Premessa
D'ora in poi si denoterà con u' il simbolo $\dot{u}$, inteso come derivata nel senso di funzioni di variabile reale.

Proposizione 26.1: Norma su $C^1\big([a;b],X\big)$ e completezza dello spazio normato risultante

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Si definisca la funzione $\|\cdot\|_{C^1([a;b],X)} : C^1\big([a;b],X\big) \to \mathbb{R}$ ponendo
$f \mapsto \|f\|_{C^1([a;b],X)} := \|f\|_{C^0([a;b],X)} + \|f'\|_{C^0([a;b],X)}$.

Si hanno i seguenti fatti:

- $\|\cdot\|_{C^1([a;b],X)}$ è una norma su $C^1\big([a;b],X\big)$;
- Lo spazio $\Big(C^1\big([a;b],X\big), \|\cdot\|_{C^1([a;b],X)}\Big)$ è di Banach.

Dimostrazione

Che $\|\cdot\|_{C^1([a;b],X)}$ sia una norma su $C^1\big([a;b],X\big)$ segue direttamente dal fatto che $\|\cdot\|_{C^0([a;b],X)}$ è una norma.

Si provi la completezza di $\Big(C^1\big([a;b],X\big), \|\cdot\|_{C^1([a;b],X)}\Big)$.

Sia dunque $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^1\big([a;b],X\big)$ una successione di Cauchy, e si provi che essa converge.

Fissato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_m - f_n\|_{C^1([a;b],X)} < \varepsilon$ per ogni $m, n \geq \nu$;

Si osserva che, dalla definizione di $\|\cdot\|_{C^1([a;b],X)}$, seguono
$\|f_m - f_n\|_{C^1([a;b],X)} \geq \|f_m - f_n\|_{C^0([a;b],X)}$ e $\|f_m - f_n\|_{C^1([a;b],X)} \geq \|f'_m - f'_n\|_{C^0([a;b],X)}$;

ciò significa allora che le successioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono di Cauchy in $\left(C^0\left([a;b],X\right), \|\cdot\|_{C^0([a;b],X)}\right)$, che è completo.

Siano allora $\tilde{f} = \lim\limits_n f_n$ e $\tilde{g} = \lim\limits_n f'_n$, dove tali limiti sono da intendere in $\left(C^0\left([a;b],X\right), \|\cdot\|_{C^0([a;b],X)}\right)$.

Ciò significa che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergono uniformemente, a $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ rispettivamente.
Allora, dal teorema di scambio tra limiti e derivate segue che $\tilde{f}$ è derivabile in $[a;b]$, e si ha $\tilde{f}' = \tilde{g}$.

Ne viene allora che

$$\begin{aligned}
&\lim_n \|f_n - \tilde{f}\|_{C^1([a;b],X)} \\
&= \lim_n \|f_n - \tilde{f}\|_{C^0([a;b],X)} + \|f'_n - \tilde{f}'\|_{C^0([a;b],X)} && \text{Per definizione di } \|\cdot\|_{C^1([a;b],X)} \\
&= \lim_n \|f_n - \tilde{f}\|_{C^0([a;b],X)} + \|f'_n - \tilde{g}\|_{C^0([a;b],X)} && \text{Per quanto osservato prima} \\
&= 0 && \text{Per definizione di } \tilde{f} \text{ e } \tilde{g}
\end{aligned}$$

Dunque, $\{f_n\}$ converge a $\tilde{f}$ in $\left(C^1\left([a;b],X\right), \|\cdot\|_{C^1([a;b],X)}\right)$.

⌘ Notazione: Lo spazio c_0.

Si denota con c_0 lo spazio vettoriale delle successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ infinitesime, con le usuali operazioni definite sulle successioni a valori in uno spazio vettoriale.

Proposizione 26.2: Norma su c_0 e completezza dello spazio normato risultante

Si definisca la funzione $\|\cdot\|_{c_0} : c_0 \to \mathbb{R}$ ponendo
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{c_0} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Si hanno i seguenti fatti:

- $\|\cdot\|_{c_0}$ è una norma su c_0;
- Lo spazio $\left(c_0, \|\cdot\|_{c_0}\right)$ è di Banach.

Dimostrazione

Che $\|\cdot\|_{c_0}$ sia una norma su c_0 segue direttamente dalle proprietà del valore assoluto e dell'estremo superiore.

