesgue.

La sub-additività di $\|\cdot\|_{L^1(T,X)}$ segue dalla sub-additività di $\|\cdot\|$ e dalla monotonia dell'integrale di Lebesgue.

La definita positività di $\|\cdot\|_{L^1(T,X)}$ segue dalla definita positività di $\|\cdot\|$ e dal fatto che una funzione a valori reali misurabile, nonnegativa e con integrale di Lebesgue nullo, è uguale quasi ovunque alla funzione identicamente nulla.
■

Proposizione 25.2: Completezza di $\left(L^1(T,X), \|\cdot\|_{L^1(T,X)}\right)$

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Lo spazio normato $\left(L^1(T, X), \|\cdot\|_{L^1(T,X)}\right)$ è di Banach.

Richiamo: Teorema della convergenza monotona di Beppo-Levi

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $\{f_n : T \to [0; +\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non decrescente di funzioni misurabili;
sia dunque $f : T \to [0; +\infty]$ il limite puntuale di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (che esiste essendo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non decrescente, ed è misurabile in quanto limite puntuale di funzioni misurabili).

Si ha $\lim\limits_n \int_T f_n(t)\,dt = \int_T f(t)\,dt$.

Richiamo: Finitezza quasi ovunque delle funzioni nonnegative sommabili

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $f : T \to [0; +\infty]$ una funzione sommabile.

Allora, $f(t) < +\infty$ per quasi ogni $t \in T$.

Osservazioni preliminari

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy;
si supponga che essa ammetta un'estratta $\{\mathbf{x}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, convergente a un certo $\tilde{\mathbf{x}} \in E$.

Allora, $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\tilde{\mathbf{x}}$.

Dimostrazione

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(T,X)$ una successione di Cauchy;
si provi che essa converge.

Essendo di Cauchy, essa ammette un'estratta $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^1(T,X)} < \frac{1}{2^k}$, ossia
$\int_T \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_X \, dt < \frac{1}{2^k}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$;

ne segue che $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int_T \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_X \, dt < 1$.

Si nota ora che la successione di funzioni $\left\{T \to [0;+\infty] : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Beppo-Levi.

Fatta questa osservazione, si ottiene che

$$\begin{aligned}
1 &> \sum_{k=1}^{+\infty} \int_T \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_X \, dt && \text{Per quanto visto prima} \\
&= \lim_N \sum_{k=1}^{N} \int_T \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_X \, dt && \text{Per definizione di } \sum_{k=1}^{+\infty} \int_T \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_X \, dt \\
&= \lim_N \int_T \sum_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_X \, dt && \text{Per linearità dell'integrale di Lebesgue} \\
&= \int_T \lim_N \sum_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_X \, dt && \text{Applicando il teorema di Beppo-Levi} \\
&= \int_T \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_X \, dt && \text{Per definizione di } \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|_X
\end{aligned}$$

Ne segue che la funzione $T \to [0;+\infty] : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|$ è sommabile.

Per il secondo richiamo fatto, ne viene che $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\| < +\infty$ per quasi ogni $t \in T$;
cioè, la serie $\sum \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|$ converge per quasi ogni $t \in T$.

Ciò significa che la serie $\sum \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$ converge assolutamente per quasi ogni $t \in T$;
essendo X completo in quanto spazio di Banach, l'assoluta convergenza di una serie ne implica la convergenza, per cui la serie $\sum \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$ converge per quasi ogni $t \in T$;

Sia allora $f : T \to X$ la funzione definita ponendo
$f(t) = f_{n_1}(t) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$ per ogni $t \in T$ tale che $\sum \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$ converga, e ponendo $f(t) = 0$ altrimenti.

Si ha $\lim\limits_{k} f_{n_k}(t) = f(t)$ per quasi ogni $t \in T$;
infatti, per i $t \in T$ per cui $\sum \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$ converge (che sono quasi tutti, per quanto visto prima), si ha

$f(t) = f_{n_1}(t) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$	Per definizione di f
$= f_{n_1}(t) + \lim\limits_{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$	Per definizione di $\lim\limits_{N} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$
$= f_{n_1}(t) + \lim\limits_{N} \left(f_{n_{N+1}}(t) - f_{n_1}(t)\right)$	Essendo la sommatoria $\sum\limits_{k=1}^{N} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$ telescopica

