24 - Proprietà Notevoli dell'Integrale di Bochner

Proposizione 24.1: Linearità dell'integrale di Bochner

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Siano $f, g : T \to X$ due funzioni integrabili secondo Bochner.
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si hanno i seguenti fatti:

- $\alpha f + \beta g$ è integrabile secondo Bochner;
- $\int_T (\alpha f + \beta g)(t)\, d\mu = \alpha \int_T f(t)\, d\mu + \beta \int_T g(t)\, d\mu$.

Dimostrazione

In virtù dell'ipotesi di integrabilità di f e g secondo Bochner, siano $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di funzioni semplici, convergenti quasi ovunque in T a f e g rispettivamente, e tali che
$\lim_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\|_X\, dt = \lim_n \int_T \|g_n(t) - g(t)\|_X\, dt = 0$.

La successione $\{\alpha f_n + \beta g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è costituita da funzioni semplici, e converge quasi ovunque in T a $\alpha f + \beta g$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha inoltre $\int_T \|(\alpha f_n + \beta g_n)(t) - (\alpha f + \beta g)(t)\|\, dt \leq |\alpha| \int_T \|f_n(t) - f(t)\|\, dt + |\beta| \int_T \|g_n(t) - g(t)\|\, dt$ per monotonia e linearità dell'integrale di Lebesgue, essendo
$\|(\alpha f_n + \beta g_n)(t) - (\alpha f + \beta g)(t)\| \leq |\alpha|\|f_n(t) - f(t)\| + |\beta|\|g_n(t) - g(t)\|$ per ogni $t \in T$ per le proprietà delle norme.

Essendo $\lim_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\|_X\, dt = \lim_n \int_T \|g_n(t) - g(t)\|_X\, dt = 0$ per costruzione di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, segue per confronto che $\lim_n \int_T \|(\alpha f_n + \beta g_n)(t) - (\alpha f + \beta g)(t)\|\, dt = 0$.

Dunque, $\alpha f + \beta g$ è integrabile secondo Bochner per la [Proposizione 23.2].

Resta da mostrare che $\int_T (\alpha f + \beta g)(t)\, d\mu = \alpha \int_T f(t)\, d\mu + \beta \int_T g(t)\, d\mu$.

Dalla definizione di integrale di Bochner e per costruzione di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si ha $\int_T f(t)\, d\mu = \lim\limits_n \int_T f_n(t)\, d\mu$ e $\int_T g(t)\, d\mu = \lim\limits_n \int_T g_n(t)\, d\mu$.

Si ha allora che

$$\begin{aligned}
&\lim_n \int_T (\alpha f_n + \beta g_n)(t)\, d\mu \\
&= \lim_n \alpha \int_T f_n(t)\, d\mu + \beta \int_T g_n(t)\, d\mu && \text{Per linearità dell'integrale di Bochner per funzioni semplici ([Proposizione 23.1])} \\
&= \alpha \int_T f(t)\, d\mu + \beta \int_T g(t)\, d\mu && \text{Per quanto osservato prima}
\end{aligned}$$

Dalla definizione di integrale di Bochner segue allora che $\int_T (\alpha f + \beta g)(t)\, d\mu = \alpha \int_T f(t)\, d\mu + \beta \int_T g(t)\, d\mu$, come si voleva.
■

Proposizione 24.2: Integrale di Bochner della composizione di funzionali lineari continui con funzioni continue

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione integrabile secondo Bochner.
Sia $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Si hanno i seguenti fatti:

- $\varphi \circ f$ è integrabile secondo Bochner;
- $\int_T \varphi\big(f(t)\big)\, d\mu = \varphi\left(\int_T f(t)\, d\mu\right)$.

Osservazioni preliminari

Sia $\eta : T \to X$ una funzione semplice.

Allora:

- $\varphi \circ \eta$ è una funzione semplice;
- $\int_T \varphi\big(\eta(t)\big)\, d\mu = \varphi\left(\int_T \eta(t)\, d\mu\right)$.

