

## 09 - Gli Spazi con Prodotto Scalare e di Hilbert

### ⌘ Definizione: Prodotto scalare, Spazio con prodotto scalare

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Una funzione  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  si dice prodotto scalare su  $E$  quando:

1.  $\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$  e per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;
2.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ;
3.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ , e  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Dati uno spazio vettoriale  $E$  e un prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su  $E$ , la coppia  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  prende il nome di **spazio con prodotto scalare** o **spazio pre-Hilbertiano**.

### 🔍 Osservazione

Sia  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uno spazio con prodotto scalare.

La funzione  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

Il prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induce una norma  $\| \cdot \|$ ; essa è definita ponendo  $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

### 📄 Proposizione: Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Sia  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uno spazio con prodotto scalare.

Sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ , si ha  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \|$ .

### ⌘ Definizione: Spazio di Hilbert

Sia  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uno spazio con prodotto scalare.

Sia  $\| \cdot \|$  la norma indotta da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Sia  $d$  la metrica indotta da  $\| \cdot \|$ .

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  si dice **spazio di Hilbert** quando è completo rispetto a  $d$ .

### 🔍 Osservazione

Gli spazi di Hilbert sono di Banach.

### 📄 Proposizione 9.1: Legge del parallelogramma

Sia  $(E, \| \cdot \|)$  uno spazio normato.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. Esiste un prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su  $E$  avente  $\| \cdot \|$  come norma indotta;
2.  $\| \cdot \|$  soddisfa la legge del parallelogramma, ossia  
 $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 + \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 = 2(\| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2)$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ .

### 📄 Dimostrazione (1. $\Rightarrow$ 2.)

Sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su  $E$  che ha  $\| \cdot \|$  come norma indotta.

Dunque,  $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ . Si ha

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Analogamente,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Sommando i primi e gli ultimi membri delle due catene di uguaglianze, si ottiene

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2).$$

■

### 📄 **Proposizione 9.2: Insiemi limitati e debolmente chiusi in uno spazio di Hilbert sono debolmente compatti**

Sia  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uno spazio di Hilbert.

Sia  $A \subseteq E$  limitato e debolmente chiuso.

Allora,  $A$  è debolmente compatto, cioè compatto rispetto alla topologia debole su  $E$ .

### 📄 **Proposizione 9.3: Esistenza di una funzione a valori reali continua e suriettiva sulla sfera unitaria**

Sia  $(E, \|\cdot\|)$  uno spazio normato.

Si supponga che  $E$  abbia dimensione infinita.

Sia  $S = \{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ .

Esiste una funzione  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  continua e suriettiva.

#### 🔍 **Osservazioni preliminari**

$S$  è connesso per archi.

Infatti, siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$  con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ .

Si consideri il vettore  $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ , con  $\lambda \in [0; 1]$ .

Si ha  $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} = \mathbf{0}$  se e solo se  $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$  e  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Infatti, sotto tali condizioni vale l'uguaglianza.

Viceversa, se vale l'uguaglianza si ha  $\lambda \mathbf{x} = (\lambda - 1) \mathbf{y}$ , dunque  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono linearmente dipendenti.

Essendo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$  distinti, si deve allora avere  $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ .

Allora, si ha  $\lambda \mathbf{x} = (1 - \lambda) \mathbf{x}$ , da cui segue  $\lambda = 1 - \lambda$ , ossia  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Allora, se  $\mathbf{y} \neq -\mathbf{x}$ , la funzione  $s : [0; 1] \rightarrow S$  definita ponendo  $s(\lambda) = \frac{\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}}{\|\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}\|}$  è ben definita e continua, dunque è un arco.

Se invece  $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ , sia  $\mathbf{u} \in S$  tale che  $\mathbf{u} \notin \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$ .

esso esiste; basta infatti considerare un vettore  $\mathbf{z} \notin \text{span}(\mathbf{x})$ , che esiste essendo  $\text{span}(\mathbf{x})$  di dimensione 1 e  $E$  di dimensione infinita, e poi porre  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}$ , vettore ben definito in quanto  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$  essendo  $\mathbf{z} \notin \text{span}(\mathbf{x})$ .

