20 - Altro sugli Operatori Bilineari, Proprietà Notevoli delle Funzioni di Classe C²

⌘ Definizione: Funzionale bilineare definito positivo e semidefinito positivo

Sia X uno spazio vettoriale.
Sia $T : X \times X \to \mathbb{R}$ un funzionale bilineare.

T si dice **semidefinito positivo** quando $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

T si dice **definito positivo** quando $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$.

⌘ Definizione: Funzionale bilineare simmetrico

Siano X e Y due spazi vettoriali.
Sia $T : X \times X \to Y$ un operatore bilineare.

T si dice **simmetrico** quando $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Osservazione

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati.
Sia $A \subseteq X$.
Sia $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$.
Sia $f : A \to Y$ una funzione F-derivabile due volte in $\mathbf{x}_0$.

Per il teorema di Schwartz ([Teorema 19.6]), $f''(\mathbf{x}_0)$ è simmetrico.

Proposizione 20.1: Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz estesa

Sia X uno spazio vettoriale.
Sia $T : X \times X \to \mathbb{R}$ un operatore bilineare simmetrico e semidefinito positivo.

Allora, si ha $\big(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)^2 \leq T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Dimostrazione

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.
Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq T(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) && \text{Per semidefinita positività di } T \\ &= T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \lambda\big(T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + T(\mathbf{y}, \mathbf{x})\big) + \lambda^2 T(\mathbf{y}, \mathbf{y}) && \text{Per bilinearità di } T \\ &= T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\lambda T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2 T(\mathbf{y}, \mathbf{y}) && \text{Per simmetria di } T \end{aligned}$$

Per arbitrarietà di $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione quadratica $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\lambda T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2 T(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ è allora nonnegativa.

Ciò equivale ad affermare che il discriminante Δ associato a tale funzione quadratica è nonpositivo;

si ha cioè $0 \geq \Delta = 4\big(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)^2 - 4T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, da cui segue che

$\big(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)^2 \leq T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}, \mathbf{y})$.
■

⌘ Definizione: Funzionale bilineare non degenere

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $T : \mathcal{BL}(X \times X, \mathbb{R})$.

T si dice **non degenere** quando la mappa $T(\circ, \cdot) : X \to X^* : \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}, \cdot)$ è un omeomorfismo lineare.

Osservazione 1

T è non degenere se e solo se $T(\circ, \cdot)$ è biunivoca.

Infatti, essa è di per sé lineare e continua.
Allora, se tale mappa è biunivoca, la sua inversa è automaticamente anch'essa continua per la [Proposizione 13.2].

Osservazione 2

Se $\dim(X) < +\infty$, T è non degenere se e solo se
per ogni $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$, esiste $\mathbf{y} \in X$ tale che $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$.

Infatti, $T(\circ, \cdot)$ è lineare, ed essendo $\dim(X) < +\infty$ si ha $\dim(X^*) = \dim(X) < +\infty$.

Allora, $T(\circ, \cdot)$ è biunivoca (cioè T è non degenere per l'osservazione precedente) se e solo se è iniettiva, ossia $T(\mathbf{x}, \cdot) \neq \mathbf{0}_{X^*}$ per ogni $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$;
ciò a sua volta equivale ad affermare che, per ogni $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$, esiste $\mathbf{y} \in X$ tale che $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$.

Osservazione

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato
Si supponga $\mathbf{dim}(X) < +\infty$.
Sia $T : \mathcal{BL}(X \times X, \mathbb{R})$ simmetrico.

T è definito positivo se e solo se T è semidefinito positivo e non degenere.

Infatti, se T è definito positivo, essa è anche semidefinito positivo;
poiché si ha inoltre $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \gneq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$, segue che T è non degenere per l'[Osservazione 2], in quanto $\mathbf{dim}(X) < +\infty$.

Viceversa, si supponga T semidefinito positivo e non degenere.

Per ogni $\mathbf{x} \in X$ si ha allora $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ per semidefinita positività di T;
per provare che T è definita positiva, sia $\mathbf{x}_0 \in X$ tale che $T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = 0$, e si mostri che $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

Per ipotesi, T è simmetrica e semidefinita positiva;
per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz estesa ([Proposizione 20.1]), per ogni $\mathbf{x} \in X$ si ha
$\big(T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})\big)^2 \leq T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \underbrace{T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}_{=0} = 0$, da cui segue che $T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 0$.

