10 - Funzioni Convesse, Minimizzazione e Ortogonalità in Spazi di Hilbert

Funzioni convesse e quasi-convesse

⌘ Definizione: Funzione convessa, Funzione quasi-convessa

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $A \subseteq E$ convesso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$.

f si dice **convessa** quando $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ e per ogni $\lambda \in [0;1]$.
(Si noti che f è definita su $\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ per convessità di A)

f si dice **quasi-convessa** quando, per ogni $k \in \mathbb{R}$, l'insieme $f^{-1}\big(\,]-\infty; k]\big) = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \leq k\}$ è convesso.

Osservazione: Convessità di una funzione e convessità del dominio

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $A \subseteq E$.

Affinché la definizione di convessità di una funzione $f : A \to E$ sia ben posta, è necessario richiedere A convesso, dimodoché risulti ben definito $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ e per ogni $\lambda \in [0;1]$.

Invece, la quasi-convessità di $f : A \to \mathbb{R}$ non richiede la convessità di A; ciò nonostante, la prima implica automaticamente l'ultima.

Infatti, siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$;
sia $M = \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$.

Si ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}\big(]-\infty; M]\big)$, convesso per ipotesi di quasi-convessità di f.
Allora, $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in f^{-1}\big(]-\infty; M]\big)$ per ogni $\lambda \in [0; 1]$, da cui segue $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in A$ per ogni $\lambda \in [0; 1]$.

Osservazione: Convessità di una funzione ne implica la quasi-convessità

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $A \subseteq E$ convesso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ convessa.

Allora, f è quasi-convessa.

Dimostrazione

Sia $k \in \mathbb{R}$, e si consideri $f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$.
Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$, e sia $\lambda \in [0; 1]$;
per acquisire la tesi, si provi che $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$.

Si ha

$$\begin{aligned} & f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}) && \text{Per convessità di } f \\ & \leq \lambda k + (1-\lambda)k = k && \text{In quanto } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}\big(]-\infty; k]\big) \end{aligned}$$

Dunque, $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$, per cui f è quasi-convessa.

Osservazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ monotona.

Allora, f è quasi-convessa.

Dimostrazione

Si supponga f non decrescente.
Sia $k \in \mathbb{R}$.
Siano $x, y \in f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$, e sia $\lambda \in [0; 1]$;
per acquisire la tesi, si provi che $\lambda x + (1-\lambda)y \in f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$.

Si supponga $x < y$, senza perdere di generalità.
Allora, $x \leq \lambda x + (1-\lambda)y \leq y$; per non crescenza di f ed essendo $y \in f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$, segue che $f(x) \leq f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(y) \leq k$.

Dunque, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq k$, ossia $\lambda x + (1-\lambda)y \in f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$.
Pertanto, f è quasi-convessa.

Condizioni sufficienti per la presenza di minimo di funzioni in uno spazio di Hilbert

Proposizione 9.4: Prima proposizione di minimizzazione

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $C \subseteq E$ limitato, chiuso e convesso.
Sia $f : C \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente e quasi-convessa.

Allora, f ammette minimo assoluto in C.

Dimostrazione

Si supponga f semicontinua inferiormente; si provi che f ammette minimo assoluto in C.

Essendo chiuso e convesso, C è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3].
Essendo anche limitato, C è allora debolmente compatto per la [Proposizione 8.5].

Essendo f semicontinua inferiormente, per la [Proposizione 2.1] si ha $f^{-1}(]-\infty; k])$ chiuso per ogni $k \in \mathbb{R}$.
D'altra parte, essendo f quasi-convessa, $f^{-1}(]-\infty; k])$ è anche convesso per ogni $k \in \mathbb{R}$.
Dunque, per la [Proposizione 8.3] si ha $f^{-1}(]-\infty; k])$ debolmente chiuso per ogni $k \in \mathbb{R}$;
cioè, f è semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole per la [Proposizione 2.1].

Pertanto, rispetto alla topologia debole su E, C è compatto e f è semicontinua inferiormente.
Segue dal [Teorema 2.2] che f ammette minimo assoluto.

Teorema 9.5: Teorema di Eberlein-Smulyan

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.
Sia $A \subseteq E$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. A è debolmente compatto;
2. A è sequenzialmente debolmente compatto.