$\lim\limits_{N} f_{n_{N+1}}(t)$
$= \lim\limits_{N} f_{n_N}(t).$

Inoltre, f è integrabile secondo Bochner. Infatti:

- f_{n_1} è integrabile secondo Bochner in quanto $f_{n_1} \in L^1(T, X)$ per costruzione di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

- La mappa $t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)$, definita su quasi ogni $t \in T$, è misurabile in quanto limite puntuale di funzioni misurabili ([Proposizione 22.1]), e $t \mapsto \left\|\sum_{k=1}^{+\infty} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)\right\|$ è sommabile, essendo $+\infty > \int_T \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\|\, dt \geq \int_T \left\|\sum_{k=1}^{+\infty} \left(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\right)\right\| dt$, per quanto visto prima e per le proprietà dell'integrale di Lebesgue e dell'assoluta convergenza in spazi di Banach.

Segue allora l'integrabilità di f secondo Bochner, essendo quasi uguale alla somma tra le due mappe prese in esame.

Infine, si osserva che per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in T$ vale

$\left\lvert \|f_{n_{k+1}}(t)\| - \|f_{n_1}(t)\| \right\rvert \leq \|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_1}(t)\|$	Per la seconda disuguaglianza triangolare
$= \left\|\sum_{i=1}^{k} f_{n_{i+1}}(t) - f_{n_i}(t)\right\|$	Essendo tale sommatoria telescopica
$\leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}}(t) - f_{n_i}(t)\|$	Per sub-additività della norma
$\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \|f_{n_{i+1}}(t) - f_{n_i}(t)\|$	Essendo limite di una serie a termini nonnegativi

da cui si ricava che

$\|f_{n_{k+1}}(t)\| \leq \|f_{n_1}(t)\| + \sum_{i=1}^{+\infty} \|f_{n_{i+1}}(t) - f_{n_i}(t)\|$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in T$;

la mappa $t \mapsto \|f_{n_1}(t)\| + \sum_{i=1}^{+\infty} \|f_{n_{i+1}}(t) - f_{n_i}(t)\|$ è sommabile in quanto f_{n_1} è integrabile secondo Bochner e per quanto osservato prima su $\sum_{i=1}^{+\infty} \|f_{n_{i+1}}(t) - f_{n_i}(t)\|$.

Allora, $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza dominata ([Proposizione 24.7]), da cui segue allora che

$\lim_n \int_T \|f_{n_k}(t) - f(t)\| \, dt = 0.$

Dunque, la successione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f in $L^1(T, X)$;
essendo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, dall'osservazione preliminare segue che l'intera successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f in $L^1(T, X)$.

La tesi è dunque acquisita.

■

⌘ Definizione: Funzione di Carathéodory

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia Y uno spazio topologico.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \times Y \to X$ una funzione.

f si dice **di Carathéodory** quando:

- $f(\cdot, y)$ è misurabile per ogni $y \in Y$;
- $f(t, \cdot)$ è continua per ogni $t \in T$.

Lemma 25.3: Misurabilità della composizione a destra di una funzione di Carathéodory con una funzione misurabile con immagine separabile

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \times Y \to X$ una funzione di Carathéodory.

Sia $u : T \to Y$ una funzione misurabile, con $u(T)$ separabile.
Sia $g : T \to \mathbb{R}^m$ la funzione definita ponendo $g(t) = f\big(t, u(t)\big)$ per ogni $t \in T$.

g è misurabile.

Dimostrazione

Essendo u misurabile con immagine separabile per ipotesi, per la [Proposizione 22.2] esiste una successione $\{u_n : T \to Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili, con $u_n(T)$ al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, convergente puntualmente in T a u.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisca allora $g_n : T \to \mathbb{R}^m$ ponendo $g_n(t) = f\big(t, u_n(t)\big)$ per ogni $t \in T$.

Si fissi ora $n \in \mathbb{N}$.