Dimostrazione

In virtù dell'ipotesi di integrabilità di f secondo Bochner, sia $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni semplici convergente quasi ovunque in T a f, e tale che $\lim\limits_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\|_X\, dt = 0$.

Si provi che $\{\varphi \circ f_n : T \to Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni semplici, convergente quasi ovunque in T a $\varphi \circ f$, e tale che $\lim\limits_n \int_T \big\|\varphi\big(f_n(t)\big) - \varphi\big(f(t)\big)\big\|_Y\, dt = 0$;

La funzione $\varphi \circ f_n$ è semplice per l'osservazione preliminare.

La convergenza di $\{\varphi \circ f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ quasi ovunque in T a $\varphi \circ f$ segue dalla convergenza di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ quasi ovunque in T a f, e dalla continuità di φ, essendo $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ per ipotesi.

Infine, si osserva che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_T \big\|\varphi\big(f_n(t)\big) - \varphi\big(f(t)\big)\big\|_Y\, dt$$

$\leq \int_T \|\varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|f_n(t) - f(t)\|_X \, dt$ Per monotonia dell'integrale di Lebesgue, essendo $\left\|\varphi\big(f_n(t)\big) - \varphi\big(f(t)\big)\right\|_Y \leq \|\varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|f_n(t) - f(t)\|_X$ per ogni $t \in T$ per la disuguaglianza fondamentale delle norme di operatori lineari continui

$= \|\varphi\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \int_T \|f_n(t) - f(t)\|_X \, dt$ Per linearità dell'integrale di Lebesgue

e dunque, essendo $\lim_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\|_X \, dt = 0$ per ipotesi, segue $\lim_n \int_T \left\|\varphi\big(f_n(t)\big) - \varphi\big(f(t)\big)\right\|_Y dt = 0$ per confronto.

Allora, $\varphi \circ f$ soddisfa le proprietà che si volevano mostrare, che ne implicano per definizione l'integrabilità secondo Bochner.

Resta da mostrare che $\int_T \varphi\big(f(t)\big) \, d\mu = \varphi\left(\int_T f(t) \, d\mu\right)$.

Si ha

$\int_T \varphi\big(f(t)\big) \, d\mu = \lim_n \int_T \varphi\big(f_n(t)\big) \, d\mu$ Per definizione di integrale di Bochner

$= \lim_n \varphi\left(\int_T f_n(t) \, d\mu\right)$ $\int_T \varphi\big(f_n(t)\big) = \varphi\left(\int_T f_n(t) \, d\mu\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per l'osservazione preliminare, essendo f_n semplice

$= \varphi\left(\int_T f(t) \, d\mu\right)$ In quanto $\lim_n \int_T f_n(t) \, d\mu = \int_T f_n(t) \, d\mu$ per definizione di integrale di Bochner e per costruzione di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, e φ è continua essendo $\varphi \in \mathcal{L}(X,Y)$ per ipotesi.

■

Proposizione 24.3: Coerenza dell'integrale di Bochner con l'integrale di Riemann

Sia $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : [a;b] \to X$ una funzione continua.

Allora:

- f è integrabile secondo Bochner;
- $\int_{[a;b]} f(t)\, d\mu = \int_a^b f(t)\, dt$.

Richiamo: Coincidenza tra l'integrale di Riemann e di Lebesgue

Sia $\eta : [a;b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Allora, essa è sommabile secondo Lebesgue, e si ha

Si ha $\int_{[a;b]} \eta(t)\, dt = \int_a^b \eta(t)\, dt$.

si giustifichi soltanto la sommabilità di η secondo Lebesgue.

Intanto, η è limitata in quanto continua su un insieme compatto;
posti allora $M, m \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq \eta(t) \leq M$ per ogni $t \in [a;b]$, per monotonia dell'integrale di Lebesgue si ha
$\int_{[a;b]} m\, dt \leq \int_{[a;b]} \eta(t)\, dt \leq \int_{[a;b]} M\, dt$, ossia

$m(b-a) \leq \int_{[a;b]} \eta(t)\, dt \leq M(b-a)$, per linearità dell'integrale di Lebesgue ed essendo $\int_{[a;b]}\, dt = \mu\big([a;b]\big) = b-a$.

