Índice

Módulo 1

Introducción a la Investigación Operativa

1.1 Concepto y fases de la IO. Modelos de programación matemática

1.1.1 El proceso de toma de decisiones

Todos tenemos que tomar decisiones. En cada momento de nuestra vida, tanto privada como profesional, nos vemos obligados a seleccionar una alternativa dentro de un conjunto de opciones. La calidad de las decisiones que tomamos afecta radicalmente a nuestra salud o nuestro bienestar económico. Lo mismo puede aplicarse también a las empresas, organismos públicos o instituciones privadas, en su caso, la calidad de sus decisiones incide directamente sobre sus beneficios, costes o algún otro indicador.

La universalidad del problema de la toma de decisiones da lugar a que resulte de gran interés preguntarse cuál es la metodología adecuada para tomar decisiones, entendiendo por "adecuada" aquella que proporciona un mayor grado de consecución de los objetivos deseados. En el caso de la empresa, por ejemplo, estos objetivos pueden ser obtener los máximos beneficios o minimizar los costes.

En la mayor parte de los casos, los procesos de toma de decisiones se basan en la intuición que el directivo o empresario tiene sobre el problema (**Métodos cualitativos**). Sin embargo, existen otros casos en los que antes de decidir, se analizan **cuantitativamente** los efectos de las distintas alternativas (**Métodos cuantitativos**).

La aplicación del método científico a la toma de decisiones se ha realizado bajo distintas variantes: "Management Science", "Data Science", Análisis de Sistemas o **Investi-**

gación Operativa. Todas ellas tienen en común una **aproximación científica y por tanto cuantitativa** a la toma de decisiones.

1.1.2 Concepto de Investigación Operativa

La Investigación Operativa puede definirse como la aplicación de métodos y técnicas cuantitativas a problemas de decisión relacionados con el funcionamiento de sistemas u organizaciones. Entendiéndose aquí por sistema un conjunto de elementos interrelacionados que operan en un determinado entorno con objetivos comunes.

Los problemas de decisión a los que se refiere la definición estarán, habitualmente, vinculados con la limitada disponibilidad de alternativas o líneas de acción que pueden ser tomadas por el sistema (restricciones del mismo), en orden a conseguir los fines planteados.

Los métodos y técnicas utilizados que se diseñen pretenderán, por su parte, constituir instrumentos útiles en la resolución del problema identificado. La "resolución" del problema podrá consistir en la determinación explícita de las líneas de acción más adecuadas o, también, en el análisis de la dinámica de comportamiento del sistema ante entornos cambiantes.

1.1.3 Fases en el proceso de Investigación Operativa

En todo caso, para la aplicación de las diferentes técnicas de resolución será preciso la observación de la realidad del sistema y su representación simplificada mediante un modelo. Este proceso de modelización exige:

1. Análisis descriptivo del sistema:
    - Identificación de componentes: definición de variables.
    - Caracterización de interrelaciones: definición de restricciones.
    - Especificación, en su caso, del objetivo del sistema.
2. Formalización del análisis:
    - Representación matemática: concreción de formas funcionales para las relaciones y objetivos.
    - Cuantificación de los parámetros.

Una representación esquemática del proceso de modelización se observa en la figura 1.1.

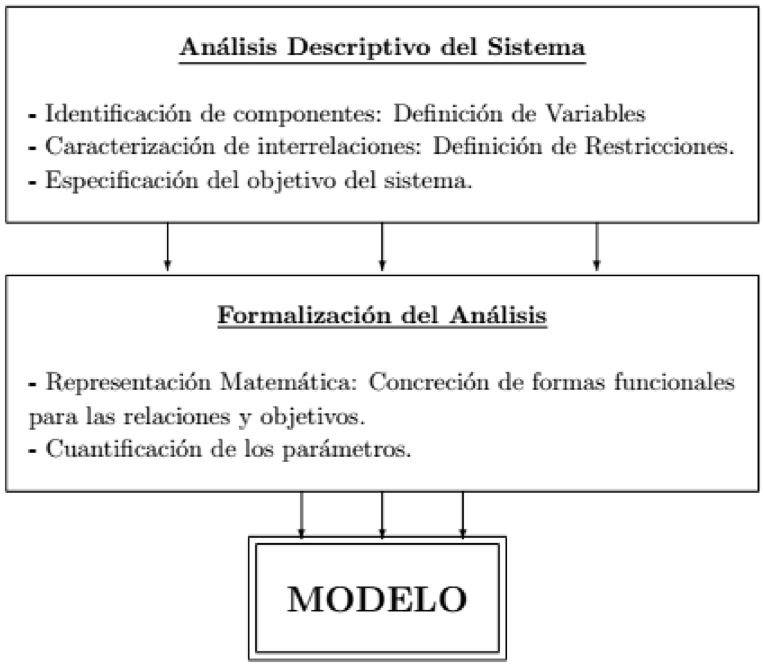


Figura 1.1: Proceso de Modelización

Una vez obtenido el modelo, el siguiente paso será determinar la validez del mismo que dependerá de su capacidad para dar respuesta a las cuestiones que sobre el sistema se hayan planteado.

Será necesario realizar posteriormente el estudio cuantitativo del modelo, lo que dará lugar al desarrollo de distintos algoritmos o técnicas de resolución del mismo. Estos algoritmos se definirán como un conjunto de reglas estructuradas para la resolución del modelo en un número finito de etapas.

Dentro del gran número de métodos y técnicas que engloba la Investigación Operativa, cabe distinguir entre dos enfoques distintos en cuanto al tratamiento de estos problemas operativos o sistematizados.

Por una parte, tenemos la *simulación*, que podrá ser cierta o estocástica, discreta o continua, y que actúa como instrumento para analizar la respuesta del sistema a estímulos externos a partir de dar valores concretos a las variables controlables o bien analizar el comportamiento del sistema ante cambios en las condiciones del entorno o en las lineas de acción alternativas.

Por otra parte, un segundo enfoque será la *modelización* del sistema que dará lugar a un modelo matemático (que puede exigir planteamientos optimizadores), y que a través de un determinado algoritmo de resolución nos permitirá obtener los valores a tomar por las variables (de decisión) representativas de los elementos controlables del sistema, de modo que se alcancen los objetivos propuestos ("óptimos").

Lógicamente, los problemas sobre los que vamos a estar especialmente interesados serán los relacionados con sistemas empresariales. En este sentido, podría aquí discutirse sobre la utilidad de la aplicación de técnicas operativas como elemento de apoyo a la toma de decisiones con que se enfrenta la dirección empresarial. Cabe señalar que, como es obvio, el proceso de modelización descrito resultará ser más fácil de obtener cuanto más repetitiva y sistemática sea la realidad que se pretende estudiar ya que nos dará un mejor conocimiento de los elementos que componen el sistema a modelizar.

Así, determinados problemas financieros (selección de fuentes de financiación, de proyectos de inversión o de tesorería), de producción y de gestión logística (control de stocks, problemas de distribución y problemas de asignación de tareas) son satisfactoriamente abordados con técnicas de Investigación Operativa.

Históricamente, la Investigación Operativa engloba una serie de técnicas o metodologías cuantitativas que podemos observar en la figura 1.2.

Métodos Cuantitativos Simples	**Investigación Operativa**	**Métodos Cuantitativos Sofisticados**
Series Temporales Números Índices Regresión Lineal Simple	Programación Matemática Teoría de Juegos Teoría de Grafos Teoría de Colas Simulación Gestión de Stocks Control de Calidad Arboles de Decisión	Sistemas Expertos Redes Neuronales Artificiales Lógica Difusa Algoritmos Genéticos Estadística Multivariante

Figura 1.2: Métodos de Investigación Operativa

Casi con toda seguridad, un libro con título "Introducción a la IO ...", "Investigación de operaciones...." expone las técnicas que aparecen en la columna central de la anterior tabla. Podríamos hablar del "núcleo duro" de la Investigación Operativa. En la actualidad, algunos autores van incorporando a ese "núcleo duro" técnicas como la "Lógica Difusa" o los "Algoritmo Genéticos".

El contenido de nuestra asignatura se centra un caso concreto de la denominada "Programación Matemática", la "Programación Lineal".

1.1.4 Modelos de Programación matemática: Estructura y clases

Estructura del modelo de Programación Matemática

- Modelo general de optimización:

$$\begin{gathered}\text{OPT } Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n)\\ \text{sujeto a:}\\ g_1(X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n) = b_1\\ \vdots\\ g_m(X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n) = b_m\end{gathered}$$

- Modelo general de Programación Matemática:

$$\begin{gathered}\text{OPT } Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n)\\ \text{sujeto a:}\\ g_1(X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n) \leq \text{ó} \geq b_1\\ \vdots\\ g_m(X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n) \leq \text{ó} \geq b_m\\ X_1, \ldots, X_n \geq 0\end{gathered}$$

- Modelo general de Programación Lineal:

$$\begin{gathered}\text{OPT } Z = C_1X_1 + \cdots + C_jX_j + \cdots + C_nX_n\\ \text{sujeto a:}\\ a_{11}X_1 + \cdots + a_{1j}X_j + \cdots + a_{1n}X_n \leq \text{ó} \geq b_1\\ \vdots\\ a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mj}X_j + \cdots + a_{mn}X_n \leq \text{ó} \geq b_m\\ X_1, \ldots, X_n \geq 0\end{gathered}$$

Tipos de modelos de Programación Matemática

Por la forma funcional de las relaciones:

- Programación Lineal: La expresión formal tanto del objetivo como de las restricciones del modelo son lineales.

- Programación no Lineal: Alguna de las expresiones formales del modelo será no lineal, por ejemplo: cuadrática, exponencial,...

Por la naturaleza de las variables:

- Programación Continua: Todas las variables que aparecen en el modelo pueden tomar valores fraccionarios.

- Programación Entera: Todas las variables del modelo toman valores enteros. En el caso en que convivan los dos tipos de variables (continuas y enteras) hablaremos de *Modelos Mixtos*.

Por la especificación de los objetivos:

- Programación Uniobjetivo: Existe sólo una función objetivo.

- Programación Multiobjetivo: Existe más de un objetivo a optimizar, pudiéndose tratar de un modelo de objetivos comparables entre si o bien un modelo que establezca una serie de prioridades entre los mismos.

Por la naturaleza de los coeficientes (parámetros y variables no controlables):

- Programación Determinista: Todos los coeficientes del modelo son valores conocidos y fijados de antemano. Este tipo de modelos conducen a una única solución óptima.

- Programación Estocástica: Los coeficientes del modelo son cantidades inciertas que dependen de una cierta distribución de probabilidad y por lo tanto la solución también dependerá de una ley de probabilidad.

Por la simultaneidad temporal en el planteamiento y resolución del modelo:

- Programación Estática: Son modelos que en general buscan la solución para un periodo concreto en el tiempo.

- Programación Dinámica: supone la consecución del objetivo a partir de la toma de decisiones sucesivas.

1.1.5 Tipos de Modelos de Programación Lineal

En esta asignatura estudiaremos los **Modelos de Programación Lineal**. Es decir, modelos de la forma:

$$\begin{gathered}
\text{OPT } Z = C_1X_1 + \cdots + C_jX_j + \cdots + C_nX_n \\
\text{sujeto a:} \\
a_{11}X_1 + \cdots + a_{1j}X_j + \cdots + a_{1n}X_n \leq \acute{o} \geq b_1 \\
\vdots \\
a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mj}X_j + \cdots + a_{mn}X_n \leq \acute{o} \geq b_m \\
X_1, \ldots, X_n \geq 0
\end{gathered}$$

Según las características de las variables X_i, podemos clasificar los modelos de Programación Lineal en los tipos siguientes

1. **Modelos de Programación Lineal Continuos (PL o PLC)**: Todas las variables pueden tomar cualquier valor real, $X_i \in \mathbb{R}, \forall i$. En esta asignatura vamos a estudiar con detalle este tipo de modelos y uno de los algoritmos de resolución: **el algoritmo símplex**.
2. **Modelos de Programación Lineal Enteros Puros (PLEP)**: Todas las variables han de tomar valores enteros.
3. **Modelos de Programación Lineal Enteros Mixtos (PLEM)**: Al menos una de las variables ha de tomar valores enteros y el resto pueden tomar valores continuos.
4. **Modelos de Programación Lineal Binarios Puros (PLBP)**: Todas las variables son binarias ($X_i = \{0, 1\}$).
5. **Modelos de Programación Lineal Binarios Mixtos (PLBM)**: Al menos una las variables es binaria y el resto enteras o continuas.

1.2 Ejemplos formulación de modelos lineales

A continuación se exponen una serie de ejemplos de modelización mediante modelos lineales de algunos problemas relacionados con temas empresariales. El lector interesado puede encontrar una excelente colección de ejemplos en Ríos (1997), Gould (1992), Bierman (1994), Davis (1986) o Hillier (1991).

Ejemplo 1.1

Una empresa fabrica dos productos, A y B, hallándose interesada en estimar su plan de producción más adecuado para el próximo periodo. Cada producto exige un tiempo de trabajo y el uso de unas instalaciones técnicas.

Para el periodo en estudio se sabe, concretamente, que las necesidades de recursos (en horas) por unidad producida y los márgenes brutos (en unidades monetarias) de los productos de la firma son:

Producto	Mano Obra	Maquinaria	Margen Bruto
A	1	4	10
B	3	2	4

El tiempo diario disponible de ambos factores de producción son de 600 y 800 horas, respectivamente.

Con los recursos disponibles, se desea plantear un modelo de Programación Lineal que permita calcular el nivel de producción que conducirá a un margen máximo, sin otra restricción que un pedido pendiente consistente en 150 unidades del producto B.

Formulación:

Sea:
A= Número de unidades del producto A que se fabricarán.
B= Número de unidades del producto B que se fabricarán.

$$\begin{gathered}
\text{MAX } Z = 10A + 4B \\
\text{sujeto a:} \\
A + 3B \leq 600 \\
4A + 2B \leq 800 \\
B \geq 150 \\
A, B \geq 0
\end{gathered}$$

Ejemplo 1.2

Una empresa fabrica dos tipos de producto: A y B, siendo el coste de fabricación de 1 y 2 u.m./u., respectivamente.

La empresa considera que del total de unidades producidas, entre el 40% y el 70% debe ser del tipo A.

El precio de venta de los productos es de 3 y 5 u.m./u., respectivamente. La empresa dispone de 10000 u.m. para hacer frente a los costes de fabricación y publicidad del periodo.

Además, se estima que la demanda del producto A es a lo sumo 5 veces el gasto hecho en publicidad para dicho producto. En el caso del producto B, se estima que su demanda es a lo sumo 8 veces su gasto en publicidad.

Se desea plantear un modelo de P.L. que permita conocer el plan óptimo de producción y publicidad.

Formulación:

Sea:
A = Número de unidades del producto A que se fabricarán.
B = Número de unidades del producto B que se fabricarán.
P_A = u.m. invertidas en la publicidad del producto A.
P_B = u.m. invertidas en la publicidad del producto B.

$$\text{MAX } Z = 2A + 3B - P_A - P_B$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$0.3A - 0.7B \leq 0$$
$$0.6A - 0.4B \geq 0$$
$$A - 5P_A \leq 0$$
$$B - 8P_B \leq 0$$
$$A + 2B + P_A + P_B \leq 10000$$
$$A, B, P_A, P_B \geq 0$$

Ejemplo 1.3 (Problema de transporte)

Una compañía dedicada a la explotación de oro obtiene semanalmente en cada una de sus tres plantas 400, 600 y 1100 toneladas de oro. La empresa dispone de cuatro distribuidoras repartidas por distintas zonas del país, la demanda semanal de cada una de ellas es de 400, 800, 600 y 200 toneladas de oro respectivamente. En la siguiente tabla se indican los costes de transporte (miles de u.m. por tonelada) desde las plantas hasta las distribuidoras. Determinar un programa de distribución semanal de oro que minimice el coste total del transporte.

	Distribuidoras			
Plantas	1	2	3	4
1	4	6	5	2
2	3	7	8	4
3	2	3	4	6

El objetivo es determinar un programa de distribución semanal de oro que minimice el coste total del transporte.

Formulación:

Sea:

X_{ij} = Número de toneladas de oro obtenidas en la planta i y enviadas hacia la distribuidora j.

$$\begin{gathered}
\text{MIN } Z = 4X_{11} + 6X_{12} + 5X_{13} + 2X_{14} + \\
3X_{21} + 7X_{22} + 8X_{23} + 4X_{24} + \\
2X_{31} + 3X_{32} + 4X_{33} + 6X_{34} \\
\text{sujeto a:} \\
\text{Restricciones de oferta:} \\
X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 400 \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 600 \\
X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 1100 \\
\text{Restricciones de demanda} \\
X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 400 \\
X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 800 \\
X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 600 \\
X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 200 \\
X_{ij} \geq 0
\end{gathered}$$

Ejemplo 1.4

Un inversor está planificando su actividad para los seis próximos ejercicios, periodo en que se desea recuperar los fondos invertidos.

Las inversiones se harán efectivas al inicio de cada año, siendo las oportunidades de inversión disponibles las que a continuación se detallan:

- Inversión A: puede ejercitarse cada año y genera una rentabilidad del 20% al cabo de dos años.
- Inversión B: podrá elegirse al tercer año y genera una rentabilidad del 35% a los tres años.
- Inversión C: se ofrece en el segundo año y su rentabilidad es del 45% después de cuatro años.
- Inversión D: alternativa con rentabilidad del 9% y renovación anual.

Se desea plantear un modelo de P.L. que permita determinar la cantidad y momento a invertir en cada una de las alternativas de modo que se recupere la máxima cantidad de fondos en el sexto ejercicio, teniendo en cuenta que los fondos disponibles iniciales del inversor ascienden a 100 u.m. y se limita el montante invertido en las alternativas B y C a 30 y 20 u.m., respectivamente.

Formulación:

Sea:
A_i = Inversión del producto A efectuada en el año "i".
B_i = Inversión del producto B efectuada en el año "i".
C_i = Inversión del producto C efectuada en el año "i".
D_i = Inversión del producto D efectuada en el año "i".

$$\begin{gathered}
\text{MAX } Z = 1.2A_4 + 1.35B_3 + 1.45C_2 + 1.09D_5 \\
\text{sujeto a:} \\
A_1 + D_1 = 100 \\
A_2 + C_2 + D_2 - 1.09D_1 \leq 0 \\
C_2 \leq 20 \\
A_3 + B_3 + D_3 - 1.09D_2 - 1.2A_1 \leq 0 \\
B_3 \leq 30 \\
A_4 + D_4 - 1.09D_3 - 1.2A_2 \leq 0 \\
D_5 - 1.09D_4 - 1.2A_3 \leq 0 \\
A_i, B_i, C_i, D_i \geq 0
\end{gathered}$$

Ejemplo 1.5

Una empresa del sector eléctrico quiere lanzar una campaña publicitaria de su nuevo producto SISCET para lo cual dispone de un presupuesto de 75.000€. En dicha campaña se insertarán anuncios en revistas, puntos de venta y páginas web especializadas (con niveles de especialización 1 y 2). La tabla siguiente muestra los datos sobre el número de ventas conseguido por anuncio, su coste (en euros) en cada medio, y el índice de impacto de los anuncios.

Medio Publicitario	Ventas por Anuncio	Coste por anuncio	Índice de impacto	
			Nivel 1	Nivel 2
Revista	4.500	1.900	70	45
Punto de venta	3.000	3.000	75	50
Página web	6.000	1.400	80	60

El Dpto. Marketing ha decidido la siguiente estrategia publicitaria:

- No tienen que aparecer más de 20 anuncios en un mismo medio.
- El número total de ventas en todos los medios tiene que ser, al menos, de 210.000€.
- Al menos la cuarta parte de los anuncios tienen que aparecer en revistas.
- No se emitirán más de 60 anuncios con nivel de especialización 1.
- El coste total de la campaña no puede exceder el presupuesto inicial.

Plantead un modelo de programación Lineal que determine el número de anuncios a insertar en cada medio de manera que la empresa maximice el índice de impacto de la campaña publicitaria.

Formulación:

Sea:
$Revi$ = cantidad de anuncios insertados en revistas nivel "i"
$PdVi$ = cantidad de anuncios insertados en PdV nivel "i"
$Webi$ = cantidad de anuncios insertados en paginas web nivel "i"

$$\begin{gathered}
\text{MAX } Z = 70Rev1 + 45Rev2 + 75PdV1 + 50PdV2 + 80Web1 + 60Web2 \\
\text{sujeto a:} \\
Rev1 + Rev2 \leq 20 \\
PdV1 + PdV2 \leq 20 \\
Web1 + Web2 \leq 20 \\
4.500Rev1 + 4.500Rev2 + 3.000PdV1 + 3.000PdV2 + 6.000Web1 + 6.000Web2 \geq 210.000 \\
0,75Rev1 + 0,75Rev2 – 0,25PdV1 – 0,25PdV2 – 0,25Web1 – 0,25Web2 \geq 0 \\
Rev1 + PdV1 + Web1 \leq 60 \\
1.900Rev1 + 1.900Rev2 + 3.000PdV1 + 3.000PdV2 + 1.400Web1 + 1.400Web2 \leq 75.000 \\
Webi, Revi, PdVi \geq 0, \text{ variables enteras}
\end{gathered}$$

La solución obtenida con el Solver muestra que el impacto máximo de 3.225 se consigue con 20 anuncios en revistas, 3 en puntos de venta y 20 en páginas web, todos con un nivel de especialización 1.

Ejemplo 1.6 (Problema de asignación)

Los cuatro profesores de un instituto tienen que cumplir con las tareas de vigilancia de 4 exámenes correspondientes a la convocatoria de junio. Para que esta tarea cause los menos problemas posibles, el director del centro realiza una encuesta para conocer las preferencias de sus profesores, valorando de 1 a 10 cada examen, y después asignar las vigilancias de manera que la satisfacción del grupo de profesores sea máxima.

Sabemos que la lista de preferencias es la siguiente:

	Examen			
Profesor	1	2	3	4
1	3	2	5	2
2	6	7	3	4
3	2	6	2	1
4	5	5	8	2

Formulación:

Sea:
$X_{ij} = 1$ si se asigna el profesor i al examen j, 0 en caso contrario.

$$\text{MAX } Z = 3X_{11} + 2X_{12} + 5X_{13} + 2X_{14} +$$
$$6X_{21} + 7X_{22} + 3X_{23} + 4X_{34} +$$
$$2X_{31} + 6X_{32} + 2X_{33} + 1X_{34} +$$
$$5X_{41} + 5X_{42} + 8X_{43} + 2X_{44}$$

sujeto a:

Restricciones de los profesores:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1$$

Restricciones de los exámenes:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1$$
$$X_{ij} = \{0, 1\}$$

La solución que proporciona una satisfacción máxima a los profesores es:

$$X_{14} = 1 \quad X_{21} = 1 \quad X_{32} = 1 \quad X_{43} = 1$$
$$Z_{MAX} = 22$$

Lo que supone asignar al profesor 1 el examen 4, al 2 el 1, al 3 el 2 y por último al profesor 4 el examen 3, esto produce una satisfacción total máxima de 22 unidades.

Ejemplo 1.7

La facultad de Económicas está planificando su servicio de seguridad de 24 horas para el próximo curso académico. El departamento de personal ha estimado las siguientes necesidades mínimas de personal por tramos horarios con tal de proporcionar un servicio eficiente:

	Turnos					
j	1	2	3	4	5	6
Tramo Horario	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-2
Vigilantes	5	8	10	12	7	5

Los vigilantes contratados trabajan 8 horas seguidas fijas, independientemente de cual sea su horario de entrada y de salida. Determinar el número mínimo de vigilantes necesarios para cubrir el servicio de vigilancia de la facultad.

Formulación:

Sea:

X_j = Número de vigilantes que entran a trabajar en el turno j, donde $j = 1, \ldots, 6$. Una variable para cada turno.

$$\begin{array}{c} \text{MIN } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \\ \text{sujeto a:} \\ X_6 + X_1 \geq 5 \\ X_1 + X_2 \geq 8 \\ X_2 + X_3 \geq 10 \\ X_3 + X_4 \geq 12 \\ X_4 + X_5 \geq 7 \\ X_5 + X_6 \geq 5 \\ X_j \geq 0, \text{ variables enteras} \end{array}$$

Ejemplo 1.8

En las instalaciones de una determinada empresa del sector alimentario, en la sección encargada de la elaboración de productos para consumo animal, se obtiene el compuesto alimenticio X, obtenido a partir de la mezcla de tres nutrientes: A,B y C suministrados por un proveedor externo. Para su transporte, los productos A y B son embalados en paquetes de 2 Kg., mientras que el C lo es en paquetes de 3 Kg.

En tanto no son objeto de mezcla, las cantidades de materia prima no empleadas durante el periodo pueden almacenarse para su posterior utilización, con un coste despreciable.

El siguiente cuadro muestra las características nutritivas de las distintas materias primas, así como su precio:

Producto	Conten. Energ. (Kcal./paq.)	Conten. Grasas (gr./paq.)	Precio (u.m./paq.)
A	2	10	50
B	1	40	20
C	3	20	40

Para el próximo periodo la sección debe obtener 800 Kg. de producto final X, teniendo en cuenta que para el total de la producción el contenido energético mínimo debe ser de 600 Kcal. y el contenido en grasas no superior a 10 Kg.

Determinar el plan de compras óptimo de la empresa que minimice el coste de adquisición de los nutrientes.

Formulación:

Sea:

A = Número de paquetes del nutriente A que la empresa debe comprar.
B = Número de paquetes del nutriente B que la empresa debe comprar.
C = Número de paquetes del nutriente C que la empresa debe comprar.

$$
\begin{array}{l}
\text{MIN } Z = 50A + 20B + 40C \\
\quad \text{sujeto a:} \\
2A + 1B + 3C \geq 600 \\
1A + 4B + 2C \leq 1000 \\
2A + 2B + 3C = 800 \\
A, B, C \geq 0
\end{array}
$$

Ejemplo 1.9

Una entidad bancaria ofrece los siguientes 4 tipos de préstamos a sus clientes:

1. Hipotecas a 20 años al 5% de interés anual.
2. Hipotecas a 30 años al 8% de interés anual.
3. Créditos personales al 10% de interés anual.
4. Créditos para el hogar al 15% de interés anual.

La política de créditos de la entidad supone las siguientes condiciones:

- La oficina tiene una capacidad máxima de préstamo de 200 millones de euros.
- Las hipotecas a 20 años han de ser al menos el 40% de todas las hipotecas y como máximo el 20% de todos los préstamos (en términos de euros).
- Las hipotecas a 30 años no pueden exceder del 30% de todos los préstamos (en términos de euros).
- El interés medio de todos los préstamos no puede ser superior al 12%.

Plantear un modelo de Programación Lineal que maximice el ingreso por intereses del banco.

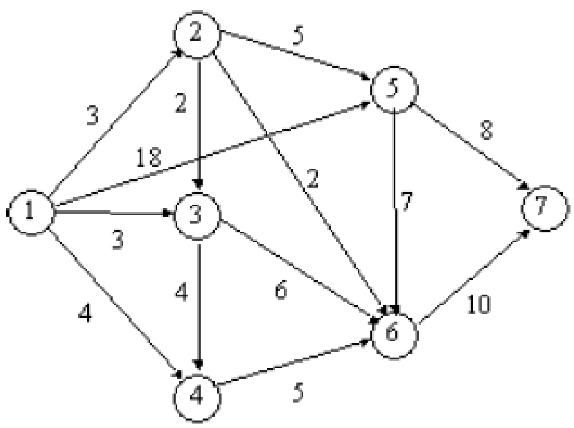
Formulación:

$H20$ = Cantidad de euros Hipotecas a 20 años.
$H30$ = Cantidad de euros Hipotecas a 30 años.
CP = Cantidad de euros Créditos personales.
CH = Cantidad de euros Créditos para el hogar.

$$\begin{gathered}
\text{MAX } Z = 0.05H20 + 0.08H30 + 0.1CP + 0.15CH \\
\text{sujeto a:} \\
H20 + H30 + CP + CH \leq 200 \\
0.6H20 - 0.4H30 \geq 0 \\
0.8H20 - 0.2H30 - 0.2CP - 0.2CH \leq 0 \\
-0.3H20 + 0.7H30 - 0.3CP - 0.3CH \leq 0 \\
-0.07H20 - 0.04H30 - 0.02CP + 0.03CH \leq 0 \\
H20, H30, CP, CH \geq 0
\end{gathered}$$

Ejemplo 1.10 (Camino de longitud mínima)

La siguiente red representa un sistema de carreteras entre ciudades de un determinado país. Los valores que aparecen en cada arco indica la distancia (Km) entre las ciudades. Plantear un modelo de Programación Lineal para determinar el camino de longitud mínimo entre la ciudad 1 y la 7.



