3.1 - Generalizzare il Calcolo Differenziale

Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è l'archetipo di tutte le varietà;
non solo è il più semplice, ma localmente ogni varietà assomiglia a $\mathbb{R}^n$, per definizione.

Lo spazio euclideo è speciale perché dispone delle coordinate globali standard date da $(\mathbb{R}^n, \mathbf{id}_{\mathbb{R}^n})$.
Questo è un vantaggio, perché tutte le costruzioni su $\mathbb{R}^n$ possono essere definite in termini delle coordinate standard e tutti i calcoli possono essere eseguiti esplicitamente;
è di contro uno svantaggio, perché spesso non è ovvio quali concetti definiti in termini di coordinate siano *intrinseci*, cioè indipendenti da queste.
Poiché una varietà in generale non ha coordinate standard, hanno senso solo questi concetti intrinseci.

L'obiettivo che ci poniamo è riformulare l'analisi ordinaria su $\mathbb{R}^n$ in modo libero dalle coordinate, adatto
alla generalizzazione alle varietà.

Le varie classi di differenziabilità sullo spazio euclideo

Il calcolo delle funzioni C^∞ sarà il nostro principale strumento per lo studio delle varietà di dimensioni superiori;
per questo motivo, inizieremo con un'analisi di queste funzioni.

Prima di tutto, richiamiamo velocemente le definizioni delle varie classi di differenziabilità.

> **⌘ Definizione 3.1.1 (Classi di differenziabilità).**
>
> Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $p \in U$.
>
> Una funzione a valori reali $f : U \to \mathbb{R}$ è detta *di classe* C^0 *in* p quando è continua in p.
>
> Dato un intero $k \geq 1$, si dice che $f : U \to \mathbb{R}$ è *di classe* C^k *in* p quando le sue derivate parziali
>
> $$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_j}}$$

di tutti gli ordini $j \leq k$ esistono e sono continue in p.

Si dice che $f : U \to \mathbb{R}$ è *di classe* C^∞ *(o liscia) in* p se è di classe C^k per ogni $k \geq 0$;
in altre parole, le sue derivate parziali $\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_j}}$ di tutti gli ordini $j \geq 1$ esistono e sono continue in p.

Una funzione a valori vettoriali $f : U \to \mathbb{R}^m$ è detta *di classe* C^k *in* p (con $k \geq 0$ intero o $k = \infty$), quando tutte le sue funzioni componente $f_1, \ldots, f_m$ sono di classe C^k in p.

Diciamo infine che $f : U \to \mathbb{R}^m$ è *di classe* C^k *su* U (con $k \geq 0$ intero o $k = \infty$) quando è di classe C^k in ogni punto di U.

Dalla definizione segue che C^k implica C^0 per ogni k, e C^k implica C^h se $k \geq h$ o $k = \infty$;
le implicazioni inverse non valgono.

Esempio 3.1.2 (Controesempi alle implicazioni inverse).

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^{1/3}$ è di classe C^0 ma non C^1, non essendo derivabile in 0.
Considerando le primitive successive di questa funzione, troviamo quindi esempi di funzioni di classe C^k ma non C^{k+1} per ogni $k \geq 0$ intero.

Le funzioni elementari (polinomi, seno, coseno, esponenziali) sono tutte di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$.

Funzioni analitiche

Un'altra classe di differenziabilità è data dalle cosiddette funzioni *analitiche*.

⌘ Definizione 3.1.3 (Funzione analitica).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $p = (p^1, \ldots, p^n) \in U$.

> Una funzione a valori reali $f : U \to \mathbb{R}$ si dice *analitica (o di classe C^ω) in p* quando esiste un intorno $V \subseteq U$ di p in cui f coincide con la sua serie di Taylor in p:
>
> $$f(x) = f(p) + \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \frac{1}{2!}\sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)(x^i - p^i)(x^j - p^j) + \dots + \frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le n} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_k}}(p)(x^{i_1} - p^{i_1})\dots(x^{i_k} - p^{i_k}) + \dots$$
>
> Una funzione a valori vettoriali $f : U \to \mathbb{R}^m$ si dice *analitica in p* quando tutte le sue funzioni componente $f_1, \dots, f_m$ sono di classe C^k in p.
>
> Diciamo infine che $f : U \to \mathbb{R}^m$ è *analitica su U* quando è analitica in ogni punto di U.

