23 - Integrabilità e Integrale, secondo Bochner

⌘ Definizione: Integrabilità secondo Bochner

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione.

f si dice **integrabile secondo Bochner** quando:

- f è fortemente μ-misurabile;
- La funzione $T \to \mathbb{R} : t \mapsto \|f(t)\|$ è sommabile secondo Lebesgue.

⌘ Definizione: Funzione semplice, Integrale di Bochner di funzioni semplici

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione.

f si dice semplice quando:

- f è misurabile;
- $\mu\big(T \setminus f^{-1}\{\mathbf{0}\}\big) < +\infty$;
- $f(T)$ è un insieme finito.

Sia $f : T \to X$ una funzione semplice.

Si dice **integrale di Bochner** di f l'elemento in X
$\int_T f(t)\, d\mu := \sum_{\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{\mathbf{0}\}} \mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) \cdot \mathbf{x}$.

Osservazione

$\int_T f(t)\, d\mu$ è un vettore ben definito;
cioè, $\mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) < +\infty$ per ogni $\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Infatti, $\mu\big(T \setminus f^{-1}\{\mathbf{0}\}\big) < +\infty$ per ipotesi di semplicità di f, e $\mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) \leq \mu\big(T \setminus f^{-1}\{\mathbf{0}\}\big)$ per monotonia della misura di Lebesgue, essendo $f^{-1}\{\mathbf{x}\} \subseteq T \setminus f^{-1}\{\mathbf{0}\}$.

Osservazioni

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione semplice.

Si hanno i seguenti fatti:

- f è integrabile secondo Bochner;
- $\left\|\int_T f(t)\, d\mu\right\| \leq \int_T \|f(t)\|\, dt$.

Infatti, f è misurabile in quanto semplice per ipotesi;
inoltre, essendo $f(T)$ finito, esso è separabile.

Dunque, f è fortemente μ-misurabile.

si osserva che $T = \bigcup\limits_{\mathbf{x} \in f(T)} f^{-1}\{\mathbf{x}\}$; inoltre, $f^{-1}\{\mathbf{x}\} \in \mathscr{L}_p$ per ogni $\mathbf{x} \in f(T)$ essendo f misurabile, e si ha $f^{-1}\{\mathbf{x}\} \cap f^{-1}\{\mathbf{y}\} = \varnothing$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f(T)$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Si ha allora che

$$\begin{aligned}
&\int_T \|f(t)\|\, dt = \sum_{\mathbf{x} \in f(T)} \int_{f^{-1}\{\mathbf{x}\}} \|f(t)\|\, dt && \text{Per numerabile additività dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione} \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in f(T)} \int_{f^{-1}\{\mathbf{x}\}} \|\mathbf{x}\|\, dt && \text{In quanto } f(t) = \mathbf{x} \text{ per ogni } t \in f^{-1}\{\mathbf{x}\} \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{\mathbf{0}\}} \int_{f^{-1}\{\mathbf{x}\}} \|\mathbf{x}\|\, dt && \text{In quanto } \int_{f^{-1}\{\mathbf{0}\}} \|\mathbf{0}\|\, dt = \int_{f^{-1}\{\mathbf{0}\}} 0\, dt = 0 \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{\mathbf{0}\}} \|\mathbf{x}\| \int_{f^{-1}\{\mathbf{x}\}} dt && \text{Per omogeneità dell'integrale di Lebesgue} \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{\mathbf{0}\}} \mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) \cdot \|\mathbf{x}\| && \text{In quanto } \int_S dt = \mu(S) \text{ per ogni } S \in \mathscr{L}_p
\end{aligned}$$

Avendo osservato che $\mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) < +\infty$ per ogni $\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{\mathbf{0}\}$ per semplicità di f, la funzione $T \to \mathbb{R} : t \mapsto \|f(t)\|$ è sommabile, essendo l'ultimo membro della catena di uguaglianze finito;
avendone anche mostrato la misurabilità, ne segue che f è integrabile secondo Bochner.

Si osserva infine che

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_T f(t)\, d\mu\right\| = \left\| \sum_{\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{x} \right\| && \text{Per definizione di integrale di Bochner} \\
&\leq \sum_{\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{0\}} \mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) \cdot \|\mathbf{x}\| && \text{Per sub-additività e assoluta omogeneità delle norme} \\
&= \int_T \|f(t)\|\, dt && \text{Per quanto visto prima}
\end{aligned}$$

Dunque, anche il secondo punto è acquisito.

