

# 21 - Introduzione al Calcolo Integrale negli Spazi di Banach

## Decomposizioni

### ⌘ Definizione: Decomposizione di un intervallo chiuso e limitato

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Si dice **decomposizione** di  $[a; b]$  una tupla  $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$  tale che  $a = x_1 < \dots < x_n = b$ .

I punti  $x_1, \dots, x_{n+1}$  si dicono **capisaldi** di  $\Delta$ .

L'insieme delle decomposizioni di  $[a; b]$  si denota con  $\mathcal{D}[a; b]$ .

Fissato  $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ , si dice **modulo** di  $\Delta$  il valore  $|\Delta| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_i)$ .

### ⌘ Definizione: Decomposizioni canoniche

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $n \in \mathbb{N}$ .

Si dice **decomposizione canonica  $n$ -esima** di  $[a; b]$  la tupla

$\Delta_n := (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+1})$ , dove  $\tilde{x}_i = a + \frac{i-1}{n}(b-a)$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ .

Essa è una decomposizione di  $[a; b]$ , essendo i suoi elementi ordinati in maniera strettamente crescente ed essendo  $x_1 = a$  e  $x_{n+1} = b$ .

### 🔍 Osservazione

Si ha  $|\Delta_n| = \frac{b-a}{n}$ , essendo  $\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i = \frac{b-a}{n}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Dunque, si ha in particolare  $\lim_n |\Delta_n| = 0$ .

### ⌘ Definizione: Decomposizione unione

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Siano  $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1}), \Delta_2 = (y_1, \dots, y_{m+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ .

Si dice **decomposizione unione** di  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  la tupla  $\Delta_1 \cup \Delta_2 = (z_1, \dots, z_{p+1})$ , definita dimodoché:

- $\{z_1, \dots, z_{p+1}\} = \{x_1, \dots, x_{n+1}\} \cup \{y_1, \dots, y_{m+1}\}$ ;
- $z_1 < \dots < z_{p+1}$ .

Essa esiste, è unica ed è una decomposizione di  $[a; b]$ .

## Integrabilità secondo Riemann

### ⌘ Definizione: Integrabilità secondo Riemann, Integrale

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione.

$f$  si dice integrabile secondo Riemann quando esiste  $\mathbf{u} \in X$  tale che:

Per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

per ogni  $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$  con  $|\Delta| < \delta$ , per ogni  $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$ , si ha  $\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| < \varepsilon$ .

### 🔍 Osservazione

$\mathbf{u}$  è unico.

Infatti, siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$  per cui si verifica quanto espresso nella definizione, e si fissi  $\varepsilon > 0$ .

In corrispondenza a  $\frac{\varepsilon}{2}$ , esistono allora  $\delta_{\mathbf{u}}, \delta_{\mathbf{v}} > 0$  per cui

$$\left\| \sum_{i=1}^h (x_{i+1} - x_i) f(x_i) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ per ogni } \Delta = (x_1, \dots, x_{h+1}) \in \mathcal{D}[a; b] \text{ con } |\Delta| < \delta_{\mathbf{u}};$$

$$\left\| \sum_{i=1}^k (y_{i+1} - y_i) f(y_i) - \mathbf{v} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ per ogni } \Delta = (y_1, \dots, y_{k+1}) \in \mathcal{D}[a; b] \text{ con } |\Delta| < \delta_{\mathbf{v}}.$$

Si consideri la decomposizione canonica  $\Delta_n = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+1})$  di  $[a; b]$ , con  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $|\Delta_n| < \min\{\delta_{\mathbf{u}}, \delta_{\mathbf{v}}\}$ , che esiste essendo  $\lim_n |\Delta_n| = 0$ .

