UNIVERSITAT Carlemany

De:
Planeta Formación y Universidades

Asignatura: Matemáticas para la ciencia de datos

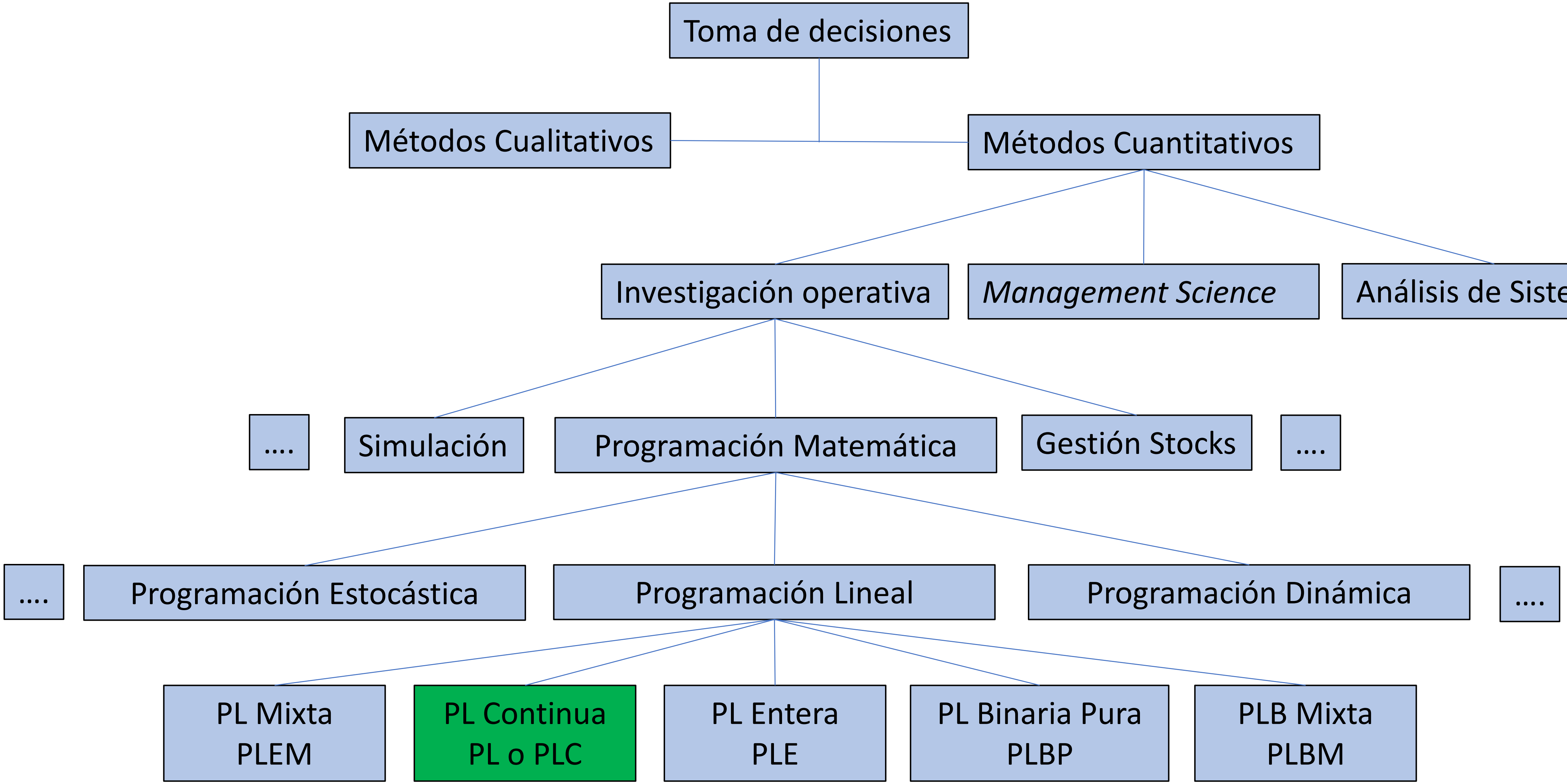
Profesor: Carlos Soldevilla Senar

UNIVERSITAT Carlemany

Módulo 1
Introducción a la Investigación Operativa para el Data Science

UNIVERSITAT Carlemany

1.1. Concepto y fases de la IO. Modelos de programación matemática



EJEMPLO PL:

$$\text{MAX } Z=3X + 2Y$$

sujeto a:

$$X + Y \geq 3$$
$$2X + Y \leq 5$$
$$X,Y \geq 0$$

SOLUCIÓN: X=0 Y=5 Z=10.

Ejemplos temario asignatura:

Método gráfico, símplex, Dual, sensibilidad, añadir restricción….

<u>Ejemplo 1.1.</u> Una empresa fabrica dos productos, A y B, hallándose interesada en estimar su plan de producción más adecuado para el próximo periodo. Cada producto exige un tiempo de trabajo y el uso de unas instalaciones técnicas.

Para el periodo en estudio se sabe, concretamente, que las necesidades de recursos (en horas) por unidad producida y los márgenes brutos (en unidades monetarias) de los productos de la firma son:

Producto	Mano Obra	Maquinaria	Margen Bruto
A	1	4	10
B	3	2	4

El tiempo diario disponible de ambos factores de producción es de 600 y 800 horas, respectivamente.

Con los recursos disponibles, plantear un modelo de Programación Lineal que permita calcular el nivel de producción que conducirá a un margen bruto máximo, sin otra restricción que un pedido pendiente consistente en 150 unidades del producto B.

PROCESO DE MODELIZACIÓN

ANALISIS DESCRIPTIVO DEL SISTEMA

Identificación de componentes: Definición de Variables.

Caracterización de interrelaciones: Definición de restricciones.

Especificación del objetivo del sistema.

FORMALIZACIÓN DEL ANÁLISIS

Representación Matemática: Concreción de formas funcionales para las relaciones y objetivos
Cuantificación de los parámetros.

MODELO

Para plantear este problema se definen las siguientes variables de decisión:

A = Número de unidades del producto A a fabricar

B = Número de unidades del producto B a fabricar

Vamos a construir en primer lugar las restricciones del modelo. Debido a las cantidades limitadas de los recursos (horas mano obra: 600 y horas de maquinaria: 800) tenemos dos condiciones que limitan las cantidades de A y B que la empresa puede producir.

Restricción de horas de mano de obra (600h)

A partir de la información que aparece en el enunciado, sabemos que cada unidad fabricada del producto A consumirá 1 hora de mano de obra, por lo que el total de horas de mano de obra utilizada en la fabricación de "A" unidades del producto A será "1 A". De la misma forma, cada unidad fabricada de B consumirá 3 horas de mano de obra. Es decir, "B" unidades del producto B consumirán "3 B" horas de mano de obra. El total de horas de mano de obra para producir "A" unidades de A y "B" unidades de B será:

$$A + 3B$$

Como la empresa tiene un máximo de 600 horas de mano de obra disponible, los valores de A y B que seleccionemos tienen que cumplir:

$$A + 3B <= 600$$

Restricción de horas de maquinaria (800h)

Un razonamiento análogo nos proporciona una restricción similar con respecto al recurso de horas de maquinaria:

$$4A + 2B <= 800$$

Restricción de exigencia unidades mínimas de B (150u)

Por último, si la empresa tiene **un pedido pendiente de 150 unidades del producto B** se verá obligada a producir “como mínimo” 150 unidades de este producto, es decir se tiene que cumplir la restricción:

$$B >= 150$$

Función objetivo

Necesitamos saber las unidades de A y B que tenemos que producir para obtener **un margen bruto máximo**. La contribución al margen bruto provendrá de dos fuentes: (1) la contribución al margen proveniente de la producción de A y (2) la contribución al margen proveniente de la producción de B.

Dado que la empresa obtiene un margen bruto de 10 u.m. por cada unidad de A producida, la empresa obtendrá un margen de “10 A” si se producen “A” unidades del producto A.