Proposizione 23.1: Linearità dell'integrale di Bochner per funzioni semplici

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Siano $f, g : T \to X$ due funzioni semplici.
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Allora:

- $\alpha f + \beta g$ è semplice;
- $\int_T (\alpha f + \beta g)(t)\, d\mu = \alpha \int_T f(t)\, d\mu + \beta \int_T g(t)\, d\mu$.

Osservazioni preliminari

Sia $\mathbf{z} \in (\alpha f + \beta g)(T)$.

La famiglia $\left\{ f^{-1}\{\mathbf{x}\} \cap g^{-1}\{\mathbf{y}\} \mid \mathbf{x} \in f(T),\ \mathbf{y} \in g(T),\ \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \mathbf{z} \right\}$ è una partizione di $(\alpha f + \beta g)^{-1}\{\mathbf{z}\}$.

Dimostrazione

Si provi dapprima che $\alpha f + \beta g$ è semplice.

Si ha:

- $(\alpha f + \beta g)(T)$ finito;
  infatti, $(\alpha f + \beta g)(T) \subseteq \alpha f(T) + \beta g(T)$, e tale soprainsieme è finito in quanto $f(T)$ e $g(T)$ sono finiti per ipotesi di

semplicità di f e g.

- $\alpha f + \beta g$ è fortemente μ-misurabile, essendo combinazione lineare di f e g, fortemente μ-misurabili in quanto semplici ([Proposizione 22.3]); dunque, $\alpha f + \beta g$ è anche misurabile.

- $\mu\big(T \setminus (\alpha f + \beta g)^{-1}\{\mathbf{0}\}\big) < +\infty$;
  infatti, $(\alpha f + \beta g)^{-1}\{\mathbf{0}\} \supseteq f^{-1}\{\mathbf{0}\} \cap g^{-1}\{\mathbf{0}\}$, da cui segue che
  $T \setminus (\alpha f + \beta g)^{-1}\{\mathbf{0}\} \subseteq T \setminus (f^{-1}\{\mathbf{0}\} \cap g^{-1}\{\mathbf{0}\}) = T \setminus f^{-1}\{\mathbf{0}\} \cup T \setminus g^{-1}\{\mathbf{0}\}$;
  l'ultimo insieme della catena di inclusioni ha misura finita per semplicità di f e g, dunque anche $T \setminus (\alpha f + \beta g)^{-1}\{\mathbf{0}\}$ ha misura finita.

Resta da mostrare che $\int_T (\alpha f + \beta g)(t)\, d\mu = \alpha \int_T f(t)\, d\mu + \beta \int_T g(t)\, d\mu$.
Si ha

$$\alpha \int_T f(t)\, d\mu + \beta \int_T g(t)\, d\mu$$

$$= \alpha \sum_{\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{\mathbf{0}\}} \mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\}\big)\mathbf{x} + \beta \sum_{\mathbf{y} \in g(T) \setminus \{\mathbf{0}\}} \mu\big(g^{-1}\{\mathbf{y}\}\big)\mathbf{y}$$

Per definizione di integrale di Bochner di funzioni semplici

$$= \alpha \sum_{\mathbf{x} \in f(T) \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{\mathbf{y} \in g(T)} \mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\} \cap g^{-1}\{\mathbf{y}\}\big)\mathbf{x} + \beta \sum_{\mathbf{y} \in g(T) \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{\mathbf{x} \in f(T)} \mu\big(g^{-1}\{\mathbf{y}\} \cap f^{-1}\{\mathbf{x}\}\big)\mathbf{y}$$

Per additività della misura di Lebesgue, essendo le famiglie delle controimmagini degli elementi di $f(T)$ e delle controimmagini degli elementi di $g(T)$ due partizioni di T

$$= \sum_{\mathbf{x}\in f(T)\setminus\{\mathbf{0}\}} \mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\}\cap g^{-1}\{\mathbf{0}\}\big)\alpha\mathbf{x} + \sum_{\mathbf{y}\in g(T)\setminus\{\mathbf{0}\}} \mu\big(f^{-1}\{\mathbf{0}\}\cap g^{-1}\{\mathbf{y}\}\big)\beta\mathbf{y}$$

$$+ \sum_{\mathbf{x}\in f(T)\setminus\{\mathbf{0}\}} \sum_{\mathbf{y}\in g(T)\setminus\{\mathbf{0}\}} \mu\big(f^{-1}\{\mathbf{x}\}\cap g^{-1}\{\mathbf{y}\}\big)(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})$$

$$= \sum_{\mathbf{z}\in(\alpha f+\beta g)(T)\setminus\{\mathbf{0}\}} \mu\big((\alpha f+\beta g)^{-1}\{\mathbf{z}\}\big)\mathbf{z}$$

