Decomposizioni

Definizione: Decomposizione di un intervallo chiuso e limitato

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Si dice **decomposizione** di [a;b] una tupla $\Delta = (x_1,\ldots,x_{n+1})$ tale che $a=x_1<\cdots< x_n=b$.

I punti x_1, \ldots, x_{n+1} si dicono **capisaldi** di Δ .

L'insieme delle decomposizioni di [a; b] si denota con $\mathcal{D}[a; b]$.

Fissato $\Delta=(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathcal{D}[a;b]$, si dice **modulo** di Δ il valore $|\Delta|:=\max_{1\leq i\leq n}(x_{i+1}-x_n)$.

₩ Definizione: Decomposizioni canoniche

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $n \in \mathbb{N}$.

Si dice decomposizione canonica n-esima di [a;b] la tupla

$$\Delta_n:=(ilde x_1,\dots, ilde x_{n+1})$$
, dove $ilde x_i=a+rac{i-1}{n}(b-a)$ per ogni $i\in\{1,\dots,n+1\}$.

Essa è una decomposizione di [a;b], essendo i suoi elementi ordinati in maniera strettamente crescente ed essendo $x_1 = a$ e $x_{n+1} = b$.

Q Osservazione

Si ha $|\Delta_n|=rac{b-a}{n}$, essendo $ilde x_{i+1}- ilde x_i=rac{b-a}{n}$ per ogni $i\in\{1,\dots,n\}$.

Dunque, si ha in particolare $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

₩ Definizione: Decomposizione unione

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Siano
$$\Delta_1=(x_1,\ldots,x_{n+1}), \Delta_2=(y_1,\ldots,y_{m+1})\in \mathcal{D}[a;b].$$

Si dice **decomposizione unione** di Δ_1 e Δ_2 la tupla $\Delta_1 \cup \Delta_2 = (z_1, \dots, z_{p+1})$, definita dimodoché:

- $\{z_1,\ldots,z_{p+1}\}=\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}\cup\{y_1,\ldots,y_{m+1}\};$
- $z_1 < \cdots < z_{p+1}$.

Essa esiste, è unica ed è una decomposizione di [a; b].

Integrabilità secondo Riemann

₩ Definizione: Integrabilità secondo Riemann, Integrale

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f:[a;b] \to X$ una funzione.

f si dice integrabile secondo Riemann quando esiste $\mathbf{u} \in X$ tale che:

Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

per ogni
$$\Delta=(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathcal{D}[a;b]$$
 con $|\Delta|<\delta$, per ogni $(t_1,\ldots,t_n)\in[x_1;x_2] imes\cdots imes[x_n;x_{n+1}]$, si ha

$$\left\|\sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\mathbf{u}
ight\|$$

Q Osservazione

u è unico.

Infatti, siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ per cui si verifica quanto espresso nella definizione, e si fissi $\varepsilon > 0$.

In corrispondenza a $\frac{\varepsilon}{2}$, esistono allora $\delta_{\mathbf{u}}, \delta_{\mathbf{v}} > 0$ per cui

$$\left\|\sum_{i=1}^h (x_{i+1}-x_i)f(x_i)-\mathbf{u}
ight\|<rac{arepsilon}{2},$$
 per ogni $\Delta=(x_1,\ldots,x_{h+1})\in\mathcal{D}[a;b]$ con $|\Delta|<\delta_{\mathbf{u}}$;

$$\left\|\sum_{i=1}^k (y_{i+1}-y_i)f(y_i)-\mathbf{v}
ight\|<rac{arepsilon}{2},$$
 per ogni $\Delta=(y_1,\ldots,y_{k+1})\in\mathcal{D}[a;b]$ con $|\Delta|<\delta_{\mathbf{v}}$.

Si consideri la decomposizione canonica $\Delta_n = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+1})$ di [a; b], con $n \in \mathbb{N}$ tale che $|\Delta_n| < \min\{\delta_{\mathbf{u}}, \delta_{\mathbf{v}}\}$, che esiste essendo $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