Si provi la completezza di $\left(c_0, \|\cdot\|_{c_0}\right)$.

Si osserva che $c_0 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (si ricordi che $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni limitate da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$, cioè lo spazio delle successioni a valori reali e limitate), e $\|\cdot\|_{c_0} = (\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})})_{|c_0}$.

Dunque, $(c_0, \|\cdot\|_{c_0})$ è un sottospazio normato di $\left(\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})}\right)$;
Essendo questo completo, per acquisire la completezza di $(c_0, \|\cdot\|_{c_0})$, basta allora mostrare che c_0 è chiuso in $\left(\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})}\right)$
.

Sia dunque $\tilde{s} \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, e sia $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c_0$ una successione convergente a $\tilde{s}$;

si provi che $\tilde{s} \in c_0$, ossia $\lim_k \tilde{s}(k) = 0$.

Si osserva intanto che, per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned}
&|\tilde{s}(k)| = |\tilde{s}(k) - s_n(k) + s_n(k)| \\
&\leq |\tilde{s}(k) - s_{n_0}(k)| + |s_n(k)| && \text{Per la seconda disuguaglianza triangolare} \\
&\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |\tilde{s}(k) - s_n(k)| + |s_n(k)| && \text{Dalle proprietà dell'estremo superiore} \\
&= \|\tilde{s} - s_n\|_{\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})} + |s_n(k)| && \text{Per definizione di } \|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Sia ora $\varepsilon > 0$.

Essendo $\lim_n \|\tilde{s} - s_n\|_{\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})} = 0$ per ipotesi, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\|\tilde{s} - s_n\|_{\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n \geq n_0$.

Essendo $\lim_k s_n(k) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ipotesi, sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|s_{n_0}(k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $k \geq \nu$.

Per la catena di disuguaglianze ottenuta prima, si ha allora che, per ogni $k \geq \nu$, vale

$$\begin{aligned}
&|\tilde{s}(k)| \leq \|\tilde{s} - s_{n_0}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})} + |s_{n_0}(k)| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dunque, $\lim_k \tilde{s}(k) = 0$.

⌘ Definizione: Equi-derivabilità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Sia $\mathcal{F} = \{f_i : A \to \mathbb{R} \mid i \in \mathcal{I}\}$ una famiglia di funzioni derivabili.
Sia $t_0 \in I$.

Le funzioni in $\mathcal{F}$ si dicono **equi-derivabili** in t_0 quando
$\lim\limits_{\lambda\to 0} \sup\limits_{i\in\mathcal{I}} \left| \frac{f_i(t_0+\lambda)-f_i(t_0)}{\lambda} - f_i'(t_0) \right| = 0.$

Le funzioni in $\mathcal{F}$ si dicono **equi-derivabili** su I quando sono equi-derivabili in ogni punto di I.

Proposizione 26.3.1: Caratterizzazione dello spazio $C^1\big([a;b], c_0\big)$, prima parte

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $\boldsymbol{u} = \{u_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}} \in C^1\big([a;b], c_0\big)$.

Allora, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni equi-derivabili, e si ha:

- $\lim\limits_n u_n(t) = \lim\limits_n u_n'(t) = 0$ per ogni $t \in [a;b]$;
- La successione $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ è costituita da funzioni equi-continue ed equi-limitate;
- $\boldsymbol{u}' = \{u_n'(\cdot)\}$.

Dimostrazione

Essendo per ipotesi $\boldsymbol{u}(t) \in c_0$ per ogni $t \in [a;b]$, si ha $\lim\limits_n u_n(t) = 0$ per definizione di c_0.

Essendo per ipotesi $\boldsymbol{u}$ di classe C^1, risulta ben definita la derivata $\boldsymbol{u}'$ e si ha

$\lim\limits_{\lambda\to 0} \left\| \frac{\boldsymbol{u}(t+\lambda)-\boldsymbol{u}(t)}{\lambda} - \boldsymbol{u}'(t) \right\|_{c_0} = 0;$

posto $\boldsymbol{u}' = \{v_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$, si ha cioè

$\lim\limits_{\lambda\to 0} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{u_n(t+\lambda)-u_n(t)}{\lambda} - v_n(t) \right| = 0$, per definizione di $\|\cdot\|_{c_0}$.

