

1 - Successioni Generalizzate e Limiti

Successioni generalizzate

Definizione: Relazione filtrante, insieme diretto

Sia D un insieme.

Sia \preceq una relazione d'ordine parziale su D .

\preceq si dice **relazione filtrante** quando

$$\forall \alpha, \beta \in D, \exists \gamma \in D : \gamma \succeq \alpha \wedge \gamma \succeq \beta.$$

Data una relazione filtrante \preceq su D , l'insieme ordinato (D, \preceq) si dice **insieme diretto**.

Definizione: Successione generalizzata

Sia (D, \preceq) un insieme diretto.

Sia X un insieme non vuoto.

Si dice **successione generalizzata** su X una funzione del tipo $\varphi : D \rightarrow X$.

Fissato $\alpha \in D$, l'elemento $\varphi(\alpha)$ si denota con x_α , e la successione generalizzata φ si denota con $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$.

Per indicare che il codominio della successione è X , si scrive $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$.

Limiti e punti limite di successioni generalizzate

Definizione: Limiti e punti limite di una successione generalizzata

Sia X uno spazio topologico.

Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ una successione generalizzata su X .

Sia $x \in X$.

x si dice **limite** di $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ quando

$\forall U$ intorno di x , $\exists \alpha_0 \in D : \forall \alpha \succeq \alpha_0, x_\alpha \in U$.

In tal caso, si scrive $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$.

x si dice **punto limite** di $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ quando

$\forall U$ intorno di x , $\forall \alpha \in D : \exists \beta \succeq \alpha, x_\beta \in U$.

Q Osservazione: Unicità del limite

Non vale generalmente l'unicità del limite per successioni generalizzate.

Tuttavia, essa vale sotto le seguenti condizioni:

Proposizione 1.1: Limite di una successione generalizzata su uno spazio di Hausdorff è unico

Sia X uno spazio di Hausdorff.

Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ una successione generalizzata su X .

Siano $x, y \in X$ due limiti per $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$.

Allora, $x = y$.

Dimostrazione

Si supponga per assurdo che $x \neq y$.

Essendo X di Hausdorff, esistono U intorno di x e V intorno di y tali che $U \cap V = \emptyset$.

Essendo $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$, in corrispondenza all'intorno U esiste $\alpha_x \in D$ tale che $x_\alpha \in U$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_x$;

essendo $y = \lim_{\alpha} x_\alpha$, in corrispondenza all'intorno V esiste $\alpha_y \in D$ tale che $x_\alpha \in V$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_y$.

Per filtranza di \preceq , esiste $\beta \succeq \alpha_x, \alpha_y$.

Allora, $x_\beta \in U$ e $x_\beta \in V$, il che è contraddittorio in quanto $U \cap V = \emptyset$.

■

Q Osservazione: Relazione tra limiti e punti limiti

Un limite per una successione generalizzata è anche punto limite per questa.

Il viceversa generalmente non è vero.

Caratterizzazioni di enti e proprietà topologiche tramite le successioni generalizzate

📄 Proposizione 1.2: Caratterizzazione della chiusura di un insieme in uno spazio topologico

Sia X uno spazio topologico.

Sia $A \subseteq X$.

Sia $x \in X$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. $x \in \overline{A}$;
2. Esiste una successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq A$ tale che $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$.

📄 Dimostrazione (2. \Rightarrow 1.)

Si supponga che esista una successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq A$ tale che $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$.

Sia U un intorno di x .

Per definizione di limite, esiste $\alpha_0 \in D$ tale che $x_\alpha \in U$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_0$.

Poiché $x_\alpha \in A$ per ogni $\alpha \in D$ per ipotesi, si ha $x_\alpha \in U \cap A$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_0$, dunque $U \cap A$.

Allora, $A \cap U \neq \emptyset$ per ogni U intorno di x , ossia $x \in \overline{A}$.

■

Dimostrazione (2. \Rightarrow 1.)

Si supponga che $x \in \overline{A}$.

Sia \mathcal{U} la famiglia degli intorni di x ordinata con \subseteq .

\subseteq è filtrante; infatti, fissati $U, V \in \mathcal{U}$, si ha $U \cup V \in \mathcal{U}$ e $U, V \subseteq U \cup V$.

Essendo $x \in \overline{A}$ per ipotesi, si ha $U \cap A \neq \emptyset$ per ogni $U \in \mathcal{U}$.

