2 - Semicontinuità

Semicontinuità di funzioni a valori reali

Definizione 2.1: Semicontinuità di una funzione a valori reali

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in X$.

Si dice che f è semicontinua inferiormente in x_0 quando
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in U,\ f(x) - f(x_0) > -\varepsilon.$

Si dice che f è semicontinua superiormente in x_0 quando
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \text{ intorno di } x_0 : \forall x \in U,\ f(x) - f(x_0) < \varepsilon.$

Osservazione 2.2

f è semicontinua inferiormente (risp. superiormente) in x_0 se e solo se $-f$ è semicontinua superiormente (risp. inferiormente).

Osservazione 2.3

f è continua in x_0 se e solo se è ivi simultaneamente semicontinua inferiormente e superiormente.

Le seguenti due proposizioni caratterizzano la semicontinuità inferiore e superiore:

Proposizione 2.4: Caratterizzazioni della semicontinuità inferiore

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è semicontinua inferiormente su X.
2. $f^{-1}\big(]r; +\infty[\big)$ è aperto per ogni $r \in \mathbb{R}$;
3. $f^{-1}\big(]-\infty; r]\big)$ è chiuso per ogni $r \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione ($2. \Leftrightarrow 3.$)

Si osserva che $f^{-1}\big(]r; +\infty[\big) = X \setminus f^{-1}\big(]-\infty; r[\big)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.
Allora, $f^{-1}\big(]r; +\infty[\big)$ è aperto per ogni $r \in \mathbb{R}$ se e solo se $f^{-1}\big(]-\infty; r]\big)$ è chiuso per ogni $r \in \mathbb{R}$.
■

Dimostrazione ($1. \Rightarrow 2.$)

Si supponga f semicontinua inferiormente su X.
Sia $r \in \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in f^{-1}\big(]r; +\infty[\big)$; dunque, $f(x_0) > r$.

Sia $\varepsilon = f(x_0) - r > 0$.
Per semicontinuità inferiore di f su X, dunque su x_0, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) - f(x_0) > -\varepsilon$ per ogni $x \in U$, ossia $f(x) > f(x_0) - \varepsilon = r$ per ogni $x \in U$.
Allora, $x \in f^{-1}\big(]r; +\infty[\big)$ per ogni $x \in U$, ossia $U \subseteq f^{-1}\big(]r; +\infty[\big)$.
Allora, $f^{-1}\big(]r; +\infty[\big)$ è intorno di ogni suo punto, per cui tale insieme è aperto.
■

Dimostrazione ($2. \Rightarrow 1.$)

Si supponga $f^{-1}(]r;+\infty[)$ aperto per ogni $r \in \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in X$.
Sia $\varepsilon > 0$.

Si consideri l'insieme $f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon;+\infty[)$.
Essendo aperto per ipotesi e $x_0 \in f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon;+\infty[)$, esiste un intorno U di x_0 tale che $U \subseteq f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon;+\infty[)$.
Ciò significa che, per ogni $x \in U$, $f(x) \in]f(x_0)-\varepsilon;+\infty[$, ossia $f(x) > f(x_0)-\varepsilon$.
Allora, U è un intorno di x_0 tale che $f(x)-f(x_0) > -\varepsilon$ per ogni $x \in U$, per cui f è semicontinua inferiormente in x_0 e dunque, per arbitrarietà di tale punto, in tutto X.
■

Proposizione 2.4': Caratterizzazione della semicontinuità superiore

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:
1. f è semicontinua superiormente su X.
2. $f^{-1}(]-\infty;r[)$ è aperto per ogni $r \in \mathbb{R}$;
3. $f^{-1}([r;+\infty[)$ è chiuso per ogni $r \in \mathbb{R}$.

Semicontinuità ed estremi assoluti

Teorema 2.5: Teorema di Weierstrass per funzioni semicontinue inferiormente

Sia X uno spazio topologico compatto.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua inferiormente.

Allora, f è dotata di minimo assoluto, ossia esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione

Si provi dapprima che f è limitata inferiormente.

