Enunciados

1. Todas las cuestiones que se plantean a continuación hacen referencia al problema PL de optimización lineal siguiente:

$$
(PL)\quad
\begin{array}{lrl}
\max & & 3x_1 + x_2 \\
\text{sujeto a} & & \\
& r1) & x_1 + x_2 \le 6 \\
& r2) & 4x_1 + x_2 \le 16 \\
& r3) & -2x_1 + x_2 \le 2 \\
& r4) & x_2 \le 4 \\
& & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{array}
$$

En cada una de las cuestiones siguientes habéis de indicar cuál de las cuatro respuestas es correcta y debéis justificar vuestra elección. Para contestar las cuestiones se recomienda hacer la resolución gráfica del PL.

Q1. Para este problema PL sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:
a) El vértice óptimo se toma en un vértice sobre la restricción r4).
b) El conjunto de soluciones posibles es un conjunto no acotado.
c) El problema no tiene soluciones posibles.
d) El punto (x1,x2)=(2,2) es un punto del conjunto de soluciones posibles.

Q2. Si en el problema PL eliminamos la restricción de signo $x_1 \ge 0$, entonces:
a) La linealización del problema consistirá en hacer el cambio $x_1 = x_1' - x_1''$ y añadir las restricciones $x_1' \le 0$ y $x_1'' \le 0$.
b) El conjunto de soluciones posibles es un conjunto no acotado.
c) La linealización del problema consistirá en hacer el cambio $x_1 = x_1' - x_1''$ y añadir las restricciones $x_1' \ge 0$ y $x_1'' \ge 0$.
d) El valor *z* óptimo de la función objetivo cambiará.

Q3. Si en el problema PL inicial cambiamos el valor del coeficiente de la función objetivo $c_1=3$ por el valor $c_1=4$, entonces:
a) La solución es múltiple no acotada.
b) El valor *z* óptimo no cambiará.
c) La solución es única.
d) Ninguna de las otras respuestas es cierta.

Q4. Si en el PL inicial añadimos la restricción r5) $5x_1 + 3x_2 \ge 30$, entonces:
a) No hay ninguna solución posible.
b) El valor *z* óptimo no cambiará.
c) El conjunto de soluciones posibles no ha cambiado.
d) Ninguna de las otras respuestas es cierta.

Q5. Si cambiamos la función objetivo del PL inicial por $z = -4x_1 + 2x_2$ y cambiamos el sentido de las desigualdades de las cuatro restricciones de "≤" a "≥", entonces:
a) El valor *z* óptimo no cambiará.

b) El PL tendrá solución no acotada.
c) El PL tiene solución múltiple no acotada.
d) Ninguna de las otras respuestas es cierta.

2. Todas las cuestiones que se plantean a continuación hacen referencia al problema PL de optimización lineal siguiente:

$$
(PL)\quad
\begin{array}{ll}
\max & 3\,x1 + 2\,x2 \\
\text{sujeto a} & \\
r1) & x1 + 2\,x2 \leq 40 \\
r2) & 2\,x1 + x2 \leq 50 \\
r3) & -2x1 + x2 \leq 10 \\
& x1 \geq 0,\ x2 \geq 0
\end{array}
$$

Para contestar las cuestiones se recomienda hacer la resolución gráfica del PL.

Q1. Para este problema PL sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:
a) El conjunto de soluciones posibles es un conjunto no acotado.
b) El vértice óptimo se toma en un punto sobre los ejes de coordenadas.
c) El punto (x1,x2)=(10,10) es una solución posible.
d) El problema no tiene soluciones posibles.

Q2. Si en el problema PL cambiamos el valor del coeficiente $c_1=3$ por el valor $c_1=1$, entonces:
a) El valor z óptimo no cambiará.
b) La solución es única.
c) La solución es múltiple no acotada.
d) Ninguna de las otras es cierta.

Q3. Si en el problema PL eliminamos la restricción $x2 \geq 0$, entonces:
a) El valor z óptimo cambiará.
b) El conjunto de soluciones posibles es acotado.
c) La linealización del problema consistirá en hacer el cambio x2=x2'– x2'' y añadir las restricciones $x2' \leq 0$ y $x2'' \leq 0$.
d) La linealización del problema consistirá en hacer el cambio x2=x2'– x2'' y añadir las restricciones $x2' \geq 0$ y $x2'' \geq 0$.

Q4. Si ahora consideramos que la función objetivo del PL es $z= -2x1+x2$ y cambiamos el sentido de las desigualdades de las restricciones r1) y r2) de "≤" a "≥" , entonces:
a) El PL tiene solución no acotada.
b) El PL tiene solución múltiple no acotada.
c) El valor z óptimo no cambiará.
d) Ninguna de las otras respuestas es cierta.

Q5. Si en el PL añadimos la restricción r4) $x1+ x2 \geq 40$, entonces:
a) No hay ninguna solución posible.
b) Ninguna de las otras respuestas es cierta.
c) El valor z óptimo no cambiará.
d) En un PL con 2 variables no es posible tener 4 restricciones.

3. El fabricante de juguetes TOYOT produce dos tipos de juguetes: soldaditos y trenes. Un soldadito se vende a 27€ y un tren a 21€. La materia prima para hacer un soldadito cuesta 10€ y para hacer un tren 9€. Cada soldadito fabricado repercute en 14€ sobre los costes en concepto de mano de obra y de costes generales. Para el caso de los trenes esta repercusión es de 10€. En la factoría hay dos secciones: carpintería y acabados. Cada soldadito necesita 1 hora de trabajo de carpintería y 2 de acabados. Cada tren necesita 1 hora en cada sección. Atendiendo al número de trabajadores que hay contratados actualmente en la fábrica, la empresa TOYOT calcula que semanalmente dispone de como mucho 80 horas de carpintería y de 100 horas de acabados. Actualmente el mercado sólo es capaz de absorber como mucho 40 soldaditos cada semana.

Una vez formulado el problema se obtiene el modelo siguiente:

$$
\text{(PL)}\quad
\begin{array}{ll}
\max & z = 3x1 + 2x2 \\
\text{sujeto a} & \\
\text{r1)} & 2x1 + x2 \leq 100 \\
\text{r2)} & x1 + x2 \leq 80 \\
\text{r3)} & x1 \leq 40 \\
 & x1 \geq 0,\ x2 \geq 0
\end{array}
$$

Nota: En este ejercicio, para simplificar, consideraremos que las variables pueden tomar valores decimales. Estrictamente, las variables sólo podrían tomar valores enteros y el problema sería un problema PLE.

Para contestar las cuestiones siguientes se recomienda hacer la resolución gráfica del problema PL:

Q1. Para este problema PL sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:
a) El vértice óptimo se toma en un vértice sobre la restricción r3).
b) Es posible fabricar 20 juguetes de cada pero esta decisión no es óptima.
c) El problema no tiene soluciones posibles.
d) El conjunto de soluciones posibles es un conjunto no acotado.

Q2. Si en el problema PL eliminamos la restricción de signo x2≥0 y convertimos la variable en una variable libre de signo, entonces:

a) La linealización del problema consistirá en hacer el cambio x2= x2'– x2'' y añadir las restricciones x2'≤0 y x2''≤ 0.
b) El conjunto de soluciones posibles será un conjunto acotado.
c) La linealización del problema consistirá en hacer el cambio x2=x2'– x2'' y añadir las restricciones x2'≥0 y x2''≥ 0.
d) La linealización del problema consistirá en hacer el cambio x2=x2'+ x2'' y añadir las restricciones x2'≥0 y x2''≥ 0.

Q3. Si en el problema PL inicial el precio de venta de los soldaditos pasa a ser de 28€, entonces:

a) La solución será múltiple no acotada.
b) La solución será única.
c) La solución será no acotada.
d) Ninguna de las otras respuestas es cierta.

Q4. Si en el PL inicial añadimos la restricción de que como mucho el mercado puede absorber 50 trenes, entonces:

a) No habrá ninguna solución posible.
b) El valor z óptimo no cambiará.
c) El conjunto de soluciones posible no ha cambiado.
d) Ninguna de las otras respuestas es cierta.

Q5. Si por razones de convenios laborales-sindicales en el PL inicial cambiamos el sentido de las dos primeras desigualdades de "≤" a "≥" , entonces:

a) El valor z óptimo no cambiará.
b) El PL tendrá solución no acotada.
c) El PL tiene solución múltiple no acotada.
d) Ninguna de las otras respuestas es cierta.

4. Contestad si las siguientes cuestiones son ciertas o falsas. Justificad vuestra respuesta:

a) En general, una restricción del tipo igualdad "=" restringe más la región factible (conjunto de soluciones) que una restricción con desigualdad tipo "≤" y "≥". C F
b) Una solución óptima de un programa lineal siempre se encuentra en un único punto vértice de la región factible. C F
c) En un problema de optimización lineal, un punto que cumple todas las restricciones forma parte del conjunto de soluciones posibles (región factible) y es un vértice del mismo. C F
d) Si en el óptimo de un problema lineal las variables y la función objetivo tienden a infinito, estamos ante de un problema con solución no acotada. C F
e) Si en un problema una variable x_k es libre de signo, entonces con el propósito de linealizar es necesario hacer la sustitución $x_k=-x'_k$. C F
f) Si un PL tiene más de una solución óptima, entonces hay muchas soluciones óptimas pero hay un número finito de estas. C F

5. Formulad detalladamente el modelo de PL para el problema siguiente:

Crokeco es una pequeña industria cárnica que produce dos tipos de croquetas de pollo para grandes superficies comerciales. Cada tipo de croqueta se fabrica en base a una mezcla de dos tipos de carne: carne blanca y carne roja. El tipo 1 de croquetas se vende a 2.4 €/Kg y tiene un contenido mínimo del 70% de carne blanca. El tipo 2 de croquetas se vende a 1.8 €/Kg y tiene un contenido máximo del 40% de carne roja. Como mucho se puede producir cada día 50kg y 30kg de cada tipo de croqueta, respectivamente. Los pollos que Crokeco compra a sus proveedores para sacar la carne son de dos tipos. Cada pollo de tipo 1 vale 0.6€ y produce 1kg de carne blanca y 0.4 kg de carne roja. Cada pollo de tipo 2 vale 0.48€ y produce 0.6kg de cada tipo de carne. Se trata de decidir cómo ha de organizar Crokeco su producción con el propósito de maximizar el beneficio diario. En particular, a Crokeco le interesa decidir cuántos pollos debe comprar y cuántos kilogramos de cada tipo de croqueta debe producir cada día.

6. Formulad detalladamente el modelo de PL para el problema siguiente:

Una ciudad está dividida en dos zonas o distritos con respecto a la inspección de vehículos. En la tabla siguiente se muestra la cantidad de vehículos industriales y vehículos particulares por distrito:

Distrito	Vehículos industriales	Vehículos particulares
1	30	400
2	50	320

De la tabla se observa que el 10% de todos el vehículos son industriales. En esta ciudad existen dos centros ITV que realizan inspecciones. Estos dos centros los denominamos ITV1 y ITV2. Entre los dos centros han decidido que cada uno de los dos centros, ITV1 y ITV2, del total de vehículos que tendrá asignado, es necesario que entre un 8% y un 12% sean vehículos industriales. Además, deciden que cada centro debe tener asignado un total de vehículos entre 350 y 475. Con el objetivo de no perjudicar a los usuarios con desplazamientos demasiados largos desde su distrito al centro de ITV, se ha estudiado el coste de llevar un vehículo cualquiera de un distrito a un centro de revisión. Los datos de estos costes (en Euros, €) se recogen en la tabla siguiente:

Distrito	ITV1	ITV2
1	12	18
2	24	12

El objetivo es decidir la cantidad de vehículos que hemos de asignar a cada centro para que las inspecciones se realicen con un coste mínimo para los usuarios.

7. Formulad detalladamente el modelo de PL para el problema siguiente:

A principios del mes de diciembre una empresa dedicada a la fabricación de estufas se plantea programar su fabricación y almacenamiento de estufas de gas para el primer cuatrimestre del próximo año (meses: enero, febrero, marzo y abril). La empresa quiere que la demanda prevista de estufas para estos meses sea totalmente satisfecha. Esta demanda mínima se estima que será de 9000, 12000, 14000, y 13500 estufas en, respectivamente, cada uno de los cuatro meses. Actualmente, la empresa tiene una capacidad máxima de producción de como mucho 13000 estufas al mes. El coste unitario de fabricar una estufa es de 24€. De todos modos, se tiene la seguridad que el primer día del mes de abril ya se tendrá en la fábrica una nueva línea de producción de estufas que permitirá aumentar la producción hasta un total de 15000 estufas por mes, y permitirá disminuir el coste unitario situándolo en 21€ por estufa. El primer día del mes de enero se calcula que se tendrán en estoc exactamente 1325 estufas que pueden ser utilizadas para los pedidos del mes de enero. Por otro lado, la empresa desea que le queden en estoc 800 estufas el último día del mes de abril. Las estufas que sobran de un mes por el otro se pueden guardar en un almacén dónde caben como mucho 2000 estufas. Se ha calculado que el coste por estufa en estoc es de 3€ al mes. Formulad un problema de programación lineal que permita a la empresa minimizar los costes de fabricación y almacenamiento. Por simplificar, los costes de almacenamiento de las estufas iniciales (las 1325 que han sobrado del diciembre) y de las estufas finales (las 800 que deben sobrar el mes de abril) no se deben tener en cuenta. Otra simplificación consiste en “suponer” que toda la fabricación y toda la venta de estufas se realiza el último día de cada mes. De esta manera el estoc que se cuenta a efectos de costes lo generan las estufas que sobran del mes anterior, y por lo tanto, las estufas que se fabrican en un mes no generan costes de almacenamiento durante aquel mes.

8. Formulad detalladamente, sin resolverlo, el problema siguiente. Ha de formularse en detalle su planteamiento matemático: variables de decisión, función objetivo y restricciones.

Planificación de la producción de ventanas

FinCat debe entregar ventanas para viviendas durante los próximos 6 meses, a lo largo de los cuales ha de satisfacer las demandas de 100, 250, 190, 140, 220 y 110 ventanas, respectivamente. Los costes de producción varían de un mes a otro, dependiendo de los costes de mano de obra, materiales y servicios. FinCat estima que el coste de producción por ventana para cada uno de los 6 meses siguientes será de 50€, 45€, 55€, 48€, 52€ y 50€ respectivamente. Para aprovechar las fluctuaciones en el coste de producción, FinCat puede optar por producir más de lo necesario en un mes determinado y guardar las unidades excedentes para entregarlas en meses posteriores. No obstante, esta actuación le ocasionará un coste de almacenamiento de 8€ por cada ventana almacenada al final de cada mes. El inventario disponible al principio del primer mes es de 25 ventanas y se desea que, al final de los 6 meses, el inventario sea, al menos, de la misma cantidad.

Formula un modelo de PL para determinar el plan óptimo de producción y almacenamiento.

9. Formulad detalladamente, sin resolverlo, el problema siguiente. Se debe formular en detalle su planteamiento matemático: variables de decisión, función objetivo y restricciones.

Planificación de la producción de muebles

La empresa BUTACA, del sector del mueble, decide modernizar su sistema productivo con el fin de mejorar la calidad de su producción. Se plantea fabricar mesas, sillas, bufetes, butacas y sofás. Antes de tomar cualquier decisión con respecto a su producción trimestral, se plantea resolver el problema lineal de maximización de beneficio que tiene en cuenta la información siguiente:

- Esta empresa dispone de un máximo de cinco millones de euros trimestrales para financiar los costes de producción. Este dinero proviene de fondos internos.
- Desea que por cada mesa producida siempre se produzca un juego de, al menos, seis sillas. Y por cada sofá, un juego de al menos, dos butacas. Por otro lado, la producción de mesas, sillas y bufetes no puede ser inferior a la producción de sofás y butacas. También se desea que la cantidad de mesas no sea inferior al 10% del total de muebles producidos.
- Finalmente, la empresa tiene que considerar ciertas limitaciones con respecto a mano de obra. Cada trimestre, se dispone de 10000 horas-hombre para la sección de corte y de 5000 horas-hombre para la de montaje. Las necesidades de horas-hombre para la producción de cada mueble se relacionan a continuación:

	Mesa	Silla	Bufete	Butaca	Sofá
Corte	4	4	3	2	2
Montaje	1	1	1	3	3

- Los costes unitarios variables y los precios de venta, en euros, de cada mueble, se muestran en la tabla siguiente:

	Mesa	Silla	Bufete	Butaca	Sofá
Coste unitario	300	50	1700	1200	1500
Precio unitario de venta	1000	500	2300	1800	2500

Formulad un modelo de PL para la planificación de la producción que maximice los beneficios.