Si ha allora  $\left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $\left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| < \frac{\varepsilon}{2};$

si ottiene allora

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| && \text{sommando membro a membro le due disuguaglianze} \\ &= \left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| \\ &\geq \left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) + \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i) f(\tilde{x}_i) - \mathbf{v} \right\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| && \text{Per sub-additività delle norme} \end{aligned}$$

Ne segue che  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , per cui  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ .

Avendo acquisito l'unicità di  $\mathbf{u}$ , tale vettore prende il nome di **integrale** di  $f$  sull'intervallo  $[a; b]$ ; esso si denota con  $\int_a^b f(x) dx$ .

### Osservazione

Se  $X = \mathbb{R}$ , le nozioni di integrabilità e di integrale secondo Riemann fornite sopra coincidono con quelle definite originariamente per le sole funzioni reali.

### **Proposizione 21.1: Integrale delle funzioni costanti**

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

$\mathbf{k} \in X$ .

Sia  $c_{\mathbf{k}} : [a; b] \rightarrow X$  la funzione costantemente pari a  $\mathbf{k}$ , definita cioè ponendo  $c_{\mathbf{k}}(x) = \mathbf{k}$  per ogni  $x \in [a; b]$ .

$c_{\mathbf{k}}$  è integrabile secondo Riemann, e  $\int_a^b c_{\mathbf{k}}(x) dx = (b - a)\mathbf{k}$ .

#### **Dimostrazione**

Si osserva che, per ogni  $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$  e per ogni  $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$  vale

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) c_{\mathbf{k}}(t_i) - (b - a)\mathbf{k} \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \mathbf{k} - (b - a)\mathbf{k} \right\| && \text{Per definizione di } c_{\mathbf{k}} \\ &= \|(b - a)\mathbf{k} - (b - a)\mathbf{k}\| && \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1 = b - a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da questo fatto segue allora che  $c_{\mathbf{k}}$  è integrabile, con  $\int_a^b c_{\mathbf{k}}(x) dx = (b - a)\mathbf{k}$ .

■

### **Proposizione 21.2: Caratterizzazione dell'integrabilità**

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- $f$  è integrabile secondo Riemann;
- Per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  
per ogni  $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1})$ ,  $\Delta_2 = (y_1, \dots, y_{m+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$  con  $|\Delta_1| < \delta$  e  $|\Delta_2| < \delta$ , per ogni  $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$   
e per ogni  $(s_1, \dots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \dots \times [y_m; y_{m+1}]$ , si ha  $\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| < \varepsilon$ .

### Dimostrazione

Se  $f$  è integrabile secondo Riemann, esistono  $\mathbf{u} \in X$  e  $\delta > 0$  tale che  $\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$  per ogni  $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$  con  $|\Delta| < \delta$  e per ogni  $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$ .

Allora, date due decomposizioni  $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1})$ ,  $\Delta_2 = (y_1, \dots, y_{m+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$  con  $|\Delta_1| < \delta$  e  $|\Delta_2| < \delta$ , e fissate due tuple  $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$  e  $(s_1, \dots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \dots \times [y_m; y_{m+1}]$ , si ha

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} + \mathbf{u} - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \mathbf{u} - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| && \text{Per sub-additività delle norme} \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \mathbf{u} \right\| && \text{Per sub-additività delle norme} \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon && \text{Per costruzione di } \mathbf{u} \end{aligned}$$

Viceversa, si supponga verificata la condizione del secondo punto.

Per ogni  $\varepsilon > 0$ , si fissi dunque  $\delta_\varepsilon > 0$  dimodoché si verifichi quanto descritto in corrispondenza a  $\varepsilon$ .

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , posta  $\Delta_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_{n+1}^{(n)})$  la decomposizione canonica  $n$ -esima, si consideri  $\sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})$ .

La successione  $\left\{ \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)})(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  è di Cauchy;

infatti, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $|\Delta_n| < \delta_\varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$ , in quanto  $\lim_n |\Delta_n| = 0$ .

