13 - Derivabilità delle Funzioni Composte e delle Funzioni Inverse

Proposizione 13.1: F-derivabilità delle fAunzioni composte (Regola della catena)

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$ tre spazi normati.
Sia $A \subseteq X$.
Sia $B \subseteq Y$.
Sia $\mathbf{x}_0 \in \mathring{A}$.
Sia $f : A \to Y$ una funzione F-derivabile in $\mathbf{x}_0$, tale che $f(A) \subseteq B$ e $f(\mathbf{x}_0) \in \mathring{B}$.
Sia $g : B \to Z$ una funzione F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$.

Si hanno i seguenti fatti:

- $g \circ f$ è F-derivabile in $\mathbf{x}_0$;
- $(g \circ f)'(\mathbf{x}_0) = g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) \circ f'(\mathbf{x}_0)$.

Dimostrazione

Per mostrare le due affermazioni, si provi che

$$\lim_{\mathbf{u} \to \mathbf{0}_X} \frac{g\big(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})\big)-g\big(f(\mathbf{x}_0)\big)-g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z.$$

Sia intanto $\delta_0 > 0$ tale che $B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \subseteq A$; esso esiste in quanto $\mathbf{x}_0 \in \mathring{A}$.

Si definiscano le funzioni $\varphi : B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \to Y$ e $\psi : f\big(B(\mathbf{x}_0, \delta_0)\big) \to Z$, ponendo rispettivamente:

- $\varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{0}_X, \delta_0)$;

- $\psi(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{v}) - g(f(\mathbf{x}_0)) - g'(f(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v})$, per ogni $\mathbf{v} \in f\big(B(\mathbf{x}_0, \delta_0)\big)$.

Per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{0}_X, \delta_0) \setminus \{\mathbf{0}_X\}$, si ha

$$\psi\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big) = g\big(f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{u}\big) - g\big(f(\mathbf{x}_0)\big) - g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big)$$

Per definizione di ψ

$$\implies \quad g\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})\big) - g\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = \psi\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big) + g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big)$$

$$\implies \quad g\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})\big) - g\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = \psi\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big) + g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(\varphi(\mathbf{u}) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\big)$$

Dalla definizione di φ, in quanto $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) = \varphi(\mathbf{u}) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})$

$$\implies \quad g\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})\big) - g\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = \psi\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big) + g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(\varphi(\mathbf{u})\big) + g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\big)$$

Per linearità di $g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)$

$$\implies \quad g\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})\big) - g\big(f(\mathbf{x}_0)\big) - g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\big) = \psi\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big) + g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(\varphi(\mathbf{u})\big)$$

$$\implies \quad \frac{g\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})\big) - g\big(f(\mathbf{x}_0)\big) - g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} = \frac{\psi\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} + \frac{g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(\varphi(\mathbf{u})\big)}{\|\mathbf{u}\|_X}$$

Dividendo ambo i membri per $\|\mathbf{u}\|_X$, non nullo in quanto $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_X$

Dall'uguaglianza ottenuta segue che, per provare quanto si vuole, basta mostrare che

$$\lim_{\mathbf{u} \to \mathbf{0}_X} \frac{\psi\big(f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} + \frac{g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(\varphi(\mathbf{u})\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z \ .$$

Si ha $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} \frac{g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(\varphi(\mathbf{u})\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z$.

Infatti, $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} \frac{g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\big(\varphi(\mathbf{u})\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} = \lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\left(\frac{\varphi(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X}\right)$ per linearità di $g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)$;

inoltre, $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} \frac{\varphi(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X} = \lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Y$ per F-derivabilità di f in $\mathbf{x}_0$.

Segue quindi $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\left(\frac{\varphi(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X}\right) = \mathbf{0}_Z$ per continuità di $g'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)$.

Per acquisire la tesi, resta perciò da provare che $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} \frac{\psi\big(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z$.

Sia quindi $\mathbf{u} \in B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \neq \{\mathbf{0}_X\}$.

Se $f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0)$, si ha $\frac{\psi\big(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z$, per come è definita ψ.

