

# 7 - Il Teorema di Separazione

## ≡ Definizione: Sub-additività, Positiva omogeneità

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  si dice:

- **sub-additiva**, quando  $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$  per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ;
- **positivamente omogenea**, quando  $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$  e per ogni  $\lambda \geq 0$ .

## 📄 Lemma 7.1: Lemma di estensione

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale.

Sia  $\mathbf{x}_0 \in E \setminus F$ .

Sia  $G = \text{span}(F \cup \{\mathbf{x}_0\})$ .

Sia  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare.

Sia  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sub-additiva e positivamente omogenea.

Si supponga che  $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ .

Allora, esiste  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi|_F = \varphi$  e  $\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in G$ .

## 🔍 Osservazioni preliminari

1. Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  due insiemi separati, con  $a \leq b$  per ogni  $a \in A$  e per ogni  $b \in B$ .  
Allora,  $\sup(A) \leq \inf(B)$ .

2. Si ha  $G = F + \text{span}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{u} + \lambda \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{u} \in F, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , e tale scrittura è unica in quanto  $F \cap \text{span}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{0}\}$ .

3. Siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , e siano  $h, k \in \mathbb{R}$ .

Sia  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_u + \lambda_u \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{x}_v + \lambda_v \mathbf{x}_0$ ; tali scritture sono uniche per l'osservazione preliminare 2.

Si ha  $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = \underbrace{h\mathbf{x}_u + k\mathbf{x}_v}_{\in F} + \underbrace{(h\lambda_u + k\lambda_v)\mathbf{x}_0}_{\in \mathbb{R}}$ , da cui segue

$\mathbf{x}_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\mathbf{x}_u + k\mathbf{x}_v$  e  $\lambda_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\lambda_u + k\lambda_v$ , sempre per unicità della scrittura degli elementi di  $G$  data dall'osservazione preliminare 2.

### Dimostrazione

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F$ .

Per le proprietà di  $\varphi$  ed  $f$ , si ha

$$\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Linearità di  $\varphi$

$$\leq f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Poiché  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in F$  e  $f$  maggiora  $\varphi$  in  $F$

$$= f((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (\mathbf{x}_0 + \mathbf{y})) \leq f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y})$$

Per subadditività di  $f$

Dal primo e dall'ultimo membro della catena di disuguaglianze segue allora che

$$\varphi(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x}) \text{ per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F.$$

Ciò significa che gli insiemi  $A = \{\varphi(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in F\}$  e  $B = \{f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in F\}$  sono separati; in particolare, si ha  $\sup(A) \leq \inf(B)$  per l'osservazione preliminare 1.

Sia  $r \in \mathbb{R}$  tale che  $\sup(A) \leq r \leq \inf(B)$ .

Sia  $\mathbf{u} \in G$ ; si ha  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_u + \lambda_u \mathbf{x}_0$  per unici  $\mathbf{x}_u \in F$  e  $\lambda_u \in \mathbb{R}$ , per l'osservazione preliminare 2.

Si definisca allora  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo  $\psi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{u}}) - \lambda_{\mathbf{u}}r$  per ogni  $\mathbf{u} \in G$ .

Si provi che  $\psi$  soddisfa le proprietà espresse nella tesi.

Vale  $\psi|_F = \varphi$ ; infatti, per ogni  $\mathbf{u} \in F$  si ha  $\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0\mathbf{x}_0$ , dunque  $\mathbf{x}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$  e  $\lambda_{\mathbf{u}} = 0$  per unicità della scrittura degli elementi di  $G$ .

$\psi$  è un funzionale lineare; infatti, per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$  e per ogni  $h, k \in \mathbb{R}$ , si ha  $\mathbf{x}_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\mathbf{x}_{\mathbf{u}} + k\mathbf{x}_{\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{h\mathbf{u}+k\mathbf{v}} = h\lambda_{\mathbf{u}} + k\lambda_{\mathbf{v}}$  per l'osservazione preliminare 3.

Allora,  $\psi(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = \varphi(h\mathbf{x}_{\mathbf{u}} + k\mathbf{x}_{\mathbf{v}}) - (h\lambda_{\mathbf{u}} + k\lambda_{\mathbf{v}})r$ ; sfruttando la linearità di  $\varphi$  si ottiene  $\psi(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = h(\varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{u}}) - \lambda_{\mathbf{u}}r) + k(\varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{v}}) - \lambda_{\mathbf{v}}r) = h\psi(\mathbf{u}) + k\psi(\mathbf{v})$ , che mostra la linearità di  $\psi$ .

Resta da provare che  $\psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$  per ogni  $\mathbf{u} \in G$

Sia dunque  $\mathbf{u} \in G$ .

Si può supporre  $\mathbf{u} \notin F$  senza perdere di generalità, in quanto se  $\mathbf{u} \in F$  si ha  $\psi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u})$  in quanto  $\psi|_F = \varphi$  e  $f$  migliora  $\varphi$  in  $F$ .