Essendo al più numerabile, si ponga $u_n(T) = \{y_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in u_n^{-1}(y_{n,k})$ si ha $f\big(t, u_n(t)\big) = f(t, y_{n,k})$;
cioè, $(g_n)_{|u_n^{-1}(y_{n,k})} = f(\cdot, y_{n,k})_{|u_n^{-1}(y_{n,k})}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Poiché $f(\cdot, y_{n,k})$ è misurabile per ipotesi, ne viene che $(g_n)_{|u_n^{-1}(y_{n,k})}$ è misurabile, per ogni $k \in \mathbb{N}$;
essendo $\{u_n^{-1}(y_{n,k}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ una partizione di T per definizione di $\{y_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, ne viene che g_n è misurabile.

g è limite puntuale di $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per costruzione di $\{u_n\}$;
essendo g_n misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, ne viene che g è misurabile, come si voleva.
■

Lemma 25.4: Misurabilità della derivata parziale

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio normato.
Sia $Y \subseteq E$ aperto.
Sia $\mathbf{y}_0 \in Y$.
Sia $f : T \times Y \to X$ una funzione tale che:

- $f(\cdot, \mathbf{y})$ sia fortemente μ-misurabile per ogni $\mathbf{y} \in Y$;
- $f(t, \cdot)$ sia G-derivabile in $\mathbf{y}_0$ per ogni $t \in T$.

Allora, $f'_{\mathbf{y}}(\cdot, \mathbf{y}_0)(\mathbf{v})$ è fortemente μ-misurabile per ogni $\mathbf{v} \in E$.

Dimostrazione

Fissati $t \in T$ e $\mathbf{v} \in E$, si ha per ipotesi che

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(t, \mathbf{y}_0 + \lambda \mathbf{v}) - f(t, \mathbf{y}_0)}{\lambda} = f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_0)(\mathbf{v}).$$

Fissata quindi una successione $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $\lim_n \lambda_n = 0$, si ha

$$f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_0)(\mathbf{v}) = \lim_n \frac{f(t, \mathbf{y}_0 + \lambda_n \mathbf{v}) - f(t, \mathbf{y}_0)}{\lambda_n} \text{ per ogni } t \in T \text{ e } \mathbf{v} \in E.$$

Per ogni $\mathbf{v} \in E$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, la mappa $t \mapsto \frac{f(t, \mathbf{y}_0 + \lambda_n \mathbf{v}) - f(t, \mathbf{y}_0)}{\lambda_n}$ è misurabile essendo $f(\cdot, \mathbf{y})$ misurabile per ogni $\mathbf{y} \in Y$;

ne segue che $f'_{\mathbf{y}}(\cdot, \mathbf{y}_0)(\mathbf{v})$ è misurabile per ogni $\mathbf{v} \in E$ per la [Proposizione 22.4], in quanto limite puntuale di funzioni fortemente μ-misurabili.

■

Teorema 25.5: Derivazione sotto il segno di integrale

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio normato separabile.
Sia $Y \subseteq E$ aperto e convesso.
Sia $f : T \times Y \to X$ tale che:

- $f(\cdot, \mathbf{y})$ sia integrabile secondo Bochner per ogni $\mathbf{y} \in Y$;
- $f(t, \cdot)$ sia di classe C^1 in Y per ogni $t \in T$.
- Per ogni $\mathbf{y} \in Y$, esistano $r_{\mathbf{y}} > 0$ e $M_{\mathbf{y}} : T \to \mathbb{R}$ sommabile, tali che $\sup\limits_{\mathbf{w} \in \overline{B}(\mathbf{y}, r_{\mathbf{y}})} \|f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{w})\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq M_{\mathbf{y}}(t)$ per ogni $t \in T$.

Sia $F : Y \to X$ la funzione definita ponendo $F(\mathbf{y}) = \int_T f(t, \mathbf{y})\, d\mu$ per ogni $\mathbf{y} \in Y$ (ben definita essendo $f(\cdot, \mathbf{y})$ integrabile secondo Bochner per ogni $\mathbf{y} \in Y$ per ipotesi)

Si hanno i seguenti fatti:

- $f'_{\mathbf{y}}(\cdot, \mathbf{y})(\mathbf{v})$ è integrabile secondo Bochner per ogni $\mathbf{y} \in Y$ e per ogni $\mathbf{v} \in E$;
- F è di classe C^1 in Y;
- $F'(\mathbf{y})(\mathbf{v}) = \int_T f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v})\, d\mu$ per ogni $\mathbf{y} \in Y$ e per ogni $\mathbf{v} \in E$.

Osservazioni preliminari

- Sia X uno spazio topologico.
  Sia $A \subseteq X$.
  Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
  Sia $D \subseteq A$ un insieme denso in A.

Si ha $\sup\limits_{x \in A} f(x) = \sup\limits_{x \in D} f(x)$.

- Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
  Sia $\{f_n : T \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili.
  Si supponga che $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) < +\infty$ per ogni $t \in T$;
  sia dunque $f : T \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(t) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(t)$ per ogni $t \in T$.

  f è misurabile.

Dimostrazione

Poiché f soddisfa le ipotesi del [Lemma 25.4], $f'_{\mathbf{y}}(\cdot, \mathbf{y})(\mathbf{v})$ è fortemente μ-misurabile.

Si fissino ora $\mathbf{y} \in Y$ e $\mathbf{v} \in E$;
sia $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ una successione convergente a 0;
sia $t \in T$.,

Essendo $f(t, \cdot)$ di classe C^1, applicando il teorema di Lagrange ([Teorema 11.7]) si ottiene che

$f(t, \mathbf{y} + \lambda_n \mathbf{v}) - f(t, \mathbf{y}) \in \overline{\text{conv}} \left\{ f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu \lambda_n \mathbf{v})(\lambda_n \mathbf{v}) \mid \mu \in [0; 1] \right\}$, da cui

$\frac{f(t, \mathbf{y} + \lambda_n \mathbf{v}) - f(t, \mathbf{y})}{\lambda_n} \in \overline{\text{conv}} \left\{ f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu \lambda_n \mathbf{v})(\mathbf{v}) \mid \mu \in [0; 1] \right\}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Poiché $\left\{ f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu \lambda_n \mathbf{v})(\mathbf{v}) \mid \mu \in [0; 1] \right\} \ni f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v})$, dalla [Proposizione 11.6] segue che

$\left\| \frac{f(t, \mathbf{y} + \lambda_n \mathbf{v}) - f(t, \mathbf{y})}{\lambda_n} - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v}) \right\| \leq \text{diam} \left\{ f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu \lambda_n \mathbf{v})(\mathbf{v}) \mid \mu \in [0; 1] \right\}$.

Poiché $\lambda_n \to 0$, si ha $\lambda_n < \frac{r_{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{v}\|_E}$, ossia $\|\lambda_n \mathbf{v}\|_E < r_{\mathbf{y}}$, per ogni $n \geq \nu$, per qualche $\nu \in \mathbb{N}$.

Allora, per ogni $\mu \in [0;1]$ e per ogni $n \geq \nu$ si ha

	$\|\mu\lambda_n\mathbf{v}\|_E < r_{\mathbf{y}}$	Essendo $\mu \in [0;1]$
$\Longrightarrow$	$\mathbf{y} + \mu\lambda_n\mathbf{v} \in \overline{B}(\mathbf{y}, r_{\mathbf{y}})$	
$\Longrightarrow$	$\|f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu\lambda_n\mathbf{v})\|_{\mathcal{L}(E,X)} \leq M_{\mathbf{y}}(t)$	Per ipotesi su $r_{\mathbf{y}}$ e $M_{\mathbf{y}}$
$\Longrightarrow$	$\|f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu\lambda_n\mathbf{v})(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\|_E M_{\mathbf{y}}(t)$	In quanto $\|f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu\lambda_n\mathbf{v})(\mathbf{v})\| \leq \|f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu\lambda_n\mathbf{v})\|_{\mathcal{L}(E,X)} \cdot \|\mathbf{v}\|_E$, per la disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori lineari continui

Ne viene che $\left\{f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu\lambda_n\mathbf{v})(\mathbf{v}) \mid \mu \in [0;1]\right\} \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_X, \|\mathbf{v}\|_E M_{\mathbf{y}}(t))$ per ogni $n \geq \nu$.

Essendo il secondo insieme chiuso e convesso ed avendo $\frac{f(t,\mathbf{y}+\lambda_n\mathbf{v})-f(t,\mathbf{y})}{\lambda_n} \in \overline{\operatorname{conv}}\left\{f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y} + \mu\lambda_n\mathbf{v})(\mathbf{v}) \mid \mu \in [0;1]\right\}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, ne segue che

$\left\|\frac{f(t,\mathbf{y}+\lambda_n\mathbf{v})-f(t,\mathbf{y})}{\lambda_n}\right\| \leq \|\mathbf{v}\|_E M_{\mathbf{y}}(t)$ per ogni $n \geq \nu$;
tale disuguaglianza vale per ogni $t \in T$, e la funzione maggiorante è sommabile essendo $M_{\mathbf{y}}$ sommabile per ipotesi.

