

10 - Funzioni Convesse, Minimizzazione e Ortogonalità in Spazi di Hilbert

Funzioni convesse e quasi-convesse

⌘ Definizione: Funzione convessa, Funzione quasi-convessa

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia $A \subseteq E$ convesso.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

f si dice **convessa** quando $f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ e per ogni $\lambda \in [0; 1]$.

(Si noti che f è definita su $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ per convessità di A)

f si dice **quasi-convessa** quando, per ogni $k \in \mathbb{R}$, l'insieme $f^{-1}([-\infty; k]) = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \leq k\}$ è convesso.

Q Osservazione: Convessità di una funzione e convessità del dominio

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia $A \subseteq E$.

Affinché la definizione di convessità di una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia ben posta, è necessario richiedere A convesso, dimodoché risulti ben definito $f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ e per ogni $\lambda \in [0; 1]$.

Invece, la quasi-convessità di $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ non richiede la convessità di A ; ciò nonostante, la prima implica automaticamente l'ultima.

Infatti, siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$;

sia $M = \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$.

Si ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(]-\infty; M])$, convesso per ipotesi di quasi-convessità di f .

Allora, $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in f^{-1}(]-\infty; M])$ per ogni $\lambda \in [0; 1]$, da cui segue $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in A$ per ogni $\lambda \in [0; 1]$.

Q Osservazione: Convessità di una funzione ne implica la quasi-convessità

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia $A \subseteq E$ convesso.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora, f è quasi-convessa.

Dimostrazione

Sia $k \in \mathbb{R}$, e si consideri $f^{-1}(]-\infty; k])$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(]-\infty; k])$, e sia $\lambda \in [0; 1]$;

per acquisire la tesi, si provi che $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in f^{-1}(]-\infty; k])$.

Si ha

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) \quad \text{Per convessità di } f$$

$$\leq \lambda k + (1 - \lambda) k = k$$

$$\text{In quanto } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(]-\infty; k])$$

Dunque, $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in f^{-1}(]-\infty; k])$, per cui f è quasi-convessa.

Q Osservazione: Monotonia di una funzione ne implica la quasi-convessità

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ monotona.

Allora, f è quasi-convessa.

Dimostrazione

Si supponga f non decrescente.

Sia $k \in \mathbb{R}$.

Siano $x, y \in f^{-1}(]-\infty; k])$, e sia $\lambda \in [0; 1]$;

per acquisire la tesi, si provi che $\lambda x + (1 - \lambda)y \in f^{-1}(]-\infty; k])$.

Si supponga $x < y$, senza perdere di generalità.

Allora, $x \leq \lambda x + (1 - \lambda)y \leq y$; per non crescenza di f ed essendo $y \in f^{-1}(]-\infty; k])$, segue che $f(x) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(y) \leq k$.

Dunque, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq k$, ossia $\lambda x + (1 - \lambda)y \in f^{-1}(]-\infty; k])$.

Pertanto, f è quasi-convessa.



Osservazione: Caratterizzazione della quasi-convessità

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia $A \subseteq E$ convesso.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

f è quasi-convessa se e solo se $f^{-1}(]-\infty; k])$ è convesso per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione

Si supponga $f^{-1}(]-\infty; k])$ convesso per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Sia $t \in \mathbb{R}$; per provare la quasi-convessità di f , si mostri che $f^{-1}(]-\infty; t])$ è convesso.

Si ha $f^{-1}(]-\infty; t]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}\left(]-\infty; t + \frac{1}{n}[\right)$, intersezione di insiemi convessi per ipotesi;

essendo un'intersezione arbitraria di insiemi convessi anch'essa convessa (questo fatto si acquisisce immediatamente verificandone la definizione), ne segue che $f^{-1}(]-\infty; t])$ è convesso.

Viceversa, si supponga f quasi convessa, cioè $f^{-1}(]-\infty; t])$ convesso per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Sia $k \in \mathbb{R}$; si mostri che $f^{-1}(]-\infty; k])$ è convesso.

Siano dunque $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(]-\infty; k])$;

posto $M = \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$, si ha allora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(]-\infty; M]) \subseteq f^{-1}(]-\infty; k])$.