Si supponga ora $f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u}) \neq f(\mathbf{x}_0)$; si ha

$$\frac{\psi\big(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\big)}{\|\mathbf{u}\|_X} = \frac{\psi\big(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\big)}{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y}\,\frac{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y}{\|\mathbf{u}\|_X}.$$

Si vogliono studiare questi due rapporti in funzione di $\mathbf{u}$.

$\frac{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y}{\|\mathbf{u}\|_X}$ è limitato in un opportuno intorno di $\mathbf{0}_X$.

Infatti, per F-derivabilità di f in $\mathbf{x}_0$, in corrispondenza a $\varepsilon = 1$ esiste $\delta_1 > 0$ tale che, se $\|\mathbf{u}\|_X < \delta_1$, allora $\left\|\frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X}\right\|_Y < 1.$

Allora, se $\|\mathbf{u}\|_X < \delta_1$, si ha

$$\frac{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y}{\|\mathbf{u}\|_X} < 1 \qquad \text{Assoluta omogeneità di } \|\cdot\|_Y$$

$\implies \quad \|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y < \|\mathbf{u}\|_X$

$\implies \quad \|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y - \|f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y < \|\mathbf{x}\|_X$ Dalla seconda disuguaglianza triangolare delle norme

$\implies \quad \|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y < \|\mathbf{u}\|_X + \|f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u})\|_Y$

$\implies \quad \|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y < \|\mathbf{u}\|_X + \|f'(\mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{u}\|_X$ Dalla disuguaglianza fondamentale della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

$\implies \quad \frac{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y}{\|\mathbf{u}\|_X} < 1 + \|f'(\mathbf{x}_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ Dividendo ambo i membri per $\|\mathbf{u}\|_X$, non nullo in quanto $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_X$

$\frac{\psi(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0))}{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y}$ è infinitesimo per $\mathbf{u} \to \mathbf{0}_X$.

Infatti, $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_X$ in quanto f è continua in $\mathbf{x}_0$, essendo ivi F-derivabile.

Inoltre, $\lim\limits_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}_Y} \frac{\psi(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_Y} = \lim\limits_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}_Y} \frac{g(f(\mathbf{x}_0)+\mathbf{v})-g(f(\mathbf{x}_0))-g'(f(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_Y} = \mathbf{0}_Z$ per F-derivabilità di g in $f(\mathbf{x}_0)$.

Dunque, ne segue che $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} \frac{\psi(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0))}{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_Z$.

Pertanto, $\frac{\psi(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{u}\|_X}$ è nullo se $f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0)$, altrimenti è prodotto di un'espressione limitata in un opportuno intorno di $\mathbf{0}_X$ per $\mathbf{u}$, con un'espressione infinitesima per $\mathbf{u} \to \mathbf{0}_X$.

Ne segue che $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}_X} \frac{\psi(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{u})-f(\mathbf{x}_0))}{\|\mathbf{u}\|_X} = \mathbf{0}_Z$, come si voleva ottenere.

■

⌘ Notazione: $\mathcal{O}(X,Y)$

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.

Si denota con $\mathcal{O}(X,Y)$ l'insieme degli omeomorfismi lineari da X in Y, ossia le funzioni da X in Y lineari, continue, biunivoche e con inversa continua.

Osservazione

Si ha $\mathcal{O}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$.

Proposizione 13.2: Caratterizzazione degli omeomorfismi lineari

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.
Sia $f : X \to Y$ un operatore lineare continuo e biunivoco.

Allora, f^{-1} è anch'essa continua.

In altri termini, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- $f \in \mathcal{O}(X,Y)$;
- f è lineare, continua e biunivoca.

Proposizione 13.3: Insieme degli omeomorfismi lineari è aperto nell'insieme degli operatori lineari continui

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.

Si hanno i seguenti fatti:

- $\mathcal{O}(X,Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X,Y)$;
- L'operatore $\underset{\varphi \mapsto \varphi^{-1}}{\mathcal{O}(X,Y) \to \mathcal{L}(Y,X)}$ è continuo.

Dimostrazione

Se $X = \{\mathbf{0}\}$, l'unico operatore lineare è la funzione identicamente nulla.
Allora, $\mathcal{L}(Y, X)$ è un singoletto, per cui la topologia definita su di esso è discreta.