Essendo  $\mathbf{u}$  distinto da  $\mathbf{x}$  e  $-\mathbf{x}$ , per il caso precedente esistono un arco da  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{u}$ , e un arco da  $\mathbf{u}$  a  $-\mathbf{x}$ ; il loro arco unione è un arco da  $\mathbf{x}$  a  $-\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

### Dimostrazione

La dimostrazione della [Proposizione 6.3] mostra che esiste  $D \subseteq S$  numerabile e tale che  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > \frac{1}{2}$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$  con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ .

### Osservazione

Si osserva che, per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ , si ha  $\overline{B}(\mathbf{x}, \frac{1}{4}) \cap \overline{B}(\mathbf{y}, \frac{1}{4}) = \emptyset$ .

( $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$  denota l'insieme  $\{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ )

Infatti, se  $\mathbf{z} \in \overline{B}(\mathbf{x}, \frac{1}{4})$ , si ha

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \quad \text{Disuguaglianza triangolare}$$

$$> \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &> \frac{1}{2} \text{ per costruzione di } D, \text{ essendo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| &\leq \frac{1}{4} \text{ in quanto } \mathbf{z} \in \overline{B}\left(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Pertanto,  $\mathbf{z} \notin \overline{B}\left(\mathbf{y}, \frac{1}{4}\right)$ .

Sia  $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow D$  una biiezione tra  $\mathbb{Z}$  e  $D$  (che esiste in quanto anche  $\mathbb{Z}$  è numerabile).

Sia  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  con  $|t| \geq \frac{1}{8}$ ; essa esiste, basta considerare ad esempio

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 - 8|t|, & |t| < \frac{1}{8} \\ 0, & |t| \geq \frac{1}{8} \end{cases}.$$

Sia  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo  $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} n \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|), & \exists n \in \mathbb{Z} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| < \frac{1}{4} \\ 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| \geq \frac{1}{4} \end{cases}$  per ogni  $\mathbf{x} \in X$ .

$f$  è ben definita.

Infatti, se esiste  $n \in \mathbb{Z}$  per cui  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| < \frac{1}{4}$ , per l'osservazione iniziale si ha  $\mathbf{x} \notin \overline{B}\left(\mathbf{x}_m, \frac{1}{4}\right)$  per ogni  $m \in \mathbb{Z}$  con  $m \neq n$ , dunque tale  $n$  è unico.

$f$  è continua su  $S$ .

Sia infatti  $\mathbf{y} \in S$ , e sia  $\{\mathbf{y}_p\}_{p \in \mathbb{N}} \subseteq S$  una successione in  $S$  convergente a  $\mathbf{y}$ .

Se  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_n\| < \frac{1}{4}$ , ossia  $\mathbf{y} \in B\left(\mathbf{x}_n, \frac{1}{4}\right)$  per qualche  $n \in \mathbb{Z}$ , essendo tale insieme aperto si ha  $\mathbf{y}_p \in B\left(\mathbf{x}_n, \frac{1}{4}\right)$  definitivamente; la continuità segue allora in questo caso dalla continuità di  $\varphi$  e della norma  $\|\cdot\|$ .

Se  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_n\| \geq \frac{1}{4}$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , si consideri l'intorno  $B\left(\mathbf{y}, \frac{1}{8}\right)$ ; dalla definizione di  $\varphi$  segue che  $\varphi\left(B\left(\mathbf{y}, \frac{1}{8}\right)\right) = \{0\}$ . Poiché  $\mathbf{y}_n \in B\left(\mathbf{y}, \frac{1}{8}\right)$  definitivamente essendo tale insieme aperto, segue anche in questo caso la continuità di  $f$ .

Inoltre,  $f$  è suriettiva.

Infatti,  $S$  è connesso per archi per l'osservazione preliminare, dunque è connesso; essendo  $f$  continua,  $f(S)$  è allora un intervallo in  $\mathbb{R}$ .

Essendo  $f(\mathbf{x}_n) = n \varphi(0) = n$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , segue che  $\mathbb{Z} \subseteq f(S)$ ;  
allora,  $f(S) = \mathbb{R}$ , essendo l'unico intervallo che contiene  $\mathbb{Z}$ .

■