Red de sistema de carreteras

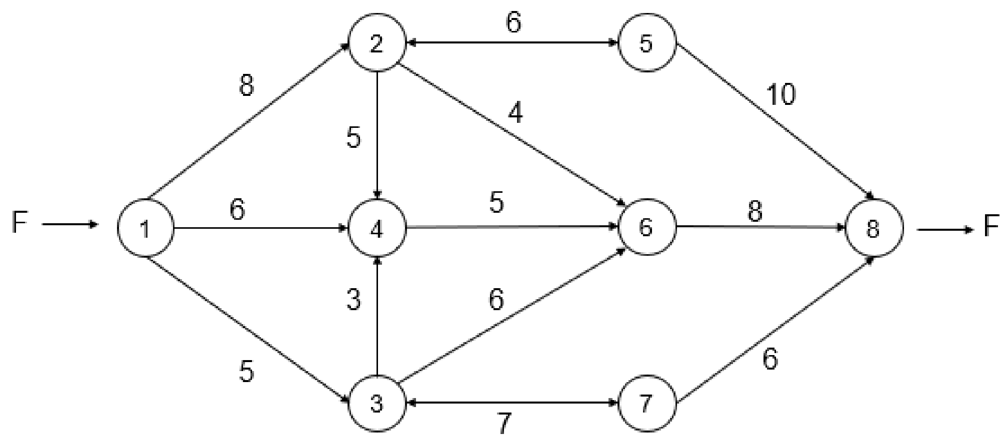
Formulación:

Sea:
$X_{ij} = 1$ si tomamos el arco ij, 0 en caso contrario

$$\begin{gathered}
\text{MIN } Z = 3X_{12} + 3X_{13} + 4X_{14} + 2X_{23} + 18X_{15} + \\
2X_{26} + 5X_{25} + 4X_{34} + 6X_{36} + \\
5X_{46} + 7X_{56} + 8X_{57} + 10X_{67} \\
\text{sujeto a:} \\
X_{12} + X_{15} + X_{13} + X_{14} = 1 \\
X_{57} + X_{67} = 1 \\
X_{23} + X_{25} + X_{26} - X_{12} = 0 \\
X_{36} + X_{34} - X_{13} - X_{23} = 0 \\
X_{46} - X_{34} - X_{14} = 0 \\
X_{57} + X_{56} - X_{25} - X_{15} = 0 \\
X_{67} - X_{56} - X_{26} - X_{36} - X_{46} = 0 \\
X_{ij} = \{0, 1\}
\end{gathered}$$

Ejemplo 1.11 (Flujo máximo por una red)

El siguiente grafo representa una determinada red de autopistas. Los valores que aparecen en cada arco indican la cantidad máxima de vehículos que pueden circular en ese tramo durante una hora. Plantear un modelo de Programación Lineal que permita determinar el número máximo de vehículos que pueden circular en una hora desde el nodo 1 y 8.



Red de autopistas

Formulación:

Sea:
X_{ij} número de vehículos que circulan por el arco ij.
F=Total de vehículos que circulan por la red.
La formulación de P.L. que resuelve este problema sería la siguiente:

$$\begin{gathered}
\text{MAX } Z = F \\
\text{sujeto a:} \\
X_{12} + X_{13} + X_{14} - F = 0 \\
X_{58} + X_{68} + X_{78} - F = 0 \\
X_{24} + X_{25} + X_{26} - X_{12} - X_{52} = 0 \\
X_{34} + X_{36} + X_{37} - X_{13} - X_{73} = 0 \\
X_{46} - X_{14} - X_{24} - X_{34} = 0 \\
X_{58} + X_{52} - X_{25} = 0 \\
X_{68} - X_{26} - X_{36} - X_{46} = 0 \\
X_{73} + X_{78} - X_{37} = 0
\end{gathered}$$

$$
\begin{array}{cc}
X_{12} \leq 8 & X_{37} \leq 7 \\
X_{13} \leq 5 & X_{46} \leq 5 \\
X_{14} \leq 6 & X_{52} \leq 6 \\
X_{24} \leq 5 & X_{58} \leq 10 \\
X_{25} \leq 6 & X_{68} \leq 8 \\
X_{26} \leq 4 & X_{73} \leq 7 \\
X_{34} \leq 3 & X_{78} \leq 6 \\
X_{36} \leq 6 & X_{ij} \geq 0 \\
 & F \geq 0
\end{array}
$$

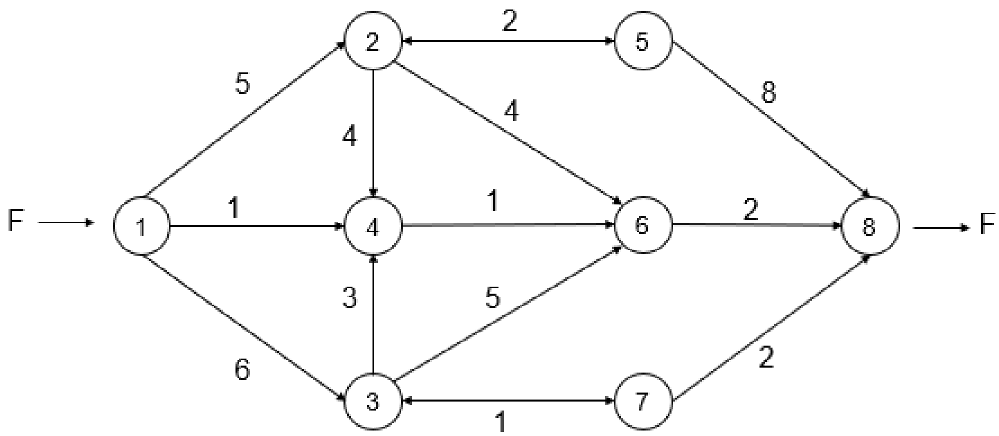
X_{ij}, F variables enteras

y su solución correspondiente:

$$
X_{12} = 8 \quad X_{13} = 5 \quad X_{14} = 5 \quad X_{25} = 6 \quad X_{26} = 2 \quad X_{36} = 1
$$
$$
X_{37} = 4 \quad X_{46} = 5 \quad X_{58} = 6 \quad X_{68} = 8 \quad X_{78} = 4
$$
$$
Z_{MAX} = 18
$$

Ejemplo 1.12 (Flujo máximo por una red a coste mínimo)

En relación con el ejemplo anterior, supongamos ahora que a cada vehículo que circule por la red se le asocia un determinado coste que depende del arco por el cual circula, ver siguiente figura.



El problema consiste ahora en determinar el número máximo de vehículos que puede circular por la red a un coste mínimo.

Formulación:

Teniendo en cuenta la formulación del ejemplo anterior, el modelo que resuelve nuestro problema teniendo en cuenta que el F_{Max} obtenido es igual a 18, es:

$$\text{MIN } Z = 5X_{12} + 6X_{13} + 1X_{14} + 4X_{24} + 2X_{25} +$$
$$4X_{26} + 3X_{34} + 5X_{36} + 1X_{37} + 1X_{46} + 2X_{52} + 8X_{58} + 2X_{68} + 1X_{73} + 2X_{78}$$

sujeto a:

$$\begin{gathered}
X_{12} + X_{13} + X_{14} = 18 \\
X_{58} + X_{68} + X_{78} = 18 \\
X_{24} + X_{25} + X_{26} - X_{12} - X_{52} = 0 \\
X_{34} + X_{36} + X_{37} - X_{13} - X_{73} = 0 \\
X_{46} - X_{14} - X_{24} - X_{34} = 0 \\
X_{58} + X_{52} - X_{25} = 0 \\
X_{68} - X_{26} - X_{36} - X_{46} = 0 \\
X_{73} + X_{78} - X_{37} = 0 \\
X_{ij} \text{ variables enteras}
\end{gathered}$$

$$\begin{array}{ll}
X_{12} \leq 8 & X_{37} \leq 7 \\
X_{13} \leq 5 & X_{46} \leq 5 \\
X_{14} \leq 6 & X_{52} \leq 6 \\
X_{24} \leq 5 & X_{58} \leq 10 \\
X_{25} \leq 6 & X_{68} \leq 8 \\
X_{26} \leq 4 & X_{73} \leq 7 \\
X_{34} \leq 3 & X_{78} \leq 6 \\
X_{36} \leq 6 & X_{ij} \geq 0
\end{array}$$

Resuelto el modelo obtenemos la solución:

$$\begin{array}{lllll}
X_{12} = 8 & X_{13} = 5 & X_{14} = 5 & X_{25} = 5 & X_{26} = 3 \\
X_{37} = 5 & X_{46} = 5 & X_{58} = 5 & X_{68} = 8 & X_{78} = 5
\end{array}$$
$$Z_{MIN} = 228$$

solución distinta a la obtenida en el problema del flujo máximo, dicha solución proporcionaba un coste de $Z = 235$.

1.3 Modelos de Programación Lineal

1.3.1 Formalización del modelo de Programación Lineal

El modelo general de Programación Lineal tiene la forma:

$$\begin{gathered}\text{OPT } Z = C_1X_1 + \cdots + C_jX_j + \cdots + C_nX_n \\ \text{sujeto a:} \\ a_{11}X_1 + \cdots + a_{1j}X_j + \cdots + a_{1n}X_n \leq \acute{o} \geq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mj}X_j + \cdots + a_{mn}X_n \leq \acute{o} \geq b_m \\ X_1, \ldots, X_n \geq 0\end{gathered}$$

En este modelo general:

- X_j = Variables de decisión.
- Z = Función objetivo.
- C_j = Coeficientes de la función objetivo.
- Las m primeras restricciones: restricciones técnicas.
- a_{ij} = Coeficientes técnicos.
- b_i = Términos independientes.
- $X_1, \ldots, X_n \geq 0$, condiciones de no negatividad.
- F = Región de factibilidad = Conjunto de valores de X_j que cumplen con todas y cada una de las restricciones del modelo.

Podemos expresar el modelo utilizando sumatorios:

$$\begin{gathered}\text{OPT } Z = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j \\ \text{sujeto a:} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij} \geq \acute{o} \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ X_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n\end{gathered}$$

o, en términos matriciales:

$$\begin{gathered}\text{OPT } Z = CX \\ \text{sujeto a:} \\ AX \geq o \leq b \\ X \geq 0\end{gathered}$$

donde C es un vector fila, $X \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

En estos términos, un modelo de Programación Lineal es un problema de optimización (maximización o minimización) de una función lineal sujeta a una serie de restricciones (de carácter lineal) de desigualdades y/o igualdades.

Dependiendo de la forma en la que vengan expresadas las restricciones del modelo podemos distinguir dos tipos de formulación de modelos de Programación Lineal:

- **Forma Canónica o simétrica.** En este caso, todas las restricciones del modelo son desigualdades. En problemas de maximización estas desigualdades serán de menor o igual ($\leq$) mientras que en problemas de minimización serán de mayor o igual ($\geq$). En términos matriciales la forma canónica o simétrica toma la forma:

$$\begin{array}{c} \text{MAX } Z = CX \\ \text{sujeto a:} \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{MIN } Z = CX \\ \text{sujeto a:} \\ AX \geq b \\ X \geq 0 \end{array}$$

  donde como en el modelo general, C es un vector fila, $X \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

- **Forma Estándar.** En esta forma todas las restricciones del modelo son igualdades, en términos matriciales:

$$\begin{array}{c} \text{OPT } Z = CX \\ \text{sujeto a:} \\ AX = b \\ X \geq 0 \text{ y } b \geq 0 \end{array}$$

En ocasiones puede ser necesario plantear un modelo de Programación Lineal en una determinada forma. A continuación se exponen una serie de propiedades sobre funciones, restricciones y variables que nos permitirán pasar de un tipo de formulación no lineal a otra lineal:

a) Con respecto a la función objetivo:

$$\text{MAX } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \quad \Leftrightarrow \quad \text{MIN } -Z = -\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$
$$\text{MIN } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \quad \Leftrightarrow \quad \text{MAX } -Z = -\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

b) En cuanto a las restricciones:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij} \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij} \geq -b_i$$

Esta propiedad se puede utilizar cuando en algún problema aparezca algún término independiente negativo.

Asimismo, una restricción de igualdad se puede transformar en dos de desigualdad mediante la propiedad:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij} = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij} \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij} \geq b_i \end{cases}$$

c) Con respecto a las variables:

- Cuando las variables X_j no están restringidas en signo se puede realizar un cambio de variable, tal que:

  $$X_j = X'_j - X''_j$$

  donde ahora $X'_j \geq 0$ y $X''_j \geq 0$.

  Ejemplo: En el siguiente modelo la variable B puede tomar cualquier valor positivo, negativo o cero.

  $$\begin{aligned} &\text{MIN } Z = 50A + 20B + 40C \\ &\quad \text{sujeto a:} \\ &2A + 1B + 3C \geq 600 \\ &1A + 4B + 2C \leq 1000 \\ &A, C \geq 0 \end{aligned}$$

  Si hacemos el cambio de variable $B = B' - B''$ obtenemos un modelo ya en su forma lineal:

  $$\begin{aligned} &\text{MIN } Z = 50A + 20B' - 20B'' + 40C \\ &\quad \text{sujeto a:} \\ &2A + 1B' - B'' + 3C \geq 600 \\ &1A + 4B' - 4B'' + 2C \leq 1000 \\ &A, C, B', B'' \geq 0 \end{aligned}$$

- En el caso de que exista alguna variable $X_j \leq 0$ se puede realizar un cambio de variable, tal que:
$$X_j = -X'_j$$
donde ahora $X'_j \geq 0$.

 Ejemplo: En el siguiente modelo la variable C debe tomar valores negativos o cero:

$$\begin{array}{l} \text{MIN } Z = 50A + 20B + 40C \\ \quad \text{sujeto a:} \\ 2A + 1B + 3C \geq 600 \\ 1A + 4B + 2C \leq 1000 \\ A, B \geq 0, C \leq 0 \end{array}$$

 Si hacemos el cambio de variable $C = -C'$ obtenemos un modelo ya en su forma lineal:

$$\begin{array}{l} \text{MIN } Z = 50A + 20B - 40C' \\ \quad \text{sujeto a:} \\ 2A + 1B - 3C' \geq 600 \\ 1A + 4B - 2C' \leq 1000 \\ A, B, C' \geq 0 \end{array}$$

Estos dos cambios de variables se utilizan para **linealizar** modelos inicialmente NO lineales.

1.3.2 Interpretación genérica de los coeficientes del modelo

A continuación daremos una interpretación de carácter muy general a los coeficientes que aparecen en el modelo:

C_j	Contribución unitaria al objetivo de la variable de decisión j-ésima.
b_i	Para restricción $\leq$: Recurso disponible o limitado. Para restricción $\geq$: Grado de exigencia u obligación.
a_{ij}	Para restricciones de menor o igual: Consumo del recurso i-ésimo por unidad de X_j. Para restricciones de mayor o igual: Contribución unitaria de la variable de decisión X_j al cumplimiento de la exigencia i-ésima.

Naturalmente, las interpretaciones indicadas son meramente orientativas. Cada programa concreto deberá ser estudiado específicamente para determinar el significado exacto de cada parámetro. Al respecto, cabe advertir la especial atención que debe prestarse cuando, como sucede en el ejemplo 1.2, se utiliza, para la resolución del programa, restricciones que no son directamente lineales, sino que provienen de una determinada transformación previa, cuestión que habrá que tener en cuenta a la hora de interpretar los resultados obtenidos.

1.3.3 Supuestos del modelo de Programación Lineal

Todo modelo de Programación Lineal supone la aceptación de unas determinadas hipótesis básicas:

1. **Linealidad:** Proporcionalidad. Si, como se ha indicado, la producción de una unidad de X_j exige el empleo de a_{ij} unidades del recurso i, la producción de X_j unidades precisará de $a_{ij}X_j$ unidades de recurso. Si C_j es el margen al producir una unidad del bien j, el margen obtenido con la producción de X_j unidades será C_jX_j. Estos supuestos, como los de consumo de recursos y márgenes constantes, implican excluir del modelo fenómenos de aprendizaje o economías de escala o, también la existencia de costes fijos asociados a la decisión.

2. **Aditividad:** Independencia. Las necesidades de recurso en cada actividad es independiente de la decisión tomada respecto del resto de actividades. Es decir, la producción de una unidad del bien j requiere a_{ij} unidades del recurso i sea cual sea el nivel de producción decidido para el bien j. Idéntico razonamiento puede seguirse para la función objetivo. El supuesto de independencia implica, a nivel de restricciones, excluir del planteamiento aspectos como la existencia de reciclados entre actividades. En cuanto a la función objetivo comporta la no inclusión de situaciones como la de bienes sustitutivos o complementarios que pueden provocar interrelaciones en la fijación de los márgenes asociados a cada producto.

3. **Divisibilidad:** Continuidad. La naturaleza de las variables se supone continua.

4. **Certeza:** Los modelos de Programación Lineal se suponen de naturaleza determinista.

1.3.4 Resolución del modelo: Aproximación intuitiva

Tomando como referencia un programa con dos únicas variables de decisión, puede fácilmente representarse gráficamente cada una de las restricciones del modelo, obteniéndose la *región de factibilidad* que estará formada por el conjunto de puntos que cumplen simultáneamente todas las restricciones del sistema. Formalmente y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que todas las restricciones son de menor o igual, la región de factibilidad es:

$$F = \{\, X \,/\, AX \leq b,\, X \geq 0\}$$

pudiéndose comprobar la convexidad del conjunto definido[1]. Recordemos, que un conjunto C se denomina *convexo* si dados dos puntos del mismo $Y_1, Y_2 \in C$, la combinación lineal convexa, es decir, el segmento:

$$\mu Y_1 + (1-\mu)Y_2, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

también pertenece al conjunto.

Los elementos de la región de factibilidad, F, constituirán las soluciones posibles del programa planteado. En la figura 1.2 podemos observar distintos conjuntos convexos.

Los **puntos extremos o vértices** del un conjunto convexo son los elementos del conjunto que no pueden expresarse como una combinación lineal convexa ($0 < \mu < 1$) de otros dos puntos del mismo. Geometricamente, podemos pensar que los vértices se corresponden con las "esquinas" de un conjunto convexo.

[1] Para una demostración rigurosa de este resultado ver Fernández (1989).

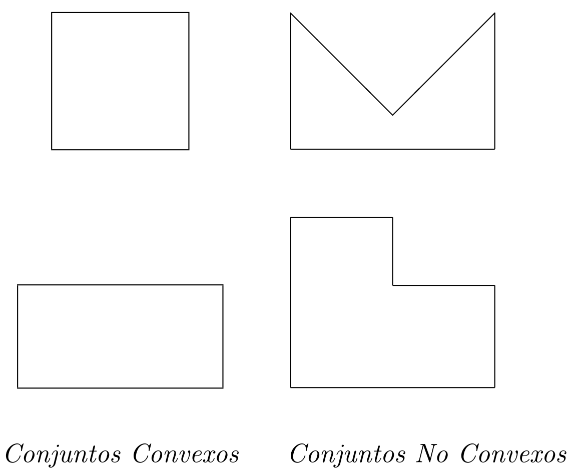


Figura 1.2: Conjuntos convexos y no convexos

Gráficamente, en un espacio de dimensión 2, la función objetivo se podrá representar como una familia de rectas paralelas cuya pendiente vendrá determinada por la proporcionalidad entre los coeficientes C_j de las variables de decisión y cuya situación en el plano dependerá del valor, Z, de dicha función. Así de existir una solución única y limitada del problema, la misma se situará en un **punto extremo o vértice** de la región factible, F.

En resumen, en los apartados que siguen partiremos de los siguientes resultados (que gráfica y analíticamente desarrollados pueden encontrarse en cualquier manual de la disciplina[2]):

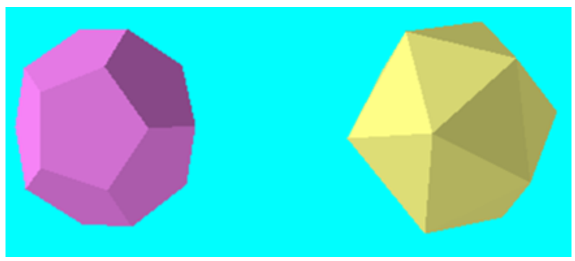
- **Teorema 1:** El conjunto de soluciones posibles de un modelo de Programación Lineal continuo es un conjunto convexo.
- **Teorema 2:** El óptimo corresponde, de existir, a un punto extremo o vértice de la región de factibilidad.
- **Teorema 3:** Si existen varios puntos extremos óptimos, cualquier combinación lineal convexa de ellos también es óptima.

[2]Ver Prawda (1995) o Gass (1975).

- **Corolario 1:** De existir solución limitada, ésta corresponderá a un único punto o tendremos infinitas soluciones.

También existe la posibilidad que no exista solución óptima (región de factibilidad vacía) o que el valor de la función objetivo no esté acotado (región de factibilidad no acotada o "abierta").

En resumen, el teorema 1 afirma que, generalmente, la región factible se puede representar mediante un poliedro convexo:



El número de puntos extremos de este tipo de figuras es **finito**. Aplicando el teorema 2 podemos afirmar que el número de posibles soluciones de un modelo de PL continuo es un número finito. Entonces, para resolver el modelo simplemente tenemos que evaluar la función objetivo en un número finito de puntos (en los vértices) y quedarnos con el mejor (es decir, el mayor valor de Z en el caso de máximo, o el menor en el caso de mínimo). El concepto de "vértice" es de naturaleza geométrica y resulta poco manejable y operativo, en R^3 aún seriamos capaces de resolver el problema (con dificultades) pero en dimensiones superiores "la cosa se complica". Por ello, en estos casos, necesitamos un concepto "algebráico" que se corresponda con el de punto extremo, este será el de "Solución básica y factible" que veremos en el capítulo 2.

1.4 Resolución gráfica de modelos lineales continuos

La resolución gráfica del modelo no es nada eficiente pero es un método que nos permite visualizar la estructura y las particularidades de un modelo de Programación Lineal Continuo.

1.4.1 Métodos línea isobeneficio y vértices

Vamos a analizar a partir de un ejemplo dos métodos: el **método de la línea isobeneficio y el método de los vértices**.

Ejemplo 1.13

Vamos a resolver gráficamente el siguiente modelo de Programación Lineal correspondiente al ejemplo 1.1, sin tener en cuenta la tercera restricción del modelo:

$$\begin{array}{cc}
\text{MAX } Z = 10X_1 + 4X_2 & \text{(margen de beneficios en u.m.)} \\
\text{sujeto a:} & \\
X_1 + 3X_2 \leq 600 & R_1 \text{ (horas de mano de obra)} \\
4X_1 + 2X_2 \leq 800 & R_2 \text{ (horas de maquinaria)} \\
X_1, X_2 \geq 0 &
\end{array}$$

En primer lugar vamos a representar gráficamente la región de factibilidad. Para ello, situamos los ejes correspondientes a cada variable (X_1, X_2) y nos centramos en el primer cuadrante debido a las condiciones de no negatividad de las variables.

A continuación representamos la primera restricción (R_1), en primer lugar dibujamos la recta que resultaría si en vez de una restricción de menor igual fuera una igualdad:

$$X_1 + 3X_2 = 600$$

Para representar gráficamente una recta necesitamos conocer dos puntos que pertenezcan a la recta. Si por ejemplo, hacemos $X_1 = 0$ tenemos que $3X_2 = 600$, y por tanto, $X_2 = 200$. Es decir el punto $(0, 200)$ pertenece a esta recta. Si procedemos de la misma manera haciendo $X_2 = 0$, obtenemos otro punto de esta recta: $(600, 0)$ y ya podremos dibujar la recta.

Como se trata de una desigualdad de $\leq$ los puntos que cumplen esta restricción son los del semiplano inferior. Esto lo podemos deducir tomando un punto de este semiplano, por ejemplo el $(0, 0)$, y comprobando si se cumple o no la desigualdad, en este caso sí se cumple. Ver figura 1.3.

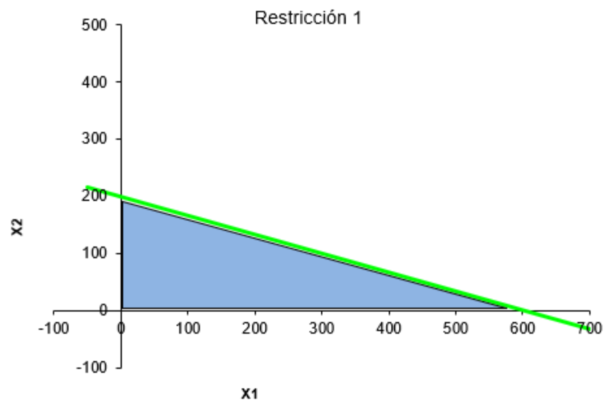


Figura 1.3: Representación gráfica R_1

Hacemos lo mismo para la segunda restricción y la representamos en la figura 1.4.

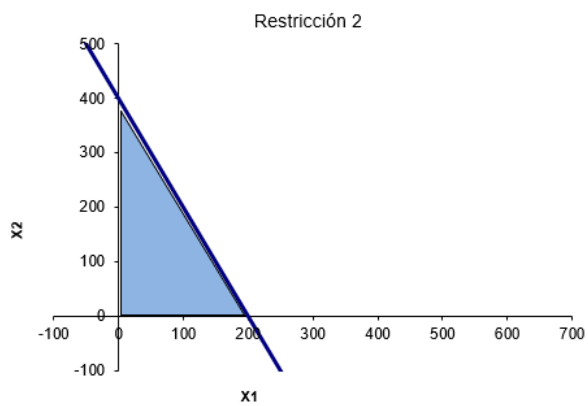


Figura 1.4: Representación gráfica R_2

La intersección de las dos áreas que hemos obtenido anteriormente representará todos los puntos que cumplen a la vez las dos restricciones del problema y las condiciones de no negatividad, es decir, la región de factibilidad o el conjunto de soluciones posibles, ver figura 1.5.

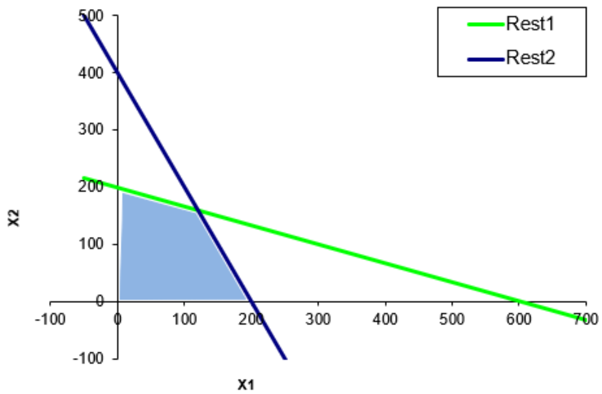


Figura 1.5: Región de factibilidad

Ahora necesitamos conocer el punto o los puntos de esta región que proporciona un valor mayor de la función objetivo Z. Para identificarlo utilizaremos el método de la **línea isobeneficio**. En caso de un modelo de minimización se denomina el método de la **línea isocoste**.

La búsqueda de la solución óptima utilizando este método supone realizar un estudio de la familia de rectas $Z = k$. Se toma inicialmente un valor de Z arbitrario, por ejemplo, $Z = 0$ y se dibuja la recta $10X_1 + 4X_2 = 0$. Posteriormente, dibujamos la línea isobeneficio para otro valor, por ejemplo, $Z = 400$: $10X_1 + 4X_2 = 400$. Esta segunda línea es paralela a la inicial pero desplazada hacia la "derecha" ya que son rectas con la misma pendiente. En el gráfico se muestran las rectas $Z = 0, Z = 400$ y $Z = 2000$.

A medida que la recta $Z = k$ se desplaza en la dirección de la flecha el valor de Z aumenta. El desplazamiento se puede llevar a cabo hasta el punto "D", a partir de ese punto ya no existen puntos de intersección entre las rectas $Z = k$ y la región factible.

Por lo tanto, el punto óptimo se obtiene en el vértice "D" intersección de la restricción $4X_1 + 2X_2 = 800$ y el eje $Y = 0$, de coordenadas $(200, 0)$ que nos proporciona un valor máximo de $Z = 10 \cdot 200 + 4 \cdot 0 = 2000$. Este valor máximo de la función objetivo lo proporciona la restricción de maquinaria, ésta impide seguir aumentando el valor de Z como se puede observar en la figura 1.6. A este tipo de restricciones se les denomina *activas o potentes*. Por el contrario la restricción de mano de obra permitiría aumentar el valor de Z, en este caso hablaremos de restricción *NO activa*.