Inoltre, la funzione $\frac{f(\cdot,\mathbf{y}+\lambda_n\mathbf{v})-f(\cdot,\mathbf{y})}{\lambda_n}$ è fortemente misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$,
essendo $f(\cdot, \mathbf{w})$ fortemente μ-misurabile per ogni $\mathbf{w} \in Y$ in quanto integrabile secondo Bochner per ipotesi;
evidentemente, vale anche $\lim_n \frac{f(t,\mathbf{y}+\lambda_n\mathbf{v})-f(t,\mathbf{y})}{\lambda_n} = f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v})$ per ogni $t \in T$,
in quanto $f(t, \cdot)$ è di classe C^1 in Y, ed essendo $\lambda_n \to 0$.

Allora, valgono le ipotesi del teorema di convergenza dominata ([Proposizione 24.7]), da cui viene che $f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v})$ è integrabile secondo Bochner, acquisendo così il primo punto;
sempre per tale proposizione, vale

$\lim_n \int_T \frac{f(t,\mathbf{y}+\lambda_n\mathbf{v})-f(t,\mathbf{y})}{\lambda_n}\, d\mu = \int_T f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v})\, d\mu$.

D'altra parte, si ha $\int_T \frac{f(t,\mathbf{y}+\lambda_n\mathbf{v})-f(t,\mathbf{y})}{\lambda_n}\,d\mu = \frac{F(\mathbf{y}+\lambda_n\mathbf{v})-F(\mathbf{y})}{\lambda_n}$ per definizione di F e per linearità dell'integrale di Bochner; si ha dunque

$$\lim_n \frac{F(\mathbf{y}+\lambda_n\mathbf{v})-F(\mathbf{y})}{\lambda_n} = \int_T f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})(\mathbf{v})\,d\mu.$$

L'operatore $\mathbf{v} \mapsto \int_T f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})(\mathbf{v})\,d\mu$ è lineare per linearità della derivata e dell'integrale di Bochner;
esso è anche continuo, in quanto per ogni $\mathbf{v} \in E$ si ha

$\left\|\int_T f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})(\mathbf{v})\,d\mu\right\| \leq \int_T \|f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})(\mathbf{v})\|\,dt$	Per maggiorazione della norma dell'integrale di Bochner ([Proposizione 24.4])
$\leq \int_T \|f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})\|_{\mathcal{L}(E,X)}\|\mathbf{v}\|_E\,dt$	Per la disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori lineari continui, e per monotonia dell'integrale di Lebesgue
$= \|\mathbf{v}\|_E \cdot \int_T \|f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})\|_{\mathcal{L}(E,X)}\,dt$	Per linearità dell'integrale di Lebesgue
$\leq \|\mathbf{v}\|_E \cdot \int_T \|M_{\mathbf{y}}(t)\|_{\mathcal{L}(E,X)}\,dt$	Per ipotesi su $M_{\mathbf{y}}$ e per monotonia dell'integrale di Lebesgue

e $\int_T \|M_{\mathbf{y}}(t)\|_{\mathcal{L}(E,X)}\,dt < +\infty$, per ipotesi su $M_{\mathbf{y}}$.

allora, F è G-derivabile in Y, e si ha $F'(\mathbf{y})(\mathbf{v}) = \int_T f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})(\mathbf{v})\,d\mu$ per ogni $\mathbf{y} \in Y$ e per ogni $\mathbf{v} \in E$.

Resta da mostrare la continuità di F' in Y.

Si fissi dunque nuovamente $\mathbf{y} \in Y$;
sia $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ una successione convergente a $\mathbf{y}$.

Si provi che $\lim_n F'(\mathbf{y}_n) = F'(\mathbf{y})$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, per ogni $\mathbf{v} \in E$, si ha

$\|F'(\mathbf{y}_n)(\mathbf{v}) - F'(\mathbf{y})(\mathbf{v})\| = \left\|\int_T f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y}_n)(\mathbf{v})\,d\mu - \int_T f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})(\mathbf{v})\,d\mu\right\|$	Per legge di F'

$= \left\| \int_T f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n)(\mathbf{v}) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v}) \, d\mu \right\|$ Per linearità dell'integrale di Bochner

$\leq \int_T \| f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n)(\mathbf{v}) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v}) \| \, dt$ Per maggiorazione della norma dell'integrale di Bochner