10. Formulad detalladamente, sin resolverlo, el problema siguiente:

Una empresa de seguridad es la responsable de la vigilancia de un aeropuerto y debe cubrir las necesidades de personal durante las 6 franjas horarias de 4 horas en que está dividido el día. En la tabla se recogen cuántos vigilantes se necesitan en cada franja. Los vigilantes trabajan en turnos de 8 horas seguidas. Es decir, el turno de un vigilante está formato por dos franjas horarias consecutivas y puede empezar en cualquiera de las 6 franjas. El director de personal de la empresa necesita saber cuántos vigilantes debe contratar de forma que las necesidades de personal queden cubiertas y el coste sea mínimo. Se debe tener en cuenta que los vigilantes cobran por horas y que el coste por hora depende de la franja horaria tal y como muestra la tabla.

Franja	12AM-4AM	4AM-8AM	8AM-12AM	12PM-4PM	4PM-8PM	8PM-12AM
Vigilantes	15	16	32	34	42	27
€/hora	12	105	9	105	9	105

11. Formulad detalladamente, sin resolverlo, el problema siguiente:

La Seymour Hayes Manufacturing Company tiene tres plantas de producción en las cuales produce una componente pequeña para un producto industrial y seguidamente la distribuye a 5 distribuidores a un precio fijo de 2.5€ por unidad. Las previsiones de venta indican que las distribuciones mensuales mínimas serán de 2700 unidades al distribuidor 1 , 2700 unidades al distribuidor 2, 9000 unidades al distribuidor 3, 4500 unidades al distribuidor 4 y 3600 unidades al distribuidor 5. Las capacidades de producción mensual son de 4500 unidades en la planta 1, 9000 en la planta 2 y 11250 en la planta 3. Los costes netos de producción por unidad son de 2€ en la planta 1, 1€ en la planta 2 y 1.8€ en la planta 3. Los costes de transporte (en euros, €) al distribuir una unidad desde cada planta a cada distribuidor son los siguientes:

	Distr.1	Distr.2	Distr.3	Distr.4	Distr.5
Planta1	0.05	0.07	0.11	0.15	0.16
Planta2	0.08	0.06	0.10	0.12	0.15

Planta3	0.10	0.09	0.09	0.10	0.16

Formulad el problema para maximizar los beneficios de la empresa Seymour Hayes Manufacturing Company.

12. Formulad detalladamente, sin resolverlo, el problema siguiente:

La ciudad 1 produce un mínimo de 500 toneladas de desechos cada día. La ciudad 2 produce un mínimo de 400 toneladas por día. Los desechos deben ser incinerados en el incinerador 1 o en el 2. Estos incineradores pueden incinerar hasta 600 toneladas por día, el primero incinerador y hasta 900 toneladas el segundo. El coste de incinerar los desechos es de 40€ por tonelada a el incinerador 1 y de 30€ por tonelada al segundo. El proceso de incineración reduce una tonelada de desechos a 0.2 toneladas de otro tipo de residuos, los cuales deben ser transportados a uno de los dos vertederos existentes. Cada vertedero puede recibir hasta 200 toneladas de residuos cada día. Transportar una tonelada de material (sean residuos o basura) cuesta 3€ por kilómetro. Las distancias en kilómetros entre los diferentes puntos se encuentran en la tabla siguiente:

	Incinerador 1	Incinerador 2	Vertedero 1	Vertedero 2
Ciutat 1	30	5	--	--
Ciutat 2	36	42	--	--
Incinerador 1	--	--	5	8
Incinerador 2	--	--	9	6

Plantead un modelo de PL que permita minimizar el coste del tratamiento integral de los desechos producidos en estas dos ciudades.

13. Formulad, sin resolverlo, el modelo PL del problema siguiente:

Para su funcionamiento, una oficina de correos necesita cubrir las 8h de servicio diario con la siguiente cantidad mínima de personas:

Día	Lu.	Ma.	Mi.	Ju.	Vi.	Sá.	Do.
Trabajadores	17	13	15	19	14	16	11

Las 8h de servicio diarias se pueden cubrir con un trabajador a tiempo completo (TTC) o con dos trabajadores a tiempo parcial (TTP). El convenio firmado con el sindicatos obliga a cumplir las siguientes especificaciones:

- Cada trabajador trabaja 5 días consecutivos y descansa los 2 siguientes. Un trabajador hace siempre el mismo turno, es decir, siempre empieza a trabajar el mismo día de la semana.
- El trabajadores TTP pueden cubrir como mucho el 25% del total de las horas trabajadas por semana por todos los trabajadores.
- Los sueldos son de 9 €/hora por un TTC y 6 €/hora por un TTP.

La oficina de correos quiere encontrar la contratación óptima en relación a los costes laborales semanales.

14. Formulad, sin resolverlo, el modelo PL del problema siguiente:

La primera tabla muestra la composición (Proteínas, Almidón, Minerales y vitaminas, y Otras) de los dos productos utilizados para obtener una mezcla de cereales para el desayuno. Los componentes denominados “Otros” son fibra, agua,.... La segunda tabla muestra el precio por kilogramo y la disponibilidad diaria de cada uno de los dos productos. La compañía mezcla estos productos y obtiene dos tipos diferentes de cereales para el desayuno. La mezcla 1 se vende a 0.9€/kg; debe contener como mínimo un 22% de proteínas y como mucho un 2% de minerales y vitaminas La mezcla 2 se vende a 0.6€/kg; debe contener como mínimo un 30% de almidón ¿Cuáles son las mezclas óptimas para la compañía?

Producto	Proteínas	Almidón	Minerales y vitaminas	Otras
1	45%	12%	4%	39%
2	27%	40%	3%	30%

Producto	Precio (€/kg)	Disponibilidad diaria (kg)
1	0.36	1500
2	0.27	2000

15. Formulad, sin resolverlo, el modelo PL del problema siguiente:

En el siguiente cuadro se ofrecen las ofertas máximas de los almacenes y las demandas mínimas en los mercados a satisfacer para cierto bien. También se ofrecen los costes unitarios de transporte de cada almacén a cada uno de los mercados. Se trata, por lo tanto, de plantear el problema para encontrar las cantidades de cada bien en cada planta para de minimizar los costes.

		MERCADOS		
	Nueva York	Chicago	Topeka	Oferta
PLANTAS		Costes de Transporte		
Seattle	2.5	1.7	1.8	350
San Diego	2.5	1.8	1.4	600
Demandas	325	300	275	

16. Formulad, sin resolverlo, el modelo PL del problema siguiente

Una compañía de petróleo produce en sus refinerías: gasoil(G), gasolina normal(N), gasolina súper(S) a partir de dos tipos diferentes de crudo C1 y C2. Las refinerías tienen 2 tipos de tecnologías: la tecnología nueva(Tn) y la tecnología antigua(Ta). El proceso de destilación que funciona con la tecnología nueva(Tn) utiliza para cada sesión de destilación 7 unidades de crudo C1 y 12 de C2; como resultado de este proceso de destilación se obtiene 12 unidades de G, 6 de N, y 5 de S. Por otro lado, cada vez que se realiza un proceso de destilación con la tecnología antigua(Ta) se obtiene 10 unidades de G, 7 de N, y 4 de S con un gasto de 10 unidades de crudo C1 y 8 de C2. A la vista de las estimaciones de la demanda de los 3 productos para el mes próximo, la compañía debe producir al menos 900 unidades de G, 300 de N y entre 800 y 1700 de S. La disponibilidad de crudo C1 es de 1400 unidades y de C2 de 2000 unidades. Los beneficios por unidad producida de los 3 productos son: 4 para el gasoil, 6 para la gasolina normal y 7 para la súper. La compañía está interesada en plantear un problema PL que le permita conocer cuántos procesos ha de hacer con cada tipo de tecnología para que el beneficio sea óptimo.

17. Formulad, sin resolverlo, el modelo PL del problema siguiente:

Mientras está de operaciones fuera de su país el portaaviones MIGHTY está de maniobras los días laborables (de lunes a viernes y está amarrado en el puerto el fin de semana. Con el propósito de dar vacaciones al máximo de tropa posible de los 2000 marineros de que dispone el barco, el capitán querría saber cómo ha de organizar los turnos de trabajo para minimizar la cantidad de marineros necesarios. Esta organización debe satisfacer los requerimientos siguientes:

a) Un marinero será asignado o bien en el turno de mañanas (AM) o de anocheceres (PM). Una vez ha empezado a trabajar no puede cambiar de turno.
b) Un marinero, cada vez que empieza a trabajar, lo hace durante cuatro de seguidos. Después descansa los tres días siguientes.
c) Los marineros mínimos necesarios para cubrir el servicio son

TURNO	LUN	MAR	MIÉR	JUE	VIE	SÁB	DOM
AM	850	1000	400	800	650	50	50
PM	750	500	900	300	700	50	50

El capitán quiere formular un PL que le ayude a encontrar la cantidad de marineros mínima a utilizar con el propósito de dar licencia por vacaciones a la cantidad máxima posible de marineros

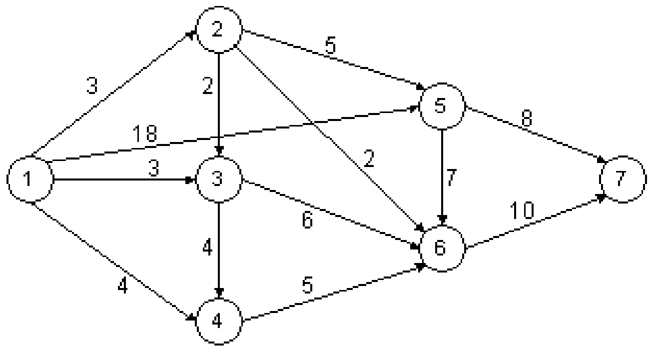
18. Formulad, sin resolverlo, el modelo PL del problema siguiente:

Unas cavas de reconocido prestigio quiere mezclar cuatro cosechas diferentes de uva para producir tres tipos de vino mezclado. Hay requerimientos sobre el porcentaje de la composición de las mezclas (vease tabla anexa). Por ejemplo, en el caso del vino de calidad alta A, como mínimo el 75% de su contenido debe ser formado entre las cosechas 1 y 2. Se puede vender cualquier cantidad del vino tipo B y del tipo C, aun así del tipo A sólo se puede vender como mucho 50 galones. El precio de venta de cada tipo de vino (€/galón) y la disponibilidad de uva (galones) se muestran en la tabla anexa.

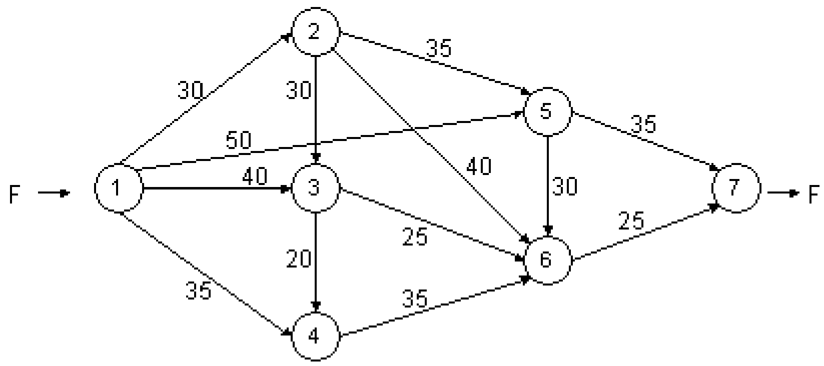
		COSECHA			PRECIO
MEZCLA	1	2	3	4	
A	(1+2)	≥75%		(4)≤5%	70
B	(1+2)	≥35%			40
C				(4)≤40%	30
Disponibilidad	180	250	200	400	

El gestor de las cavas necesita formular un PL que le ayude a encontrar la cantidad de cada cosecha que debe destinar a cada tipo de vino con el propósito de obtener el máximo de ingresos.

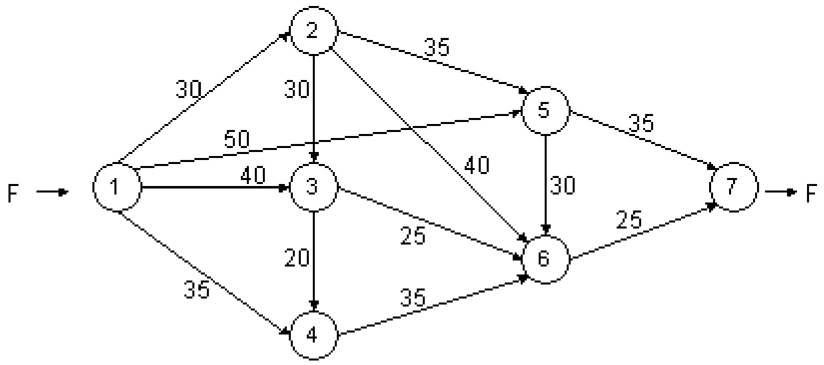
19. El grafo de la figura anexa representa una red de carreteras entre siete ciudades de un determinado país y sus distancias respectivas. Formula un modelo de Programación Lineal que determine el camino de longitud mínima que conecte la ciudad 1 con la 7.



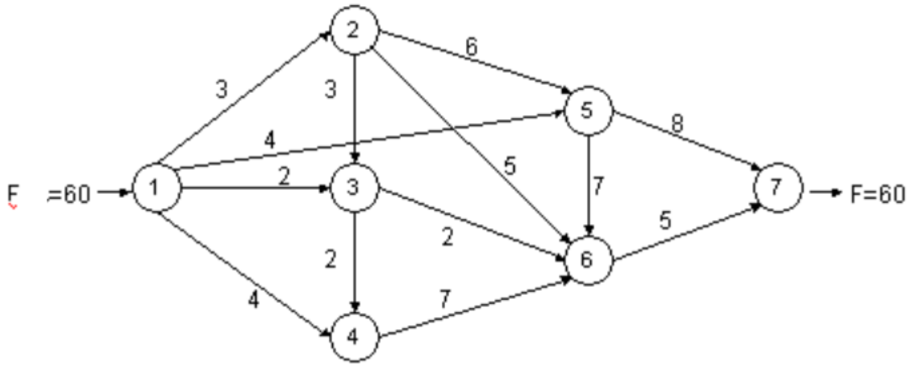
20. La red de telecomunicaciones, representada en el grafo anexo, transfiere información entre los nodos 1 y 7 a través de cinco nodos intermedios: 2, 3, 4, 5, y 6. Los números sobre los arcos que conectan los nodos indican las capacidades máximas de transferencia de cada arco. Formula el modelo PL que determina el flujo máximo F de información que se puede transmitir del nodo 1 al 7.



21. En una red de telecomunicaciones se pretende transmitir un flujo determinado de información entre dos nodos de manera que el coste de esta transmisión sea mínimo (Problema del flujo a coste mínimo). Supongamos que la red se puede representar por los grafos de las figuras anexas y que se desea transmitir un flujo F (F=60) desde el nodo 1 hacia el nodo 7. Se sabe que transmitir una unidad de información por un arco de la red lleva asociado un determinado coste que depende del arco por el cual circula: Cij coste unitario del arco(i,j). Además los arcos que conectan los nodos tienen capacidades máximas de transferencia de información. Las capacidades y los costes de cada arco se muestran en las figuras siguientes:



Capacidades de los arcos.



Costes asociados a los arcos.

Formula un modelo de Programación Lineal que determine cómo debe transmitirse el flujo F requerido (F=60) desde el nodo 1 hacia el nodo 7 para que el coste sea mínimo.

22. La Spice Inc. dispone de una cantidad limitada de tres ingredientes (HB01, HB02 y HB03) para la elaboración de frascos de curry y canella. El departamento de márqueting informa que se puede vender toda la canela que pueda producirse, pero sólo puede venderse un máximo de 1700 frascos de curry. Los gramos de ingredientes no utilizados en la fabricación se revenden a los precios seguientes: 0.60€/gr HB01, 0.70€/gr HB02, 0.55€/gr HB03. Además, la Spice Inc. ha firmado un contrato para suministrar al menos 600 frascos de canela. En la tabla seguiente se muestra la información adicional.