Osservazione

Nel caso in cui la topologia debole sia metrizzabile, il teorema di Eberlein-Smulyan segue direttamente dal fatto che compattezza e sequenziale compattezza sono equivalenti in spazi metrici.

Tuttavia, si dimostra che la topologia debole di uno spazio di Banach è metrizzabile se e solo se lo spazio ha dimensione finita.

Dunque, il teorema di Eberlein-Smulyan enuncia un'equivalenza che vale a prescindere che la topologia debole sia metrizzabile o no.

Lemma

Sia $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $X \subseteq E$ limitato e sequenzialmente debolmente chiuso.

Allora, X è sequenzialmente debolmente compatto.

Dimostrazione

Essendo X limitato, si ha $X \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

$\overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ è chiuso essendo un intorno sferico chiuso; inoltre, esso è convesso.
Infatti, dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ e dato $\lambda \in [0; 1]$, si ha $\|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\| \leq \lambda\underbrace{\|\mathbf{x}\|}_{\leq\delta} + (1-\lambda)\underbrace{\|\mathbf{y}\|}_{\leq\delta} \leq \delta$.

Allora, $\overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3], ed è esso stesso limitato.
Ne segue che $\overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ è debolmente compatto per la [Proposizione 9.2], dunque sequenzialmente debolmente compatto, in quanto la sequenzializzazione di una topologia è più fine di essa.

Essendo X sequenzialmente debolmente chiuso, e contenuto in $\overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ sequenzialmente debolmente compatto, segue che X è sequenzialmente debolmente compatto.
Infatti, i sottoinsiemi chiusi di un insieme compatto sono compatti, qualunque sia la topologia considerata (in questo caso la sequenzializzazione della topologia debole).
$\blacksquare$

Proposizione 9.6: Seconda proposizione di minimizzazione

Sia $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $X \subseteq E$ sequenzialmente debolmente chiuso, non limitato.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente.
Si supponga $\inf\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) < \liminf\limits_{\|\mathbf{x}\|\to+\infty} f(\mathbf{x})$ (dove $\liminf\limits_{\|\mathbf{x}\|\to+\infty} f(\mathbf{x}) = \sup\limits_{\delta>0} \inf\limits_{\substack{\mathbf{x}\in X \\ \|\mathbf{x}\|>\delta}} f(\mathbf{x})$).

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

Dimostrazione

Sia $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $\inf\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) < \gamma < \liminf\limits_{\|\mathbf{x}\|\to+\infty} f(\mathbf{x})$, che esiste per ipotesi.

Dalla definizione di $\liminf\limits_{\|\mathbf{x}\|\to+\infty} f(\mathbf{x})$ segue che esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma < \inf\limits_{\substack{\mathbf{x}\in X \\ \|\mathbf{x}\|>\delta}} f(\mathbf{x})$, da cui ne viene che $f(\mathbf{x}) > \gamma$ per ogni $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\| > \delta$.

Si consideri l'insieme $K = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq \gamma\}$.

K è sequenzialmente debolmente chiuso.
Infatti, f è sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente, ossia sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole su E; pertanto, K è sequenzialmente debolmente chiuso per la [Proposizione 3.4].

K è anche limitato.
Infatti, $K \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}, \delta) \subseteq B(\mathbf{0}, \delta + 1)$ per costruzione di γ e δ.

Allora, $K = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq \gamma\}$ è sequenzialmente debolmente compatto per il [Lemma].

Dalla [Proposizione 2.7] applicata alla topologia debole su E (o la [Proposizione 2.6] applicata alla sequenzializzazione della topologia debole su E) segue pertanto che f è dotata di minimo assoluto.
■

⌘ Definizione: Funzione coerciva

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $A \subseteq E$ non limitato.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

f si dice **coerciva** quando $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$.

Proposizione 9.7: Terza proposizione di minimizzazione

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $X \subseteq E$ sequenzialmente debolmente chiuso, non limitato.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente e coerciva.

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

Dimostrazione

Si ha $\liminf\limits_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} f(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$ per coercività di f, e chiaramente $\inf\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) < +\infty$, in quanto $f(X) \neq \varnothing$.

Allora, sono soddisfatte le ipotesi della [Proposizione 9.8], per cui f ammette minimo assoluto.