In corrispondenza a $\varepsilon = 1$, per semicontinuità inferiore di f esiste U_x intorno aperto di x tale che $f(y) > f(x) - 1$ per ogni $y \in U_x$.
La famiglia $\{U_x \mid x \in X\}$ costituisce un ricoprimento di aperti per X;
Essendo X compatto per ipotesi, esistono $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.
Sia $m = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} f(x_i)$.
Sia $y \in X$; essendo $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $f(y) > f(x_i) - 1$; dalla definizione di m segue $f(x_i) \geq m$, per cui $f(y) > m - 1$.
Ne segue che $f(y) > m - 1$ per ogni $y \in X$.

Dunque f è limitata inferiormente.
Posto dunque $\alpha = \inf(f(X))$, si provi che $\alpha \in f(X)$.
Fissato $\varepsilon > 0$, sia $X_\varepsilon = f^{-1}\big(\,]-\infty ; \alpha + \varepsilon]\big)$.

Esso è non vuoto; infatti, essendo $\alpha = \inf(f(X))$, per la seconda proprietà degli estremi inferiori esiste $y \in X$ tale che $f(y) < \alpha + \varepsilon$.
Inoltre, essendo f semicontinua inferiormente, dalla [Proposizione 2.4] segue che X_ε è chiuso.

Si consideri la famiglia $\{X_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$, costituita da chiusi per quanto appena osservato.
Essa soddisfa la proprietà d'intersezione finita, in quanto fissati $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ si ha che $\bigcap_{i=1}^{n} X_{\varepsilon_i} = X_{\min_{i \in \{1, \dots, n\}}(\varepsilon_i)} \neq \varnothing$
.

Allora, per compattezza di X esiste $x^* \in \bigcap_{\varepsilon>0} X_\varepsilon$.
Ciò significa che $f(x^*) \leq \alpha + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, da cui segue che $f(x^*) \leq \alpha$.
Essendo $\alpha = \inf(f(X))$, si ha anche $f(x^*) \geq \alpha$, per cui $f(x^*) = \alpha$.
■

Proposizione 2.5': Teorema di Weierstrass per funzioni semicontinue superiormente

Sia X uno spazio topologico compatto.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua superiormente.

Allora, f è dotata di massimo assoluto, ossia esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in X$.

I due teoremi appena enunciati si possono invertire:

Teorema 2.6: Teorema di Weierstrass inverso

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$.
Si supponga che f ammette minimo assoluto, ossia esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$.

Allora, esiste una topologia τ su X dimodoché X sia compatto, e f sia semicontinua inferiormente.

Dimostrazione

Sia $\tau = \left\{f^{-1}\left(\left]r; +\infty\right[\right) \mid r \in \mathbb{R}\right\} \cup \{\varnothing, X\}$; si provi che essa è una topologia su X.

Intanto, $\varnothing, X \in \tau$ per definizione.

Fissati $A_1, A_2 \in \tau$, si ha $A_1 \cap A_2 \in \tau$.
Infatti, se uno dei due insiemi è vuoto oppure pari a X, il risultato è immediato; altrimenti, esso segue dal fatto che $f^{-1}\big(]r_1;+\infty[\big) \cap f^{-1}\big(]r_2;+\infty[\big) = f^{-1}\big(]\max\{r_1, r_2\};+\infty[\big) \in \tau$.

Fissato $\mathcal{A} \subseteq \tau$, si ha $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
Infatti, se $X \in \mathcal{A}$, si ha $\bigcup \mathcal{A} = X \in \tau$.
Altrimenti, supponendo $\varnothing \notin \mathcal{A}$ senza perdere di generalità, il risultato segue dal fatto che, fissato $S \subseteq \mathbb{R}$, si ha $\bigcup\limits_{r \in S} f^{-1}\big(]r;+\infty[\big) = f^{-1}\big(]\sup(S);+\infty[\big) \in \tau$.

Dunque, τ è una topologia.
Chiaramente, f è semicontinua inferiormente rispetto a τ in quanto $f^{-1}\big(]r;+\infty[\big)$ è aperto per ogni $r \in \mathbb{R}$ per definizione di τ, e dunque si applica la [Proposizione 2.4].
Si provi infine che X è compatto rispetto a τ.