	Ingredientes (gr/frasco)			
	HB01	HB02	HB03	Precio de venta (€/frasco)
Curry	4	2	1	3.25
Canela	3	2	3	2.75
Disponibilidad (grs)	8000	9000	7000	

Plantea un modelo PL que permeta a la Spice Inc maximizar los ingresos.

23. Una casa discográfica recibe 8 nuevas canciones de un cantante. La casa discográfica está interesada en incluir la cantidad máxima de estas canciones en un CD doble (dos CD's). Por limitaciones técnicas y comerciales, las canciones incluidas en cada CD deben sumar un total de minutos de duración que esté entre 14 y 16 minutos. La duración y el tipo de canción (clasificada como balada o rítmica) se muestran en la tabla siguiente:

Canción	Tipo	Duración
1	Balada	4 minutos
2	Rítmica	5 minutos
3	Balada	3 minutos
4	Rítmica	2 minutos
5	Balada	4 minutos
6	Rítmica	3 minutos
7	---	5 minutos
8	Balada y rítmica	4 minutos

Además, la distribución de las canciones en el doble CD debe satisfacer las condiciones siguientes:
- Una canción no puede estar incluida en los dos CD. Nada más puede incluirse en uno de ellos.
- En cada CD debe haber exactamente dos baladas
- En el CD 1 debe haber por lo menos 3 canciones rítmicas.
- O bien la canción 5, o bien la canción 6, deben estar en el CD 1.
- Si las canciones 2 y 4 se encuentran en el CD 1, entonces la canción 5 tendrá que estar en el CD 2.

Formula un modelo que determine la mejor distribución de las canciones en los dos CDs.

24. En vistas a la retransmisión de un partido de fútbol por televisión, un campo de fútbol se ha dividido en 20 sectores, los cuales pueden cubrirse con cámaras localizadas en 10 puntos diferentes del estadio la forma siguiente:

Punto de localización	Sectores cubiertos
1	16, 17, 18, 19
2	17, 18, 19, 20
3	16, 17, 18, 19, 20
4	1, 2, 3, 4, 5
5	2, 3, 4, 5
6	7, 8, 9, 10
7	12, 13, 14, 15
8	6, 7, 8, 9
9	11, 12, 14, 15
10	7, 8, 9, 13, 14

Plantea un problema que minimice el número de cámaras necesarias para cubrir todos los sectores.

25. La asignación de proyectos:
Una empresa quiere llevar a cabo cuatro proyectos (P1, P2, P3, P4) para los que ha recibido ofertas de cinco contratistas (C1, C2, C3, C4, C5). Debido a sus obligaciones anteriores, cada contratista sólo puede hacerse cargo de un proyecto, excepto el contratista C2, que puede realizar hasta dos proyectos. En la tabla siguiente se muestran los valores de las ofertas efectuadas por los contratistas de cada proyecto, expresadas en miles de euros.

	C1	C2	C3	C4	C5
P1	18	16	--	17	20
P2	16	15	--	--	--
P3	--	25	23	22	22
P4	30	32	--	--	--

Formula un modelo de PL que permita decidir la asignación de proyectos más económica. Sólo se tiene que formular en detalle su planteamiento matemático: variables de decisión, función objetivo y restricciones.

26. La empresa de trabajo temporal FastJob tiene previsto proporcionar trabajadores durante la próxima temporada de verano (de junio a septiembre) de acuerdo con las necesidades siguientes:

Mes	Junio	Julio	Agosto	Septiembre
Número de trabajadores	100	120	80	170

Teniendo en cuenta el cambio en las necesidades de trabajadores en los diferentes meses, puede ser más económico conservar más trabajadores de los necesarios durante un mes. Los costes de formación y gestión de un trabajador dependen de la duración de su trabajo, como se muestra a continuación:

Duración del trabajo (meses)	1	2	3	4
Coste por trabajador(€)	100	130	180	220

Por ejemplo, contratar a un trabajador al inicio del mes de julio, despedirlo durante agosto y volver a contratarlo al inicio del mes de septiembre, tiene un coste de 100+100=200 euros (dos contratos de un mes de duración); en cambio, si se contrata en julio por un periodo de tres meses, a pesar que sólo trabaje dos, los costes seran de 180 euros.

Formula un modelo de PL para determinar la cantidad de trabajadores contratados cada mes (y la duración de los contratos) de manera que el coste total sea mínimo.

27. En la factoría S.E.A.T de Martorell se fabricarán durante la semana próxima un número todavía por determinar de los modelos IBIZA y CÓRDOBA, correspondientes a una pre-serie que se ha de enviar a un cliente. El cliente sólo ha especificado que en total quiere un máximo de 80 unidades, y que como mínimo tiene que haber 40 IBIZA y 20 CÓRDOBA. A cada uno de los dos modelos se le debe hacer ciertas modificaciones sobre el modelo original, que significan un tiempo adicional de producción: 6 horas para el IBIZA y 10 para el CÓRDOBA. No obstante, por un reajuste en el plan de producción sólo se dispone de 600 horas de máquina para dedicar a estas modificaciones. Por cada IBIZA, el cliente pagará 3.500.000 de unidades monetarias (u.m.) y por cada CÓRDOBA 5.000.000 u.m. Este precio incluye el transporte y los cargos adicionales por ser una pre-serie. Con estas condiciones interesa plantear un modelo PL que permita decidir el número de unidades a producir de cada modelo con el propósito de maximizar el ingreso.

[Nota: este problema es un problema de Programación Lineal Entera. Pese a esta característica, con el propósito de practicar con el aloritmo símplex, lo resolveremos como si fuera un problema de Programación Lineal Pura.]

Se pide:

a) Plantead el modelo PL del problema.
b) Resolved gráficamente el PL mediante el método de la línea isobeneficio.
c) Contestad a las siguientes preguntas:
   - c.1 ¿El conjunto de soluciones posibles es un conjunto acotado?
   - c.2 ¿Es posible fabricar 45 IBIZA y 35 CÓRDOBA? ¿Es óptima esta decisión?
   - c.3 ¿Qué coordenadas tiene el vértice intersección de las restricciones de demanda total del cliente y demanda de coches CÓRDOBA? ¿Cuánto vale la función objetivo en este vértice?
   - c.4 ¿Es verdad que en la decisión óptima la demanda total del cliente se satisface de manera exacta?
   - c.5 Si, por alguna razón, cambia el sentido de la desigualdad de la restricción de horas de máquina, ¿la solución del PL será impropia? ¿Cambiará el valor óptimo de z? ¿La región de soluciones posibles será no acotada?

28. Suponemos que, a partir de una situación real, hemos llegado a la modelización siguiente del problema:

$$\text{Max } Z=3x_1+x_2$$
$$(1) \quad x_1+x_2 \geq 3$$

(2) $-2x_1+x_2 \leq 3$
(3) $4x_1+x_2 \leq 9$
(4) $x_1,x_2 \geq 0$

Resolved gráficamente el problema anterior y responded a las cuestiones siguientes:

a) ¿El valor z en el óptimo es 8?
b) ¿El vértice óptimo es un vértice por el cual pasa la recta restricción (2)?
c) ¿El punto (1,3) es una solución posible pero este punto no es la decisión óptima?
d) Si, por alguna razón, cambia el sentido de la restricción (1) de "≥" a "≤", entonces ¿la región factible (conjunto de soluciones posibles) del PL será no acotada?

29. Suponemos que, a partir de una situación real, hemos llegado a la modelización del siguiente problema:

Max $Z=3x_1+6x_2$
(1) $20x_1+50x_2 \leq 3300$
(2) $4x_1+3x_2 \leq 380$
(3) $x_1,x_2 \geq 0$

Resolved gráficamente el problema anterior y responded a las cuestiones siguientes:

a) ¿El valor de el óptimo es 435?
b) ¿El vértice óptimo se toma en un vértice sobre la restricción (2)?
c) ¿La solución (0, 66) es posible pero esta decisión no es óptima?
d) Si, por alguna razón, cambia el sentido la restricción (1) de "≤" a "≥", ¿la región factible (conjunto de soluciones posibles) del PL será no acotada?

30. Suponemos que, a partir de una situación real, hemos llegado a la modelización del siguiente problema:

Max $Z=2x_1+x_2$
(1) $5x_1+2x_2 \leq 10$
(2) $3x_1+5x_2 \leq 15$
(3) $x_1,x_2 \geq 0$

Resolved gráficamente el problema anterior y responded a las cuestiones siguientes:

a) El valor de la función objetivo en el óptimo es 4?
b) ¿El vértice óptimo es un punto que está sobre la restricción (2)?
c) ¿El punto (1,1) es un punto factible (o decisión posible) pero esta decisión no es la decisión óptima?
d) Si, por alguna razón, cambia el sentido la restricción (1) de "≤" a "≥", ¿la región factible (conjunto de soluciones posibles) del PL será no acotada?

Soluciones

1. Solución a las cuestiones:

- Q1: d). El punto (x1,x2)=(2,2) satisface todas las restricciones del PL lo cual implica que es una de las soluciones posibles.
- Q2: c). Por ser x1 una variable libre de signo es necesario hacer el cambio x1= x1'– x1'' y definir las dos x1', x1'' como variables no negativas.
- Q3: d). Para c_1=4 la función z es paralela a la restricción r2. Esta restricción determina un lado "acotado" del conjunto de soluciones posibles. La respuesta correcta seria que la solución es múltiple.
- Q4: a). No existe ningún valor que cumpla a la vez las 4 restricciones y la nueva. El conjunto de soluciones posibles es un conjunto vacío.
- Q5: b). El conjunto de soluciones posibles es no acotado. Podemos hacer aumentar el valor de z tanto como queramos. No existe un óptimo global. Decimos que el PL tiene solución no acotada.

2. Solución a las cuestiones:

- Q1: c) es cierta. Si sustituimos las variables por (10,10) se satisfacen todas las restricciones, entonces (10,10) pertenece al conjunto de soluciones posibles.
- Q2: d) es cierta. Para c_1=1 tenemos una solución múltiple acotada, la función objetivo es paralela al segmento acotado determinado por la restricción r1).
- Q3: d) es cierta. Si la variable x2 pasa a ser una variable sin restricción de signo (SRES) es necesario sustituirla por la diferencia de dos variables no-negativas.
- Q4: b) es cierta. El cambio en z provoca que sea paralela a la restricción r3). El cambio en las desigualdades provoca que el conjunto de las soluciones posibles sea no acotado. El máximo se logra cuando z coincide con el segmento no acotado determinado por r3). Entonces tenemos una solución múltiple no acotada.
- Q5: a) es cierta. Cuando se añade la restricción r4) resulta un conjunto de soluciones vacío. En consecuencia no hay solución posible.

3. Soluciones a las cuestiones:

- Q1: b) es cierta. El vértice óptimo es el punto (x1,x2)=(20,60). La decisión de fabricar (x1,x2)=(20,20) satisface las tres restricciones pero no es la decisión óptima.
- Q2: La respondida c) es la correcta. Ved la justificación detallada en la página 25 del módulo.
- Q3: d) es cierta. Si el precio de venta pasa a 28 entonces el coeficiente de x1 en la función pasa a ser 4. En consecuencia la función objetivo (método línea isobeneficio) coincidirá con todo el segmento determinado por los vértices (20,60) y (40,20). La solución es múltiple acotada.
- Q4: d) es la cierta. Si añadimos la restricción $x2 \leq 50$ el óptimo que teníamos (x1,x2)=(20,60) ya no es posible. La solución nueva será (x1,x2)=(25,50).
- Q5: b) es cierta. Si cambiamos el sentido de las desigualdades de las dos primeras restricciones obtendremos un conjunto de soluciones posibles no acotado. Las variables x1 y x2 pueden tomar valores tanto grande como volamos y la función objetivo z tenderá a el infinito.

4. Contestad si las siguientes cuestiones son ciertas o falsas justificando vuestra respuesta:

a)Es cierta. Evidentemente una restricción con igualdad, en un programa lineal sólo se cumple por los puntos que pertenecen a la recta que representa. Mientras que una restricción con desigualdad también se cumple por puntos por debajo o por encima de la misma dependiendo del signo de la desigualdad.

b)Es falsa: esto sólo es cierto si la solución óptima es única, no es válido en el caso de de una solución múltiple.

c)Es falsa. Si bien se trata de un punto que pertenece a la región factible no debe ser necesariamente un vértice.

d)Es cierta. Efectivamente, en un problema con solución no acotada el valor de la z y el de alguna variable tiende a infinito.

e)Es falsa. La sustitución adecuada es $x_k=x'_k-x''_k$

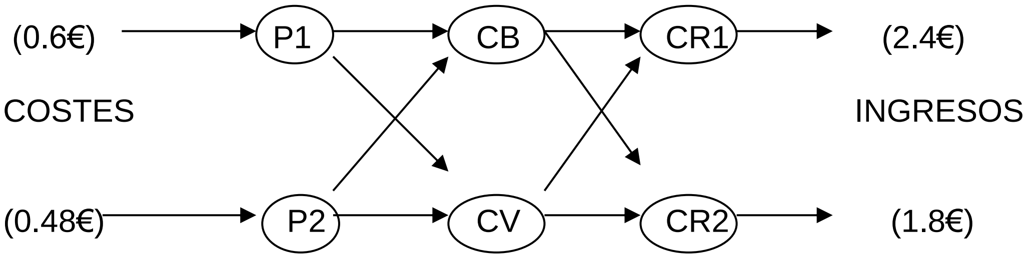
f)La afirmación es falsa. Si en un PL hay más de una solución óptima, quiere decir que como mínimo el óptimo és un segmento acotado. Si esto es así, cualquier otro punto del segmento es una solución de PL, y por lo tanto tenemos infinitas soluciones óptimas.

5. En un principio identificamos en el problema las siguientes variables:

P1= cantidad de pollos tipos 1
P2= cantidad de pollos tipos 2
CB= kilogramos carne blanca
CV= kilogramos carne roja
CR1= kilogramos croquetas tipos 1
CR2= kilogramos croquetas tipos 2

Todas las variables son no-negativas (≥ 0). Las variables P1 y P2 son enteras. Las variables de decisión principales son P1,P2,CR1 y CR2.

- El planteamiento del problema se puede representar mediante el diagrama de flujo siguiente:



- De este planteamiento se deducen las restricciones siguientes:

a. Total de carne blanca en función de la cantidad de pollos $CB=P1+0.6P2$

b. Total de carne roja en función de la cantidad de pollos $CV=0.4P1+0.6P2$

c. La carne blanca se utiliza para los dos tipos de croqueta: $CB=CB1+CB2$; dónde CB1 son los kilogramos de carne blanca destinadas a las croquetas de tipos 1, y dónde CB2 son los kilogramos de carne blanca destinadas a las croquetas de tipo 2

d. La carne roja se utiliza para los dos tipos de croqueta: $CV=CV1+CV2$; dónde CV1 son los kilogramos de carne roja destinadas a las croquetes de tipos 1, y dónde CV2 son los kilogramos de carne roja destinadas a las croquetas de tipos 2

e. La definición de estas variables CB1,CB2, CV1 y CV2 nos permite plantear de manera combinada las restricciones de los puntos 1., 2., 3., y 4 . :

$$P1+0.6P2= CB1+CB2;$$
$$0.4P1+0.6P2= CV1+CV2;$$

o de manera equivalente

$$CB1+CB2 - P1 - 0.6P2=0;$$
$$CV1+CV2- 0.4P1- 0.6P2=0;$$

Estas restricciones s'denominan de "balance de flujo" porque recogen la condición que todo el "flujo" de carne que generan los pollos es igual al "flujo" de carne que llega a las croquetas (observad la parte central del diagrama de flujo anterior) .

f. La aparición de estas variables CB1,CB2, CV1 y CV2 nos permite establecer que: $CR1=CB1+CV1$ y $CR2=CB2+CV2$

g. Entonces la restricción de calidad de la mezcla que exige que las croquetas tipo 1 tienen un contenido mínimo del 70% de carne blanca se expresa:

$$CB1\geq 0.7(CB1+CV1), \text{ es decir, } 0.3CB1-0.7CV1\geq 0$$

h. La restricción de calidad de la mezcla que exige que las croquetes tipos 2 tienen un contenido máximo del 40% de carne roja se expresa:

$$CV2\leq 0.4(CB2+CV2), \text{ es decir, } -0.4CB2+0.6CV1\leq 0$$

i. Las restricciones de cantidad producida de cada tipo de croqueta se expresan como:

$$CB1+CV1\leq 50 \text{ y } CB2+CV2\leq 30$$

j. Las restricciones de signo: $P1,P2,CB1,CB2,CV1,CV2\geq 0$. Las variables P1 y P2 son variables que toman valores en el conjunto del números enteros. En consecuencia el problema es un problema lineal entero mixto (PLEM).