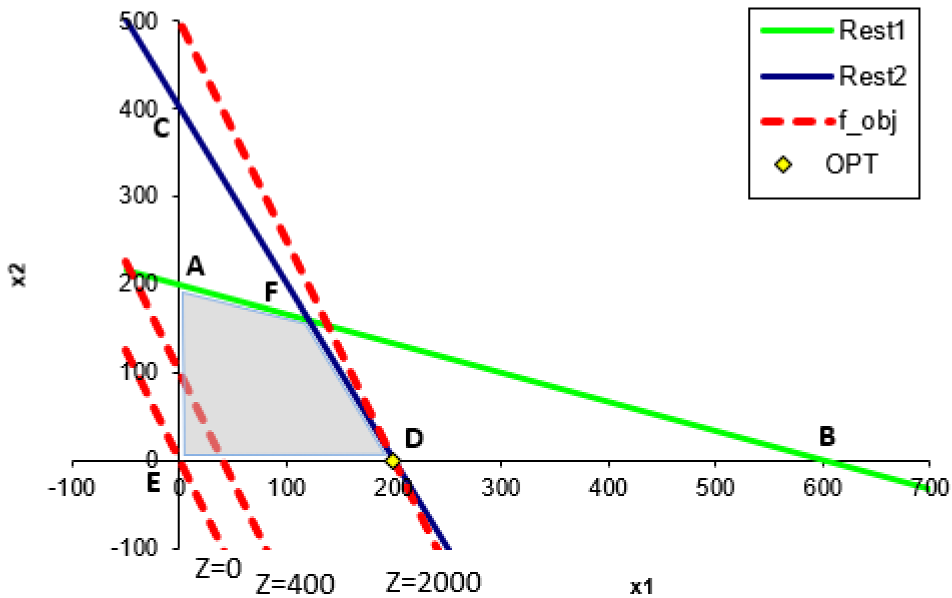


Figura 1.6: Resolución gráfica del modelo

Si el modelo fuese de minimización (no tendría sentido en este caso) el punto óptimo hubiese estado en el vértice "E", que significaría no hacer nada.

En el caso de que la pendiente de la función objetivo hubiese sido la misma que la pendiente de R_2 (por ejemplo $Z = 8X_1 + 4X_2$) el óptimo hubiese sido *múltiple*, es decir, existen infinitas soluciones óptimas formadas por los puntos del segmento que une los puntos extremos "D" y "F".

El **método de los vértices** se basa en el resultado teórico enunciado anteriormente que asegura que el óptimo de un modelo de Programación Lineal continuo se alcanza en uno de los vértices o puntos extremos de la región factible.

Por tanto, el método de los vértices consiste en identificar y evaluar todos los vértices de la región factible y quedarnos con el "mejor" (el "mayor" valor de Z en el caso de maximización o el "menor" en el caso de minimización).

Si aplicamos este método a nuestro ejemplo. Los vértices de la región factible son los puntos: $E = (0, 0), A = (0, 200), D = (200, 0)$ y $F = (120, 160)$; y en la siguiente tabla evaluamos la función objetivo Z en cada uno de estos puntos:

Vértice	(X_1, X_2)	Z
E	(0,0)	0
A	(0,200)	800
D	(200,0)	2000
F	(120,160)	1840

Como vemos, el mayor de valor de Z es $Z = 2000$, por tanto, la solución óptima se alcanza en el vértice $D = (200, 0)$.

1.4.2 Tipos de soluciones

En este ejemplo, el óptimo se encuentra en un único vértice de la región factible (situación normal). Pero como ya sabemos existen otros tipos de soluciones u otras situaciones "especiales" que podemos encontrar a la hora de buscar la solución óptima de un modelo de Programación Lineal. En la figura 1.7 podemos ver ejemplos de estos otros tipos de solución.

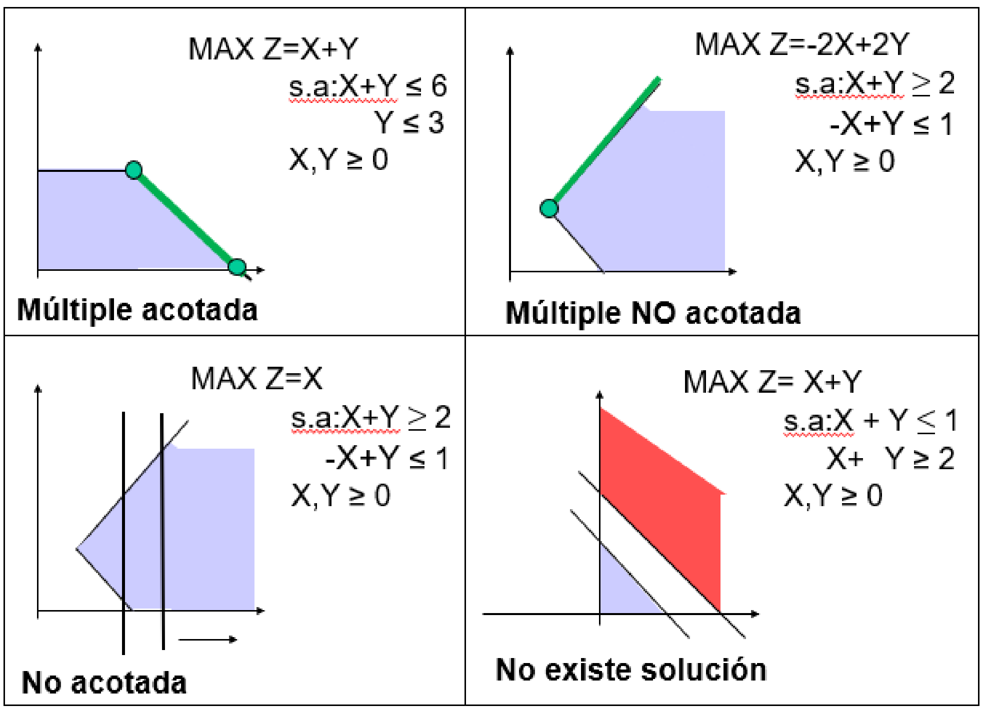


Figura 1.7 Ejemplos tipos de solución de un modelo de PL

Se deja como ejercicio para el lector aplicar el método de resolución gráfico para resolver dichos modelos.

Un esquema resumen de todos los tipos de soluciones que existen lo podemos ver en la figura 1.8.

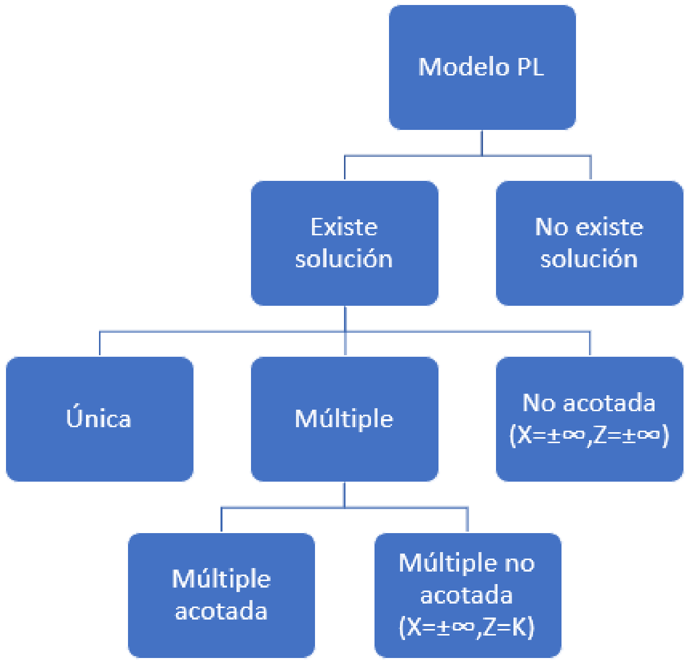


Figura 1.8 Tipos de solución de un modelo de PL

Módulo 2

El algoritmo símplex

2.1 Estudio analítico de la región de factibilidad

2.1.1 Variables de Holgura y Excedentes

Como primer paso, vamos a transformar el sistema de restricciones en un sistema de ecuaciones, con cuyo tratamiento estamos mucho más familiarizados.

Sea el sistema de restricciones que define el conjunto de soluciones posibles:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq b_i \qquad && i = 1, \ldots, m_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \geq b_i \qquad && i = m_1 + 1, \ldots, m_2 \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i \qquad && i = m_2 + 1, \ldots, m \\
&\quad X_j \geq 0
\end{aligned}$$

prescindiendo de las condiciones de no negatividad, la conversión en un *Sistema de Ecuaciones* puede fácilmente lograrse incluyendo en los dos primeros tipos de restricciones variables no negativas que equilibren ambos lados de la desigualdad. Así:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + H_i = b_i \qquad && i = 1, \ldots, m_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j - E_i = b_i \qquad && i = m_1 + 1, \ldots, m_2
\end{aligned}$$

Las variables incorporadas en las restricciones de menor o igual se conocen con el nombre de variables de *holgura* y las utilizadas en restricciones de mayor o igual se denominan de *holgura negativa o excedentes*.

Al añadir estas variables de holgura obtenemos la **forma estándar** de un modelo de Programación Lineal. Recordamos que en esta forma todas las restricciones del modelo son igualdades, $X \geq 0$ y $b \geq 0$, en términos matriciales:

$$\begin{gathered} \text{OPT } Z = CX \\ \text{sujeto a:} \\ AX = b \\ X \geq 0 \text{ y } b \geq 0 \end{gathered}$$

Nótese, en primer lugar, que con las nuevas variables introducidas, no se ha modificado el conjunto de soluciones posibles original. Igualmente, debe destacarse que estas variables tienen un significado propio. Así, para el ejemplo 1.1, tenemos:

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_2 + H_1 &= 600 \\ 4X_1 + 2X_2 + H_2 &= 800 \\ X_2 - E_3 &= 150 \end{aligned}$$

donde el valor que presentan las variables H_1 y H_2, por ejemplo, indicarán las cantidades de recursos (mano de obra y maquinaria) no utilizados y la variable E_3 mostrará la cuantía en que se supera la producción mínima exigida.

Se observa que estas variables toman por definición valores no negativos ya que, una variable de holgura sólo puede tomar los siguientes valores: si $H_1 = 0$ entonces el recurso esta agotado y si $H_1 > 0$ entonces el recurso es sobrante. En cuanto a la variable excedente, si $E_3 = 0$ entonces el modelo proporciona la cantidad mínima exigida y si $E_3 > 0$ el modelo proporciona una cantidad excedente sobre la mínima exigida.

Queda por resolver una cuestión. Si hemos introducido un conjunto de variables en las restricciones del problema, será preciso determinar sus coeficientes en la función objetivo.

Recordemos, al respecto, que la inclusión de tales variables no supone en modo alguno una variación del conjunto de soluciones posibles. Para lograr que la función objetivo no se vea afectada tampoco por esta modificación los coeficientes asociados a tales variables son nulos.

2.1.2 Solución básica y factible

Una vez transformado el conjunto de restricciones en un sistema de ecuaciones (al margen de las condiciones de no negatividad), podemos aplicar los conocimientos matemáticos que tenemos para su resolución.

Así, por una parte, sabemos que dado el sistema:

$$AX = b$$

para que sea compatible (tenga solución) es preciso que:

$$rango(A) = rango(A, b)$$

siendo la solución única cuando el rango de A coincide con el número de variables y existen infinitas soluciones si el rango es inferior a dicho número.

Así, en nuestro ejemplo, podemos comprobar que el $rango(A) = 3$ que coincide con el número de ecuaciones. En cambio el número de variables es igual a 5, por tanto tendremos un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones.

Esta será la situación habitual en Programación Lineal ya que la introducción de variables de holgura provocará que el número de incógnitas sea superior al de restricciones.

En general, siendo N el número de incógnitas del modelo y M el número de restricciones (rango de A) con $M \leq N$, según hemos indicado, podemos representar la solución general del sistema expresando M incógnitas en función del resto.

Analíticamente, este proceso consiste en seleccionar un vector de variables, X^M, de M componentes en el sistema de ecuaciones:

$$MX^M + RX^R = b$$

y expresar su valor en términos del resto de variables, que hemos representado a través del vector X^R de $N - M$ componentes:

$$X^M = M^{-1}b - M^{-1}RX^R$$

Se obtendrán, de este modo, distintas *soluciones particulares*, a partir de otorgar valores arbitrarios a las variables $X_j \in X^R$.

Una solución particular se denominará *básica* cuando el valor dado al resto de variables X^R sea nulo. Cuando hablemos de soluciones básicas, llamaremos a $X^M = X^B$ variables *básicas* que tomarán valor distinto de cero y llamaremos a $X^R = X^S$ variables *secundarias o no básicas* que tomarán valor igual a cero.

Con este cambio de notación, el proceso descrito puede indicarse como:

$$X^B = B^{-1}b - B^{-1}SX^S$$

por lo tanto el valor concreto que toman las variables básicas será:

$$X^B = B^{-1}b$$

El interés de este desarrollo radica en que las soluciones básicas del sistema de ecuaciones correspondiente al conjunto de restricciones técnicas del modelo de Programación Lineal corresponden a los puntos extremos o vértices del conjunto de soluciones posibles, cuando las variables básicas tomen valores no negativos [1]. A este tipo de soluciones las denominaremos soluciones básicas *factibles o posibles.*

En resumen, hemos deducido los siguientes resultados:

1. La solución óptima de un programa lineal (de ser única) se sitúa en un punto extremo del conjunto de soluciones posibles.

2. Las soluciones básicas factibles del sistema de ecuaciones formado a partir de las restricciones del modelo corresponden a puntos extremos del conjunto de factibilidad.

3. Por lo tanto, para obtener el valor óptimo de la función objetivo bastará con analizar el valor de dicha función para tales soluciones básicas factibles y seleccionar la que otorgue un valor óptimo a Z.

Además, tenemos que el número de soluciones básicas factibles es limitado, así, prescindiendo de las condiciones de no negatividad, sabemos que las soluciones básicas se obtienen de elegir arbitrariamente M variables del conjunto de N incógnitas del sistema, por tanto el número máximo de soluciones básicas se corresponde con el número combinatorio N sobre M. En nuestro ejemplo el número máximo de soluciones básicas será $\binom{5}{3} = 10$. Decimos máximo pues pueden existir combinaciones de variables que no puedan ser expresadas en función del resto. Debemos recordar que es necesario que el valor de tales variables sea no negativo para que pueda considerarse una solución factible.

[1] Para una demostración de este importante resultado ver Prawda (1995) o Gass (1975).

Como quiera que podemos entender por algoritmo un conjunto de reglas definidas y estructuradas de cálculo para la resolución de un problema en un número finito de etapas, el análisis de soluciones básicas factibles constituye, sin más, un algoritmo de resolución de modelos de Programación Lineal.

EJEMPLO 2.1

A partir del modelo expuesto en el ejemplo 1.1 vamos a aplicar el análisis de las soluciones básicas que acabamos de estudiar.

Sabemos que buscar soluciones a un modelo de Programación Lineal para más de dos variables supone el estudio analítico del conjunto de soluciones posibles. Este estudio analítico supone la conversión del conjunto de restricciones técnicas en un sistema de ecuaciones, esto supone introducir en el modelo una serie de variables que compensen las desigualdades anteriores, en nuestro ejemplo:

- Restricción de Mano de Obra:

  $$X_1 + 3X_2 \leq 600 \Rightarrow X_1 + 3X_2 + H_1 = 600 \Rightarrow H_1 = 600 - (X_1 + 3X_2)$$

  Donde H_1, llamada variable de holgura, es la diferencia entre el total disponible y el total utilizado de horas de mano de obra, es decir, representa el total de horas ociosas de mano de obra.

  El sistema de restricciones originales no se modifica siempre y cuando $H_1 \geq 0$.

  Si $H_1 = 0$ entonces tendremos una ocupación total de las horas de mano de obra.

  Si $H_1 > 0$ tendremos horas sobrantes. Nótese que H_1 tiene un valor máximo de 600 horas que supone no fabricar nada, ya que X_1 y X_2 tienen un valor mínimo de 0, condición general de no negatividad.

  Es imposible que $H_1 < 0$, ya que implicaría que la mano de obra ocupada es mayor que la disponible.

- Restricción de Maquinaria:

  $$4X_1 + 2X_2 \leq 800 \Rightarrow 4X_1 + 2X_2 + H_2 = 800 \Rightarrow H_2 = 800 - (4X_1 + 2X_2)$$

  Donde H_2 es la variable de holgura de la restricción, y representa el total de horas ociosas de maquinaria a partir del plan de producción óptimo.

El modelo de Programación Lineal, con la incorporación de las variables de holgura quedará:

$$\begin{array}{c} \text{MAX } Z = 10X_1 + 4X_2 + 0H_1 + 0H_2 \\ \text{sujeto a:} \\ X_1 + 3X_2 + H_1 \qquad = 600 \\ 4X_1 + 2X_2 \qquad + H_2 = 800 \\ X_1, X_2, H_1, H_2 \geq 0 \end{array}$$

Vamos a estudiar el sistema de restricciones, sabemos que para que el sistema sea compatible, es preciso que $r(A) = r(A, b)$, lo que sucede siempre que A sea de rango completo (situación que supondremos se produce). En nuestro ejemplo:

$$\begin{array}{c} X_1 + 3X_2 + H_1 \qquad = 600 \\ 4X_1 + 2X_2 \qquad + H_2 = 800 \end{array}$$

Se puede escribir en términos matriciales de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \end{pmatrix}$$

En este caso $r(A) = r(A, b) = 2$. Además si $r(A) < N$ (número de incógnitas), entonces el $n^{\underline{o}}$ de incógnitas es mayor que el $n^{\underline{o}}$ de ecuaciones, por lo que el modelo tiene infinitas soluciones. En nuestro ejemplo $r(A) = 2 = M$ ($n^{\underline{o}}$ de filas = $n^{\underline{o}}$ de restricciones técnicas) $N = 4$ ($n^{\underline{o}}$ de columnas = $n^{\underline{o}}$ de incógnitas) por lo tanto el modelo propuesto tiene infinitas soluciones. Así por ejemplo algunas soluciones particulares del modelo serían:

- Si $X_1 = X_2 = 0$, entonces $H_1 = 600$ y $H_2 = 800$.
- Si $X_1 = X_2 = 1$, entonces $H_1 = 596$ y $H_2 = 794$.
- Si $X_1 = 300$ y $X_2 = 100$, entonces $H_1 = 0$ y $H_2 = -600$.

Este último caso, es también una solución analítica del sistema pero no es factible, no se satisface la segunda restricción, por tanto no pertenece a la región de factibilidad del modelo ya que $H_2 < 0$.

Esta situación de $r(A) = r(A, b) < N$ será la habitual en los problemas de optimización, ya que en el caso de $r(A) = N$, la solución sería única y carecería de sentido plantearse una función objetivo a optimizar. Por lo tanto la expresión general de las soluciones del sistema pasará por tomar M variables del modelo (tantas como $n^{\underline{o}}$ de filas o restricciones) y expresarlas (despejarlas) en función del resto.

En nuestro caso si tomamos H_1 y H_2 como variables a despejar tenemos:

$$H_1 = 600 - X_1 - 3X_2$$
$$H_2 = 800 - 4X_1 - 2X_2$$

Así, dando valores a X_1 y X_2 obtendremos distintas soluciones particulares del sistema. Por ejemplo:

- Si $X_1 = X_2 = 0$, entonces $H_1 = 600$ y $H_2 = 800$.
- Si $X_1 = X_2 = 1$, entonces $H_1 = 596$ y $H_2 = 794$.
- Si $X_1 = 300$ y $X_2 = 100$, entonces $H_1 = 0$ y $H_2 = -600$.

Como podemos observar existen infinitas soluciones particulares de este modelo y se trataría de buscar la solución óptima (que correspondería a uno de los puntos extremos del conjunto de factibilidad). Analíticamente esto supone buscar las soluciones *básicas* del modelo.

Obtenemos soluciones básicas cuando otorgamos arbitrariamente valor cero a las variables no despejadas del sistema de ecuaciones. En este caso si:

$$X_1 = X_2 = 0, \text{ entonces } H_1 = 600 \text{ y } H_2 = 800 \quad \text{(Pto. E)}$$

sería una solución básica que si no presenta valores negativos en ninguna variable, calificaremos de solución básica factible.

Obviamente, podríamos haber seleccionado otro par de variables como básicas. Concretamente teniendo 2 ecuaciones y 4 incógnitas, el número hipotéticamente correcto de soluciones básicas serían:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Así, si por ejemplo, despejamos X_1 y H_1 obtenemos:

$$H_1 = 400 - \tfrac{5}{2}X_2 + \tfrac{1}{4}H_2$$
$$X_1 = 200 - \tfrac{1}{2}X_2 - \tfrac{1}{4}H_2$$

y damos valor cero a X_2 y H_2 obtenemos otra solución básica del sistema:

$$\text{Si } X_2 = H_2 = 0, \text{ entonces } H_1 = 400 \text{ y } X_1 = 200 \quad \text{(Pto. D).}$$

De esta forma podemos seguir despejando pares de variables del sistema hasta obtener las 6 soluciones básicas del modelo. La solución óptima será aquella solución básica y factible que maximice el valor de Z.

Los cálculos realizados para obtener las soluciones básicas pueden ser expresados en forma matricial del siguiente modo:

$$AX = b \quad \Rightarrow \quad [B \quad S] \begin{bmatrix} X^B \\ X^S \end{bmatrix} = b$$

$$BX^B + SX^S = b$$

despejando el vector de variables básicas, multiplicando el sistema de restricciones original por la matriz B^{-1} obtenemos:

$$X^B + B^{-1}SX^S = B^{-1}b \quad \Rightarrow \quad [I \quad B^{-1}S] \begin{bmatrix} X^B \\ X^S \end{bmatrix} = B^{-1}b$$

$$X^B = B^{-1}b - B^{-1}SX^S, \quad \text{que para} \quad X^S = 0 \quad \Rightarrow \quad X^B = B^{-1}b$$

De esta forma para la segunda solución básica estudiada si:

$$X^B = \begin{pmatrix} H_1 \\ X_1 \end{pmatrix} \quad X^S = \begin{pmatrix} X_2 \\ H_2 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \end{pmatrix}$$

En este caso la matriz inversa de B toma la forma:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

por lo tanto:

$$B^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix}$$

De este modo:

$$X^B = \begin{pmatrix} H_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}SX^S = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ H_2 \end{pmatrix}$$

Evidentemente, los cálculos se simplifican al elegir como vector básico a las variables de holgura ya que entonces la matriz B coincide con la matriz identidad:

$$X^B = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \quad X^S = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^B = B^{-1}b - B^{-1}SX^S \quad \Rightarrow \quad X^B = b - SX^S$$

se observa que para $X^S = 0$ entonces $X^B = b$.

Expresiones que corresponden al modelo original, esto es, el valor de las variables básicas corresponde a los términos independientes del modelo sin ninguna transformación:

$$\begin{aligned} H_1 &= 600 - X_1 - 3X_2 \\ H_2 &= 800 - 4X_1 - 2X_2 \end{aligned}$$

Como hemos visto hasta ahora el punto $H_1 = 600$ y $H_2 = 800$, corresponde gráficamente con el punto $X_1 = X_2 = 0$, es decir el punto extremo E del gráfico. Igualmente la solución $X_2 = 0$ y $X_1 = 200$, corresponde al punto extremo D del conjunto de soluciones posibles.

Veamos que sucede con el resto de formas de seleccionar el vector básico:

X_1	X_2	H_1	H_2	Z	Punto Extremo
0	0	600	800	0	E Factible
0	200	0	400	800	A Factible
0	400	-600	0	-	C No factible
600	0	0	-1600	-	B No factible
200	0	400	0	2000	D Factible y óptimo
120	160	0	0	1840	F Factible

Existen cuatro soluciones básicas factibles correspondientes a los cuatro puntos extremos del conjunto de soluciones posibles.

El valor máximo de Z es 2000 que corresponde con la solución básica y factible:

$$X_1 = 200 \qquad H_1 = 400 \qquad X_2 = 0 \qquad H_2 = 0$$

representada por el punto D en la solución gráfica obtenida en el apartado anterior.

La interpretación de esta solución óptima con respecto a las restricciones es: en cuanto a la restricción de mano de obra tenemos que $X_1 + 3X_2 < 600$ ya que $H_1 = 400$, es decir sobran 400 h. de mano de obra (*recurso ocioso*) diremos en este caso que la restricción de mano de obra **NO** es una restricción *activa o potente* del modelo, ya que no nos limita el valor de la función objetivo.

Por el contrario, en la restricción de la maquinaria tenemos que $4X_1 + 2X_2 = 800$ ya que $H_2 = 0$ (*recurso escaso*). Fabricar 400 unidades de X_2 agotan las horas de maquinaria disponibles. En este caso, diremos que la restricción de maquinaria es una restricción *activa o potente* del modelo.

Como conclusión podemos ver que basta estudiar el conjunto de soluciones básicas factibles, de las que como máximo habrán $\binom{N}{M}$ para encontrar la solución óptima de un modelo de Programación Lineal.

Ejercicios

2.1 Como práctica obtener la solución óptima al modelo originalmente planteado en el ejemplo 1.1 gráfica y analíticamente siguiendo los pasos que a continuación se describen:

$$\begin{array}{cc}
\text{MAX } Z = 10X_1 + 4X_2 & \text{(margen de beneficios en u.m.)} \\
\text{sujeto a:} & \\
X_1 + 3X_2 \leq 600 & \text{(horas de mano de obra)} \\
4X_1 + 2X_2 \leq 800 & \text{(horas de maquinaria)} \\
X_2 \geq 150 & \text{(unidades de demanda)} \\
X_1, X_2 \geq 0 &
\end{array}$$

1. Representación gráfica.

2. Transformación en un sistema de ecuaciones:

   La incorporación de la tercera restricción supone introducir una variable, E_3, con signo negativo, para compensar la desigualdad. Donde E_3, llamada variable excedente, determina el exceso fabricado sobre el pedido pendiente. Si $E_3 = 0$ implica la fabricación mínima de X_2. Si $E_3 > 0$ la restricción no es activa, es decir, el plan óptimo de producción sería el mismo sin tener en cuenta la exigencia de una cantidad mínima a producir del producto X_2.

$$
\begin{array}{c}
\text{MAX } Z = 10X_1 + 4X_2 + 0H_1 + 0H_2 + 0E_3 \\
\text{sujeto a:} \\
\begin{aligned}
X_1 + 3X_2 + H_1 \qquad\qquad &= 600 \\
4X_1 + 2X_2 \qquad + H_2 \qquad &= 800 \\
X_2 \qquad\qquad\qquad - E_3 &= 150
\end{aligned} \\
X_1, X_2, H_1, H_2, E_3 \geq 0
\end{array}
$$

3. Búsqueda de las soluciones básicas y factibles:

   En este caso tenemos, 3 ecuaciones y 5 incógnitas, por lo tanto 10 posibles soluciones básicas:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	Z	Punto Extremo
0	0	600	800	-150	-	No factible
0	200	0	400	50	800	Factible
0	400	-600	0	250	-	No factible
0	150	150	500	0	600	Factible
600	0	0	-1600	-150	-	No factible
200	0	400	0	-150	-	No factible
-	0	-	-	0	-	Imposible
120	160	0	0	10	1840	Factible
150	150	0	-100	0	-	No factible
125	150	25	0	0	1850	Factible y óptimo

2.2 A partir del ejemplo 1.3, buscar la solución óptima del modelo y comprobar que el vector básico óptimo está formado por las variables A, H_1 y H_2 y que la única restricción activa es la tercera.

2.2 El Algoritmo símplex por tablas

En este capítulo nos proponemos describir un algoritmo que permita mejorar el valor de la función objetivo mediante el estudio de soluciones básicas factibles. En este sentido, el algoritmo símplex[2] puede entenderse como un medio secuencial de estudio de la función objetivo para distintas soluciones básicas factibles de modo que en cada iteración se mejore el valor de dicha función. Esto es, el estudio del valor de Z para diferentes composiciones de X^B.

Como sistema estructurado de reglas, la definición del algoritmo requerirá de:

- Criterio de inicio: determinación de la primera solución básica factible.
- Criterio de optimalidad: identificación de la solución óptima.
- Criterio iterativo: fijación de las reglas de cambio de la solución básica actual.

2.2.1 Determinación de la primera solución básica y factible

Como hemos visto, la obtención de una solución básica exige una transformación del tipo:

$$\begin{aligned} X^B + B^{-1}SX^S &= B^{-1}b \\ \begin{bmatrix} I & B^{-1}S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^B \\ X^S \end{bmatrix} &= B^{-1}b \end{aligned}$$

En consecuencia, un medio inmediato de obtener una primera solución básica consistirá en conseguir directamente una matriz identidad en el sistema de restricciones inicial y seleccionar como básicas las variables asociadas a dicha matriz. Estamos suponiendo, para ello, que todos los términos independientes son no negativos. De existir algún elemento que incumpla este supuesto en el planteamiento original, deberemos transformar las restricciones correspondientes, hasta alcanzar la mencionada no negatividad.

En relación a la obtención de una matriz identidad en el planteamiento inicial, hemos visto que la adición de variables de holgura en restricciones de menor o igual comporta la transformación del sistema original:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq b_i$$

[2]El método Simplex fue desarrollado por el Dr. George Dantzig a finales de la década de los 40. Existen multitud de referencias donde aparecen con detalle las reglas del algoritmo Simplex: Prawda (1995), Bazaraa (1998).

en un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + H_i = b_i$$

matricialmente:

$$[A \quad I] \left[\begin{array}{c} X \\ H \end{array} \right] = b$$

con lo que, en este caso, el problema queda resuelto y las variables básicas en la primera solución serán las de holgura que son las que tienen asociadas la matriz identidad en el planteamiento inicial. Por tanto la primera solución básica y factible de un modelo de Programación Lineal con todas las restricciones de menor o igual es:

$$X^B = H = b$$

Insistimos en que la condición de no negatividad exige, para que esta solución sea factible, que los términos independientes de las restricciones sean no negativos.