Allora, per ogni  $m, n \geq \nu$  si ha  $|\Delta_m|, |\Delta_n| < \delta_\varepsilon$ , e dunque

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)})(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) - \sum_{j=1}^m f(x_j^{(m)})(x_{j+1}^{(m)} - x_j^{(m)}) \right\| < \varepsilon, \text{ per costruzione di } \delta_\varepsilon.$$

Essendo  $X$  completo in quanto di Banach per ipotesi,  $\left\{ \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)})(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge;

sia  $\mathbf{u} \in X$  il suo limite.

Si provi che  $\mathbf{u}$  verifica la condizione per l'integrabilità di  $f$ .

Si fissi dunque  $\varepsilon > 0$ .

Sia  $\nu_1 \in \mathbb{N}$  tale che  $\left\| \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)})(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$  per ogni  $n \geq \nu_1$ , che esiste per definizione di  $\mathbf{u}$ .

Sia  $\nu \in \mathbb{N}$  (si supponga  $\nu \geq \nu_1$ ) tale che  $|\Delta_n| < \delta_{\varepsilon/2}$  per ogni  $n \geq \nu$ , che esiste in quanto  $\lim_n |\Delta_n| = 0$ .

Sia  $\Delta = (x_1, \dots, x_{p+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$  con  $|\Delta| < \delta_{\varepsilon/2}$ , e sia  $(t_1, \dots, t_p) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_p; x_{p+1}]$ .

Si ha

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^p (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i^{(\nu)})(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) + \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i^{(\nu)})(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) - \mathbf{u} \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^p (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i^{(\nu)})(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i^{(\nu)})(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}) - \mathbf{u} \right\| \end{aligned}$$

Per subaddittività  
delle norme

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

La tesi è pertanto acquisita.



La maggiorazione del primo addendo segue dall'ipotesi per costruzione di  $\delta_{\varepsilon/2}$ , avendo posto  $|\Delta| < \delta_{\varepsilon/2}$  ed essendo  $|\Delta_\nu| < \delta_{\varepsilon/2}$  per costruzione di  $\nu$ ; La maggiorazione del secondo addendo segue dalla costruzione di  $\nu_1$ , avendo supposto  $\nu \geq \nu_1$

### **Proposizione 21.3: Integrabilità delle funzioni continue**

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione continua.

Allora,  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $[a; b]$ .

#### **Dimostrazione**

In virtù della [Proposizione 21.2], si vuole provare la continuità di  $f$  mostrando la condizione equivalente da essa indicata.

Si fissi dunque  $\varepsilon > 0$ .

Essendo  $f$  continua per ipotesi su  $[a; b]$  compatto in  $\mathbb{R}$ , essa è uniformemente continua;  
 ne segue che esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $s, t \in [a; b]$  con  $|s - t| < \delta$ , si ha  $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .

Siano  $\Delta_1 = (x_1, \dots, x_{n+1})$  e  $\Delta_2 = (y_1, \dots, y_{m+1})$  due decomposizioni di  $[a; b]$  con  $|\Delta_1|, |\Delta_2| < \delta$ ;

si provi che, fissati  $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$  e  $(s_1, \dots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \dots \times [y_m; y_{m+1}]$ , si ha

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| < \varepsilon.$$

Si consideri la decomposizione unione  $\Delta_1 \cup \Delta_2 = (w_1, \dots, w_{p+1})$ ;

si provi che  $\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $\left\| \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Intanto, per ogni  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ , sia  $h_i \in \{1, \dots, p+1\}$  tale che  $w_{h_i} = x_i$ , che esiste ed è unico per definizione di  $\Delta_1 \cup \Delta_2$ .

Si osserva che  $1 = h_1 < \dots < h_{n+1} = p+1$  per definizione di  $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ; ne segue che gli insiemi  $\{h_1, \dots, h_2 - 1\}, \dots, \{h_n, \dots, h_{n+1} - 1\}$  costituiscono una partizione di  $\{1, \dots, p\}$ .

