4 - Misura di non Compattezza, Equi-totale Limitatezza

Premesse

> Totale limitatezza

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia $A \subseteq Y$.

A si dice totalmente limitato quando

$$orall arepsilon>0, \ \exists A_1,\ldots,A_n\subseteq A: igcup_{i=1}^n A_i=A\wedge \mathrm{diam}(A_i)$$

Ovviamente, la totale limitatezza implica la limitatezza.

> Caratterizzazione della compattezza di uno spazio metrico

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1. X è compatto;
- 2. X è sequenzialmente compatto;
- 3. X è completo e totalmente limitato.

> Relativa (sequenziale) compattezza

Sia X uno spazio topologico.

Sia $A \subseteq X$.

A si dice relativamente (sequenzialmente) compatto quando \overline{A} è (sequenzialmente) compatto.

> Convenzione: Estremi inferiore e superiore dell'insieme vuoto

Si pone per convenzione $\inf(\varnothing) = +\infty$ e $\sup(\varnothing) = -\infty$.

> Metrica uniforme

Sia X un insieme non vuoto.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia \mathcal{F} una famiglia di funzioni limitate da X in Y.

Si definisce la **metrica uniforme** su $\mathcal F$ come la metrica ρ_d (si dimostra che è una metrica) definita ponendo $\rho_d(f,g)=\sup_{x\in X}d(f(x),g(x))$ per ogni $f,g\in \mathcal F.$

 \rightarrow Notazione: $\mathcal{F}(A)$

Siano X e Y non vuoti.

Sia \mathcal{F} una famiglia di funzioni da X in Y.

Sia $A \subseteq X$.

Si pone $\mathcal{F}(A) = \{f(x) \mid x \in A, f \in \mathcal{F}\}.$

Misura di non compattezza secondo Kuratowski

□ Definizione: Misura di non compattezza secondo Kuratowski

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia $A \subseteq Y$ non vuoto.

$$\mathsf{Sia}\; \alpha(A) = \inf\bigg\{ \varepsilon > 0 : \exists A_1, \dots, A_n \subseteq A : \bigcup_{i=1}^n A_i = A \wedge \mathrm{diam}(A_i) < \varepsilon \; \forall i \in \{1, \dots, n\} \bigg\}.$$

 $\alpha(A)$ prende il nome di misura di non compattezza secondo Kuratowski.

Osservazione

 $\alpha(A) \geq 0$; in particolare:

- $\alpha(A) = 0$ se e solo se A è totalmente limitato;
- $\alpha(A) < +\infty$ (ossia l'insieme di cui α è l'estremo inferiore è non vuoto) se e solo se A è limitato.

A livello intuitivo, la misura di non compattezza è indice di quanto un insieme in uno spazio metrico si discosta dall'essere compatto.

Infatti, un insieme compatto in uno spazio metrico è totalmente limitato, dunque ha misura nulla secondo Kuratowski.

Funzioni totalmente limitate

☐ Definizione: Oscillazione di una funzione a valori in uno spazio metrico

Sia $X \neq \emptyset$.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.

Si dice **oscillazione** di f su $A\subseteq X$ il valore $\operatorname{diam}(f(A))$.

Essa si denota con $\omega_f(A)$.

□ Definizione: Funzione totalmente limitata

Sia $X \neq \emptyset$.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.

f si dice **totalmente limitata** quando la sua immagine f(X) è totalmente limitata.

L'insieme delle funzioni $f: X \to Y$ totalmente limitate si denota con TB(X, Y).

Q Osservazione

L'insieme TB(X,Y) è costituito da funzioni limitate, essendo queste totalmente limitate; allora, esso è spazio metrico con la metrica uniforme ρ_d .

La totale limitatezza di una funzione può essere caratterizzata nel seguente modo:

Proposizione 4.1: Caratterizzazione della totale limitatezza di una funzione

Sia $X \neq \emptyset$.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è totalmente limitata;

2. Per ogni $\varepsilon>0$, esiste $X_1,\ldots,X_n\subseteq X$ con $\bigcup_{i=1}^n X_i=X$, tali che $\omega_f(X_i)<\varepsilon$ per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$.

ightharpoonup Dimostrazione (1. \Rightarrow 2.)

Si supponga f totalmente limitata.

Si fissi $\varepsilon > 0$.