En el caso de restricciones de mayor o igual:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \geq b_i$$

nos encontramos con que la adición de variables excedentes **NO** conduce directamente a la obtención de la matriz identidad buscada:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j - E_i = b_i$$

Igual sucede con las restricciones de igualdad en las que no se precisa de variables de holgura para convertir al conjunto de restricciones en un sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i$$

En ambos casos, en la medida que sea necesario para obtener la mencionada matriz identidad, se añadirán unas nuevas variables al modelo. Variables a las que denominaremos *artificiales,* por cuanto su incorporación al modelo modifica el planteamiento inicial y por tanto el conjunto de factibilidad. Las expresiones resultantes son:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j - E_i + A_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + A_i = b_i$$

Así pues, el recurso de las variables artificiales será necesario, únicamente, cuando en el planteamiento aparezcan restricciones de "=" ó de "$\geq$".

Estas variables artificiales resultan analíticamente idénticas a las obtenidas anteriormente para restricciones de menor o igual, con lo que la primera solución básica estará formada por todas las variables artificiales y de holgura que aparezcan en el modelo.

Se denomina **forma ampliada** a la forma que obtenemos después de añadir las variables artificiales. Las formas estándar y ampliada pueden coincidir cuando no utilicemos variables artificiales, cosa que acostumbra a suceder cuando todas las restricciones son de menor o igual.

Como se ha mencionado, la utilización de variables artificiales incorpora nuevos elementos al modelo original que modifican el conjunto de soluciones posibles, salvo que las nuevas variables artificiales introducidas tomen valor nulo.

Para asegurarnos que desaparecen de la solución óptima, a lo largo del proceso iterativo, las variables artificiales son introducidas en la función objetivo con coeficientes "M" suficientemente elevados y de signo inverso al de la optimización: **negativo en caso de máximo y positivo en caso de mínimo**.

$$\text{MAX } Z = \cdots - MA_i \cdots \qquad \text{MIN } = \cdots + MA_i \cdots$$

A este método se le denomina *Método de las penalizaciones o de la M grande*, Fernández (1989) o Gass (1975).

Por tanto, de existir solución óptima, esta no será nunca compatible con dar a las variables artificiales valores distintos de cero. En el caso de que esto ocurriera significaría que el modelo original no tiene solución o lo que es lo mismo que el conjunto de factibilidad es vacío para el planteamiento original[3].

En resumen, la primera solución básica consistirá en las variables asociadas a la matriz identidad del planteamiento original y estará compuesta por las variables de holgura y, en su caso, variables artificiales.

Debe quedar claro, para finalizar, que la utilización de variables artificiales no es más que uno de los posibles métodos para la consecución de una primera solución básica factible.

[3]Para una demostración detallada de este resultado ver Prawda (1995).

EJEMPLO 2.2

En el modelo lineal anterior:

$$\begin{array}{c} \text{MAX } Z = 10X_1 + 4X_2 \\ \text{sujeto a:} \\ X_1 + 3X_2 \leq 600 \\ 4X_1 + 2X_2 \leq 800 \\ X_2 \geq 150 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{array}$$

Una vez añadidas las variables de holgura y excedentes, no se consigue todavía la aparición de la matriz identidad, ya que falta el vector $e_3 = (0,0,1)$, ello se soluciona añadiendo una variable artificial A_3 en la tercera ecuación, obteniendo la forma ampliada:

$$\begin{array}{l} \text{MAX } Z = 10X_1 + 4X_2 + 0H_1 + 0H_2 + 0E_3 - MA_3 \\ \qquad\qquad \text{sujeto a:} \\ X_1 + 3X_2 + H_1 = 600 \\ 4X_1 + 2X_2 + H_2 = 800 \\ X_2 - E_3 + A_3 = 150 \\ X_1, X_2, H_1, H_2, E_3, A_3 \geq 0 \end{array}$$

Eligiendo como primera solución básica la formada por aquellas variables que tienen asociada la matriz identidad en el modelo original obtenemos:

$$H_1 = 600 \quad H_2 = 800 \quad A_3 = 150$$

2.2.2 Determinación del criterio de optimalidad

Obtenida la primera solución básica, el problema puede expresarse:

$$\text{OPT } Z = CX = \sum_{i \in X^B} C_i^B X_i^B + \sum_{j \in X^S} C_j X_j$$

sujeto a[4]:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + X_i^B = b_i \quad i = 1, \ldots, m$$

[4]La notación $i \in X^B$ indica que el índice i corresponde a variables básicas. De manera análoga, $j \in X^S$ hace referencia a las variables secundarias.

donde el subíndice i identifica las diferentes variables básicas en el sistema de ecuaciones y el subíndice j corresponde a las variables secundarias en esta primera solución. Del sistema de restricciones tenemos que:

$$X_i^B = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \quad i = 1, \ldots, m$$

de donde, sustituyendo en la función objetivo, queda:

$$Z = \sum_{i \in X^B} C_i^B \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \right) + \sum_{j \in X^S} C_j X_j = \sum_{i \in X^B} C_i^B b_i - \sum_{j \in X^S} \left(\sum_i C_i^B a_{ij} - C_j \right) X_j$$

y, denominando:

$$Z_0 = \sum_{i \in X^B} C_i^B b_i \qquad Z_j = \sum_{i \in X^B} C_i^B a_{ij}$$

la expresión anterior queda:

$$Z = Z_0 - \sum_{j \in X^S} (Z_j - C_j) X_j$$

En consecuencia, el factor $Z_j - C_j$ indica la variación que se producirá en el valor de la función objetivo si la variable X_j tomase un valor unitario.

A partir de esta expresión podemos deducir el criterio de optimización, habremos llegado al óptimo cuando, para un modelo de máximo, todos los $Z_j - C_j$ sean no negativos (no positivos en caso de minimización) ya que en este caso resulta imposible mejorar el valor de la función objetivo Z.

Criterio de optimalidad del Algoritmo Símplex

Obj. Maximización:	$Z_j - C_j \geq 0$	$\forall X_j \in X^S$
Obj. Minimización:	$Z_j - C_j \leq 0$	$\forall X_j \in X^S$

2.2.3 La tabla símplex: Tabla Inicial

A efectos de facilitar manualmente los cálculos, así como para la visualización directa de la interpretación de la solución obtenida, cada iteración del algoritmo puede resumirse en una tabla.

La composición de la tabla símplex será la que se muestra a continuación, donde X^B indica el vector de variables que forman la primera solución básica, asociadas a cada una de las restricciones del modelo, y a cuya determinación hemos destinado el apartado 3.1.

Con la denominación X^S representamos, por su parte, al resto de variables que serán secundarias en la primera tabla.

Habitualmente, se destina una columna a cada variable, sin que la ordenación se modifique de una iteración a otra, por tanto el subíndice j, identificador de columna, se refiere siempre a la misma variable.

Por el contrario, el subíndice i, indicador de fila, identificará en cada iteración a la variable básica despejada en la i-ésima restricción. Variable que, claro está, podrá variar de una iteración a otra.

La estructura de la tabla símplex será:

			X^B	X^S
X_i^B	C_i^B	b_i	I	a_{ij}
$Z_0 = \sum_{i \in X^B} C_i^B b_i$			0	$Z_j - C_j$

donde la última fila de la tabla corresponde a los coeficientes $Z_j - C_j$ que han sido definidos anteriormente sólo para las variables secundarias, si bien la aplicación al resto de variables (básicas) de las fórmulas establecidas conducirá a obtener valores nulos para estas variables tal como se muestra en la tabla.

Nótese, por último, que la parte central de la tabla expresa el sistema de restricciones en la forma:

$$\boxed{X_i^B = b_i - \sum_{j \in X^S} a_{ij} X_j}$$

y la última fila corresponde al comportamiento de la función objetivo:

$$\boxed{Z = Z_0 - \sum_{j \in X^S} (Z_j - C_j) X_j}$$

El algoritmo consiste, según se detalla a continuación, en un proceso iterativo de modificación del vector básico, X^B, de modo que se mejore en cada paso el valor de la función objetivo, Z_0.

Ejemplo 2.3

En nuestro ejemplo, la primera tabla será:

			10	4	0	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	600	1	3	1	0	0	0
H_2	0	800	4	2	0	1	0	0
A_3	-M	150	0	1	0	0	-1	1
$Z_0 = -150$M			-10	-M-4	0	0	M	0

Las expresiones anteriores tomarían la forma:

$$\begin{aligned} H_1 = &\quad 600 - X_1 - 3X_2 \\ H_2 = &\quad 800 - 4X_1 - 2X_2 \\ A_3 = &\quad 150 \qquad\quad - X_2 + E_3 \end{aligned}$$

y la función objetivo:

$$Z = -150\text{M} + 10X_1 + (\text{M} + 4)X_2 - \text{M}E_3$$

Como existen $Z_j - C_j < 0$, en un problema de máximo, la solución encontrada no es óptima. Obviamente, dándole valores distintos de cero a las variables X_1 o X_2 el valor de la función objetivo incrementa.

2.2.4 Modificación de la solución básica actual

Si la solución actual no es óptima, es decir, existe algún $Z_j - C_j$ negativo en caso de máximo (o positivo en caso de mínimo), ello implica que sería conveniente que alguna variable que en este momento es secundaria pasará a pertenecer a la base. Evidentemente, el criterio de selección de la variable entrante X_e en un modelo de maximización será:

Obj. Maximización: Criterio de selección de Variable Entrante

$$X_e \text{ tal que } Z_e - C_e = \text{ MAX } \{|Z_j - C_j|, \text{ para todo } Z_j - C_j < 0\}$$

Es decir, aquella variable que mejora unitariamente en mayor medida el valor presente de la función objetivo. Por supuesto, para un modelo de minimización, se aplicaría idéntico criterio, en este caso sobre los coeficientes $Z_j - C_j$ positivos.

Obj. Minimización: Criterio de selección de Variable Entrante

$$X_e \text{ tal que } Z_e - C_e = \text{ MAX } \{|Z_j - C_j|, \text{ para todo } Z_j - C_j > 0\}$$

Sin embargo, sabemos que una solución básica está formada por no más de M variables con lo que deberá seleccionarse una variable saliente que se sustituirá por la variable entrante elegida.

Así si denominamos X_s^B a la variable saliente, ello indica que la variable entrante X_e pasará a ocupar la posición s-ésima en el nuevo vector básico, $\hat{X}^{NB}$. Se observa aquí, que el subíndice i indica el orden en el vector básico (fila de la tabla símplex) y que identificará variables distintas en cada iteración.

Si X_s^B era una variable básica, debía estar expresada en la solución actual de la forma:

$$X_s^B = b_s - \sum_{j \in X^S} a_{sj} X_j = b_s - \sum_{j \neq e} a_{sj} X_j - a_{se} X_e$$

De acuerdo con la sustitución decidida, X_e debe pasar a despejarse en la s-ésima restricción, respondiendo de este modo a la expresión general:

$$X_e = b_s^N - \sum_{j \in X^S} a_{sj}^N X_j$$

indicando el superíndice N en este caso, valores transformados de los coeficientes originales y, en general, valores en la nueva solución básica respecto de la tabla actual. Concretamente, la nueva restricción tomará la forma

$$X_s^{NB} = X_e = \frac{b_s}{a_{se}} - \sum_{j \neq e} \frac{a_{sj}}{a_{se}} X_j - \frac{1}{a_{se}} X_s$$

Esto supone vectorialmente, dividir la fila de variable saliente por el coeficiente que en la misma exhiba la variable entrante. Fila en la que, con esta transformación, la variable X_e tendrá asociado un coeficiente unitario.

La solución inicial:

$$X_i^B = b_i - \sum_{j \in X^S} a_{ij} X_j$$

debe transformarse en:

$$X_i^{NB} = b_i^N - \sum_{j \in \hat{X}^{NS}} a_{ij}^N X_j$$

donde, ahora, el vector de las variables básicas $\hat{X}^{NB}$ (subíndice i) está compuesto por las mismas variables que en la iteración anterior, salvo la posición s-ésima que es ocupada por la variable X_e. El vector de variables secundarias $\hat{X}^{NS}$, por su parte, incluirá a la variable X_s.

Para mantener la matriz identidad, en las filas distintas de la s-ésima, la variable X_e debe aparecer con coeficiente 0. Ello se logra sustituyendo X_e en:

$$X_i^B = b_i - \sum_{j \neq e} a_{ij} X_j - a_{ie} X_e$$

por su valor calculado anteriormente. Así:

$$X_i^{NB} = b_i - \sum_{j \neq e} a_{ij} X_j - a_{ie} \left(\frac{b_s}{a_{se}} - \sum_{j \neq e} \frac{a_{sj}}{a_{se}} X_j - \frac{1}{a_{se}} X_s \right)$$

transformación que equivale, vectorialmente, a restar de la fila i-ésima la nueva fila de la variable saliente multiplicada por el coeficiente de la entrante en dicha fila i-ésima.

Operando en la expresión anterior, tenemos:

$$X_i^{NB} = \left(b_i - a_{ie} \frac{b_s}{a_{se}} \right) - \sum_{j \neq e} \left(a_{ij} - a_{ie} \frac{a_{sj}}{a_{se}} \right) X_j + \frac{a_{ie}}{a_{se}} X_s$$

agrupando términos obtenemos:

$$X_i^{NB} = \left(b_i - a_{ie}\frac{b_s}{a_{se}}\right) - \sum_{j\in\hat{X}^{NS}} \left(a_{ij} - a_{ie}\frac{a_{sj}}{a_{se}}\right) X_j$$

que se corresponde con la expresión general requerida:

$$X_i^{NB} = b_i^N - \sum_{j\in\hat{X}^{NS}} a_{ij}^N X_j$$

y sobre la que se puede reiniciar el proceso para determinar si el nuevo valor de la función objetivo:

$$Z^N = Z_0 - \sum_{j\in\hat{X}^{NS}} (Z_j - C_j)X_j$$

es óptimo. Expresión donde, ahora:

$$Z_0 = \sum_{i\in\hat{X}^{NB}} C_i^B b_i^N \qquad Z_j = \sum_{i\in\hat{X}^{NB}} C_i^B a_{ij}^N$$

siendo:

$$\hat{X}^{NB} = \{X^B + X_e - X_s\} \qquad \hat{X}^{NS} = \{X^S + X_s - X_e\}$$

Falta, sin embargo, determinar cual es la variable saliente. Para ello, nótese en primer lugar que la transformación realizada se ha referido únicamente al conjunto de restricciones técnicas del modelo y que los pasos descritos en esta sección en la práctica suponen tan solo una transformación lineal de la matriz de coeficientes originales para lograr un traslado de la matriz identidad asociándola ahora a las nuevas variables básicas.

En consecuencia, para que la nueva solución propuesta sea una solución básica factible (y por lo tanto corresponda a un punto extremo del conjunto de soluciones posibles) es necesario asegurar que los nuevos valores de las variables, b_i^N, sean no negativos.

Así, para que el valor de la variable entrante sea no negativo, es preciso que:

$$X_e = b_s^N = \frac{b_s}{a_{se}} \geq 0$$

donde b_s es un valor no negativo ya que partimos de una solución factible. Es decir, se exige que a_{se} sea estrictamente positivo.

Para el resto de las variables básicas, debe cumplirse:

$$X_i^{NB} = b_i^N = b_i - a_{ie}\frac{b_s}{a_{se}} \geq 0$$

Como sabemos que $b_s \geq 0, b_i \geq 0$ y $a_{se} > 0$ se concluye que:

- si $a_{ie} = 0$, X_i^{NB} será siempre no negativo.
- si $a_{ie} < 0$, X_i^{NB} será siempre no negativo
- si $a_{ie} > 0$, entonces hay que asegurar que

$$\frac{b_i}{a_{ie}} > \frac{b_s}{a_{se}} \qquad \forall i$$

Condición que se cumple si elegimos como variable saliente X_s a aquella cuyo cociente $\frac{b_s}{a_{se}}$ sea el menor de los todos los cocientes $\frac{b_i}{a_{ie}}$.

Independientemente del sentido de la optimización (Max. o Min.) podemos enunciar el siguiente criterio para la determinación de la variable saliente X_s

Obj. MAX o MIN: Criterio de selección de Variable Saliente

$$X_s \text{ tal que } \frac{b_s}{a_{se}} = \text{ MIN } \left\{ \sigma_i = \frac{b_i}{a_{ie}} \text{ para todo } a_{ie} > 0 \right\}$$

Ejemplo 2.4

La tabla inicial del símplex correspondiente al ejemplo anterior es:

			10	4	0	0	0	-M	
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3	b_i/a_{ie}
H_1	0	600	1	3	1	0	0	0	600/3=200
H_2	0	800	4	2	0	1	0	0	800/2=400
A_3	-M	150	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	150/1=**150**
$Z_0 = -150\text{M}$			-10	**-M-4**	0	0	M	0	

Criterio de optimalidad: Los valores de los $Z_j - C_j$ asociados a las variables secundarias X_1 y X_2 son negativos, por lo tanto no estamos en el óptimo y debemos aplicar el criterio de la variable entrante.

Criterio de la variable de entrada: Tenemos que introducir en la base aquella variable secundaria con un mayor $Z_j - C_j$ (en valor absoluto), en nuestro caso la variable X_2.

Criterio de la variable de salida: Para determinar la variable saliente tenemos que calcular los cocientes:

$$\frac{b_i}{a_{ie}} \qquad \forall a_{ie} > 0$$

y seleccionar aquella variable que nos proporciona un cociente menor. En la tabla precedente se observa que en este caso dicho cociente corresponde a la variable A_3. La nueva solución básica está formada por las variables (H_1, H_2, X_2).

Modificación de la solución básica: Los cálculos necesarios para determinar la nueva solución son en este caso:

1. Dividir la fila de la variable entrante, X_2, por el elemento a_{se} (coeficiente situado en la intersección de la fila de la variable entrante con la columna de la variable saliente) denominado *pivote*. En la tabla anterior este valor es igual a 1.

   En este caso la fila de la variable entrante, X_2 será:

Para X_2	$\frac{150}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$
Fila de X_2	150	0	1	0	0	-1	1

2. Las filas i-ésimas restantes se modifican restándoles la fila correspondiente a la nueva variable básica, multiplicada por a_{ie} (recordar la expresión correspondiente a X_i^{NB}):

Para H_1		(600	1	**3**	1	0	0	0)
	- 3	(150	0	1	0	0	-1	1)
	Nueva fila de H_1	150	1	0	1	0	3	-3
Para H_2		(800	4	**2**	0	1	0	0)
	-2	(150	0	1	0	0	-1	1)
	Nueva fila de H_2	500	4	0	0	1	2	-2

Una vez realizadas estas operaciones la nueva tabla símplex toma la forma:

			10	4	0	0	0	-M	
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3	b_i/a_{ie}
H_1	0	150	1	0	1	0	3	-3	150/1=150
H_2	0	500	$\boxed{4}$	0	0	1	2	-2	500/4=**125**
X_2	4	150	0	1	0	0	-1	1	-
$Z_0 = 600$			**-10**	0	0	0	-4	4+M	

Todavia no hemos alcanzado la solución óptima ya que el valor $Z_j - C_j$ asociado a la variable secundaria X_1 es negativo (-10). De manera directa el criterio de entrada nos proporciona a X_1 como variable entrante y el cálculo de los cocientes b_i/a_{ie} nos lleva a seleccionar como variable saliente a H_2. En esta tabla el pivote toma valor 4. La nueva solución básica esta formada por las variables (H_1, X_1, X_2). Los cálculos necesarios para obtener las filas de la nueva tabla símplex son en este caso:

La fila de la variable entrante, ahora X_1 será:

Para X_1	$\frac{500}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-2}{4}$
Fila de X_1	125	1	0	0	1/4	1/2	-1/2

Las filas restantes se modifican de la forma:

Para H_1	(150	**1**	0	1	0	3	-3)
- 1	(125	1	0	0	1/4	1/2	-1/2)
Nueva fila de H_1	25	0	0	1	-1/4	5/2	-5/2

No es necesario cambiar la fila asociada a la variable X_2 ya que el coeficiente que aparece en la columna del pivote ya es cero.

Finalmente, la tabla óptima toma la forma:

			10	4	0	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	25	0	0	1	-1/4	5/2	-5/2
X_1	10	125	1	0	0	1/4	1/2	-1/2
X_2	4	150	0	1	0	0	-1	1
$Z_0 = 1850$			0	0	0	10/4	1	-1+M

En este caso los $Z_j - C_j$ asociados a variables secundarias ya son todos no negativos, con lo que ya hemos alcanzado la solución óptima. El valor de las variables en el óptimo es:

$$X_1 = 125 \qquad X_2 = 150 \qquad H_1 = 25 \qquad H_2 = 0 \qquad E_3 = 0 \qquad A_3 = 0$$

que corresponde a un valor de la función objetivo Z:

$$Z = 1850$$

2.3 Expresión matricial del algoritmo Símplex

Hemos mencionado la conveniencia de representar cada una de las iteraciones a través de una tabla que facilite los cálculos necesarios para la ejecución de las diferentes etapas en la aplicación del algoritmo. Así, la representación de la solución **óptima** tendrá la misma formulación que en dicho apartado. Esto es:

			X^B	X^S
X_i^B	C_i^B	b_i'	I	a_{ij}'
Z_0			0	$Z_j - C_j$

si bien ahora los coeficientes no serán los del planteamiento inicial, sino el resultado de las transformaciones iterativas indicadas anteriormente. Esto es:

$$X_i^B = b_i' - \sum_{j \in X^S} a_{ij}' X_j$$
$$Z = Z_0 - \sum_{j \in X^S} (Z_j - C_j) X_j$$

expresiones cuyos elementos aparecen todos ellos en la tabla indicada.

Como tendremos oportunidad de comprobar, de las dos expresiones fundamentales anteriores se deducen directamente importantes consecuencias para la interpretación exacta de la solución alcanzada. Razón por la que la tabla expuesta será útil no sólo en el proceso iterativo de resolución manual, sino también a la hora de interpretar los resultados.

Destacado el interés de la representación tabular de las iteraciones del algoritmo, nos referiremos en este apartado a la expresión matricial de dichas tablas símplex.

Hemos señalado que las iteraciones del algoritmo pueden interpretarse como diferentes elecciones de partición del vector de incógnitas en variables básicas X^B y secundarias X^S. El planteamiento del problema de optimización queda, en estos términos, expresado como:

$$\text{OPT } Z = C^B X^B + C^S X^S$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$BX^B + SX^S = b$$
$$X^B, X^S \geq 0$$

donde C^B y C^S son vectores filas formados por los coeficientes de la función objetivo asociados a variables básicas y secundarias respectivamente, o matricialmente:

$$\text{OPT } Z = \begin{bmatrix} C^B & C^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^B \\ X^S \end{bmatrix}$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$\begin{bmatrix} B & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^B \\ X^S \end{bmatrix} = b$$

correspondiendo cada iteración a la expresión:

$$\begin{bmatrix} I & B^{-1}S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^B \\ X^S \end{bmatrix} = B^{-1}b$$

que se traduce de modo automático en la tabla símplex.

Es decir, dada una composición específica del vector básico es inmediato determinar la composición de la tabla símplex correspondiente a ese punto extremo del conjunto de soluciones posibles

			C^B	C^S
			X^B	X^S
X^B	C^B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}S$
$Z_0 = C^B B^{-1}b$			0	$C^B B^{-1}S - C^S$

Podemos observar en la tabla símplex que asociadas a las variables básicas aparecen las columnas de la matriz identidad y que los $Z_j - C_j$ correspondientes toman valor nulo.

Alternativamente, podemos plantear el modelo de optimización distinguiendo entre las variables que formaron la primera solución básica X^P (en general, variables de holgura y artificiales) y las inicialmente secundarias X^{NP} (variables de decisión y excedentes). En un modelo donde las restricciones son todas de menor o igual el vector X^P correspondería a las variables de holgura y X^{NP} a las variables de decisión. Con esta clasificación el planteamiento original del problema queda:

$$\text{OPT } Z = \begin{bmatrix} C^{NP} & C^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{NP} \\ X^P \end{bmatrix}$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$\begin{bmatrix} A^{NP} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{NP} \\ X^P \end{bmatrix} = b$$

con lo que, una iteración concreta del algoritmo o, lo que es lo mismo, elegida una base, la expresión matricial inicial del sistema de restricciones se reformula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} B^{-1}A^{NP} & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{NP} \\ X^{P} \end{bmatrix} = B^{-1}b$$

que se traduce, igualmente, de modo automático en la siguiente expresión matricial de la tabla símplex:

			X^{NP}	X^{P}
X^B	C^B	$B^{-1}b$	$B^{-1}A^{NP}$	B^{-1}
$Z_0 = C^B B^{-1} b$			$C^B B^{-1} A^{NP} - C^{NP}$	$C^B B^{-1} S - C^P$

En este caso, podemos observar que asociadas a las variables X^P aparecen las columnas correspondientes a la matriz B^{-1} y en el caso de que estas variables sean de holgura el valor de los $Z_j - C_j$ coincide con los de Z_j por ser C^P igual a cero.

En resumen, la forma matricial no permite resolver el problema de optimización pues no fija un criterio determinado para elegir la composición del vector básico. Sin embargo, al plantearse las expresiones matriciales en términos de los coeficientes iniciales del modelo, las mismas ofrecen un instrumento que puede resultar altamente útil para la generación rápida de tablas, así como para el estudio del efecto de determinadas modificaciones sobre el planteamiento original.

EJEMPLO 2.5

Vamos a aplicar la expresión matricial del algoritmo para resolver el modelo propuesto en la sección anterior:

1. Primera tabla:

			10	4	0	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	600	1	3	1	0	0	0
H_2	0	800	4	2	0	1	0	0
A_3	-M	150	0	1	0	0	-1	1
$Z_0 = -150$M			-10	**-M-4**	0	0	M	0

   VE: X_2 VS: A_3

2. Segunda tabla, vector básico:

$$X^B = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

   La matriz B es en este caso:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   La matriz S es:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   y el vector de términos independientes:

$$b = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 150 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto, obtenemos:

$$B^{-1}B = I \qquad B^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 150 \\ 500 \\ 150 \end{pmatrix}$$

			10	4	0	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	150	1	0	1	0	3	-3
H_2	0	500	4	0	0	1	2	-2
X_2	4	150	0	1	0	0	-1	1
$Z_0 = 600$			**-10**	0	0	0	-4	4+M

NOTA: Observamos que la matriz B^{-1} de esta iteración esta asociada a las variables que formaron la primera solución básica.

VE: X_1 VS: H_2

3. Tercera tabla, vector básico:

$$X^B = \begin{pmatrix} H_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

La matriz B es en este caso:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -10/4 \\ 0 & 1/4 & -2/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz S es:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y el vector de términos independientes:

$$b = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$B^{-1}B = I \qquad B^{-1}S = \begin{pmatrix} -1/4 & 10/4 & -10/4 \\ 1/4 & 2/4 & -2/4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 25 \\ 125 \\ 150 \end{pmatrix}$$

			10	4	0	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	25	0	0	1	-1/4	5/2	-5/2
X_1	10	125	1	0	0	1/4	1/2	-1/2
X_2	4	150	0	1	0	0	-1	1
$Z_0 = 1850$			0	0	0	10/4	1	-1+M

Ya hemos alcanzado la solución óptima.

EJERCICIOS

2.1 En relación al ejemplo 1.3, construir la tabla óptima del modelo propuesto mediante el método matricial, sabiendo que la solución incluye la variable de decisión “A” y que la restricción financiera es la única activa.

2.2 Suponga que disponemos de la siguiente información relativa al proceso productivo de una determinada empresa:

Producto	**Inputs por unidad producida**			**Precio Venta**
	Materia prima	Mano de Obra		
		Secc. I	Secc. II	
A	2	2	0	600
B	4	1	4	1000

Las disponibilidades diarias de materia prima son de 80 u.f. (coste unitario: 10 u.m./u.f.), mientras que la plantilla se compone de 5 y 3 trabajadores en las secciones I y II respectivamente (jornada laboral de 8 horas).

Construir la tabla símplex correspondiente a la política óptima, sabiendo que la matriz B^{-1} es:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

tabla en la que podrá comprobarse que la mencionada política de producción óptima consiste en fabricar el mayor número posible de unidades de B, dedicando los recursos sobrantes a la elaboración de A. Estrategia que conduce a no utilizar la totalidad de la materia prima disponible.