Ne segue che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni equi-derivabili, e si ha $u_n' = v_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
dunque, $u' = \{u_n'(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Anche $u'(t) \in c_0$ per ogni $t \in [a;b]$ ne viene che $\lim_n u_n'(t) = 0$, essendo derivata (nel senso delle funzioni di variabile reale) di una funzione a valori in c_0;
avendo acquisito che $u' = \{u_n'(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$, ne segue che $\lim_n u_n'(t) = 0$ per definizione di c_0.

Essendo per ipotesi u di classe C^1, u' continua su $[a;b]$ compatto, dunque è limitata e uniformemente continua.

Dalla limitatezza di u' segue l'esistenza di $M > 0$ tale che $\|u'(t)\|_{c_0} \leq M$ per ogni $t \in [a;b]$;
dalla definizione di $\|\cdot\|_{c_0}$ e dal fatto che $u' = \{u_n'(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$, si ha allora che
$\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n'(t)| \leq M$ per ogni $t \in [a;b]$.
Ne viene che la successione $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ è costituita da funzioni equi-limitate.

Dall'uniforme continuità di u' si ha che
per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $t, s \in [a;b]$ con $|t-s| < \delta$, si abbia $\|u'(t) - u'(s)\|_{c_0} < \varepsilon$, ossia
$\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n'(t) - u_n'(t)| < \varepsilon$ per definizione di c_0.
Ne viene che la successione $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ è costituita da funzioni equi-uniformemente continue, dunque equi-continue.

La tesi è allora acquisita.
■

Proposizione 26.3.2: Caratterizzazione di $C^1([a;b], c_0)$, seconda parte

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $\{u_n : [a;b] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni equi-derivabili, tale che:

- $\lim_n u_n(t) = \lim_n u'_n(t) = 0$ per ogni $t \in [a;b]$;
- La successione $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia costituita da funzioni equi-continue.

Sia $\boldsymbol{u} := \{u_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Si ha $\boldsymbol{u} \in C^1\big([a;b], c_0\big)$.

Dimostrazione

Si osserva intanto che $\boldsymbol{u}\big([a;b]\big) \subseteq c_0$ in quanto $\lim_n u_n(t) = 0$ per ogni $t \in [a;b]$ per ipotesi.

Sia $\boldsymbol{v} = \{u'_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}} : [a;b] \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ denota l'insieme delle successioni a valori reali);
Si osserva che $\boldsymbol{v}\big([a;b]\big) \subseteq c_0$ in quanto $\lim_n u'_n(t) = 0$ per ogni $t \in [a;b]$ per ipotesi.

Per ipotesi di equi-derivabilità di $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si ha che $\lim_{\lambda\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{u_n(t+\lambda)-u_n(t)}{\lambda} - u'_n(t) \right| = 0$;
cioè, si ha $\lim_{\lambda\to 0} \left\| \frac{\boldsymbol{u}(t+\lambda)-\boldsymbol{u}(t)}{\lambda} - \boldsymbol{v}(t) \right\|_{c_0} = 0$, per definizione di $\|\cdot\|_{c_0}$.
Dunque, $\boldsymbol{u}$ è derivabile in $[a;b]$, e si ha $\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{v}(t)$ per ogni $t \in [a;b]$.

Per ipotesi, la successione $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è costituita da funzioni equi-continue su $[a;b]$ compatto; allora, esse sono anche equi-uniformemente continue per la [Proposizione 5.1].

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $t, s \in [a;b]$ con $|t-s| < \delta$, si abbia $|u'_n(t) - u'_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ne segue allora che $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u'_n(t) - u'_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ per ogni $t, s \in [a;b]$ con $|t-s| < \delta$, dunque $\|\boldsymbol{u}'(t) - \boldsymbol{u}'(s)\|_{c_0} < \varepsilon$ per definizione di $\|\cdot\|_{c_0}$ e avendo acquisito che $\boldsymbol{u}'(t) = \{u'_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ciò significa allora che $\boldsymbol{u}'$ è uniformemente continua su $[a;b]$, dunque $\boldsymbol{u}$ è di classe C^1.

La tesi è allora acquisita.

■

⌘ Definizione: Equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma implicita

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $A \subseteq \mathbb{R} \times X \times X$.
Sia $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio normato.
Sia $f : A \to Y$.