Per ipotesi di quasi convessità di f , per ogni $\lambda \in [0; 1]$ si ha

$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in f^{-1}(]-\infty; M]) \subseteq f^{-1}(]-\infty; k])$.

Ne viene che $f^{-1}(]-\infty; k])$ è convesso.

■

Minimizzazione di funzioni in uno spazio di Hilbert

Proposizione 10.1: Punti di minimo locale per una funzione convessa sono di minimo assoluto

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $A \subseteq E$ convesso.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Sia $\mathbf{x}_0 \in E$ di minimo locale per f .

Allora, \mathbf{x}_0 è di minimo assoluto per f .

Dimostrazione

Sia $\mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$; si provi che $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

Esiste $\lambda \in]0; 1]$ tale che $\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$;

infatti, per definizione di $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ si ha $\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ se e solo se $\|\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| < \delta$, ossia $|\lambda| < \frac{\delta}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$ per assoluta omogeneità della norma, ed essendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$.

Basta dunque considerare $\lambda > 0$ tale che $\lambda < \frac{\delta}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$.

Per un tale λ , si ha allora

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0) &\leq f(\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \quad \text{Essendo } \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \\ &= f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x}_0) \\ &\leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Ne segue che $f(\mathbf{x}_0) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_0)$, ossia $\lambda f(\mathbf{x}) \geq \lambda f(\mathbf{x}_0)$;

essendo $\lambda > 0$, ciò implica $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$, come si voleva provare.

■

Lemma 1

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $X \subseteq E$.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente e quasi-convessa.

Allora, f è debolmente semicontinua inferiormente, ossia semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole.

Dimostrazione

Essendo f quasi-convessa e semicontinua inferiormente per ipotesi, per definizione di quasi-convessità e per la [Proposizione 2.1] gli insiemi del tipo $f^{-1}([-\infty; k])$ risultano convessi e chiusi, dunque debolmente chiusi per la [Proposizione 8.3], per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Sempre dalla [Proposizione 2.1] segue allora che f è debolmente semicontinua inferiormente.

■

Proposizione 10.2: Prima proposizione di minimizzazione

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $C \subseteq E$ limitato, chiuso e convesso.

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente e quasi-convessa.

Allora, f ammette minimo assoluto in C .

Dimostrazione

Essendo chiuso e convesso, C è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3].

Essendo anche limitato, C è allora debolmente compatto per la [Proposizione 9.2].

Essendo f semicontinua inferiormente e quasi-convessa, per il [Lemma 1] f è semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole per la [Proposizione 2.1].

Pertanto, rispetto alla topologia debole su E , C è compatto e f è semicontinua inferiormente.

Segue dal [Teorema 2.2] che f ammette minimo assoluto.

■

Teorema 10.3: Teorema di Eberlein-Schmulian

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Sia $A \subseteq E$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. A è debolmente compatto;
2. A è sequenzialmente debolmente compatto.

Osservazione

Nel caso in cui la topologia debole sia metrizzabile, il teorema di Eberlein-Schmulian segue direttamente dal fatto che compattezza e sequenziale compattezza sono equivalenti in spazi metrici.

Tuttavia, si dimostra che la topologia debole di uno spazio di Banach è metrizzabile se e solo se lo spazio ha dimensione finita.

Dunque, il teorema di Eberlein-Schmulian enuncia un'equivalenza che vale a prescindere che la topologia debole sia metrizzabile o no.

Proposizione 10.4: Seconda proposizione di minimizzazione

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $C \subseteq E$ limitato, chiuso e convesso.

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente.

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

Dimostrazione

Essendo chiuso e convesso, C è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3].

Essendo anche limitato, C è allora debolmente compatto per la [Proposizione 9.2].

Dunque, C è anche sequenzialmente debolmente compatto per il [Teorema 10.3].

Pertanto, rispetto alla topologia debole su E , C è sequenzialmente compatto e f è sequenzialmente semicontinua inferiormente. Segue dalla [Proposizione 2.5] che f ammette minimo assoluto.

■

Lemma 2

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $X \subseteq E$ limitato e sequenzialmente debolmente chiuso.

Allora, X è sequenzialmente debolmente compatto.

Dimostrazione

Essendo X limitato, si ha $X \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

$\overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ è chiuso essendo un intorno sferico chiuso; inoltre, esso è convesso.

