Módulo 1: Introducción a la Investigación Operativa para el Data Science

Ejemplo 1.
Supongamos que, a partir de una situación real, hemos llegado a la modelización PL siguiente:

Max Z = 5000x1 + 4000x2
s.a
(1) x1 + x2 $\geq$ 5
(2) x1 - 3x2 $\leq$ 0
(3) 10x1 + 15x2 $\leq$ 150
(4) 20x1 + 10x2 $\leq$ 160
(5) 30x1 + 10x2 $\geq$ 135
(6) x2 $\leq$ 8
(7) x1 $\leq$ 6
(8) x1, x2 $\geq$ 0

Queremos resolver gráficamente este PL (Modulo1_Manual Excel_ejemplo_1.xls), para lo que utilizaremos los métodos de los vértices y de la línea de isobeneficio (caso de maximización) o isocoste (caso de minimización). En general, consideramos las restricciones de signo (8) como dos restricciones más, correspondientes a los ejes vertical y horizontal, respectivamente.

Los pasos a seguir son:

1. Construcción del conjunto de soluciones posibles.
   - Representar la recta asociada a una restricción.
   - Ajustar el rango de las variables.
   - Ajustar la escala del gráfico.
   - Definir el semiplano asociado.
   - Dibujar la intersección de todos los semiplanos.
2. Método de la línea de isobeneficio (isocoste).
   - Elegir un valor de Z para la función objetivo y dibujar la recta resultante.
   - Variar el valor anterior, desplazando la recta, de manera que encontremos qué vértice proporciona el mejor valor.
3. Método de los vértices.
   - Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
   - Calcular los vértices de la región de soluciones posibles.
   - Evaluar los vértices en la función objetivo. Elegir el “mejor”.

Construcción del conjunto de soluciones posibles

Recordemos que cada “ecuación” (una ecuación es una restricción pero con signo = en lugar de >= o <=) es una recta, por tanto, en nuestro ejemplo tenemos 9 rectas:

(1) x1 + x2 = 5	(2) x1 - 3x2 = 0	(3) 10x1 + 15x2 = 150
(4) 20x1 + 10x2 = 160	(5) 30x1 + 10x2 = 135	(6) x2 = 8
(7) x1 = 6	(8) x1 = 0 (eje vertical)	(9) x2 = 0 (eje horizontal)

Observamos que todas las rectas tienen ecuación Ax1 + Bx2 = C; cuando A=0 tenemos una recta horizontal (6) y cuando B=0 tenemos un recta vertical (7). Para dibujar las rectas (Excel dibuja automáticamente los ejes), necesitamos dos puntos (recordad que “por dos puntos pasa una única recta”). Por tanto, necesitaremos una tabla con dos filas (una por punto) y una columna por cada restricción.

A continuación, determinaremos el “rango” de la variable X1, donde dibujaremos las rectas que representan las restricciones. Dado que, normalmente, tenemos restricciones de signo sobre las variables, el extremo inferior de este rango puede ser -1 o 0. El extremo superior del rango de la primera variable X1 es “15”: es el valor más alto que se obtiene cuando dividimos los coeficientes del lado derecho de las restricciones (5, 0, 150, 160, 135) por los coeficientes que multiplican la variable X1 en las restricciones (1, 1, 10, 20, 30 respectivamente). Construimos una tabla como la de la figura siguiente, y en la columna “x1” introducimos los valores 0 y 15 (rango de la variable X1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2										Línea de isobeneficio	
3										Z =	
4		x1_vert	x1	Rest1	Rest2	Rest3	Rest4	Rest5	Rest_Horz	Rest_Vert	f_obj
5			0								
6			15								

Figura 1.1. Creación de una tabla de valores

A continuación, de cada ecuación (restricción con signo =) aislamos x2; por ejemplo,

de la primera restricción x1+x2=5 ===> x2 = 5-x1

de la segunda restricción, x1-3x2=0 ====> x2=x1/3

Introducimos estas fórmulas en las columnas Rest1, Rest2, Rest3, Rest4, Rest5 de la tabla, teniendo en cuenta que la referencia del valor x1 se encuentra en la columna C de nuestro ejemplo (celdas C5 y C6). Si tenemos restricciones horizontales (6) introduciremos el término independiente de la restricción en las dos celdas de la columna Rest_Horz. Podéis ver cómo se introducen estas ecuaciones en la hoja "Fórmulas" del documento "Modulo1_Manual Excel_ejemplo_1.xls"

Recordad que, con la ayuda de las referencias absolutas y mixtas, podemos extender las fórmulas a la fila 6.