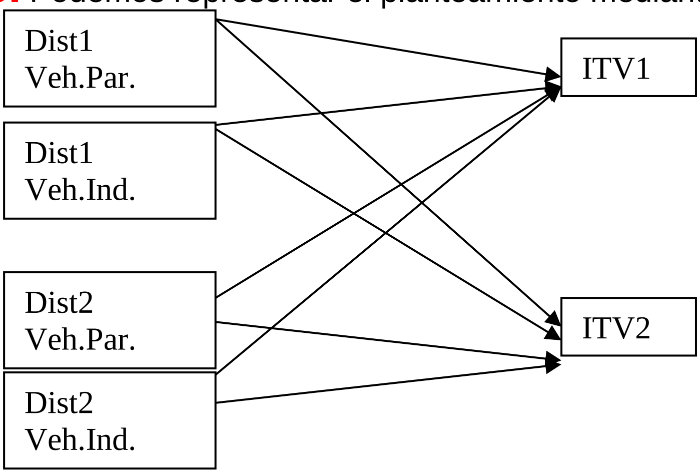
- La función objetivo se formulará en términos de maximizar el beneficio (Beneficio= Ingresos – Costes):

$$z= 2.4(CB1+CV1)+1.8(CB2+CV2)–0.6P1–0.48P2$$
o z
$$=2.4CB1+ 2.4CV1+ 1.8CB2+ 1.8CV2– 0.6P1–0.48P2$$

En consecuencia podemos formular el problema mediante el siguiente modelo:

Max z= 2.4CB1+ 2.4CV1+ 1.8CB2+ 1.8CV2– 0.6P1–0.48P2
sujeto a
Res1carnepollo) CB1+CB2 – P1 – 0.6P2=0;
Res2carnepollo) CV1+CV2– 0.4P1– 0.6P2=0;
Res3calidmezcla) 0.3CB1–0.7CV1≥0
Res4calidmezcla) –0.4CB2+0.6CV1≤0
Res5limitproducción) CB1+CV1≤50
Res6limitproducción) CB2+CV2≤30
Res7designo) P1,P2 enteras y no negativas; CB1,CB2,CV1,CV2≥0

6. Podemos representar el planteamiento mediante el gráfico siguiente:



- Podemos definir 8 variables de decisión: VP_{jk}: número de Veh. Parte. que irán del distrito *j*=1,2 a la ITV *k=1,2* y VI_{jk}: número de Veh. Ind. que irán del distrito *j*=1,2 a la ITV *k=1,2*.
- Restricciones:
  - ❑Vehículos por distrito: $VP_{11}+VP_{12}= 400$; $VP_{21}+VP_{22}= 320$; $VI_{11}+VI_{12}= 30$; $VI_{21}+VI_{22}= 50$
  - ❑Vehículos por ITV:
    - ➢Como mínimo el 8% deben ser VI:

      por la ITV1 tenemos que $VI_{11}+ VI_{21} \geq 0.08(VP_{11}+ VP_{21} +VI_{11}+ VI_{21})$ es decir,

      $$0.08VP_{11}+ 0.08VP_{21} –0.92VI_{11}–0.92VI_{21}\leq 0$$

      por la ITV2 tenemos que $0.08VP_{12}+ 0.08VP_{22} –0.92VI_{12}–0.92VI_{22}\leq 0$
    - ➢Como máximo el 12% deben ser VI:

      por la ITV1 tenemos que $VI_{11}+ VI_{21} \leq 0.12(VP_{11}+ VP_{21} +VI_{11}+ VI_{21})$ es decir,

$-0.12VP_{11}-0.12VP_{21}+0.88VI_{11}+0.88VI_{21}\leq 0$

por la ITV2 tenemos que $-0.12VP_{12}-0.12VP_{22}+0.88VI_{12}+0.88VI_{22}\leq 0$

- Como mínimo 350 vehículos: tendremos que en ITV1 y en ITV2 se debe satisfacer que

$VP_{11}+VP_{21}+VI_{11}+VI_{21}\geq 350$ y $VP_{12}+VP_{22}+VI_{12}+VI_{22}\geq 350$

- Como máximo 475 vehículos: tendremos que en ITV1 y en ITV2 se debe satisfacer que

$VP_{11}+VP_{21}+VI_{11}+VI_{21}\leq 475$ y $VP_{12}+VP_{22}+VI_{12}+VI_{22}\leq 475$

- Restricciones de signo: VP_{jk} y VI_{jk} son todas ellas variables no negativas y toman valores en los números enteros. Por lo tanto tenemos un problema de Programación Entera.

- Función objetivo: es necesario minimizar los costes de los usuarios, por lo tanto tenemos que

$\text{Min } z= 12VP_{11}+18VP_{12}+24VP_{21}+12VP_{22}+12VI_{11}+18VI_{12}+24VI_{21}+12VI_{22}$

- El modelo de PL es:

$\text{Min } z= 12VP_{11}+18VP_{12}+24VP_{21}+12VP_{22}+12VI_{11}+18VI_{12}+24VI_{21}+12VI_{22}$

R1) $VP_{11}+VP_{12}=400$;

R2) $VP_{21}+VP_{22}=320$;

R3) $VI_{11}+VI_{12}=30$;

R4) $VI_{21}+VI_{22}=50$

R5) $0.08VP_{11}+0.08VP_{21}-0.92VI_{11}-0.92VI_{21}\leq 0$

R6) $0.08VP_{12}+0.08VP_{22}-0.92VI_{12}-0.92VI_{22}\leq 0$

R7) $-0.12VP_{11}-0.12VP_{21}+0.88VI_{11}+0.88VI_{21}\leq 0$

R8) $-0.12VP_{12}-0.12VP_{22}+0.88VI_{12}+0.88VI_{22}\leq 0$

R9) $VP_{11}+VP_{21}+VI_{11}+VI_{21}\geq 350$

R10) $VP_{12}+VP_{22}+VI_{12}+VI_{22}\geq 350$

R11) $VP_{11}+VP_{21}+VI_{11}+VI_{21}\leq 475$

R12) $VP_{12}+VP_{22}+VI_{12}+VI_{22}\leq 475$

VP_{jk}, $VI_{jk}\geq 0$ y enteras.

7. Las variables a considerar son: Fi= cantidad de estufas fabricadas el i-èssimo mes; Mi= cantidad de estufas en el Almacén el mes "i".

- Función objetivo: Min {costes}= Min 24F1+24F2+24F3+21F4 +3M2+3M3+3M4; notad que el coste de fabricación en el mes de abril ha disminuido respecto los otros meses. Notad que no tenemos en cuenta el coste de almacén de las 1325 estufas iniciales. Si se quieren tener en cuenta, dado que es un término constante, sólo es necesario sumar 3*1325, después de haber encontrado el valor del óptimo, al valor z que conseguiríamos.
- Restricciones:
  - Mes de enero: la cantidad de estufas de que disponemos del mes anterior (1325), más las estufas que fabricamos en el mes de enero, debe ser igual a la cantidad de estufas vendidas más las estufas que sobran para el mes de febrero, es decir: F1+1325=9000+M2 o F1–M2=7675;
  - Mes de febrero: F2+M2=12000+M3 o F2+M2–M3=12000;
  - Mes de marzo: F3+M3=14000+M4 o F3+M3–M4=14000;

- ❑Mes de abril: $F4+M4=13500+800$ o $F4+M4=14300$;
- ❑Limitación de la producción: $Fi<=13000$ $i=1,2,3$ y $F4<=15000$
- ❑Limitación de la capacidad del almacén: $Mi<=2000$ $i=1,2,3,4$
- ❑Restricciones de signo: Todas las variables son enteras y no negativas. Tenemos un problema de Programación entera.

•Modelo (PE):

$$\begin{aligned}
&\text{Min } 24F1+24F2+24F3+21F4+3M2+3M3+3M4\\
&\quad F1-M2=7675\\
&\quad F2+M2-M3=12000\\
&\quad F3+M3-M4=14000\\
&\quad F4+M4=14300\\
&\quad F1<=13000;\ F2<=13000;\ F3<=13000;\ \ F4<=15000\\
&\quad M1<=2000;\ M2<=2000;\ M3<=2000;\ M4<=2000\\
&\quad Fi,Mi \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

8. Se trata de un problema de control de inventarios a lo largo de los 6 meses. Deben decidirse las unidades producidas y almacenadas cada mes (variables de decisión) de manera que se cumplan las condiciones de equilibrio (restricciones) y se minimicen los costes totales (objetivo). Tenemos una descripción de este tipo de problemas en las páginas 11 y 12 del resumen del módulo 1.

• Variables de decisión:
Xt = unidades producidas en el mes t, t=1, 2, 3, 4, 5, 6
Yt = unidades almacenadas al final del mes t, t=1, 2, 3, 4, 5, 6.

• Restricciones:
- Equilibrio de inventario: las unidades producidas el mes t más las unidades almacenadas el mes anterior han de cubrir la demanda del mes actual más las unidades almacenadas al final del mes corriente. Si representamos por Dt la demanda del mes t, estas restricciones toman la forma:

Xt + Yt-1 = Dt + Yt
Mes 1: X1 + 25 = 100 + Y1
Mes 2: X2 + Y1 = 250 + Y2
Mes 3: X3 + Y2 = 190 + Y3
Mes 4: X4 + Y3 = 140 + Y4
Mes 5: X5 + Y4 = 220 + Y5
Mes 6: X6 + Y5 = 110 + Y6

- Inventario final: Y6 >= 25
- Restricciones de signo: todas las variables, Xt i Yt son enteras y no negativas.

• Función objetivo: Minimizar los costes totales de producción y almacenamiento:
MIN Z = 50X1 + 45X2 + 55X3 + 48X4 + 52X5 + 50X6 + 8Y1 + 8Y2 + 8Y3 + 8Y4 + 8Y5 + 8Y6

• Modelo completo: es un problema de Programación Lineal Entera Puro [PLEP].

MIN $Z = 50X1 + 45X2 + 55X3 + 48X4 + 52X5 + 50X6 + 8Y1 + 8Y2 + 8Y3 + 8Y4 + 8Y5 + 8Y6$

s.a

$X1 - Y1 = 75$
$X2 + Y1 - Y2 = 250$
$X3 + Y2 - Y3 = 190$
$X4 + Y3 - Y4 = 140$
$X5 + Y4 - Y5 = 220$
$X6 + Y5 - Y6 = 110$
$Y6 >= 25$
Xt, Yt enteras y no negativas

9.

- Variables de decisión

Xk: unidades producidas del artículo k, donde k=1 mesas, k=2 sillas, k=3 bufetes, k=4 butacas, k=5 sofás. Todas las variables son enteras no negativas.

- Restricciones:
  - Por la limitación de fondos propios:
    $300X1 + 50X2 + 1700X3 + 1200X4 + 1500X5 \leq 5000000$
  - Al menos seis sillas por mesa y al menos dos butacas por sofá:
    $6X1 \leq X2$
    $2X5 \leq X4$
  - Más mesas, sillas y bufetes que butacas y sofás:
    $X1 + X2 + X3 \geq X4 + X5$
  - Al menos un 10% de muebles tienen que ser mesas:
    $X1 \geq 0.1(X1 + X2 + X3 + X4 + X5)$
  - Limitaciones en las horas-hombre disponibles:
    $4X1 + 4X2 + 3X3 + 2X4 + 2X5 \leq 10000$ Corte
    $X1 + X2 + X3 + 3X4 + 3X5 \leq 5000$ Montaje

- Función objetivo:

El objetivo es maximizar el beneficio. Por lo tanto el coeficiente de cada variable en la función objetivo indica cuál es el beneficio que aporta una unidad de aquel producto. Construimos la tabla de beneficios unitarios de los artículos:

	Mesa	Silla	Bufete	Butaca	Sofá
Coste unitario	300	50	1700	1200	1500
Precio unitario de venta	1000	500	2300	1800	2500
Beneficio unitario	700	450	600	600	1000

Tenemos la función objetivo siguiente
Max $Z = 700X1 + 450X2 + 600X3 + 600X4 + 1000X5$

- Linealizando las restricciones, tenemos el modelo PL siguiente:

  Max $Z = 700X1 + 450X2 + 600X3 + 600X4 + 1000X5$
  s.a
  $300X1 + 50X2 + 1700X3 + 1200X4 + 1500X5 \leq 5000000$
  $6X1 - X2 \leq 0$
  $2X5 - X4 \leq 0$

$-X1 - X2 - X3 + X4 + X5 \leq 0$
$-0.9X1 + 0.1X2 + 0.1X3 + 0.1X4 + 0.1X5 \leq 0$
$4X1 + 4X2 + 3X3 + 2X4 + 2X5 \leq 10000$
$X1 + X2 + X3 + 3X4 + 3X5 \leq 5000$
$Xk \geq 0$ enteras

10. Las variables que es necesario considerar son: Xi, la cantidad de vigilantes que *EMPIEZAN* su turno lo la franja i=1,2,…,6

- Función Objetivo: es necesario minimizar el coste teniendo en cuenta el precio por hora de cada franja. Debemos multiplicar por 4horas el precio por hora y tendremos el precio por franja. Es necesario tener en cuenta que si un vigilante empieza a trabajar en la franja "i" también estará trabajando en la franja "i+1". Por ejemplo, en la primera franja estarán trabajando los vigilantes X1 y los X6; y en la segunda franja trabajan el X2 y los X1. La función será:

Min 48(X1+X6)+42(X2+X1)+36(X3+X2)+42(X4+X3)+36(X5+X4)+42(X6+X5)
es decir, Min 90X1+78X2+78X3+78X4+78X5+90X6

- Restricciones de necesidad de personal: En la primera franja necesitamos un mínimo de 15 vigilantes. Así impondremos que $X1+X6\geq 15$. De manera análoga se obtienen todas las otras. Entonces, las restricciones que obtenemos son:

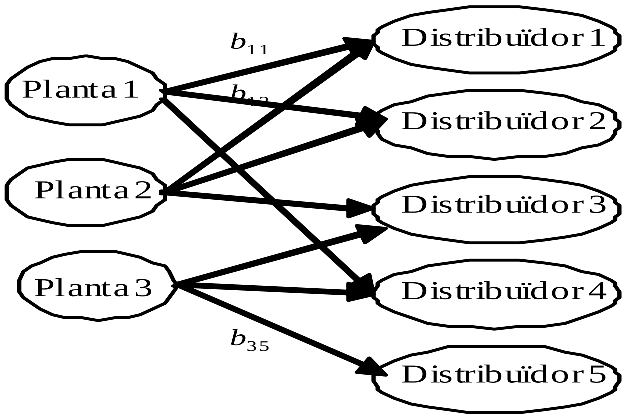
$X1+X6\geq 15$; $X2+X1\geq 16$; $X3+X2\geq 32$; $X4+X3\geq 34$; $X5+X4\geq 42$; $X6+X5\geq 27$

- Restricciones de signo: variables son enteres no negativas. Problema PE.
- Modelo:

Min 90X1+78X2+78X3+78X4+78X5+90X6

$$
(PE)\quad \begin{array}{l}
X1+X6\geq 15\\
X2+X1\geq 16\\
X3+X2\geq 32\\
X4+X3\geq 34\\
X5+X4\geq 42\\
X6+X5\geq 27\\
Xi\in Z^{+}
\end{array}
$$

11. Podemos representar la situación mediante el diagrama siguiente:



- Variables: Tenemos 15 variables, x_{ij}, que contemplan la cantidad distribuida desde cada planta a cada distribuidor. Por ser x_{ij} variables que recuentan la cantidad de unidades, estas variables toman valor en el conjunto de los números enteros y no negativos. En consecuencia, tendremos un problema de programación entera PLEP.
- Función objetivo: Para saber el beneficio b_{ij} asociado a cada unidad vendida desde la planta "i" al distribuidor "j" es necesario restar al precio de venta de cada unidad (fijo: 2.5€) el coste de producción (que varían en cada planta) y los costes de transporte por unidad (que varían según planta y distribuidor). Por ejemplo, el coeficiente b_{24} (beneficio por unidad de planta 2 a distribuidor 4) lo calcularemos haciendo b_{24}=2.5 – 1 – 0.12=1.38.

