Premesse

Notazione: Insieme delle funzioni continue

Siano X e Y due spazi topologici.
$C^0(X, Y)$ denota l'insieme delle funzioni continue da X in Y.

Limite uniforme di una successione di funzioni continue

Sia X uno spazio topologico.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.
Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^0(X, Y)$ una successione convergente a f secondo ρ_d, cioè tale che $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$.

Allora, $f \in C^0(X, Y)$.

Insieme delle funzioni continue su un compatto a valori in uno spazio metrico

Sia X uno spazio topologico compatto.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Si hanno i seguenti fatti:

1. $C^0(X, Y) \subseteq TB(X, Y)$ ($\subseteq \mathcal{B}(X, Y)$);
2. $C^0(X, Y)$ è chiuso in $\mathcal{B}(X, Y)$ rispetto alla metrica ρ_d.
3. Se $\mathcal{B}(X, Y)$ è completo, allora $C^0(X, Y)$ è completo.

Infatti, vale la **1.** in quanto funzioni continue su un compatto hanno immagine compatta, dunque sono totalmente limitate.

Vale la **2.** in quanto il limite uniforme di una successione di funzioni continue è anch'esso una funzione continua.

Si deduce la **3.** dalla **2.**, in quanto i sottoinsiemi chiusi di uno spazio completo sono tutti e soli i sottoinsiemi completi rispetto alla metrica indotta su di essi.

Proposizione: Completezza di uno spazio metrico e dell'insieme delle funzioni limitate su di esso

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. $(\mathcal{B}(X, Y), \rho_d)$ è completo;
2. (Y, d) è completo.

Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)

Si supponga $(\mathcal{B}(X, Y), \rho_d)$ completo.
Sia dunque $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ una successione di Cauchy, e si provi che essa converge.

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ definita ponendo $f_n(x) = y_n$ per ogni $x \in X$.

Si osserva che $\rho_d(f_n, f_m) = d(y_n, y_m)$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}$;
essendo $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in Y, ne segue che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathcal{B}(X, Y)$.
Essendo $\mathcal{B}(X, Y)$ completo per ipotesi, si ha $f_n \xrightarrow{\rho_d} f$.

Cioè, $\lim_n \sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) = 0$, ossia $\lim_n \sup_{x\in X} d(y_n, f(x)) = 0$.
Segue per confronto che $\lim_n d(y_n, f(x)) = 0$ per ogni $x \in X$, da cui si deduce che f è costante per unicità del limite, e detto y il valore di tale costante si ha $y_n \xrightarrow{d} y$.
$\blacksquare$

Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 1.)

Si supponga (Y, d) completo.
Sia dunque $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ una successione di Cauchy, e si provi che essa converge.

Essendo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, per definizione si ha che $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall m, n \geq \nu, \quad \sup_{x\in X} d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$.

Poiché $\sup_{x\in X} d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ implica $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ per ogni $x \in X$, ne segue che la successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ è di Cauchy per ogni $x \in X$;
essendo Y completo per ipotesi, risulta ben definita la funzione $f : X \to Y$ definita ponendo $f(x) = \lim_n f_n(x)$ per ogni $x \in X$.

Si provi che $f_n \xrightarrow{\rho_d} f$, mostrando che $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$, cioè
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq \nu, \ \forall x \in X, \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Si fissi quindi $\varepsilon > 0$.
Essendo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \in \nu$, $\sup_{x\in X} d(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Siano $n \geq \nu$ e $x \in X$.
Per ogni $m \geq \nu$, si ha

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) \quad \text{Disuguaglianza triangolare}$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + d(f_m(x), f(x))$ Dalla definizione di ν, essendo $m, n \geq \nu$

Vale inoltre $\lim_m d(f_m(x), f(x)) = 0$ per definizione di f, per cui segue per confronto che $d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 = \frac{\varepsilon}{2}$.