Segue allora che $\mathcal{O}(X, Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X, Y)$, e l'operatore $\underset{\varphi \mapsto \varphi^{-1}}{\mathcal{O}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y, X)}$ è continuo (le funzioni su uno spazio discreto sono automaticamente continue).

Si supponga ora $X \neq \{\mathbf{0}\}$.

Si fissi $\varphi \in \mathcal{O}(X, Y)$;

essendo $X \neq \{\mathbf{0}\}$ e φ biunivoca, né φ né φ^{-1} sono identicamente nulle, per cui $\|\varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \neq 0$ e $\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \neq 0$.

Per provare che $\mathcal{O}(X, Y)$ è aperto, si mostri che $B\left(\varphi, \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}\right) \subseteq \mathcal{O}(X, Y)$.

Sia dunque $\psi \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che $\|\psi - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}$;

si provi che ψ è biunivoca; facendo uso della [Proposizione 13.2], basta dunque mostrare che ψ è biunivoca (la linearità e la continuità di ψ sono garantite dal fatto che $\psi \in \mathcal{L}(X, Y)$).

Fissato allora $\mathbf{y} \in Y$, si vuole provare l'esistenza e l'unicità di $\mathbf{x} \in X$ tale che $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Si definisca la funzione $g : X \to X$ ponendo $g(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}))$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Si osserva che

$$
\begin{aligned}
& \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \iff \mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \\
\iff \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad & \text{Per biunivocità di } \varphi \\
\iff g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad & \text{Per definizione di } g
\end{aligned}
$$

Cioè, $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ se e solo se $\mathbf{x}$ è un punto fisso per g.
Per provare che ψ è biunivoca, basta allora provare che g ammette un solo punto fisso in X.

> **Richiamo: Teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli**
>
> Sia (S, d) uno spazio metrico completo.
> Sia $f : S \to S$ una contrazione (tale cioè che esista $L \in [0; 1[$ per cui $d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y)$).
>
> Allora, f ammette un unico punto fisso, vale a dire un unico $\tilde{x} \in S$ tale che $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Essendo X completo in quanto spazio di Banach e $g : X \to X$, in virtù di tale teorema si mostri che g è una contrazione.

Fissati $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in X$, si ha

	$g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z}) = \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})) - \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{z}) - \psi(\mathbf{z}))$	Per definizione di g
	$= \varphi^{-1}\big(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) - \big(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{z}) - \psi(\mathbf{z})\big)\big)$	Per linearità di φ^{-1} (L'inversa di una funzione lineare è anch'essa lineare)
	$= \varphi^{-1}\big(\psi(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{z})\big)$	Per linearità di φ e ψ
	$= \varphi^{-1}\big((\psi - \varphi)\,(\mathbf{x} - \mathbf{z})\big)$	Per definizione di $\psi - \varphi$
$\Longrightarrow$	$\Vert g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})\Vert_X = \Vert\varphi^{-1}\big((\psi - \varphi)\,(\mathbf{x} - \mathbf{z})\big)\Vert_X$	Per quanto appena ottenuto
	$\leq \Vert\varphi^{-1}\Vert_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \Vert(\psi - \varphi)\,(\mathbf{x} - \mathbf{z})\Vert_X$	Per la disuguaglianza fondamentale della norma $\Vert\cdot\Vert_{\mathcal{L}(X,Y)}$
	$\leq \Vert\varphi^{-1}\Vert_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \Vert\psi - \varphi\Vert_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \Vert\mathbf{x} - \mathbf{z}\Vert_X$	Per la disuguaglianza fondamentale della norma $\Vert\cdot\Vert_{\mathcal{L}(X,Y)}$

Dunque, $\Vert g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})\Vert_X \leq \Vert\varphi^{-1}\Vert_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \Vert\psi - \varphi\Vert_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \Vert\mathbf{x} - \mathbf{z}\Vert_X$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in X$;

essendo $\Vert\psi - \varphi\Vert_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{1}{\Vert\varphi^{-1}\Vert_{\mathcal{L}(Y,X)}}$, ne segue che $\Vert\varphi^{-1}\Vert_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \Vert\psi - \varphi\Vert_{\mathcal{L}(X,Y)} < 1$, per cui g è una contrazione.