Dimostrazione

Essendo f continua, essa è misurabile;
inoltre, dalla continuità di f e dalla compattezza di $[a;b]$ segue che $f\big([a;b]\big)$ è compatto, dunque totalmente limitato, dunque separabile.

Inoltre, la mappa $[a;b] \to \mathbb{R} : t \mapsto \|f(t)\|$ è continua, dunque sommabile secondo Lebesgue per quanto richiamato.

Fissato $\varphi \in X^*$, per quanto richiamato si ha che $\varphi \circ f$ è sommabile secondo Lebesgue, e si ha
$\int_{[a;b]} \varphi\big(f(t)\big)\, dt = \int_a^b \varphi\big(f(t)\big)\, dt$.

D'altra parte, essendo a valori reali, la sommabilità di $\varphi \circ f$ equivale all'integrabilità secondo Bochner, e si ha
$\int_{[a;b]} \varphi\big(f(t)\big)\, d\mu = \int_{[a;b]} \varphi\big(f(t)\big)\, dt$.

Fatte queste osservazioni, si ha

$\varphi\left(\int_{[a;b]} f(t)\, d\mu\right) = \int_{[a;b]} \varphi\big(f(t)\big)\, d\mu$	Per la [Proposizione 24.2]
$= \int_a^b \varphi\big(f(t)\big)\, dt$	Per le osservazioni fatte prima
$= \varphi\left(\int_a^b f(t)\, dt\right)$	Per la [Proposizione 21.4]

Dunque, si ha $\varphi\left(\int_{[a;b]} f(t)\, d\mu\right) = \varphi\left(\int_a^b f(t)\, dt\right)$ per ogni $\varphi \in X^*$;
dal [Corollario 7.5] segue allora che $\int_{[a;b]} f(t)\, d\mu = \int_a^b f(t)\, dt$, come si voleva.
■

Proposizione 24.4: Maggiorazione della norma dell'integrale di Bochner

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $f : T \to X$ una funzione integrabile secondo Bochner.

Si ha $\left\| \int_T f(t)\, d\mu \right\| \leq \int_T \|f(t)\|\, dt$.

Dimostrazione

In virtù dell'ipotesi di integrabilità di f secondo Bochner, sia $\{f_n : T \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni semplici convergente quasi ovunque in T a f, e tale che $\lim\limits_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\|_X\, dt = 0$.

Si osserva che $\lim\limits_n \int_T \|f_n(t)\|\, dt = \int_T \|f(t)\|\, dt$.

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$\left\|\int_T \|f_n(t)\|\, dt - \int_T \|f(t)\|\, dt\right\|$	
$= \left\|\int_T \|f_n(t)\| - \|f(t)\|\, dt\right\|$	Per linearità dell'integrale di Lebesgue
$\leq \int_T \big\|\|f_n(t)\| - \|f(t)\|\big\|\, dt$	Per maggiorazione del valore assoluto dell'integrale di Lebesgue
$\leq \int_T \|f_n(t) - f(t)\|\, dt$	Per monotonia dell'integrale di Lebesgue, essendo $\big\|\|f_n(t)\| - \|f(t)\|\big\| \leq \|f_n(t) - f(t)\|$ per ogni $t \in T$ per la seconda disuguaglianza triangolare

Essendo $\lim\limits_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\|_X\, dt = 0$ per costruzione di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per ipotesi, ne segue che $\lim\limits_n \int_T \|f_n(t)\|\, dt = \int_T \|f(t)\|\, dt$ per confronto.

■

⌘ Definizione: Serie in spazi normati

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione.

Si dice **serie** di $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali $\left\{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n\right\}_{N\in\mathbb{N}}$;
essa si denota con $\sum \mathbf{x}_n$.