Dunque, per ogni $n \geq \nu$ e per ogni $x \in X$ si ha $d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

■

Uniforme continuità

Siano (X, ρ) e (Y, d) due spazi metrici.

Una funzione $f : X \to Y$ si dice uniformemente continua quando
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : \rho(x, y) < \delta,\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

L'uniforme continuità non è definibile su spazi topologici, in quanto è necessaria la nozione di distanza.

Le funzioni uniformemente continue sono continue; il viceversa generalmente non vale.

Relativa (sequenziale) compattezza

Sia X uno spazio topologico.
Sia $A \subseteq X$.

A si dice relativamente (sequenzialmente) compatto quando $\overline{A}$ è (sequenzialmente) compatto.

Osservazione

Sia (X, ρ) uno spazio metrico.
Sia $A \subseteq X$;
In virtù della caratterizzazione della compattezza di uno spazio metrico, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. A è relativamente compatto;
2. A è relativamente sequenzialmente compatto;
3. A è totalmente limitato e $\overline{A}$ è completo.

Equi-continuità e equi-uniforme continuità

⌘ Definizione: Equi-continuità

Siano (X, ρ) e (Y, d) due spazi metrici.
Sia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$.
Le funzioni in $\mathcal{F}$ si dicono **equi-continue** quando
$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X,\ \exists \delta_x > 0 : \forall y \in X : \rho(x, y) < \delta_x,\ \forall f \in \mathcal{F},\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

⌘ Definizione: Equi-uniforme continuità

Siano (X, ρ) e (Y, d) due spazi metrici.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni da X in Y.
Le funzioni in $\mathcal{F}$ si dicono **equi-uniformemente continue** quando
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : \rho(x, y) < \delta, \forall f \in \mathcal{F},\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

Osservazione

Ogni funzione in una famiglia di funzioni equi-(uniformemente) continue è (uniformemente) continua.

Osservazione

Le funzioni in una famiglia di funzioni equi-uniformemente continue sono anche equi-continue.

Proposizione 5.1: Equi-continuità di funzioni su un compatto implica la equi-uniforme continuità

Siano (X, ρ) e (Y, d) due spazi metrici, con X compatto.
Sia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ una famiglia di funzioni equi-continue.

Allora, esse sono anche equi-uniformemente continue.

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$.
Per equicontinuità delle funzioni in $\mathcal{F}$, per ogni $x \in X$ esiste $\delta_x > 0$ per cui valga $d(f(x), f(y))$ per ogni $y \in X$ con $\rho(x, y) < \delta_x$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Si consideri l'insieme $\left\{B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right) \mid x \in X\right\}$;
questo è un ricoprimento di aperti per X, che è compatto.
Allora, esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$.

Sia $\delta^* = \frac{1}{2} \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} \delta_{x_i}$; si provi che tale valore è valido per far valere la condizione della definizione di equi-uniforme continuità.

Siano dunque $x, y \in X$ con $\rho(x,y) < \delta^*$, e sia $f \in \mathcal{F}$;
si valuti $d(f(x), f(y))$.

Sia $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $x \in B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$, che esiste essendo $\left\{B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)\right\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ un ricoprimento di X.

Si osservi che

$$\begin{aligned} \rho(x_i, y) &\leq \rho(x_i, x) + \rho(x, y) && \text{Disuguaglianza triangolare} \\ &< \frac{\delta_{x_i}}{2} + \delta^* && \text{In quanto } x \in B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \text{ e } \rho(x,y) < \delta^* \\ &\leq \delta_{x_i} && \text{In quanto } \delta^* = \frac{1}{2} \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \delta_{x_i} \end{aligned}$$

Allora,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(y)) && \text{Disuguaglianza triangolare} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon && \text{Per definizione di } \delta_{x_i}\text{, in quanto } x, y \in B(x_i, \delta_{x_i}) \end{aligned}$$

Segue dunque la tesi.

