

21 - Introduzione al Calcolo Integrale negli Spazi di Banach

Decomposizioni

⌘ Definizione: Decomposizione di un intervallo chiuso e limitato

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Si dice **decomposizione** di $[a; b]$ una tupla $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$ tale che $a = x_1 < \dots < x_n = b$.

I punti x_1, \dots, x_{n+1} si dicono **capisaldi** di Δ .

L'insieme delle decomposizioni di $[a; b]$ si denota con $\mathcal{D}[a; b]$.

Fissato $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$, si dice **modulo** di Δ il valore $|\Delta| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_i)$.

⌘ Definizione: Decomposizioni canoniche

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $n \in \mathbb{N}$.

Si dice **decomposizione canonica n -esima** di $[a; b]$ la tupla

$\Delta_n := (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+1})$, dove $\tilde{x}_i = a + \frac{i-1}{n}(b-a)$ per ogni $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Essa è una decomposizione di $[a; b]$, essendo i suoi elementi ordinati in maniera strettamente crescente ed essendo $x_1 = a$ e $x_{n+1} = b$.

🔍 Osservazione

Si ha $|\Delta_n| = \frac{b-a}{n}$, essendo $\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i = \frac{b-a}{n}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dunque, si ha in particolare $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

⌘ Definizione: Decomposizioni canoniche

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Siano $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1}), \Delta_2 = (y_1, \dots, y_{m+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$.

Si dice **decomposizione unione** di Δ_1 e Δ_2 la tupla $\Delta_1 \cup \Delta_2 = (z_1, \dots, z_{p+1})$, definita dimodoché:

- $\{z_1, \dots, z_{p+1}\} = \{x_1, \dots, x_{n+1}\} \cup \{y_1, \dots, y_{m+1}\}$;
- $z_1 < \dots < z_{p+1}$.

Essa esiste, è unica ed è una decomposizione di $[a; b]$.

Integrabilità secondo Riemann

⌘ Definizione: Integrabilità secondo Riemann, Integrale

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione.

f si dice integrabile secondo Riemann quando esiste $\mathbf{u} \in X$ tale che:

Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

per ogni $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ con $|\Delta| < \delta$, per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$, si ha

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| < \varepsilon.$$

Q Osservazione

\mathbf{u} è unico.

Infatti, siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ per cui si verifica quanto espresso nella definizione, e si fissi $\varepsilon > 0$.

In corrispondenza a $\frac{\varepsilon}{2}$, esistono allora $\delta_{\mathbf{u}}, \delta_{\mathbf{v}} > 0$ per cui

$$\left\| \sum_{i=1}^h (x_{i+1} - x_i) f(x_i) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ per ogni } \Delta = (x_1, \dots, x_{h+1}) \in \mathcal{D}[a; b] \text{ con } |\Delta| < \delta_{\mathbf{u}};$$

$$\left\| \sum_{i=1}^k (y_{i+1} - y_i) f(y_i) - \mathbf{v} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ per ogni } \Delta = (y_1, \dots, y_{k+1}) \in \mathcal{D}[a; b] \text{ con } |\Delta| < \delta_{\mathbf{v}}.$$

Si consideri la decomposizione canonica $\Delta_n = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+1})$ di $[a; b]$, con $n \in \mathbb{N}$ tale che $|\Delta_n| < \min\{\delta_{\mathbf{u}}, \delta_{\mathbf{v}}\}$, che esiste essendo $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

$$\text{Si ha allora } \left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| < \frac{\varepsilon}{2};$$

si ottiene allora

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| && \text{sommando membro a membro le due disuguaglianze} \\ &= \left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| \\ &\geq \left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) + \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| && \text{Per sub-addittività delle norme} \end{aligned}$$

Ne segue che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, per cui $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Avendo acquisito l'unicità di \mathbf{u} , tale vettore prende il nome di **integrale** di f sull'intervallo $[a; b]$; esso si denota con $\int_a^b f(x) dx$.

Q Osservazione

Se $X = \mathbb{R}$, le nozioni di integrabilità e di integrale secondo Riemann fornite sopra coincidono con quelle definite originariamente per le sole funzioni reali.