Proposizione 9.8: Quarta proposizione di minimizzazione

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $X \subseteq E$ convesso, non limitato e chiuso.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente, quasi-convessa e coerciva.

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

Dimostrazione

Essendo chiuso e convesso, X è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3], dunque sequenzialmente debolmente chiuso per l'osservazione iniziale del capitolo 3.

Essendo f quasi-convessa e semicontinua inferiormente, per definizione di quasi-convessità e per la [Proposizione 2.1] gli insiemi del tipo $f(\,]-\infty; k])$ risultano convessi e chiusi, dunque sono debolmente chiusi per la [Proposizione 8.3], per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Allora, f è debolmente semicontinua inferiormente, dunque sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente, in quanto la semicontinuità implica la sequenziale semicontinuità rispetto a una stessa topologia (in questo caso quella debole su E).

Allora, sono soddisfatte le ipotesi della [Proposizione 9.7], per cui f ammette minimo assoluto.
■

Proposizione 9.9: Condizioni sufficienti per la semicontinuità debole

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $X \subseteq E$ sequenzialmente debolmente chiuso.
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente, e coerciva.

Allora, f è debolmente semicontinua inferiormente.

Dimostrazione

Fissato $k \in \mathbb{R}$, si consideri il sottolivello $f^{-1}\big(]-\infty; k]\big) = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq k\}$.

Si osserva che $f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$ è limitato per coercività di f.

Inoltre, $f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$ è sequenzialmente debolmente chiuso.
Infatti, essendo f sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente, ossia sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole su E, ne viene che $f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$ è sequenzialmente debolmente chiuso per la [Proposizione 3.4].

Allora, $f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$ è sequenzialmente debolmente compatto per il [Lemma].

Per il [Teorema 9.5], $f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$ è allora debolmente compatto.

Essendo la topologia debole di Hausdorff (Osservazione 3 del capitolo 8), gli insiemi debolmente compatti sono debolmente chiusi; dunque, $f^{-1}\big(]-\infty; k]\big)$ è debolmente chiuso.

Segue la debole semicontinuità inferiore di f per arbitrarietà di $k \in \mathbb{R}$, per la [Proposizione 2.1].
■

Funzioni strettamente convesse

⌘ Stretta convessità

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $A \subseteq E$ convesso.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **strettamente convessa** quando, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ e per ogni $\lambda \in]0; 1[$, si ha $f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$.

Proposizione 9.10: Unicità del minimo assoluto per funzioni strettamente convesse

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $A \subseteq E$ convesso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ strettamente convessa.
Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$ di minimo assoluto per f.
Allora, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Dimostrazione

Si proceda per assurdo, supponendo quindi che $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Si osserva innanzitutto che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$.
infatti, essendo $\mathbf{u}$ di minimo assoluto per f, si ha $f(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{v})$;
d'altra parte, essendo $\mathbf{v}$ di minimo assoluto per f, si ha $f(\mathbf{v}) \leq f(\mathbf{u})$.

Sia $\lambda = \frac{1}{2}$; per stretta convessità di f, si dovrebbe avere $f\left(\frac{\mathbf{u}}{2} + \frac{\mathbf{v}}{2}\right) < \frac{1}{2} f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \underbrace{f(\mathbf{v})}_{= f(\mathbf{u})} = f(\mathbf{u})$; tuttavia, questa disuguaglianza contraddice l'ipotesi che $\mathbf{u}$ sia di minimo assoluto per f.
■

Proposizione 9.11: Distanza al quadrato da un punto fissato è strettamente convessa in uno spazio con prodotto scalare

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.
Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Sia $\mathbf{x}_0 \in E$.
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

f è strettamente convessa.