■

Proposizione 5.2: Caratterizzazione della relativa compattezza di un insieme di funzioni continue su un compatto in un completo

Sia (X, ρ) uno spazio metrico compatto.
Sia (Y, d) uno spazio metrico completo.
Sia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$.

Allora, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. $\mathcal{F}$ è relativamente compatto in $\left(C^0(X,Y),\rho_d\right)$;
2. Le funzioni in $\mathcal{F}$ sono equi-continue e $\mathcal{F}(x)$ è relativamente compatto in (Y,d) per ogni $x \in X$;
3. Le funzioni in $\mathcal{F}$ sono equi-continue e $\mathcal{F}(X)$ è relativamente compatto in (Y,d).

Osservazioni preliminari

1. $\mathcal{F} \subseteq TB(X,Y)$; questa è una delle osservazioni presenti tra le premesse.
   Pertanto, la caratterizzazione espressa nella [Proposizione 4.3] è applicabile su $\mathcal{F}$.
2. L'equi-continuità delle funzioni di $\mathcal{F}$ è equivalente alla loro equi-uniforme continuità, essendo definite su X compatto per ipotesi.
3. Lo spazio $\left(C^0(X,Y),\rho_d\right)$ è completo, essendo (Y,d) completo; questo fatto segue dalla proposizione e dalle osservazioni su $C^0(X,Y)$ presenti tra le premesse.
4. Se (S,d) è uno spazio metrico completo, la relativa compattezza di un insieme $A \subseteq S$ equivale alla totale limitatezza di A, rispetto a d.
   Infatti, A è relativamente compatto se e solo se A è totalmente limitato e $\overline{A}$ è completo;
   essendo (S,d) completo, $\overline{A}$ è automaticamente completo in quanto chiuso.
5. Segue dalle osservazioni **3.** e **4.** che $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(x)$ con $x \in X$, e $\mathcal{F}(X)$ sono relativamente compatti se e solo se sono totalmente limitati.

Dimostrazione preliminare 1: (1. $\Rightarrow$ Funzioni in $\mathcal{F}$ equi-continue)

Sia $\mathcal{F}$ relativamente compatto in $C^0(X,Y)$ rispetto a ρ_d.

Sia $\varepsilon > 0$.

$\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $C^0(X,Y)$, essendo relativamente compatto;
allora, dalla definizione segue che esistono $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ con $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ dimodoché $\operatorname{\mathbf{diam}}(\mathcal{F}_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, si fissi $f_i \in \mathcal{F}_i$.
Essendo $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F} \subseteq C^0(X,Y)$, f_i è continua su X compatto, dunque uniformemente continua.
Allora, esiste $\delta_i > 0$ tale che, per ogni $x, y \in X$ con $\rho(x,y) < \delta_i$, si abbia $d(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sia $\delta^* = \min\limits_{i \in \{1, \dots, n\}} \delta_i$.

Siano $x, y \in X$ con $\rho(x,y) < \delta^*$.
Sia $f \in \mathcal{F}$, e sia $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $f \in \mathcal{F}_i$, che esiste in quanto $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ ricoprono $\mathcal{F}$.
Si ha

$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y))$	Disuguaglianza triangolare applicata due volte
$\leq \operatorname{\mathbf{diam}}(\mathcal{F}_i) + \frac{\varepsilon}{3} + \operatorname{\mathbf{diam}}(\mathcal{F}_i)$	La maggiorazione del primo e del terzo addendo seguono dal fatto che $f, f_i \in \mathcal{F}_i$, per cui $d(f(x), f_i(x)) \leq \rho_d(f, f_i) \leq \operatorname{\mathbf{diam}}(\mathcal{F}_i)$ La maggiorazione del secondo addendo segue dall'uniforme continuità di f_i in quanto $\rho(x,y) < \delta^* \leq \delta_i$
$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$	Segue per costruzione di $\mathcal{F}_i$

Dunque, le funzioni in $\mathcal{F}$ sono equi-uniformemente continue, quindi equi-continue.
$\blacksquare$

Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)

La [Dimostrazione preliminare 1] prova che, se $\mathcal{F}$ è relativamente compatto in $\left(C^0(X,Y), \rho_d\right)$, allora le sue funzioni sono equi-continue.