Proposizione 21.1: Integrale delle funzioni costanti

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

$\mathbf{k} \in X$.

Sia $c_{\mathbf{k}} : [a; b] \rightarrow X$ la funzione costantemente pari a \mathbf{k} , definita cioè ponendo $c_{\mathbf{k}}(x) = \mathbf{k}$ per ogni $x \in [a; b]$.

$c_{\mathbf{k}}$ è integrabile secondo Riemann, e $\int_a^b c_{\mathbf{k}}(x) dx = (b - a)\mathbf{k}$.

Dimostrazione

Si osserva che, per ogni $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ e per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$ vale

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) c_{\mathbf{k}}(t_i) - (b - a)\mathbf{k} \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \mathbf{k} - (b - a)\mathbf{k} \right\| && \text{Per definizione di } c_{\mathbf{k}} \\ &= \|(b - a)\mathbf{k} - (b - a)\mathbf{k}\| && \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1 = b - a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da questo fatto segue allora che $c_{\mathbf{k}}$ è integrabile, con $\int_a^b c_{\mathbf{k}}(x) dx = (b - a)\mathbf{k}$.

■

Proposizione 21.2: Caratterizzazione dell'integrabilità

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- f è integrabile secondo Riemann;
- Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che
per ogni $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $\Delta_2 = (y_1, \dots, y_{m+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ con $|\Delta_1| < \delta$ e $|\Delta_2| < \delta$, per ogni
 $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$ e per ogni $(s_1, \dots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \dots \times [y_m; y_{m+1}]$, si ha
$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| < \varepsilon.$$

Dimostrazione

Se f è integrabile secondo Riemann, esistono $\mathbf{u} \in X$ e $\delta > 0$ tale che $\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni

$\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$.

Allora, date due decomposizioni $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $\Delta_2 = (y_1, \dots, y_{m+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ con $|\Delta_1| < \delta$ e $|\Delta_2| < \delta$, e fissate due tuple $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$ e $(s_1, \dots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \dots \times [y_m; y_{m+1}]$, si ha

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} + \mathbf{u} - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \mathbf{u} - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| && \text{Per sub-additività delle norme} \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \mathbf{u} \right\| && \text{Per sub-additività delle} \end{aligned}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) - \mathbf{u} \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^m f(x_j^{(m)}) (x_{j+1}^{(m)} - x_j^{(m)}) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^m f(x_j^{(m)}) (x_{j+1}^{(m)} - x_j^{(m)}) - \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) \right\|$$

norme

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Per costruzione di \mathbf{u}

Viceversa, si supponga verificata la condizione del secondo punto.

Per ogni $\varepsilon > 0$, si fissi dunque $\delta_\varepsilon > 0$ dimodoché si verifichi quanto descritto in corrispondenza a ε .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, posta $\Delta_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_{n+1}^{(n)})$ la decomposizione canonica n -esima, si consideri $\sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})$.

La successione $\left\{ \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ è di Cauchy;

infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|\Delta_n| < \delta_\varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$, in quanto $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

Allora, per ogni $m, n \geq \nu$ si ha $|\Delta_m|, |\Delta_n| < \delta_\varepsilon$, e dunque

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) - \sum_{j=1}^m f(x_j^{(m)}) (x_{j+1}^{(m)} - x_j^{(m)}) \right\| < \varepsilon, \text{ per costruzione di } \delta_\varepsilon.$$

Essendo X completo in quanto di Banach per ipotesi, $\left\{ \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge;

sia $\mathbf{u} \in X$ il suo limite.

Si provi che \mathbf{u} verifica la condizione per l'integrabilità di f .

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.

Sia $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\left\| \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n \geq \nu_1$, che esiste per definizione di \mathbf{u} .

Sia $\nu \in \mathbb{N}$ (si supponga $\nu \geq \nu_1$) tale che $|\Delta_n| < \delta_{\varepsilon/2}$ per ogni $n \geq \nu$, che esiste in quanto $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

Sia $\Delta = (x_1, \dots, x_{p+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ con $|\Delta| < \delta_{\varepsilon/2}$, e sia $(t_1, \dots, t_p) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_p; x_{p+1}]$.