Per additività della misura di Lebesgue e per l'osservazione preliminare

$$= \int_T (\alpha f+\beta g)(t)\, d\mu$$

Per definizione di integrale di Bochner di funzioni semplici

Anche il secondo punto è dunque acquisito.

■

Proposizione 23.2: Criterio di integrabilità secondo Bochner

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. f è integrabile secondo Bochner;
2. Esiste una successione $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici, convergente quasi ovunque in T a f e tale che $\lim\limits_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\|\, dt = 0$.

Dimostrazione: 2. $\Rightarrow$ 1.

Si supponga che esiste una successione $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici, convergente quasi ovunque in T a f e tale che $\lim_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\| \, d\mu = 0$.

Dall'ipotesi di semplicità segue che f_n è fortemente μ-misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
poiché $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge per ipotesi a f quasi ovunque in T, dalla [Proposizione 22.4] segue allora che f è fortemente μ-misurabile.

Per acquisire la tesi, resta allora da provare che la funzione $T \to \mathbb{R} : t \mapsto \|f(t)\|$ è sommabile, ossia $\int_T \|f(t)\| \, dt < +\infty$.

Poiché per ipotesi si ha $\lim_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\| \, dt = 0$, in corrispondenza a $\varepsilon = 1$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\int_T \|f_n(t) - f(t)\| \, dt < 1$ per ogni $n \geq \nu$.

Si ha allora che

$\int_T \|f(t)\| \, dt = \int_T \|f(t) - f_\nu(t) + f_\nu(t)\| \, dt$	
$\leq \int_T \|f(t) - f_\nu(t)\| \, dt + \int_T \|f_\nu(t)\| \, dt$	Per monotonia dell'integrale di Lebesgue, in quanto $\|f(t) - f_\nu(t) + f_\nu(t)\| \leq \|f(t) - f_\nu(t)\| + \|f_\nu(t)\|$ per sub-additività delle norme
$< 1 + \int_T \|f_\nu(t)\| \, dt$	Per costruzione di ν
$< +\infty$	In quanto f_ν è semplice per ipotesi

come si voleva.
■

Richiami

Sia $T \subseteq \mathscr{L}_p$.
Sia $\eta : T \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile secondo Lebesgue.

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta > 0$ e $M \subseteq T$ misurabile con $\mu(M) < +\infty$ tali che,
per ogni $A \subseteq T$ misurabile con $\mu(A \cap M) < \delta$, si abbia
$\left|\int_A \eta(t)\, dt\right| < \varepsilon$.

Sia $T \subseteq \mathscr{L}_p$.
Sia $\{\gamma_n : T \to \mathbb{R}_0^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e nonnegative, tale che $\lim\limits_n \int_T \gamma_n(t)\, dt = 0$.

Allora, essa ammette un'estratta $\{\gamma_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente quasi ovunque in T alla funzione identicamente nulla.

Dimostrazione: 1. $\Rightarrow$ 2.

Si supponga f integrabile secondo Bochner.

Allora, f è fortemente μ-misurabile, cioè esiste $T_0 \subseteq T$ con $\mu(T_0) = 0$, tale che $f_{T\smallsetminus T_0}$ sia misurabile e $f(T \smallsetminus T_0)$ sia separabile.

Sia ora $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_p$ una successione di insiemi misurabili, tale che:

- $0 < \mu(S_k) < +\infty$;
- $S_h \cap S_k = \varnothing$ per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ con $k \neq k$;
- $T \smallsetminus T_0 = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k$.