Si ha allora
$$\left\|\sum\limits_{i=1}^n (ilde{x}_{i+1} - ilde{x}_i)f(ilde{x}_i) - \mathbf{u}
ight\| < rac{arepsilon}{2} \ \mathrm{e} \ \left\|\sum\limits_{i=1}^n (ilde{x}_{i+1} - ilde{x}_i)f(ilde{x}_i) - \mathbf{v}
ight\| < rac{arepsilon}{2};$$

si ottiene allora

$$\varepsilon > \left\| \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i}) f(\tilde{x}_{i}) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i}) f(\tilde{x}_{i}) - \mathbf{v} \right\|$$
sommando membro a membro le due disuguaglianze
$$= \left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i}) f(\tilde{x}_{i}) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i}) f(\tilde{x}_{i}) - \mathbf{v} \right\|$$
$$\geq \left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i}) f(\tilde{x}_{i}) + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i}) f(\tilde{x}_{i}) - \mathbf{v} \right\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$
Per sub-additività delle norme

Ne segue che $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, per cui $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Avendo acquisito l'unicità di **u**, tale vettore prende il nome di **integrale** di f sull'intervallo [a;b]; esso si denota con $\int_a^b f(x) dx$.

Q Osservazione

Se $X = \mathbb{R}$, le nozioni di integrabilità e di integrale secondo Riemann fornite sopra coincidono con quelle definite originariamente per le sole funzioni reali.

Proposizione 21.1: Integrale delle funzioni costanti

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

 $\mathbf{k} \in X$.

Sia $c_{\mathbf{k}}:[a;b] \to X$ la funzione costantemente pari a \mathbf{k} , definita cioè ponendo $c_{\mathbf{k}}(x) = \mathbf{k}$ per ogni $x \in [a;b]$.

 $c_{f k}$ è integrabile secondo Riemann, e $\int_a^b c_{f k}(x)\,dx=(b-a){f k}.$

Dimostrazione

Si osserva che, per ogni $\Delta=(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathcal{D}[a;b]$ e per ogni $(t_1,\ldots,t_n)\in[x_1;x_2]\times\cdots\times[x_n;x_{n+1}]$ vale

$$\left\|\sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i)c_{\mathbf{k}}(t_i)-(b-a)\mathbf{k}
ight\|$$

 $=\left\|\sum_{i=1}^n(x_{i+1}-x_i)\mathbf{k}-(b-a)\mathbf{k}
ight\|$ Per definizione di $c_{\mathbf{k}}$

$$= \|(b-a)\mathbf{k} - (b-a)\mathbf{k}\|$$
 $\sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1 = b-a$

Da questo fatto segue allora che $c_{\mathbf{k}}$ è integrabile, con $\int_a^b c_{\mathbf{k}}(x) \, dx = (b-a)\mathbf{k}$.

= 0

Proposizione 21.2: Caratterizzazione dell'integrabilità

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f:[a;b] \to X$ una funzione.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- f è integrabile secondo Riemann;
- Per ogni $\varepsilon>0$, esiste $\delta>0$ tale che per ogni $\Delta_1=(x_1,\ldots,x_{n+1})$, $\Delta_2=(y_1,\ldots,y_{n+1})\in\mathcal{D}[a;b]$ con $|\Delta_1|<\delta$ e $|\Delta_2|<\delta$, per ogni $(t_1,\ldots,t_n)\in[x_1;x_2]\times\cdots\times[x_n;x_{n+1}]$ e per ogni $(s_1,\ldots,s_m)\in[y_1;y_2]\times\cdots\times[y_m;y_{m+1}]$, si ha $\left\|\sum_{i=1}^n(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\sum_{i=1}^m(y_{j+1}-y_j)f(s_j)\right\|<\varepsilon.$

Dimostrazione

Se f è integrabile secondo Riemann, esistono $\mathbf{u} \in X$ e $\delta > 0$ tale che $\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}[a; b]$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n; x_{n+1}]$.

Allora, date due decomposizioni $\Delta_1=(x_1,\ldots,x_{n+1})$, $\Delta_2=(y_1,\ldots,y_{n+1})\in\mathcal{D}[a;b]$ con $|\Delta_1|<\delta$ e $|\Delta_2|<\delta$, e fissate due tuple $(t_1,\ldots,t_n)\in[x_1;x_2]\times\cdots\times[x_n;x_{n+1}]$ e $(s_1,\ldots,s_m)\in[y_1;y_2]\times\cdots\times[y_m;y_{m+1}]$, si ha

due tuple
$$(t_1, \ldots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \cdots \times [x_n; x_{n+1}]$$
 e $(s_1, \ldots, s_m) \in [y_1; y_2] \times \cdots \times [y_m; y_{m+1}]$, si ha
$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} + \mathbf{u} - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \mathbf{u} - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) \right\|$$
Per subadditività delle norme
$$\leq \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j) - \mathbf{u} \right\|$$
Per subadditività delle norme
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
Per costruzione di \mathbf{u}

Viceversa, si supponga verificata la condizione del secondo punto.