Si ha

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{i=1}^p (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^p (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i^{(\nu)}) (x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) + \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i^{(\nu)}) (x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) - \mathbf{u} \right\| \\
& \leq \left\| \sum_{i=1}^p (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i^{(\nu)}) (x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i^{(\nu)}) (x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) - \mathbf{u} \right\| \\
& < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Per
subadditività
delle norme

La
maggiorazione
del primo
addendo
segue
dall'ipotesi per
costruzione di
 $\delta_{\varepsilon/2}$, avendo
posto \$

La tesi è pertanto acquisita.



Proposizione 21.3: Integrabilità delle funzioni continue

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione continua.

Allora, f è integrabile secondo Riemann su $[a; b]$.

Dimostrazione

In virtù della [Proposizione 21.2], si vuole provare la continuità di f mostrando la condizione equivalente da essa indicata

In virtù della [1] (proposizione 21.2), si vuole provare la continuità di f mostrando la condizione equivalente da essa indicata.

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.

Essendo f continua per ipotesi su $[a; b]$ compatto in \mathbb{R} , essa è uniformemente continua;

ne segue che esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $s, t \in [a; b]$ con $|s - t| < \delta$, si ha $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Siano $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $\Delta_2 = (y_1, \dots, y_{m+1})$ due decomposizioni di $[a; b]$ con $|\Delta_1|, |\Delta_2| < \delta$;

si provi che, fissati $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$ e $(s_1, \dots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \dots \times [y_m; y_{m+1}]$, si ha

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| < \varepsilon.$$

Si consideri la decomposizione unione $\Delta_1 \cup \Delta_2 = (w_1, \dots, w_{p+1})$;

$$\text{si provi che } \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \left\| \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Intanto, per ogni $i \in \{1, \dots, n+1\}$, sia $h_i \in \{1, \dots, p+1\}$ tale che $w_{h_i} = x_i$, che esiste ed è unico per definizione di $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Si osserva che $1 = h_1 < \dots < h_{n+1} = p+1$ per definizione di $\Delta_1 \cup \Delta_2$; ne segue che gli insiemi

$\{h_1, \dots, h_2 - 1\}, \dots, \{h_n, \dots, h_{n+1} - 1\}$ costituiscono una partizione di $\{1, \dots, p\}$.

Allora,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| \quad \sum_{h=1}^p \dots = \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} \dots \text{ per quanto osservato sugli } h_i \end{aligned}$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) f(t_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| \quad \text{In quanto } \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) = w_{h_{i+1}} - w_{h_i} = x_{i+1} - x_i \text{ per}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{h=\overline{h_i}}^{\overline{h_{i+1}}-1} (w_{h+1} - w_h) (f(t_i) - f(w_h)) \right\|$$

definizione degli h_i

$$= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) (f(t_i) - f(w_h)) \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} \|(w_{h+1} - w_h) (f(t_i) - f(w_h))\|$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) \|f(t_i) - f(w_h)\|$$

$$< \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}$$

Per subaddittività delle norme

Per assoluta omogeneità delle norme, essendo $w_{h+1} - w_h > 0$ per ogni $h \in \{1, \dots, p\}$

Per costruzione di δ ;

infatti, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ si è posto $t_i \in [x_i; x_{i+1}]$ e per ogni $h \in \{h_i, \dots, h_{i+1} - 1\}$ si ha

$w_h = [w_{h_i}; w_{h_{i+1}}] = [x_i; x_{i+1}]$; essendo $\$$

In quanto

$$\sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) = \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1 = b - a$$

Analogamente si ricava che, $\left\| \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$

Si ottiene allora

$$\varepsilon > \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| + \left\| \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\|$$

Sommando membro a membro le due disuguaglianze appena acquisite

$$= \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| + \left\| \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\|$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) + \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\|$$

Per sub-addittività delle

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^m (y_{h+1} - y_h) f(s_h) \right\| \quad \text{norme}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\|$$

come si voleva.



Proposizione 21.4: Integrale della composizione di funzionali lineari continui con funzioni continue

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione continua.

Sia $\varphi \in X^*$.

Si ha $\int_a^b \varphi(f(x)) \, dx = \varphi\left(\int_a^b f(x) \, dx\right)$.