Pertanto, $\mathcal{O}(X,Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X,Y)$.

Fissato $\psi \in B\left(\varphi, \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}\right)$, che è biunivoco per quanto appena mostrato, si vuole ora fornire una stima di $\|\psi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$.

Dunque, si fissi $\mathbf{y} \in X$, e si definisca $g : X \to X$ come prima ($\mathbf{x} \mapsto \varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}))$).

Sia $\mathbf{x}_0 = \psi^{-1}(\mathbf{y})$; si ha

$\|\mathbf{x}_0\|_X = \|g(\mathbf{x}_0)\|_X$	$\mathbf{x}_0$ è punto fisso per g per quanto visto prima, in quanto $\psi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}$
$= \|\varphi^{-1}(\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}_0) - \psi(\mathbf{x}_0)\|_X$	Per definizione di g
$= \|\varphi^{-1}(\mathbf{y} + (\varphi - \psi)(\mathbf{x}_0)\|_X$	Per definizione di $\varphi - \psi$
$= \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\mathbf{y} + (\varphi - \psi)(\mathbf{x}_0)\|_Y$	Per la disuguaglianza fondamentale della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$
$\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \left(\|\mathbf{y}\|_Y + \|(\varphi - \psi)(\mathbf{x}_0)\|_Y\right)$	Per subadditività delle norme
$\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \left(\|\mathbf{y}\|_Y + \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{x}_0\|_X\right)$	Per la disuguaglianza fondamentale della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

Dunque,

	$\|\mathbf{x}_0\|_X \leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \left(\|\mathbf{y}\|_Y + \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{x}_0\|_X\right)$	
$\implies$	$\left(1 - \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right)\|\mathbf{x}_0\|_X \leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\mathbf{y}\|_Y$	Portando a primo membro tutti i termini con fattore $\|\mathbf{x}_0\|_X$
$\implies$	$\|\mathbf{x}_0\|_X \leq \frac{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1 - \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}} \cdot \|\mathbf{y}\|_Y$	Dividendo ambo i membri per $1 - \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, valore strettamente positivo in quanto $\psi \in B\left(\varphi, \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}\right)$

$$\implies \quad \|\psi^{-1}(\mathbf{y})\|_X \leq \frac{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1-\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi-\psi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}} \cdot \|\mathbf{y}\|_Y \qquad \text{Per definizione di } \mathbf{x}_0$$

Quest'ultima disuguaglianza vale per ogni $\mathbf{y} \in Y$;

dalla definizione di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ segue che

$$\|\psi^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1-\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi-\psi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}.$$

Questa è la stima cercata.

Per provare la continuità dell'operatore $\underset{\varphi \mapsto \varphi^{-1}}{\mathcal{O}(X,Y) \to \mathcal{L}(Y,X)}$, se ne mostri la sequenziale continuità.

Fissati dunque $\varphi \in \mathcal{O}(X,Y)$ e una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(X,Y)$ convergente a φ, si provi che $\{\varphi_n^{-1}\}$ converge a φ^{-1}, ossia

$$\lim_n \|\varphi_n^{-1} - \varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = 0.$$

Poiché $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{L}(X,Y)} \varphi$, in corrispondenza a $\varepsilon = \frac{1}{2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \nu$, si abbia $\|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{1}{2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}$.

Ricordando che $\|\varphi_n^{-1} - \varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \sup\limits_{\|\mathbf{y}\|_Y=1} \|\varphi_n^{-1}(\mathbf{y}) - \varphi^{-1}(\mathbf{y})\|_X$, si fissi $\mathbf{y} \in Y$ tale che $\|\mathbf{y}\|_Y = 1$;

si ponga inoltre $\mathbf{x}_n = \varphi_n^{-1}(\mathbf{y})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e anche $\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{y})$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} &\|\varphi(\mathbf{x}_n) - \varphi(\mathbf{x})\|_Y = \|\varphi(\mathbf{x}_n) - \varphi_n(\mathbf{x}_n)\|_Y && \text{In quanto } \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \varphi_n(\mathbf{x}_n) \\ &= \|(\varphi - \varphi_n)(\mathbf{x}_n)\|_Y && \text{Per definizione di } \varphi - \varphi_n \end{aligned}$$