Allora,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| \quad \sum_{h=1}^p \dots = \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} \dots \text{ per quanto osservato sugli } h_i \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) f(t_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) f(w_h) \right\| \quad \text{In quanto } \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) = w_{h_{i+1}} - w_{h_i} = x_{i+1} - x_i \text{ per} \\ & \quad \text{definizione degli } h_i \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) (f(t_i) - f(w_h)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} \|(w_{h+1} - w_h) (f(t_i) - f(w_h))\| \quad \text{Per subaddittività delle norme} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) \|f(t_i) - f(w_h)\| \\
&< \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Per assoluta omogeneità delle norme, essendo  $w_{h+1} - w_h > 0$  per ogni  $h \in \{1, \dots, p\}$

Per costruzione di  $\delta$ ;

infatti, per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  si è posto  $t_i \in [x_i; x_{i+1}]$  e per ogni  $h \in \{h_i, \dots, h_{i+1} - 1\}$  si ha  $w_h = [w_{h_i}; w_{h_{i+1}}] = [x_i; x_{i+1}]$ ; essendo \$

In quanto

$$\sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) = \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1 = b - a$$

Analogamente si ricava che,  $\left\| \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$

Si ottiene allora

$$\varepsilon > \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| + \left\| \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\|$$

Sommando membro a membro le due disuguaglianze appena acquisite

$$= \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| + \left\| \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\|$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) + \sum_{h=1}^p (w_{h+1} - x_h) f(w_h) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\|$$

Per sub-addittività delle norme

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\|$$

come si voleva.



Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione continua.

Sia  $\varphi \in X^*$ .

Si ha  $\int_a^b \varphi(f(x)) dx = \varphi\left(\int_a^b f(x) dx\right)$ .

### Osservazioni preliminari

Dalle ipotesi si ha che  $\varphi \circ f$  e  $f$  sono continue, dunque integrabili ([Proposizione 21.3]); pertanto, gli integrali indicati nella tesi sono ben definiti.

### Dimostrazione

Se  $\varphi = \mathbf{0}_{X^*}$ , si ha  $\varphi\left(\int_a^b f(x) dx\right) = 0$  essendo  $\varphi$  identicamente nulla su  $X$ , e si ha anche  $\int_a^b \varphi(f(x)) dx = 0$  per la [Proposizione 21.1], essendo  $\varphi \circ f$  identicamente nulla su  $[a; b]$ .

La tesi è dunque acquisita in questo caso.

Si supponga adesso  $\varphi \neq \mathbf{0}_{X^*}$ .

Si provi che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni decomposizione  $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$  con  $|\Delta| < \delta$  e per ogni  $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n, x_{n+1}]$  si ha

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \varphi(f(t_i)) - \varphi\left(\int_a^b f(x) dx\right) \right\| < \varepsilon.$$

Si fissi dunque  $\varepsilon > 0$ .

Essendo  $f$  integrabile in quanto continua ([Proposizione 21.3]) esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni decomposizione  $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$  con  $|\Delta| < \delta$  e per ogni  $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n, x_{n+1}]$  si ha

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \int_a^b f(x) dx \right\| < \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_{X^*}}.$$

Per ogni decomposizione  $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$  con  $|\Delta| < \delta$  e per ogni  $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n, x_{n+1}]$  si ha allora

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \varphi(f(t_i)) - \varphi \left( \int_a^b f(x) dx \right) \right\| \\
&= \left\| \varphi \left( \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (f(t_i) - \int_a^b f(x) dx) \right) \right\| && \text{Per linearità di } \varphi \\
&\leq \|\varphi\|_{X^*} \cdot \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (f(t_i) - \int_a^b f(x) dx) \right\| && \text{Dalla disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori lineari continui} \\
&< \|\varphi\|_{X^*} \cdot \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_{X^*}} = \varepsilon && \text{Per costruzione di } \delta
\end{aligned}$$

La tesi è dunque acquisita anche in questo caso.