Osservazioni preliminari

Dalle ipotesi si ha che $\varphi \circ f$ e f sono continue, dunque integrabili ([Proposizione 21.3]); pertanto, gli integrali indicati nella tesi sono ben definiti.

Dimostrazione

Se $\varphi = \mathbf{0}_{X^*}$, si ha $\varphi\left(\int_a^b f(x) \, dx\right) = 0$ essendo φ identicamente nulla su X , e si ha anche $\int_a^b \varphi(f(x)) \, dx = 0$ per la [Proposizione 21.1], essendo $\varphi \circ f$ identicamente nulla su $[a; b]$.

La tesi è dunque acquisita in questo caso.

Si supponga adesso $\varphi \neq \mathbf{0}_{X^*}$.

Si provi che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni decomposizione $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n, x_{n+1}]$ si ha

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \varphi(f(t_i)) - \varphi \left(\int_a^b f(x) dx \right) \right\| < \varepsilon.$$

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.

Essendo f integrabile in quanto continua ([Proposizione 21.3]) esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni decomposizione $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n, x_{n+1}]$ si ha

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \int_a^b f(x) dx \right\| < \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_{X^*}}.$$

Per ogni decomposizione $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n, x_{n+1}]$ si ha allora

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \varphi(f(t_i)) - \varphi \left(\int_a^b f(x) dx \right) \right\| \\ &= \left\| \varphi \left(\sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (f(t_i) - \int_a^b f(x) dx) \right) \right\| && \text{Per linearità di } \varphi \\ &\leq \|\varphi\|_{X^*} \cdot \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (f(t_i) - \int_a^b f(x) dx) \right\| && \text{Dalla disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori lineari continui} \\ &< \|\varphi\|_{X^*} \cdot \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_{X^*}} = \varepsilon && \text{Per costruzione di } \delta \end{aligned}$$

La tesi è dunque acquisita anche in questo caso.

■

Proposizione 21.5: Linearità dell'integrale

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Siano $f, g : [a; b] \rightarrow X$ due funzioni continue.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si ha $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

Dimostrazione

Sia $\varphi \in X^*$.

Si ha

$$\begin{aligned} & \varphi \left(\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx \right) \\ &= \int_a^b \varphi((\alpha f + \beta g)(x)) dx && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \\ &= \int_a^b \varphi(\alpha f(x) + \beta g(x)) dx && \text{Per definizione di } \alpha f + \beta g \\ &= \int_a^b \alpha \varphi(f(x)) + \beta \varphi(g(x)) dx && \text{Per linearità di } \varphi \\ &= \alpha \int_a^b \varphi(f(x)) dx + \beta \int_a^b \varphi(g(x)) dx && \text{Per linearità dell'integrale di funzioni reali, essendo } \varphi \circ f, \varphi \circ g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ &= \alpha \varphi \left(\int_a^b f(x) dx \right) + \beta \varphi \left(\int_a^b g(x) dx \right) && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \\ &= \varphi \left(\alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \right) && \text{Per linearità di } \varphi \end{aligned}$$

Ne segue quindi che $\varphi \left(\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx \right) = \varphi \left(\alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \right)$, per ogni $\varphi \in X^*$;

dal [Corollario 7.5] segue allora $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

■

Proposizione 21.6: Teorema della media generalizzato

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione continua.

Si ha $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \in \overline{\text{conv}} f([a; b])$.

Dimostrazione

Si proceda per assurdo, supponendo $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \notin \overline{\text{conv}} f([a; b])$.

Applicando il Teorema di Separazione ([Teorema 7.10]) all'insieme $\overline{\text{conv}} f([a; b])$, chiuso e convesso, e all'insieme $\left\{ \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \right\}$ compatto, convesso e disgiunto dal primo insieme per ipotesi di assurdo, esiste allora $\varphi \in Y^*$ tale che

$$\sup_{\mathbf{y} \in \overline{\text{conv}} f([a; b])} \varphi(\mathbf{y}) < \varphi\left(\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}\right).$$

Ne segue che, per ogni $x \in [a; b]$, vale

$$\begin{aligned} \varphi(f(x)) &< \varphi\left(\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}\right) && \text{Essendo } f(x) \in f([a; b]) \subseteq \overline{\text{conv}} f([a; b]) \\ &= \frac{1}{b-a} \varphi\left(\int_a^b f(x) dx\right) && \text{Per linearità di } \varphi \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) dx && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \end{aligned}$$

D'altra parte, essendo $\varphi \circ f$ una funzione reale continua, per il teorema della Media per funzioni reali esiste $\tilde{x} \in [a; b]$ tale che $\varphi(f(\tilde{x})) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) dx$, in contrasto con quanto appena ottenuto.