Per ogni $\varepsilon > 0$, si fissi dunque $\delta_{\varepsilon} > 0$ dimodoché si verifichi quanto descritto in corrispondenza a ε .

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, posta $\Delta_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_{n+1}^{(n)})$ la decomposizione canonica n-esima, si consideri $\sum\limits_{i=1}^n f\big(x_i^{(n)}\big) \big(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\big)$.

La successione
$$\left\{\sum\limits_{i=1}^n fig(x_i^{(n)}ig)ig(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}ig)
ight\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$$
 è di Cauchy;

infatti, per ogni $\varepsilon>0$, esiste $\nu\in\mathbb{N}$ tale che $|\Delta_n|<\delta_{\varepsilon}$ per ogni $n\geq
u$, in quanto $\lim_n |\Delta_n|=0$.

Allora, per ogni $m,n\geq
u$ si ha $|\Delta_m|,|\Delta_n|<\delta_{arepsilon}$, e dunque

$$\left\|\sum_{i=1}^n fig(x_i^{(n)}ig)ig(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}ig) - \sum_{j=1}^m fig(x_j^{(m)}ig)ig(x_{j+1}^{(m)}-x_j^{(m)}ig)
ight\| < arepsilon,$$
 per costruzione di $\delta_arepsilon.$

Essendo X completo in quanto di Banach per ipotesi, $\left\{\sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) \left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge:

sia $\mathbf{u} \in X$ il suo limite.

Si provi che \mathbf{u} verifica la condizione per l'integrabilità di f.

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.

Sia
$$u_1 \in \mathbb{N}$$
 tale che $\left\|\sum_{i=1}^n fig(x_i^{(n)}ig)ig(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}ig) - \mathbf{u}
ight\| < rac{arepsilon}{2}$ per ogni $n \geq
u_1$, che esiste per definizione di \mathbf{u} .

Sia $u \in \mathbb{N}$ (si supponga $u \ge
u_1$) tale che $|\Delta_n| < \delta_{arepsilon/2}$ per ogni $n \ge
u$, che esiste in quanto $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

Sia
$$\Delta=(x_1,\ldots,x_{p+1})\in\mathcal{D}[a;b]$$
 con $|\Delta|<\delta_{arepsilon/2},$ e sia $(t_1,\ldots,t_p)\in[x_1;x_2] imes\cdots imes[x_p;x_{p+1}]$.

Si ha

$$\begin{split} & \left\| \sum_{i=1}^{p} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \mathbf{u} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^{\nu} f \left(x_i^{(\nu)} \right) \left(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)} \right) + \sum_{i=1}^{\nu} f \left(x_i^{(\nu)} \right) \left(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)} \right) - \mathbf{u} \right\| \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^{p} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^{\nu} f \left(x_i^{(\nu)} \right) \left(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)} \right) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{\nu} f \left(x_i^{(\nu)} \right) \left(x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)} \right) - \mathbf{u} \right\| \end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Per subaddi delle no

La maggion del prin addendo segue dall'ipot costruzi $\delta_{\varepsilon/2}$, avo posto

 $|\Delta| < \epsilon$ essendo $|\Delta_{\nu}| < \epsilon$ per
costruzi ν ;
La
maggion
del secc
addendo
segue di
costruzi ν_1 , aver
suppost $\nu \ge \nu_1$

La tesi è pertanto acquisita.

Proposizione 21.3: Integrabilità delle funzioni continue

Sia $[a;b]\subseteq\mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia f:[a;b] o X una funzione continua.

Allora, f è integrabile secondo Riemann su [a; b].

Dimostrazione

In virtù della [Proposizione 21.2], si vuole provare la continuità di f mostrando la condizione equivalente da essa indicata.

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.