Essa esiste, per come è fatta la misura di Lebesgue;
basta infatti considerare una successione $\{S_k^0\}_{k\in\mathbb{N}}$ di insiemi di misura finita che ricoprono tutto $\mathbb{R}^p$ (ad esempio i quadrati di

lato n centrati nell'origine, con $n \in \mathbb{N}$), definire poi $\{S_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}$ ponendo $S_1^1 = S_1^0$ e $S_k^1 = S_k^0 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} S_i^0$, così che sia una partizione di $\mathbb{R}^p$, e infine porre
$S_k = S_k^1 \cap (T \setminus T_0)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, dimodoché sia una partizione di $T \setminus T_0$.

Si fissi $k \in \mathbb{N}$.
$f(S_k)$ è separabile in quanto sottoinsieme di $f(T \setminus T_0)$, separabile per costruzione di T_0;
inoltre, $f_{|S_k}$ è misurabile in quanto $S_k \subseteq T \setminus T_0$ ed $f_{|T\setminus T_0}$ è separabile per costruzione di T_0.
Per la [Proposizione 22.2] esiste allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, una funzione $f_{n,k} : S_k \to X$ misurabile, tale che $f_{n,k}(S_k)$ sia al più numerabile e $\|f_{n,k}(t) - f(t)\| < \frac{1}{2^{k+1}n\mu(S_k)}$ per ogni $t \in S_k$.

Dalla monotonia dell'integrale di Lebesgue viene allora che
$\int_{S_k} \|f_{n,k}(t) - f(t)\|\, dt \leq \int_{S_k} \frac{1}{2^k n\mu(S_k)}\, dt = \frac{1}{2^k n}$, per ogni $n, k \in \mathbb{N}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisca ora la funzione $g_n : T \setminus T_0 \to X$ ponendo
$g_n(t) = f_{n,k}(t)$ per ogni $t \in T$, con $k \in \mathbb{N}$ tale che $t \in S_k$; si hanno i seguenti fatti:

- g_n è ben definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ in quanto, fissato $t \in T$, l'indice $k \in \mathbb{N}$ tale che $t \in S_k$ è unico per costruzione di $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$;

- g_n è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
  infatti, $(g_n)_{|S_k} = f_{n,k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per definizione di g_n, e $f_{n,k}$ è misurabile per costruzione; ne viene che $(g_n)_{|\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k}$ è misurabile, cioè g_n è misurabile essendo $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k = T \setminus T_0$ per costruzione degli S_k.

- $g_n(T \setminus T_0)$ è al più numerabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
  infatti, dalla definizione di g_n segue che $g_n(T \setminus T_0) \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_{n,k}(S_k)$, che è al più numerabile essendo unione numerabile di insiemi al più numerabili per costruzione degli $f_{n,k}$.

Si vuole osservare anche che $\mu\big(g_n^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) < +\infty$ per ogni $\mathbf{x} \in g_n(T \setminus T_0) \setminus \{\mathbf{0}\}$.
Infatti, si nota intanto che $g_n^{-1}\{\mathbf{x}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}$ per definizione di g_n.
Adesso, si osserva che $\mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) < +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e $\mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) > 0$ per un numero finito di $k \in \mathbb{N}$.
Infatti, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\} \subseteq S_k$, e $\mu(S_k) < +\infty$ per costruzione; dunque, $\mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) < +\infty$ per monotonia di μ.
Se fosse $\mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) > 0$ per un numero infinito di $k \in \mathbb{N}$, si avrebbe