Per totale limitatezza di f, esistono $Y_1,\ldots,Y_n\subseteq f(X)$ con $\bigcup_{i=1}^nY_i=f(X)$ tali che $\mathrm{diam}(Y_i)<arepsilon$ per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$

Posto $X_i=f^{-1}(Y_i)$, si ha $igcup_{i=1}^n X_i=X$ e $f(X_i)=f(f^{-1}(Y_i))\subseteq Y_i$.

Allora, $\omega_f(X_i) = \operatorname{diam}(f(X_i)) \leq \operatorname{diam}(Y_i) < arepsilon$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

$holdsymbol{ holdsymbol{eta}}$ Dimostrazione (2. \Rightarrow 1.)

Si supponga verificata la condizione 2.

Si fissi $\varepsilon > 0$.

Per ipotesi, esistono $X_1,\ldots,X_n\subseteq X$ con $igcup_{i=1}^n X_i=X$ tali che $\omega_f(X_i)<arepsilon$ per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}.$

Posto $Y_i=f(X_i)$, si ha $igcup_{i=1}^n Y_i=Y$ e $\operatorname{diam}(Y_i)=\operatorname{diam}(f(X_i))=\omega_f(X_i)$ <arepsilon per ogni $i\in\{1,\dots,n\}.$

Funzioni equi-totalmente limitate

□ Definizione: Famiglia di funzioni equi-totalmente limitate

Sia X un insieme non vuoto.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia \mathcal{F} una famiglia di funzioni da X in Y.

Le funzioni in \mathcal{F} si dicono **equi-totalmente limitate** quando

$$orall arepsilon>0,\;\exists X_1,\ldots,X_n\subseteq X_1:\quad igcup_{i=1}^n X_i=X\quad \wedge\quad orall i\in\{1,\ldots,n\},\; orall f\in\mathcal{F},\; \omega_f(X_i)$$

Q Osservazione

Sia X un insieme non vuoto.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia \mathcal{F} una famiglia di funzioni da X in Y, equi-totalmente limitate.

Allora, tali funzioni sono tutte totalmente limitate per la [Proposizione 4.1].

La seguente proposizione fornisce una formula per la misura di non compattezza di certe famiglie di funzioni equitotalmente limitate:

Misura di non compattezza di insiemi limitati di funzioni equi-tot. limitate

Sia X un insieme non vuoto.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Si consideri lo spazio TB(X,Y) con la metrica uniforme ρ_d .

Sia $\mathcal{F} \subseteq TB(X,Y)$ un insieme tale che:

- 1. \mathcal{F} sia limitato in TB(X,Y) rispetto a ρ_d ;
- 2. Le funzioni in \mathcal{F} siano equi-totalmente limitate.

Allora,
$$\alpha(\mathcal{F}) = \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) = \alpha(\mathcal{F}(X)).$$

Sia $\varepsilon > 0$.

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in \mathcal{F} , esistono $X_1,\ldots,X_n\subseteq X$ con $\bigcup_{i=1}^n X_1=X$, per cui $\omega_f(X_i)<\frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$ e per ogni $f\in\mathcal{F}$.

Per definizione di $\alpha(\mathcal{F})$, che è finito in quanto \mathcal{F} è limitato, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che esistono $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_m\subseteq\mathcal{F}$ con $\bigcup_{j=1}^m\mathcal{F}_j=\mathcal{F}$, per cui $\mathrm{diam}_{\rho_d}(\mathcal{F}_j)<\alpha(\mathcal{F})+\frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $j\in\{1,\ldots,m\}$.

Si considerino gli insiemi $\mathcal{F}_j(X_i)$ al variare di $i\in\{1,\dots,n\}$ e $j\in\{1,\dots,m\}$; si ha $\bigcup\limits_{i=1}^n\bigcup\limits_{j=1}^m\mathcal{F}_j(X_i)=\mathcal{F}(X).$

Si stimi $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_j(X_i))$ per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$ e per ogni $j\in\{1,\ldots,m\}$.

Siano $y_1,y_2\in \mathcal{F}_i(X_i)$.

Per definizione di $\mathcal{F}_i(X_i)$, si ha $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = g(x_2)$, con $f, g \in \mathcal{F}_i$ e $x_1, x_2 \in X_i$.