Si ha dunque $T(\mathbf{x}_0, \cdot) = \mathbf{0}_{X^*}$;
essendo T non degenere e $\mathbf{dim}(X) < +\infty$, per ogni $\mathbf{u} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ si ha $T(\mathbf{u}, \cdot) \neq \mathbf{0}_{X^*}$ per l'[Osservazione 2].

Ne segue allora che $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.
■

Proposizione 20.2: Minorazione di operatori bilineari continui simmetrici e semidefiniti positivi sulla diagonale

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
$T \in \mathcal{BL}(X \times X, \mathbb{R})$ simmetrico, semidefinito positivo e non degenere.

Allora, esiste $c > 0$ tale che $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq c\|\mathbf{x}\|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Osservazioni preliminari

Essendo T non degenere, la mappa $T(\circ, \cdot) : X \to X^* : \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x}, \cdot)$ è un omeomorfismo lineare tra X e X^*.
In particolare, la sua inversa è continua;
pertanto, esiste $k > 0$ tale che $\|\mathbf{x}\| = \left\|T(\circ, \cdot)^{-1}\big(T(\mathbf{x}, \cdot)\big)\right\| \leq k\|T(\mathbf{x}, \cdot)\|_{X^*}$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Dimostrazione

Per l'osservazione preliminare, esiste $k > 0$ tale che
$\|\mathbf{x}\| = \left\|T(\circ, \cdot)^{-1}\big(T(\mathbf{x}, \cdot)\big)\right\| \leq k\|T(\mathbf{x}, \cdot)\|_{X^*}$ per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Sia ora $\mathbf{x} \in X$ fissato.

Poiché $\|T(\mathbf{x}, \cdot)\|_{X^*} = \sup\limits_{\mathbf{y} \in X,\ \|\mathbf{y}\| = 1} |T(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$ per definizione di $\|\cdot\|_{X^*}$, esiste $\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x} \in X$ con $\|\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x}\| = 1$, tale che
$|T(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x})| > \frac{1}{2}\|T(\mathbf{x}, \cdot)\|_{X^*}$.

Essendo T simmetrico e semidefinito positivo, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz estesa ([Proposizione 20.1]) si ha
$\big(T(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x})\big)^2 \leq T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot T(\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x})$.

Essendo $\|\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x}\|_X = 1$, dalla definizione di $\|\cdot\|_{\mathcal{BL}(X \times X, \mathbb{R})}$ segue che $T(\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x}) \leq \|T\|_{\mathcal{BL}(X \times X, \mathbb{R})}$.

Mettendo insieme le quattro disuguaglianze ricavate, si ottiene in definitiva

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{x}\|^2 \leq k^2\|T(\mathbf{x}, \cdot)\|_{X^*}^2 && \text{Dalla prima disuguaglianza} \\
&\leq 4k^2\big(T(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x})\big)^2 && \text{Dalla seconda disuguaglianza} \\
&\leq 4k^2\, T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot T(\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{x}) && \text{Dalla terza disuguaglianza} \\
&\leq 4k^2\|T\|_{\mathcal{BL}(X \times X, \mathbb{R})}\, T(\mathbf{x}, \mathbf{x}) && \text{Dalla quarta disuguaglianza}
\end{aligned}
$$

da cui segue che $T(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq \frac{1}{4k^2\|T\|_{\mathcal{BL}(X\times X,\mathbb{R})}}\|\mathbf{x}\|^2$;

valendo tale disuguaglianza per ogni $\mathbf{x} \in X$, la tesi è acquisita.

■

Minimizzazione e convessità delle funzioni di classe C^2

Proposizione 20.3: Condizioni necessarie per punti di estremo relativo per funzioni di classe C^2

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $A \subseteq X$ aperto convesso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.
Sia $\mathbf{x}_0 \in A$ un punto di minimo relativo per f.

Allora, $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$ e $f''(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita positiva.

Dimostrazione

Il fatto che $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$ segue direttamente dal teorema di Fermat ([Teorema 12.6]).

Si provi che $f''(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita positiva, ossia $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{u} \in X$.

Sia intanto $\delta > 0$ tale che $B(\mathbf{x}_0,\delta) \subseteq A$ e $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0,\delta)$; esso esiste perché $\mathbf{x}_0 \in A$ aperto, e $\mathbf{x}_0$ è di minimo relativo per f.

Si definisca la funzione $\varphi : B(\mathbf{0},\delta) \to \mathbb{R}$ ponendo
$\varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{2}f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u},\mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{0},\delta)$.