$\int_T \lVert f(t)\rVert\, dt = \int_{T\setminus T_0} \lVert f(t)\rVert\, dt$	Per additività dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione, ed essendo $\int_{T_0} \lVert f_n(t) - f(t)\rVert\, dt = 0$ in quanto $\mu(T_0) = 0$ per costruzione
$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{S_k} \lVert f(t)\rVert\, dt$	Per numerabile additività dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione, essendo gli S_k una partizione di $T \setminus T_0$
$\geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{S_k} \lVert f_{n,k}(t)\rVert - \frac{\varepsilon}{2^{k+1} n\mu(S_k)}\, dt$	Per monotonia dell'integrale di Lebesgue, in quanto $\frac{\varepsilon}{2^{k+1} n\mu(S_k)} > \lVert f_{n,k}(t) - f(t)\rVert \geq \lVert f_{n,k}(t)\rVert - \lVert f(t)\rVert$ per ogni $t \in S_k$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, per costruzione di $f_{n,k}$ e per la seconda disuguaglianza triangolare
$\geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}} \lVert f_{n,k}(t)\rVert - \frac{\varepsilon}{2^{k+1} n\mu(S_k)}\, dt$	Per monotonia dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione, essendo $f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\} \subseteq S_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$
$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}} \lVert \mathbf{x}\rVert - \frac{\varepsilon}{2^{k+1} n\mu(S_k)}\, dt$	Essendo $f_{n,k}(t) = \mathbf{x}$ per ogni $t \in f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}$
$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\lVert \mathbf{x}\rVert - \frac{\varepsilon}{2^{k+1} n\mu(S_k)}\right)\mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big)$	Per linearità dell'integrale di Lebesgue ed essendo $\int_S dt = \mu(S)$ per ogni $S \subseteq \mathscr{L}_p$
$= +\infty$	La serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1} n\mu(S_k)}\, \mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big)$ converge per confronto, in quanto $\mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) \leq \mu(S_k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1} n}$ converge in quanto geometrica di ragione $\frac{1}{2}$; La serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lVert \mathbf{x}\rVert\ \mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big)$ diverge positivamente poiché $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e avendo supposto $\mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) > 0$ per un numero infinito di $k \in \mathbb{N}$

Ciò va in contraddizione con il fatto che $\int_T \|f(t)\|\, dt < +\infty$ per integrabilità di f secondo Bochner.

Ne segue che $\mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) < +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e $\mu\big(f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) > 0$ per un numero finito di $k \in \mathbb{N}$; da questo fatto e dalla numerabile sub-additività di μ segue che $\mu\big(g_n^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_{n,k}^{-1}\{\mathbf{x}\}\right) < +\infty$.

Si ha inoltre

$\int_{T\setminus T_0} \|g_n(t) - f(t)\|\, dt$	
$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{S_k} \|g_n(t) - f(t)\|\, dt$	Per numerabile additività dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione, essendo $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una partizione di $T \setminus T_0$
$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{S_k} \|f_{n,k}(t) - f(t)\|\, dt$	In quanto, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale $g_n(t) = f_{n,k}(t)$ per ogni $t \in S_k$ per definizione di g_n
$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k n}$	Per confronto delle serie numeriche, in quanto $\int_{S_k} \|f_{n,k}(t) - f(t)\|\, dt \leq \frac{1}{2^k n}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per quanto osservato prima
$= \frac{1}{n}$	Dall'espressione della somma di una serie geometrica

Si fissi ora $n \in \mathbb{N}$.
Essendo $g_n(T \setminus T_0)$ al più numerabile, si dispongano gli elementi della famiglia $\big\{g_n^{-1}\{\mathbf{x}\} \mid \mathbf{x} \in g_n(T \setminus T_0)\big\}$ in una successione, che verrà denotata con $\{G_{n,h}\}_{h\in\mathbb{N}}$;
si osserva che:

- $\{G_{n,h}\}_{h\in\mathbb{N}}$ è una partizione di $T \setminus T_0$, essendo la famiglia delle controimmagini di tutti i possibili valori che g_n assume in $T \setminus T_0$;
- $\mu(G_{n,h}) < +\infty$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ tale che $G_{n,h} \neq g_n^{-1}\{\mathbf{0}\}$, avendo prima osservato che $\mu\big(g_n^{-1}\{\mathbf{x}\}\big) < +\infty$ per ogni $\mathbf{x} \in g_n(T \setminus T_0) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Essendo la mappa $T \to \mathbb{R} : t \mapsto \|f(t)\|$ sommabile per ipotesi di integrabilità di f secondo Bochner, per il primo richiamo esistono $\delta > 0$ e $M \subseteq T \setminus T_0$ misurabile con $\mu(M) < +\infty$, tali che, per ogni $A \subseteq T \setminus T_0$ con $\mu(A \cap M) < \delta$, si abbia $\int_A \|f(t)\|\, dt < \frac{1}{n}$.

$M \cap \bigcup_{h\in\mathbb{N}} G_{n,h} = M$ in quanto $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è una partizione di $T \setminus T_0$;

per continuità verso l'alto e per sottrattività della misura di Lebesgue, esiste allora $r_n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu\left(M \setminus \bigcup_{h=1}^{r_n} G_{n,h}\right) < \delta$.