Il limite della serie $\sum \mathbf{x}_n$, qualora esista, si denota con $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{x}_n$;
se tale limite è finito, esso prende il nome di **somma** della serie $\sum \mathbf{x}_n$.

⌘ Definizione: Convergenza assoluta di una serie in uno spazio normato

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione.

Si dice che la serie $\sum \mathbf{x}_n$ **converge assolutamente** quando la serie $\sum \|\mathbf{x}_n\|$ converge.

Osservazione: Serie assolutamente convergenti sono convergenti in spazi di Banach

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione.
Si supponga che la serie $\sum \mathbf{x}_n$ converga assolutamente.

Allora, $\sum \mathbf{x}_n$ converge, e si ha

$$\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{x}_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbf{x}_n\|.$$

Infatti, essendo $\sum \mathbf{x}_n$ assolutamente convergente, la successione $\left\{\sum_{n=1}^{N} \|\mathbf{x}_n\|\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge, dunque è di Cauchy.

Poiché per ogni $M, N \in \mathbb{N}$ (si supponga $M > N$) si ha

$$\left\|\sum_{n=1}^{M} \mathbf{x}_n - \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n\right\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} \mathbf{x}_n\right\| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|\mathbf{x}_n\| = \sum_{n=1}^{M} \|\mathbf{x}_n\| - \sum_{n=1}^{N} \|\mathbf{x}_n\|,$$

ne viene che anche la successione $\left\{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy;
essendo contenuta in X ed essendo X completo in quanto spazio di Banach, ne segue che essa converge.

Dunque, $\sum \mathbf{x}_n$ converge.

Il fatto che $\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{x}_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbf{x}_n\|$ segue per confronto dei limiti, dalla sub-additività di $\|\cdot\|$ applicata alle somme parziali.

Proposizione 24.5: Numerabile additività dell'integrale di Bochner rispetto all'insieme di integrazione

Sia $T \in \mathscr{L}_p$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione integrabile secondo Bochner.
Sia $\{T_n \subseteq T\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}_p$ una successione di insiemi tale che $T_n \cap T_m = \varnothing$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$.

Si hanno i seguenti fatti:

- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{T_n} f(t)\, d\mu$ converge;
- Si ha $\int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n} f(t)\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{T_n} f(t)\, d\mu$.

Osservazioni preliminari

Sia $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tale che $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{x}_n$ converga.

Sia $\varphi \in X^*$.

Si hanno i seguenti fatti:

- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\mathbf{x}_n)$ converge;
- Si ha $= \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\mathbf{x}_n) = \varphi\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{x}_n\right)$.

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\mathbf{x}_n) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \varphi(\mathbf{x}_n) && \text{Per definizione di serie} \\
&= \lim_N \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n\right) && \text{In quanto } \sum_{n=1}^{N} \varphi(\mathbf{x}_n) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n\right) \text{ per ogni } N \in \mathbb{N}\text{, per linearità di } \varphi \\
&= \varphi\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{x}_n\right) && \text{In quanto } \lim_N \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{x}_n \text{ per ipotesi, e } \varphi \text{ è continua}
\end{aligned}$$

Dimostrazione

Si mostri intanto la convergenza di $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_{T_n} f(t)\, d\mu$.

Per la [Proposizione 24.4], si ha $\left\| \int_{T_n} f(t)\, d\mu \right\| \leq \int_{T_n} \|f(t)\|\, dt$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
per numerabile additività dell'integrale di Lebesgue, la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{T_n} \|f(t)\|\, dt$ converge (a $\int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n} \|f(t)\|\, dt$).

Allora, per confronto converge anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left\| \int_{T_n} f(t)\, d\mu \right\|$, il che a sua volta implica la convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_{T_n} f(t)\, d\mu$.