bij	*Distr.1*	*Distr.2*	*Distr.3*	*Distr.4*	*Distr.5*
Planta1	0.45	0.43	0.39	0.35	0.34
Planta2	1.42	1.44	1.40	1.38	1.35
Planta3	0.60	0.61	0.61	0.60	0.54

Entonces obtendremos que la función objetivo es

$$\text{Max } z = \sum bij.xij = 0.45x_{11}+0.43x_{12}+\ldots +0.54x_{35}$$

- Restricciones:

→ capacidad mensual máxima Planta 1:

$$X11 + X12 + X13 + X14 + X15 \leq 4500$$

→ capacidad mensual máxima Planta 2:

$$X21 + X22 + X23 + X24 + X25 \leq 9000$$

→ capacidad mensual máxima Planta 3:

$$X31 + X32 + X33 + X34 + X35 \leq 11250$$

→ distribución mensual mínima Distribuidor 1:

$$X11 + X21 + X31 \geq 2700$$

→ distribución mensual mínima Distribuidor 2:

$$X12 + X22 + X32 \geq 2700$$

→ distribución mensual mínima Distribuidor 3:

$$X13 + X23 + X33 \geq 9000$$

→ distribución mensual mínima Distribuidor 4:

$$X14 + X24 + X34 \geq 4500$$

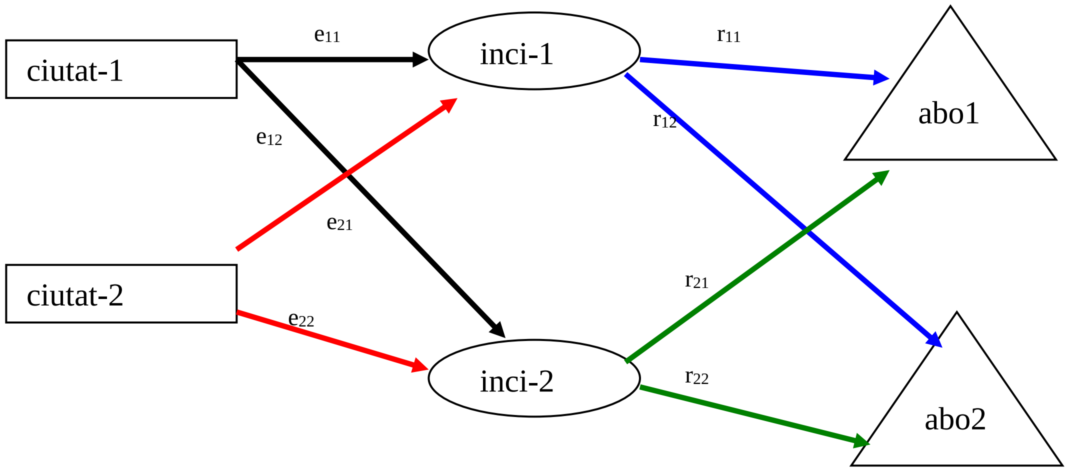
→ distribución mensual mínima Distribuidor 5:

$$X15 + X25 + X35 \geq 3600$$

- •Restricciones de signo: $Xij \in \mathbb{Z}$ y $Xij \geq 0$. Variables enteras y no negativas.
- •Modelo: $\text{Max } z = 0.45x_{11}+0.43x_{12}+\ldots+0.54x_{35}$

$$\begin{aligned}
&X11 + X12 + X13 + X14 + X15 \leq 4500\\
&X21 + X22 + X23 + X24 + X25 \leq 9000\\
&X31 + X32 + X33 + X34 + X35 \leq 11250\\
&X11 + X21 + X31 \geq 2700\\
&X12 + X22 + X32 \geq 2700\\
&X13 + X23 + X33 \geq 9000\\
&X14 + X24 + X34 \geq 4500\\
&X15 + X25 + X35 \geq 3600\\
&Xij \in \mathbb{Z} \text{ y } Xij \geq 0
\end{aligned}$$

12. Podemos representar la situación mediante el diagrama siguiente:



- Variables : Toneladas de desechos trasladados de una ciudad (y) a un incinerador (j) : e_{ij}. Toneladas de residuos trasladados de un incinerador (j) a un vertedero (z) : r_{jz}

- Restricciones :
  - producción de desechos por ciudad

    $e11 + e12 \geq 500$; ciudad-1

    $e21 + e22 \geq 400$; ciudad-2
  - capacidad incinerador

    $e11 + e21 \leq 600$; incinerador-1

    $e12 + e22 \leq 900$; incinerador-2
  - capacidad vertedero

    $r11 + r21 \leq 200$; vertedero-1

    $r12 + r22 \leq 200$; vertedero-2
  - transformación desechos->residuos

0,2 (e11 + e21) = r11 + r12; o de manera explícita:
0,2 e11 + 0,2 e21– r11 – r12 = 0;
0,2 (e12 + e22) = r21 + r22; o de manera explícita:
0,2 e12 + 0,2 e22– r21 – r22 = 0;

- de signo: $e_{ij} \geq 0$, $r_{jz} \geq 0$

•Función objetivo : [MIN] Z = coste.transporte + coste.incinerador
coste.transporte :
3 * (30 e11 + 5 e12 + 36 e21 + 42 e22 + 5 r11 + 8 r12 + 9 r21 + 6 r22)
coste. incinerador : 40 * (e11 + e21) + 30 * (e12 + e22)

•Entonces, obtenemos:
[MIN] Z = 130e11+148e21+45e12+156e22+15r11+24r12+27r21+18r22

13. Es necesario considerar las variables siguientes:

- Xi = núm de trabajadores a tiempo completo que empiezan el turno el día y=1,..,7 (lunes,…,domingo)
- Yi = núm de trabajadores a tiempo parcial que empiezan el turno el día y=1,..,7 (lunes,…,domingo)

- Función objetivo: Un TTC trabaja 40 horas semanales y un TTP trabaja 20 horas semanales.

[MIN] z = 9 eur/h * 40 h * (X1+… +X7) + 6 eur/h * 20 h * (Y1+… +Y7) =
360 (X1+……+X7) + 120 (Y1+……+Y7)

- Restricciones:

De R1 a R7 son restricciones que expresan el mínimo de personas que necesitamos cada día (8h). S'debe tener en cuenta que un puesto de trabajo cubierto con TTP's representa dos trabajadores TTP. Por lo tanto un TTP sólo cubre el 50% de l 'horario. La tabla muestra, de manera esquemática, las necesidades de cubrir puestos de trabajo y los diferentes turnos de los trabajadores:

	LUN	MAR	MIÉ	JUE	VIE	SÁB	DOM
X1+05Y1	Empiezan						
X2+05Y2		Empiezan					
X3+05Y3			Empiezan				
X4+05Y4				Empiezan			
X5+05Y5					Empiezan		
X6+05Y6						Empiezan	
X7+05Y7							Empiezan
Total	≥17	≥13	≥15	≥19	≥14	≥16	≥11

Entonces podemos expresar las restricciones mediante las siguientes expresiones:

- (lunes): todas excepto las que empiezan el martes o el miércoles:
  $X1+X4+X5+X6+X7+0.5\ (Y1+Y4+Y5+Y6+Y7\ ) \geq 17$
- (martes):todas excepto las que empiezan el miércoles o el jueves
  $X1+X2+X5+X6+X7+0.5\ (Y1+Y2+Y5+Y6+Y7\ ) \geq 13$

- (miércoles): todas excepto las que empiezan el jueves o el viernes
  $X1+X2+X3+X6+X7+0.5\ (Y1+Y2+Y3+Y6+Y7\ ) \geq 15$
- (jueves): todas excepto las que empiezan el viernes o el sábado
  $X1+X2+X3+X4+X7+0.5\ (Y1+Y2+Y3+Y4+Y7\ ) \geq 19$
- (viernes): todas excepto las que empiezan el sábado o el domingo
  $X1+X2+X3+X4+X5+0.5\ (Y1+Y2+Y3+Y4+Y5\ ) \geq 14$
- (sábado): todas excepto las que empiezan el domingo o el lunes
  $X2+X3+X4+X5+X6+0,5\ (Y2+Y3+Y4+Y5+Y6\ ) \geq 16$
- (domingo): todas excepto las que empiezan el lunes o el martes
  $X3+X4+X5+X6+X7+0,5\ (Y3+Y4+Y5+Y6+Y7\ ) \geq 11$

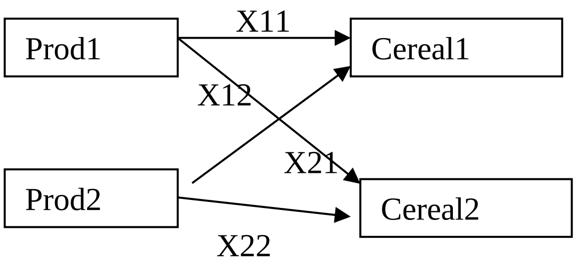
- las horas trabajadas por TTP's como mucho pueden ser el 25% del total de horas trabajadas
  $20(Y1+\ldots\ldots+Y7) \leq\ 0.25\ \%[40(\ X1+\ldots..+X7)+20(Y1+\ldots\ldots.+Y7\ )]$;

operamos y obtenemos

$$R8:\ -2(X1+\ldots\ldots+X7\ ) + 3(\ Y1+\ldots\ldots+Y7\ ) \leq\ 0$$

- Las variables son no negativas y pertenecen al conjunto de números enteros. Es un problema de Programación Lineal Entera (PLE). Entonces escribimos, R9: $Xi,\ Yi \in Z^{+}$

14. Podemos expresar el problema según el diagrama siguiente:



- Tenemos cuatro variables de decisión:
  X11 (cantidad de producto 1 a la mezcla cereal 1)
  X21 (cantidad de producto 2 a la mezcla cereal 1)
  X12 (cantidad de producto 1 a la mezcla cereal 2)
  X22 (cantidad de producto 2 a la mezcla cereal 2)
  Son cuatro variables no negativas (Xij>=0)
- La función de maximización de los beneficios la encontraremos restando el precio de venta de la mezcla y el precio de compra de cada producto, es decir:

  $MAX\ Z = (0,9 - 0,36)X11 + (0,9 - 0,27)X21 + (0,6 - 0,36)X12 + (0,6 - 0,27)X22$

- Las restricciones serán:
  - Por disponibilidad de los recursos o materias primas:
    $X11 + X12 \leq 1.500$
    $X21 + X22 \leq 2.000$
  - Por cantidad de proteínas del cereal 1:
    $0,45X11 + 0,27X21 \geq 0,22\ (X11 + X21)$

- Por cantidad de minerales del cereal 1:
  $0,04X11 + 0,03X21 \leq 0,02\ (X11 + X21)$
- Por cantidad de almidón del cereal 2:
  $0,12X12 + 0,40X22 \geq 0,30\ (X12 + X22)$

- Realizando operaciones en las expresiones anteriores, el planteamiento del problema es
  MAX $Z = 0,54X11 + 0.63X21 + 0,24X12 + 0,33X22$
  Sujeto a :
  $X11 + X12 \leq 1.500$
  $X21 + X22 \leq 2.000$
  $0,23X11 + 0,05X21 \geq 0$
  $0,02X11 + 0,01X21 \leq 0$
  $-0,18X12 + 0,10X22 \geq 0$
  $Xij >= 0$

15. Solución:

Definición de variables:
X_{ij} : número bienes originado en la planta "i" que van al mercado "j". Son variables enteras y no negativas, es decir, que toman valores en el conjunto Z^+. Es un problema de programación lineal entera (PLE).

Definición de la función objetivo
EL objetivo consiste en minimizar los costes globales de transporte de las mercancías desde el almacén o planta "i" hasta las dos ciudades o mercados "j".

Min $z = 2.5\ x_{11} + 1.7\ x_{12} + 1.8\ x_{13} + 2.5\ x_{21} + 1.8\ x_{22} + 1.4\ x_{23}$

Restricciones:
* restricciones de máximo de bienes ofrecidos:
$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 600$

*restricciones de demanda (mínima) de las ciudades:
$x_{11} + x_{21} + \geq 325$
$x_{12} + x_{22} \geq 300$
$x_{13} + x_{23} \geq 275$
*restricciones de signo: $x_{ij} \in Z^+$

MODELO DEL PROBLEMA:
Min $z = 2.5\ x_{11} + 1.7\ x_{12} + 1.8\ x_{13} + 2.5\ x_{21} + 1.8\ x_{22} + 1.4\ x_{23}$
$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 600$
$x_{11} + x_{21} + \geq 325$
$x_{12} + x_{22} \geq 300$
$x_{13} + x_{23} \geq 275$
$x_{ij} \in Z^+$

16. Solución:

Definición de variables
Se define T_i como el número de unidades que se utiliza o implementa de cada una de las 2 tecnologías(T_1 y T_2)

Definición de la función objetivo:
se trata de maximizar el beneficio global obtenido a partir de los 3 artículos de la refinería (entre paréntesis tenéis las unidades de cada producto especificadas en función de las tecnologías):

$$\text{Max } Z= 4(12 T_1 +10T_2) +6(6 T_1 +7T_2)+ 7(5 T_1 +4T_2)$$

Restricciones
*Restricciones que hacen referencia al disponibilidad de C1 y C2: estas restricciones están en función de las tecnologías:
$7 T_1 +10T_2 \leq 1400$
$12T_1 +8T_2 \leq 2000$
*Restricciones que hacen referencia a las demandas de los productos: nuevamente en función de las dos tecnologías
$12T_1 +10T_2 \geq 900$
$6T_1 +7T_2 \geq 300$
$5T_1 +4T_2 \geq 800$
$5T_1 +4T_2 \leq 1700$

MODELO DEL PROBLEMA:

$\text{Max } Z= 4(12 T_1 +10T_2) +6(6 T_1 +7T_2)+ 7(5 T_1 +4T_2)$
$7 T_1 +10T_2 \leq 1400$
$12T_1 +8T_2 \leq 2000$
$12T_1 +10 \geq 900$
$6T_1 +7T_2 \geq 300$
$5T_1 +4T_2 \geq 800$
$5T_1 +4T_2 \leq 1700$
$T_i \in Z^+$ (variables que toman valores en los números enteros no negativos)

17. Solución:

- Definimos las variables siguientes:
  Mi= marineros que empiezan el día "i" en el turno de las Mañanas.
  Vi= marineros que empiezan el día "i" en el turno de los Anocheceres.
- Restricciones:
  Durante el lunes estarán trabajando los marineros que han empezado a trabajar el lunes, y el viernes, sábado y domingo anteriores. Entonces se debe satisfacer que
  M1+M5+M6+M7>=850; P1+P5+P6+P7>=750
  Los otras días se plantean de manera análoga.
- DISPONIBILIDAD TOTAL DE MARINEROS:

$$M1+M2+\ldots+M7+P1+\ldots+P7\leq 2000$$

- Restricciones de signo: las variables toman valores en los números enteros no negativos: $Mi\in Z^+$ y $Vi\in Z^+$. Es un problema de programación lineal entera.
- Función objetivo:

Si se pretende dar licencia al máximo de marineros posible es necesario que trabajen el mínimo de marineros posibles. Entonces es necesario minimizar la suma de marineros que empiezan a trabajar

$$\text{Min } z=M1+M2+...+M7+V1+V2+...+V7$$

Modelo PLE del problema:

Min z=M1+M2+...+M7+V1+V2+...+V7
M1+M5+M6+M7>=850
P1+P5+P6+P7>=750
M1+M2+M6+M7>=1000
P1+P2+P6+P7>=500
M1+M2+M3+M7>=400
P1+P2+P3+P7>=900
M1+M2+M3+M4>=800
P1+P2+P3+P4>=300
M2+M3+M4+M5>=650
P2+P3+P4+P5>=700
M3+M4+M5+M6>=50
P3+P4+P5+P6>=50
M4+M5+M6+M7>=50
P4+P5+P6+P7>=50
$M1+M2+\ldots+M7+P1+\ldots+P7\leq 2000$
$Mi\in Z^+$ y $Vi\in Z^+$.