■

### **Proposizione 21.5: Linearità dell'integrale**

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Siano  $f, g : [a; b] \rightarrow X$  due funzioni continue.

Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Si ha  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$ .

#### **Dimostrazione**

Sia  $\varphi \in X^*$ .

Si ha

$$\begin{aligned}
& \varphi \left( \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx \right) \\
&= \int_a^b \varphi((\alpha f + \beta g)(x)) dx && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \\
&= \int_a^b \varphi(\alpha f(x) + \beta g(x)) dx && \text{Per definizione di } \alpha f + \beta g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \alpha \varphi(f(x)) + \beta \varphi(g(x)) \, dx && \text{Per linearità di } \varphi \\
&= \alpha \int_a^b \varphi(f(x)) \, dx + \beta \int_a^b \varphi(g(x)) \, dx && \text{Per linearità dell'integrale di funzioni reali, essendo } \varphi \circ f, \varphi \circ g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\
&= \alpha \varphi \left( \int_a^b f(x) \, dx \right) + \beta \varphi \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \\
&= \varphi \left( \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx \right) && \text{Per linearità di } \varphi
\end{aligned}$$

Ne segue quindi che  $\varphi \left( \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) \, dx \right) = \varphi \left( \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx \right)$ , per ogni  $\varphi \in X^*$ ;

dal [Corollario 7.5] segue allora  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$ .

■

### **Proposizione 21.6: Teorema della media generalizzato**

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione continua.

Si ha  $\frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b-a} \in \overline{\text{conv}} f([a; b])$ .

### **Dimostrazione**

Si proceda per assurdo, supponendo  $\frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b-a} \notin \overline{\text{conv}} f([a; b])$ .

Applicando il Teorema di Separazione ([Teorema 7.10]) all'insieme  $\overline{\text{conv}} f([a; b])$ , chiuso e convesso, e all'insieme  $\left\{ \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b-a} \right\}$  compatto, convesso e disgiunto dal primo insieme per ipotesi di assurdo, esiste allora  $\varphi \in Y^*$  tale che

$$\sup_{\mathbf{y} \in \overline{\text{conv}} f([a; b])} \varphi(\mathbf{y}) < \varphi \left( \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b-a} \right).$$

Ne segue che, per ogni  $x \in [a; b]$ , vale

$$\varphi(f(x)) < \varphi\left(\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}\right) \quad \text{Essendo } f(x) \in f([a; b]) \subseteq \overline{\text{conv}} f([a; b])$$

$$= \frac{1}{b-a} \varphi\left(\int_a^b f(x) dx\right) \quad \text{Per linearità di } \varphi$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) dx \quad \text{Per la [Proposizione 21.4]}$$

D'altra parte, essendo  $\varphi \circ f$  una funzione reale continua, per il teorema della Media per funzioni reali esiste  $\tilde{x} \in [a; b]$  tale che  $\varphi(f(\tilde{x})) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) dx$ , in contrasto con quanto appena ottenuto.

■

### ⌘ Integrale definito su estremi arbitrari

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione continua.

Siano  $\alpha, \beta \in [a; b]$ .

Se  $\alpha < \beta$ , si ha  $f|_{[\alpha; \beta]}$  integrabile essendo ivi continua; si pone allora  $\int_\alpha^\beta f(x) dx = \int_\alpha^\beta f|_{[\alpha; \beta]}(x) dx$ .

Se  $\alpha = \beta$ , si pone  $\int_\alpha^\beta f(x) dx = 0$ .

Se  $\alpha > \beta$ , si ha  $f|_{[\beta; \alpha]}$  integrabile essendo ivi continua; si pone allora  $\int_\alpha^\beta f(x) dx = - \int_\beta^\alpha f|_{[\beta; \alpha]}(x) dx$ .