Si denota con $f(t, u, u') = \mathbf{0}$ l'**equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma implicita**, associata a f;

essa consiste nella ricerca di intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$ e di funzioni $u : I \to X$ di classe C^1, tali che $\big(t, u(t), u'(t)\big) \in A$ e $f\big(t, u(t), u'(t)\big) = \mathbf{0}_Y$, per ogni $t \in I$.

Se f ha una legge del tipo $(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{y} - g(t, \mathbf{x})$ per qualche funzione g, l'equazione differenziale si scrive allora come $u' - g(t, u) = \mathbf{0}$ oppure $u' = g(t, u)$;
un'equazione di questo tipo si dice **in forma normale**.

⌘ Definizione: Problema di Cauchy

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $A \subseteq \mathbb{R} \times X \times X$.
Sia $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio normato.
Sia $f : A \to Y$.
Sia $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times X$ tale che $f(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$.
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo tale che $t_0 \in I$.

Si denota con $\begin{cases} f(t,u,u') = \mathbf{0} \;\; \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ u'(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$ il **problema di Cauchy** associato a f e $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$;

esso consiste nella ricerca di funzioni $u : I \to X$ di classe C^1, tali che:

- $\big(t, u(t), u'(t)\big) \in A$ e $f\big(t, u(t), u'(t)\big) = 0$, per ogni $t \in I$;
- $u(t_0) = \mathbf{x}_0$;
- $u'(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Teorema 26.1: Esistenza e unicità della soluzione al problema di Cauchy in forma normale

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.
Sia $f : I \times X \to X$ una funzione continua;
si supponga che esista una funzione $L : I \to \mathbb{R}_0^+$ continua, tale che
$\|f(t,\mathbf{x}) - f(t,\mathbf{y})\| \leq L(t) \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, per ogni $t \in I$ e per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.
Sia $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times X$.

Il problema $\begin{cases} u' = f(t,u) = \mathbf{0} \;\; \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$ ammette un'unica soluzione.

Dimostrazione

Si supponga dapprima I compatto, ossia del tipo $[a;b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Si definisca l'operatore $\Phi : C^0\big([a;b], X\big) \to C^0\big([a;b], X\big)$ ponendo
$\Phi(u)(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\, ds$ per ogni $u \in C^0\big([a;b], X\big)$ e per ogni $t \in [a;b]$;
esso è ben definito, cioè $\Phi(u)$ è continuo per ogni $u \in C^0\big([a;b], X\big)$, essendo la funzione integrale $t \mapsto \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\, ds$ di classe C^1 per il teorema fondamentale del calcolo integrale ([Teorema 21.9]).

Sempre per tramite di tale teorema, si osserva che u è soluzione del problema $\begin{cases} u' = f(t,u) = \mathbf{0} \ \ \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$, se e solo se $\Phi(u) = u$.

Per acquisire la tesi, si provi dunque che Φ ammette un unico punto fisso, facendo uso del teorema di Banach-Caccioppoli.

Poiché la funzione L è continua su I compatto, essa ammette massimo;
sia dunque $L^* = \max\limits_{t \in [a;b]} L(t)$ (che si nota essere nonnegativo in quanto L è nonnegativa) e sia $M > L^*$.

Si definisca la funzione $\|\cdot\|^*_{C^0([a;b],X)} : C^0\big([a;b],X\big) \to \mathbb{R}$, ponendo $u \mapsto \|u\|^*_{C^0([a;b],X)} := \sup\limits_{t \in [a;b]} e^{-M|t-t_0|} \cdot \|u(t)\|$ per ogni $u \in C^0\big([a;b],X\big)$;

essa è una norma su $C^0\big([a;b],X\big)$, e si osserva che
$e^{-M(b-a)}\|u\|_{C^0([a;b],X)} \leq \|u\|^*_{C^0([a;b],X)} \leq \|u\|_{C^0([a;b],X)}$ per ogni $u \in C^0\big([a;b],X\big)$, dove $\|\cdot\|_{C^0([a;b],X)}$ è la norma usuale su $C^0\big([a;b],X\big)$.

Allora, le due norme $\|\cdot\|^*_{C^0([a;b],X)}$ e $\|\cdot\|_{C^0([a;b],X)}$ sono equivalenti;
essendo $\Big(C^0\big([a;b],X\big), \|\cdot\|_{C^0([a;b],X)}\Big)$ completo, ne viene allora che anche $\Big(C^0\big([a;b],X\big), \|\cdot\|^*_{C^0([a;b],X)}\Big)$ è completo.