Si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$$d(y_1, y_2) = d(f(x_1), g(x_2))$$

 $d \leq d(f(x_1),g(x_1)) + d(g(x_1),g(x_2))$ Disuguaglianza triangolare

$$\leq
ho_d(f,g) + d(g(x_1),g(x_2))$$
 In quanto $ho_d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x),g(x))$

$$0 In quanto $ho_d(f,g)\leq \mathrm{diam}_{
ho_d}(\mathcal{F}_j) e $d(g(x_1),g(x_2))\leq \omega_f(X_i)<rac{arepsilon}{3}$$$$

Dunque, si ha $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_j(X_i)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \frac{2\varepsilon}{3} < \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$ e $j \in \{1,\dots,m\}$.

Allora, la famiglia $\{\mathcal{F}_j(X_i) \mid i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,m\}\}$ è un ricoprimento finito di $\mathcal{F}(X)$ costituito da insiemi di diametro minore di $\alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$.

Pertanto, $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$ per definizione di $\alpha(\mathcal{F}(X))$.

Sia $\varepsilon > 0$.

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in \mathcal{F} , esistono $X_1,\ldots,X_n\subseteq X$ con $\bigcup_{i=1}^m X_i=X$, per cui $\omega_f(X_i)<\frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$ e per ogni $f\in\mathcal{F}$.

Per definizione di $\alpha(\mathcal{F}(X))$, che è finito in quanto $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) < +\infty$ per la disuguaglianza provata prima, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che esistono $Y_1,\ldots,Y_k\subseteq\mathcal{F}(X)$ con $\bigcup_{j=1}^kY_j=\mathcal{F}(X)$, per cui $\mathrm{diam}(Y_j)<\alpha(\mathcal{F}(X))+\frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $j\in\{1,\ldots,k\}$.

Si supponga senza perdere di generalità che Y_1,\ldots,Y_k siano a due a due disgiunti; infatti, in caso contrario basta considerare $\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_k$ definiti ponendo $\tilde{Y}_j=Y_j \smallsetminus \bigcup_{h=1}^{j-1} Y_h$ per ogni $j\in\{1,\ldots,k\}$.

Per ogni $i \in \{1, ..., n\}$, si fissi $x_i \in X_i$.

Per ogni $f \in \mathcal{F}$, sia $\varphi_f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\}$ l'applicazione definita ponendo $\varphi_f(i) = j$, dove j è l'unico indice in $\{1, \dots, k\}$ tale che $f(x_i) \in Y_j$ (esso è unico in quanto Y_1, \dots, Y_k sono stati supposti a due a due disgiunti). Si introduca in \mathcal{F} la relazione \sim definita ponendo $f \sim g$ quando $\varphi_f = \varphi_g$, che è di equivalenza.

Allora, la relazione in questione induce una partizione di \mathcal{F} indotta dalle classi di equivalenza; tali classi sono in numero finito, in quanto l'insieme quoziente \mathcal{F}/\sim è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme delle funzioni da $\{1,\ldots,n\}$ a $\{1,\ldots,k\}$, che ha cardinalità finita (pari a k^n).

Siano dunque $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ tali classi di equivalenza.

Si stimi $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_p)$ per ogni $p \in \{1,\dots,m\}.$ Siano $f,g \in \mathcal{F}_p.$

Sia $x\in X$, e sia $i\in\{1,\dots,n\}$ per cui $x\in X_i$ (che esiste perché X_1,\dots,X_n ricoprono X). Si ha

$$d(f(x),g(x)) \leq d(f(x),f(x_i)) + d(f(x_i),g(x_i)) + d(g(x_i),g(x))$$

Disuguaglianza triangolare applicata due volte

$$\leq \omega_f(X_i) + \operatorname{diam}(Y_j) + \omega_g(X_i)$$

Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dal fatto che $x,x_i\in X_i$

La maggiorazione del secondo segue dal fatto che $f,g\in\mathcal{F}_p$, dunque $f\sim g$ e quindi esiste $j\in\{1,\ldots,k\}$ per cui $f(x_i),g(x_i)\in Y_j$

Per costruzione di
$$X_i$$
 e Y_i

$$<\frac{\varepsilon}{4} + \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{3\varepsilon}{4}$$

Dunque, si ha $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_p) \leq \alpha(\mathcal{F}(X)) + \frac{3\varepsilon}{4} < \alpha(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$ per ogni $p \in \{1, \dots, m\}$.