$\leq \int_T \| f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) \|_{\mathcal{L}(E,X)} \cdot \|\mathbf{v}\|_E \, dt$ Per la disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori lineari continui, e per monotonia dell'integrale di Lebesgue

$= \|\mathbf{v}\|_E \cdot \int_T \| f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) \|_{\mathcal{L}(E,X)} \, dt$ Per linearità dell'integrale di Lebesgue

da cui segue che $\| F'(\mathbf{y}_n) - F'(\mathbf{y}) \|_{\mathcal{L}(E,X)} \leq \int_T \| f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) \|_{\mathcal{L}(E,X)} \, dt$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per definizione di $\| F'(\mathbf{y}_n) - F'(\mathbf{y}) \|_{\mathcal{L}(E,X)}$;

per acquisire la tesi, si provi allora che
$\lim\limits_n \int_T \| f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) \|_{\mathcal{L}(E,X)} \, dt = 0.$

Intanto, la funzione $\| f'_{\mathbf{y}}(\cdot, \mathbf{y}_n)(\mathbf{v}) - f'_{\mathbf{y}}(\cdot, \mathbf{y})(\mathbf{v}) \|_{\mathcal{L}(E,X)}$ è misurabile per ogni $\mathbf{v} \in V$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, per la prima delle osservazioni preliminari;
infatti, essa è composizione di $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(E,X)}$, continua, con la funzione $f'_{\mathbf{y}}(\cdot, \mathbf{y}_n)(\mathbf{v}) - f'_{\mathbf{y}}(\cdot, \mathbf{y})(\mathbf{v})$, misurabile in quanto integrabile secondo Bochner per il primo punto della tesi, già acquisito.

Si osserva ora che, essendo E separabile per ipotesi, anche $\overline{B}(\mathbf{0}_E, 1)$ è separabile;
allora, esiste una successione $\{\mathbf{v}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}_E, 1)$ densa in $\overline{B}(\mathbf{0}_E, 1)$.

Allora, per ogni $t \in T$ si ha

$\| f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) \|_{\mathcal{L}(E,X)} = \sup\limits_{\mathbf{v} \in E \,,\, \|\mathbf{v}\|_E \leq 1} \| f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n)(\mathbf{v}) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v}) \|_{\mathcal{L}(E,X)}$ Per definizione di $\| f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) \|_{\mathcal{L}(E,X)}$

$= \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \| f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_n)(\mathbf{v}_k) - f'_{\mathbf{y}}(t, \mathbf{y})(\mathbf{v}_k) \|_{\mathcal{L}(E,X)}$ Per la prima osservazione preliminare

Essendo $\|f'_{\mathbf{y}}(\cdot,\mathbf{y}_n)(\mathbf{v}_k) - f'_{\mathbf{y}}(\cdot,\mathbf{y})(\mathbf{v}_k)\|_{\mathcal{L}(E,X)}$ misurabile per ogni $k \in \mathbb{N}$ per quanto visto prima, segue dalla seconda osservazione preliminare che $\|f'_{\mathbf{y}}(\cdot,\mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(\cdot,\mathbf{y})\|_{\mathcal{L}(E,X)}$ è misurabile.

Infine, essendo $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che
$\mathbf{y}_n \in \overline{B}(\mathbf{y}, r_{\mathbf{y}})$ per ogni $n \geq \nu$;

per ogni $n \geq \nu$ si ha allora
$\|f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})\|_{\mathcal{L}(E,X)} \leq \|f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y}_n)\|_{\mathcal{L}(E,X)} + \|f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})\|_{\mathcal{L}(E,X)} \leq 2M_{\mathbf{y}}(t)$ per ogni $t \in T$, per sub-additività delle norme, per costruzione di ν e per ipotesi su $M_{\mathbf{y}}(t)$.
La funzione maggiorante è sommabile per ipotesi su $M_{\mathbf{y}}(t)$.

Allora, la successione $\left\{\|f'_{\mathbf{y}}(\cdot,\mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(\cdot,\mathbf{y})\|_{\mathcal{L}(E,X)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza dominata ([Proposizione 24.7]), per cui si ha

$\lim\limits_{n} \int_T \|f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y}_n) - f'_{\mathbf{y}}(t,\mathbf{y})\|_{\mathcal{L}(E,X)}\, dt = \mathbf{0}$, come si voleva.
■