Infatti, dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ e dato $\lambda \in [0; 1]$, si ha $\|\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}\| \leq \underbrace{\lambda \|\mathbf{x}\|}_{\leq \delta} + (1 - \lambda) \underbrace{\|\mathbf{y}\|}_{\leq \delta} \leq \delta$.

Allora, $\overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3], ed è esso stesso limitato.

Ne segue che $\overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ è debolmente compatto per la [Proposizione 9.2], dunque sequenzialmente debolmente compatto, in quanto la sequenzializzazione di una topologia è più fine di essa.

Essendo X sequenzialmente debolmente chiuso, e contenuto in $\overline{B}(\mathbf{0}, \delta)$ sequenzialmente debolmente compatto, segue che X è sequenzialmente debolmente compatto.

Infatti, i sottoinsiemi chiusi di un insieme compatto sono compatti, qualunque sia la topologia considerata (in questo caso la sequenzializzazione della topologia debole).

■

Proposizione 10.5: Terza proposizione di minimizzazione

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $X \subseteq E$ sequenzialmente debolmente chiuso, non limitato.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente.

Si supponga $\inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) < \liminf_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x})$ (dove $\liminf_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = \sup_{\delta > 0} \inf_{\substack{\mathbf{x} \in X \\ \|\mathbf{x}\| > \delta}} f(\mathbf{x})$).

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

Dimostrazione

Sia $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $\inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) < \gamma < \liminf_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x})$, che esiste per ipotesi.

Dalla definizione di $\liminf_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x})$ segue che esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma < \inf_{\substack{\mathbf{x} \in X \\ \|\mathbf{x}\| > \delta}} f(\mathbf{x})$, da cui ne viene che $f(\mathbf{x}) > \gamma$ per ogni $\mathbf{x} \in X$ con $\|\mathbf{x}\| > \delta$.

Si consideri l'insieme $K = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq \gamma\}$.

K è sequenzialmente debolmente chiuso.

Infatti, f è sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente, ossia sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole su E ; pertanto, K è sequenzialmente debolmente chiuso per la [Proposizione 3.4].

K è anche limitato.

Infatti, $K \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}, \delta) \subseteq B(\mathbf{0}, \delta + 1)$ per costruzione di γ e δ .

Allora, $K = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq \gamma\}$ è sequenzialmente debolmente compatto per il [Lemma 2].

Dalla [Proposizione 2.7] applicata alla topologia debole su E segue pertanto che f è dotata di minimo assoluto.

■

⌘ Definizione: Funzione coerciva

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

Sia $A \subseteq E$ non limitato.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

f si dice **coerciva** quando $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$.

📄 Proposizione 10.6: Quarta proposizione di minimizzazione

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $X \subseteq E$ sequenzialmente debolmente chiuso, non limitato.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente e coerciva.

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

📄 Dimostrazione

Si ha $\liminf_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty$ per coercività di f , e chiaramente $\inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) < +\infty$, in quanto $f(X) \neq \emptyset$.

Allora, sono soddisfatte le ipotesi della [Proposizione 10.5], per cui f ammette minimo assoluto.

■

📄 Proposizione 10.7: Quinta proposizione di minimizzazione

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $X \subseteq E$ convesso, non limitato e chiuso.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente, quasi-convessa e coerciva.

Allora, f è dotata di minimo assoluto.

Dimostrazione

Essendo chiuso e convesso, X è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3], dunque sequenzialmente debolmente chiuso (si veda l'osservazione iniziale del capitolo 3).

Essendo f quasi-convessa e semicontinua inferiormente, per il [Lemma 1] f è debolmente semicontinua inferiormente; allora, f è sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente, in quanto la semicontinuità implica la sequenziale semicontinuità rispetto a una stessa topologia (in questo caso quella debole su E).

Allora, sono soddisfatte le ipotesi della [Proposizione 10.6], per cui f ammette minimo assoluto.



Proposizione 10.8: Condizioni sufficienti per la semicontinuità debole

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $X \subseteq E$ sequenzialmente debolmente chiuso.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente, e coerciva.

Allora, f è debolmente semicontinua inferiormente.