■

Integrale definito su estremi arbitrari

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione continua.

Siano $\alpha, \beta \in [a; b]$.

Se $\alpha < \beta$, si ha $f|_{[\alpha; \beta]}$ integrabile essendo ivi continua; si pone allora $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f|_{[\alpha; \beta]}(x) dx$.

Se $\alpha = \beta$, si pone $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$.

Se $\alpha > \beta$, si ha $f|_{[\beta; \alpha]}$ integrabile essendo ivi continua; si pone allora $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f|_{[\beta; \alpha]}(x) dx$.

Proposizione 21.7: Additività dell'integrale rispetto all'unione di intervalli contigui

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione continua.

Siano $\alpha, \beta, \gamma \in [a; b]$.

Si ha $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$.

Dimostrazione

Se almeno due tra α, β, γ sono uguali, la tesi è di immediata acquisizione.

Si supponga dunque che α, β, γ siano a due a due distinti;
sia $\varphi \in X^*$.

Si ha

$$\varphi \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(f(x)) \, dx && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \\
&= \int_{\alpha}^{\gamma} \varphi(f(x)) \, dx + \int_{\gamma}^{\beta} \varphi(f(x)) \, dx && \text{Per additività rispetto all'unione dell'integrale di funzioni reali, essendo } \varphi \circ f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\
&= \varphi \left(\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx \right) + \varphi \left(\int_{\gamma}^{\beta} f(x) \, dx \right) && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \\
&= \varphi \left(\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) \, dx \right) && \text{Per linearità di } \varphi
\end{aligned}$$

Ne segue quindi che $\varphi \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx \right) = \varphi \left(\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) \, dx \right)$, per ogni $\varphi \in X^*$;

dal [Corollario 7.5] segue allora $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) \, dx$.

■

Funzioni Primitive, Teorema fondamentale del calcolo integrale su spazi di Banach

⌘ Primitiva di una funzione di variabile reale

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $f : I \rightarrow X$ una funzione.

Una funzione $F : I \rightarrow X$ si dice **primitiva** di f quando:

- F è derivabile in I (nel senso dato per funzioni di variabile reale);
- $\dot{F}(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

📄 **Proposizione 21.8:** Famiglia delle primitive di una funzione che le ammette

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $f : I \rightarrow X$ una funzione.

Sia $F : I \rightarrow X$ una primitiva di f .

Le primitive di f sono allora tutte e sole del tipo $F + c_{\mathbf{k}}$, con $\mathbf{k} \in X$ ($c_{\mathbf{k}} : I \rightarrow X$ è la funzione costantemente pari a \mathbf{k} , definita cioè ponendo $c_{\mathbf{k}}(x) = \mathbf{k}$ per ogni $x \in I$).

Dimostrazione

Chiaramente, $F + c_{\mathbf{k}}$ è primitiva di f per ogni $\mathbf{k} \in X$;

infatti, fissato $x \in I$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(F+c_{\mathbf{k}})(x+h)-(F+c_{\mathbf{k}})(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)+\mathbf{k}-F(x)-\mathbf{k}}{h} && \text{Per definizione di } F + c_{\mathbf{k}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= f(x) && \text{Essendo } F \text{ una primitiva di } f \text{ per ipotesi} \end{aligned}$$

Viceversa, sia G una seconda primitiva per f , e si mostri che esiste $\mathbf{k} \in X$ tale che $G = F + c_{\mathbf{k}}$, ossia $G(x) - F(x) = \mathbf{k}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Essendo F e G entrambe primitive di f , si ha $\dot{G}(x) = f(x) = \dot{F}(x)$ per ogni $x \in I$.