Sia $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ un ricoprimento di aperti di X.
Esiste allora $i \in \mathcal{I}$ tale che $x_0 \in A_i$, dove x_0 è punto di minimo assoluto per f; si provi che $A_i = X$.
Se per assurdo fosse $A_i \neq X$, esisterebbe $\tilde{x} \in X \setminus A_i$.
Essendo $A_i \neq \varnothing$ in quanto $x_0 \in A_i$ e A_i in quanto $\tilde{x} \notin A$, si ha $A_i = f^{-1}\big(]r_i;+\infty[\big)$.
Poiché $x_0 \in A_i$ e $\tilde{x} \notin A_i$, si ha $f(\tilde{x}) \leq r_i < f(x_0)$; ne segue $f(\tilde{x}) < f(x_0)$, contraddicendo il fatto che x_0 sia di minimo assoluto.
■

Teorema 2.6': Teorema di Weierstrass inverso per funzioni semicontinue superiormente

Sia $X \neq \varnothing$.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$.
Si supponga che f ammette massimo assoluto, ossia esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in X$.

Allora, esiste una topologia τ su X dimodoché X sia compatto, e f sia semicontinua superiormente.

Semicontinuità sequenziale

Si ricordi che uno spazio topologico X si dice sequenzialmente compatto quando ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ammette un'estratta convergente a un certo $x^* \in X$.

Definizione 2.7: Semicontinuità di una funzione a valori reali

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in X$.

Si dice che f è **sequenzialmente semicontinua inferiormente** in x_0 quando per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0, si ha $f(x_0) \leq \liminf_n f(x_n)$.

Si dice che f è **sequenzialmente semicontinua superiormente** in x_0 quando per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0, si ha $f(x_0) \geq \limsup_n f(x_n)$.

Osservazione 2.8: Relazione tra semicontinuità e sequenziale semicontinuità.

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente (risp. superiormente) in x_0

Allora, f è anche sequenzialmente semicontinua inferiormente (risp. superiormente) in x_0.

Dimostrazione

Si supponga f semicontinua inferiormente in x_0.
Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente a x_0.
Sia $\varepsilon > 0$.

Per semicontinuità inferiore di f esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x_0) < f(x) + \varepsilon$.
Poiché $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, in corrispondenza a U esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq \nu$.
Allora, $f(x_0) < f(x_n) + \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$.
Ne segue che $f(x_0) \leq \liminf_n f(x_n)$ per arbitrarietà di ε.
■

Il viceversa non vale generalmente; esso vale sotto le seguenti condizioni:

Proposizione 2.8: Equivalenza tra semicontinuità e sequenziale semicontinuità per funzioni su punti con sistemi fondamentali di intorni numerabili

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ sequenzialmente semicontinua inferiormente (risp. superiormente) in x_0.
Si supponga che x_0 possegga in sistema fondamentale di intorni numerabile.

Allora, f è anche semicontinua inferiormente (risp. superiormente) in x_0.

Dimostrazione

Si supponga f sequenzialmente semicontinua inferiormente in x_0.

Si supponga per assurdo che f non sia semicontinua inferiormente in x_0.
Allora, esiste $\tilde{\varepsilon} > 0$ tale che, per ogni U intorno di x_0, esiste $x_U \in U$ tale che $f(x_U) \leq f(x_0) - \tilde{\varepsilon}$.

Sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni numerabile di x_0, che esiste per ipotesi.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ è un intorno di x_0; allora, esiste $x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ tale che $f(x_n) \leq f(x_0) - \tilde{\varepsilon}$ per ipotesi di assurdo.

Si consideri la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; essa converge a x_0.
Infatti, si fissi U intorno di x_0 ; essendo $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x_0, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$U_{n_0} \subseteq U$; pertanto, per ogni $n \geq n_0$ si ha $x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq U_{n_0} \subseteq U$.

Per ipotesi di sequenziale semicontinuità inferiore di f, si ha che $f(x_0) \leq \liminf_n f(x_n)$;
tuttavia, ciò contraddice il fatto che $f(x_n) \leq f(x_0) - \tilde{\varepsilon}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che implica $\limsup_n f(x_n) \leq f(x_0) - \tilde{\varepsilon} < f(x_0)$
.
■

Proposizione 2.9: Teorema di Weierstrass per funzioni sequenzialmente semicontinue inferiormente

Sia X uno spazio topologico sequenzialmente compatto.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione sequenzialmente semicontinua inferiormente.