Essendo f continua per ipotesi su [a;b] compatto in \mathbb{R} , essa è uniformemente continua; ne segue che esiste $\delta>0$ tale che, per ogni $s,t\in[a;b]$ con $|s-t|<\delta$, si ha $\|f(s)-f(t)\|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Siano $\Delta_1=(x_1,\ldots,x_{n+1})$ e $\Delta_2=(y_1,\ldots,y_{m+1})$ due decomposizioni di [a;b] con $|\Delta_1|,|\Delta_2|<\delta;$

si provi che, fissati $(t_1,\ldots,t_n)\in [x_1;x_2] imes\cdots imes [x_n;x_{n+1}]$ e $(s_1,\ldots,s_m)\in [y_1;y_2] imes\cdots imes [y_m;y_{m+1}]$, si ha $\left\|\sum_{i=1}^n(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\sum_{i=1}^m(y_{j+1}-y_j)f(s_j)
ight\|<arepsilon.$

Si consideri la decomposizione unione $\Delta_1 \cup \Delta_2 = (w_1, \dots, w_{p+1});$

si provi che
$$\left\|\sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i)f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1}-x_h)f(w_h) \right\| < rac{arepsilon}{2} \; \mathrm{e} \; \left\|\sum_{j=1}^m (y_{j+1}-y_j)f(s_j) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1}-x_h)f(w_h) \right\| < rac{arepsilon}{2}.$$

Intanto, per ogni $i \in \{1, \dots, n+1\}$, sia $h_i \in \{1, \dots, p+1\}$ tale che $w_{h_i} = x_i$, che esiste ed è unico per definizione di $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Si osserva che $1=h_1<\dots< h_{n+1}=p+1$ per definizione di $\Delta_1\cup\Delta_2$; ne segue che gli insiemi $\{h_1,\dots,h_2-1\},\dots,\{h_n,\dots,h_{n+1}-1\}$ costituiscono una partizione di $\{1,\dots,p\}$.

Allora,

$$\left\|\sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i)f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1}-x_h)f(w_h)
ight\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| \qquad \sum_{h=1}^{p} \dots = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} \dots \text{ per quanto osservato sugli } h_i$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) f(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - x_h) f(w_h) \right\| \qquad \text{In quanto } \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} (w_{h+1} - w_h) = w_{h_{i+1}} - w_{h_i} = x_{i+1} - x_i$$

$$\text{definizione degli } h_i$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1}(w_{h+1}-w_h)ig(f(t_i)-f(w_h)ig)
ight\|$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} ig\| (w_{h+1}-w_h) ig(f(t_i) - f(w_h) ig) ig\|$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1}(w_{h+1}-w_h)\|f(t_i)-f(w_h)\|_{2}$$

$$<\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=h_{i}}^{h_{i+1}-1}(w_{h+1}-w_{h})rac{arepsilon}{2(b-a)}$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{h=1}^p \cdots = \sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{h_{i+1}-1} \ldots$$
 per quanto osservato sugli h_i

In quanto
$$\sum\limits_{h=h_i}^{h_{i+1}-1}(w_{h+1}-w_h)=w_{h_{i+1}}-w_{h_i}=x_{i+1}-x_i$$
 definizione degli h_i

Per subadditività delle norme

Per assoluta omogeneità delle norme, essendo $w_{h+1} - w_h$ per ogni $h \in \{1, \dots, p\}$

Per costruzione di δ ; infatti, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ si è posto $t_i \in [x_i; x_{i+1}]$ e ogni $h \in \{h_i, \ldots, h_{i+1} - 1\}$ si ha $[w_h = [w_{h_i}; w_{h_{i+1}}] = [x_i; x_{i+1}];$ essendo \$

In quanto

$$\sum_{i=1}^n \sum_{h=h_i}^{\hat{h}_{i+1}-1} (w_{h+1}-w_h) = \sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i) = x_{n+1}-x_1 =$$

Analogamente si ricava che, $\left\|\sum\limits_{i=1}^m (y_{j+1}-y_j)f(s_j) - \sum\limits_{k=1}^p (w_{k+1}-x_k)f(w_k)\right\| < rac{arepsilon}{2}.$

Si ottiene allora

$$arepsilon > \left\|\sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i)f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1}-x_h)f(w_h)
ight\| + \left\|\sum_{j=1}^m (y_{j+1}-y_j)f(s_j) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1}-x_h)f(w_h)
ight\| \quad ext{Sommando membro a} \quad ext{membro le due disuguaglianze}$$

appena

acquisite

$$=\left\|\sum_{i=1}^n(x_{i+1}-x_i)f(t_i)-\sum_{h=1}^p(w_{h+1}-x_h)f(w_h)
ight\|+\left\|\sum_{h=1}^p(w_{h+1}-x_h)f(w_h)-\sum_{j=1}^m(y_{j+1}-y_j)f(s_j)
ight\|$$

$$\left\|\sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i)f(t_i) - \sum_{h=1}^p (w_{h+1}-x_h)f(w_h) + \sum_{h=1}^p (w_{h+1}-x_h)f(w_h) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1}-y_j)f(s_j)
ight\|$$

Per subadditività delle norme

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - \sum_{j=1}^m (y_{j+1} - y_j) f(s_j)
ight\|$$

come si voleva.