Per derivazione di una combinazione lineare di funzioni (che si acquisisce allo stesso modo della derivazione di una combinazione lineare di funzioni reali), si ottiene che

$$(F - G)'(x) = \mathbf{0} \text{ per ogni } x \in I.$$

Ne segue allora che $F - G$ è costante, come si voleva.



⌘ Definizione: Funzione integrale

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione continua.

Sia $x_0 \in [a; b]$.

Si dice **funzione integrale** di f con piede x_0 , la funzione $F_{x_0} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ per ogni $x \in [a; b]$.

📖 Teorema 21.9: Teorema fondamentale del calcolo integrale generalizzato

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione continua.

Sia $x_0 \in [a; b]$.

Sia F_{x_0} la funzione integrale di f con piede x_0 .

F_{x_0} è una primitiva di f .

🔍 Osservazioni preliminari

Sia $x \in [a; b]$.

Sia $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x + h \in [a; b]$.

Si ha $\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{diam } f([x; x + h]) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \text{diam } f([x + h; x]) = 0$.

Infatti, si fissi $\varepsilon > 0$.

Essendo f continua per ipotesi su $[a; b]$ compatto in \mathbb{R} , essa è uniformemente continua;
 esiste allora $\delta > 0$ tale che, per ogni $s, t \in [a; b]$ con $|s - t| < \delta$, si abbia $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sia allora $h \in]0; \delta[$;

Per ogni $s, t \in [x, x + h]$ si ha allora $|s - t| \leq h < \delta$, e dunque $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ per costruzione di δ .

Essendo $\text{diam } f([x; x + h]) = \sup_{s, t \in [x; x + h]} \|f(s) - f(t)\|$, ne segue allora che

$$\text{diam } f([x; x + h]) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Pertanto, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{diam } f([x; x + h]) = 0$.

Il limite $\lim_{h \rightarrow 0^-} \text{diam } f([x + h; x]) = 0$ si mostra in maniera analoga.

Dimostrazione

Si fissi $x \in [a; b]$;

si provi che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = 0.$$

Si studi il limite destro; per il limite sinistro si procede in maniera analoga.

Per ogni $h > 0$ tale che $x + h \in [a; b]$, si ha

$$\frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt}{h} \quad \text{Per definizione di } F_{x_0}$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad \text{Per la [Proposizione 21.7]}$$

$$\in \overline{\text{conv}} f([x; x + h]) \quad \text{Per il teorema della media ([Proposizione 21.6])}$$

Essendo $f(x) \in f([x; x+h])$ e avendo appena ricavato che $\frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} \in \overline{\text{conv}} f([x; x+h])$, dalla [Proposizione 11.6] segue che

$$\left\| \frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} - f(x) \right\| \leq \text{diam } f([x; x+h]).$$

Poiché $\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{diam } f([x; x+h]) = 0$ per le osservazioni preliminari, ne segue che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} - f(x) \right\| = 0, \text{ che corrisponde a ciò che si voleva provare.}$$

■

↪ Corollario 21.10: Teorema di Torricelli-Barrow generalizzato

Sia $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : [a; b] \rightarrow X$ una funzione continua.

Sia $F : [a; b] \rightarrow X$ una primitiva di f , che esiste per il [Teorema 21.9].

Si ha $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

☑ Dimostrazione

Fissato $x_0 \in [a; b]$, sia F_{x_0} la funzione integrale di f con piede x_0 .

Essendo F e F_{x_0} due primitive di f , per la [Proposizione 21.8] esiste $\mathbf{k} \in X$ tale che $F_{x_0}(x) = F(x) + \mathbf{k}$ per ogni $x \in [a; b]$.

Si ha

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^b f(t) dt \quad \text{Per la [Proposizione 21.7]}$$

$$= \int_{x_0}^b f(t) dt - \int_{x_0}^a f(t) dt \quad \text{Per definizione di integrale definito su estremi arbitrari}$$

$$= F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a)$$

Per definizione di F_{x_0}

$$= F(b) + \mathbf{k} - (F(a) + \mathbf{k})$$

Per quanto osservato prima

$$= F(b) - F(a)$$

La tesi è dunque acquisita.