$\leq \|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{x}_n\|_X$ Per la disuguaglianza fondamentale di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

Fissato allora $n \geq \nu$, si ha

$$\varphi_n \in B\left(\varphi, \frac{1}{2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}\right) \subseteq B\left(\varphi, \frac{1}{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}\right) \quad \text{Per costruzione di } \nu$$

$$\implies \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1-\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi-\varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}} \quad \text{Per la stima sulla norma dell'inversa ricavata prima}$$

$$\implies \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq 2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$$

In quanto $\|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{1}{2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}$, e dunque $1 - \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi - \varphi_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} > \frac{1}{2}$

Si osservano ora i seguenti fatti:

1. $\|\mathbf{x}_n\|_X \leq \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   Infatti,

   $\|\mathbf{x}_n\|_X = \|\varphi_n^{-1}(\mathbf{y})\|_X$ Per definizione di $\mathbf{x}_n$

   $\leq \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\mathbf{y}\|_Y$ Per la disuguaglianza fondamentale di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$

   $= \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$ In quanto era stato posto $\|\mathbf{y}\|_Y = 1$

2. $\|\mathbf{z}\|_X \leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{z})\|_Y$.
   Infatti,

   $\|\mathbf{z}\|_X = \|\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{z}))\|_X$ Per biunivocità di φ

   $\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{z})\|_Y$ Per la disuguaglianza fondamentale di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$

Sia dunque $n \geq \nu$; si ha

$\|\varphi_n^{-1}(\mathbf{y}) - \varphi^{-1}(\mathbf{y})\|_X = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_X$ Per definizione di $\mathbf{x}_n$ e $\mathbf{x}$

$\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})\|_Y$ Per il fatto 2.

$= \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{x}_n) - \varphi(\mathbf{x})\|_Y$ Per linearità di φ

$= \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi(\mathbf{x}_n) - \varphi_n(\mathbf{x}_n)\|_Y$ In quanto $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \varphi_n(\mathbf{x}_n)$

$= \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|(\varphi - \varphi_n)(\mathbf{x}_n)\|_Y$ Per definizione di $\varphi - \varphi_n$

$\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\mathbf{x}_n\|_X$ Per la disuguaglianza fondamentale di $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

$\leq \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$ Per il fatto 1.

$< 2\|\varphi^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ Avendo mostrato che $\|\varphi_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq 2\|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$ per $n \geq \nu$

Dunque, per $n \geq \nu$ si ha $\|\varphi_n^{-1}(\mathbf{y}) - \varphi^{-1}(\mathbf{y})\|_X < 2\|\varphi^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ per ogni $\mathbf{y} \in Y$ tale che $\|\mathbf{y}\|_Y = 1$.

Ne viene che $\|\varphi_n^{-1} - \varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq 2\|\varphi^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ per ogni $n \geq \nu$.

Essendo $\lim_n \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$ per ipotesi su $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, segue per confronto che

$\lim_n \|\varphi_n^{-1} - \varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = 0$.

■

Proposizione 13.4: F-derivabilità delle funzioni inverse.

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.
Sia $A \subseteq X$.
Sia $f : A \to Y$ una funzione;
si supponga che f sia un omeomorfismo tra A e $f(A)$.
Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$, tale che $f(\mathbf{x}_0) \in (f(A))^\circ$.
Si supponga f F-derivabile in $\mathbf{x}_0$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f^{-1} è F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$;
2. $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$.

In tal caso, si ha inoltre $(f^{-1})'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = \big(f'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}$.

Osservazioni preliminari

1. Siano U e V due insiemi.
   Siano $h : U \to V$ e $k : V \to U$ tali che $k \circ h = \mathrm{id}_U$ e $h \circ k = \mathrm{id}_V$ (id_S denota l'identità sull'insieme S).

   Allora, h e k sono biunivoche, e sono l'una l'inversa dell'altra.

   Infatti, k è per ipotesi inversa destra e sinistra di h; pertanto h è biunivoca, e k è la sua inversa.
   Analogamente, h è per ipotesi inversa destra e sinistra di k, per cui anche k è biunivoca, con inversa h.