Dimostrazione

Si supponga dapprima $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$;
si provi quindi la stretta convessità di $f_0 : E \to \mathbb{R}$, definita ponendo $f_0(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, e sia $\lambda \in \,]0;1[$. Si ha

$f_0(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = \|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\|^2$	Definizione di f_0
$= \langle \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \rangle$	Definizione della norma $\|\cdot\|$
$= \langle \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathbf{y}, \mathbf{x} - (1-\lambda)(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rangle$	Manipolando algebricamente i due termini
$= \lambda\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \lambda(1-\lambda)\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - (1-\lambda)\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle$	Dalle proprietà assiomatiche del prodotto scalare
$= \lambda(\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle) - \lambda(1-\lambda)\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - (1-\lambda)(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle)$	Dalle proprietà del prodotto scalare
$= \lambda\|\mathbf{x}\|^2 + (1-\lambda)\|\mathbf{y}\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$	Evidenziando i prodotti scalari comuni, utilizzando poi la definizione di $\|\cdot\|$

Poiché $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, si ha $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 > 0$ per definita positività della norma.
Poiché $0 < \lambda < 1$, si ha $\lambda(1-\lambda) > 0$.

Allora,

$$f_0(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 + (1-\lambda)\|\mathbf{y}\|^2 - \underbrace{\lambda(1-\lambda)\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}_{>0}$$

$$< \lambda\|\mathbf{x}\|^2 + (1-\lambda)\|\mathbf{y}\|^2 = \lambda f_0(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f_0(\mathbf{y}).$$

Pertanto, f_0 è strettamente convessa.

Si consideri ora $\mathbf{x}_0 \in E$ generico.
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in E$, e se ne provi la stretta convessità.

Si osservi intanto che $f(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, e sia $\lambda \in]0;1[$. Si ha

$$\begin{aligned}
& f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = f_0(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) && \text{Per quanto osservato prima su } f \\
& = f_0(\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (1-\lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)) && \text{Manipolando algebricamente l'espressione} \\
& < \lambda f_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (1-\lambda) f_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) && \text{Per stretta convessità di } f_0 \\
& = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}) && \text{Per quanto osservato prima su } f
\end{aligned}$$

Segue quindi la stretta convessità di f.
■

Proiezione ortogonale

Proposizione 9.12: Distanza di un punto fissato da un insieme assunta in un suo punto

Sia $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $A \subseteq E$ non vuoto, chiuso e convesso.
Sia $\mathbf{x}_0 \in E$.

Allora, esiste un unico $\mathbf{y}_0 \in A$ tale che $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| = d(\mathbf{x}_0, A)$, dove $\|\cdot\|$ è la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. e d è la metrica indotta da $\|\cdot\|$.

Dimostrazione

Si osserva intanto che A è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3], essendo chiuso e convesso.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|^2$.
Essa è continua, e strettamente convessa per la [Proposizione 9.11].

Si considerino due casi.

A è limitato:
In tal caso, A è debolmente compatto per la [Proposizione 9.2].
Essendo f semicontinua inferiormente in quanto continua, e quasi-convessa in quanto strettamente convessa, f ammette un punto $\mathbf{y}_0 \in A$ di minimo assoluto per f, per la [Proposizione 9.4].
Essendo f strettamente convessa, tale punto è unico per la [Proposizione 9.10].

A non è limitato:
In tal caso, f è coerciva; infatti,
essendo anche semicontinua inferiormente in quanto continua, e quasi-convessa in quanto strettamente convessa, f ammette un punto $\mathbf{y}_0 \in A$ di minimo assoluto per f, per la [Proposizione 9.8].
Essendo f strettamente convessa, tale punto è unico per la [Proposizione 9.10].

Dunque, in entrambi i casi, f ammette un unico punto $\mathbf{y}_0 \in A$ di minimo assoluto.
Essendo $(\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt{t})$ strettamente monotona, ne segue che anche la funzione $g : A \to \mathbb{R}$, definita ponendo $g(\mathbf{y}) = \sqrt{f(\mathbf{y})} = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$ per ogni $\mathbf{y} \in A$, ha $\mathbf{y}_0$ come unico punto di minimo assoluto.

Ciò significa quindi che $\mathbf{y}_0$ è l'unico punto in A per cui $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0\| = \min_{\mathbf{y} \in A} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = d(\mathbf{x}_0, A)$.

■

⌘ Definizione: Proiezione ortogonale

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $A \subseteq E$ non vuoto, chiuso e convesso.

Sia $\mathbf{x}_0 \in E$.

Il punto $\mathbf{y}_0 \in A$ tale che $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| = d(\mathbf{x}_0, A)$, che esiste ed è unico per la [Proposizione 9.12], è detto **proiezione ortogonale** di $\mathbf{x}_0$ su A.