Dimostrazione

Fissato $k \in \mathbb{R}$, si consideri il sottolivello $f^{-1}([-\infty; k]) = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq k\}$.

Si osserva che $f^{-1}([-\infty; k])$ è limitato per coercività di f .

Inoltre, $f^{-1}(]-\infty; k])$ è sequenzialmente debolmente chiuso.

Infatti, essendo f sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente, ossia sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole su E , ne viene che $f^{-1}(]-\infty; k])$ è sequenzialmente debolmente chiuso per la [Proposizione 3.4].

Allora, $f^{-1}(]-\infty; k])$ è sequenzialmente debolmente compatto per il [Lemma 2].

Per il [Teorema 10.3], $f^{-1}(]-\infty; k])$ è allora debolmente compatto.

Essendo la topologia debole di Hausdorff (Osservazione 3 del capitolo 8), gli insiemi debolmente compatti sono debolmente chiusi; dunque, $f^{-1}(]-\infty; k])$ è debolmente chiuso.

Segue la debole semicontinuità inferiore di f per arbitrarietà di $k \in \mathbb{R}$, per la [Proposizione 2.1].

■

Funzioni strettamente convesse

⌘ Stretta convessità

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia $A \subseteq E$ convesso.

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **strettamente convessa** quando, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ e per ogni $\lambda \in]0; 1[$, si ha $f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y})$.

📄 Proposizione 10.9: Unicità del minimo assoluto per funzioni strettamente convesse

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia $A \subseteq E$ convesso.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente convessa.

Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$ di minimo assoluto per f .

Allora, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Dimostrazione

Si proceda per assurdo, supponendo quindi che $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Si osserva innanzitutto che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$.

infatti, essendo \mathbf{u} di minimo assoluto per f , si ha $f(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{v})$;

d'altra parte, essendo \mathbf{v} di minimo assoluto per f , si ha $f(\mathbf{v}) \leq f(\mathbf{u})$.

Sia $\lambda = \frac{1}{2}$; per stretta convessità di f , si dovrebbe avere $f\left(\frac{\mathbf{u}}{2} + \frac{\mathbf{v}}{2}\right) < \frac{1}{2}f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u})$; tuttavia, questa disuguaglianza
 $\underbrace{\phantom{f(\mathbf{u})}}_{=f(\mathbf{u})}$

contraddice l'ipotesi che \mathbf{u} sia di minimo assoluto per f .

■

Proposizione 10.10: Distanza al quadrato da un punto fissato è strettamente convessa in uno spazio con prodotto scalare

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.

Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Sia $\mathbf{x}_0 \in E$.

Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

f è strettamente convessa.

Osservazioni preliminari

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si ha $\|\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}\|^2 = \alpha(\alpha + \beta)\|\mathbf{x}\|^2 + \beta(\alpha + \beta)\|\mathbf{y}\|^2 - \alpha\beta\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$.

Infatti, si hanno le seguenti uguaglianze:

$$\|\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{x}\|^2 + \beta^2\|\mathbf{y}\|^2 + \alpha\beta\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle;$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Sottraendole membro a membro dopo aver moltiplicato ambo i membri della seconda per $\alpha\beta$, si ottiene

$$\|\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}\|^2 = \alpha(\alpha + \beta)\|\mathbf{x}\|^2 + \beta(\alpha + \beta)\|\mathbf{y}\|^2 - \alpha\beta\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Dimostrazione

Si supponga dapprima $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$;

si provi quindi la stretta convessità di $f_0 : E \rightarrow \mathbb{R}$, definita ponendo $f_0(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, e sia $\lambda \in]0; 1[$. Si ha

Per l'osservazione preliminare si ha

$$f_0(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = \|\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}\|^2 = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 + (1 - \lambda)\|\mathbf{y}\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Poiché $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, si ha $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 > 0$ per definita positività della norma.

Poiché $0 < \lambda < 1$, si ha $\lambda(1 - \lambda) > 0$.

Allora,

$$f_0(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 + (1 - \lambda)\|\mathbf{y}\|^2 - \underbrace{\lambda(1 - \lambda)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}_{>0}$$

$$< \lambda\|\mathbf{x}\|^2 + (1 - \lambda)\|\mathbf{y}\|^2 = \lambda f_0(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f_0(\mathbf{y}).$$

Pertanto, f_0 è strettamente convessa.