Dunque, per ogni $U \in \mathcal{U}$, sia x_U tale che $x_U \in U \cap A$.

Si consideri la successione generalizzata $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}}$.

Si ha $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}} \subseteq A$ per come è stato definito x_U .

Inoltre, si ha $x = \lim_U x_U$. Infatti, per ogni intorno U di x , ossia per ogni $U \in \mathcal{U}$, si ha $x_U \in U$ per definizione di x_U ;

allora, $x_U \in V$ per ogni $V \in \mathcal{U}$ tale che $V \supseteq U$.

■

Proposizione 1.3: Caratterizzazione della finezza di topologie

Sia $X \neq \emptyset$ uno spazio topologico.

Siano τ_1, τ_2 due topologie su X .

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. τ_1 è meno fine di τ_2 , ossia $\tau_1 \subseteq \tau_2$;
2. Per ogni successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ e per ogni $x \in X$, si ha
$$x = \lim_{\alpha} x_\alpha \text{ in } \tau_2 \implies x = \lim_{\alpha} x_\alpha \text{ in } \tau_1.$$

Osservazioni preliminari

τ_1 è meno fine di τ_2 , se e solo se ogni chiuso secondo τ_1 è chiuso secondo τ_2 .

Dimostrazione (1. \Rightarrow 2.)

Si supponga τ_1 meno fine di τ_2 .

Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ una successione generalizzata.

Sia $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ in τ_2 ;

si provi che $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ in τ_1 .

Sia U un intorno di x secondo τ_1 .

Allora, esso è intorno di x anche secondo τ_2 per ipotesi;

dunque, per definizione di x ,

$\exists \alpha_0 \in D : \forall \alpha \succeq \alpha_0, x_\alpha \in U$.

Pertanto, $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ in τ_1 .

■

Dimostrazione (2. \Rightarrow 1.)

Intanto, si denoti con $\text{cl}_\tau(A)$ la chiusura dell'insieme A rispetto alla topologia τ .

Sia C un insieme chiuso secondo τ_1 .

Sia $x \in \text{cl}_{\tau_2}(C)$.

Si provi che $x \in C$, mostrando così che $\text{cl}_{\tau_2}(C) \subseteq C$, ossia C è chiuso secondo τ_2 .

Per la [proposizione 1.2], esiste $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ tale che $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ in τ_2 .

Per ipotesi, segue allora $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ in τ_1 .

Pertanto, $x \in \text{cl}_{\tau_1}(C)$ ossia, essendo C chiuso secondo τ_1 per definizione, $x \in C$, come volevasi dimostrare.

■

Proposizione 1.4: Caratterizzazione della compattezza

Sia X uno spazio topologico.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. X è compatto;
2. Ogni successione generalizzata in X ammette almeno un punto limite.

Dimostrazione (1. \Rightarrow 2.)

Si supponga X compatto.

Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ una successione generalizzata in X .

Si supponga per assurdo che ogni $x \in X$ non è punto limite per $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$.

Cioè, per ogni $x \in X$, esistono U_x intorno aperto di x e $\alpha_x \in D$ tali che $x_\beta \notin U_x$ per ogni $\beta \succeq \alpha_x$.

Si consideri la famiglia $\{U_x \mid x \in X\}$; essa è un ricoprimento di aperti per X in quanto $x \in U_x$ per ogni $x \in X$.
Per compattezza di X , esistono allora $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = X$.

Si considerino $\alpha_{x_1}, \dots, \alpha_{x_n}$; per filtranza di \preceq , esiste $\beta \in D$ tale che $\beta \succeq \alpha_{x_i}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ma allora, per definizione di $\alpha_{x_1}, \dots, \alpha_{x_n}$, essendo β successivo a ognuno di questi si ha $x_\beta \notin U_{x_i}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, segue allora $x_\beta \notin \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$;

ciò risulta contraddittorio in quanto $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = X$, e $x_\beta \in X$ in quanto $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$.

■

Dimostrazione (2. \Rightarrow 1.)

Si supponga che ogni successione generalizzata in X ammetta almeno un punto limite.

Sia \mathcal{F} una famiglia di chiusi con la proprietà d'intersezione finita.

Sia \mathcal{G} la famiglia delle sottofamiglie finite di \mathcal{F} con la relazione d'ordine \subseteq ;
essa è filtrante in quanto, fissati $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{G}$, si ha $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$.