2.3 Sea la tabla óptima de un modelo de Programación Lineal, la que a continuación se muestra:

			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	3	5	1	0	-0.5	0	0	-0.5	0.5
X_2	-1	5	0	1	0.25	0	0	0.25	0.25
X_4	0	5	0	0	2.25	1	-1	-0.75	1.25
$Z_0 = 10$			0	0	-6.75	0	-M	-1.75	1.25-M

Sabiendo que el vector X^P está compuesto por las variables X_5, X_6 y X_7, reconstruir el planteamiento inicial.

2.4 Interpretación de resultados

2.4.1 Interpretación de la tabla óptima

Hasta el momento hemos visto como construir una tabla símplex, es decir, como evaluar los diferentes coeficientes en cada iteración del algoritmo. Igualmente hemos estudiado el medio de identificar la optimalidad de una solución determinada.

Las expresiones que, en su momento, utilizamos para efectuar las diferentes iteraciones:

$$X_i^B = b'_i - \sum_j a'_{ij} X_j$$
$$Z = Z_0 - \sum_j (Z_j - C_j) X_j$$

serán las mismas que nos servirán ahora para profundizar en la interpretación de la solución óptima obtenida. Con el objetivo de simplificar la notación a partir de ahora supondremos que el índice j corresponde a las variables secundarias $X_j \in X^S$ y el índice i a las variables básicas.

Sea la tabla óptima:

			X^B	X^S
X_i^B	C_i^B	b'_i	I	a'_{ij}
Z_0			0	$Z_j - C_j$

La tabla obtenida, no sólo informa sobre las líneas de actuación más adecuadas (valor de las variables de decisión) y su incidencia sobre las restricciones (valor de las variables de holgura) y sobre la función objetivo (valor de Z_0), sino que permite igualmente extraer interesantes conclusiones en torno al efecto de determinadas medidas o políticas que se pueden emprender. Concretamente, estudiaremos a continuación el significado de los elementos $Z - C$ de las variables secundarias.

Activación de una variable de decisión secundaria

Si una variable secundaria X_j toma el valor igual a 1 de las expresiones anteriores se obtiene:

$$X_i^{NB} = b'_i - \sum_j a'_{ij} X_j = b'_i - a'_{ij}$$

expresión que muestra el efecto de activar la variable secundaria X_j sobre el valor tomado por las variables actualmente básicas. En términos de la función objetivo tales efectos se resumen en la expresión:

$$Z^N = Z_0 - \sum_j (Z_j - C_j) X_j = Z_0 - (Z_j - C_j)$$

Así, el valor $Z_j - C_j$ de una variable de decisión secundaria informa sobre el decremento (incremento) del valor de la función objetivo en un modelo de máximo (mínimo) si dicha variable, en contra de la solución óptima, toma un valor unitario. Son los denominados **costes reducidos** $Z_D - C_D$ asociados a las variables de decisión.

Esta interpretación será válida para cualquier incremento (α) de X_j, siempre y cuando el valor de las variables actualmente básicas siga siendo factible. Es decir:

$$X_i^{NB} = b'_i - a'_{ij}\alpha \qquad Z^N = Z_0 - (Z_j - C_j)\alpha$$

Incremento unitario de un término independiente

Sabemos que la tabla inicial puede expresarse matricialmente como:

$$A^{NP} X^{NP} + I\, X^P = b$$

igualmente, sabemos que cualquier iteración del símplex y, concretamente, la referida a la solución óptima puede expresarse en los siguientes términos:

$$X^B + B^{-1} S X^S = B^{-1} b$$

esto es, premultiplicando por B^{-1} el sistema de ecuaciones original. Efectuando esta operación sobre la expresión inicial, tenemos:

$$B^{-1} A^{NP} X^{NP} + B^{-1} X^P = B^{-1} b$$

de donde el valor de las variables básicas en el óptimo puede expresarse en función del valor de los términos independientes originales del siguiente modo:

$$X^B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & \dots & a'_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el valor de una variable básica X_i^B en el óptimo será:

$$X_i^B = b_i' = \sum_{k \in X^P} a_{ik}' b_k$$

donde debe notarse que el subíndice k identifica a las variables que formaron parte de la primera solución básica, ordenadas según la secuencia de restricciones.

Así, supongamos se incrementa el término independiente r-ésimo en una unidad. Si el vector básico no variase en su composición, el nuevo valor de las variables básicas respondería a la expresión:

$$X_i^{NB} = \sum_{k \neq r} a_{ik}' b_k + a_{ir}'(b_r + 1) = \sum_{k \in X^P} a_{ik}' b_k + a_{ir}' = b_i' + a_{ir}'$$

donde los coeficientes a_{ir}' corresponden a la columna en la tabla óptima de la variable asociada a la restricción r-ésima que en la solución inicial formó parte del vector básico.

Con lo que el efecto de dicha variación sobre la función objetivo será:

$$Z^N = \sum_i C_i^B X_i^{NB} = \sum_i C_i^B (b_i' + a_{ir}') = \sum_i C_i^B b_i' + \sum_i C_i^B a_{ir}' = Z_0 + Z_r$$

Para las variables de holgura Z_r coincide con $Z_r - C_r$ puesto que, en este caso, C_r toma valor nulo.

Así pues, para una restricción de menor o igual, el valor $Z_H - C_H$ de la variable de holgura secundaria correspondiente indicará la mejora que en el valor de la función objetivo se obtendría al incrementar unitariamente el término independiente de la restricción. En términos económicos, este valor $Z_H - C_H$ corresponde al *precio sombra, coste de oportunidad o precio máximo asignado al recurso.*

En el caso de restricciones de igualdad o de mayor o igual, la interpretación se obtendrá en el valor Z_A de la variable artificial asociada a la restricción. Podemos comprobar que en una restricción de mayor o igual activa, cuya variable excedente será secundaria, el incremento unitario del término independiente lleva a un empeoramiento en la función objetivo igual a Z_A. En el caso de restricciones de igualdad el valor Z_A no está restringido en signo.

Para variaciones (α) no unitarias de los términos independientes, los efectos sobre la solución óptima serán proporcionales a la modificación efectuada:

$$X_i^{NB} = b_i' + a_{ir}'\alpha \qquad Z^N = Z_0 + Z_r\alpha$$

siempre que la composición del vector básico no se vea alterada por la modificación del término independiente. Esto es, que se mantenga la factibilidad de las variables básicas.

EJEMPLO 2.6

Consideremos el siguiente modelo de Programación Lineal:

$$\begin{array}{c} \text{MAX } Z = 200A + 100B + 150C \\ \text{sujeto a:} \\ 5A + 2B + 2C \leq 750 \\ 2A + 4B + 1C \leq 600 \\ A \qquad\qquad\qquad \geq 100 \\ A, B, C \geq 0 \end{array}$$

y su tabla óptima correspondiente:

			A	B	C	H_1	H_2	E_3	A_3
C	150	125	0	1	1	0.5	0	2.5	-2.5
H_2	0	275	0	3	0	-0.5	1	-0.5	0.5
A	200	100	1	0	0	0	0	-1	1
$Z_0 = 38750$			0	50	0	75	0	175	-175+M

1) Determinar el efecto sobre la solución óptima de que la variable B tome valor igual a la unidad.

Ya sabemos que cuando una variable de decisión secundaria X_j toma el valor igual a 1, en contra de la política óptima, las variaciones que se producen en el vector básico y en la función objetivo son:

$$X_i^{NB} = b'_i - a'_{ij} \qquad Z^N = Z_0 - (Z_j - C_j)$$

Aplicando estas expresiones en nuestro caso ($B = 1$), obtenemos:

$$\begin{array}{c} C = 125 - 1(1) = 124 \\ H_2 = 275 - 3(1) = 272 \\ A = 100 - 0(1) = 100 \end{array}$$

$$Z = 38750 - 50(1) = 38700$$

Esta cantidad coincide evidentemente con el valor que toma Z cuando calculamos su valor a partir de su expresión inicial:

$$Z = 200(100) + 100(1) + 150(124) = 38700$$

Como es lógico, la función objetivo disminuye al activar una variable de decisión secundaria.

2) Determinar la solución óptima en los casos:

a) El primer término independiente incrementa en una unidad.

Sabemos que el incremento unitario en un término independiente provoca los siguientes cambios en las variables básicas y en la función objetivo:

$$X_i^{NB} = b'_i + a'_{ir} \qquad Z^N = Z_0 + Z_r$$

Aplicando estas expresiones a partir de los a'_{ir} correspondientes a la columna de H_1 obtenemos:

$$\text{Si } b_1 = 750 + 1 \qquad \begin{array}{l} C = 125 + 0.5(1) = 125.5 \\ H_2 = 275 - 0.5(1) = 274.5 \\ A = 100 + 0(1) = 100 \\ Z = 38750 + 75(1) = 38825 \end{array}$$

la función objetivo ha incrementado 75 unidades.

La primera restricción del modelo, se cumple en sentido estricto de igualdad, ya que $H_1 = 0$ (recurso escaso) por tanto un incremento del término independiente provoca un incremento de la función objetivo.

b) El segundo término independiente incrementa en una unidad.

En este caso, a partir de la columna de H_2, obtenemos:

$$\text{Si } b_2 = 600 + 1 \qquad \begin{array}{l} C = 125 + 0(1) = 125 \\ H_2 = 275 + 1(1) = 276 \\ A = 100 + 0(1) = 100 \\ Z = 38750 + 0(1) = 38750 \end{array}$$

el valor de la función objetivo no se ha modificado.

La segunda restricción del modelo, se cumple en términos de desigualdad, ya que $H_2 > 0$ (recurso sobrante) en este caso el incremento del término independiente no supone ningún efecto sobre la función objetivo.

c) El tercer término independiente incrementa en una unidad.

Como en los casos anteriores, a partir de la columna de A_3, obtenemos:

$$\text{Si } b_3 = 100 + 1 \qquad \begin{array}{l} C = 125 - 2.5(1) = 122.5 \\ H_2 = 275 + 0.5(1) = 275.5 \\ A = 100 + 1(1) = 101 \\ Z = 38750 - 175(1) = 38575 \end{array}$$

el valor de la función objetivo ha disminuido.

La tercera restricción es una obligación para el modelo ya que se cumple en términos de igualdad ($E_3 = 0$, var.sec.) en estos casos, un incremento en la obligación implica una disminución en el valor de la función objetivo.

2.4.2 Tipología de soluciones

Cómo ya hemos visto en el módulo I frente a la existencia de una solución óptima única existen diferentes tipos de soluciones. Nos referimos, concretamente, a la posibilidades:

1. Solución no acotada: el valor de la función objetivo no está limitado.
2. Solución múltiple: existen distintas soluciones que proporcionan la misma solución óptima.
3. No existe solución: el conjunto de soluciones posibles sea vacío.

Estudiaremos el diagnóstico de estas tres situaciones específicas cuando estamos utilizando el símplex a partir de la formulación utilizada por el algoritmo y que se fundamenta en las expresiones ya conocidas:

$$X_i^B = b'_i - \sum_j a'_{ij} X_j$$
$$Z = Z_0 - \sum_j (Z_j - C_j) X_j$$

Solución no acotada

Supongamos existe una variable secundaria potencialmente entrante en cualquier iteración. Es decir para un modelo de máximo, sea:

$$X_k \text{ tal que } Z_k - C_k < 0$$

o para un modelo de mínimo:

$$X_k \text{ tal que } Z_k - C_k > 0$$

Sea, además:

$$a'_{ik} \leq 0 \text{ para todo } i$$

es decir, no podemos aplicar el criterio de la variable saliente.

Si decidimos asignar un valor arbitrario α a esta variable secundaria, las variables básicas verán modificado su valor de acuerdo con la expresión:

$$X_i^B = b'_i - \sum_j a'_{ij} X_j = b'_i - \sum_{j \neq k} a'_{ij} X_j - a'_{ik} X_k$$

sustituyendo en la expresión genérica la variable X_k, por un valor específico, α, tenemos que la nueva solución, factible pero no básica, será de la forma:

$$X_k^B = \alpha$$
$$X_i^B = b'_i - a'_{ik}\alpha$$
$$X_j = 0 \text{ para } j \text{ distinto de } k$$

el valor de la función objetivo para esta nueva solución será:

$$Z = Z_0 - \sum_j (Z_j - C_j) X_j = Z_0 - \sum_{j \neq k} (Z_j - C_j) X_j - (Z_k - C_k) X_k = Z_0 - (Z_k - C_k)\alpha$$

En resumen, cuanto mayor es el valor de α, más crece (decrece) el valor de la función objetivo en un problema de máximo (mínimo) y continuan siendo factibles los valores que toman las variables básicas. Por tanto, si en **cualquier iteración** del símplex se dan las dos condiciones apuntadas al inicio, podemos decir que la solución es no acotada o ilimitada.

Ejemplo 2.7

Considerar el siguiente modelo de Programación Lineal:

$$\text{MAX } Z = 2X_1 + X_2$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$X_1 - X_2 \leq 8$$
$$2X_1 - X_2 \leq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

En la figura 2.1 podemos observar como el valor de Z no está acotado.

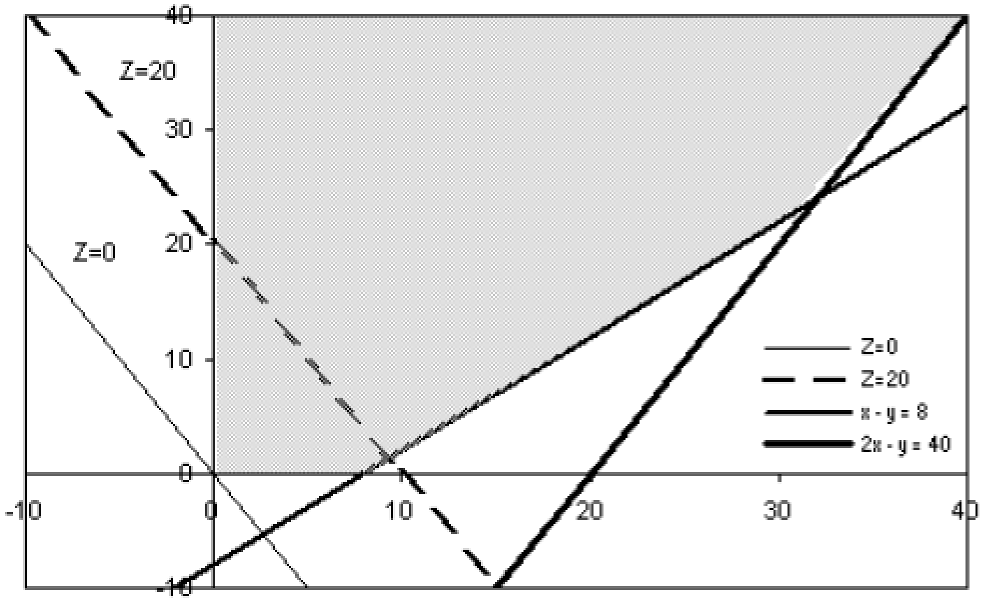


Figura 2.1 Ejemplo de solución no acotada.

La tabla inicial del símplex es:

			X_1	X_2	H_1	H_2
H_1	0	8	1	-1	1	0
H_2	0	40	2	-1	0	1
$Z_0 = 0$			-2	-1	0	0

En esta tabla X_2 es una variable potencialmente entrante a la que no le corresponde ninguna variable saliente (no podemos aplicar el criterio de la salida), de aquí ya deducimos que la solución del modelo no está limitada.

El sistema de ecuaciones que se deduce de la tabla es:

$$H_1 = 8 - X_1 + X_2$$
$$H_2 = 40 - 2X_1 + X_2$$

y la evolución de la función objetivo:

$$Z = 2X_1 + X_2$$

Si el valor de $X_2 = \alpha$ ($\alpha \geq 0$) y mantenemos $X_1 = 0$ el valor de las variables básicas es:

$$H_1 = 8 + \alpha$$
$$H_2 = 40 + \alpha$$

y la función objetivo toma la forma:

$$Z_\alpha = \alpha$$

A medida que el valor de α aumenta obtenemos distintas soluciones factibles (no básicas) que proporcionan un Z_α cada vez mayor.

Solución múltiple

Si, en el óptimo, existe alguna variable secundaria con un $Z_j - C_j$ nulo. Tal situación será indicativa, caso de existir variable saliente, de solución múltiple acotada, es decir existen distintas combinaciones de variables básicas que proporcionan el mismo valor óptimo de la función objetivo. Afirmación que se deduce directamente de la expresión genérica:

$$Z = Z_0 - \sum_j (Z_j - C_j) X_j$$

La inclusión de X_j en el vector básico nos proporciona otra solución con el mismo valor de la función objetivo. En este supuesto, cualquier combinación lineal convexa de los puntos extremos obtenidos será también solución del problema, si bien no será una solución básica en los términos definidos en este texto.

NOTA: Si además se cumple la condición de solución no acotada, es decir, no existe variable saliente, la solución es múltiple NO acotada.

EJEMPLO 2.8

Considerar el siguiente modelo de Programación Lineal:

$$\text{MAX } Z = X_1 + 2X_2$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 \leq 6$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

La tabla óptima es:

			X_1	X_2	H_1	H_2
X_2	2	3	0.5	1	0.5	0
H_2	0	3	1.5	0	-0.5	1
$Z_0 = 6$			0	0	1	0

Solución que corresponde al punto $(0, 3)$.

Se observa que el $Z - C$ asociado a la variable secundaria X_1 toma un valor nulo. Esto nos indica que si X_1 entra en la base el valor de la función objetivo no cambia. Volvemos a realizar otra iteración del símplex, que incluya a X_1 en la base y obtenemos la siguiente tabla:

			X_1	X_2	H_1	H_2
X_2	2	2	0	1	2/3	-1/3
X_1	1	2	1	0	-1/3	2/3
$Z_0 = 6$			0	0	1	0

Solución que corresponde al punto $(2, 2)$. Observamos que ahora el $Z - C$ asociado a la variable H_2 es nulo, al volver a iterar regresamos a la primera tabla óptima. Esto nos dice que existen dos puntos extremos óptimos.

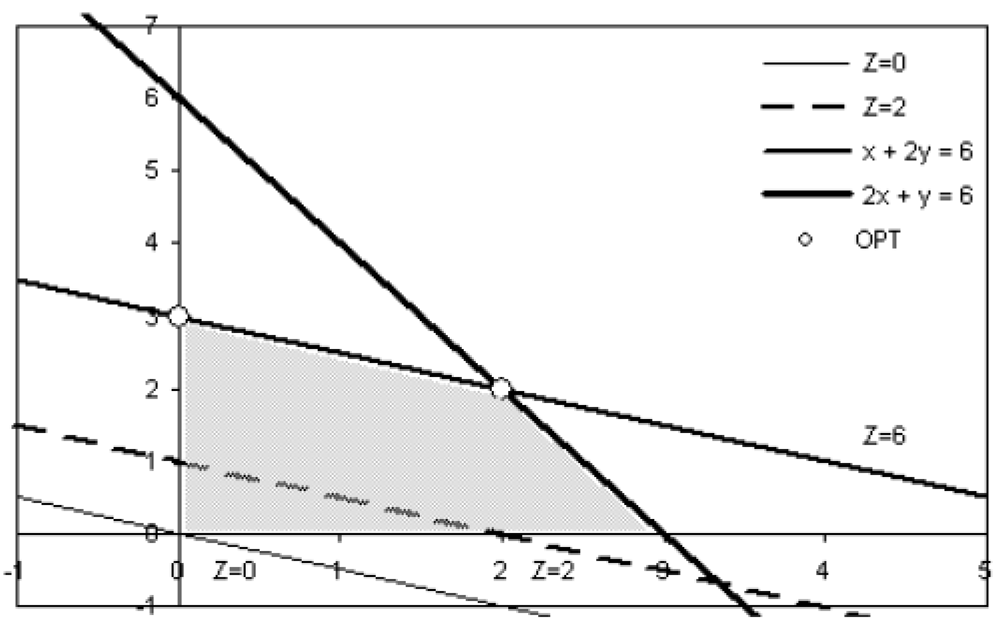


Figura 2.2 Ejemplo solución múltiple acotada

Gráficamente (figura 2.2) observamos como todos los puntos del segmento $(2,2)-(0,3)$ proporcionan el mismo valor de la función objetivo.

La expresión genérica de los puntos del segmento $(2,2)-(0,3)$ es la siguiente:

$$(X_1, X_2) = \mu(2,2) + (1-\mu)(0,3) \qquad 0 \leq \mu \leq 1$$

Haciendo operaciones obtenemos:

$$(X_1, X_2) = (2\mu, 3-\mu)$$

Se comprueba fácilmente que todos los puntos de esta forma proporcionan el mismo valor de la función objetivo:

$$Z = X_1 + 2X_2 = 2\mu + 2(3-\mu) = 6$$

Inexistencia de óptimo

El conjunto de soluciones posibles será vacío cuando en la tabla óptima aparezca alguna variable artificial, en el vector básico, con valor positivo.

El motivo se deduce directamente si tenemos en cuenta que la restricción construida con la participación de la variable artificial no es equivalente a la original[5]. Razón por la que se le asignó un coeficiente, M, en la función objetivo que intentase asegurar su no participación en la solución óptima.

En resumen, su presencia en la tabla evidencia la imposibilidad de encontrar para el modelo original solución que cumpla todas las restricciones sino es mediante el uso de las variables artificiales introducidas en el planteamiento original.

[5]Para demostración detallada de este resultado ver Prawda (1995).

Ejemplo 2.9

Considerar el siguiente modelo de Programación Lineal:

$$\begin{gathered} \text{MAX } Z = 5X_1 - 3X_2 \\ \text{sujeto a:} \\ 2X_1 + X_2 \leq 1 \\ 4X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{gathered}$$

A partir de la figura 2.3 observamos que la región factible es vacía.

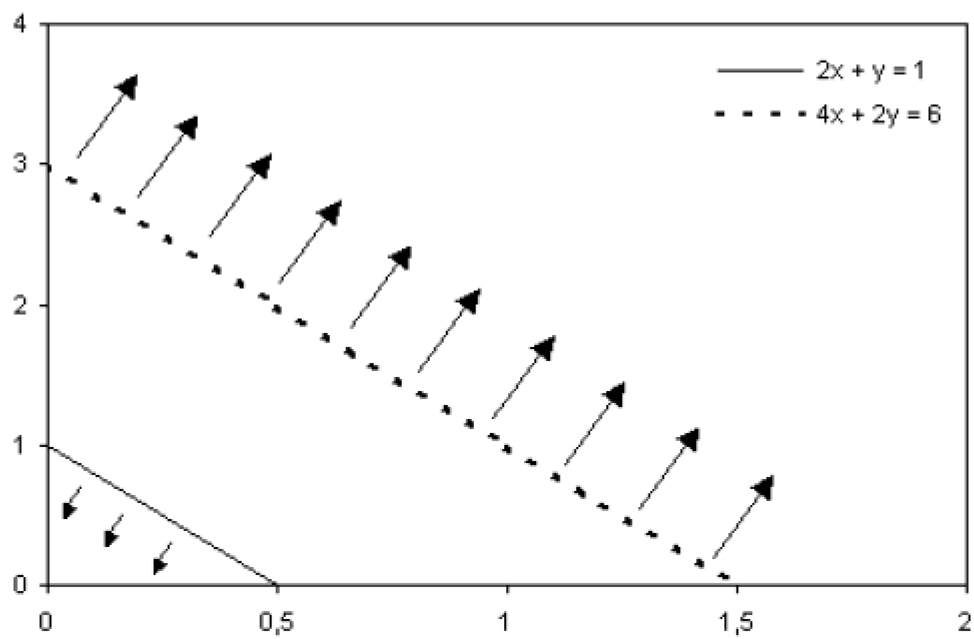


Figura 2.3 Ejemplo de modelo sin solución

No hay intersección entre las restricciones del problema, la zona de soluciones es vacía. El símplex detecta esta situación, colocando en el vector básico óptimo una variable artificial (A_2) con un valor positivo:

			X_1	X_2	H_1	E_2	A_2
X_1	5	0.5	1	0.5	0.5	0	0
A_2	-M	4	0	0	-2	-1	1
$Z_0 = 2.5 - 4\text{M}$			0	5.5	2.5+2M	M	0

2.4.3 Degeneración y bucles infinitos

En ocasiones cuando estamos aplicando el algoritmo símplex nos podemos encontrar que alguna variable básica toma valor cero. En este caso, se dice que la solución es **degenerada**.

Este tipo de soluciones, en ocasiones, puede originar que el algoritmo símplex NO converja en un número finito de iteraciones, entrando en una especie de "bucle infinito". Generalmente, un empate a la hora de aplicar el criterio de la variable saliente anticipa la aparición de una solución degenerada.

Ejemplo 2.10

Considerar el siguiente modelo de Programación Lineal:

$$\begin{gathered}\text{MAX } Z = 3X_1 + 9X_2\\ \text{sujeto a:}\\ X_1 + 4X_2 \leq 8\\ X_1 + 2X_2 \leq 4\\ X_1, X_2 \geq 0\end{gathered}$$

La tabla óptima del símplex toma la forma:

			X_1	X_2	H_1	H_2
X_2	9	2	0	1	1/2	-1/2
X_1	3	0	1	0	-1	2
$Z_0 = 18$			0	0	3/2	3/2

Se observa como la variable básica X_1 toma valor 0 y por tanto la solución óptima $(X_1, X_2) = (0, 2)$ es única y degenerada.

Geometricamente este tipo de soluciones aparecen cuando existe en el modelo al menos una restricción redundante, como podemos ver en la representación gráfica de nuestro ejemplo en la figura 2.4.

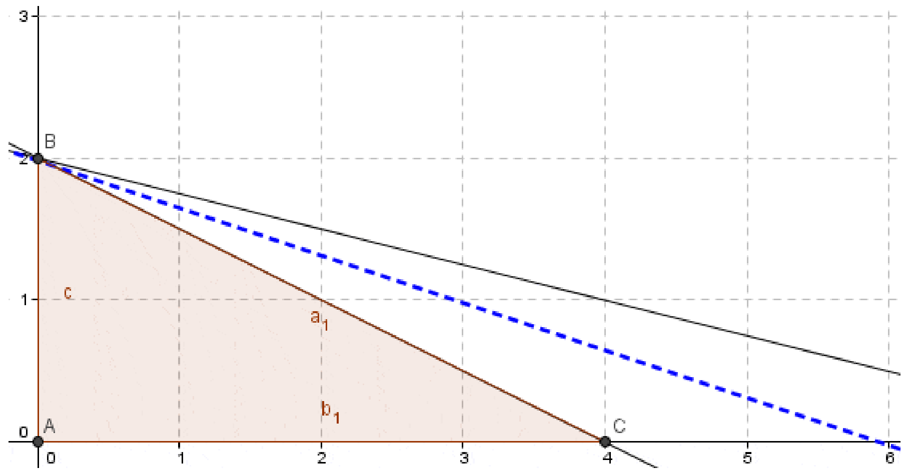


Figura 2.4 Ejemplo solución degenerada

Módulo 3

Dualidad

3.1 Modelo Dual de planteamientos simétricos

Dado un modelo de Programación Lineal de maximización en forma simétrica, que denominaremos **Primal**:

$$\text{MAX } Z = \sum_j C_j X_j$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$\sum_j a_{ij} X_j \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m$$
$$X_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

existe un modelo asociado al mismo que denominaremos modelo **Dual** y que se define como:

$$\text{MIN } G = \sum_i b_i Y_i$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$\sum_i a_{ij} Y_i \geq C_j \quad j = 1, \ldots, n$$
$$Y_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

Este modelo Dual se obtiene a partir de los siguientes pasos:

- Invirtiendo el sentido de la optimización (pasa de MAX a MIN) y generando nuevas variables, que llamaremos de decisión duales, cuyos coeficientes en la función objetivo serán los términos independientes del modelo original (Primal).

- Respecto de las restricciones, habrán tantas como variables de decisión del Primal, se invertirá igualmente su sentido ($\leq$ a $\geq$) y los términos independientes de las mismas serán los coeficientes en la función objetivo del planteamiento Primal.
- La matriz de coeficientes técnicos de las restricciones duales se obtendrán, por último, de la trasposición de la matriz de coeficientes técnicos del Primal.

De las reglas dadas se desprende la existencia de tantas variables duales como restricciones primales y que el número de restricciones técnicas duales será igual al de variables de decisión primales.

Aplicando las reglas de definición a un modelo Primal simétrico de mínimo, tenemos:

- Modelo Primal:

$$\begin{gathered}\text{MIN } Z = \sum_j C_j X_j \\ \text{sujeto a:} \\ \sum_j a_{ij} X_j \geq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ X_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n\end{gathered}$$

- Modelo Dual:

$$\begin{gathered}\text{MAX } G = \sum_i b_i Y_i \\ \text{sujeto a:} \\ \sum_i a_{ij} Y_i \leq C_j \quad j = 1, \ldots, n \\ Y_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m\end{gathered}$$

De donde se deduce, como primera conclusión, que el modelo Dual del Dual coincide con el Primal.