De manera análoga, la empresa obtendrá un margen de “4 B” u.m. si producen “B” unidades del producto B.

El margen bruto total (Z) se obtendrá sumando estas dos contribuciones, con lo que el margen bruto total tendrá la forma:

$$Z = 10A + 4B$$

Como el objetivo es maximizar el margen bruto total, la función objetivo del modelo será:

$$MAX\ Z = 10A + 4B$$

En resumen, el modelo propuesto una vez incorporadas las restricciones de no negatividad de las variables tiene la forma:

$$\text{MAX } Z = 10A + 4B$$

sujeto a:

$$A + 3B \leq 600$$

$$4A + 2B \leq 800$$

$$B \geq 150$$

$$A, B \geq 0$$

La solución óptima consiste en fabricar 125 unidades del producto A y 150 de B. Esto nos proporcionará un margen bruto total de 1.850 u.m. La solución es única, es decir, cualquier otra combinación de producción nos dará un margen bruto menor a 1.850 u.m.

Ejemplo 1.2. La empresa Orenne's fabrica dos tipos de producto: A y B, siendo el coste de fabricación de 1 y 2 u.m./u., respectivamente.

La empresa considera que del total de unidades producidas, entre el 40% y el 70% debe ser del tipo A.

El precio de venta de los productos es de 3 y 5 u.m./u., respectivamente. La empresa dispone de 10.000 u.m. para hacer frente a los costes de fabricación y publicidad del periodo.

Además, se estima que la demanda del producto A es a lo sumo 5 veces el gasto hecho en publicidad para dicho producto. En el caso del producto B, se estima que su demanda es a lo sumo 8 veces su gasto en publicidad.

Se desea plantear un modelo de Programación Lineal que permita conocer el plan óptimo de producción y publicidad.

Podemos denominar a las variables de decisión del modelo de la siguiente manera:

A =Número de unidades de A que se fabricarán

B =Número de unidades de B que se fabricarán

PA = u.m. invertidas en la publicidad del producto A

PB = u.m. invertidas en la publicidad del producto B

Las restricciones del modelo serán:

- La disponibilidad de 10.000 u.m para hacer frente a los costes de fabricación y publicidad dará lugar a un recurso limitado, por tanto:

$$A + 2B + PA + PB <= 10.000$$

- La condición de que del total de unidades producidas entre el 40% y el 70% han de ser de tipo A se puede expresar como

$$0{,}4 \leq \frac{A}{A+B} \leq 0{,}7$$

La expresión anterior determina dos restricciones en el sistema:

$$\frac{A}{A+B} \geq 0{,}4$$

$$\frac{A}{A+B} \leq 0{,}7$$

y realizando las operaciones necesarias obtenemos las restricciones lineales siguientes:

$$\frac{A}{A+B} \geq 0{,}4 \Rightarrow A \geq 0{,}4(A+B) \Rightarrow \boxed{0{,}6A - 0{,}4\,B \geq 0}$$

$$\frac{A}{A+B} \leq 0{,}7 \Rightarrow A \leq 0{,}7(A+B) \Rightarrow \boxed{0{,}3A - 0{,}7\,B \leq 0}$$

- Se estima que la demanda del producto A es a lo sumo 5 veces el gasto hecho en publicidad para dicho producto. En el caso del producto B, se estima que su demanda es a lo sumo 8 veces su gasto en publicidad.

A <= 5PA → A – 5PA <= 0
B <= 8PB → B – 8PB <= 0

En cuanto a la función objetivo podemos plantear un modelo que maximice el beneficio del periodo considerado en u.m., así los coeficientes de las variables de decisión A y B se pueden definir como la diferencia entre los precios de venta y los costes de fabricación unitarios, por tanto:

Coeficiente de A = 3-1 = 2 u.m/u.

Coeficiente de B = 5-2 = 3 u.m/u.

