6 - Introduzione agli Spazi di Banach

Premesse

> Convenzione: Campo degli scalari di uno spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale si intenderà sempre su $\mathbb{R}$.

> Sottospazio generato da un sottoinsieme di uno spazio vettoriale

Sia E uno spazio vettoriale.
Sia $A \subseteq E$.

Si dice sottospazio generato da A (o inviluppo lineare di A), e si denota con $\operatorname{span}(A)$, l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali di E contenenti A.

> Norma di uno spazio vettoriale

Sia E uno spazio vettoriale.

Si dice norma una funzione $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_0^+$ tale che:

1. Positiva omogeneità: $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$;
2. Sub-additività: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$;
3. Positiva definitività: $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La coppia costituita da uno spazio vettoriale e da una norma su di esso è detta spazio normato.

> Metrica indotta da una norma

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.

La norma $\|\cdot\|$ induce su E una metrica d; essa è definita ponendo $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Spazio di Banach

Uno spazio normato si dice **spazio di Banach** quando è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Alcune proprietà degli spazi normati

Proposizione 6.1: Lemma di Riesz

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $F \subsetneq E$ un sottospazio vettoriale di E, chiuso rispetto alla metrica d indotta dalla norma.

Si ha $\sup\limits_{\substack{\mathbf{x} \in E \\ \|\mathbf{x}\| = 1}} d(\mathbf{x}, F) = 1$.

Osservazioni preliminari

Sia $\mathbf{x} \in E$ tale che $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Essendo F sottospazio vettoriale di E, si ha $\mathbf{0} \in F$.

Allora, $d(\mathbf{x}, F) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\| = 1$.

Segue $\sup_{\substack{\mathbf{x}\in E \\ \|\mathbf{x}\|=1}} d(\mathbf{x}, F) \leq 1$ per arbitrarietà di $\mathbf{x} \in E$ con $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Dimostrazione

In virtù dell'osservazione preliminare, basta mostrare che $\sup_{\substack{\mathbf{x}\in E \\ \|\mathbf{x}\|=1}} d(\mathbf{x}, F) \geq 1$.

Essendo $F \subsetneq E$, esiste $\mathbf{x}_0 \in E \setminus F$.
Essendo F chiuso e $\mathbf{x}_0 \notin F$, esiste un intorno sferico di $\mathbf{x}_0$ disgiunto da F; pertanto, si ha $d(\mathbf{x}_0, F) > 0$.

Sia $\varepsilon > 0$; si provi che $\sup_{\substack{\mathbf{x}\in E \\ \|\mathbf{x}\|=1}} d(\mathbf{x}, F) \geq 1 - \varepsilon$.

Si supponga $\varepsilon < 1$ senza perdere di generalità; ne segue che $\frac{1}{1-\varepsilon} > 1$.

Si ha allora $d(\mathbf{x}_0, F) < \frac{1}{1-\varepsilon} d(\mathbf{x}_0, F)$; dalla definizione di $d(\mathbf{x}_0, F)$ segue allora l'esistenza di $\mathbf{x}_1 \in F$ tale che $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| < \frac{1}{1-\varepsilon} d(\mathbf{x}_0, F)$.

Poiché $\mathbf{x}_0 \notin F$ e $\mathbf{x}_1 \in F$, si ha $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$, per cui $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| \neq 0$
Allora, si può porre $\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|}$; evidentemente, $\|\tilde{\mathbf{x}}\| = 1$.
Si valuti $d(\tilde{\mathbf{x}}, F)$.