Proposizione 21.4: Integrale della composizione di funzionali lineari continui con funzioni continue

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia f:[a;b] o X una funzione continua.

Sia $\varphi \in X^*$.

Si ha
$$\int_a^b arphiig(f(x)ig)\,dx = arphi\left(\int_a^b f(x)\,dx
ight).$$

Q Osservazioni preliminari

Dalle ipotesi si ha che $\varphi \circ f$ e f sono continue, dunque integrabili ([Proposizione 21.3]); pertanto, gli integrali indicati nella tesi sono ben definiti.

Dimostrazione

Se $\varphi = \mathbf{0}_{X^*}$, si ha $\varphi\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = 0$ essendo φ identicamente nulla su X, e si ha anche $\int_a^b \varphi(f(x))\,dx = 0$ per la [Proposizione 21.1], essendo $\varphi \circ f$ identicamente nulla su [a;b].

La tesi è dunque acquisita in questo caso.

Si supponga adesso $\varphi \neq \mathbf{0}_{X^*}$.

Si provi che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni decomposizione $\Delta = (x_1, \dots, x_{n+1})$ con $|\Delta| < \delta$ e per ogni $(t_1, \dots, t_n) \in [x_1; x_2] \times \dots \times [x_n, x_{n+1}]$ si ha

$$\left\|\sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i)arphiig(f(t_i)ig)-arphi\left(\int_a^b f(x)\,dx
ight)
ight\|$$

Si fissi dunque $\varepsilon > 0$.

Essendo f integrabile in quanto continua ([Proposizione 21.3]) esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni decomposizione

$$\Delta=(x_1,\ldots,x_{n+1})$$
 con $|\Delta|<\delta$ e per ogni $(t_1,\ldots,t_n)\in[x_1;x_2] imes\cdots imes[x_n,x_{n+1}]$ si ha

$$\left\|\sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i)f(t_i) - \int_a^b f(x)\,dx
ight\| < rac{arepsilon}{\|arphi\|_{X^*}}.$$

Per ogni decomposizione $\Delta=(x_1,\ldots,x_{n+1})$ con $|\Delta|<\delta$ e per ogni $(t_1,\ldots,t_n)\in[x_1;x_2] imes\cdots imes[x_n,x_{n+1}]$ si ha allora

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) arphiig(f(t_i)ig) - arphi\left(\int_a^b f(x)\,dx
ight)
ight\|$$

$$= \left\|arphi\left(\sum_{i=1}^n (x_{i+1}-x_i)ig(f(t_i)ig) - \int_a^b f(x)\,dx
ight)
ight\|$$

Per linearità di φ

$$\|arphi\|_{X^*} \cdot \left\| \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (f(t_i) - \int_a^b f(x) \, dx
ight\|_{L^\infty}$$

Dalla disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori lineari continui

$$<\|arphi\|_{X^*}\cdotrac{arepsilon}{\|arphi\|_{X^*}}=arepsilon$$

Per costruzione di δ

La tesi è dunque acquisita anche in questo caso.

Proposizione 21.5: Linearità dell'integrale

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Siano $f, g : [a; b] \rightarrow X$ due funzioni continue.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si ha $\int_a^b (lpha f + eta g)(x) \, dx = lpha \int_a^b f(x) \, dx + eta \int_a^b g(x) \, dx.$

Dimostrazione

Sia $\varphi \in X^*$.