Resta da mostrare che Φ è una contrazione (rispetto alla norma $\|\cdot\|^*_{C^0([a;b],X)}$).

Siano $u, v \in C^0\big([a;b],X\big)$;
per ogni $t \in [a;b]$, si ha

$\|\Phi(u)(t) - \Phi(u)(t)\| = \left\|\int_{t_0}^t f(s,u(s)) - f(s,v(s))\,ds\right\|$	Per definizione di Φ e per linearità dell'integrale di Riemann
$\leq \left\|\int_{t_0}^t \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|\,ds\right\|$	Per maggiorazione della norma di un integrale di Riemann (il valore assoluto va scritto, per ovviare al caso in cui $t_0 > t$)
$\leq \left\|\int_{t_0}^t L(s) \cdot \|u(s) - v(s)\|\,ds\right\|$	Per ipotesi su L

$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L^* \cdot \|u(s) - v(s)\| \, ds \right|$ Per definizione di L^* e per monotonia dell'integrale di Riemann per funzioni a valori reali

$\leq L^* \cdot \left| \int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\| \, ds \right|$ Per linearità dell'integrale di Riemann, ed essendo $L^* \geq 0$

$= L^* \cdot \left| \int_{t_0}^{t} e^{M|s-t_0|} \cdot e^{-M|s-t_0|} \|u(s) - v(s)\| \, ds \right|$

$\leq L^* \cdot \left| \int_{t_0}^{t} e^{M|s-t_0|} \cdot \|u - v\|^*_{C^0([a;b],X)} \, ds \right|$ Per definizione di $\|\cdot\|^*_{C^0([a;b],X)}$ e per monotonia dell'integrale di Riemann per funzioni a valori reali

$= L^* \|u - v\|^*_{C^0([a;b],X)} \cdot \left| \int_{t_0}^{t} e^{M|s-t_0|} \, ds \right|$ Per linearità dell'integrale di Riemann e per nonnegatività delle norme

$= L^* \|u - v\|^*_{C^0([a;b],X)} \cdot \frac{1}{M} e^{M|t-t_0|}$ In quanto $\left| \int_{t_0}^{t} e^{M|s-t_0|} \, ds \right| = \frac{1}{M} e^{M|t-t_0|}$

Si ha dunque che
$e^{-M|t-t_0|} \cdot \|\Phi(u)(t) - \Phi(u)(t)\| \leq \frac{L^*}{M} \|u - v\|^*_{C^0([a;b],X)}$ per ogni $t \in [a;b]$, da cui segue che

$\|\Phi(u) - \Phi(u)\|^*_{C^0([a;b],X)} \leq \frac{L^*}{M} \|u - v\|^*_{C^0([a;b],X)}$, per definizione di $\|\cdot\|^*_{C^0([a;b],X)}$.

Dunque, rispetto a $\|\cdot\|^*_{C^0([a;b],X)}$ la funzione Φ è Lipschitziana di costante $\frac{L^*}{M}$;
allora, essa è una contrazione, essendo $\frac{L^*}{M} \in [0;1[$ in quanto $0 \leq L^* < M$ per definizione di L^* e per costruzione di M.

Pertanto, Φ ammette un unico punto fisso per il teorema di Banach-Caccioppoli.

Si supponga ora che I non sia un intervallo compatto.

Allora, è comunque possibile costruire una successione non decrescente di intervalli compatti $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dimodoché $t_0 \in I_1$ e $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia allora u_n la soluzione del problema $\begin{cases} u' = f(t,u) = \mathbf{0} \ \ \forall t \in I_n \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$, che esiste ed è unica in quanto questo problema rientra nel caso precedente per costruzione di $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Si osserva che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione u_{n+1} estende u_n, in quanto $I_{n+1} \supseteq I_n$ per costruzione di $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, e $(u_{n+1})_{|I_n} = u_n$ per definizione di u_n.

Allora, risulta ben definita la funzione $u : I \to X$ in cui si pone
$u(t) = u_n(t)$ per ogni $t \in I$, con $n \in \mathbb{N}$ tale che $t \in I_n$.

Essa è soluzione al problema $\begin{cases} u' = f(t,u) = \mathbf{0} \ \ \forall t \in I \\ u(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$, ed è l'unica per unicità degli u_n.

■