18. Solución:

- Definimos las variables siguientes: X_{ij}; y=1,2,3,4; j=1,2,3. Representa los galones de la cosecha "i" destinados a la mezcla de vino "j".
- Restricciones:
  - Disponibilidad de cosecha:

    $x11+x12+x13\leq 180$;
    $x21+x22+x23\leq 250$;
    $x31+x32+x33\leq 200$;
    $x41+x42+x43\leq 400$
  - Cantidad máxima calidad A:

    $x11+x21+x31+x41\leq 50$
  - Calidad mezcla A:
    - $x11+x21\geq 0.75(x11+x21+x31+x41)$, es decir, $0.25x11+0.25x21-0.75x31-0.75x41\geq 0$
    - $x41\leq 0.05(x11+x21+x31+x41)$, es decir, $0.05x11+0.05x21+0.05x31-0.95x41\geq 0$
  - Calidad mezcla B
    - $x12+x22\geq 0.35(x12+x22+x32+x42)$, es decir, $0.65x12+0.65x22-0.35x32-0.35x42\geq 0$
  - Calidad mezcla C:

- $x43 \leq 0.4(x13+x23+x33+x43)$, es decir, $0.4x13+0.4x23+0.4x33-0.6x43 \geq 0$

- Restricciones de signo: $X_{ij} \geq 0$; los "galones" es una medida de capacidad inglesa que equivale a poco más de cuatro litros y medio. Las variables toman valores en los números reales no negativos.
- Función objetivo: es necesario maximizar los ingresos. Entonces

Max $z=70(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+ 40(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}) + 30(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})$

Modelo PL del problema:

Max $z=70(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+ 40(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}) + 30(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})$

$x11+x12+x13 \leq 180$;

$x21+x22+x23 \leq 250$;

$x31+x32+x33 \leq 200$;

$x41+x42+x43 \leq 400$;

$x11+x21+x31+x41 \leq 50$;

$0.25x11+0.25x21-0.75x31-0.75x41 \geq 0$;

$0.05x11+0.05x21+0.05x31-0.95x41 \geq 0$;

$0.65x12+0.65x22-0.35x32-0.35x42 \geq 0$;

$0.4x13+0.4x23+0.4x33-0.6x43 \geq 0$;

$xij \geq 0$

19. Solución:

En este tipo de problemas, llamados del camino de longitud mínima, se trata de determinar la ruta de distancia mínima desde el nodo origen (nodo 1) al nodo destino (nodo 7).

Se definen las variables de decisión X_{ij} como una variable binaria que contempla si en el recorrido se incluye o no el arco que conecta el nodo "i" con el nodo "j". En este caso las variables de decisión sólo pueden tomar dos únicos valores:

X_{ij} = 1 se incluye el arco *ij* en el recorrido, X_{ij} = 0 en caso contrario

Vamos a analizar en primer lugar las restricciones del modelo. Deberá haber tantas restricciones como nodos tenga la red puesto que hay que expresar si en nuestro recorrido pasamos o no por el nodo. Es necesario distinguir entre los nodos origen y destino, 1 y 7 respectivamente, del resto de nodos intermedios, los llamados nodos *transbordo*.

En cada uno de los nodos transbordo se debe cumplir la siguiente relación de equilibrio de flujo:

Suma de variables de arcos de "salida" = Suma de variables de arcos de "llegada".

Con esta relación nos aseguramos que si en nuestro recorrido llegamos a un determinado nodo transbordo, entonces seguro que partiremos de él. Por ejemplo, al nodo 2 únicamente se puede llegar desde el nodo 1 mientras que desde el nodo 2 se puede partir hacia el nodo 3, el nodo 5 o nodo 6. Por lo tanto, la relación de equilibrio para este nodo será:

$$X_{23} + X_{25} + X_{26} = X_{12}$$

con lo que al linealizar la restricción para incluirla en el modelo quedaría de la forma:

$$X_{23} + X_{25} + X_{26} - X_{12} = 0.$$

Si en nuestro recorrido desde la ciudad 1 a la 7 no pasamos por el nodo 2 entonces X_{12} tomará el valor cero. En este caso, la restricción obligará que las variables X_{23}, X_{25}, X_{26} tomen también el valor cero. Si por el contrario en nuestro recorrido pasamos por la ciudad 2 entonces tendremos que X_{12} valdrá uno y la restricción obligará que una y sólo una de las tres variables X_{23}, X_{25}, X_{26} tome el valor uno. Es decir, que partamos de la ciudad 2 hacia una de las otras tres ciudades.

De manera análoga podemos construir la restricción del nodo 3. En este caso, a este nodo se puede llegar desde los nodos 1 o 2 mientras que podemos partir hacia los nodos 4 o 6; la condición de equilibrio es:

$$X_{36} + X_{34} = X_{13} + X_{23}$$

por lo tanto la restricción a incluir en el modelo será:

$$X_{36} + X_{34} - X_{13} - X_{23} = 0$$

De manera similar deducimos las restricciones para los nodos 4, 5,y 6:

$$X_{46} - X_{34} - X_{14} = 0$$
$$X_{57} + X_{56} - X_{25} - X_{15} = 0$$
$$X_{67} - X_{56} - X_{26} - X_{36} - X_{46} = 0$$

Los nodos origen y destino tendrán una forma distinta. Por definición, partiremos del origen (nodo 1) de manera obligatoria hacia alguno de los nodos 2 ,3, 4 o 5, es decir, hemos de elegir una y sólo una ruta. En consecuencia, en el origen la restricción es:

$$X_{12} + X_{15} + X_{13} + X_{14} = 1$$

Asimismo, el final de la ruta es el nodo destino (nodo 7) y a dicho nodo llegamos desde el nodo 5 o el nodo 6, por lo tanto, se tiene que cumplir:

$$X_{57} + X_{67} = 1$$

Finalmente analicemos la función objetivo, el valor del coeficiente que aparece en el arco determina la distancia existente entre el nodo "i" y el nodo "j", como el objetivo es determinar la distancia mínima, estos valores determinarán la función objetivo, que será:

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = {} & 3X_{12} + 3X_{13} + 4X_{14} + 2X_{23} + 18X_{15} + 4X_{34} + \\ & + 2X_{26} + 5X_{25} + 6X_{36} + 5X_{46} + 7X_{56} + 8X_{57} + 10X_{67} \end{aligned}$$

En resumen, el modelo de Programación Lineal Binario Puro (PLBP) que determina el camino de longitud mínima es:

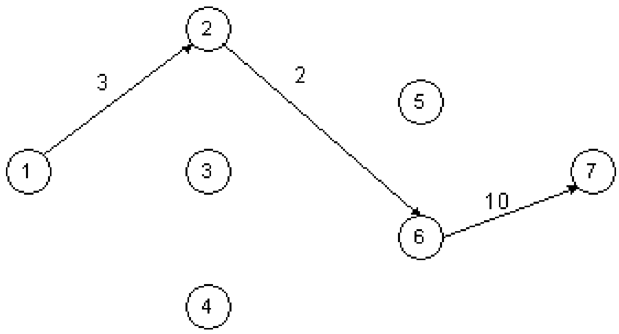
$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = {} & 3X_{12} + 3X_{13} + 4X_{14} + 2X_{23} + \\ & + 18X_{15} + 4X_{34} + 2X_{26} + 5X_{25} + 6X_{36} + \\ & + 5X_{46} + 7X_{56} + 8X_{57} + 10X_{67} \end{aligned}$$

sujeto a:

$$X_{12} + X_{15} + X_{13} + X_{14} = 1$$

$$X_{23} + X_{25} + X_{26} – X_{12} = 0$$
$$X_{36} + X_{34} – X_{13} – X_{23} = 0$$
$$X_{46} – X_{34} – X_{14} = 0$$
$$X_{57} + X_{56} – X_{25} – X_{15} = 0$$
$$X_{67} – X_{56} – X_{26} – X_{36} – X_{46} = 0$$
$$X_{57} + X_{67} = 1$$
$$X_{ij} = 0,1$$

Utilizando un software que nos proporcione la solución de este tipo de modelos PLBP obtenemos que los valores de las variables de decisión en el óptimo son: X_{12}=1, X_{26}=1 y X_{67} =1. El resto de variables toman valor nulo y expresan que son arcos que no se incluyen en el recorrido de longitud mínima. El valor de la función en el óptimo es 15, esa la distancia mínima entre los nodos 1 y 7. Por tanto, la ruta de longitud mínima consiste en ir del nodo 1 al 2, del 2 al 6 y del 6 al 7. En la figura anexa podemos observar una representación gráfica de la solución.



20. Solución:

Utilizaremos la notación estándar para los <u>problemas de flujo máximo en redes</u> para definir las variables siguientes:

X_{ij} = cantidad de información que se transmite del nodo “i” al “j”

F = Información total que circula a través de la red de telecomunicaciones.

Obsérvese que por definición: $X_{ij} \geq 0$, $F \geq 0$.

Vamos a construir las restricciones del modelo. En cada uno de los nodos intermedios debe cumplirse la siguiente relación de equilibrio de flujo:

flujo que sale del nodo = flujo que entra al nodo

Por ejemplo, al nodo 2 únicamente llega información desde el nodo 1 (X_{12} unidades de información). Esta información (p.e., bits transmitidos) debe salir del nodo 2 y repartirse entre los nodos conectados con él. Por lo tanto, del nodo 2 sale información hacia el nodo 3 (X_{23}), nodo 5 (X_{25}) o nodo 6 (X_{26}). En consecuencia, la relación de equilibrio para este nodo será:

$$X_{23} + X_{25} + X_{26} = X_{12},$$

que una vez linealizada toma la expresión

$$X_{23} + X_{25} + X_{26} – X_{12} = 0.$$

Analicemos con detalle otro nodo, por ejemplo el número 5. En este caso la información puede llegar de los nodos 1 (X_{15}) o 2 (X_{25}), mientras que puede salir información hasta los nodos 6 (X_{56}) o 7 (X_{57}). La restricción de equilibrio se expresa:

$$X_{57} + X_{56} = X_{25} + X_{15},$$

es decir

$$X_{57} + X_{56} – X_{25} – X_{15} = 0.$$

De manera análoga podemos construir el resto de restricciones (nodos 3, 4 y 6) obteniendo las siguientes expresiones:

$$X_{36} + X_{34} – X_{13} – X_{23} = 0$$
$$X_{46} – X_{34} – X_{14} = 0$$
$$X_{67} – X_{56} – X_{26} – X_{36} – X_{46} = 0$$

Las restricciones de los nodos origen (nodo 1) y destino (nodo 7) tendrán una forma distinta. Por definición, F es la cantidad de información que parte del origen; desde dicho nodo puede salir información hacia los nodos 2 (X_{12}), 3 (X_{13}), 4 (X_{14}) o 5 (X_{15}), con lo cual se tiene que cumplir:

$$X_{12} + X_{15} + X_{13} + X_{14} = F,$$

es decir

$$X_{12} + X_{15} + X_{13} + X_{14} – F=0$$

De manera análoga, F indica la cantidad de información que llega al nodo origen (nodo 7), por tanto, se tiene que cumplir:

$$X_{57} + X_{67} = F, \text{ o bien, } X_{57} + X_{67} – F= 0$$

Por último, cada uno de los arcos de la red tiene una cierta capacidad máxima de transferencia. Por ejemplo, por el arco “12” no pueden circular más de 30 unidades de información, es decir:

$$X_{12} \le 30$$

De manera análoga se deducen el resto de restricciones para cada uno de los arcos:

$X_{15} \le 50$, $X_{13} \le 40$, $X_{14} \le 35$,
$X_{25} \le 35$, $X_{26} \le 40$, $X_{23} \le 30$,
$X_{36} \le 25$, $X_{34} \le 20$,
$X_{46} \le 35$,
$X_{56} \le 30$, $X_{57} \le 35$,
$X_{67} \le 25$.

El objetivo del problema es maximizar la cantidad de flujo total que circula por la red, es decir, la variable F, con lo cual la función objetivo es:

$$MAX\ Z = F$$

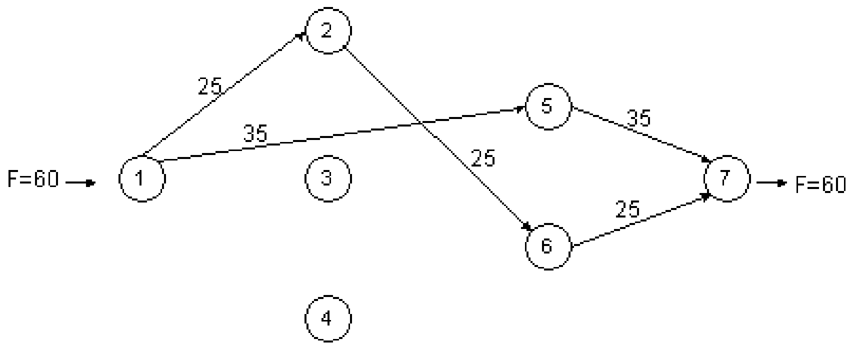
A modo de resumen, el modelo de programación lineal PL que determina el flujo máximo de información que puede circular por la red de telecomunicación es:

MAX Z = F
sujeto a:

$$X_{12} + X_{15} + X_{13} + X_{14} – F=0$$
$$X_{23} + X_{25} + X_{26} - X_{12} = 0$$

$$X_{57} + X_{56} – X_{25} – X_{15} = 0$$
$$X_{36} + X_{34} –X_{13} – X_{23} = 0$$
$$X_{46} – X_{34} – X_{14} = 0$$
$$X_{67} – X_{56} – X_{26} – X_{36} – X_{46} = 0$$
$$X_{57} + X_{67} – F= 0$$
$$X_{12} \leq 30,\ X_{15} \leq 50,\ X_{13} \leq 40$$
$$X_{14} \leq 35,\ X_{25} \leq 35,\ X_{26} \leq 40$$
$$X_{23} \leq 30,\ X_{36} \leq 25,\ X_{34} \leq 20$$
$$X_{46} \leq 35,\ X_{56} \leq 30,\ X_{57} \leq 35,\ X_{67} \leq 25$$
$$X_{ij} \geq 0\ ,\ F \geq 0$$

Una vez resuelto el PL mediante un paquete informático, se observa que en la solución óptima las variables toman valores: X_{12}=25, X_{15}=30, X_{26}=25, X_{57}=35, X_{67}=25 y F=60, el resto de variables toman valor nulo, es decir, la cantidad máxima de información que puede circular por la red son 60 unidades de información (F=60). En la figura siguiente se muestra de qué forma circulan estas 60 unidades por la red. Se hace constar que esta forma no es única ya que el programa utilizado para determinar la solución señala la existencia de soluciones múltiples.



21. Solución:

Primeramente definimos las variables siguientes:

- Las variables de decisión a considerar son:

  X_{ij} = Cantidad de información que circula del nodo "i" al "j".

  Obsérvese que $X_{ij} \geq 0$

Las restricciones del problema son:

- Las restricciones de los nodos intermedios deben cumplir la igualdad:

  flujo que "entra" al nodo = flujo que "sale" del nodo
- En cuanto a los nodos origen y destino. El flujo que debe partir del nodo 1 es F=60 que es el flujo que debe llegar al nodo 7.
- Restricciones de capacidad de los arcos.
- La función objetivo consistirá en minimizar el coste de circular la información a través de la red.

Por tanto, el modelo PL que proporciona el flujo a coste mínimo es:

$$\text{MIN } Z = 3X_{12} + 4X_{15} + 2X_{13} + 4X_{14} +$$
$$+ 6X_{25} + 5X_{26} + 3X_{23} + 2X_{34} +$$

$+ 2X_{36} + 7X_{46} + 7X_{56} + 8X_{57} + 5X_{67}$

sujeto a:

$X_{12} + X_{15} + X_{13} + X_{14} = 60$

$X_{23} + X_{25} + X_{26} - X_{12} = 0$

$X_{36} + X_{34} - X_{13} - X_{23} = 0$

$X_{46} - X_{34} - X_{14} = 0$

$X_{57} + X_{56} - X_{25} - X_{15} = 0$

$X_{67} - X_{56} - X_{26} - X_{36} - X_{46} = 0$

$X_{57} + X_{67} = 60$

$X_{12} \leq 30,\ X_{15} \leq 50,\ X_{13} \leq 40$

$X_{14} \leq 35,\ X_{25} \leq 35,\ X_{26} \leq 40$

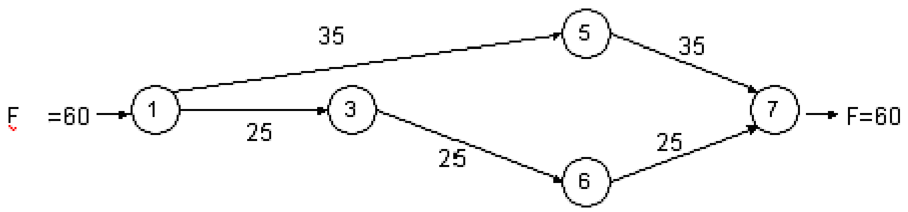
$X_{23} \leq 30,\ X_{36} \leq 25,\ X_{34} \leq 20$

$X_{46} \leq 35,\ X_{56} \leq 30,\ X_{57} \leq 35,\ X_{67} \leq 25$

$X_{ij} \geq 0$

Una vez resuelto el PL mediante un paquete informático, se observa que en la solución óptima las variables toman valores: $X_{15}=35$, $X_{13}=25$, $X_{36}=25$, $X_{57}=35$, $X_{67}=25$, el resto de variables toman valor nulo. Esta solución proporciona un valor de Z igual a 645, es decir, el coste mínimo de transportar un flujo F=60 de información por la red es 645.