Si osserva che, per costruzione di δ, si ha $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})$, da cui segue $\varphi(\mathbf{u}) \geq -\frac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{0}, \delta)$.

Si nota inoltre che, in virtù della formula di Taylor nella forma di Peano ([Proposizione 19.9]), avendo acquisito $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$ si ha $\lim\limits_{\mathbf{u} \to \mathbf{0}} \frac{\varphi(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X^2} = 0$.

Fatte queste osservazioni, s fissi ora $\mathbf{u} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$, e si provi che $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$.

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, si ha $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ per bilinearità di $f''(\mathbf{x}_0)$.

Si supponga quindi $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;
per ogni $\lambda > 0$ tale che $\|\lambda \mathbf{u}\|_X < \delta$, appartenente cioè all'intervallo $\left]0; \frac{\delta}{\|\mathbf{u}\|}\right[$, si ha

$$
\begin{aligned}
& \varphi(\lambda \mathbf{u}) \geq -\tfrac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\lambda \mathbf{u}, \lambda \mathbf{u}) && \text{Per quanto osservato prima} \\
\implies\ & \frac{2\varphi(\lambda \mathbf{u})}{\lambda^2} + f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 && \text{Per bilinearità di } f''(\mathbf{x}_0) \\
\implies\ & 2\|\mathbf{u}\| \frac{\varphi(\lambda \mathbf{u})}{\|\lambda \mathbf{u}\|^2} + f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 && \text{In quanto } \frac{\varphi(\lambda \mathbf{u})}{\lambda^2} = \|\mathbf{u}\| \frac{\varphi(\lambda \mathbf{u})}{\|\lambda \mathbf{u}\|^2}
\end{aligned}
$$

da cui segue che

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq \lim_{\lambda \to 0^+} 2\|\mathbf{u}\| \frac{\varphi(\lambda \mathbf{u})}{\|\lambda \mathbf{u}\|^2} + f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u}) && \text{Per confronto dei limiti} \\
& = f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u}) && \text{In quanto } \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(\lambda \mathbf{u})}{\|\lambda \mathbf{u}\|^2} = 0 \text{ per quanto osservato prima}
\end{aligned}
$$

■

Proposizione 20.4: Condizioni sufficienti per punti di minimo relativo stretto per funzioni di classe C^2

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $A \subseteq X$ aperto convesso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.
Sia $\mathbf{x}_0 \in A$.
Si supponga che $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$.
Si supponga che $f''(\mathbf{x}_0)$ sia non degenere e semidefinita positiva.

Allora, $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo relativo stretto per f (cioè, esiste $\delta > 0$ tale che $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\}$)

Dimostrazione

Per ipotesi, $f''(\mathbf{x}_0)$ è non degenere e semidefinita positiva;
inoltre, è di per sé simmetrica per quanto osservato all'inizio del capitolo.

Per la [Proposizione 20.2], esiste allora $c > 0$ tale che $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c\|\mathbf{u}\|^2$ per ogni $\mathbf{u} \in X$.

Per la formula di Taylor nella forma di Peano ([Proposizione 19.9]), avendo $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$ si ha

$$\lim_{\mathbf{u} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u},\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_X^2} = 0.$$

Allora, in corrispondenza a $\varepsilon = \frac{c}{4}$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{0}, \delta) \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$, si abbia

$$\frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u},\mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|^2} < \frac{c}{4}.$$

Fissato allora $\mathbf{u} \in B(\mathbf{0}, \delta) \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ si ha

$$\begin{aligned}
&\tfrac{c}{4}\|\mathbf{u}\|^2 > |f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \tfrac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u})\| \\
&\geq \tfrac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) && \text{In quanto } |t| \geq -t \text{ per ogni } t \in \mathbb{R} \\
&\geq \tfrac{1}{2} c\|\mathbf{u}\|^2 + f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) && \text{Per costruzione di } c
\end{aligned}$$

Si ha allora $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) > \frac{1}{2} c\|\mathbf{u}\|^2 - \frac{c}{4}\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{c}{2}\|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$,
per ogni $\mathbf{u} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$.

Ne segue che $\mathbf{x}_0$ è di minimo relativo stretto per f.

$\blacksquare$

Proposizione 20.4*: Condizioni sufficienti per punti di minimo relativo stretto per funzioni di classe C^2, per spazi normati di dimensione finita

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato con $\dim(X) < +\infty$.
Sia $A \subseteq X$ aperto convesso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.
Sia $\mathbf{x}_0 \in A$.
Si supponga che $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{X^*}$.
Si supponga che $f''(\mathbf{x}_0)$ sia definita positiva.