Sia quindi  $\mathbf{u} \in G \setminus F$ ; si ha  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_{\mathbf{u}} + \lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_0$ , per unici  $\mathbf{x}_{\mathbf{u}} \in F$  e  $\lambda_{\mathbf{u}}$ .

Essendo  $\mathbf{u} \notin F$ , si ha  $\lambda_{\mathbf{u}} \neq 0$ .

Si supponga  $\lambda_{\mathbf{u}} > 0$ .

Si consideri  $\frac{\mathbf{x}_{\mathbf{u}}}{\lambda_{\mathbf{u}}} \in F$ ; si ha

$$\varphi\left(\frac{\mathbf{x}_{\mathbf{u}}}{\lambda_{\mathbf{u}}}\right) - f\left(\mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{x}_{\mathbf{u}}}{\lambda_{\mathbf{u}}}\right) \leq r \quad \text{Essendo } r \text{ maggiorante dell'insieme } A \text{ ed essendo } \frac{\mathbf{x}_{\mathbf{u}}}{\lambda_{\mathbf{u}}} \in F$$

$$\implies \varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{u}}) - f(\lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\mathbf{u}}) \leq \lambda_{\mathbf{u}}r \quad \text{Moltiplicando per } \lambda_{\mathbf{u}} \text{ ambo i membri, sfruttando la linearità di } \varphi \text{ e la positiva omogeneità di } f, \text{ essendo } \lambda_{\mathbf{u}} > 0 \text{ nel caso in esame}$$

$$\implies \varphi(\mathbf{x}_{\mathbf{u}}) - \lambda_{\mathbf{u}}r \leq f(\lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\mathbf{u}})$$

$$\implies \psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u}) \quad \text{Per scrittura di } \mathbf{u} \text{ e per definizione di } \psi$$

Si supponga ora  $\lambda_{\mathbf{u}} < 0$ .

Si consideri  $\frac{\mathbf{x}_{\mathbf{u}}}{-\lambda_{\mathbf{u}}} \in F$ ; si ha

$$r \leq f\left(\frac{\mathbf{x}_u}{-\lambda_u} - \mathbf{x}_0\right) - \varphi\left(\frac{\mathbf{x}_u}{-\lambda_u}\right) \quad \text{Essendo } r \text{ minorante dell'insieme } B \text{ ed essendo } \frac{\mathbf{x}_u}{-\lambda_u} \in F$$

$$\implies -\lambda_u r \leq f(\mathbf{x}_u + \lambda_u \mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x}_u) \quad \text{Moltiplicando per } -\lambda_u \text{ ambo i membri, sfruttando la linearità di } \varphi \text{ e la}$$

positiva omogeneità di  $f$ , essendo  $-\lambda_u > 0$  nel caso in esame

$$\implies \varphi(\mathbf{x}_u) - \lambda_u r \leq f(\mathbf{x}_u + \lambda_u \mathbf{x}_0)$$

$$\implies \psi(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{u}) \quad \text{Per scrittura di } \mathbf{u} \text{ e per definizione di } \psi$$

■

### Teorema 7.2: Teorema di Hahn-Banach

Sia  $E$  uno spazio vettoriale.

Sia  $F \subseteq E$  un sottospazio vettoriale di  $E$

Sia  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare.

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sub-additiva e positivamente omogenea.

Si supponga che  $\varphi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in F$ .

Allora, esiste  $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\psi|_F = \varphi$  e  $\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $x \in E$ .

**!prf Dimostrazione**

Si consideri il seguente insieme:

$$\mathcal{S} = \{(G, \eta) \mid G \subseteq E \text{ sottospazio vettoriale di } E, \\ \eta : G \rightarrow \mathbb{R} \text{ funzionale lineare : } \eta|_F = \varphi \quad \wedge \quad \forall \mathbf{x} \in G, \eta(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})\}$$

.

Si introduca su tale insieme la relazione d'ordine  $\preceq$  definita ponendo

$$(G_1, \eta_1) \preceq (G_2, \eta_2) \text{ quando } G_1 \subseteq G_2 \text{ e } \eta_2|_{G_1} = \eta_1.$$

Si provi che l'insieme ordinato  $(\mathcal{S}, \preceq)$  ammette un elemento massimale, tramite il lemma di Zorn.  
Intanto,  $\mathcal{S} \neq \emptyset$  in quanto  $(F, \varphi) \in \mathcal{S}$ .

Sia  $\mathcal{C} = \{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{S}$  una catena in  $\mathcal{S}$ ; si mostri che essa ammette maggiorante in  $\mathcal{S}$ .

Sia  $G = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} G_i$ , e si definisca  $\eta : G \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo, per ogni  $\mathbf{u} \in G$ ,  $\eta(\mathbf{u}) = \eta_i(\mathbf{u})$ , con  $i \in \mathcal{I}$  tale che  $\mathbf{u} \in G_i$ .