Si consideri ora $\mathbf{x}_0 \in E$ generico.

Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ per ogni $\mathbf{x} \in E$, e se ne provi la stretta convessità.

Si osservi intanto che $f(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, e sia $\lambda \in]0; 1[$. Si ha

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) &= f_0(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) && \text{Per quanto osservato prima su } f \\ &= f_0(\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (1 - \lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)) && \text{Manipolando algebricamente l'espressione} \\ &< \lambda f_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (1 - \lambda)f_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) && \text{Per stretta convessità di } f_0 \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y}) && \text{Per quanto osservato prima su } f \end{aligned}$$

Segue quindi la stretta convessità di f .

■

Proiezione ortogonale

Proposizione 10.11: Distanza di un punto fissato da un insieme assunta in un suo punto

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $A \subseteq E$ non vuoto, chiuso e convesso.

Sia $\mathbf{x}_0 \in E$.

Allora, esiste un unico $\mathbf{y}_0 \in A$ tale che $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| = d(\mathbf{x}_0, A)$, dove $\|\cdot\|$ è la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e d è la metrica indotta da $\|\cdot\|$.

Dimostrazione

Si osserva intanto che A è debolmente chiuso per la [Proposizione 8.3], essendo chiuso e convesso.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|^2$.

Essa è continua, e strettamente convessa per la [Proposizione 10.10].

Si considerino due casi.

A è limitato:

In tal caso, A è debolmente compatto per la [Proposizione 9.2].

Essendo f semicontinua inferiormente in quanto continua, e quasi-convessa in quanto strettamente convessa, f ammette un punto $\mathbf{y}_0 \in A$ di minimo assoluto per f , per la [Proposizione 9.1].

Essendo f strettamente convessa, tale punto è unico per la [Proposizione 10.9].

A non è limitato:

In tal caso, f è coerciva; infatti, per ogni $\mathbf{y} \in A$ si ha $f(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|^2 \geq (\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}_0\|)^2$ per la seconda disuguaglianza triangolare.

Segue allora per confronto che $\lim_{\|\mathbf{y}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{y}) \geq \lim_{\|\mathbf{y}\| \rightarrow +\infty} (\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}_0\|)^2 = +\infty$.

Essendo f anche semicontinua inferiormente in quanto continua, e quasi-convessa in quanto strettamente convessa, f ammette un punto $\mathbf{y}_0 \in A$ di minimo assoluto per f , per la [Proposizione 10.7].

Essendo f strettamente convessa, tale punto è unico per la [Proposizione 10.9].

Dunque, in entrambi i casi, f ammette un unico punto $\mathbf{y}_0 \in A$ di minimo assoluto.

Essendo $(\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt{t})$ strettamente monotona, ne segue che anche la funzione

$g : A \rightarrow \mathbb{R}$, definita ponendo $g(\mathbf{y}) = \sqrt{f(\mathbf{y})} = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$ per ogni $\mathbf{y} \in A$, ha \mathbf{y}_0 come unico punto di minimo assoluto.

Ciò significa quindi che \mathbf{y}_0 è l'unico punto in A per cui $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0\| = \min_{\mathbf{y} \in A} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = d(\mathbf{x}_0, A)$.

■

⌘ Definizione: Proiezione ortogonale

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $A \subseteq E$ non vuoto, chiuso e convesso.

Sia $\mathbf{x}_0 \in E$.

Il punto $\mathbf{y}_0 \in A$ tale che $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| = d(\mathbf{x}_0, A)$, che esiste ed è unico per la [Proposizione 10.11], è detto **proiezione ortogonale** di \mathbf{x}_0 su A .

Spazi con prodotto scalare e ortogonalità

Premesse

⌘ Somma diretta

Sia E uno spazio vettoriale.

Siano $F, G \subseteq E$ due sottospazi vettoriali di E .

Si dice che E è somma diretta di F e G , e si scrive $E = F \oplus G$, quando $E = F + G$ e $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

E è somma diretta di F e G se e solo se ogni vettore di E si può scrivere in modo unico come $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, con $\mathbf{u} \in F$ e $\mathbf{v} \in G$.

⌘ Vettori ortogonali, Complemento ortogonale

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.