2. Siano X, Y e Z tre spazi topologici.
   Sia $\varphi : X \to Y$ un omeomorfismo.
   Sia $g : Y \to Z$.
   Sia $y_0 \in Y$ non isolato (dimodoché si possano effettuare limiti per $y \to y_0$)
   Sia $z \in Z$.

   Si ha $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z$ se e solo se $\lim\limits_{x \to \varphi^{-1}(y_0)} g(\varphi(x)) = z$.

   Infatti, si supponga $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z$.
   Sia V un intorno di z.
   Per ipotesi, esiste U intorno di y_0 tale che $g(U) \subseteq V$.
   Essendo φ un omeomorfismo tra X e Y, l'insieme $W = \varphi^{-1}(U)$ è un intorno di $\varphi^{-1}(y_0)$, e si ha
   $g(\varphi(W)) = g(U) \subseteq V$.
   Ne segue che $\lim\limits_{x \to \varphi^{-1}(y_0)} g(\varphi(x)) = z$

Viceversa, si supponga $\lim\limits_{x \to \varphi^{-1}(y_0)} g(\varphi(x)) = z$.
Sia V un intorno di z.
Per ipotesi, esiste W intorno di $\varphi^{-1}(y_0)$ tale che $g(\varphi(W)) \subseteq V$.
Essendo φ un omeomorfismo tra X e Y, l'insieme $U = \varphi(W)$ è un intorno di y_0, e si ha $g(U) = g(\varphi(W)) \subseteq V$.
Ne segue che $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z$.

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga f^{-1} F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$;
si provi che $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$.

Sono soddisfatte le ipotesi della regola della catena ([Proposizione 13.1]), per $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$, su $\mathbf{x}_0$ e $f(\mathbf{x}_0)$ rispettivamente.

dunque, esse sono F-derivabili in $\mathbf{x}_0$ e $f(\mathbf{x}_0)$ rispettivamente, e si ha

$(f^{-1} \circ f)'(\mathbf{x}_0) = (f^{-1})'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) \circ f'(\mathbf{x}_0)$;
$(f \circ f^{-1})'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = f'\Big(f^{-1}\big(f(\mathbf{x}_0)\big)\Big) \circ (f^{-1})'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = f'(\mathbf{x}_0) \circ (f^{-1})'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)$.

D'altra parte, si ha $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(A)}$.

id_A è restrizione su A di $\mathrm{id}_X \in \mathcal{L}(X, X)$; quest'ultimo è F-derivabile in $\mathbf{x}_0$ con derivata pari a id_X stesso, essendo un operatore lineare continuo.
Allora, essendo $\mathbf{x}_0 \in \mathring{A}$, anche id_A è F-derivabile in $\mathbf{x}_0$, e $\mathrm{id}'_A(\mathbf{x}_0) = \mathrm{id}'_X(\mathbf{x}_0) = \mathrm{id}_X$.

Analogamente, $\mathrm{id}_{f(A)}$ è restrizione su A di $\mathrm{id}_Y \in \mathcal{L}(Y, Y)$; quest'ultimo è F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$ con derivata pari a id_Y stesso, essendo un operatore lineare continuo.
Allora, essendo $f(\mathbf{x}_0) \in (f(A))^\circ$, anche $\mathrm{id}_{f(A)}$ è F-derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$, e $\mathrm{id}'_{f(A)}\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = \mathrm{id}'_Y\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = \mathrm{id}_Y$.

Dall'uguaglianza delle derivate segue che
$\mathrm{id}_X = (f^{-1} \circ f)'(\mathbf{x}_0) = (f^{-1})'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) \circ f'(\mathbf{x}_0)$;
$\mathrm{id}_Y = (f \circ f^{-1})'(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0) \circ (f^{-1})'\big(f(\mathbf{x}_0)\big)$.

Dall'osservazione preliminare $1.$ segue allora che $f'(\mathbf{x}_0)$ è biunivoca; essendo anche $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$, segue allora che $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$ per la [Proposizione 13.2];

inoltre, sempre per tale osservazione si ha $(f^{-1})'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = \big(f'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}$.
■

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Si supponga $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X, Y)$.