Ne viene che $\int_{(T\setminus T_0)\setminus \bigcup_{h=1}^{r_n} G_{n,h}} \|f(t)\|\,dt < \frac{1}{n}$ per costruzione di δ e M.

Infine, si definisca la funzione $f_n : T \to X$ ponendo

$$f_n(t) = \begin{cases} g_n(t), & t \in \bigcup_{h=1}^{r_n} G_{n,h} \\ \\ \mathbf{0}, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

f_n è semplice. Infatti:

- f_n è misurabile essendo g_n misurabile su $T \setminus T_0$, dunque su $\bigcup_{h=1}^{r_n} G_{n,h}$, per quanto osservato su tale funzione, ed essendo la funzione identicamente nulla misurabile su qualsiasi insieme misurabile;

- $f_n(T)$ è finito, essendo f_n costante su $G_{n,h}$ per ogni $h \in \{1, \ldots, r_n\}$ per definizione di $G_{n,h}$;

- $\mu(T \setminus f_n^{-1}\{\mathbf{0}\}) < +\infty$ in quanto $T \setminus f_n^{-1}\{\mathbf{0}\} = \bigcup_{\substack{1\le h\le r_n \\ G_{n,h}\neq g_n^{-1}\{\mathbf{0}\}}} G_{n,h}$, e $\mu(G_{n,h}) < +\infty$ per ogni $h \in \{1, \ldots, r_n\}$ con $G_{n,h} \neq g_n^{-1}\{\mathbf{0}\}$, per definizione di $\{G_{n,h}\}_{h\in\mathbb{N}}$ e per quanto osservato prima su tali insiemi.

$\int_T \|f_n(t) - f(t)\|\,dt$

$\int_{T\setminus T_0} \|f_n(t) - f(t)\|\,dt$

Per additività dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione, ed essendo $\int_{T_0} \|f_n(t) - f(t)\|\,dt = 0$ in quanto $\mu(T_0) = 0$ per costruzione

$= \int_{\bigcup_{h=1}^{r_n} G_{n,h}} \|f_n(t) - f(t)\| \, dt + \int_{(T \setminus T_0) \setminus \bigcup_{h=1}^{r_n} G_{n,h}} \|f_n(t) - f(t)\| \, dt$ Per additività dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione

$= \int_{\bigcup_{h=1}^{r_n} G_{n,h}} \|g_n(t) - f(t)\| \, dt + \int_{(T \setminus T_0) \setminus \bigcup_{h=1}^{r_n} G_{n,h}} \|f(t)\| \, dt$ Per definizione di f_n

$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$ Dalle due maggiorazioni ottenute finora

Ne segue che $\lim_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\| \, d\mu = 0$.

Allora, per il secondo richiamo la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un'estratta $\{f_{n_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_s \|f_{n_s}(t) - f(t)\| = 0$, ossia $\lim_s f_{n_s}(t) = f(t)$, per quasi ogni $t \in T$.

poiché si ha anche $\lim_s \int_T \|f_{n_s}(t) - f(t)\| \, d\mu = 0$ in quanto $\lim_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\| \, d\mu = 0$, la tesi è dunque acquisita.

■

Proposizione 23.3: Convergenza di una successione di integrali secondo Bochner di funzioni semplici

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni semplici, convergente quasi ovunque in T;
sia dunque $f : T \to X$ limite puntuale quasi ovunque per $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Si supponga $\lim_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\| \, dt = 0$.

Allora:

- La successione $\left\{\int_T f_n(t) \, d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in X;

- Data $\{g_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ una seconda successione di funzioni semplici, convergente quasi ovunque in T a f e tale che $\lim\limits_n \int_T \|g_n(t) - f(t)\|\, dt = 0$, si ha
  $\lim\limits_n \int_T f_n(t)\, d\mu = \lim\limits_n \int_T g_n(t)\, d\mu$.

Dimostrazione

Si fissino $n, m \in \mathbb{N}$.

Si provi che la successione $\left\{\int_T f_n(t)\, d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy;
essendo X completo in quanto spazio di Banach, ne segue la convergenza.

Si ponga $f_n(T) \setminus \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h\}$, e $f_m(T) \setminus \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$;
si ponga anche $A_i = f_n^{-1}\{\mathbf{x}_i\}$ per ogni $i \in \{1, \dots, h\}$ e $B_j = f_m^{-1}\{\mathbf{x}_j\}$ per ogni $j \in \{1, \dots, k\}$.