Sia $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Essi si dicono ortogonali quando $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Sia $A \subseteq E$ non vuoto.

Si dice complemento ortogonale di A , e si denota con A^\perp , l'insieme $\{\mathbf{y} \in E : \forall \mathbf{x} \in A, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$.

Esso è un sottospazio vettoriale di E .

🔗 Intersezione tra sottospazio vettoriale e complemento ortogonale è il vettore nullo

Sia E uno spazio vettoriale.

Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale di E .

Si ha $F \cap F^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Infatti, ovviamente $\mathbf{0} \in F \cap F^\perp$, essendo entrambi sottospazi vettoriali di E .

D'altra parte, se $\mathbf{x} \in F \cap F^\perp$ si ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, da cui segue $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ per definita positività del prodotto scalare.

🔍 Osservazione: Il complemento ortogonale è chiuso

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.

Sia $A \subseteq E$ non vuoto.

A^\perp è chiuso.

Infatti, $A^\perp = \bigcap_{\mathbf{x} \in A} \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle^{-1}(0)$, dove per ogni $\mathbf{x} \in E$ si pone $\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle : A \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{y} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Essendo $\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle$ continua per ogni $\mathbf{x} \in E$ e $\{0\}$ è chiuso in \mathbb{R} , risulta che $\langle \mathbf{x}, \cdot \rangle^{-1}(0)$ è chiuso in E per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Ne segue che A^\perp è chiuso essendo intersezione di chiusi.

📖 Proposizione 10.12: Teorema di decomposizione degli spazi di Hilbert

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale di E , chiuso.

Allora, $E = F \oplus F^\perp$.

Dimostrazione

Essendo $F \cap F^\perp = \{\mathbf{0}\}$ per quanto richiamato prima, basta provare che $E = F + F^\perp$ per acquisire la tesi.

Se $F = \{\mathbf{0}\}$, si ha $F^\perp = E$, dunque evidentemente $E = F + F^\perp$.

Se $F = E$, si ha $F^\perp = \{\mathbf{0}\}$, dunque evidentemente $E = F + F^\perp$.

Si supponga ora $\{\mathbf{0}\} \subsetneq F \subsetneq E$.

Sia $\mathbf{x} \in E$.

Sia \mathbf{y} la proiezione ortogonale di \mathbf{x} su F , ben definita perché F è non vuoto e convesso essendo uno spazio vettoriale, e chiuso per ipotesi.

Si provi che $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in F^\perp$.

Sia dunque $\mathbf{u} \in F$; si provi che $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, si ha $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0} \rangle = 0$ per linearità a destra del prodotto scalare.

Si supponga ora $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Si consideri il vettore $\mathbf{y} + \lambda \mathbf{u} \in F$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$; si ha

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \lambda \mathbf{u}) &= \|\mathbf{x} - (\mathbf{y} + \lambda \mathbf{u})\| && \text{Definizione di metrica indotta dalla norma} \\ &\geq d(\mathbf{x}, F) && \text{Essendo } \mathbf{y} + \lambda \mathbf{u} \in F \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| && \text{Essendo } \mathbf{y} \text{ la proiezione ortogonale di } \mathbf{x} \text{ su } F \end{aligned}$$

Dunque, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y} - \lambda \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$; manipolando questa espressione, si ottiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y} - \lambda \mathbf{u}\|^2 &\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 && \text{Elevando al quadrato entrambi i membri} \\ \implies \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle &\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 && \text{Essendo } \|\cdot\| \text{ la norma indotta da } \langle \cdot, \cdot \rangle \\ \implies \lambda^2 \|\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle &\geq 0 && \text{Semplificando} \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza vale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

In particolare, per $\lambda = \frac{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}$, si ha

$$\frac{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2} - 2 \frac{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \geq 0, \text{ da cui segue } \frac{\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \leq 0, \text{ dunque } \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle^2 \leq 0.$$

Ne viene allora che $\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

Allora, $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in F^\perp$ per arbitrarietà di $\mathbf{u} \in F$.

Dunque, si ha $\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{y}}_{\in F} + \underbrace{(\mathbf{x}-\mathbf{y})}_{\in F^\perp} \in F + F^\perp$, il che mostra che $E = F + F^\perp$ per arbitrarietà di $\mathbf{x} \in E$.