Per provare sia la F-derivabilità di f^{-1} in $f(\mathbf{x}_0)$ che l'uguaglianza $(f^{-1})'\big(f(\mathbf{x}_0)\big) = \big(f'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}$, si mostri che

$$\lim_{\mathbf{y} \to f(\mathbf{x}_0)} \frac{f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{y}_0) - \big(f'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}\big(\mathbf{y} - f(\mathbf{x}_0)\big)}{\|\mathbf{y} - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X.$$

Essendo f un omeomorfismo tra A e $f(A)$, per l'osservazione preliminare $2.$ ciò equivale a provare che

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \big(f'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}\big(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\big)}{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X.$$

Si definisca $\varphi : A \setminus \{\mathbf{x}_0\} \to Y$ ponendo $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_X}$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;
si osserva che, per definizione di F-derivabilità di f in $\mathbf{x}_0$, si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y.$$

Si definisca $\psi : A \setminus \{\mathbf{x}_0\} \to X$ ponendo $\psi(\mathbf{x}) = \big(f'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}\big(\varphi(\mathbf{x})\big)$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Sempre per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, tale legge si può scrivere così:

$$\psi(\mathbf{x}) = \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)-f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X}\right)$$ Per definizione di φ

$$= \frac{\left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\right)-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X}$$ Per linearità di $\left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}$, appartenendo a $\mathcal{O}(X,Y)$ per ipotesi

Ne segue che $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X \cdot \psi(\mathbf{x}) = \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\right)-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;

provare che $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0-\left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\right)}{\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X$ equivale allora a provare che

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X \cdot \psi(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X$.

Si osserva intanto che vale $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_X$.

Infatti, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \psi(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(\varphi(\mathbf{x})\right) = \mathbf{0}_X$, in quanto $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y$ e $\left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}$ è lineare e continua essendo $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{O}(X,Y)$ per ipotesi.

In corrisponenza a $\varepsilon = 1$, sia allora $\delta > 0$ (si supponga tale che $B(\mathbf{x}_0,\delta) \subseteq A$, il che è lecito in quanto $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$), dimodoché $\|\psi(\mathbf{x})\|_X < 1$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0,\delta) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Si consideri l'uguaglianza
$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X \cdot \psi(\mathbf{x}) = \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\right)-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$, che era stata ottenuta prima per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, e dunque vale a maggior ragione per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0,\delta) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0,\delta) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, si ricava che

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X = \left\|\left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\right)-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\right\|_X$$ Passando alla norma in X di entrambi i membri e applicando l'assoluta omogeneità al primo membro

$$\geq \left| \left\| \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\right)\right\|_X - \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X \right|$$

Seconda disuguaglianza triangolare delle norme

$$\geq \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X - \left\| \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\right)\right\|_X$$

$$\implies \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X \cdot \left(1-\|\psi(\mathbf{x})\|_X\right) \leq \left\| \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\left(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\right)\right\|_X$$

Manipolando il primo e l'ultimo membro della catena di disuguaglianze appena ottenuta

$$\leq \left\| \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y$$

Per la disuguaglianza fondamentale della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$

$$\implies \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_X \cdot \left(1-\|\psi(\mathbf{x})\|_X\right) \leq \left\| \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y$$

$$\implies \quad \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\|_X \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X}{\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y} \leq \frac{\left\| \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X}{1-\|\psi(\mathbf{x})\|_X}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\|\psi(\mathbf{x})\|_X$, e dividendo ambo i membri per $\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y$, strettamente positivo in quanto $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ e f è un omeomorfismo, e per $1-\|\psi(\mathbf{x})\|_X$, strettamente positivo in quanto $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$

Ciò significa in particolare che

$\left\| \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\|_X \cdot \psi(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y} \right\|_X \leq \frac{\left\| \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X}{1-\|\psi(\mathbf{x})\|_X}$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\}$.

Poiché $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\left\| \left(f'(\mathbf{x}_0)\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_X}{1-\|\psi(\mathbf{x})\|_X} = 0$, segue per confronto che

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left\| \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\|_X \cdot \psi(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y} \right\|_X = 0$, ossia

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\|_X \cdot \psi(\mathbf{x})}{\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)\|_Y} = \mathbf{0}_X$, come si voleva provare.

■