### 📄 Proposizione 21.7: Additività dell'integrale rispetto all'unione di intervalli contigui

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione continua.

Siano  $\alpha, \beta, \gamma \in [a; b]$ .

Si ha  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$ .

#### Dimostrazione

Se almeno due tra  $\alpha, \beta, \gamma$  sono uguali, la tesi è di immediata acquisizione.

Si supponga dunque che  $\alpha, \beta, \gamma$  siano a due a due distinti;  
sia  $\varphi \in X^*$ .

Si ha

$$\begin{aligned} & \varphi \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(f(x)) dx && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \\ &= \int_{\alpha}^{\gamma} \varphi(f(x)) dx + \int_{\gamma}^{\beta} \varphi(f(x)) dx && \text{Per additività rispetto all'unione dell'integrale di funzioni reali, essendo } \varphi \circ f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ &= \varphi \left( \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \right) + \varphi \left( \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx \right) && \text{Per la [Proposizione 21.4]} \\ &= \varphi \left( \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx \right) && \text{Per linearità di } \varphi \end{aligned}$$

Ne segue quindi che  $\varphi \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) = \varphi \left( \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx \right)$ , per ogni  $\varphi \in X^*$ ;

dal [Corollario 7.5] segue allora  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$ .

■

## Funzioni Primitive, Teorema fondamentale del calcolo integrale su spazi di Banach

### Primitiva di una funzione di variabile reale

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo.

Sia  $f : I \rightarrow X$  una funzione.

Una funzione  $F : I \rightarrow X$  si dice **primitiva** di  $F$  quando:

- $F$  è derivabile in  $I$  (nel senso dato per funzioni di variabile reale);
- $\dot{F}(x) = f(x)$  per ogni  $x \in I$ .

### **Proposizione 21.8: Famiglia delle primitive di una funzione che le ammette**

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo.

Sia  $f : I \rightarrow X$  una funzione.

Sia  $F : I \rightarrow X$  una primitiva di  $f$ .

Le primitive di  $f$  sono allora tutte e sole del tipo  $F + c_{\mathbf{k}}$ , con  $\mathbf{k} \in X$  ( $c_{\mathbf{k}} : I \rightarrow X$  è la funzione costantemente pari a  $\mathbf{k}$ , definita cioè ponendo  $c_{\mathbf{k}}(x) = \mathbf{k}$  per ogni  $x \in I$ ).

#### **Dimostrazione**

Chiaramente,  $F + c_{\mathbf{k}}$  è primitiva di  $f$  per ogni  $\mathbf{k} \in X$ ;

infatti, fissato  $x \in I$  si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(F+c_{\mathbf{k}})(x+h)-(F+c_{\mathbf{k}})(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)+\mathbf{k}-F(x)-\mathbf{k}}{h} && \text{Per definizione di } F + c_{\mathbf{k}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= f(x) && \text{Essendo } F \text{ una primitiva di } f \text{ per ipotesi} \end{aligned}$$

Viceversa, sia  $G$  una seconda primitiva per  $f$ , e si mostri che esiste  $\mathbf{k} \in X$  tale che  $G = F + c_{\mathbf{k}}$ , ossia  $G(x) - F(x) = \mathbf{k}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Essendo  $F$  e  $G$  entrambe primitive di  $f$ , si ha  $\dot{G}(x) = f(x) = \dot{F}(x)$  per ogni  $x \in I$ .

Per derivazione di una combinazione lineare di funzioni (che si acquisisce allo stesso modo della derivazione di una combinazione lineare di funzioni reali), si ottiene che

$$(F - G)'(x) = \mathbf{0} \text{ per ogni } x \in I.$$

Ne segue allora che  $F - G$  è costante, come si voleva.

■

### ⌘ Definizione: Funzione integrale

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione continua.

Sia  $x_0 \in [a; b]$ .