Spazi con prodotto scalare e ortogonalità

Premesse

Somma diretta

Sia E uno spazio vettoriale.
Siano $F, G \subseteq E$ due sottospazi vettoriali di E.

Si dice che E è somma diretta di F e G, e si scrive $E = F \oplus G$, quando $E = F + G$ e $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

E è somma diretta di F e G se e solo se ogni vettore di E si può scrivere in modo unico come $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, con $\mathbf{u} \in F$ e $\mathbf{v} \in G$.

Vettori ortogonali, Complemento ortogonale

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.
Sia $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Essi si dicono ortogonali quando $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Sia $A \subseteq E$ non vuoto.

Si dice complemento ortogonale di A, e si denota con $A^\perp$, l'insieme $\{\mathbf{y} \in E : \forall \mathbf{x} \in A,\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$.
Esso è un sottospazio vettoriale di E.

Intersezione tra sottospazio vettoriale e complemento ortogonale è il vettore nullo

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale di E.

Si ha $F \oplus F^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Infatti, ovviamente $\mathbf{0} \in F \cap F^{\perp}$, essendo entrambi sottospazi vettoriali di E.
D'altra parte, se $\mathbf{x} \in F \cap F^{\perp}$ si ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, da cui segue $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ per definita positività del prodotto scalare.

Osservazione: Il complemento ortogonale è chiuso

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.
Sia $A \subseteq E$ non vuoto.

$A^{\perp}$ è chiuso.

Infatti, $A^{\perp} = \bigcap_{\mathbf{x} \in A} \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle^{-1}(0)$, dove per ognim $\mathbf{x} \in E$ si pone $\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle : A \to \mathbb{R} : \mathbf{y} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Essendo $\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle$ continua per ogni $\mathbf{x} \in E$ e $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$, risulta che $\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle^{-1}(0)$ è chiuso in E per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Ne segue che $A^{\perp}$ è chiuso essendo intersezione di chiusi.

Teorema 9.13: Teorema di decomposizione degli spazi di Hilbert

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale di E, chiuso.

Allora, $E = F \oplus F^{\perp}$.

Dimostrazione

Essendo $F \cap F^\perp = \{\mathbf{0}\}$ per quanto richiamato prima, basta provare che $E = F + F^\perp$ per acquisire la tesi.

Se $F = \{\mathbf{0}\}$, si ha $F^\perp = E$, dunque evidentemente $E = F + F^\perp$.

Se $F = E$, si ha $F^\perp = \{\mathbf{0}\}$, dunque evidentemente $E = F + F^\perp$.

Si supponga ora $\{\mathbf{0}\} \subsetneq F \subsetneq E$.

Sia $\mathbf{x} \in E$.
Sia $\mathbf{y}$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su F, ben definita perché F è non vuoto e convesso essendo uno spazio vettoriale, e chiuso per ipotesi.

Si provi che $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in F^\perp$.

Sia dunque $\mathbf{u} \in F$; si provi che $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, si ha $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0} \rangle = 0$ per linearità a destra del prodotto scalare.
Si supponga ora $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Si consideri il vettore $\mathbf{y} + \lambda\mathbf{u} \in F$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$; si ha

$$
\begin{aligned}
& d(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \lambda\mathbf{u}) = \|\mathbf{x} - (\mathbf{y} + \lambda\mathbf{u})\| && \text{Definizione di metrica indotta dalla norma} \\
& \geq d(\mathbf{x}, F) && \text{Essendo } \mathbf{y} + \lambda\mathbf{u} \in F \\
& = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| && \text{Essendo } \mathbf{y} \text{ la proiezione ortogonale di } \mathbf{x} \text{ su } F
\end{aligned}
$$

Dunque, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y} - \lambda\mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$; manipolando questa espressione, si ottiene

$$
\begin{aligned}
& \|\mathbf{x} - \mathbf{y} - \lambda\mathbf{u}\|^2 \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 && \text{Elevando al quadrato entrambi i membri} \\
\implies \quad & \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \lambda^2\|\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 && \text{Essendo } \|\cdot\| \text{ la norma indotta da } \langle \cdot, \cdot \rangle \\
\implies \quad & \lambda^2\|\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 && \text{Semplificando}
\end{aligned}
$$

L'ultima disuguaglianza vale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
In particolare, per $\lambda = \frac{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}$, si ha

$\frac{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2} - 2\frac{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \geq 0$, da cui segue $\frac{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \leq 0$, dunque $\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle^2 \leq 0$.