Allora, la famiglia $\{\mathcal{F}_p \mid p \in \{1, \dots, m\}\}$ è un ricoprimento finito di $\mathcal{F}(X)$ costituito da insiemi di diametro minore di $\alpha(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$.

Pertanto, $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F}) + \varepsilon$ per definizione di $\alpha(\mathcal{F}(X))$.

Segue $\alpha(\mathcal{F}(X)) \leq \alpha(\mathcal{F})$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

È evidente che $\sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \le \alpha(\mathcal{F}(X))$; infatti, $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}(X)$ per ogni $x \in X$, da cui segue che $\alpha(\mathcal{F}(x)) \le \alpha(\mathcal{F}(X))$ per ogni $x \in X$.

Si provi ora $\sup_{x\in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) \geq \alpha(\mathcal{F}).$

Sia $\varepsilon > 0$.

Per equi-totale limitatezza delle funzioni in \mathcal{F} , esistono $X_1,\ldots,X_n\subseteq X$ con $\bigcup_{i=1}^m X_i=X$, per cui $\omega_f(X_i)<\frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$ e per ogni $f\in\mathcal{F}$.

Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, si fissi $x_i \in X_i$ e si consideri $\mathcal{F}(x_i)$; per definizione di $\alpha(\mathcal{F}(x_i))$, che è finito in quanto $\alpha(\mathcal{F}(x_i)) \leq \alpha(\mathcal{F}(X)) < +\infty$ per la disuguaglianza provata prima, dalla seconda proprietà dell'estremo inferiore segue che

esistono $Y_{i,1},\ldots,Y_{i,k_i}$ tale che $igcup_{j=1}^{k_i}Y_{i,j}=\mathcal{F}(x_i)$ e $\mathrm{diam}(Y_{i,j})<lpha(\mathcal{F}(x_i))+rac{arepsilon}{4}$ per ogni $j\in\{1,\ldots,k_i\}$.

Sia
$$\mathcal{F}_{i,j}=\{f\in\mathcal{F}:f(x_i)\in Y_{i,j}\mid i\in\{1,\dots,n\},j\in\{1,\dots,k_i\}\}$$
; si ha $igcup_{i=1}^nigcup_{i=1}^{k_i}\mathcal{F}_{i,j}=\mathcal{F}.$

Si stimi $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_{i,j})$ per ogni $i \in \{1,\ldots,n\}$ e per ogni $j \in \{1,\ldots,k_i\}$.

Siano $f,g\in\mathcal{F}_{i,j}$.

Sia $x \in X$, e sia $i \in \{1, \dots, n\}$ per cui $x \in X_i$ (che esiste perché X_1, \dots, X_n ricoprono X).

Si ha

$$d(f(x),g(x)) \leq d(f(x),f(x_i)) + d(f(x_i),g(x_i)) + d(g(x_i),g(x))$$

 $\leq \omega_f(X_i) + \operatorname{diam}(Y_{i,j}) + \omega_f(X_i)$

Disuguaglianza triangolare applicata due volte

Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dal fatto che $x, x_i \in X_i$

La maggiorazione del secondo segue dal fatto che $f(x_i), g(x_i) \in Y_{i,j}$

$$0<rac{arepsilon}{4}+lpha(\mathcal{F}(x_i))+rac{arepsilon}{4}+rac{arepsilon}{4}=lpha(\mathcal{F}(x_i))+rac{3arepsilon}{4}$$

 $0 \leq \sup_{x \in X} lpha(\mathcal{F}(x)) + rac{3arepsilon}{4}$

Per costruzione di X_i e $Y_{i,j}$

Per definizione di $\sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x))$

Dunque, si ha $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_{i,j}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \frac{3\varepsilon}{4} < \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$ per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$ e per ogni $j \in \{1,\dots,k_i\}$.

Allora, la famiglia $\{\mathcal{F}_{i,j}\mid i\in\{1,\ldots,n\}, j\in\{1,\ldots,k_i\}\}$ è un ricoprimento finito di \mathcal{F} costituito da insiemi di diametro minore di $\sup_{x\in X}\alpha(\mathcal{F}(x))+\varepsilon$.

Pertanto, $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x)) + \varepsilon$ per definizione di $\alpha(\mathcal{F})$.

Segue $\alpha(\mathcal{F}) \leq \sup_{x \in X} \alpha(\mathcal{F}(x))$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Equivalenza della totale limitatezza di un insieme di funzioni totalmente limitate

Sia $X \neq \emptyset$.