Ejemplo 3.1

Vamos a plantear el modelo Dual del siguiente modelo de Programación Lineal:

$$\begin{gathered}\text{MAX } Z = 5X_1 + 6X_2 \\ \text{sujeto a:} \\ X_1 - X_2 \leq 4 \\ 2X_1 + X_2 \leq 2 \\ 3X_1 - 4X_2 \leq 7 \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 1 \\ X_1, X_2 \geq 0\end{gathered}$$

Este modelo tiene 4 restricciones por lo tanto en el modelo Dual existen 4 variables de decisión duales: Y_1, Y_2, Y_3 e Y_4, cuyos coeficientes en la función objetivo serán respectivamente los cuatro términos independientes del modelo Primal: 4,2,7 y 1. Asimismo, el signo de la optimización será de minimización.

Las cuatro restricciones de menor o igual se convierten en dos restricciones (tantas como variables de decisión del Primal) de mayor o igual y sus términos independientes serán los dos coeficientes de la función objetivo primal: 5 y 6. Por último, la matriz de coeficientes técnicos de las restricciones se obtienen trasponiendo la matriz de coeficientes técnicos primales. En definitiva el modelo Dual será:

$$\begin{gathered}\text{MIN } G = 4Y_1 + 2Y_2 + 7Y_3 + Y_4 \\ \text{sujeto a:} \\ Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 - 2Y_4 \geq 5 \\ -Y_1 + Y_2 - 4Y_3 + 3Y_4 \geq 6 \\ Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0\end{gathered}$$

Se deja como ejercicio al lector comprobar que el Dual de este último modelo coincide con el modelo original

---

3.2 Relaciones en dualidad

3.2.1 Teoremas fundamentales de la dualidad

Teorema Débil

Dado el siguiente modelo Primal y su correspondiente Dual:

$$\begin{array}{cc} \text{Primal} & \text{Dual} \\ \text{MAX } Z = CX & \text{MIN } G = b^T Y \\ \text{sujeto a:} & \text{sujeto a:} \\ AX \leq b & A^T Y \geq C^T \\ X \geq 0 & Y \geq 0 \end{array}$$

Sean X_0 e Y_0 cualquiera de las soluciones posibles de los modelos Primal y Dual, respectivamente. Es decir:

$$AX_0 \leq b \qquad A^T Y_0 \geq C^T$$

para poder comparar ambas soluciones premultiplicamos un modelo (Primal) por la solución del otro modelo (Dual) y viceversa. Así multiplicando por Y_0 y por X_0 respectivamente:

$$Y_0^T A X_0 \leq Y_0^T b \qquad X_0^T A^T Y_0 \geq X_0^T C^T$$

y, por ser escalares:

$$Y_0^T A X_0 \leq b^T Y_0 \qquad X_0^T A^T Y_0 \geq C X_0$$

de donde se concluye que:

$$Z_0 = C X_0 \leq X_0^T A^T Y_0 = Y_0^T A X_0 \leq b^T Y_0 = G_0$$

o sea:

$$Z_0 \leq G_0$$

Por lo tanto, queda demostrado el siguiente teorema:

Teorema Débil

En un modelo de máximo, el valor de la funcion objetivo del Primal será siempre menor o igual que el valor de la función objetivo del Dual $Z_0 \leq G_0$. En caso de que el modelo Primal sea de mínimo entonces $Z_0 \geq G_0$.

De este teorema se deducen los siguientes corolarios[1]:

- **Corolario 1:** (Teorema fuerte de la Dualidad) Si X_0 e Y_0 son las soluciones óptimas, entonces los valores óptimos de las funciones objetivo Primal y Dual coinciden: $Z_0 = G_0$. Situación analítica de la que puede concluirse un significado equivalente para Z y G.

- **Corolario 2:** Si uno de los dos modelos tiene solución no acotada el otro no tiene solución.

- **Corolario 3:** Si uno de los modelos no tiene solución, el otro o tiene solución no acotada, o tampoco tiene solución.

De estos corolarios se deduce que determinada la solución de uno de los modelos, ya sea Primal o Dual, se conoce, **sin tenerlo que resolver** la solución del otro.

[1] Para una demostración detallada de estos resultados ver Ríos (1991).

Ejercicios

Se deja al lector la comprobación de los anteriores corolarios a partir de los siguientes modelos:

3.1 Comprobar que el modelo:

$$\begin{gathered}\text{MAX } Z = 4X_1 + 2X_2\\ \text{sujeto a:}\\ 2X_1 - 2X_2 \leq 10\\ 2X_1 - X_2 \leq 40\\ X_1, X_2 \geq 0\end{gathered}$$

tiene solución no acotada y su correspondiente Dual:

$$\begin{gathered}\text{MIN } G = 10Y_1 + 40Y_2\\ \text{sujeto a:}\\ 2Y_1 + 2Y_2 \geq 4\\ -2Y_1 - Y_2 \geq 2\\ Y_1, Y_2 \geq 0\end{gathered}$$

no tiene solución.

3.2 Comprobar que el modelo:

$$\begin{gathered}\text{MIN } Z = -4X_1 + 2X_2\\ \text{sujeto a:}\\ X_1 + X_2 \geq 10\\ -X_1 - X_2 \geq 5\\ X_1, X_2 \geq 0\end{gathered}$$

no tiene solución y su correspondiente Dual:

$$\begin{gathered}\text{MAX } G = 10Y_1 + 5Y_2\\ \text{sujeto a:}\\ Y_1 - Y_2 \leq -4\\ Y_1 - Y_2 \leq 2\\ Y_1, Y_2 \geq 0\end{gathered}$$

tiene solución no acotada.

Teorema de la Complementariedad

Dado el siguiente modelo Primal y su correspondiente Dual:

$$\begin{array}{cc}
\text{Primal} & \text{Dual} \\
\text{MAX } Z = CX & \text{MIN } G = b^T Y \\
\text{sujeto a:} & \text{sujeto a:} \\
AX \leq b & A^T Y \geq C^T \\
X \geq 0 & Y \geq 0
\end{array}$$

Vamos a buscar la tabla asociada a la solución óptima del modelo Primal. Como en el caso que nos ocupa las restricciones son todas ellas de "menor o igual", las variables básicas iniciales serán las de holgura. Variables que tienen asociado un coeficiente nulo en la función objetivo. En consecuencia, como ya sabemos, la tabla óptima genérica del modelo Primal puede concretarse en los siguientes términos:

			X	X^H
X^B	C^B	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	B^{-1}
$Z_0 = C^B B^{-1} b$			$C^B B^{-1} A - C$	$C^B B^{-1}$

Podemos ver como el valor de la función objetivo primal, Z_0, puede expresarse como producto del coeficiente en la función objetivo de las variables básicas por el valor de las mismas. Matricialmente:

$$Z_0 = C^B B^{-1} b$$

Además por el Teorema Débil de la dualidad sabemos que si el modelo tiene solución el valor de la función objetivo de los modelos Primal y Dual coinciden, esto es $Z_0 = G_0$.

Por tanto, en el óptimo, tendremos:

$$Z_0 = C^B B^{-1} b$$
$$G_0 = b^T Y_0 = Y_0^T b$$

por ser Z_0 y G_0 iguales:

$$C^B B^{-1} b = Y_0^T b$$

de donde se deduce que:

$$C^B B^{-1} = Y_0^T$$

valores que coinciden en la tabla óptima con los valores $Z_H - C_H$ asociados a las variables de holgura del modelo Primal. Uniendo este resultado con la interpretación de los $Z_H -$

C_H que hemos visto en el módulo 2 (sección 2.4.1. Interpretación de la tabla óptima) queda demostrado el siguiente teorema:

Teorema de la Complementariedad (a)

Los valores que toman las variables de decisión duales (Y) coinciden con los $Z_H - C_H$ de las variables de holgura primales en la tabla óptima. De aquí que puedan interpretarse como el incremento del valor de la función objetivo ante incrementos unitarios de los términos independientes de las restricciones a las que tales variables están asociadas. Es decir, las variables de decisión duales se interpretarán como precios sombra o costes de oportunidad de los recursos contemplados por las restricciones primales.

Ahora vamos a darles una interpretación a las variables de holgura duales. Por lo tanto analizaremos las restricciones duales:

$$A^T Y \geq C^T$$

Una vez introducidas las variables de holgura duales Y_H:

$$A^T Y - Y_H = C^T$$

despejando Y^H y trasponiendo la expresión, obtenemos:

$$Y^T A - C = Y_H^T$$

de donde, sustituyendo la expresión hallada para $Y^T = C^B B^{-1}$, queda:

$$C^B B^{-1} A - C = Y_H^T$$

valores que coinciden en la tabla óptima con los valores $Z_D - C_D$ asociados a las variables de decisión del modelo Primal. Uniendo este resultado con la interpretación de los $Z_D - C_D$ que hemos visto en el módulo 2 (sección 2.4.1. Interpretación de la tabla óptima) nos permite enunciar el siguiente teorema

Teorema de la Complementariedad (b)

Los valores que toman las variables de holgura del Dual (Y_H) coinciden con los $Z_D - C_D$ de las variables de decisión del Primal en la tabla óptima. Por lo tanto se interpretan como el empeoramiento que experimenta la función objetivo ante incrementos en las variables de decisión primales. Es decir, las variables de holgura duales se interpretan como costes reducidos de las variables de decisión del modelo primal.

De los anteriores teoremas, deducimos las siguientes relaciones entre los modelos Primal y Dual:

Primal			**Dual**
$\|Z_H - C_H\| > 0$	$\Rightarrow$	$X^H = 0$	$Y > 0$
$\|Z_H - C_H\| = 0$	$\Rightarrow$	$X^H > 0$	$Y = 0$
$\|Z_D - C_D\| > 0$	$\Rightarrow$	$X = 0$	$Y^H > 0$
$\|Z_D - C_D\| = 0$	$\Rightarrow$	$X > 0$	$Y^H = 0$

Ejemplo 3.2

Vamos a aplicar los resultados anteriores a la interpretación de la solución del siguiente modelo de producción. La función objetivo representa el margen bruto (en unidades monetarias) y las restricciones tres recursos limitados:

$$\begin{gathered}\text{MAX } Z = 280A + 360B \\ \text{sujeto a:} \\ 2A + 4B \leq 80 \\ 3A + 5B \leq 30 \\ A + 2B \leq 5 \\ A, B \geq 0\end{gathered}$$

Este modelo necesita la inclusión de 3 variables de holgura H_1, H_2 y H_3, con lo que el sistema de restricciones queda de la forma:

$$\begin{aligned} &2A + 4B + H_1 && && = 80 \\ &3A + 5B && + H_2 && = 30 \\ &A + 2B && && + H_3 = 5 \end{aligned}$$

y su tabla óptima es la siguiente:

			A	B	H_1	H_2	H_3
A	280	5	1	2	0	0	1
H_1	0	70	0	0	1	0	-2
H_2	0	15	0	-1	0	1	-3
$Z_0 = 1400$			0	200	0	0	280

El modelo Dual toma la forma:

$$\begin{gathered}\text{MIN } G = 80Y_1 + 30Y_2 + 5Y_3 \\ \text{sujeto a:} \\ 2Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \geq 280 \\ 4Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 \geq 360 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0\end{gathered}$$

Después de incluir las variables de holgura (negativas) necesarias el sistema de restricciones es:

$$\begin{aligned} 2Y_1 + 3Y_2 + Y_3 - Y_1^H \qquad &= 280 \\ 4Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 \qquad - Y_2^H &= 360 \end{aligned}$$

Analicemos ahora cuales son las relaciones Primal-Dual que proporciona el Teorema de la Complementariedad:

Variables de decisión duales:

$$\begin{array}{rcl} |Z_{H_1} - C_{H_1}| = 0 & \Rightarrow & Y_1 = 0 \\ |Z_{H_2} - C_{H_2}| = 0 & \Rightarrow & Y_2 = 0 \\ |Z_{H_3} - C_{H_3}| = 280 & \Rightarrow & Y_3 = 280 \end{array}$$

Variables de holgura duales:

$$\begin{array}{rcl} |Z_A - C_A| = 0 & \Rightarrow & Y_1^H = 0 \\ |Z_B - C_B| = 200 & \Rightarrow & Y_2^H = 200 \end{array}$$

Estas relaciones también son válidas para la obtención de las $Z - C$ duales, es decir, si los valores de las variables duales se corresponden a las $Z - C$ primales entonces las $Z - C$ duales se corresponderán al valor de las variables primales:

Variables de decisión primales:

$$\begin{array}{rcl} A = 5 & \Rightarrow & |Z_{Y_1^H} - C_{Y_1^H}| = 5 \\ B = 0 & \Rightarrow & |Z_{Y_2^H} - C_{Y_2^H}| = 0 \end{array}$$

Variables de holgura primales:

$$\begin{array}{rcl} H_1 = 70 & \Rightarrow & |Z_{Y_1} - C_{Y_1}| = 70 \\ H_2 = 15 & \Rightarrow & |Z_{Y_2} - C_{Y_2}| = 15 \\ H_3 = 0 & \Rightarrow & |Z_{Y_3} - C_{Y_3}| = 0 \end{array}$$

De aquí deducimos la tabla Dual óptima[2]:

			Y_1	Y_2	Y_3	Y_1^H	Y_2^H
Y_3	5	280	2	3	1	-1	0
Y_2^H	0	200	0	1	0	-2	1
$G_0 = 1400$			-70	-15	0	-5	0

Interpretación del modelo

- Modelo Primal: En un modelo de producción la función objetivo es una función de margen bruto expresada en unidades monetarias y las restricciones son de recursos limitados.

- Modelo Dual: En la función objetivo aparecen las cantidades de recursos limitados b_i, por lo tanto las variables duales Y serán los precios de oportunidad de estos recursos, es decir, la función objetivo es una función de coste de los recursos. En cuanto a las restricciones, para cada uno de los productos, expresan las necesidades de recursos por sus precios duales, o sea compara el coste máximo unitario del producto con beneficio unitario que nos proporciona el producto.

$$\begin{array}{l} \text{Coste máximo unitario de } A \geq \text{Beneficio unitario de A} \\ \text{Coste máximo unitario de } B \geq \text{Beneficio unitario de B} \end{array}$$

Vemos como en este caso el modelo Dual es un modelo *Coste-Beneficio* (este tipo de modelos intenta conseguir el máximo de beneficio a un coste mínimo de recursos). En nuestro ejemplo:

Variable Y_1:

$$Y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad |Z_{H_1} - C_{H_1}| = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 > 0 \qquad \Rightarrow \quad 2A + 4B < 80$$

b_1 es un recurso ocioso, por lo tanto el coste de oportunidad es cero.

Variable Y_2:

$$Y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |Z_{H_2} - C_{H_2}| = 0 \quad \Rightarrow \quad H_2 > 0 \qquad \Rightarrow \quad 3A + 5B < 30$$

[2]El cuerpo central de la tabla se obtiene multiplicando el sistema de ecuaciones original del modelo Dual por la correspondiente matriz B^{-1}, donde en este caso la matriz B toma la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ya que en el óptimo $Y^B = (Y_3, Y_2^H)$.

b_2 es un recurso ocioso, por lo tanto el coste de oportunidad es cero.

Variable Y_3:

$$Y_3 = 280 \quad \Rightarrow \quad |Z_{H_3} - C_{H_3}| = 280 \quad \Rightarrow \quad H_3 = 0 \qquad \Rightarrow \quad A + 2B = 5$$

b_3 es un recurso escaso, por lo tanto el coste de oportunidad es positivo (280), una unidad de b_3 supone un incremento en Z de 280.

Variable Y_1^H:

$$Y_1^H = 0 \quad (2Y_1 + 3Y_2 + Y_3 = 280) \quad \Rightarrow \quad |Z_A - C_A| = 0 \qquad \Rightarrow \quad A > 0$$

en este caso el coste marginal es igual al beneficio marginal, por lo que interesa producir A.

Variable Y_2^H:

$$Y_2^H = 200 \quad (4Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 > 360) \quad \Rightarrow \quad |Z_B - C_B| = 200 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

en este caso el coste marginal es mayor que el beneficio marginal, por lo tanto no interesa producir B.

Por tanto podemos ver que existen una serie de relaciones entre los modelos Primal y Dual no solamente referidas al valor que toman las variables en ambos modelos. Así también podemos analizar el efecto de modificaciones en el planteamiento inicial de los modelos. Por ejemplo:

- Introducir una nueva variable en el modelo Primal puede ser analizado a partir de la incorporación de una restricción en el modelo Dual.

- Los cambios efectuados en variables de decisión secundarias que en el Primal afectan a la optimalidad del modelo, pueden ser analizados como un problema de factibilidad en el modelo Dual.

- Cambios en términos independientes del modelo Primal, que afectan a la factibilidad, en el modelo Dual pueden analizarse como un problema de optimalidad.

3.3 Modelos duales de planteamientos no simétricos

Hasta el momento, hemos supuesto que el modelo Primal estaba expresado en forma simétrica. A continuación estudiaremos dos casos concretos en los que no se da esta circunstancia. Sea, en primer lugar, un modelo de máximo con restricciones de "mayor o igual". Es decir:

$$\begin{gathered}\text{Primal Original}\\ \text{MAX } Z = \sum_j C_j X_j\\ \text{sujeto a:}\\ \sum_j a_{ij} X_j \geq b_i \quad i = 1, \ldots, m\\ X_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n\end{gathered}$$

A fin de poder aplicar las reglas de definición del modelo Dual para un modelo expresado en forma simétrica, transformaremos, como primer paso, el modelo original para ajustarlo a tal forma. Así:

$$\begin{gathered}\text{Primal Simétrico}\\ \text{MAX } Z = \sum_j C_j X_j\\ \text{sujeto a:}\\ -\sum_j a_{ij} X_j \leq -b_i \quad i = 1, \ldots, m\\ X_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n\end{gathered}$$

Aplicando ahora las mencionadas reglas de definición, obtenemos el siguiente modelo Dual:

$$\begin{gathered}\text{Dual Provisional}\\ \text{MIN } G = -\sum_i b_i Z_i\\ \text{sujeto a:}\\ -\sum_i a_{ij} Z_i \geq C_j \quad j = 1, \ldots, n\\ Z_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m\end{gathered}$$

Sin embargo, sabemos que, según se deduce de la expresión:

$$Z = Z_0 - (Z_E - C_E)$$

hallada en el capítulo 4, el incremento del término independiente de una restricción de "mayor o igual" en un modelo de máximo supone una disminución del valor de la función objetivo.

En consecuencia y a fin de mantener la interpretación de las variables duales en los términos en que ha sido expuesta para un modelo simétrico, esto es, como incremento del valor de la función objetivo ante incrementos marginales del término independiente de la restricción primal a que está asociado, se manifiesta la necesidad de introducir la siguiente modificación en el modelo Dual obtenido:

$$\begin{gathered}\text{Dual Definitivo}\\ \text{MIN } G = \sum_i b_i Y_i\\ \text{sujeto a:}\\ \sum_i a_{ij} Y_i \geq C_j \quad j = 1, \ldots, n\\ Y_i \leq 0 \quad \text{donde } Y_i = -Z_i \;\; i = 1, \ldots, m\end{gathered}$$

En el bien entendido, que el modelo que deberíamos, en su caso, resolver mediante el algoritmo símplex debería ser no el Dual definitivo sino el anterior pues, recordemos, el citado algoritmo incorpora el supuesto de no negatividad de las variables.

Como segundo planteamiento no simétrico, estudiaremos a continuación el caso de un modelo de máximo con restricciones de igualdad:

$$\begin{gathered}\text{Primal Original}\\ \text{MAX } Z = \sum_j C_j X_j\\ \text{sujeto a:}\\ \sum_j a_{ij} X_j = b_i \quad i = 1, \ldots, m\\ X_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{Primal Simétrico}\\ \text{MAX } Z = \sum_j C_j X_j\\ \text{sujeto a:}\\ \sum_j a_{ij} X_j \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m\\ -\sum_j a_{ij} X_j \leq -b_i \quad i = 1, \ldots, m\\ X_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\text{Dual Provisional} \\
\text{MIN } G = \sum_i b_i Z_i^+ - \sum_i b_i Z_i^- \\
\text{sujeto a:} \\
\sum_i a_{ij} Z_i^+ - \sum_i a_{ij} Z_i^- \geq C_j \quad j = 1, \ldots, n \\
Z_i^+, Z_i^- \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\text{Dual Definitivo} \\
\text{MIN } G = \sum_i b_i Y_i \\
\text{sujeto a:} \\
\sum_i a_{ij} Y_i \geq C_j \quad j = 1, \ldots, n \\
Y_i = Z_i^+ - Z_i^+ \text{ no restringido en signo} \quad i = 1, \ldots, m
\end{gathered}$$

Ejemplo 3.3

Vamos a transformar el siguiente modelo Primal a su correspondiente Dual definitivo[3]:

$$\begin{gathered}
\text{MIN } Z = 30A + 60B + 20C \\
\text{sujeto a:} \\
4A + B + 2C \geq 500 \\
2A + 2B + 3C \leq 600 \\
A + B + C = 250 \\
A, B, C \geq 0
\end{gathered}$$

En primer lugar expresaremos el modelo en la forma Primal Simétrica, basta en este caso cambiar de sentido la segunda restricción (multiplicando la restricción original por -1) y desdoblar en dos inecuaciones la tercera restricción del modelo:

$$\begin{gathered}
\text{MIN } Z = 30A + 60B + 20C \\
\text{sujeto a:} \\
4A + B + 2C \geq 500 \\
-2A - 2B - 3C \geq -600 \\
A + B + C \geq 250 \\
-A - B - C \geq -250 \\
A, B, C \geq 0
\end{gathered}$$

[3]En Ríos (1997) aparecen algunos ejemplos en relación con este tipo de problemas.

Aplicando las reglas de la dualidad obtenemos el siguiente modelo Dual Provisional:

$$\begin{gathered}
\text{MAX } G = 500Y_1^+ - 600Y_2^- + 250Y_3^+ - 250Y_3^- \\
\text{sujeto a:} \\
4Y_1^+ - 2Y_2^- + Y_3^+ - Y_3^- \leq 30 \\
Y_1^+ - 2Y_2^- + Y_3^+ - Y_3^- \leq 60 \\
2Y_1^+ - 3Y_2^- + Y_3^+ - Y_3^- \leq 20 \\
Y_1^+, Y_2^-, Y_3^+, Y_3^- \geq 0
\end{gathered}$$

que nos lleva al modelo Dual Definitivo:

$$\begin{gathered}
\text{MAX } G = 500Y_1 + 600Y_2 + 250Y_3 \\
\text{sujeto a:} \\
4Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \leq 30 \\
Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \leq 60 \\
2Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \leq 20 \\
Y_1 \geq 0, Y_2 \leq 0, Y_3 \text{ no restringida en signo}
\end{gathered}$$

La tabla óptima correspondiente al modelo Primal toma la forma:

			A	B	C	E_1	A_1	H_2	A_3
A	30	150	1	1	0	0	0	-1	3
C	20	100	0	0	1	0	0	1	-2
E_1	0	300	0	3	0	1	-1	-2	8
$Z_0 = 6500$			0	-30	0	0	-M	-10	50-M

Mientras que la tabla óptima para el modelo Dual Provisional es:

			Y_1^+	Y_2^-	Y_3^+	Y_3^-	H_1	H_2	H_3
Y_2^-	-600	10	2	1	0	0	1	0	-1
H_2	0	30	-3	0	0	0	-1	1	0
Y_3^+	250	50	8	0	1	-1	3	0	-2
$Z_0 = 6500$			300	0	0	0	150	0	100

Se deja como ejercicio al lector comprobar las relaciones existentes entre el modelo Primal y Dual.

Finalmente, presentamos la siguiente tabla donde se resumen las relaciones existentes entre los modelos Primal y Dual y que nos permitirá facilmente el paso de un modelo a otro.

Restricciones Primales	MAX	MIN	Variables Duales
Simétricas	$\leq$	$\geq$	$Y \geq 0$
No Simétricas	$\geq$	$\leq$	$Y \leq 0$
Igualdad	$=$	$=$	No Restringida

Variables Primales	Restricciones Duales	MAX	MIN
$X \geq 0$	Simétrica	$\leq$	$\geq$
$X \leq 0$	No Simétrica	$\geq$	$\leq$
No Restringida	Igualdad	$=$	$=$

3.4 Factibilidad y optimalidad

Hasta el momento hemos estudiado el modo de resolver un modelo de optimización lineal bajo el supuesto de que disponíamos de un mecanismo por el que se generaba una solución factible (no negativa que satisfacía todas las restricciones) si bien no óptima, consistiendo el algoritmo estudiado en la mejora iterativa del valor de la función objetivo, respetando en cada paso la factibilidad de las soluciones sucesivamente propuestas.

Sin embargo, cabe plantearse la posibilidad de diseñar un algoritmo que permita llegar a la solución óptima del modelo, partiendo de una solución en la que se satisfaga el criterio de optimalidad establecido, pero no el de factibilidad, debido a la presencia de variables con valor negativo en la composición del vector básico. Este algoritmo se denomina *símplex-Dual*.

El planteamiento de esta cuestión no es gratuito, ya que como tendremos oportunidad de comprobar, el algoritmo símplex-Dual será de gran utilidad en el estudio del efecto sobre la solución óptima de modificaciones en el modelo inicial (por ejemplo, añadir nuevas restricciones, modificación de los términos independientes del programa, etc.). Análisis que serán desarrollados en capítulos posteriores.

3.4.1 Desarrollo analítico del algoritmo Símplex Dual

Supongamos, que nos encontramos con una determinada solución básica del sistema de restricciones de un modelo de **maximización**[4], para la que se cumple el criterio de optimalidad pero no él de factibilidad. Esto es, que:

$$Z_j - C_j \geq 0 \text{ para todo } X_j \in X^S$$

[4]En el caso de un modelo de minimización el razonamiento sería análogo.

mientras que existe alguna variable básica con valor negativo:

$$b_s < 0 \qquad X_s \in X^B$$

El objetivo del algoritmo será ahora factibilizar la solución, para lo que interesará extraer de la base las variables negativas. Concretamente, parece razonable elegir como variable saliente aquella que muestre el valor más negativo en este caso: $X_s = b_s$ con $b_s < 0$:

Obj. MAX o MIN: Criterio de selección de Variable Saliente

$$X_s \text{ tal que } b_s = \text{ MAX } \{|b_i|, \quad \text{para todo} \quad b_i < 0\}$$

Sustituida la variable X_s^B en la base por la variable entrante X_e a determinar, deberemos mantener la estructura general de cualquier tabla símplex que es, como sabemos:

$$X_i^B = b_i - \sum_{j \in X^S} a_{ij} X_j$$

Recordando el desarrollo analítico del algoritmo símplex expuesto en la sección 3.4, las operaciones que conlleva la modificación de la composición de los vectores básico y secundario (X^B y X^S) se traduce en:

1. La obtención de un coeficiente unitario para la variable entrante, X_e que ocupará la fila de la variable saliente, X_s, sustituida. Así, la restricción:

$$X_s^B = b_s - \sum_{j \neq e} a_{sj} X_j - a_{se} X_e$$

se transforma, dividiendo por a_{se} y despejando la nueva variable básica, en:

$$X_s^{NB} = X_e = \frac{b_s}{a_{se}} - \sum_{j \neq e} \frac{a_{sj}}{a_{se}} X_j - \frac{1}{a_{se}} X_s$$

2. La obtención de un coeficiente nulo en el resto de filas de la columna asociada a X_e. Objetivo que, como sabemos, se logra restando de la fila i-ésima actual la restricción transformada, multiplicada esta última por el coeficiente a_{ie} correspondiente a la variable entrante en la restricción que se está recalculando. Esto es:

$$X_i^{NB} = \left(b_i - a_{ie} \frac{b_s}{a_{se}} \right) - \sum_{j \in \hat{X}^{NS}} \left(a_{ij} - a_{ie} \frac{a_{sj}}{a_{se}} \right) X_j$$

A partir de estas expresiones, se deduce que:

- La variable entrante X_e que se seleccione debe tener un coeficiente negativo a_{se} en la fila de la variable saliente de la tabla actual, puesto que el valor de la nueva variable básica será:

$$X_s^{NB} = X_e = \frac{b_s}{a_{se}}$$

donde b_s es el valor, supuesto negativo, de la variable saliente en la solución actual. De este modo se asegura el carácter factible de la variable entrante ya que X_s^{NB} será positivo.

- Para asegurar el mantenimiento de la optimalidad de la solución, la variable entrante debe ser elegida de acuerdo con el siguiente criterio:

Obj. MAX o MIN: Criterio de selección de Variable Entrante

$$X_e \quad \text{tal que} \quad \frac{Z_e - C_e}{a_{se}} = \text{MIN}\left\{\sigma_j = \left|\frac{Z_j - C_j}{a_{sj}}\right| \ \text{para todo}\ a_{sj} < 0\right\}$$

NOTA: Si existe variable saliente pero no existe variable entrante o la variable entrante es una artificial **el modelo no tiene solución**.