Si dice **funzione integrale** di  $f$  con piede  $x_0$ , la funzione  $F_{x_0} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \text{ per ogni } x \in [a; b].$$

### 📖 Teorema 21.9: Teorema fondamentale del calcolo integrale generalizzato

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione continua.

Sia  $x_0 \in [a; b]$ .

Sia  $F_{x_0}$  la funzione integrale di  $f$  con piede  $x_0$ .

$F_{x_0}$  è una primitiva di  $f$ .



### Osservazioni preliminari

Sia  $x \in [a; b]$ .

Sia  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $x + h \in [a; b]$ .

Si ha  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{diam } f([x; x + h]) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \text{diam } f([x + h; x]) = 0$ .

Infatti, si fissi  $\varepsilon > 0$ .

Essendo  $f$  continua per ipotesi su  $[a; b]$  compatto in  $\mathbb{R}$ , essa è uniformemente continua; esiste allora  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $s, t \in [a; b]$  con  $|s - t| < \delta$ , si abbia  $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Sia allora  $h \in ]0; \delta[$ ;

Per ogni  $s, t \in [x, x + h]$  si ha allora  $|s - t| \leq h < \delta$ , e dunque  $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$  per costruzione di  $\delta$ .

Essendo  $\text{diam } f([x; x + h]) = \sup_{s, t \in [x; x + h]} \|f(s) - f(t)\|$ , ne segue allora che

$$\text{diam } f([x; x + h]) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Pertanto,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{diam } f([x; x + h]) = 0$ .

Il limite  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \text{diam } f([x + h; x]) = 0$  si mostra in maniera analoga.

### Dimostrazione

Si fissi  $x \in [a; b]$ ;

si provi che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = 0.$$

Si studi il limite destro; per il limite sinistro si procede in maniera analoga.

Per ogni  $h > 0$  tale che  $x + h \in [a; b]$ , si ha

$$\frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt}{h} \quad \text{Per definizione di } F_{x_0}$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad \text{Per la [Proposizione 21.7]}$$

$$\in \overline{\text{conv}} f([x; x+h]) \quad \text{Per il teorema della media ([Proposizione 21.6])}$$

Essendo  $f(x) \in f([x; x+h])$  e avendo appena ricavato che  $\frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} \in \overline{\text{conv}} f([x; x+h])$ , dalla [Proposizione 11.6] segue che

$$\left\| \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} - f(x) \right\| \leq \text{diam } f([x; x+h]).$$

Poiché  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{diam } f([x; x+h]) = 0$  per le osservazioni preliminari, ne segue che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} - f(x) \right\| = 0, \text{ che corrisponde a ciò che si voleva provare.}$$

■

### → Corollario 21.10: Teorema di Torricelli-Barrow generalizzato

Sia  $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ .

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach.

Sia  $f : [a; b] \rightarrow X$  una funzione continua.

Sia  $F : [a; b] \rightarrow X$  una primitiva di  $f$ , che esiste per il [Teorema 21.9].

Si ha  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

### 📄 Dimostrazione

Fissato  $x_0 \in [a; b]$ , sia  $F_{x_0}$  la funzione integrale di  $f$  con piede  $x_0$ .

Essendo  $F$  e  $F_{x_0}$  due primitive di  $f$ , per la [Proposizione 21.8] esiste  $\mathbf{k} \in X$  tale che  $F_{x_0}(x) = F(x) + \mathbf{k}$  per ogni  $x \in [a; b]$ .

Si ha

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t) dt &= \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^b f(t) dt && \text{Per la [Proposizione 21.7]} \\ &= \int_{x_0}^b f(t) dt - \int_{x_0}^a f(t) dt && \text{Per definizione di integrale definito su estremi arbitrari} \\ &= F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a) && \text{Per definizione di } F_{x_0} \\ &= F(b) + \mathbf{k} - (F(a) + \mathbf{k}) && \text{Per quanto osservato prima} \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

La tesi è dunque acquisita.