Si ha

$$arphi \left(\int_a^b (lpha f + eta g)(x) \, dx
ight)$$

$$=\int_a^b arphiig((lpha f+eta g)(x)ig)\,dx$$

Per la [Proposizione 21.4]

$$=\int_a^b arphiig(lpha f(x)+eta g(x)ig)\,dx$$

Per definizione di $\alpha f + \beta g$

$$=\int_a^b lpha arphiig(f(x)ig) + eta arphiig(g(x)ig)\,dx$$

Per linearità di φ

$$=lpha\int_a^barphiig(f(x)ig)\,dx+eta\int_a^barphiig(g(x)ig)\,dx$$
 Per linearità dell'integrale di funzioni reali, essendo $arphi\circ f$, $arphi\circ g:[a;b] o\mathbb{R}$

$$=lphaarphi\left(\int_a^bf(x)\,dx
ight)+etaarphi\left(\int_a^bg(x)\,dx
ight)$$
 Per la [Proposizione 21.4]

$$f=arphi\left(lpha\int_a^bf(x)\,dx+eta\int_a^bg(x)\,dx
ight)$$
 Per linearità di $arphi$

Ne segue quindi che
$$arphi\left(\int_a^b (lpha f+eta g)(x)\,dx
ight)=arphi\left(lpha\int_a^b f(x)\,dx+eta\int_a^b g(x)\,dx
ight)$$
, per ogni $arphi\in X^*$;

dal [Corollario 7.5] segue allora $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

Proposizione 21.6: Maggiorazione della norma dell'integrale

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia f:[a;b] o X una funzione continua.

Si ha $\left\|\int_a^b f(x)\,dx
ight\| \leq \int_a^b \left\|f(x)
ight\|dx.$

Dimostrazione

Sia $\mathbf{u} = \int_a^b f(x) dx$.

Per la [Proposizione 7.4], esiste $\psi \in X^*$ tale che $\psi(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|$ e $\|\psi\|_{X^*} = 1$.

Si ha inoltre

$$\psi(\mathbf{u}) = \psi\left(\int_a^b f(x)\,dx
ight)$$

$$=\int_a^b \psi(f(x)) dx$$
 Per la [Proposizione 21.4]

$$\leq \int_a^b |\psi(f(x))| \, dx$$
 Per maggiorazione dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali

$$\leq \int_a^b \|\psi\|_{X^*} \cdot \|f(x)\| \, dx$$
 Per la disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori lineari continui, e per monotonia dell'integrale di Riemann di funzioni a valori reali

$$=\int_a^b \|f(x)\|\,dx$$
 In quanto $\|\psi\|_{X^*}=1$ per costruzione di ψ

Essendo $\psi(\mathbf{u}) = \left\| \int_a^b f(x) \, dx \right\|$ per definizione di \mathbf{u} e per costruzione di ψ , la tesi è allora acquisita.

L

Proposizione 21.7: Teorema della media generalizzato

Sia
$$[a;b] \subseteq \mathbb{R}$$
.

Sia
$$(X, \|\cdot\|)$$
 uno spazio di Banach.

Sia
$$f:[a;b] o X$$
 una funzione continua.

Si ha
$$rac{\int_a^b f(x) \ dx}{b-a} \in \overline{\mathrm{conv}} \, fig([a;b]ig).$$

Dimostrazione

Si proceda per assurdo, supponendo
$$\frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b-a}
otin \overline{\cot x} f([a;b]).$$

Applicando il Teorema di Separazione ([Teorema 7.10]) all'insieme $\overline{\text{conv}}\,f\big([a;b]\big)$, chiuso e convesso, e all'insieme $\Big\{\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\Big\}$ compatto, convesso e disgiunto dal primo insieme per ipotesi di assurdo, esiste allora $\varphi\in Y^*$ tale che

$$\sup_{\mathbf{y} \in \overline{\mathrm{conv}} \, f\left([a;b]\right)} \varphi(\mathbf{y}) < \varphi\left(\frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b-a}\right).$$

Ne segue che, per ogni $x \in [a; b]$, vale

$$arphiig(f(x)ig) Essendo $f(x)\in fig([a;b]ig)\subseteq\overline{\mathrm{conv}}\,fig([a;b]ig)$$$

$$=rac{1}{b-a}\,arphi\left(\int_a^bf(x)\,dx
ight)$$
 Per linearità di $arphi$

$$= rac{1}{b-a} \int_a^b arphiig(f(x)ig) \, dx$$
 Per la [Proposizione 21.4]

D'altra parte, essendo $\varphi \circ f$ una funzione reale continua, per il teorema della Media per funzioni reali esiste $\tilde{x} \in [a;b]$ tale che $\varphi(f(\tilde{x})) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) \, dx$, in contrasto con quanto appena ottenuto.

₩ Integrale definito su estremi arbitrari

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia f:[a;b] o X una funzione continua.