En la columna Rest_Vert introducimos el rango de la variable x2. Como tenemos una restricción de signo sobre esta variable, elegimos 0 como extremo inferior de su rango. El extremo superior del rango es el valor más alto que se obtiene cuando dividimos los coeficientes del lado derecho de las restricciones (5, 0, 150, 160, 135), por los coeficientes que multiplican la variable x2 en las restricciones (1, -3, 15, 10, 10 respectivamente), es decir 16. En caso de tener alguna restricción vertical (7), en las dos celdas de la columna x1_vert introduciremos su termino independiente.

El resultado hasta ahora debería ser parecido al siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2										Línea de isobeneficio	
3										Z =	
4		x1_vert	x1	Rest1	Rest2	Rest3	Rest4	Rest5	Rest_Horz	Rest_Vert	f_obj
5		6	0	5	0	10	16	13,5	8	0	
6		6	15	-10	5	0	-14	-31,5	8	16	

Figura 1.2. Cálculo de los puntos por los cuales pasarán las rectas-restricciones

Finalmente, queremos dibujar las rectas de isobeneficio (isocoste) para diferentes valores de Z, de manera que las podamos desplazar cómodamente según nos convenga. En primer lugar, introducimos un valor cualquiera para Z (nosotros elegimos Z=35000), y lo introducimos en la celda K3. Ahora, en la columna f_obj introducimos una fórmula similar a la de las columnas de las restricciones, excepto que el "término independiente" ha de ser una referencia absoluta (con el símbolo $) a esta celda K3.

J	K
Línea de isobeneficio	
Z =	0
Rest_Vert	f_obj
0	=($K$3-5000*C5)/4000
16	=($K$3-5000*C6)/4000

Figura 1.3. Fórmula para la función objetivo

Queremos dibujar:

la ecuación 1: recta que pasa por los puntos (0,5) y (15, -10)

la ecuación 2: recta que pasa por los puntos (0,0) y (15, 5)

...

la ecuación vertical: recta que pasa por los puntos (6,0) y (6, 16)

Seleccionamos todas las columnas de la tabla, excepto la primera columna (columna B) correspondiente a x1_vert; clicamos en el asistente para gráficas (también menú Insertar – Gráfico). En nuestro caso nos interesa "XY (Dispersión) – Dispersión con puntos de datos conectados por líneas sin marcadores de datos".

