26 - Lo spazio L^∞

⌘ Definizione: Funzione essenzialmente limitata

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$.

f si dice **essenzialmente limitata** quando:

- f è fortemente μ-misurabile;
- Esiste $T_0 \subseteq T$ misurabile con $\mu(T_0) = 0$, tale che $f(T \setminus T_0)$ sia un insieme limitato in X.

Proposizione 26.1: Estremi superiori di norme di funzioni essenzialmente limitate

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $\mathcal{F}_0 = \{S \subseteq T_0 : \mu(S) = 0\}$
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione essenzialmente limitata.

Esiste $T_0 \in \mathcal{F}_0$ tale che $\sup\limits_{t \in T \setminus T_0} \|f(t)\| = \inf\limits_{S \in \mathcal{F}_0} \sup\limits_{t \in T \setminus S} \|f(t)\|$.

Dimostrazione

Sia $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_0$ una successione tale che $\lim\limits_n \sup\limits_{t \in T \setminus S_n} \|f(t)\| = \inf\limits_{S \in \mathcal{F}_0} \sup\limits_{t \in T \setminus S} \|f(t)\|$, che esiste per le proprietà dell'estremo inferiore.

Sia $T_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$; esso ha misura nulla per numerabile subadditività di μ ed essendo $\mu(S_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per costruzione.

Si provi che $\sup_{t\in T\smallsetminus T_0} \|f(t)\| = \inf_{S\in\mathcal{F}_0} \sup_{t\in T\smallsetminus S} \|f(t)\|$.

Evidentemente, vale $\sup_{t\in T\smallsetminus T_0} \|f(t)\| \geq \inf_{S\in\mathcal{F}_0} \sup_{t\in T\smallsetminus S} \|f(t)\|$ in quanto $T_0 \in \mathcal{F}_0$.

Si fissi ora $t' \in T \smallsetminus T_0$; si ha

	$t' \in T \smallsetminus S_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$	Essendo $T \smallsetminus T_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (T \smallsetminus S_n)$
$\implies$	$\|f(t')\| \leq \sup_{t\in T\smallsetminus S_n} \|f(t)\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$	Per definizione di $\sup_{t\in T\smallsetminus S_n} \|f(t)\|$
$\implies$	$\|f(t')\| \leq \lim_n \sup_{t\in T\smallsetminus S_n} \|f(t)\|$	Per confronto
	$= \inf_{S\in\mathcal{F}_0} \sup_{t\in T\smallsetminus S} \|f(t)\|$	Per costruzione di $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Ne viene allora che $\sup_{t\in T\smallsetminus T_0} \|f(t)\| \leq \inf_{S\in\mathcal{F}_0} \sup_{t\in T\smallsetminus S} \|f(t)\|$, e l'uguaglianza è dunque acquisita.

■

⌘ Notazione: $L^\infty(T, X)$

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Si denota con $L^\infty(T, X)$ l'insieme quoziente delle funzioni essenzialmente limitate, modulo la relazione di uguaglianza quasi ovunque.

Osservazione

$L^1(T, X)$ è uno spazio vettoriale, con le operazioni indotte da quelle tra funzioni essenzialmente limitate.

[prop] Proposizione 26.2: Norma su $L^\infty(T, X)$
Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $\|\cdot\|_{L^\infty(T,X)} : L^\infty(T, X) \to \mathbb{R}$ la mappa definita ponendo
$f \mapsto \|f\|_{L^\infty(T,X)} := \inf_{S \in \mathcal{F}_0} \sup_{t \in T \setminus S} \|f(t)\|$, per ogni $f \in L^1(T, X)$.

$\|\cdot\|_{L^\infty(T,X)}$ è una norma su $L^\infty(T, X)$.

Dimostrazione

Proposizione 26.3: Completezza di $\left(L^\infty(T, X), \|\cdot\|_{L^\infty(T,X)}\right)$

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Lo spazio normato $\left(L^\infty(T, X), \|\cdot\|_{L^\infty(T,X)}\right)$ è di Banach.

Dimostrazione