Siano $\alpha, \beta \in [a; b]$.

Se $\alpha < \beta$, si ha $f_{|[\alpha;\beta]}$ integrabile essendo ivi continua; si pone allora $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f_{|[\alpha;\beta]}(x) \, dx$.

Se $\alpha = \beta$, si pone $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = 0$.

Se $\alpha > \beta$, si ha $f_{|[\beta;\alpha]}$ integrabile essendo ivi continua; si pone allora $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f_{|[\beta;\alpha]}(x) \, dx$.

Proposizione 21.8: Additività dell'integrale rispetto all'unione di intervalli contigui

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia f:[a;b] o X una funzione continua.

Siano $\alpha, \beta, \gamma \in [a; b]$.

Si ha $\int_{lpha}^{eta} f(x) \, dx = \int_{lpha}^{\gamma} f(x) \, dx + \int_{\gamma}^{eta} f(x) \, dx.$

Dimostrazione

Se almeno due tra α , β , γ sono uguali, la tesi è di immediata acquisizione.

Si supponga dunque che α, β, γ siano a due a due distinti; sia $\varphi \in X^*$.

Si ha

$$arphi \left(\int_lpha^eta f(x) \, dx
ight)$$

$$=\int_{lpha}^{eta}arphiig(f(x)ig)\,dx$$
 Per la [Proposizione 21.4]

$$=\int_{lpha}^{\gamma}arphiig(f(x)ig)\,dx+\int_{\gamma}^{eta}arphiig(f(x)ig)\,dx$$
 Per additività rispetto all'unione dell'integrale di funzioni reali, essendo $arphi\circ f:[a;b] o\mathbb{R}$

$$=arphi\left(\int_{lpha}^{\gamma}f(x)\,dx
ight)+arphi\left(\int_{\gamma}^{eta}f(x)\,dx
ight)$$
 Per la [Proposizione 21.4]

$$=arphi\left(\int_{lpha}^{\gamma}f(x)\,dx+\int_{\gamma}^{eta}f(x)\,dx
ight)$$
 Per linearità di $arphi$

Ne segue quindi che
$$arphi\left(\int_lpha^eta f(x)\,dx
ight)=arphi\left(\int_lpha^\gamma f(x)\,dx+\int_\gamma^eta f(x)\,dx
ight)$$
, per ogni $arphi\in X^*$;

dal [Corollario 7.5] segue allora $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$.

Funzioni Primitive, Teorema fondamentale del calcolo integrale su spazi di Banach

Primitiva di una funzione di variabile reale

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $f: I \to X$ una funzione.

Una funzione $F:I\to X$ si dice **primitiva** di F quando:

- F è derivabile in I (nel senso dato per funzioni di variabile reale);
- $\dot{F}(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Proposizione 21.9: Famiglia delle primitive di una funzione che le ammette

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $f: I \to X$ una funzione.

Sia $F: I \to X$ una primitiva di f.

Le primitive di f sono allora tutte e sole del tipo $F + c_k$, con $k \in X$ ($c_k : I \to X$ è la funzione costantemente pari a k, definita cioè ponendo $c_k(x) = k$ per ogni $x \in I$).

Dimostrazione

Chiaramente, $F+c_{\mathbf{k}}$ è primitiva di f per ogni $\mathbf{k}\in X;$ infatti, fissato $x\in I$ si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{(F+c_{\mathbf{k}})(x+h)-(F+c_{\mathbf{k}})(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+\mathbf{k}-F(x)-\mathbf{k}}{h} \quad \text{Per definizione di } F+c_{\mathbf{k}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$=f(x) \quad \text{Essendo } F \text{ una primitiva di } f \text{ per ipotesi}$$

Viceversa, sia G una seconda primitiva per f, e si mostri che esiste $\mathbf{k} \in X$ tale che $G = F + c_{\mathbf{k}}$, ossia $G(x) - F(x) = \mathbf{k}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Essendo F e G entrambe primitive di f, si ha $\dot{G}(x)=f(x)=\dot{F}(x)$ per ogni $x\in I$.

Per derivazione di una combinazione lineare di funzioni (che si acquisisce allo stesso modo della derivazione di una combinazione lineare di funzioni reali), si ottiene che

$$(F-G)^{\cdot}(x)=\mathbf{0}$$
 per ogni $x\in I$.

Ne segue allora che F-G è costante, come si voleva.