Basta allora provare, sempre sotto l'ipotesi di $\mathcal{F}$ relativamente compatto in $\left(C^0(X,Y), \rho_d\right)$, la totale limitatezza di $\mathcal{F}(x)$ in (Y,d) per ogni $x \in X$.

Poiché $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $\left(C^0(X,Y), \rho_d\right)$ essendo ivi relativamente compatto per ipotesi, segue dalla [Proposizione 4.3] che $\mathcal{F}(x)$ è totalmente limitato in (Y,d) per ogni $x \in X$.
■

Dimostrazione preliminare 2: (Equi-continuità delle funzioni di $\mathcal{F} \Rightarrow$ Equi-totale limitatezza delle funzioni di $\mathcal{F}$)

Sia $\varepsilon > 0$.
Per equi-continuità, cioè equi-uniforme continuità, delle funzioni di $\mathcal{F}$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in X$ con $\rho(x,y) < \delta$, valga $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.

X è totalmente limitato in quanto compatto; pertanto, esistono $X_1, \dots, X_n$ con $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$ tali che $\operatorname{diam}(X_i) < \delta$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Poiché $\operatorname{diam}(X_i) < \delta$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, dall'equi-uniforme continuità delle funzioni in $\mathcal{F}$ segue che $\omega_f(X_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Pertanto, le funzioni in $\mathcal{F}$ sono equi-totalmente limitate.
■

Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 3.)

Basta mostrare che, se $\mathcal{F}(x)$ è totalmente limitato per ogni $x \in X$, allora $\mathcal{F}(X)$ è totalmente limitato.

Essendo le funzioni in $\mathcal{F}$ equi-continue, esse sono equi-totalmente limitate per la [Dimostrazione preliminare 2].
Allora, segue la tesi dalla [Proposizione 4.3].
■

Dimostrazione (2. $\Rightarrow$ 3.)

Basta mostrare che, se $\mathcal{F}(X)$ è totalmente limitato in Y, allora $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $C^0(X, Y)$.

Essendo le funzioni in $\mathcal{F}$ equi-continue, esse sono equi-totalmente limitate per la [Dimostrazione preliminare 2].
Allora, segue dalla [Proposizione 4.3] segue che $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in $(TB(X, Y), \rho_d)$; allora, a maggior ragione $\mathcal{F}$ è totalmente limitato nel sottospazio metrico $(C^0(X, Y), \rho_d)$.
■

Corollario: Teorema di Ascoli-Arzelà

(X, ρ) compatto.
Si consideri $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea.
$\mathcal{F} \subseteq C^0(X, \mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{F}$ è relativamente compatto in $C^0(X, \mathbb{R}^n)$ rispetto a ρ_d se e solo se le funzioni in $\mathcal{F}$ sono equi-continue ed equi-limitate.

Osservazioni preliminari

Considerando $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea, un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato se e solo se è relativamente compatto.
Infatti, se A è relativamente compatto esso è totalmente limitato, dunque limitato.

Viceversa, se A è limitato, anche $\overline{A}$, che è chiuso, è limitato; allora, per il teorema di Heine-Borel $\overline{A}$ è compatto, cioè A è relativamente compatto.

Dimostrazione

Se $\mathcal{F}$ è relativamente compatto, per la proposizione appena dimostrata le sue funzioni sono equi-continue e $\mathcal{F}(X)$ è relativamente compatto, dunque totalmente limitato, dunque limitato.

Viceversa, si supponga che le funzioni in $\mathcal{F}$ siano equi-continue ed equi-limitate.
Allora, $\mathcal{F}(X)$ è limitato in $\mathbb{R}^n$, dunque è relativamente compatto.
Segue di nuovo la tesi dalla proposizione appena dimostrata.
$\blacksquare$