Poiché \mathcal{F} soddisfa la proprietà d'intersezione finita, per ogni $\mathcal{G} \in \mathcal{G}$ si ha $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$;

Per ogni $G \in \mathcal{G}$, sia dunque $x_G \in \bigcap \mathcal{G}$.

Si consideri la successione generalizzata $\{x_G\}_{G \in \mathcal{G}} \subseteq X$.

Per ipotesi, esiste $x^* \in X$ tale da essere un punto limite di $\{x_G\}_{G \in \mathcal{G}}$.

Si provi che $x^* \in \bigcap \mathcal{F}$.

Sia $C \in \mathcal{F}$; si provi che $x^* \in C$.

Sia U un intorno di x^* ;

si ha $\{C\} \in \mathcal{G}$ essendo sottofamiglia finita di \mathcal{F} .

Per definizione di x^* quale punto limite di $\{x_G\}_{G \in \mathcal{H}}$, esiste $\mathcal{G} \in \mathcal{G}$ con $\mathcal{G} \supseteq \{C\}$, ossia $C \in \mathcal{G}$, tale che $x_G \in U$.

Essendo $x_G \in \bigcap \mathcal{G}$ per definizione e $C \in \mathcal{G}$, si ha anche $x_G \in C$.

Dunque, $x_g \in U \cap C$.

Allora, $U \cap C \neq \emptyset$ per ogni U intorno di x^* , ossia $x^* \in \overline{C}$.

Essendo C chiuso, segue $x^* \in C$, come volevasi dimostrare.

■

Proposizione 1.5: Caratterizzazione della continuità

Siano X e Y due spazi topologici.

Sia $x \in X$.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. f è continua in x ;
2. Per ogni successione generalizzata $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ convergente a x , si ha $f(x) = \lim_{\alpha} f(x_\alpha)$.

Dimostrazione (1. \Rightarrow 2.)

Si supponga f continua in x .

Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq X$ una successione generalizzata convergente a x .

Sia V un intorno di $f(x)$.

Per continuità di f , esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subseteq V$.

Poiché $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$ per ipotesi, esiste $\alpha_0 \in D$ tale che $x_\alpha \in U$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_0$.

Essendo $f(U) \subseteq V$, si ha allora $f(x_\alpha) \in V$ per ogni $\alpha \succeq \alpha_0$.

Ne segue allora che $f(x) = \lim_{\alpha} f(x_\alpha)$.

■

☑ Dimostrazione (2. \Rightarrow 1.)

Si supponga che valga quanto dichiarato nel punto 2.

Si supponga per assurdo che f non sia continua in x ;

cioè, esiste \tilde{V} intorno di $f(x)$ tale che, per ogni U intorno di x , $f(U) \not\subseteq \tilde{V}$.

Per ogni intorno U di x , sia dunque $x_U \in U$ tale che $f(x_U) \notin \tilde{V}$.

Sia \mathcal{U} la famiglia degli intorni di x con la relazione d'ordine \subseteq , che è filtrante.

Si consideri quindi la successione generalizzata $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}}$.

Si ha $x = \lim_U x_U$;

infatti, per ogni U intorno di x , ossia per ogni $U \in \mathcal{U}$, si ha $x_U \in U$, dunque $x_U \in V$ per ogni $V \in \mathcal{U}$ con $V \supseteq U$.

Allora, per ipotesi si ha $f(x) = \lim_U f(x_U)$.

Tuttavia ciò contraddice il fatto che, in corrispondenza all'intorno \tilde{V} di $f(x)$, si ha $f(x_U) \notin \tilde{V}$ per ogni $U \in \mathcal{U}$ per definizione di x_U .

■

Minimo e massimo limite per successioni generalizzate

📖 Definizione: Limite minimo e limite massimo di una successione generalizzata

Sia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \subseteq \mathbb{R}$ una successione generalizzata in \mathbb{R} .

Si dice **limite minimo** di $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ l'elemento $\liminf_{\alpha} x_\alpha = \sup_{\alpha \in D} \inf_{\beta \geq \alpha} x_\beta$.

Si dice **limite massimo** di $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ l'elemento $\limsup_{\alpha} x_\alpha = \inf_{\alpha \in D} \sup_{\beta \geq \alpha} x_\beta$.