Para llegar a deducir el anterior criterio, vamos a recordar en primer lugar el valor de algunas expresiones que posteriormente vamos a utilizar, en concreto los valores de los $Z_j - C_j$ de la tabla actual, esto es:

$$Z_j - C_j = \sum_i C_i^B a_{ij} - C_j = \sum_{i \neq s} C_i^B a_{ij} + C_s^B a_{sj} - C_j$$

términos no negativos ya que partimos de una solución que cumple el criterio de optimalidad.

Recalculando los elementos $Z_j - C_j$ de la nueva tabla, tenemos:

$$\begin{aligned}
Z_j^N - C_j &= \sum_i C_i^B a_{ij}^N - C_j \\
&= \sum_{i\neq s} C_i^B a_{ij}^N + C_e a_{sj}^N - C_j \\
&= \sum_{i\neq s} C_i^B \left(a_{ij} - a_{ie}\frac{a_{sj}}{a_{se}} \right) + C_e \frac{a_{sj}}{a_{se}} - C_j \\
& \quad \text{Sumando y restando el término } C_s^B a_{sj} \\
&= \sum_{i\neq s} C_i^B a_{ij} + C_s^B a_{sj} - C_j - \sum_{i\neq s} C_i^B \frac{a_{sj}}{a_{se}} a_{ie} + C_e \frac{a_{sj}}{a_{se}} - C_s^B a_{sj} \\
&= (Z_j - C_j) - \frac{a_{sj}}{a_{se}} \left(\sum_{i\neq s} C_i^B a_{ie} + C_s^B a_{se} - C_e \right) \\
&= (Z_j - C_j) - \frac{a_{sj}}{a_{se}} (Z_e - C_e)
\end{aligned}$$

de donde se deduce que el mantenimiento de la optimalidad de la solución exige se cumpla la condición:

$$Z_j^N - C_j = (Z_j - C_j) - \frac{a_{sj}}{a_{se}} (Z_e - C_e) \geq 0$$

Recordamos una vez más que los términos $Z_j - C_j$ y $Z_e - C_e$ son no negativos y que a_{se} es negativo. Estudiemos la condición anterior, en función del valor del término a_{sj}

- Si $a_{sj} = 0$, es claro que el nuevo término $Z_j^N - C_j$ no se verá afectado respecto de su valor en la tabla de referencia, con lo que no se vulnerará el criterio de optimalidad en este caso.

- Si $a_{sj} > 0$ la condición se cumplirá igualmente, dado el signo negativo del término a_{se}, como se ha comprobado anteriormente.

- Si, en cambio, $a_{sj} < 0$ surgen los problemas puesto que el cumplimiento de la condición dependerá de los valores concretos de cada uno de sus elementos:

$$(Z_j - C_j) \geq \frac{a_{sj}}{a_{se}} (Z_e - C_e)$$

Así pues, teniendo en cuenta el signo de a_{sj}, la condición anterior puede expresarse como:

$$\frac{Z_j - C_j}{a_{sj}} \leq \frac{Z_e - C_e}{a_{se}}$$

condición que se cumplirá siempre que el criterio de elección de la variable entrante haya sido el antes especificado.

EJEMPLO 3.5

Siguiendo con el ejemplo 1.1, supongamos que la exigencia de fabricación del producto X_2 es ahora igual a 200. La tabla óptima obtenida anteriormente era:

			10	4	0	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	25	0	0	1	-1/4	5/2	-5/2
X_1	10	125	1	0	0	1/4	1/2	-1/2
X_2	4	150	0	1	0	0	-1	1
$Z_0 = 1850$			0	0	0	10/4	1	-1+M

Al modificar el tercer término independiente en el modelo original el valor de las variables básicas de la tabla óptima anterior ha cambiado de la forma:

$$X^{NB} = B^{-1}b = B^{-1}\begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

con lo que la anterior tabla quedará:

			10	4	0	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	-100	0	0	1	-1/4	5/2	-5/2
X_1	10	100	1	0	0	1/4	1/2	-1/2
X_2	4	200	0	1	0	0	-1	1
$Z_0 = 1850$			0	0	0	10/4	1	-1+M
σ_j			-	-	-	$\frac{10/4}{1/4} = 10$	-	$\frac{-1+M}{5/2} = \frac{2}{5}(-1+M)$

Esta tabla cumple el criterio de optimalidad del algoritmo símplex pero no el de factibilidad, será necesario aplicar el algoritmo símplex-Dual para factibilizar la solución.

Criterio de la variable de salida: La aplicación del criterio de salida nos lleva directamente a considerar a H_1 como variable saliente, en este caso es la única variable básica que tiene valor negativo (-100).

Criterio de la variable de entrada: Para determinar la variable entrante tenemos que calcular los valores:

$$\sigma_j = \left| \frac{Z_j - C_j}{a_{sj}} \right| \qquad \forall a_{sj} < 0$$

y seleccionar aquella variable que nos proporciona un σ_j menor. En la tabla precedente se observa que en este caso dicho σ_j corresponde a la variable H_2 $(10 < \frac{2}{5}(-1+M))$. La nueva solución básica está formada por las variables (H_2, X_1, X_2).

Mediante las transformaciones necesarias, análogas a las descritas en el capítulo dedicado al algoritmo símplex (ver el ejemplo correspondiente), llegamos a la siguiente tabla:

			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3
H_2	0	400	0	0	-4	1	-10	10
X_1	10	0	1	0	1	0	3	-3
X_2	4	200	0	1	0	0	-1	1
$Z_0 = 800$			0	0	10	0	26	-26+M

Tabla que sigue cumpliendo el criterio de optimalidad y ahora también el de factibilidad, por lo que ya hemos encontrado la solución óptima a nuestro problema.

Módulo 4

Análisis de Sensibilidad

Con la denominación de *Análisis de Sensibilidad* se conoce el estudio de los margenes de variación permitido de los coeficientes del modelo de P.L. sin que ello afecte a la composición del vector básico y, en consecuencia, continúen siendo válidas las interpretaciones de la solución óptima obtenida con el planteamiento original.

Nos referiremos, concretamente, al análisis de cambios en los coeficientes de las variables de decisión en la función objetivo y de los términos independientes de las restricciones. En la medida en que el estudio se limite a cambios individuales de un solo elemento, nos estaremos refiriendo al denominado Análisis de Sensibilidad de la solución óptima.

Nótese que el análisis de sensibilidad de los valores dados a los diferentes coeficientes del modelo, permite medir la importancia de la incertidumbre que inicialmente se pudiera tener en su estimación. Así, los coeficientes más sensibles requerirán de una especial atención en su cuantificación.

4.1 Análisis de Sensibilidad

4.1.1 Análisis de Sensibilidad de los coeficientes de la F.O.

El análisis de sensibilidad pretende determinar el rango de variación permitido sobre un determinado elemento del modelo, en este caso los coeficientes de la función objetivo, de modo que no se modifique la composición del vector básico óptimo. Es decir, que la estructura de la tabla óptima obtenida no se vea afectada, esto es, que la solución óptima obtenida siga manteniendo el criterio de optimalidad y el de factibilidad.

Vulnerar el criterio de optimalidad se producirá cuando, para un modelo de máximo (mínimo), algún término $Z-C$ pase a ser negativo (positivo). En cuanto al de factibilidad se vulnerará este criterio cuando alguna de las variables básicas óptimas pase a tomar valores negativos.

Para comprobar el efecto que sobre alguno de los dos criterios tiene la modificación de los diferentes coeficientes de la función objetivo, utilizaremos la tabla símplex de la solución óptima actual, distinguiendo entre variables básicas y secundarias en el óptimo.

Es decir, dado un modelo de Programación Lineal:

$$\begin{gathered}\text{OPT } Z = C^B X^B + C^S X^S \\ \text{sujeto a:} \\ BX^B + SX^S = b \\ X^B, X^S \geq 0\end{gathered}$$

utilizaremos su tabla óptima:

			X^B	X^S
X_i^B	C_i^B	b_i'	I	a_{ij}'
Z_0			$Z_j - C_j = 0$	$Z_j - C_j$

Notamos: $A' = (a_{ij}'), b' = (b_i'), T = (I, A')$, $C^B = (C_i^B)$ vector fila y $Z - C = (Z_j - C_j)$ vector fila. Con esta definición la matriz T representa el cuerpo central de la tabla óptima.

Recordamos también que la matriz B^{-1} se encuentra asociada las columnas de las variables que en la tabla inicial fueron básicas, generalmente, variables de holgura H_i y artificiales A_i. Se cumple que: $b' = B^{-1}b$.

Modificación de los coeficientes de variables secundarias

Sea X_v una variable de decisión secundaria en la tabla óptima y C_v su coeficiente en la función objetivo, es decir, $C_v \in C_j$ con $X_j \in X^S$, siendo C_v el coeficiente a modificar.

Como puede observarse en la tabla anterior, la modificación del coeficiente en la función objetivo de una variable de decisión secundaria afecta únicamente al cálculo del $Z - C$ de esta variable, por lo que tal modificación puede provocar cambios en la tabla a través de la violación del criterio de optimalidad.

Así, si en la tabla óptima tenemos inicialmente:

$$Z_v - C_v = \sum_i C_i^B a'_{iv} - C_v = C^B a'_v - C_v$$

Al cambiar el coeficiente C_v, por el nuevo coeficiente C_v^N, se tendrá que calcular el nuevo $Z_v - C_v^N$ de la variable, que será igual a:

$$Z_v - C_v^N = C^B a'_v - C_v^N$$

si este nuevo valor cumple el criterio de optimalidad, la tabla permanecerá óptima. Sin embargo, si no lo cumple, tendremos que aplicar el método símplex para alcanzar de nuevo la optimalidad.

Ejemplo 4.1

Sea el modelo:

$$\begin{gathered}\text{MAX } Z = 100X_1 + 200X_2 + 50X_3 \\ \text{sujeto a:} \\ 5X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 1000 \\ 10X_1 + 8X_2 + 5X_3 \leq 2000 \\ 10X_1 + 5X_2 \leq 500 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0\end{gathered}$$

cuya tabla óptima es:

			100	200	50	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3
X_3	50	50	-0.5	0	1	0.1	0	-0.1
H_2	0	950	-3.5	0	0	-0.5	1	-1.1
X_2	200	100	2	1	0	0	0	0.2
$Z_0 = 22500$			275	0	0	5	0	35

La variable X_1 es una variable de decisión no básica. Supongamos que cambiamos su coeficiente en la función objetivo, hacemos $C_1^N = 100 - 10 = 90$, recalculando su $Z - C$ asociado obtenemos:

$$Z_1 - C_1^N = C^B a'_1 - C_1^N = (50, 0, 200) \begin{pmatrix} -0.5 \\ -3.5 \\ 2 \end{pmatrix} - 90 = 375 - 90 = 285$$

Este valor $Z_1 - C_1^N = 285$ cumple con la optimalidad, por tanto, la estructura de la tabla óptima se mantiene y podemos, afirmar que la tabla óptima cuando $C_1 = 90$ es:

			90	200	50	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3
X_3	50	50	-0.5	0	1	0.1	0	-0.1
H_2	0	950	-3.5	0	0	-0.5	1	-1.1
X_2	200	100	2	1	0	0	0	0.2
$Z_0 = 22500$			285	0	0	5	0	35

Volviendo al modelo inicial, supongamos ahora que para X_1 cambiamos su coeficiente en la función objetivo y hacemos $C_1^N = 100 + 300 = 400$, recalculando su $Z - C$ asociado obtenemos:

$$Z_1 - C_1^N = C^B a_1' - C_1^N = (50, 0, 200) \begin{pmatrix} -0.5 \\ -3.5 \\ 2 \end{pmatrix} - 400 = 375 - 400 = -25$$

y la tabla toma la forma:

			400	200	50	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3
X_3	50	50	-0.5	0	1	0.1	0	-0.1
H_2	0	950	-3.5	0	0	-0.5	1	-1.1
X_2	200	100	2	1	0	0	0	0.2
$Z_0 = 22500$			-25	0	0	5	0	35

Ahora, este valor $Z_1 - C_1^N = -25$ no cumple con la optimalidad para un modelo de maximización, por tanto, la estructura de la tabla óptima no se mantiene y tenemos que aplicar el algoritmo símplex para alcanzar la nueva solución. En este caso tomaremos como variable entrante X_1 y como saliente X_2. La nueva tabla es:

			400	200	50	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3
X_3	50	75	0	0.25	1	0.1	0	-0.05
H_2	0	1125	0	1.75	0	-0.5	1	-0.75
X_1	400	50	1	0.5	0	0	0	0.1
$Z_0 = 23750$			0	12.5	0	5	0	37.5

Si pensamos en un modelo de producción en él que estamos maximizando los beneficios, hemos aumentado tanto el beneficio del producto X_1 que ahora sí interesa fabricarlo en detrimento del producto X_2.

<u>**Intervalo de variación**</u>

Supongamos que nos hacemos la siguiente pregunta ¿entre que valores se puede mover el coeficiente en la función objetivo de X_1 de manera que se mantenga el plan de producción óptimo? Es decir, que se mantenga la estructura de la tabla óptima.

Para resolver, este tipo de cuestiones, expresamos el $Z_1 - C_1$ de la variable X_1 en función de C_1:

$$Z_1 - C_1 = C^B a_1' - C_1 = (50, 0, 200) \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3.5 \\ 2 \end{pmatrix} - C_1 = 375 - C_1$$

Entonces, si

$$Z_1 - C_1 = 375 - C_1 \geq 0$$

la tabla continua cumpliendo el criterio de optimalidad y sigue siendo óptima. Es decir, siempre que $C_1 \leq 375$, se mantiene la estructura de la tabla óptima y su plan de producción. Cuando $C_1 = 375$ el modelo tiene soluciones múltiples y para valores mayores a 375 el plan de producción será otro (hemos visto el caso $C_1 = 400$).

Modificación de los coeficientes de variables básicas

Sea X_i una variable de decisión básica en la tabla óptima y C_i su coeficiente en la función objetivo, es decir, $C_i \in C_i^B$ con $X_i \in X^B$, siendo C_i el coeficiente a modificar.

Como puede observarse en la tabla anterior, la modificación del coeficiente en la función objetivo de una variable de decisión básica afecta al cálculo de todos los $Z - C$ de la tabla, por lo que tal modificación puede provocar cambios en la tabla a través de la violación del criterio de optimalidad.

Al cambiar el coeficiente C_i, por el nuevo coeficiente C_i^N, se tendrán que calcular todos los nuevos $Z - C$ de la tabla y el nuevo valor de la función objetivo, que podemos calcular mediante las expresiones:

$$Z^N - C^N = C^{NB}\, T - C^N \qquad Z^N = C^{NB}\, b'$$

si todos estos nuevos valores cumplen el criterio de optimalidad, la tabla permanecerá óptima. Sin embargo, si no lo cumple, tendremos que aplicar el método símplex para alcanzar de nuevo la optimalidad.

Ejemplo 4.2

Siguiendo con el modelo anterior y su tabla óptima:

			100	200	50	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3
X_3	50	50	-0.5	0	1	0.1	0	-0.1
H_2	0	950	-3.5	0	0	-0.5	1	-1.1
X_2	200	100	2	1	0	0	0	0.2
$Z_0 = 22500$			275	0	0	5	0	35

La variable X_2 es una variable de decisión básica. Supongamos que cambiamos su coeficiente en la función objetivo, hacemos $C_2^N = 210$, recalculando la fila de los $Z - C$ obtenemos:

$$Z^N - C^N = (50, 0, 210) \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 1 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ -3.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & -1.1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} - (100, 210, 50, 0, 0, 0)$$

$$= (395, 210, 50, 5, 0, 37) - (100, 210, 50, 0, 0, 0)$$

$$= (295, 0, 0, 5, 0, 37)$$

Observamos que todos los $Z - C$ cumplen el criterio de optimalidad, por lo tanto, la estructura de la tabla óptima se mantiene.

El nuevo valor de la función objetivo es:

$$Z^N = C^{NB}\, b' = (50, 0, 210) \begin{pmatrix} 50 \\ 950 \\ 100 \end{pmatrix} = 23500$$

Por lo tanto la tabla óptima del nuevo modelo es:

			100	210	50	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3
X_3	50	50	-0.5	0	1	0.1	0	-0.1
H_2	0	950	-3.5	0	0	-0.5	1	-1.1
X_2	210	100	2	1	0	0	0	0.2
$Z_0 = 23500$			295	0	0	5	0	37

Intervalo de variación

Supongamos que nos hacemos la siguiente pregunta ¿entre que valores se puede mover el coeficiente en la función objetivo de X_2 de manera que se mantenga el plan de producción óptimo? Es decir, de manera que se mantenga la estructura de la tabla óptima.

Para resolver, este tipo de cuestiones, expresamos todos los $Z - C$ en función de C_2, esto es:

$$Z - C = (50, 0, C_2)\begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 1 & 0.1 & 0 & -0.1 \\ -3.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & -1.1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} - (100, C_2, 50, 0, 0, 0)$$

$$= (-25 + 2C_2, C_2, 50, 5, 0, -5 + 0.2C_2) - (100, C_2, 50, 0, 0, 0)$$

$$= (-125 + 2C_2, 0, 0, 5, 0, -5 + 0.2C_2)$$

Por lo tanto, para que tabla siga siendo óptima, se tienen que cumplir las condiciones:

$$Z_1 - C_1 = -125 + 2C_2 \geq 0 \Leftrightarrow C_2 \geq 62.5$$

$$Z_{H1} - C_{H1} = 5 \qquad \geq 0$$

$$Z_{H3} - C_{H3} = -5 + 0.2C_2 \geq 0 \Leftrightarrow C_2 \geq 25$$

Por lo tanto, la tabla sigue siendo óptima si $C_2 \geq 62.5$. En este intervalo la función objetivo toma valor:

$$Z = C^B\, b' = (50, 0, C_2)\begin{pmatrix} 50 \\ 950 \\ 100 \end{pmatrix} = 2500 + 100C_2$$

Para $C_2 = 62.5$ tenemos soluciones múltiples y para valores inferiores la estructura de la tabla óptima sería otra.

4.1.2 Análisis de Sensibilidad de los términos independientes

Aplicando la expresión matricial del algoritmo símplex sabemos que el valor de las variables básicas en el óptimo se puede calcular mediante la expresión:

$$X^B = B^{-1}b$$

donde b es el vector de los términos independientes del modelo original.

Por tanto, si en el modelo original únicamente cambiamos un término independiente, en la tabla óptima únicamente tendremos que calcular el nuevo valor de las variables básicas y el nuevo valor de Z. El resto de la tabla **no se modifica**.

Supongamos que modificamos un término independiente de manera que el vector b pasa a ser b^N, el nuevo valor de las variables básicas lo podemos recalcular con la expresión:

$$X^{NB} = B^{-1} b^N$$

y el nuevo valor de la función objetivo será:

$$Z^N = C^B \, X^{NB}$$

Si con este cambio todos los nuevos valores de las variables básicas siguen siendo positivos, esto es, $X^{NB} \geq 0$, la tabla sigue siendo una tabla óptima y la estructura de la misma no se modifica. En el caso que aparezca alguna variable básica con valor negativo será necesario aplicar el algoritmo símplex Dual, ya que habremos obtenido que cumple el criterio de optimalidad pero no él de factibilidad.

EJEMPLO 4.3

Siguiendo con el modelo anterior y su tabla óptima inicial. Supongamos que aumentamos el primer término independiente $b_1 = 1000$ aumenta 100 unidades hasta $b_1^N = 1100$. Entonces el nuevo vector b toma la forma:

$$b^N = \begin{pmatrix} 1100 \\ 2000 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Esta modificación provoca en la tabla óptima el cambio en el valor de las variables básicas mediante la expresión:

$$X^{NB} = B^{-1}b^N = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.5 & 1 & -1.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1100 \\ 2000 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 900 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Cómo todos los valores son mayores o iguales a cero la solución es factible y su tabla asociada será la óptima para el nuevo problema. Podemos calcular el nuevo valor de la función objetivo mediante la expresión:

$$Z^N = C^B\, X^{NB} = (50, 0, 200) \begin{pmatrix} 60 \\ 900 \\ 100 \end{pmatrix} = 23000$$

Este valor de Z tendría que coincidir con el calculado a partir del precio sombra de la primera restricción $Z_{H1} = 5$ y la conocida expresión:

$$Z^N = Z_0 + \alpha Z_{H1} = 22500 + (100)5 = 23000$$

Observamos, que en efecto, obtenemos el mismo valor de la función objetivo.

La tabla óptima del nuevo modelo es:

			100	200	50	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3
X_3	50	60	-0.5	0	1	0.1	0	-0.1
H_2	0	900	-3.5	0	0	-0.5	1	-1.1
X_2	200	100	2	1	0	0	0	0.2
$Z_0 = 23000$			275	0	0	5	0	35

Intervalo de variación

Supongamos que nos hacemos la siguiente pregunta ¿entre que valores se puede mover el primer término independiente de manera que se mantenga la estructura de la tabla óptima?

Para resolver, este tipo de cuestiones, expresamos todos los nuevos valores de las variables básicas en función de b_1, esto es:

$$X^{NB} = B^{-1}b^N = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.5 & 1 & -1.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 2000 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1b_1 - 50 \\ -0.5b_1 + 1450 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Para que solución sea factible es necesario que $X^{NB} \geq 0$, es decir, siempre que:

$$0.1b_1 - 50 \geq 0 \Leftrightarrow b_1 \geq 500$$

$$-0.5b_1 + 1450 \geq 0 \Leftrightarrow b_1 \leq 2900$$

$$100 \geq 0 \qquad OK$$

Por tanto, la estructura de la tabla óptima se mantiene siempre que $b_1 \in [500, 2900]$. En los extremos obtendremos soluciones degeneradas. Para valores de b_1 fuera de dicho intervalo la estructura de la tabla óptima será otra.

En este intervalo, podemos calcular el valor de Z en función de b_1 mediante la expresión:

$$Z^N = C^B\, X^{NB} = (50, 0, 200) \begin{pmatrix} 0.1b_1 - 50 \\ -0.5b_1 + 1450 \\ 100 \end{pmatrix} = 17500 + 5b_1$$

4.2 Análisis Post-óptimo

A partir de ahora, vamos a introducir modificaciones en el modelo original, así por ejemplo en este capítulo estudiaremos la incorporación de nuevas variables y nuevas restricciones en el planteamiento inicial.

El objetivo del análisis post-óptimo es utilizar la tabla óptima del modelo original para introducir estos nuevos elementos y analizar hasta que punto son compatibles con la solución óptima anterior. Por tanto, no se plantea volver a resolver de nuevo el modelo con estos elementos, sino incorporarlos a una tabla óptima ya encontrada.

La introducción de estos nuevos elementos en la tabla óptima puede llevar al incumplimiento o bien del criterio de optimalidad o bien el de factibilidad. En el primer caso para obtener una nueva tabla óptima será necesario la aplicación del algoritmo símplex y en el segundo caso para factibilizar la solución utilizaremos el algoritmo símplex Dual estudiado anteriormente.

Como en los casos estudiados en la sección anterior, partiremos de un modelo de Programación Lineal y de su tabla óptima.

Para comprobar el efecto que sobre alguno de los dos criterios tiene la modificación de los diferentes coeficientes de la función objetivo, utilizaremos la tabla símplex de la solución óptima actual, distinguiendo entre variables básicas y secundarias en el óptimo.

Es decir, dado un modelo de Programación Lineal:

$$\begin{gathered}\text{OPT } Z = C^B X^B + C^S X^S \\ \text{sujeto a:} \\ BX^B + SX^S = b \\ X^B, X^S \geq 0\end{gathered}$$

utilizaremos su tabla óptima:

			X^B	X^S
X_i^B	C_i^B	b_i'	I	a_{ij}'
Z_0			$Z_j - C_j = 0$	$Z_j - C_j$

Notamos: $A' = (a_{ij}'), b' = (b_i'), T = (I, A')$, $C^B = (C_i^B)$ vector fila y $Z - C = (Z_j - C_j)$ vector fila. Con esta definición la matriz T representa el cuerpo central de la tabla óptima.

4.2.1 Incorporación de una nueva variable

Si añadimos una nueva variable al modelo, el nuevo planteamiento del modelo será:

$$\begin{gathered}\text{OPT } Z = C^B X^B + C^S X^S + C_v X_v \\ \text{sujeto a:} \\ BX^B + SX^S + a_v X_v = b \\ X^B, X^S, X_v \geq 0\end{gathered}$$

Incorporar una nueva variable X_v al modelo inicial con coeficiente en la función objetivo C_v y coeficientes técnicos en las restriciones a_v, supone estudiar el efecto que esta incorporación producirá sobre la solución óptima actual, que no se modificará mientras se mantenga el criterio de optimalidad asociado al valor de los $Z - C$ de la tabla.

Para determinar el valor de $Z_v - C_v$, la variable X_v se incorpora a la tabla como una variable secundaria, calculando los coeficientes técnicos en la tabla óptima asociados a X_v:

$$a'_v = B^{-1} a_v$$

A partir de aquí calculamos su $Z - C$ asociado:

$$Z_v - C_v = C^B \, a'_v$$

y añadimos en la tabla una nueva columna con toda la información calculada para la nueva variable X_v:

			X^B	X^S	X_v
X_i^B	C_i^B	b'_i	I	a'_{ij}	a'_{iv}
Z_0			$Z_j - C_j = 0$	$Z_j - C_j$	$Z_v - C_v$

Por tanto si al calcular el $Z_v - C_v$ de la nueva variable X_v, éste cumple el criterio de optimalidad, en el sentido de que: $Z_v - C_v \geq 0$ en un modelo de máximo o $Z_v - C_v \leq 0$ en un modelo de mínimo, la solución óptima actual no se modifica y variable X_v tomará valor cero y tendrá consideración de secundaria. Si el $Z_v - C_v$ no cumple el criterio de optimalidad, la variable X_v entrará en la solución básica y la solución óptima actual se modificará, por lo que el valor de la función objetivo mejorará.

Ejemplo 4.4

Ya conocemos la solución óptima correspondiente al siguiente modelo de P.L.:

$$\begin{array}{c} \text{MAX } Z = 10X_1 + 4X_2 \\ \text{sujeto a:} \\ X_1 + 3X_2 \leq 600 \\ 4X_1 + 2X_2 \leq 800 \\ X_2 \geq 150 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{array}$$

cuya tabla óptima es:

			10	4	0	0	0	-M
			X_1	X_2	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	25	0	0	1	-1/4	5/2	-5/2
X_1	10	125	1	0	0	1/4	1/2	-1/2
X_2	4	150	0	1	0	0	-1	1
$Z_0 = 1850$			0	0	0	10/4	1	-1+M

Supongamos que se fabrica un nuevo producto C que produce un margen de beneficio de 2 u.m./u. Para producir una unidad de este producto se necesitan 2 horas de mano de obra y 1 hora de maquinaria.

Nuestro problema original se ha transformado en:

$$\begin{array}{c} \text{MAX } Z = 10X_1 + 4X_2 + 2X_3 \\ \text{sujeto a:} \\ X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 600 \\ 4X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 800 \\ X_2 \qquad\quad \geq 150 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{array}$$

Con la notación utilizada anteriormente tenemos:

$$C_{X_3} = 2 \quad a_{X_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes a introducir en la tabla óptima son:

$$a'_{X_3} = B^{-1} a_{X_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -5/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y el correspondiente $Z - C$:

$$Z_{X_3} - C_{X_3} = C^B\, a'_{X_3} - C_{X_3} = (0 \quad 10 \quad 4) \begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = \frac{10}{4} - 2 = \frac{1}{2}$$

La nueva tabla es:

			10	4	2	0	0	0	-M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	25	0	0	7/4	1	-1/4	5/2	-5/2
X_1	10	125	1	0	1/4	0	1/4	1/2	-1/2
X_2	4	150	0	1	0	0	0	-1	1
$Z_0 = 1850$			0	0	1/2	0	10/4	1	-1+M

Tabla que continúa cumpliendo el criterio de optimalidad y es, por tanto, la solución óptima del nuevo modelo.

Se deja como ejercicio al lector estudiar cuál debería ser el coeficiente mínimo de la variable X_3 para que entrara a formar parte de la solución básica y el efecto que esto supone sobre la función objetivo.

Modificación coeficientes técnicos

Un problema similar al de incorporación de variables es cuando se realiza **alguna modificación en los coeficientes técnicos asociados a variables de decisión secundarias**, si la variación de coeficientes afecta a alguna variable básica, la modificación de la tabla óptima actual sería de tal magnitud que hace aconsejable resolver de nuevo el modelo para los nuevos coeficientes, en lugar de trabajar con la solución óptima actual.