Si fissi ora $\varphi \in X^*$; si ha

$\varphi\left(\int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n} f(t)\, d\mu\right) = \int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n} \varphi\big(f(t)\big)\, d\mu$	Per la [Proposizione 24.2]
$= \int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n} \varphi\big(f(t)\big)\, dt$	Essendo $\varphi \circ f$ a valori reali, la sua integrabilità secondo Bochner equivale alla sua sommabilità secondo Lebesgue, e i due integrali coincidono
$= \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{T_n} \varphi\big(f(t)\big)\, dt$	Per numerabile additività dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione
$= \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{T_n} \varphi\big(f(t)\big)\, d\mu$	Essendo $\varphi \circ f$ a valori reali, la sua integrabilità secondo Bochner equivale alla sua sommabilità secondo Lebesgue, e i due integrali coincidono
$= \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi\left(\int_{T_n} f(t)\, d\mu\right)$	Per la [Proposizione 24.2]
$= \varphi\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{T_n} f(t)\, d\mu\right)$	Per l'osservazione preliminare

Dunque, si ha $\varphi\left(\int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n} f(t)\, d\mu\right) = \varphi\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{T_n} f(t)\, d\mu\right)$ per ogni $\varphi \in X^*$;
dal [Corollario 7.5] segue allora che $\int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n} f(t)\, d\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{T_n} f(t)\, d\mu$, come si voleva.

■

Proposizione 24.6: Teorema della media per funzioni integrabili secondo Bochner

Sia $T \in \mathscr{L}_p$ con $0 < \mu(T) < +\infty$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $f : T \to X$ una funzione integrabile secondo Bochner.

Si ha $\frac{1}{\mu(T)} \int_T f(t)\, d\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\, f(T)$.

Dimostrazione

Si proceda per assurdo, supponendo che $\frac{1}{\mu(T)} \int_T f(t)\, d\mu \notin \overline{\operatorname{conv}}\, f(T)$.

Applicando il Teorema di Separazione ([Teorema 7.10]) all'insieme $\overline{\operatorname{conv}}\, f(T)$, chiuso e convesso, e all'insieme $\left\{ \frac{1}{\mu(T)} \int_T f(t)\, d\mu \right\}$ compatto, convesso e disgiunto dal primo insieme per ipotesi di assurdo, esiste allora $\varphi \in Y^*$ tale che

$$\sup_{\mathbf{x} \in \overline{\operatorname{conv}}\, f(T)} \varphi(\mathbf{x}) < \varphi\left(\frac{1}{\mu(T)} \int_T f(t)\, d\mu \right).$$

Ne segue allora che $\sup_{t \in T} \varphi\big(f(t)\big) < \varphi\left(\frac{1}{\mu(T)} \int_T f(t)\, d\mu \right)$.

D'altra parte, si ha

$\varphi\left(\frac{1}{\mu(T)} \int_T f(t)\, d\mu \right) = \frac{1}{\mu(T)} \int_T \varphi\big(f(t)\big)\, d\mu$	Per linearità di φ e per la [Proposizione 24.2]
$= \frac{1}{\mu(T)} \int_T \varphi\big(f(t)\big)\, dt$	Essendo $\varphi \circ f$ a valori reali, la sua integrabilità secondo Bochner equivale alla sua sommabilità secondo Lebesgue, e i due integrali coincidono
$\leq \frac{1}{\mu(T)} \int_T \sup_{t \in T} \varphi\big(f(t)\big)\, dt$	Per monotonia dell'integrale di Lebesgue, essendo $\sup_{t \in T} \varphi\big(f(t)\big) < +\infty$ in quanto $\sup_{t \in T} \varphi\big(f(t)\big) < \varphi\left(\frac{1}{\mu(T)} \int_T f(t)\, d\mu \right)$ per quanto dedotto prima, ed essendo $\varphi\big(f(t)\big) \leq \sup_{t \in T} \varphi\big(f(t)\big)$ per ogni $t \in T$

$$= \sup_{t \in T} \varphi\big(f(t)\big)$$ Per linearità dell'integrale di Lebesgue, ed essendo $\int_T dt = \mu(T)$

in contrasto con quanto dedotto prima.