■

Proposizione 10.13: Norma del funzionale lineare indotto dal prodotto scalare

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare.

Sia $\mathbf{x}_0 \in E$.

Sia $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle : E \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Si ha $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle \in E^*$, e $\|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*} = \|\mathbf{x}_0\|_E$.

Dimostrazione

La linearità di $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle$ segue dalle proprietà assiomatiche del prodotto scalare.

Se ne provi la continuità.

Si ha $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle| \leq \|\mathbf{x}_0\| \|\mathbf{x}\|$ per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, da cui segue la continuità di $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle$ per la [Proposizione 6.4], dunque $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle \in E^*$.

Inoltre, da tale disuguaglianza viene anche che $\|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*} \leq \|\mathbf{x}_0\|_E$, per definizione di $\|\cdot\|_{E^*}$.

Si provi la disuguaglianza opposta.

Se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_E$, si ha $\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \cdot, \mathbf{0}_E \rangle = \mathbf{0}_{E^*}$, pertanto $\|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*} = 0 = \|\mathbf{0}_E\|_E = \|\mathbf{x}_0\|_E$.

Si supponga quindi $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}_E$.

Sia $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|_E}$, che ha norma 1; da una delle definizioni di $\|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*}$ segue che

$$|\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_0 \rangle| \leq \|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*}, \text{ ossia } \|\mathbf{x}_0\|_E \leq \|\langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle\|_{E^*}.$$

La tesi è pertanto acquisita.



Proposizione 10.14: Teorema di Riesz, di rappresentazione dei funzionali lineari continui su uno spazio di Hilbert

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Sia $\varphi \in E^*$.

Esiste un unico $\mathbf{x}_0 \in E$ tale che $\varphi = \langle \cdot, \mathbf{x}_0 \rangle$.

Dimostrazione

Si mostri intanto l'unicità di \mathbf{x}_0 .

Siano dunque $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ tali che $\langle \cdot, \mathbf{x}_1 \rangle = \varphi = \langle \cdot, \mathbf{x}_2 \rangle$.

Allora, per ogni $\mathbf{x} \in E$ si ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle$, ossia $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle = 0$ per linearità a destra del prodotto scalare.

In particolare, per $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, si ha $\langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle = 0$, da cui segue $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ per definita positività del prodotto scalare.

Si provi adesso l'esistenza.

Sia $F = \ker(\varphi) = \varphi^{-1}\{0\}$.

F è un sottospazio vettoriale di E .

Inoltre, F è chiuso; infatti, F è controimmagine di $\{0\}$, chiuso in \mathbb{R} , rispetto ad φ , che è continua per ipotesi.

Se $F = E$, si ha $\varphi = \mathbf{0}_{E^*} = \langle \cdot, \mathbf{0}_E \rangle$, dunque la tesi è acquisita in questo caso.

Si supponga ora $F \subsetneq E$.

Si osserva intanto che $F^\perp \supsetneq \{0\}$.

Infatti, sia $\mathbf{y} \in E \setminus F$; sia $\mathbf{y}_0 \in F$ la proiezione ortogonale di \mathbf{y} su F ; essa è ben definita essendo F non vuoto e convesso in quanto spazio vettoriale, e chiuso per quanto osservato prima.

Allora, $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \in F^\perp$, fatto provato nella dimostrazione del [Proposizione 10.12];

inoltre, $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}_E$ in quanto altrimenti si avrebbe $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \in F$, contro il fatto che $\mathbf{y} \notin F$.

Sia dunque $\mathbf{z} \in F^\perp \setminus \{0_E\}$, e si supponga che $\|\mathbf{z}\|_E = 1$ (a meno di considerare $\frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|_E}$).

Si provi che $\varphi = \langle \cdot, \varphi(\mathbf{z}) \mathbf{z} \rangle$.

Sia $\mathbf{x} \in E$; si vuole quindi mostrare che $\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \varphi(\mathbf{z}) \mathbf{z} \rangle$.

Si osserva intanto che $\varphi(\mathbf{x})\mathbf{z} - \varphi(\mathbf{z})\mathbf{x} \in \ker(\varphi) = F$.