Si en la matriz S de coeficientes técnicos originales de las variables secundarias en la tabla óptima actual, distinguimos entre las variables secundarias que no modifican sus coeficientes S_1 y las que cambian los coeficientes S_2 por los nuevos coeficientes S_2^*, la matriz S pasa a ser S^*:

$$S = [S_1 \quad S_2] \qquad S^* = [S_1 \quad S_2^*]$$

Este cambio no modificará la solución óptima actual mientras se mantenga el criterio de optimalidad, que vendrá indicado por los nuevos $Z^* - C^*$ de las variables secundarias, esto es:

$$Z^* - C^* = \left[C^B B^{-1} S_1 - C^{S_1} \quad C^B B^{-1} S_2^* - C^{S_2}\right]$$

En consecuencia, se observa que el único efecto sobre la solución actual se produce a través de los Z^* de las variables secundarias cuyos coeficientes se modifican. Si alguno de los valores del vector $Z^* - C^*$ no cumple el criterio de optimalidad, el vector básico se modificará e iterando con el algoritmo símplex se obtendrá la nueva solución óptima que mejorará el valor de la función objetivo.

EJEMPLO 4.5

Supongamos que por algún motivo cambiamos los coeficientes asociados al nuevo producto C, siendo ahora éstos:

$$a_{X_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los nuevos valores a introducir en la tabla serán:

$$a^*_{X_3} = B^{-1} a_{X_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -5/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que la nueva tabla es:

			10	4	2	0	0	0	-M
			X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	E_3	A_3
H_1	0	25	0	0	3/4	1	-1/4	5/2	-5/2
X_1	10	125	1	0	1/4	0	1/4	1/2	-1/2
X_2	4	150	0	1	0	0	0	-1	1
$Z_0 = 1850$			0	0	1/2	0	10/4	1	-1+M

Tabla que continúa siendo óptima.

4.2.2 Incorporación de una nueva restricción

Supongamos que necesitamos añadir al planteamiento inicial una restricción (supongamos de menor o igual). Para evaluar su efecto basta verificar si la solución óptima satisface la nueva restricción. Si es así, se considera que no hay efecto y la solución óptima sigue siendo la solución óptima para el nuevo problema con la restricción añadida.

Sin embargo, si la solución óptima no cumple la restricción, hay que evaluar el efecto que existe sobre la solución. Tal evaluación se hace incorporando a la tabla óptima la nueva restricción considerando además una nueva variable de holgura asociada a dicha restricción. Esta introducción de la restricción en la tabla "rompe" la estructura de tabla símplex. Para volver a tener una tabla ”con formato” símplex necesitaremos hacer unas operaciones, parecidas a las realizadas en los cambios de tabla, que ”recuperen” ese ”formato” símplex.

Ejemplo 4.6

Sea el modelo:

$$\text{MAX } Z = 5X_1 + 3X_2$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$2X_1 + X_2 \leq 5$$
$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

cuya tabla óptima es:

			X_1	X_2	H_1	H_2
X_1	5	1.5	1	0	1.5	-0.5
X_2	3	2	0	1	-2	1
$Z_0 = 13.5$			0	0	1.5	0.5

Supongamos se desea añadir al modelo original la restricción:

$$X_1 \leq 1$$

En primer lugar, observamos que en la solución óptima actual $X_1 = 1.5$, por tanto, la solución óptima no cumple con la nueva restricción y tendremos que evaluar el efecto de incluirla.

Transformamos la restricción en igualdad añadiendo la correspondiente variable de holgura, digamos H_3:

$$X_1 + H_3 = 1$$

Incorporamos a la tabla óptima la restricción y la nueva variable de holgura H_3 que además, añadimos como tercera variable básica:

			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
X_1	5	1.5	1	0	1.5	-0.5	0
X_2	3	2	0	1	-2	1	0
H_3	0	1	**1**	0	0	0	1
$Z_0 = 13.5$			0	0	1.5	0.5	0

Observamos que esta tabla no tiene "formato" símplex, si X_1 es la primera variable básica tiene que tener asociado el vector $(1, 0, 0)$. Digamos que sobra el "1" que hemos marcado en negrita.

Para hacer "0" esa posición sencillamente le restamos a la tercera fila la primera, obteniendo la tabla:

			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
X_1	5	1.5	1	0	1.5	-0.5	0
X_2	3	2	0	1	-2	1	0
H_3	0	**-0.5**	0	0	**-1.5**	**0.5**	1
$Z_0 = 13.5$			0	0	1.5	0.5	0

Esta tabla cumple el criterio de optimalidad pero no él de factibilidad ya que la variable H_3 toma valor negativo. Esto indica la necesidad de aplicar el algoritmo símplex Dual, tomando como variable saliente H_3 y entrante H_1, realizada la pivotación obtenemos la tabla:

			X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
X_1	5	1	1	0	0	0	1
X_2	3	8/3	0	1	0	1/3	-4/3
H_1	0	1/3	0	0	1	-1/3	-2/3
$Z_0 = 13$			0	0	0	1	1

Observamos que la tabla cumple el criterio de factibilidad y él de optimalidad, con lo que ya hemos obtenido la tabla óptima del nuevo modelo. Observar que, como era de esperar, el valor de Z ha disminuido.

NOTA: Si tenemos que añadir al modelo una restricción de mayor o igual lo más sencillo es multiplicarla por -1 convirtiéndola en una de menor o igual y seguir el proceso descrito anteriormente.

Módulo 5

Aplicaciones de la Programación Lineal

En este capítulo se expondrá un conjunto de planteamientos genéricos de Programación Lineal cuyo denominador común es pertenecer a la modelización de problemas que pueden representarse de modo natural a través de una *red o grafo*.

El principal motivo que justifica el interés de analizar de modo aislado planteamientos con características especiales como los que se abordará a continuación, radica en la existencia de algoritmos más eficientes que el método símplex estándar para resolver cada tipo concreto de modelo, aprovechando las peculiaridades analíticas de la representación formal de los mismos[1].

Habitualmente se dota de una denominación especial a cada una de las categorías de problemas, al objeto de identificar su particular estructura que podrá ser utilizada a la hora de definir los algoritmos de resolución. Con todo, nos va a preocupar de modo prioritario el conocimiento de las mencionadas estructuras y su significado, observando la validez del algoritmo símplex para su resolución.

5.1 El problema del transporte

Es uno de los primeros problemas que se resolvieron utilizando técnicas de Programación Lineal. Consiste en transportar unidades de un producto desde m puntos origen a n puntos destino con un coste de transporte mínimo.

[1] Para un estudio detallado de estos algoritmos específicos nos remitimos a Prawda (1995) o Ríos (1996).

Como su nombre indica, el modelo de transporte es útil para plantear analíticamente el problema de distribución de un determinado producto fabricado en m puntos para su venta en n puntos de comercialización.

Supongamos que:

- a_i = número de unidades disponibles en el origen i.
- b_j = número de unidades demandadas en el destinon j.
- C_{ij} = coste de transporte de una unidad desde el origen i al destino j.

Suponiendo que la cantidad total transportada desde cualquier origen no supera su disponibilidad, que la cantidad total transportada a cualquier destino satisface al menos su demanda, y si definimos las variables de decisión como

X_{ij} = número de unidades transportadas desde el origen i al destino j

el problema del transporte se puede formular como el modelo de Programación Lineal:

$$
\begin{gathered}
\text{MIN } Z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} \\
\text{sujeto a:} \\
\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \ldots, m \\
\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_i \quad j = 1, \ldots, n \\
X_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j
\end{gathered}
$$

Si observamos el modelo, vemos que la suma de las disponibilidades de los orígenes debe ser mayor que la suma de las demandas de los destinos para que éstas queden satisfechas, es decir, $\sum a_i \geq \sum b_j$. Por el contrario, si $\sum a_i < \sum b_j$ no se podrán satisfacer todas las demandas, y el modelo no tendrá solución. Si la oferta total es igual a la demanda total el problema se denomina balanceado. En ese caso las restricciones se expresan en términos de igualdad. Podemos ver una representación en forma de grafo del problema del transporte en la figura 5.1.

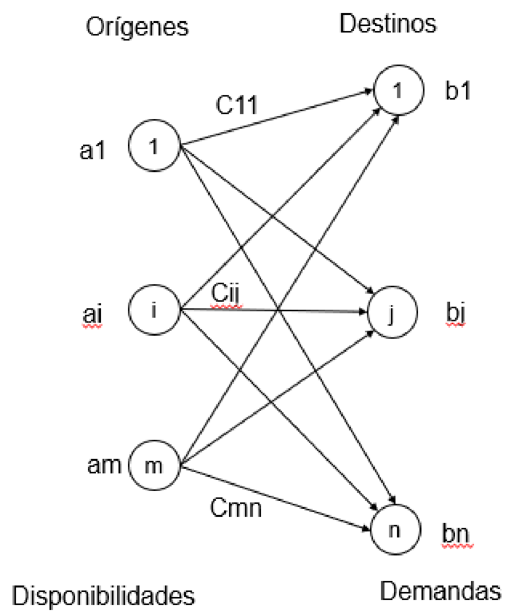


Figura 5.1 Modelo de transporte

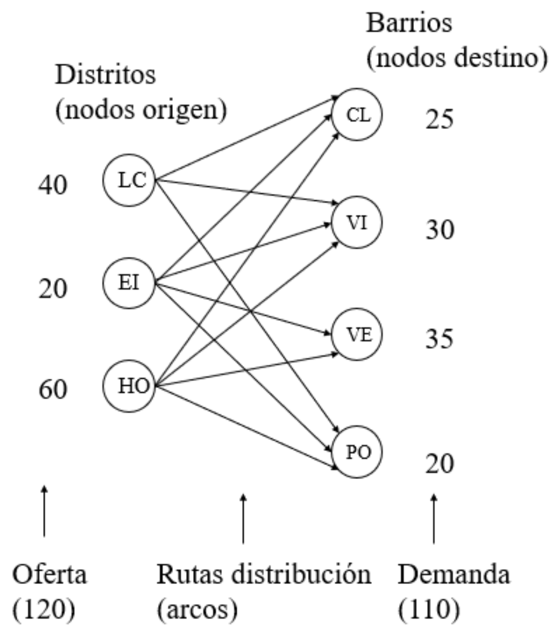
Ejemplo 5.1.

La empresa Rentcar dedicada al alquiler de automóviles tiene escasez de coches en una serie de barrios ubicados en el distrito de Sant Marti. Los barrios de Clot, Villa Olímpica, Verneda y Poble Nou disponen de 25, 30, 35 y 20 coches menos de los que se necesitan para los alquileres esperados. El gerente de la empresa en Sant Martí tiene noticia de que en los distritos de Les Corts, Eixample y Horta tienen 40, 20 y 60 coches de más, respectivamente. Por problemas de circulación no es posible el transporte de vehículos desde el distrito de Les Corts hasta La Verneda. El coste en euros del transporte de un coche entre los distintos distritos y barrios queda reflejado en la siguiente tabla:

	Barrios			
Distritos	*Clot*	*Villa Olímpica*	*Verneda*	*Poble Nou*
Les Corts	*30*	*35*	*-*	*25*
Eixample	*20*	*27*	*30*	*28*
Horta	*28*	*34*	*32*	*30*

Determinar el modelo de transporte que minimiza el coste total de transporte para solucionar el problema de escasez de vehículos.

Representamos la red de transporte en nuestro caso:



El modelo de Programación Lineal que resuelve el problema de la empresa es:

$$
\begin{array}{ll}
\text{MIN } Z = & 30X_{LC\text{-}CL} + 35X_{LC\text{-}VI} + \qquad\qquad + 25X_{LC\text{-}PO} + \\
& 20X_{EI\text{-}CL} + 27X_{EI\text{-}VI} + 30X_{EI\text{-}VE} + 28X_{EI\text{-}PO} + \\
& 28X_{HO\text{-}CL} + 34X_{HO\text{-}VI} + 32X_{HO\text{-}VE} + 30X_{HO\text{-}PO} \\
& \text{sujeto a:} \\
& X_{LC\text{-}CL} + X_{LC\text{-}VI} + \qquad\quad + X_{LC\text{-}PO} \leq 40 \\
& X_{EI\text{-}CL} + X_{EI\text{-}VI} + X_{EI\text{-}VE} + X_{EI\text{-}PO} \leq 20 \\
& X_{HO\text{-}CL} + X_{HO\text{-}VI} + X_{HO\text{-}VE} + X_{HO\text{-}PO} \leq 60 \\
& X_{F\text{-}CL} + X_{F\text{-}VI} + X_{F\text{-}VE} + X_{F\text{-}PO} \leq 10 \\
& X_{LC\text{-}CL} + X_{EI\text{-}CL} + X_{HO\text{-}CL} + X_{F\text{-}CL} \geq 25 \\
& X_{LC\text{-}VI} + X_{EI\text{-}VI} + X_{HO\text{-}VI} + X_{F\text{-}VI} \geq 30 \\
& \qquad\qquad X_{EI\text{-}VE} + X_{HO\text{-}VE} + X_{F\text{-}VE} \geq 35 \\
& \quad X_{LC\text{-}PO} + X_{EI\text{-}PO} + X_{HO\text{-}PO} + X_{F\text{-}PO} \geq 20 \\
& X_{ij} \geq 0 \text{ y enteras}
\end{array}
$$

5.2 El problema de asignación

En este tipo de problema se trata de asignar un número de orígenes (individuos, tareas ...) a un mismo número de destinos (tareas, máquinas...) de manera que se optimice alguna medida de eficacia. Generalmente esta medida es un coste o tiempo, de manera que los modelos son de minimización.

Supongamos que tenemos m individuos que hay que asignar a m tareas, siendo C_{ij} el coste de asignar al individuo i la tarea j, se trata de determinar una asignación con coste total mínimo.

Definimos las variables de decisión $X_{ij} = 1$ si el individuo i se asigna a la tarea j, 0 en caso contrario.

En estas condiciones el modelo de asignación es:

$$\begin{gathered}
\text{MIN } Z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} \\
\text{sujeto a:} \\
\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, m \\
\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, m \\
X_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j
\end{gathered}$$

Notemos que por definición cada X_{ij} únicamente puede tomar el valor 0 ó 1, de manera que el primer conjunto de restricciones provoca que cada individuo i se asigne a una única tarea j, mientras que el segundo conjunto de restricciones conlleva que cada tarea j se asigne a un único individuo.

El caso general de ha definido cuando se tienen el mismo número de tareas que de individuos pero se puede extener el problema a los casos en los que esto no se cumpla. En estos casos se añaden, "tareas" o "individuos" **ficticios** para "balancear" el problema.

Podemos representar gráficamente en forma de grafo este problema de asignación en la figura 5.2.

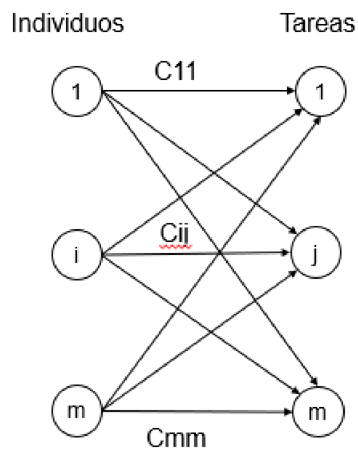


Figura 5.2 Modelo de asignación

Ejemplo 5.2.

Una compañía dedicada a la fabricación de material eléctrico dispone de 3 centros de producción. La compañía trabaja con tres empresas de servicios a las que debe asignar el mantenimiento de sus centros de producción. En la siguiente tabla vemos los costes (miles de euros) de cada empresa para realizar cada una de los posibles mantenimientos. Cada empresa de servicios sólo puede hacer un mantenimiento.

¿Qué asignación de mantenimientos le permite a la compañía tener un coste total mínimo?

	Centro de producción		
Empresa	**1**	**2**	**3**
1	5	2	3
2	2	1	4
3	3	2	3

El modelo de Programación Lineal que resuelve el problema de la compañía es:

$X_{ij} = 1$ si se asigna la empresa de servicios i al centro de producción j, 0 en caso contrario.

$$
\begin{gathered}
\text{MIN } Z = 5X_{11} + 2X_{12} + 3X_{13} + \\
2X_{21} + 1X_{22} + 4X_{23} + \\
3X_{31} + 2X_{32} + 3X_{33} \\
\text{sujeto a:} \\
\text{Restricciones de las empresas servicios:} \\
X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1 \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1 \\
X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1 \\
\\
\text{Restricciones de los centros de producción:} \\
X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1 \\
X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1 \\
X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1 \\
X_{ij} \in \{0, 1\}
\end{gathered}
$$

5.3 Camino de longitud mínima

En este problema tratamos de determinar el camino de longitud mínima entre un nodo *origen* y un nodo *destino* en una red. Supongamos que tenemos una red con n nodos (numerados 1,2, ...,n) y que para cada arco (i, j) existe un número $d_{ij} \geq 0$ que representa la distancia (coste, tiempo...) desde el nodo i al j. Entonces, si 1 es el nodo origen y n el nodo destino, el problema consiste en determinar el camino de longitud mínima entre los nodos q y n.

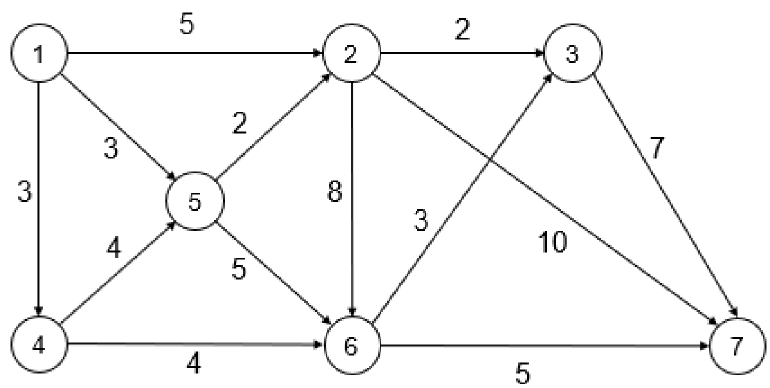
En consecuencia, el modelo de Programación Lineal del problema del camino de longitud mínima es:

$$
\begin{gathered}
\text{MIN } Z = \sum_i \sum_j d_{ij} X_{ij} \\
\text{sujeto a:} \\
\sum_j X_{1j} = 1 \quad \text{Nodo origen} \\
\sum_j X_{ij} - \sum_k X_{ki} = 0 \quad i = 1, \ldots, m \\
\sum_k X_{km} = 1 \quad \text{Nodo destino} \\
X_{ij} \in \{0, 1\}
\end{gathered}
$$

La primera restricción implica tomar un solo arco con extremo inicial en el nodo 1, la última un solo arco con extremo final en el nodo n, y el conjunto de $n-2$ restricciones impone que el número de arcos que lleguen a un nodo intermedio sea igual al número de arcos que parten de él.

EJEMPLO 5.3

Determinar el modelo de Programación Lineal que permita hallar el camino de longitud mínima entre el nodo 1 y 7 de la siguiente red.



El modelo de Programación Lineal que permite determinar la solución óptima es:

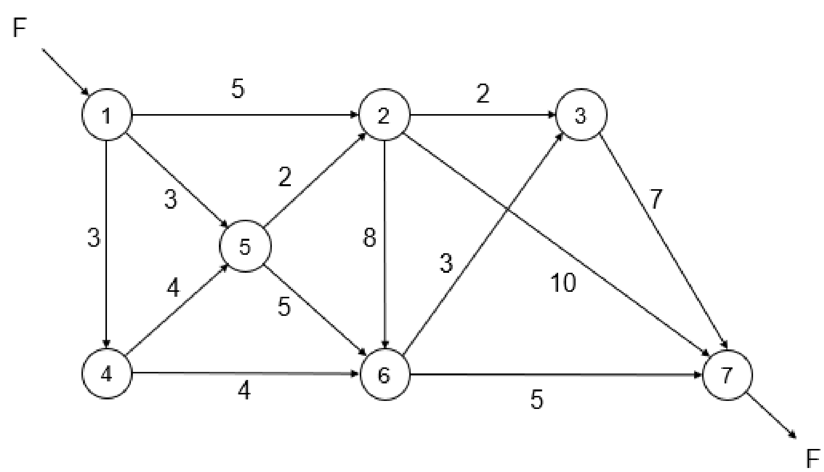
$$\begin{gathered}
\text{MIN } Z = 5X_{12} + 3X_{14} + 3X_{15} + 4X_{45} + 2X_{52} + 5X_{56} + 4X_{46} \\
+8X_{26} + 2X_{23} + 10X_{27} \\
+3X_{63} + 7X_{37} + 5X_{67} \\
\text{sujeto a:} \\
X_{12} + X_{15} + X_{14} = 1 \\
X_{12} + X_{52} - X_{23} - X_{26} - X_{27} = 0 \\
X_{23} + X_{63} - X_{37} = 0 \\
X_{14} - X_{45} - X_{46} = 0 \\
X_{15} + X_{45} - X_{52} - X_{56} = 0 \\
X_{46} + X_{56} + X_{26} - X_{63} - X_{67} = 0 \\
X_{27} + X_{37} + X_{67} = 1 \\
X_{ij} \in \{0, 1\}
\end{gathered}$$

5.4 Flujo máximo en una red

Otro tipo de problemas en redes está relacionado con la existencia de un **flujo** a lo largo de los arcos de una red que generalmente se refiere al envío o circulación de un unidades homogéneas de un determinado bien desde un nodo origen a un nodo destino, a través de nodos intermedios o de transbordo.

Podemos pensar en aplicaciones en redes de telecomunicaciones, carreteras, ferrocarriles, distribución de petroleo o gas, etc ... a través de una red.

Un ejemplo de una red de este tipo lo podemos ver en la siguiente figura:



En esta red "1" es el nodo origen, "7" es el nodo destino, y el resto de nodos son intermedios o de transbordo. Los valores que aparecen en cada arco son las **capacidades máximas** de flujo que puede circular a través de ellos, y F el **flujo máximo** que podemos enviar de "1" a "7".

Para formular este problema como un problema de Programación Lineal, definimos las siguientes variables de decisión: X_{ij} = el flujo que circula por el arco ij, es decir, el número de unidades que se envían del nodo i al nodo j; S_{ij} = la capacidad máxima del arco ij y F el flujo máximo que entra al nodo origen y sale por el nodo destino.

El programa lineal asociado a este problema será:

$$\text{MAX } Z = F$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$\sum_j X_{1j} - F = 0 \quad \text{Nodo origen}$$
$$\sum_j X_{ij} - \sum_k X_{ki} = 0 \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{Nodos intermedios}$$
$$\sum_k X_{km} - F = 0 \quad \text{Nodo destino}$$
$$X_{ij} \leq S_{ij}$$
$$X_{ij}, F \geq 0$$

Las dos primeras restricciones aseguran que el flujo que se envía desde el nodo 1 sea igual al flujo que recibe el nodo destino m y ambos iguales al flujo F que entra y sale de la red. La tercera restricción, realmente un conjunto de restricciones, asegura que el flujo que entra a un nodo sale de ese nodo, son nodos intermedios. La cuarta restricción, de hecho, tantas como arcos, indican las capacidades máximas de cada arco. Por último, añadimos restricciones de no negatividad a las variables de decisión.

Ejemplo 5.4

Vamos plantear el modelo de Programación Lineal que permita hallar el flujo máximo entre el nodo 1 y 7 de la red anterior. Con la notación definida anteriormente tenemos:

$$\text{MAX } Z = F$$
$$\text{sujeto a:}$$
$$X_{12} + X_{15} + X_{14} - F = 0$$
$$X_{12} + X_{52} - X_{23} - X_{26} - X_{27} = 0$$
$$X_{23} + X_{63} - X_{37} = 0$$
$$X_{14} - X_{45} - X_{46} = 0$$
$$X_{15} + X_{45} - X_{52} - X_{56} = 0$$
$$X_{46} + X_{56} + X_{26} - X_{63} - X_{67} = 0$$
$$X_{27} + X_{37} + X_{67} - F = 0$$
$$X_{12} \leq 5, X_{14} \leq 3, \ldots, X_{67} \leq 5$$
$$X_{ij}, F \geq 0$$

La solución óptima en este caso es $F = 11$.

5.5 Flujo máximo a coste mínimo

Relacionado con el modelo anterior, supongamos ahora que a cada unidad de flujo que circule por la red se le asocia un determinado coste que depende del arco por el cual circula, de manera que:

Arco	Coste por unidad
ij	C_{ij}

El problema consiste ahora en determinar el flujo máximo que puede circular por la red a un coste mínimo.

La formulación de este problema tiene la forma:

$$\text{MIN } Z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}$$

$$\text{sujeto a:}$$

$$\sum_j X_{1j} = F_{MAX} \quad \text{Nodo origen}$$

$$\sum_j X_{ij} - \sum_k X_{ki} = 0 \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{Nodos intermedios}$$

$$\sum_k X_{km} = F_{MAX} \quad \text{Nodo destino}$$

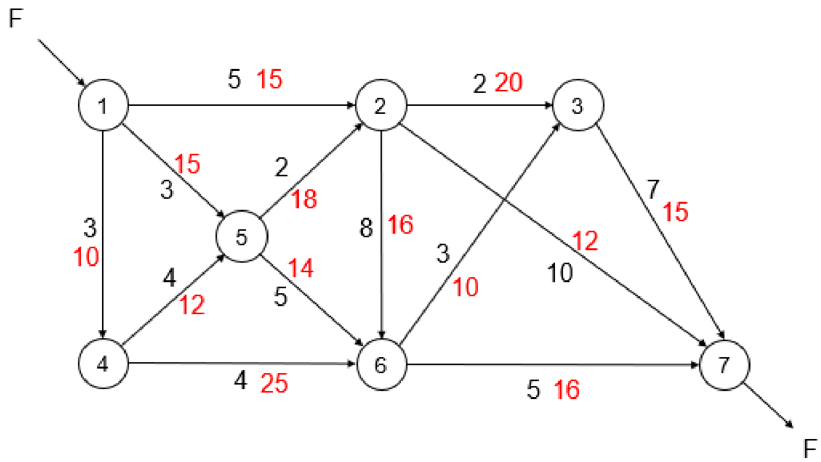
$$X_{ij} \leq S_{ij}$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Se observa que ahora F_{MAX} es un valor fijo determinado por la solución obtenida en el problema del Flujo máximo.

Ejemplo 5.5

Supongamos que en el ejemplo anterior asociamos a cada arco un coste C_{ij} unitario que hemos indicado en rojo en cada uno de los arcos. Ver figura siguiente.



En este caso el modelo de Programación Lineal que resuelve el problema de Flujo máximo a coste mínimo es:

$$
\begin{gathered}
\text{MIN } Z = 15X_{12} + 10X_{13} + \cdots + 15X_{67} \\
\text{sujeto a:} \\
X_{12} + X_{15} + X_{14} = 11 \\
X_{12} + X_{52} - X_{23} - X_{26} - X_{27} = 0 \\
X_{23} + X_{63} - X_{37} = 0 \\
X_{14} - X_{45} - X_{46} = 0 \\
X_{15} + X_{45} - X_{52} - X_{56} = 0 \\
X_{46} + X_{56} + X_{26} - X_{63} - X_{67} = 0 \\
X_{27} + X_{37} + X_{67} = 11 \\
X_{12} \leq 5, X_{14} \leq 3, \ldots, X_{67} \leq 5 \\
X_{ij} \geq 0
\end{gathered}
$$

BIBLIOGRAFÍA

BAZARAA, M.S., JARVIS, J.J. (1998): *Programación Lineal y Flujo en Redes.* LIMUSA

BIERMAN, Jr., H., BONINI, C., HAUSMAN, W. (1994): *Análisis Cuantitativo para la Toma de Decisiones.* Addison-Wesley Iberoamericana.

DAVIS, K., McKEOWN, P. (1986): *Modelos Cuantitativos para Administración.* Grupo Editorial Iberoamericana.

FERNANDEZ, R., CASTRODEZA, C. (1989): *Programación Lineal.* Ariel.

GARCIA, J., FERNANDEZ, L., TEJERA P. (1990): *Técnicas de Investigación Operativa.* Paraninfo.

GASS, S.I. (1975): *Programación Lineal.* CECSA.

GOULD, F.J., EPPEN, G.D., SCHMIDT, C.P. (1992): *Investigación de Operaciones en las Ciencia Administrativa.* Prentice-Hall.

HILLIER, F., LIEBERMAN, G. (1991): *Introducción a la Investigación de Operaciones.* McGraw-Hill

MOCHOLI, M., SALA, R. (1993): *Programación Lineal. Métodos y Problemas.* Tebar Flores.

MOCHOLI, M., SALA, R. (1996): *Decisiones de Optimización.* Tirant lo blanc.

PRAWDA, J. (1995): *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Vol. I: Modelos Deterministas.* Limusa. Noriega Editores.

RIOS, S. (1991): *Investigación Operativa. Optimización.* Centro de estudios Ramon Areces. Madrid.

RIOS, S., RIOS, D., MATEOS, A., MARTIN, J. (1997): *Programación Lineal y Aplicaciones.* RA-MA. Madrid.

SARABIA, A. (1996): *La Investigación Operativa.* Publicación de la Universidad Pontificia Comillas. Madrid.

TAHA (1987): *Investigación de Operaciones.* RA-MA. Madrid.

VILLALBA, D., JEREZ, M. (1990): *Sistemas de Optimización para la Planificación y Toma de Decisiones.* Pirámide.