Ne viene allora che $\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

Allora, $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in F^{\perp}$ per arbitarietà di $\mathbf{u} \in F$.

Dunque, si ha $\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{y}}_{\in F} + \underbrace{(\mathbf{x}-\mathbf{y})}_{\in F^{\perp}} \in F + F^{\perp}$, il che mostra che $E = F + F^{\perp}$ per arbitrarietà di $\mathbf{x} \in E$.

■

Proposizione 9.14: Norma del funzionale lineare indotto dal prodotto scalare

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.
Sia $\mathbf{x}_0 \in E$.
Sia $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle : E \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Si ha $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle \in E^*$, e $\|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*} = \|\mathbf{x}_0\|_E$.

Dimostrazione

La linearità di $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle$ segue dalle proprietà assiomatiche del prodotto scalare.
Se ne provi la continuità.

Si ha $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle| \leq \|\mathbf{x}_0\| \, \|\mathbf{x}\|$ per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, da cui segue la continuità di $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle$ per la [Proposizione 6.4], dunque $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle \in E^*$.
Inoltre, da tale disuguaglianza viene anche che $\|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*} \leq \|\mathbf{x}_0\|_E$, per definizione di $\| \cdot \|_{E^*}$.

Si provi la disuguaglianza opposta.
Se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_E$, si ha $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \cdot, \mathbf{0}_E \rangle = \mathbf{0}_{E^*}$, pertanto $\|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*} = 0 = \|\mathbf{0}_E\|_E = \|\mathbf{x}_0\|_E$.

Si supponga quindi $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}_E$.
Sia $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|_E}$, che ha norma 1; da una delle definizioni di $\|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*}$ segue che $|\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_0 \rangle| \leq \|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*}$, ossia $\|\mathbf{x}_0\|_E \leq \|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*}$.

La tesi è pertanto acquisita.
■

Teorema 9.15: Teorema di Riesz, di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.
Sia $\varphi \in E^*$.

Esiste un unico $\mathbf{x}_0 \in E$ tale che $\varphi = \langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle$.

Dimostrazione

Si mostri intanto l'unicità di $\mathbf{x}_0$.

Siano dunque $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ tali che $\langle \cdot, \mathbf{x}_1 \rangle = \varphi = \langle \cdot, \mathbf{x}_2 \rangle$.

Allora, per ogni $\mathbf{x} \in E$ si ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle$, ossia $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle = 0$ per linearità a destra del prodotto scalare.

In particolare, per $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, si ha $\langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle = 0$, da cui segue $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ per definita positività del prodotto scalare.

Si provi adesso l'esistenza.

Sia $F = \ker(\varphi) = \varphi^{-1}\{0\}$.

F è un sottospazio vettoriale di E.

Inoltre, F è chiuso; infatti, F è controimmagine di $\{0\}$, chiuso in $\mathbb{R}$, rispetto ad φ, che è continua per ipotesi.

Se $F = E$, si ha $\varphi = \mathbf{0}_{E^*} = \langle \cdot, \mathbf{0}_E \rangle$, dunque la tesi è acquisita in questo caso.

Si supponga ora $F \subsetneq E$.
Si osserva intanto che $F^\perp \supsetneq \{\mathbf{0}\}$.
Infatti, sia $\mathbf{y} \in E \setminus F$; sia $\mathbf{y}_0 \in F$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{y}$ su F; essa è ben definita essendo F non vuoto e convesso in quanto spazio vettoriale, e chiuso per quanto osservato prima.

Allora, $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \in F^\perp$, fatto provato nella dimostrazione del [Teorema 9.13];
inoltre, $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}_E$ in quanto altrimenti si avrebbe $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \in F$, contro il fatto che $\mathbf{y} \notin F$.

Sia dunque $\mathbf{z} \in F^\perp \setminus \{\mathbf{0}_E\}$, e si supponga che $\|\mathbf{z}\|_E = 1$ (a meno di considerare $\frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|_E}$).