Allora, $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo relativo stretto per f.

Dimostrazione

Essendo $\dim(X) < +\infty$, la definita positività di $f''(\mathbf{x}_0)$ equivale alla semidefinita positività e alla nondegenerazione.
Le ipotesi di questa propositione sono allora equivalenti a quelle della [Proposizione 20.4], per cui $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo relativo stretto per f.

$\blacksquare$

Proposizione 20.5: Caratterizzazione della convessità di funzioni di classe C^2

X spazio normato.
Sia $A \subseteq X$ aperto e convesso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è convessa;
2. $f''(\mathbf{x})$ è semidefinita positiva per ogni $\mathbf{x} \in A$.

Dimostrazione: 1. $\Rightarrow$ 2.

Si supponga f convessa;

fissati $\mathbf{x} \in A$ e $\mathbf{u} \in X$, si provi che $f''(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$.

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, la tesi è acquisita essendo $f''(\mathbf{x})(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ per bilinearità di $f''(\mathbf{x})$;
si supponga dunque $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Sia $\delta > 0$ tale che $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq A$, che esiste essendo A aperto e $\mathbf{x} \in A$.

Sia $\lambda > 0$ tale che $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{u} \in B(\mathbf{x}, \delta)$, cioè appartenente all'intervallo $\left]0; \frac{\delta}{\|\mathbf{u}\|}\right[$.

Essendo f convessa e G-derivabile in A in quanto di classe C^2, per la [Proposizione 15.3] f' è monotona in A;
ne segue che, per ogni $\lambda \in \left]0; \frac{\delta}{\|\mathbf{u}\|}\right[$, vale

$$\begin{aligned}
& f'(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{u})(\lambda \mathbf{u}) \geq f'(\mathbf{x})(\lambda \mathbf{u}) & \\
\Longrightarrow\quad & \lambda\, f'(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{u})(\mathbf{u}) \geq \lambda\, f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) & \text{Per linearità delle derivate} \\
\Longrightarrow\quad & f'(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{u})(\mathbf{u}) \geq f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) & \text{Dividendo entrambi i membri per } \lambda > 0 \\
\Longrightarrow\quad & \frac{f'(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{u})(\mathbf{u}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{u})}{\lambda} \geq 0 & \text{Essendo } \lambda > 0
\end{aligned}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f'(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{u})(\mathbf{u}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{u})}{\lambda} & \text{Per confronto dei limiti, avendo ricavato che } \frac{f'(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{u})(\mathbf{u}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{u})}{\lambda} \geq 0 \text{ per ogni } \lambda \in \left]0; \frac{\delta}{\|\mathbf{u}\|}\right[\\
& = f''(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{u}) & \text{Si ha } \lim_{\lambda \to 0} \frac{f'(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{u})(\mathbf{u}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{u})}{\lambda} = f''(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \text{ per la [Proposizione 19.5]}
\end{aligned}$$

Dunque, la tesi è acquisita.
■

Dimostrazione: 2. $\Rightarrow$ 1.

Si supponga adesso che $f''(\mathbf{z})$ sia semidefinita positiva per ogni $\mathbf{z} \in A$.

Essendo f G-derivabile su A in quanto di classe C^2, in virtù della [Proposizione 15.2] se ne vuole acquisire la convessità mostrando che, fissati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, vale
$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x})$.

Essendo f di classe C^2, per la formula di Taylor nella forma di Lagrange ([Proposizione 19.7]) si ha

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in \frac{1}{2}\overline{\mathrm{conv}}\left(\left\{f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}))(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in]0;1[\right\}\right).$$

Si osserva che, per ogni $\lambda \in]0;1[$, vale $f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}))(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) \geq 0$ per ipotesi;
questo fatto si traduce nell'inclusione

$$\left\{f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}))(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in]0;1[\right\} \subseteq [0;+\infty[.$$

Essendo $[0;+\infty[$ chiuso e convesso, ne viene che

$\overline{\mathrm{conv}}\left\{f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}))(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in]0;1[\right\} \subseteq [0;+\infty[$, per definizione di chiusura convessa.

Tornando allora alla formula di Taylor, si ricava che

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in \frac{1}{2}\overline{\mathrm{conv}}\left(\left\{f''(\mathbf{x}+\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}))(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) \mid \lambda \in]0;1[\right\}\right) \subseteq [0;+\infty[,$$

da cui segue $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \geq 0$, che corrisponde a ciò che si voleva mostrare.
■