Una funzione analitica è necessariamente C^∞;
infatti è noto dall'analisi ordinaria che una serie di potenze convergente si può derivare un numero arbitrario di volte nella sua regione di convergenza, e le derivate sono ottenute derivando i vari addendi.

Ad esempio, se

$$f(x) = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots,$$

allora la derivazione termine a termine dà

$$f'(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots.$$

Anche in questo caso, non è detto che una funzione C^∞ sia analitica.

> **Esempio 3.1.4 (Di funzione liscia, non analitica).**
>
> Si trova che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo
>
> $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$$
>
> è di classe C^∞, e si trova che $\left.\dfrac{d^k f}{dx^k}\right|_{x=0} = 0$ per ogni $k \ge 1$ intero.

> Ma allora, la sua serie di Taylor in 0 è la serie identicamente nulla, che non coincide con f in alcun intorno destro di 0;
> pertanto, f non è analitica.

Il lemma di Hadamard

Anche se una funzione C^∞ non è necessariamente uguale alla sua serie di Taylor, esiste un teorema di Taylor con il resto, che vale addirittura per funzioni C^1, che è spesso sufficiente per i nostri scopi. Nella seguente proposizione dimostriamo il caso più semplice, in cui la serie di Taylor consiste solo nel termine costante $f(p)$.

Ricordiamo che un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *stellato* rispetto a un punto $p \in S$ quando, per ogni $x \in S$, il segmento rettilineo $[p, x]$ è contenuto in S.

Proposizione 3.1.5 (Lemma di Hadamard).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a un punto $p = (p^1, \ldots, p^n) \in U$;
sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k su U, con $k \geq 1$ intero oppure $k \in \{\infty, \omega\}$.

Esistono funzioni $g^1, \ldots, g^n \in C^{k-1}(U)$ (con la convenzione che $\infty - 1 = \infty$ e $\omega - 1 = \omega$) tali che:

- $f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) \cdot g_i(x)$ per ogni $x \in U$;

- $g^i(p) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$.

Dimostrazione

Essendo U stellato è stellato rispetto a p, per ogni $x \in U$ risulta ben definita la mappa $h_x : [0;1] \to \mathbb{R} : \quad t \mapsto f\big(p + t(x-p)\big)$.

Notiamo per prima cosa che

$$f(x) - f(p) = h_x(1) - h_x(0) = \int_0^1 \left.\frac{dh_x}{dt}\right|_\tau d\tau \ ,$$

Riscriviamo ora la derivata che figura nell'integrale;
abbiamo

$$\left.\frac{dh_x}{dt}\right|_\tau = \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{p+\tau(x-p)} \cdot (x^i - p^i) \ ;$$

pertanto, possiamo riscrivere l'espressione precedente così:

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \cdot \int_0^1 \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{p+\tau(x-p)} d\tau \ ,$$

che vale per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Definiamo allora le funzioni $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ al variare di $i \in \{1, \dots, n\}$, ponendo

$$g_i(x) = \int_0^1 \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{p+\tau(x-p)} d\tau$$

La prima condizione è soddisfatta;
da una veloce ispezione della legge si vede che anche il secondo punto è verificato.

■

Notiamo che imporre U stellato è meno restrittivo di quanto sembra;
difatti ogni intorno sferico / cubico aperto è stellato rispetto al centro (addirittura convesso).

Lo spazio delle funzioni differenziabili

Prendiamo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, e definiamo il seguente insieme:

$$C^k(U) = \{f : U \to \mathbb{R} : f \text{ di classe } C^k\},$$

con $k \geq 0$ intero oppure $k \in \{\infty, \omega\}$.

Su questo insieme possiamo definire tre operazioni principali:

- Somma tra funzioni: $(f + g)(p) := f(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})$;
- Prodotto per un numero reale: $(k \cdot f)(p) := k \cdot f(p)$;
- Prodotto tra funzioni: $(f \cdot g)(p) : f(p) \cdot g(p)$.

Con queste operazioni, $C^k(U)$ è una $\mathbb{R}$-*algebra commutativa, associativa e unitaria*;
diventa cioè un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale rispetto alle prime due operazioni, e un anello commutativo e unitario rispetto alla prima e alla terza.
L'unità dell'anello è la funzione costante c_1.