Si fissi $\mathbf{y} \in F$.
Si ha

$$\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| = \left\| \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} - \mathbf{y} \right\| \qquad \text{Per definizione di } \tilde{\mathbf{x}}$$

$$= \left\| \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1 - \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} \|\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_1 + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| \mathbf{y})\| \qquad \text{Proprietà dei vettori e della norma}$$

$$\geq \frac{1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} d(\mathbf{x}_0, F)$$

Segue dalla definizione di $d(\mathbf{x}_0, F)$. Infatti, $\mathbf{x}_1 + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|\mathbf{y} \in F$ essendo $\mathbf{x}_1, \mathbf{y} \in F$ e $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| \in \mathbb{R}$, pertanto $\|\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_1 + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|\mathbf{y})\|$ è distanza tra $\mathbf{x}_0$ è un vettore in F

$$> 1 - \varepsilon$$

Segue dalla disuguaglianza $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| < \frac{1}{1-\varepsilon} d(\mathbf{x}_0, F)$

Dunque, $\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| > 1 - \varepsilon$ per ogni $\mathbf{y} \in F$; ne segue che $d(\tilde{\mathbf{x}}, F) \geq 1 - \varepsilon$.

Allora, $\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} d(\mathbf{x}, F) \geq 1 - \varepsilon$, che è ciò che si voleva ottenere.

La tesi è allora acquisita, essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario.

■

Proposizione 6.2: Sottospazi vettoriali di dimensione finita sono chiusi

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale di dimensione finita.

Allora, F è chiuso in E rispetto alla metrica d indotta dalla norma.

Proposizione 6.3: Non totale limitatezza dell'insieme dei versori in spazi normati di dimensione infinita

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato.
Si supponga che E abbia dimensione infinita.
Sia $S = \{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

Allora, S non è totalmente limitato.

Dimostrazione

Sia $\mathbf{x}_0 \in S$.
Sia $F_0 = \operatorname{span}(\mathbf{x}_0) = \{\lambda\mathbf{x}_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; esso ha dimensione 1.
Pertanto, $F_0 \subsetneq E$ in quanto E ha dimensione infinita per ipotesi, e per la [Proposizione 6.2] esso è chiuso.
Allora, $\sup\limits_{\mathbf{x}\in S} d(\mathbf{x}, F_0) = 1$ (> $\frac{1}{2}$) per la [Proposizione 6.1], da cui segue che esiste $\mathbf{x}_1 \in S$ tale che $d(\mathbf{x}_1, F_0) > \frac{1}{2}$.

Sia $F_1 = \operatorname{span}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$; esso ha dimensione 2.
Pertanto, $F_1 \subsetneq E$ in quanto E ha dimensione infinita per ipotesi, e per la [Proposizione 6.2] esso è chiuso.
Allora, $\sup\limits_{\mathbf{x}\in S} d(\mathbf{x}, F_1) = 1$ (> $\frac{1}{2}$) per la [Proposizione 6.1], da cui segue che esiste $\mathbf{x}_2 \in S$ tale che $d(\mathbf{x}_2, F_1) > \frac{1}{2}$.

Procedendo induttivamente si ottiene una successione $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ dimodoché $d(\mathbf{x}_n, \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})) > \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si provi che $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è totalmente limitato.

Siano $N_1, \dots, N_k \subseteq \mathbb{N}$ tali che $\bigcup\limits_{i=1}^{k} = \mathbb{N}$; almeno uno di essi è infinito (altrimenti $\mathbb{N}$ sarebbe unione finita di insiemi finiti, cioè sarebbe un insieme finito, il che è falso), sia esso N_{i_0}.
Essendo N_{i_0} infinito, esso ammette due elementi distinti; siano essi m e n, e si supponga $n > m$.
Essendo $n > m$, si ha $\mathbf{x}_m \in \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$; allora, $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \geq d(\mathbf{x}_n, \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})) > \frac{1}{2}$.

Dunque, ogni ricoprimento finito di $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette due elementi nello stesso insieme aventi distanza maggiore di $\frac{1}{2}$; ne segue che $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è totalmente limitato.

Allora, a maggior ragione S non è totalmente limitato, in quanto $S \supseteq \{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
■

Osservazione

In $\mathbb{R}^n$, S è compatto essendo chiuso e limitato.

Invece, in uno spazio vettoriale E di dimensione finita, per la [Proposizione 6.3] S non è totalmente limitato, per cui non è compatto.