En la figura siguiente podemos observar de manera gráfica por donde circulan dichas unidades de información.



Nótese que el problema que acabamos de resolver (Problema del flujo a coste mínimo) se puede combinar con el problema del Flujo máximo. Es decir, mediante el PL de Flujo máximo se calcularía el flujo a transmitir por la red (F=Fmax). Recordemos que en el problema del flujo máximo habitualmente existen soluciones múltiples o alternativas. Entonces, a continuación se aplicaría el PL de flujo a coste mínimo, con F=Fmax, para seleccionar aquella solución cuyo coste asociado sea menor.

22. Solución:

- Definición de las variables:
  - P_k : cantidad (en frascos) elaborados del producto k, k=1 curry, k=2 canela.
  - E_j: excedente (en gramos) de ingrediente HB0j no utilizado en la producción, j=1,2,3.
  - Las variables P_k son enteras no negativas y las variables E_j son contínuas no negativas.
- Función objetivo: los ingresos.

- Ingresos por la venta de los frascos elaborados: $3.25P_1 + 2.75P_2$
- Ingresos por la venta de los excedentes: $0.6E_1 + 0.7E_2 + 0.55E_3$

➢ Restricciones:

- Disponibilidad de materias primas (ingredientes HB0k):
  - Ingrediente HB01: $4P_1 + 3P_2 + E_1 = 8000$
  - Ingrediente HB02: $2P_1 + 2P_2 + E_2 = 9000$
  - Ingrediente HB03: $P_1 + 3P_2 + E_3 = 7000$
- Máximo de ventas de curry: $P_1 <= 1700$
- Demanda de canela: $P_2 >= 600$

El modelo resulta ser un PL entero mixto:

Max $Z = 3.25P_1 + 2.75P_2 + 0.6E_1 + 0.7E_2 + 0.55E_3$

sujeto a

$4P_1 + 3P_2 + E_1 = 8000$

$2P_1 + 2P_2 + E_2 = 9000$

$P_1 + 3P_2 + E_3 = 7000$

$P_1 <= 1700$

$P_2 >= 600$

P_k, enteros no negativos, E_j no negativos

23. Solución:

Se trata de un problema PLBP.

Definición de las variables binarias:

Xjk = 1 si la canción j (j=1, ..., 8) está en el CD k (k=1,2); Xjk = 0 en otro caso.

Función objetivo: Máximo número de canciones en el doble CD

Max Z = X11 + X12 + X21 + X22 + X31 + X32 + X41 + X42 +
+ X51 + X52 + X61 + X62 + X71 + X72 + X81 + X82

Restricciones:

Las canciones en cada CD deben sumar entre 14 y 16 minutos:

4X11+5X21+3X31+2X41+4X51+3X61+5X71+4X81>=14

4X11+5X21+3X31+2X41+4X51+3X61+5X71+4X81<=16

4X12+5X22+3X32+2X42+4X52+3X62+5X72+4X82>=14

4X12+5X22+3X32+2X42+4X52+3X62+5X72+4X82<=16

Las canciones sólo deben aparecer en un CD, no en los dos:

X11+X12<=1

X21+X22<=1

X31+X32<=1

X41+X42<=1

X51+X52<=1

X61+X62<=1

X71+X72<=1

X81+X82<=1

En cada CD debe haber exactamente dos baladas:

X11+X31+X51+X81=2

X12+X32+X52+X82=2

En el CD 1 debe haber, por lo menos, 3 canciones rítmicas:

X21+X41+X61+X81>=3

La canción 5 o la canción 6 deben estar en el CD 1:

X51+X61>=1

Si las canciones 2 y 4 se encuentran en el CD 1 (X21+X41=2), la canción 5 estará en el CD 2 (X51=1):

X51+1>=X21+X41

Tipo de variable binaria:

Xjk = 0 o 1

24. Solución:

Se trata de un problema PLBP.

Definición de las variables binarias:

Xj = 1 si colocamos una cámara en el punto de localización j

Xj = 0 si no la colocamos

Función objetivo: Mínimo número de cámaras

Min Z = X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 + X9 + X10

Restricciones:

En la tabla siguiente se muestra la relación entre punto de localización y sector:

	SECTOR																			
PUNTO LOCALIZACIÓN	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																X	X	X	X	
2																	X	X	X	X
3																X	X	X	X	X
4	X	X	X	X	X															
5		X	X	X	X															
6							X	X	X	X										
7												X	X	X	X					
8						X	X	X	X											
9											X	X		X	X					
10							X	X	X				X	X						

Todos los sectores deben estar cubiertos:

Sector 1: X4 >= 1

Sectores 2, 3, 4 y 5: X4 + X5 >= 1

Sector 6: X8 >= 1

Sectores 7, 8 y 9: X6 + X8 + X10 >= 1

Sector 10: X6 >= 1

Sector 11: X9 >= 1

Sectores 12 y 15: X7 + X9 >= 1

Sector 13: X7 + X10 >= 1

Sector 14: X7 + X9 + X10 >= 1

Sector 16: X1 + X3 >= 1

Sectores 17, 18 y 19: X1 + X2 + X3 >= 1

Sector 20: X2 + X3 >= 1

Tipo de variable binaria:

Xj = 0 o 1

25. Variables de decisión:
Las variables de decisión identifican qué contratista realizará cada proyecto:
X_{jk} = 1 si se asigna el proyecto j al contratista k; 0 en caso contrario (variables binarias).

• Conjunto de restricciones:
- Cada proyecto se ejecutará por un único contratista:
$X_{j1} + X_{j2} + X_{j3} + X_{j4} + X_{j5} = 1$, j=1,2,3,4
- Cada contratista no puede ejecutar más de un proyecto, excepto el contratista C2, que puede realizar hasta 2:
$X_{1k} + X_{2k} + X_{3k} + X_{4k} \leq 1$, k=1,3,4,5
$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \leq 2$

• Función objetivo: Minimizar los costes de asignación
MIN $Z = 18X_{11} + 16X_{12} + 17X_{14} + 20X_{15} + 16X_{21} + 15X_{22} + 25X_{32} + 23X_{33} + 22X_{34} + 22X_{35} + 30X_{41} + 32X_{42}$

• Modelo completo: es un problema de Programación Lineal Binaria Puro [PLBP].
MIN $Z = 18X_{11} + 16X_{12} + 17X_{14} + 20X_{15} + 16X_{21} + 15X_{22} + 25X_{32} + 23X_{33} + 22X_{34} + 22X_{35} + 30X_{41} + 32X_{42}$
s.a $X_{11} + X_{12} + X_{14} + X_{15} = 1$
$X_{21} + X_{22} = 1$
$X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 1$
$X_{41} + X_{42} = 1$
$X_{11} + X_{21} + X_{41} \leq 1$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \leq 2$
$X_{33} \leq 1$
$X_{14} + X_{34} \leq 1$
$X_{15} + X_{35} \leq 1$
X_{jk} = 0 ó 1

26. Solución:
Hemos de decidir cuántos trabajadores contratamos cada mes y durante cuánto tiempo se contratarán (variables de decisión), de manera que se cumplan las necesidades de trabajadores (restricciones) y se minimicen los costes totales (objetivo). Teniendo en cuenta esta diferencia, las variables deberán recoger conjuntamente tanto el "turno" como la "duración" del contrato; de esta manera:

• Variables de decisión:
X_{jk} = cantidad de trabajadores contratados al principio del mes j hasta el principio del mes k.
Por ejemplo, X_{24} representa la cantidad de trabajadores contratados desde julio durante dos meses (julio y agosto); X_{45} representa la cantidad de trabajadores contratados únicamente durante el mes de septiembre.

		Trabajador que está trabajando durante el mes de:			
		Junio (1)	Julio (2)	Agosto (3)	Septiembre (4)
Trabajador que comienza a trabajar a principios del mes de:	Junio (1): X_{12} X_{13} X_{14} X_{15}	X_{12} X_{13} X_{14} X_{15}	X_{13} X_{14} X_{15}	X_{14} X_{15}	X_{15}
	Julio (2): X_{23} X_{24} X_{25}	-------	X_{23} X_{24} X_{25}	X_{24} X_{25}	X_{25}
	Agosto (3): X_{34} X_{35}	-------	-------	X_{34} X_{35}	X_{35}
	Septiembre (4): X_{45}	-------	-------	-------	X_{45}
Número de trabajadores necesarios:		100	120	80	170

• Restricciones:

- Se han de cubrir las necesidades de trabajadores en cada mes (periodo); se pueden tener trabajadores excedentes en un mes concreto.

Trabajadores en junio: $X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} >= 100$
Trabajadores en julio: $X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{23} + X_{24} + X_{25} >= 120$
Trabajadores en agosto: $X_{14} + X_{15} + X_{24} + X_{25} + X_{34} + X_{35} >= 80$
Trabajadores en septiembre: $X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} >= 170$

- Restricciones de signo: todas las variables son enteras y no negativas.

• Función objetivo: Minimizar los costes totales:
MIN $Z = 100X_{12} + 130X_{13} + 180X_{14} + 220X_{15} + 100X_{23} + 130X_{24} + 180X_{25} + 100X_{34} + 130X_{35} + 100X_{45}$

• Modelo completo: es un problema de Programación Lineal Entera Puro [PLEP].
MIN $Z = 100X_{12} + 130X_{13} + 180X_{14} + 220X_{15} + 100X_{23} + 130X_{24} + 180X_{25} + 100X_{34} + 130X_{35} + 100X_{45}$

s.a $X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} >= 100$
$X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{23} + X_{24} + X_{25} >= 120$
$X_{14} + X_{15} + X_{24} + X_{25} + X_{34} + X_{35} >= 80$
$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} >= 170$
X_{jk} enteras y no negativas

27. Solución:

a) Modelización del problema: del enunciado se deduce que es necesario decidir la producción de coches; entonces, las variables de decisión son la cantidad de coches de cada modelo.

- Variables: decimos X1 y X2, respectivamente, a la cantidad de coches IBIZA y CÓRDOBA que se fabricarán.
- Restricciones: las limitaciones a las que están sometidas las variables son
  - de máquina: $6X_1 + 10X_2 \leq 600$
  - total: $X_1 + X_2 \leq 80$
  - IBIZA: $X_1 \geq 40$
  - CÓRDOBA: $X_2 \geq 20$
  - De signo: $X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$ (y enteras)
- Función Objetivo: interesa maximizar el ingreso, por lo tanto, es necesario considerar

$$Max\ Z= 3.500.000X_1 + 5.000.000X_2$$

- Modelo: el modelo PL completo tiene la formulación

$$Max\ Z= 3.500.000X_1 + 5.000.000X_2$$

$$6X_1 + 10X_2 \leq 600$$
$$X_1 + X_2 \leq 80$$
$$X_1 \geq 40$$
$$X_2 \geq 20$$
$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0$$

b) Resolución gráfica:

Primeramente, abrimos una hoja Excel donde introducimos nuestro modelo. Una buena idea consiste en aprovechar la hoja Excel que acompaña a la guía del modulo 1 (“Guia Modulo 1_exer5.xls”) en él que se contemplaba la existencia de una restricción en forma de recta vertical.

A cada coeficiente del modelo le asignamos (Fig.1) una casilla diferente con el propósito de facilitar la construcción de las fórmulas Excel que necesitaremos.

	A	B	C	D	E
1	**RESOLUCIÓ GRÀFICA**				
2		**X1**	**X2**		
3	Z	3500000	5000000		
4					
5	**Rest1**	6	10	<=	600
6	**Rest2**	1	1	<=	80
7	**Rest3**	1	0	>=	40
8	**Rest4**	0	1	>=	20
9					

Figura 1. Celdas de la hoja que contienen los coeficientes del problema.

Para hacer el gráfico empezamos decidiendo qué rango de valores tomará la variable X1. Cuando X2=0, la primera restricción nos indica que la X1 limitará con el eje OX en el punto (60,0). Haciendo el mismo en las otras restricciones obtenemos (80,0) y (40,0). Entonces, decidimos que un rango [-10,90] puede ser apropiado (Fig. 2 casillas F5 y F6).

De la primera restricción deducimos que X2=(600-6X1)/10 y esta será la fórmula que introducimos en la casilla G5 para calcular el valor de X2. Procedemos de manera análoga con la segunda restricción y con la función objetivo (Fig. 2).

SUMA =($E$5-$B$5*F5)/$C$5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**RESOLUCIÓ GRÀFICA**												
2		**X1**	**X2**										
3	Z	3500000	5000000				**Valor que pren X2 a la**					*recta vertical	
4						**X1**	**Rest1**	**Rest2**	**Rest3**	**Rest4**	**f_obj**	**X1**	**X2**
5	**Rest1**	6	10	<=	600	-10	=($E$5-$B$5*F5)/$C$5			20	7	**40**	**-20**
6	**Rest2**	1	1	<=	80	90	6	-10	*	20	-63	**40**	**80**
7	**Rest3**	1	0	>=	40								
8	**Rest4**	0	1	>=	20	Z =	0						

Figura 2. Introducción de fórmulas por las restricciones y la función objetivo.

Con la tercera y cuarta restricciones la estrategia es diferente dado que son rectas vertical y horizontal, respectivamente. Para definir dos puntos de la recta vertical de la restricción Rest3 utilizamos las casillas del rango L5:M6. Para definir dos puntos de la restricción horizontal Rest4 sólo es necesario poner el mismo valor (b4=20) en las dos casillas J5 y J6.

Hacemos representar a Excel las rectas de las restricciones. Con el propósito de averiguar cuál es la región de soluciones posibles evaluamos si el punto (X1,X2)=(0,0) origen de coordenadas satisface cada una de las cuatro restricciones. Si el (0,0) satisface una restricción entonces el semiplano dónde está el (0,0) es el semiplano “posible” determinado por esta restricción. Procediendo de esta manera y buscando la región intersección de todos los semiplanos se obtiene la región factible de la Figura 3

Siguiendo la estrategia propuesta por el método de la línea de isobeneficio, vamos dando valores cada vez más grandes a Z (casilla G8) y viendo que la recta de isobeneficio se va desplazando hasta tocar el vértice dónde se cortan la primera y segunda restricciones en el que el valor de Z es máximo (Z=325000000; Fig. 3).

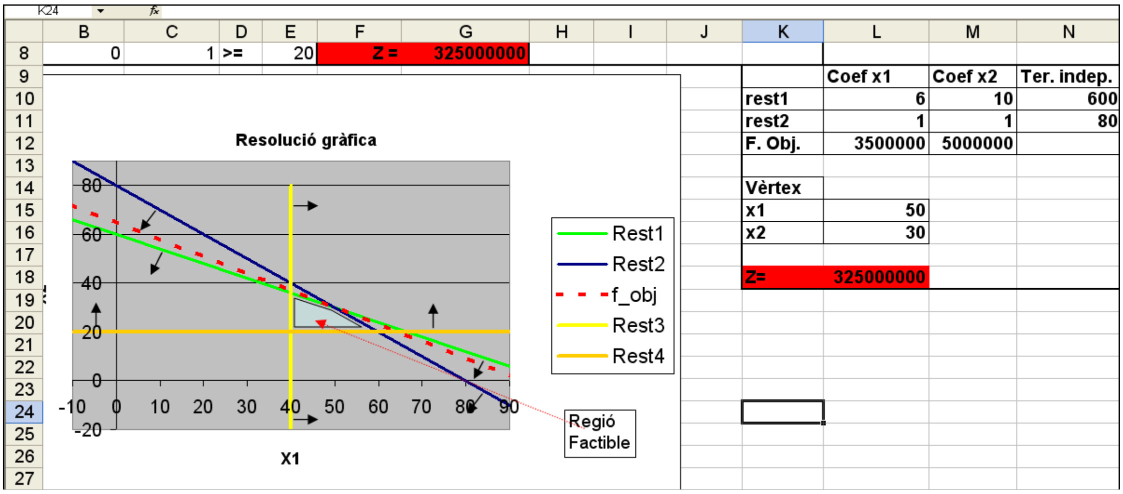


Figura 3. Región de soluciones posibles y vértice óptimo.