Si ha

$\left\|\int_T f_n(t)\, d\mu - \int_T f_m(t)\, d\mu\right\|$	
$= \left\|\int_T f_n(t) - f_m(t)\, d\mu\right\|$	Per linearità dell'integrale di Bochner di funzioni semplici ([Proposizione 23.1])
$\leq \int_T \|f_n(t) - f_m(t)\|\, dt$	Per maggiorazione della norma dell'integrale di Bochner di funzioni semplici
$= \int_T \|f_n(t) - f(t) + f(t) - f_m(t)\|\, dt$	
$\leq \int_T \|f_n(t) - f(t)\|\, dt + \int_T \|f_m(t) - f(t)\|\, dt$	Per monotonia dell'integrale di Lebesgue

Da questa catena di disuguaglianze e dal fatto che $\lim\limits_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\|\, dt = 0$ per ipotesi, segue allora che la successione $\left\{\int_T f_n(t)\, d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, come si voleva.

Per mostrare il secondo punto, basta osservare che

$\left\lVert \int_T f_n(t)\, d\mu - \int_T g_n(t)\, d\mu \right\rVert$	
$= \left\lVert \int_T f_n(t) - g_n(t)\, d\mu \right\rVert$	Per linearità dell'integrale di Bochner di funzioni semplici ([Proposizione 23.1])
$\leq \int_T \lVert f_n(t) - g_n(t) \rVert\, dt$	Per le osservazioni sulle funzioni semplici
$= \int_T \lVert f_n(t) - f(t) + f(t) - g_n(t) \rVert\, dt$	
$\leq \int_T \lVert f_n(t) - f(t) \rVert\, dt + \int_T \lVert f(t) - g_n(t) \rVert\, dt$	Per monotonia dell'integrale di Lebesgue

e che $\lim\limits_n \int_T \lVert f_n(t) - f(t) \rVert\, dt = 0$ e $\lim\limits_n \int_T \lVert g_n(t) - f(t) \rVert\, dt = 0$ per ipotesi.

Il secondo punto è allora acquisito per confronto dei limiti.

■

⌘ Definizione: Integrale secondo Bochner di funzioni integrabili secondo Bochner

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \lVert \cdot \rVert)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione integrabile secondo Bochner.

Si dice **integrale di Bochner** di f l'elemento in X
$\int_T f(t)\, d\mu := \lim\limits_n \int_T f_n(t)\, d\mu,$
dove $\{f_n : T \to X\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni semplici convergente quasi ovunque in T a f, tale che
$\lim\limits_n \int_T \lVert f_n(t) - f(t) \rVert\, dt = 0.$

Osservazione

Questa definizione è ben posta.
Infatti, una tale successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esiste per la [Proposizione 23.2], il limite indicato esiste per la [Proposizione 23.3], e sempre per tale proposizione esso non dipende dalla scelta di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione: Integrabilità secondo Bochner di funzioni a valori reali

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $f : T \to \mathbb{R}$ una funzione.

Si hanno i seguenti fatti:

- f è integrabile secondo Bochner se e solo se è sommabile secondo Lebesgue;
- $\int_T f(t)\,d\mu = \int_T f(t)\,dt$.

Osservazione: Coerenza della definizione di integrale di Bochner sulle funzioni semplici

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione semplice, che dunque è anche integrabile secondo Bochner.
Sia $\int_T^* f(t)\,d\mu$ l'integrale di Bochner di f nel senso delle funzioni semplici.
Sia $\int_T f(t)\,d\mu$ l'integrale di Bochner di f nel senso delle funzioni integrabili secondo Bochner.

Si ha $\int_T^* f(t)\,d\mu = \int_T f(t)\,d\mu$.

Infatti, essendo f semplice, la successione costante $\{f\}_{n\in\mathbb{N}}$ è costituita da funzioni semplici, converge ovunque in T a f, e si ha $\lim\limits_n \int_T \|f(t) - f(t)\|\, dt = \lim\limits_n 0 = 0$.

Per definizione di $\int_T f(t)\, d\mu$ si ha allora $\int_T f(t)\, d\mu = \lim\limits_n \int_T^* f(t)\, d\mu = \int_T^* f(t)\, d\mu$.