■

Proposizione 24.7: Teorema della convergenza dominata per funzioni integrabili secondo Bochner

Sia $T \in \mathscr{L}_p$ con $0 < \mu(T) < +\infty$.
Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $\{f_n : T \to X\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni fortemente μ-misurabili, convergente quasi ovunque in T;
sia $f : T \to X$ limite puntuale quasi ovunque di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Si supponga che esista $g : T \to \mathbb{R}_0^+$ sommmabile secondo Lebesgue, tale che
$\|f_n(t)\| \leq g(t)$ per quasi ogni $t \in T$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora, si hanno i seguenti fatti:

- f è integrabile secondo Bochner;
- $\lim\limits_{n} \int_T \|f_n - f\| \, dt = 0$;
- Per ogni $S \subseteq T$ misurabile, si ha $\lim\limits_{n} \int_S f_n(t) \, d\mu = \int_S f(t) \, d\mu$.

Dimostrazione

Per ipotesi, f_n è fortemente μ-misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$;
poiché $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge per ipotesi a f quasi ovunque in T, dalla [Proposizione 22.4] segue allora che f è fortemente μ-misurabile.

Inoltre, la funzione $T \to \mathbb{R} : t \mapsto \|f(t)\|$ è sommabile secondo Lebesgue.

Infatti, per ipotesi si ha $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ per quasi ogni $t \in T$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
dall'ipotesi di convergenza di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a f quasi ovunque in T e dalla continuità della norma, segue allora per confronto che $\|f(t)\| \leq g(t)$ per quasi ogni $t \in T$.

Ne viene quindi che la funzione $T \to \mathbb{R} : t \mapsto \|f(t)\|$ è sommabile secondo Lebesgue, essendo nonnegativa e maggiorata da g, sommabile secondo Lebesgue per ipotesi.

Pertanto, f è integrabile secondo Bochner.

Si provi ora il secondo punto.

Si consideri la successione di funzioni $\left\{\|f_n(\cdot) - f(\cdot)\|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, definite in T a valori in $\mathbb{R}$;
essa converge quasi ovunque a 0, per costruzione di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e per continuità della norma.

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per quasi ogni $t \in T$ si ha

$\|f_n(t) - f(t)\| \leq \|f_n(t)\| + \|f(t)\|$	Per sub-additività delle norme
$\leq 2g(t)$	$\|f_n(t)\| \leq g(t)$ per quasi ogni $t \in T$ per ipotesi; $\|f(t)\| \leq g(t)$ per quasi ogni $t \in T$ per quanto osservato prima

e $2g$ è una funzione sommabile secondo Lebesgue, essendolo g per ipotesi.

È perciò possibile applicare a $\{\|f_n(\cdot) - f(\cdot)\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, ricavando così che $\lim\limits_{n} \int_T \|f_n(t) - f(t)\|\, dt = 0$.

Il secondo punto è dunque acquisito.

Resta da mostrare il terzo punto.

Si fissino ora $S \subseteq T$ misurabile, e $n \in \mathbb{N}$; si ha

$\left\| \int_S f_n(t)\, d\mu - \int_S f(t)\, d\mu \right\|$	
$= \left\| \int_S f_n(t) - f(t)\, d\mu \right\|$	Per linearità dell'integrale di Bochner ([Proposizione 24.1])
$\leq \int_S \|f_n(t) - f(t)\|\, dt$	Per la maggiorazione della norma dell'integrale di Bochner ([Proposizione 24.4])
$\leq \int_T \|f_n(t) - f(t)\|\, dt$	Per monotonia dell'integrale di Lebesgue rispetto all'insieme di integrazione, essendo $S \subseteq T$

Poiché $\lim\limits_n \int_T \|f_n(t) - f(t)\|\, dt = 0$ per il secondo punto, segue per confronto che

$\lim\limits_n \int_S f_n(t)\, d\mu = \int_S f(t)\, d\mu$, come si voleva.

■