★ Definizione: Funzione integrale

Sia $[a;b]\subseteq\mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia f:[a;b] o X una funzione continua.

Sia $x_0 \in [a;b]$.

Si dice funzione integrale di f con piede x_0 , la funzione $F_{x_0}:[a;b]\to\mathbb{R}$ definita ponendo

 $F_{x_0}(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ per ogni $x\in [a;b].$

Teorema 21.10: Teorema fondamentale del calcolo integrale generalizzato

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia f:[a;b] o X una funzione continua.

Sia $x_0 \in [a;b]$.

Sia F_{x_0} la funzione integrale di f con piede x_0 .

 F_{x_0} è una primitiva di f.

Q Osservazioni preliminari

Sia $x \in [a; b]$.

Sia $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x + h \in [a; b]$.

Si ha $\lim_{h o 0^+} \operatorname{diam} fig([x;x+h]ig) = \lim_{h o 0^-} \operatorname{diam} fig([x+h;x]ig) = 0.$

Infatti, si fissi $\varepsilon > 0$.

Essendo f continua per ipotesi su [a;b] compatto in \mathbb{R} , essa è uniformemente continua; esiste allora $\delta > 0$ tale che, per ogni $s,t \in [a;b]$ con $|s-t| < \delta$, si abbia $||f(s) - f(t)|| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sia allora $h\in \left]0;\delta \right[;$

Per ogni $s,t\in [x,x+h]$ si ha allora $|s-t|\leq h<\delta$, e dunque $\|f(s)-f(t)\|<rac{arepsilon}{2}$ per costruzione di δ .

Essendo $\operatorname{diam} fig([x;x+h]ig) = \sup_{s,t \in [x;x+h]} \|f(s) - f(t)\|$, ne segue allora che

 $\operatorname{diam} f([x;x+h]) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

Pertanto, $\lim_{h \to 0^+} \operatorname{diam} fig([x;x+h]ig) = 0.$

Il limite $\lim_{h o 0^-} \operatorname{diam} fig([x+h;x]ig) = 0$ si mostra in maniera analoga.

Dimostrazione

Si fissi $x \in [a; b]$;

si provi che

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = 0.$$

Si studi il limite destro; per il limite sinistro si procede in maniera analoga.

Per ogni h>0 tale che $x+h\in [a;b]$, si ha

$$\frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^{x} f(t) dt}{h}$$
 Per definizione di F_{x_0}
$$= \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t) dt$$
 Per la [Proposizione 21.8]

$$\in \overline{\operatorname{conv}} fig([x;x+h]ig)$$
 Per il teorema della media ([Proposizione 21.7])

Essendo $f(x) \in f([x; x+h])$ e avendo appena ricavato che $\frac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h} \in \overline{\text{conv}} f([x; x+h])$, dalla [Proposizione 11.6] segue che

$$\left\|rac{F_{x_0}(x+h)-F_{x_0}(x)}{h}-f(x)
ight\|\leq \operatorname{diam} fig([x;x+h]ig).$$

Poiché $\lim_{h \to 0^+} \dim f \big([x;x+h] \big) = 0$ per le osservazioni preliminari, ne segue che

$$\lim_{h o 0^+} \left\| rac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} - f(x)
ight\| = 0$$
, che corrisponde a ciò che si voleva provare.

→ Corollario 21.11: Teorema di Torricelli-Barrow generalizzato

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia f:[a;b] o X una funzione continua.

Sia $F:[a;b] \to X$ una primitiva di f, che esiste per il [Teorema 21.10].

Si ha $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Dimostrazione

Fissato $x_0 \in [a; b]$, sia F_{x_0} la funzione integrale di f con piede x_0 .

Essendo F e F_{x_0} due primitive di f, per la [Proposizione 21.9] esiste $\mathbf{k} \in X$ tale che $F_{x_0}(x) = F(x) + \mathbf{k}$ per ogni $x \in [a; b]$.

Si ha

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^b f(t) dt$$
 Per la [Proposizione 21.8]

$$=\int_{x_0}^b f(t) \, dt - \int_{x_0}^a f(t) \, dt$$
 $= F_a(b) - F_a(a)$

$$= F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a)$$

Per definizione di \overline{F}_{x_0}

$$=F(b)+\mathbf{k}-(F(a)+\mathbf{k})$$

Per quanto osservato prima

$$=F(b)-F(a)$$

La tesi è dunque aquisita.