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

Osservazioni preliminari

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
Allora, esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $\lim_n x_n = \inf(A)$.
Infatti, se A non è limitato inferiormente, il risultato segue dal fatto che A non ammette minoranti.
se A non è limitato inferiormente, il risultato segue dal fatto che $\inf(A)$ è un punto di accumulazione per A.

Dimostrazione

Sia $\alpha = \inf(f)$.
Per l'osservazione preliminare, esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tale che $\lim_n f(x_n) = \alpha$.
Per sequenziale compattezza di X, tale successione ammette un'estratta $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_k x_{n_k} = x^* \in X$.

Per sequenziale semicontinuità inferiore di f si ha $f(x^*) \leq \liminf_k f(x_{n_k})$;
essendo $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ estratta della successione $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ che tende a α, ne segue che $\liminf_k f(x_{n_k}) = \alpha$; dunque, $f(x^*) = \alpha$.
Allora, segue contemporaneamente che f è limitata inferiormente e che ammette minimo assoluto.
$\blacksquare$

Proposizione 2.9': Teorema di Weierstrass per funzioni sequenzialmente semicontinue superiormente

Sia X uno spazio topologico sequenzialmente compatto.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione sequenzialmente semicontinua superiormente.

Allora, f è dotata di massimo assoluto.

Proposizione 2.10: Teorema di Weierstrass per funzioni semicontinue inferiormente con un sottolivello compatto

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua inferiormente.
Si supponga che esiste $r > \inf(f(X))$ tale che $f^{-1}\big(]-\infty; r]\big)$ sia compatto.

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

Dimostrazione

Sia $K = f^{-1}\big(]-\infty; r]\big)$.
Poiché $r > \inf(f(X))$, K è non vuoto.

Si consideri la restrizione $f_{|K}$.
Tale funzione è semicontinua inferiormente su K, essendolo su X per ipotesi;
K è compatto per ipotesi.
Per il [Teorema 2.5], esiste $x^* \in K$ tale che $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in K$.
Inoltre, per ogni $y \in X \setminus K$, essendo $x^* \in K$ si ha $f(x^*) \leq r < f(y)$ per definizione di K.
Allora x^* è di minimo assoluto per f in tutto X.
■

Proposizione 2.10': Teorema di Weierstrass per funzioni semicontinue superiormente con un sopralivello compatto

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua superiormente.
Si supponga che esiste $r < \sup(f(X))$ tale che $f^{-1}\big([r; +\infty[\big)$ sia compatto.

Allora, f è dotata di massimo assoluto.

Proposizione 2.11: Teorema di Weierstrass per funzioni seq. semicontinue inferiormente con un sopralivello seq. compatto

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione sequenzialmente semicontinua inferiormente.
Si supponga che $\exists r > \inf\limits_{x \in X} f(x)$ e $f^{-1}\big(]-\infty; r]\big)$ sia sequenzialmente compatto.

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

Dimostrazione

Sia $K = f^{-1}(]-\infty; r])$.
Poiché $r > \inf(f(X))$, K è non vuoto.

Si consideri la restrizione $f_{|K}$.
Tale funzione è sequenzialmente semicontinua inferiormente su K, essendolo su X per ipotesi;
K è sequenzialmente compatto per ipotesi.
Per il [Teorema 2.9], esiste $x^* \in K$ tale che $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in K$.
Inoltre, per ogni $y \in X \setminus K$, essendo $x^* \in K$ si ha $f(x^*) \leq r < f(y)$ per definizione di K.
Allora x^* è di minimo assoluto per f in tutto X.
■

Proposizione 2.11': Teorema di Weierstrass per funzioni seq. semicontinue superiormente con un sopralivello seq. compatto

Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione sequenzialmente semicontinua superiormente.
Si supponga che $\exists r > \inf\limits_{x \in X} f(x)$ e $f^{-1}(]-\infty; r])$ sia sequenzialmente compatto.

Allora, f è dotata di massimo assoluto.