Si mostri che  $(G, \eta) \in \mathcal{S}$ .

### Q Osservazione preliminare

Si osserva intanto che, per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , esiste  $i \in \mathcal{I}$  tale che  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ .

Infatti, essendo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$  si ha  $\mathbf{u} \in G_{i_1}$  e  $\mathbf{v} \in G_{i_2}$  per qualche  $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$ .

Essendo  $\{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  una catena, essa è totalmente ordinata rispetto a  $\preceq$ , per cui si ha  $G_{i_1} \subseteq G_{i_2}$  oppure  $G_{i_2} \subseteq G_{i_1}$ , da cui seguono rispettivamente  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in G_{i_1}$  oppure  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in G_{i_2}$ .

Fatta questa osservazione, si proceda con la dimostrazione.

Per quanto concerne  $G$  si ha evidentemente  $G \subseteq E$ ;

$G$  è un sottospazio vettoriale di  $E$ . Infatti, fissati  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , sia  $i \in \mathcal{I}$  per cui  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ , che esiste per l'osservazione preliminare; ne viene che  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in G_i \subseteq G$  essendo  $G_i$  uno spazio vettoriale.

Per quanto concerne  $\eta$ , essa è intanto ben definita.

Infatti, sia  $\mathbf{u} \in G$ , e siano  $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$  tali che  $\mathbf{u} \in G_{i_1}$  e  $\mathbf{u} \in G_{i_2}$ ;

essendo  $\{(G_i, \eta_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  una catena, essa è totalmente ordinata rispetto a  $\preceq$ , per cui si ha  $G_{i_1} \subseteq G_{i_2}$  e  $\eta_{i_2}|_{G_{i_1}} = \eta_{i_1}$ , oppure  $G_{i_2} \subseteq G_{i_1}$  e  $\eta_{i_1}|_{G_{i_2}} = \eta_{i_2}$ .

In entrambi i casi, si ha allora che  $\eta_{i_1}(\mathbf{u}) = \eta_{i_2}(\mathbf{u})$ .

$\eta$  è un funzionale lineare.

Siano infatti  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G$ , e siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;

sia  $i \in \mathcal{I}$  per cui  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$ , che esiste per l'osservazione preliminare.

Allora,  $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in G_i$ ; si ha allora

$$\eta(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \eta_i(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) \quad \text{Essendo } \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in G_i$$

$$= \lambda \eta_i(\mathbf{u}) + \mu \eta_i(\mathbf{v}) \quad \text{Essendo } \eta_i \text{ lineare}$$

$$= \lambda \eta(\mathbf{u}) + \mu \eta(\mathbf{v}) \quad \text{Essendo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in G_i$$

La proprietà  $\eta|_F = \varphi$  è immediata;

essa segue infatti dal fatto che, fissato  $\mathbf{u} \in F$  e fissato un qualunque  $i \in \mathcal{I}$ , si ha  $\eta(\mathbf{u}) = \eta_i(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u})$ , per definizione di  $\eta$  essendo  $F \subseteq G_i$  per costruzione, e per costruzione di  $\eta_i$ .

Altrettanto immediata risulta la disuguaglianza  $\eta(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in G$ .

Infatti, fissato  $\mathbf{x} \in G$  e fissato  $i \in \mathcal{I}$  tale che  $\mathbf{x} \in G_i$ , si ha  $\eta(\mathbf{x}) = \eta_i(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per definizione di  $\eta$  e per costruzione di  $\eta_i$ .

Dunque,  $(G, \eta) \in \mathcal{S}$ , per cui le ipotesi del lemma di Zorn sono verificate.

Allora,  $\mathcal{S}$  ammette un elemento massimale  $(H, \psi)$ .

Per concludere la dimostrazione, resta da provare che  $H = E$ ; fatto questo, la tesi è acquisita dal momento che  $\psi$  soddisfa le proprietà da essa richieste per definizione di  $\mathcal{S}$ .

Si proceda per assurdo, supponendo quindi  $H \subsetneq E$ ; esiste quindi  $\mathbf{x}_0 \in E \setminus H$ .

Allora, per il [Lemma 7.1], posto  $\tilde{H} = \text{span}(H, \mathbf{x}_0)$  si ha che esiste  $\tilde{\psi} : \tilde{H} \rightarrow \mathbb{R}$  funzionale lineare tale che  $\tilde{\psi}|_H = \psi$  e  $\tilde{\psi}(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in \tilde{H}$ .

Ma allora, da ciò seguirebbe che  $(\tilde{H}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{S}$  e che  $(\tilde{H}, \tilde{\psi}) \prec (H, \psi)$ , contro la massimalità di  $(H, \psi)$ .

Dunque,  $H = E$ .

■