Si ha allora

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi(\mathbf{x})\mathbf{z} - \varphi(\mathbf{z})\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle && \text{Essendo } \varphi(\mathbf{x})\mathbf{z} - \varphi(\mathbf{z})\mathbf{x} \in F \text{ e } \mathbf{z} \in F^\perp \\ &= \varphi(\mathbf{x})\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - \varphi(\mathbf{z})\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle && \text{Dalla linearità a sinistra di } \langle \cdot, \cdot \rangle \\ &= \varphi(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{x}, \varphi(\mathbf{z}) \mathbf{z} \rangle && \text{In quanto } \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{z}\|_E^2 = 1 \text{ e per linearità a destra di } \langle \cdot, \cdot \rangle \end{aligned}$$

Dal primo e dall'ultimo membro di questa catena di uguaglianze segue che

$\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \varphi(\mathbf{z}) \mathbf{z} \rangle$, come volevasi mostrare.

Pertanto, $\varphi = \langle \cdot, \varphi(\mathbf{z}) \mathbf{z} \rangle$.



Isometrie

⌘ Isometria, Spazi linearmente isometrici

Siano $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ due spazi normati.

Sia $f : E \rightarrow F$.

f si dice **isometria** quando $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Gli spazi $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ si dicono **linearmente isometrici** quando esiste un'isometria $f : E \rightarrow F$ lineare e biunivoca.

🔍 Osservazioni: sulle isometrie

Siano $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ due spazi normati.

Sia $f : E \rightarrow F$.

Si hanno le seguenti osservazioni:

1. Se f è un'isometria, f è iniettiva;

infatti, fissati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ tali che $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, si ha $0 = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E$, dunque $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

2. Se f è un'isometria, f è continua;

infatti, fissato $\mathbf{x}_0 \in E$ e data una successione $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ convergente a \mathbf{x}_0 , si ha

$$\lim_n \|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{x}_0)\|_F = \lim_n \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_E = 0.$$

3. Se f è lineare, f è un'isometria se e solo se $\|f(\mathbf{x})\|_F = \|\mathbf{x}\|_E$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Infatti, se f è un'isometria, si ha $\|f(\mathbf{x})\|_F = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}_E)\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}_E\|_E = \|\mathbf{x}\|_E$ per ogni $\mathbf{x} \in E$;

viceversa, se f soddisfa la condizione indicata sopra, si ha $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_F = \|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, dunque f è un'isometria.

4. Per le osservazioni 1. e 3., f è un'isometria lineare biunivoca tra E e F se e solo se f è lineare e suriettiva, e $\|f(\mathbf{x})\|_F = \|\mathbf{x}\|_E$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Proposizione 10.15: Lineare isometria tra uno spazio di Hilbert e il suo duale

Sia $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio di Hilbert.

Rispetto alla norma $\|\cdot\|_E$ indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$, esso è linearmente isometrico a $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$.

Dimostrazione

Sia $f : E \rightarrow E^*$ la funzione definita ponendo $f(\mathbf{x}) = \langle \cdot, \mathbf{x} \rangle$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

f è ben definita e vale $\|f(\mathbf{x})\|_{E^*} = \|\mathbf{x}\|_E$ per ogni $\mathbf{x} \in E$;

infatti, fissato $\mathbf{x} \in E^*$, per la [Proposizione 10.13] si ha $f(\mathbf{x}) = \langle \cdot, \mathbf{x} \rangle \in E^*$ e anche $\|f(\mathbf{x})\|_{E^*} = \|\langle \cdot, \mathbf{x} \rangle\|_{E^*} = \|\mathbf{x}\|_E$.

f è lineare;

infatti, fissati $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si ha

$f(\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2) = \langle \cdot, \lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2 \rangle = \lambda \langle \cdot, \mathbf{x}_1 \rangle + \mu \langle \cdot, \mathbf{x}_2 \rangle = \lambda f(\mathbf{x}_1) + \mu f(\mathbf{x}_2)$, per linearità a destra di $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

f è suriettiva;

infatti, dato $\varphi \in E^*$, per il [Proposizione 10.14] esiste $\mathbf{x} \in E$ tale che $\varphi = \langle \cdot, \mathbf{x} \rangle = f(\mathbf{x})$.

Dunque f è un'isometria lineare biunivoca tra E e E^* per l'osservazione precedente.

■