Sia (Y, d) uno spazio metrico.

Sia $\mathcal{F} \subseteq TB(X,Y)$.

Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

- 1. \mathcal{F} è totalmente limitato in TB(X,Y) rispetto a ρ_d .
- 2. Le funzioni in \mathcal{F} sono equi-totalmente limitate, e $\mathcal{F}(X)$ è totalmente limitato in Y rispetto a d.
- 3. Le funzioni in \mathcal{F} sono equi-totalmente limitate, e $\mathcal{F}(x)$ è totalmente limitato in Y rispetto a d per ogni $x \in X$.

Dimostrazione

Basta mostrare che, se \mathcal{F} è totalmente limitato in TB(X,Y) rispetto a ρ_d , allora le sue funzioni sono equitotalmente limitate.

Sia $\varepsilon > 0$.

Essendo $\mathcal F$ totalmente limitato per ipotesi, esistono $\mathcal F_1,\dots,\mathcal F_n\subseteq\mathcal F$ con $\bigcup_{i=1}^n\mathcal F_i=\mathcal F$, tali che $\mathrm{diam}(\mathcal F_i)<\frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $i\in\{1,\dots,n\}.$

Per ogni $i \in \{1, ..., n\}$, sia $f_i \in \mathcal{F}_i$.

Essendo $\mathcal{F} \subseteq TB(X,Y)$, f_i è totalmente limitata per ogni $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Allora, esistono $X_{i,1},\ldots,X_{i,k_1}\subseteq X$ con $igcup_{j=1}^{k_i}X_j^{(i)}=X$ tali che $\omega_{f_i}(X_{i,j})<rac{arepsilon}{4}$ per ogni $j\in\{1,\ldots,k_i\}.$

Sia
$$\mathcal{D}=\prod\limits_{i=1}^n\{1,\ldots,k_i\}=\{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n: orall i\in\{1,\ldots,n\},\ j_i\leq k_i\}.$$

Si considerino gli insiemi del tipo $X_{1,j_1}\cap X_{2,j_2}\cap \cdots \cap X_{n,j_n}$ al variare di $(j_1,\ldots,j_n)\in \mathcal{D}$; si osserva intanto che questi ricoprono X.

Si vuole studiare l'oscillazione di una qualsiasi funzione $f \in \mathcal{F}$, sugli insiemi $X_{1,j_1} \cap \cdots \cap X_{n,j_n}$ al variare di $(j_1,\ldots,j_n) \in \mathcal{D}$.

Siano dunque $x,y\in X_{1,j_1}\cap\cdots\cap X_{n,j_n}$; sia $f\in\mathcal{F}$, e sia i tale che $f\in\mathcal{F}_i$.

Si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$$d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y))$$

$$0 \leq
ho_d(f,f_i) + \omega_{f_i}(X_{1,j_1} \cap \dots \cap X_{n,j_n}) +
ho_d(f,f_i)$$

Disuguaglianza triangolare applicata due volte

Le maggiorazioni del primo e del terzo addendo seguono dalla definizione di $ho_d(f,f_i)$

La maggiorazione del secondo segue dal fatto che $x,y\in X_{1,j_1}\cap\cdots\cap X_{n,j_n}$

Segue dal fatto che
$$ho_d(f,f_i) \leq \operatorname{diam}(\mathcal{F}_i) < rac{arepsilon}{4}$$
 e $\omega_{f_i}(X_{1,j_1} \cap \cdots \cap X_{n,j_n}) \leq \omega_{f_i}(X_{i,j_i}) < rac{arepsilon}{4}$

 $<\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}$

Dunque, $\omega_f(X_{1,j_1}\cap\cdots\cap X_{n,j_n})\leq rac{3arepsilon}{4}<arepsilon$ per ogni $f\in\mathcal{F}$ e per ogni $(j_1,\ldots,j_n)\in\mathcal{D}$.

Allora, la famiglia $\{X_{1,j_1} \cap X_{2,j_2} \cap \cdots \cap X_{n,j_n} \mid (j_1,\ldots,j_n) \in \mathcal{D}\}$ è un ricoprimento finito di X costituito da insiemi su cui l'oscillazione di una qualsiasi funzione in \mathcal{F} è minore di ε .

Segue che le funzioni in \mathcal{F} sono equi-totalmente limitate per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.