En cuanto a las variables PA y PB se consideran costes del periodo, por tanto la función objetivo será:

$$MAX\ Z = 2A + 3B - PA - PB$$

Por tanto, el modelo de programación lineal propuesto será:

$$\text{MAX } Z = 2A + 3B - PA - PB$$

sujeto a:

$$0{,}3A - 0{,}7B \leq 0$$

$$0{,}6\,A - 0{,}4B \geq 0$$

$$A - 5PA \leq 0$$

$$B - 8PB \leq 0$$

$$A + 2B + PA + PB \leq 10.000$$

$$A,B,PA,PB \geq 0$$

Ejemplo 1.5. Una empresa del sector eléctrico quiere lanzar una campaña publicitaria de su nuevo producto SISCET para lo cual dispone de un presupuesto de 75.000€. En dicha campaña se insertarán anuncios en revistas, puntos de venta y páginas web especializadas (con niveles de especialización 1 y 2). La siguiente tabla muestra los datos sobre el número de ventas conseguido por anuncio, su coste (en euros) en cada medio, y el índice de impacto

Medio Publicitario	Ventas por Anuncio	Coste por anuncio	Índice de impacto Nivel 1	Índice de impacto Nivel 2
Revista	4.500	1.900	70	45
Punto de venta	3.000	3.000	75	50
Página web	6.000	1.400	80	60

El Dpto. Marketing ha decidido la siguiente estrategia publicitaria:

- No tienen que aparecer más de 20 anuncios en un mismo medio.
- El número total de ventas en todos los medios tiene que ser, al menos, de 210.000€.
- Al menos la cuarta parte de los anuncios tienen que aparecer en revistas.
- No se emitirán más de 60 anuncios con nivel de especialización 1.
- El coste total de la campaña no puede exceder el presupuesto inicial.

Plantead un modelo de programación Lineal que determine el número de anuncios a insertar en cada medio de manera que la empresa maximice el índice de impacto de la campaña publicitaria.

Para resolver este problema vamos a definir las siguientes variables de decisión:

- Revi = cantidad de anuncios insertados en revistas nivel “i”
- PdVi= cantidad de anuncios insertados en PdV nivel “i”
- Webi = cantidad de anuncios insertados en paginas web nivel “i”

Ahora ya podemos deducir las restricciones y la función objetivo del modelo. La primera restricción **“No tienen que aparecer más de 20 anuncios en un mismo medio”** hace referencia a una limitación en cuanto al número de anuncios por medio, éstos no pueden ser superiores a 20, con lo cual, tenemos el siguiente conjunto de restricciones (una por medio):

$$Rev1+Rev2 \leq 20$$

$$PdV1+PdV2 \leq 20$$

$$Web1+Web2 \leq 20$$

La segunda condición: "**El número total de ventas en todos los medios tiene que ser, al menos, de 210.000€"** implica que las ventas totales sean superiores a 210.000€. Las ventas que producen los anuncios en revistas se calcularan multiplicando el número de anuncios insertados en revistas por las ventas que generan cada uno de ellos (4.500€/anuncio), utilizando nuestra notación tenemos:

$$4.500(Rev1+Rev2)$$

De la misma forma se deduce las ventas que generan los anuncios de los PdV y las páginas web:

$$3.000(PdV1+PdV2)$$

$$6.000(Web1+Web2)$$

Si las ventas totales tienen que ser superiores a 210.000€ tenemos que imponer que la suma de las tres últimas expresiones sea **mayor o igual** a dicha cantidad, es decir, tenemos que incluir en el modelo la restricción:

$$4.500(Rev1+Rev2)+3.000(PdV1+PdV2)+6.000(Web1+Web2) >= 210.000$$

Haciendo operaciones obtenemos:

$$4.500Rev1+4.500Rev2+3.000PdV1+3.000PdV2+6.000Web1+6.000Web2 >= 210.000$$

Ejemplo de Modelización

La tercera condición “**Al menos la cuarta parte de los anuncios tienen que aparecer en revistas”** nos obliga a que al menos la cuarta parte de los anuncios tienen que aparecer en revistas (el porcentaje de anuncios en revistas tiene que ser mayor al 25% con respecto al total de anuncios). Podemos expresar esa condición mediante la restricción (número anuncios revistas/total anuncios >=25%):