Si provi che $\varphi = \langle \cdot, \varphi(\mathbf{z})\, \mathbf{z} \rangle$.
Sia $\mathbf{x} \in E$; si vuole quindi mostrare che $\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \varphi(\mathbf{z})\, \mathbf{z} \rangle$.

Si osserva intanto che $\varphi(\mathbf{x})\mathbf{z} - \varphi(\mathbf{z})\mathbf{x} \in \ker(\varphi) = F$.
Si ha allora

$0 = \langle \varphi(\mathbf{x})\mathbf{z} - \varphi(\mathbf{z})\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$	Essendo $\varphi(\mathbf{x})\mathbf{z} - \varphi(\mathbf{z})\mathbf{x} \in F$ e $\mathbf{z} \in F^\perp$
$= \varphi(\mathbf{x})\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - \varphi(\mathbf{z})\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$	Dalla linearità a sinistra di $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$= \varphi(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{x}, \varphi(\mathbf{z})\, \mathbf{z} \rangle$	In quanto $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{z}\|_E^2 = 1$ e per linearità a destra di $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Dal primo e dall'ultimo membro di questa catena di uguaglianze segue che
$\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \varphi(\mathbf{z})\, \mathbf{z} \rangle$, come volevasi mostrare.

Pertanto, $\varphi = \langle \cdot, \varphi(\mathbf{z})\, \mathbf{z} \rangle$.
■

Isometrie

⌘ Isometria, Spazi linearmente isometrici

Siano $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ due spazi normati.
Sia $f : E \to F$.

f si dice **isometria** quando $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Gli spazi $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ si dicono **linearmente isometrici** quando esiste un'isometria $f : E \to F$ lineare e biunivoca.

Osservazioni

Siano $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ due spazi normati.
Sia $f : E \to F$.

Si hanno le seguenti osservazioni:

1. f è iniettiva;
   infatti, fissati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ tali che $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, si ha $0 = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E$, dunque $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

2. Se f è lineare, f è un'isometria se e solo se $\|f(\mathbf{x})\|_F = \|\mathbf{x}\|_E$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.
   Infatti, se f è un'isometria, si ha $\|f(\mathbf{x})\|_F = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}_E)\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}_E\|_E = \|\mathbf{x}\|_E$ per ogni $\mathbf{x} \in E$;
   viceversa, se f soddisfa la condizione indicata sopra, si ha $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_F = \|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, dunque f è un'isometria.

3. Per le due osservazioni precedenti, f è un'isometria lineare biunivoca tra E e F se e solo se f è lineare e suriettiva, e $\|f(\mathbf{x})\|_F = \|\mathbf{x}\|_E$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Proposizione 9.16: Lineare isometria tra uno spazio di Hilbert e il suo duale

Sia $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Rispetto alla norma $\|\cdot\|_E$ indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$, esso è inearmente isometrico a $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$.

Dimostrazione

Sia $f : E \to E^*$ la funzione definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \langle\cdot,\mathbf{x}\rangle$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

f è ben definita e vale $\|f(\mathbf{x})\|_{E^*} = \|\mathbf{x}\|_E$ per ogni $\mathbf{x} \in E$;
infatti, fissato $\mathbf{x} \in E^*$, per la [Proposizione 9.14] si ha $f(\mathbf{x}) = \langle\cdot,\mathbf{x}\rangle \in E^*$ e anche $\|f(\mathbf{x})\|_{E^*} = \|\langle\cdot,\mathbf{x}\rangle\|_{E^*} = \|\mathbf{x}\|_E$.

f è lineare;
infatti, fissati $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si ha
$f(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2) = \langle\cdot, \lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2\rangle = \lambda\langle\cdot,\mathbf{x}_1\rangle + \mu\langle\cdot,\mathbf{x}_2\rangle = \lambda f(\mathbf{x}_1) + \mu f(\mathbf{x}_2)$, per linearità a destra di $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

f è suriettiva;
infatti, dato $\varphi \in E^*$, per il [Teorema 9.15] esiste $\mathbf{x} \in E$ tale che $\varphi = \langle\cdot,\mathbf{x}\rangle = f(\mathbf{x})$.

Dunque f è un'isometria lineare biunivoca tra E e E^* per l'osservazione precedente.
■