Es muy importante calcular el vértice de intersección entre estas restricciones y el valor de la función objetivo en él. Este cálculo lo haremos mediante las casillas del área de cálculo de vértices (rango K9:N18; Fig. 3). La solución óptima contempla la decisión de fabricar 50 IBIZA y 30 CÓRDOBA obteniendo un ingreso de 325 millones.

c) Contestad a las siguientes preguntas:

c.1 ¿El conjunto de soluciones posibles es un conjunto acotado?
El área de la región de soluciones posibles es una área limitada (Fig. 3), entonces la región es acotada.

c.2 ¿Es posible fabricar 45 IBIZA y 35 CÓRDOBA? ¿Es óptima esta decisión?
En la figura 3 se observa que este punto (X1,X2)=(45,35) es un punto que no pertenece a la región de soluciones posibles. Comprobamos que el punto no satisface la restricción de horas de máquina:

$$6*45+10*35=270+350=620\text{horas}$$

que es superior a la disponibilidad (b1=600). Si este punto no es una decisión posible no puede ser una decisión óptima.

c.3 ¿Qué coordenadas tiene el vértice intersección de las restricciones de demanda total del cliente y demanda de coches CÓRDOBA? ¿Cuánto vale la función objetivo en este vértice?
Vamos a la hoja Excel y utilizamos las casillas del área que permite calcular las intersecciones de restricciones (Fig. 4).

	Coef x1	Coef x2	Ter. indep.
rest4	0	1	20
rest2	1	1	80
F. Obj.	3500000	5000000	
Vèrtex			
x1	60		
x2	20		
Z=	310000000		

Figura 4. Cálculo del vértice intersección de Rest4 y Rest2

En la figura 4 se observa que el vértice pedido consiste en construir 60 IBIZA y 20 CÓRDOBA con un ingreso de 310 millones. No es óptima.

c.4 ¿Es verdad que en la decisión óptima la demanda total del cliente se satisface de manera exacta?
En figura 3 vemos que la restricción de demanda total (Rest2) colabora en el vértice óptimo. Esto implica que si sustituimos el punto óptimo (X1,X2)=(50,30) en la restricción el lado derecho y el izquierdo de la restricción serán iguales:

$$50+30=80$$

Entonces, se está satisfaciendo la demanda total de manera exacta.

c.5 Si, por alguna razón, cambia el sentido de la desigualdad de la restricción de horas de máquina, ¿la solución del PL será no acotada? ¿Cambiará el valor óptimo de Z? ¿La región de soluciones posibles será no acotada?
La nueva región de soluciones posibles se muestra en la figura 5. Es el triángulo determinado por las restricciones amarilla, verde y azul.

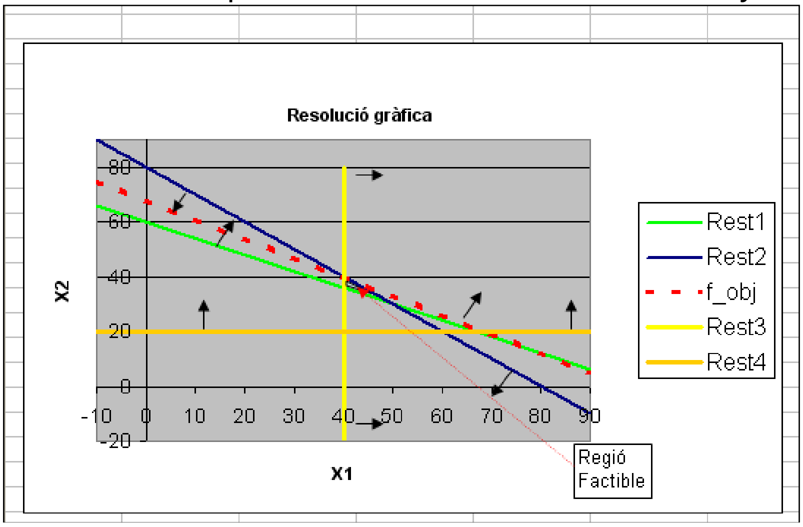


Figura 5. Nueva región de soluciones posibles.

La nueva región es una región acotada. La solución es única pero se logra en un vértice diferente al anterior vértice óptimo. Ahora el óptimo es el punto (X1,X2)=(40,40) intersección (Fig. 6) de las restricciones amarilla y azul. En este punto la función objetivo vale

Z=3500000*40+5000000*40=340000000

	Coef x1	Coef x2	Ter. indep.
rest3	1	0	40
rest2	1	1	80
F. Obj.	3500000	5000000	
Vèrtex			
x1	40		
x2	40		
Z=	340000000		

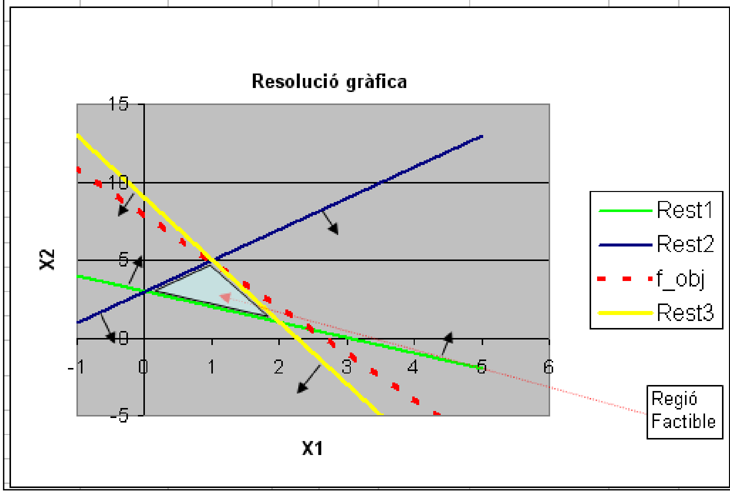
Figura 6. Cálculo del vértice intersección de Rest3 y Rest2

28. Resolvemos gráficamente el problema y obtenemos la figura siguiente:

RESOLUCIÓ GRÀFICA

	X1	X2		
Z	3	1		
Rest1	1	1	>=	3
Rest2	-2	1	<=	3
Rest3	4	1	<=	9

Valor que pren X2				
X1	Rest1	Rest2	Rest3	f_obj
-1	4	1	13	11
5	-2	13	-11	-7
Z =	8			



	Coef x1	Coef x2	Ter. indep.
rest3	4	1	9
rest2	-2	1	3
F. Obj.	3	1	
Vèrtex			
x1	1		
x2	5		
Z=	8		

a) EL óptimo se obtiene en el vértice (1,5) donde se cruzan las restricciones (3) y (2). El valor de la función objetivo en el mismo es mayor que en cualquiera de los otras vértices y es justamente 8.

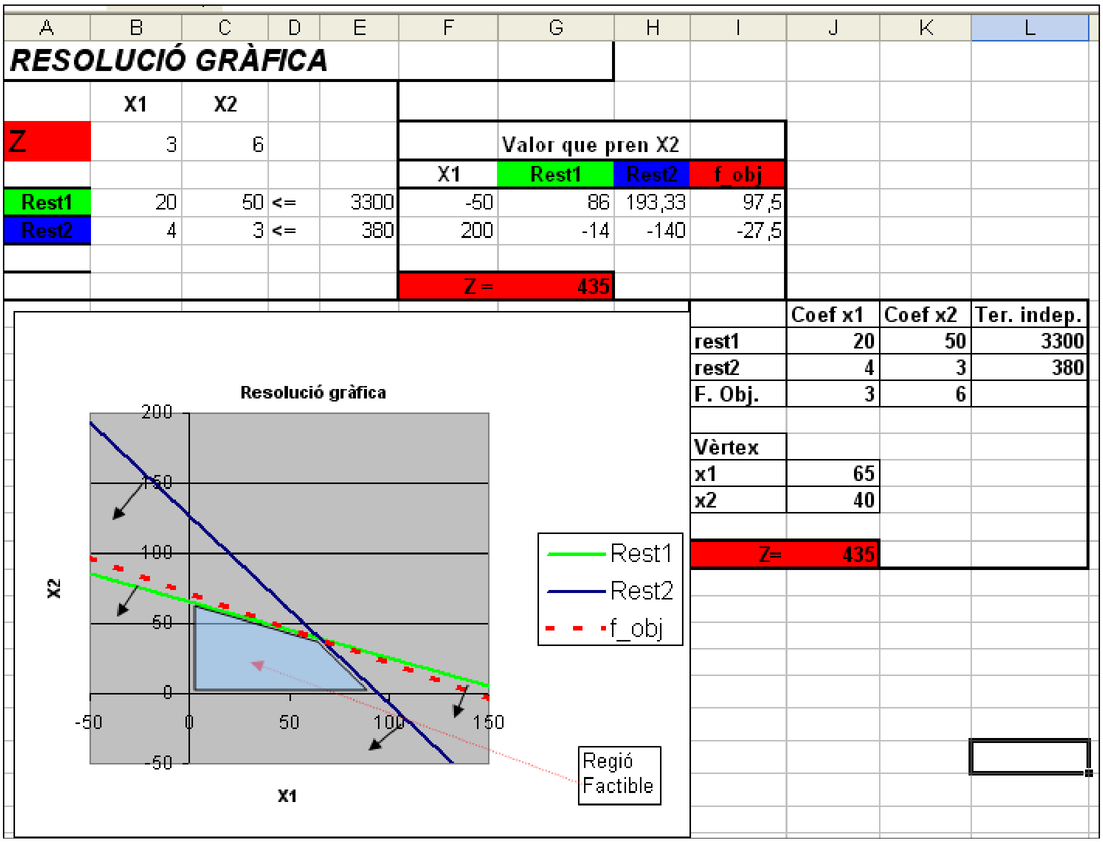
b) Efectivamente, la restricción (2) se cumple en igualdad al vértice óptimo (1,5). La recta de la restricción (2) pasa por el vértice, entonces si sustituimos las coordenadas del punto en el ecuación de la restricción se obtendrá exactamente el valor del lado derecho de la restricción.

c) El punto (1,3) pertenece al conjunto de soluciones posibles o región factible acotada porque si sustituimos sus coordenadas en las restricciones estas se satisfacen. No se trata de un vértice y no se logra el valor máximo en él (Z=6). Podemos deducir entonces que no es el punto óptimo puesto que se puede lograr un objetivo mayor.

d) Si cambia el sentido de la restricción (1) de "≥" a "≤", entonces la región factible (conjunto de soluciones posibles) continuará siendo acotada aunque será diferente de el anterior. Para recorrer los vértices de la nueva región factible podríamos empezar en el origen de coordenadas

(0,0), ir por el eje OX hasta la restricción amarilla, ir por esta hasta la restricción verde, seguir por la verde hasta encontrar la azul y el eje OY, y bajar por el eje OY hasta el origen.

29. Resolvemos gráficamente el problema y obtenemos la figura siguiente:



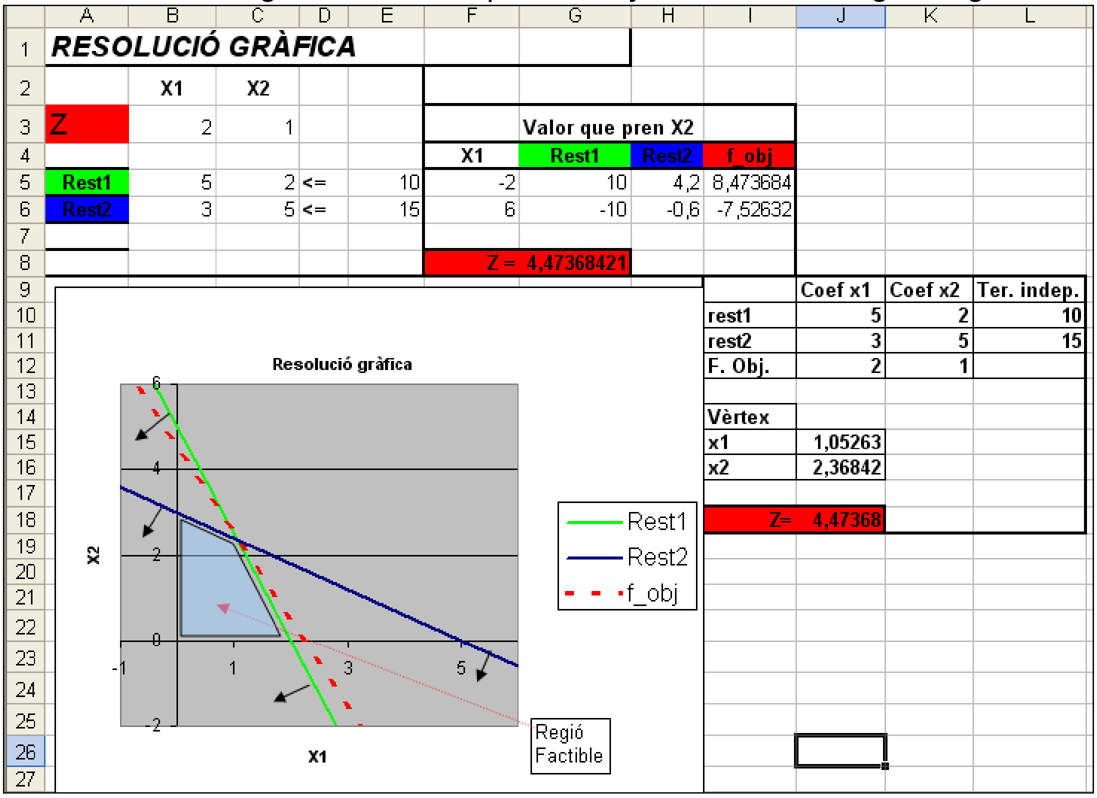
a) EL óptimo se obtiene en el vértice (65,40) donde se cruzan las restricciones (1) y (2). El valor de la función objetivo en el mismo es mayor que en cualquiera de los otras vértices y es justamente 435

b) Efectivamente, la restricción (2) se cumple en igualdad en el óptimo. La recta de la restricción (2) pasa por el vértice, entonces si sustituimos las coordenadas del punto en el ecuación de la restricción se obtendrá exactamente el valor del lado derecho de la restricción.

c) El punto (0,66) pertenece al conjunto de soluciones posibles o región factible acotada porque si sustituimos sus coordenadas en las restricciones estas se satisfacen. Se trata de un vértice (intersección eje OY y rest1 pero no se logra el valor máximo en él (Z=396). Podemos deducir entonces que no es el punto óptimo puesto que se puede lograr un objetivo mayor.

d) Si cambiamos el sentido de la desigualdad de la Rest1 la región factible, continuará siendo acotada aunque es diferente de el anterior. Para recorrer la nueva región de soluciones posibles nos situamos en el vértice intersección de las dos restricciones (Rest1 y Rest2), seguimos por la restricción azul hasta encontrar el eje vertical OY. Después bajamos por el eje OY hasta encontrar el vértice dónde la Rest1 corta el eje OY. Continuamos por la restricción verde hasta volver en su punto de inicio del recorrido.

30. Resolvemos gráficamente el problema y obtenemos la figura siguiente:



a) EL óptimo se obtiene en el vértice (20/19,45/19) donde se cruzan las restricciones (1) y (2). El valor de la función objetivo en el mismo es mayor que en cualquiera de los otros vértices (85/19). En concreto es mayor que la que se obtiene en el vértice (2,0). En este vértice el valor de la función objetivo es 4.

b) La recta de la restricción (2) pasa por el vértice, entonces si sustituimos las coordenadas del punto en el ecuación de la restricción se obtendrá exactamente el valor del lado derecho de la restricción.

c) El punto (1,1) pertenece al conjunto de soluciones posibles o región factible acotada, se trata de un punto interior y no se logra el valor máximo de la función objetivo en él (Z=3). Podemos deducir entonces que no es el punto óptimo puesto que se puede lograr un objetivo mayor.

d) Si cambia el sentido la restricción (1) de “≤” a “≥”, la región factible (conjunto de soluciones posibles) continuará siendo acotada aunque es diferente del anterior. La nueva región sería el triángulo determinado por los vértices (20/19,45/19), (2,0), y (5,0).