$$Rev1+Rev2 \geq 0{,}25(\ (Rev1+Rev2)+(PdV1+PdV2)+(Web1+Web2)\ )$$

Podemos simplificar la expresión anterior mediante las operaciones:

$$0{,}75(Rev1+Rev2)-0{,}25(PdV1+PdV2)-0{,}25(Web1+Web2) \geq 0$$

$$0{,}75Rev1+0{,}75Rev2-0{,}25PdV1-0{,}25PdV2-0{,}25Web1-0{,}25Web2 \geq 0$$

La cuarta restricción “**No se emitirán más de 60 anuncios con nivel de especialización 1**” nos obliga a que el número de anuncios con nivel de especialización 1 sea inferior a 60 anuncios, con lo cual, se tendrá que incluir en el modelo la restricción:

$$Rev1 + PdV1 + Web1 <= 60$$

La última restricción "**El coste total de la campaña no puede exceder el presupuesto inicial"** es de carácter presupuestario y nos obliga a que el coste total de los anuncios sea menor a 75.000€. El coste total de los anuncios en revistas se calcularan multiplicando el número de anuncios insertados en revistas por su coste unitario (1.900€/anuncio), utilizando nuestra notación tenemos:

$$1.900(Rev1+Rev2)$$

De la misma forma se deducen los costes generados por los anuncios de los PdV y las páginas web:

$$3.000(PdV1+PdV2)$$

$$1.400(Web1+Web2)$$

Si los costes totales tienen que ser inferiores a 75.000€ tenemos que imponer que la suma de las tres últimas expresiones sea menor o igual a dicha cantidad, es decir, tenemos que incluir en el modelo la restricción:

$$1.900(Rev1+ Rev2)+3.000(PdV1+ PdV2)+1.400(Web1+Web2) <= 75.000$$

haciendo operaciones obtenemos la expresión:

$$1.900Rev1+1.900Rev2+3.000PdV1+3.000PdV2+1.400Web1+1.400Web2 <= 75.000$$

Ejemplo de Modelización

Por último, vamos a deducir la expresión de la función objetivo. El enunciado nos dice que tenemos que maximizar "**el índice de impacto de la campaña publicitaria",** tanto la función objetivo tendrá la forma:

$$MAX\ Z = 70Rev1 + 45Rev2 + 75PdV1 + 50PdV2 + 80Web1 + 60Web2$$

En resumen, si tenemos en cuenta todas las restricciones deducidas anteriormente y las restricciones de no negatividad de las variables de decisión, el modelo que resuelve nuestro problema tendrá la forma:

$$MAX\ Z = 70Rev1 + 45Rev2 + 75PdV1 + 50PdV2 + 80Web1 + 60Web2$$

Sujeto a:

$$Rev1+Rev2 <= 20$$

$$PdV1+PdV2 <=20$$

$$Web1+Web2 <= 20$$

$$4.500Rev1+4.500Rev2+3.000PdV1+3.000PdV2+6.000Web1+6.000Web2 >= 210.000$$

$$0{,}75Rev1+0{,}75Rev2-0{,}25PdV1-0{,}25\ PdV2-0{,}25Web1-0{,}25Web2 >= 0$$

$$Rev1+PdV1+Web1 <=60$$

$$1.900Rev1+1.900Rev2+3.000PdV1+3.000PdV2+1.400Web1+1.400Web2 <= 75.000$$

$$Rev1,Rev2,PdV1,PdV2,Web1,Web2 >= 0 \text{ y enteras}$$

La solución obtenida con el Solver muestra que el impacto máximo de 3.225 unidades se consigue con 20 anuncios en revistas, 3 en puntos de venta y 20 en páginas web, todos con un nivel de especialización 1.

UNIVERSITAT
Carlemany

De:
Planeta Formación y Universidades

Muchas gracias