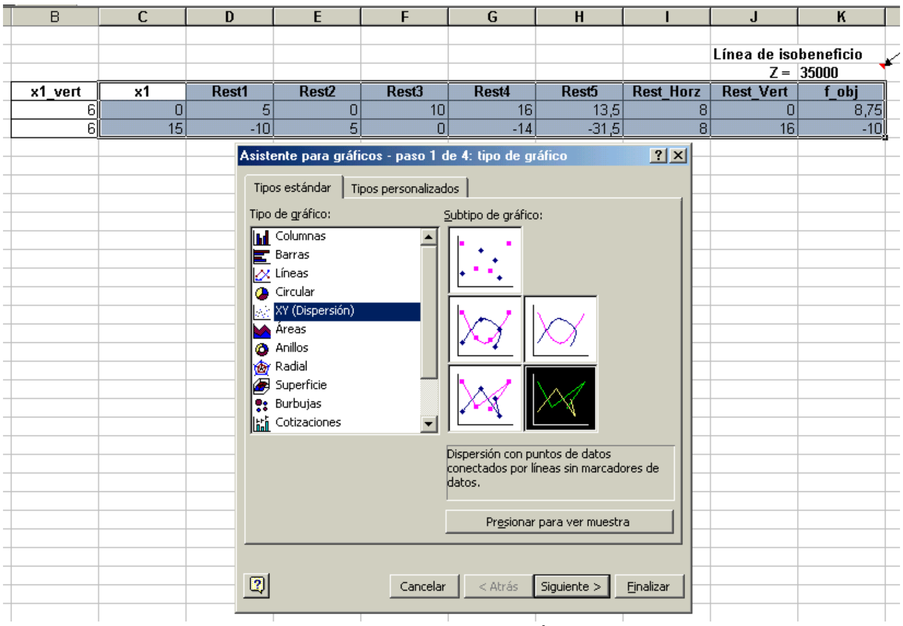

Figura 1.4. Tipos de gráfico

Seguimos los pasos, activando en la pestaña “Rango de datos” – “Series” – “En columnas”.

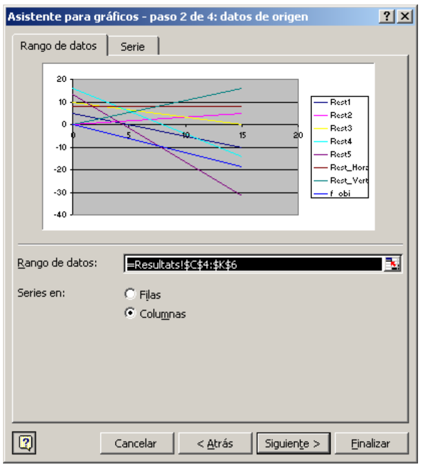

Figura 1.5. Datos para dibujar las rectas

A continuación, caso de tener restricciones verticales, seleccionamos la pestaña “Serie”; elegimos serie “Rest_Vert”, y en “Valores de X” modificamos “$C$5:$C$6” por “$B$5:$B$6” (columna de x1_vert).

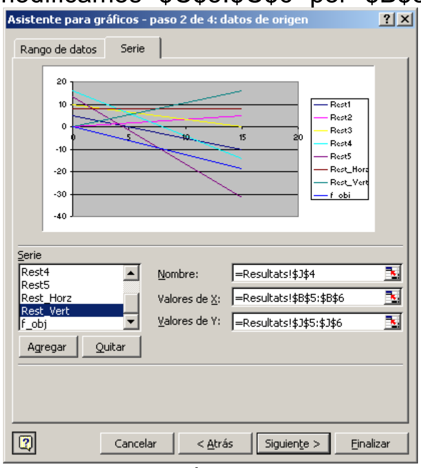

Figura 1.6. Modificación de las rectas verticales

El resto de opciones a vuestro gusto.
Si todo es correcto, tendremos un dibujo como el siguiente:

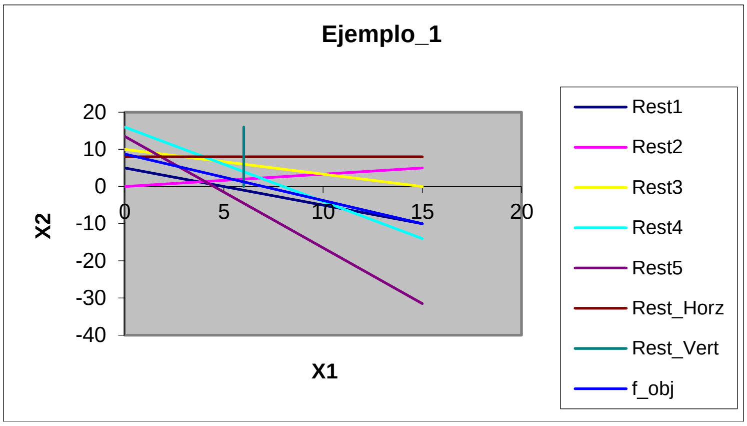

Figura 1.7. Conjunto de restricciones

Para ver mejor la región de soluciones posibles, podemos gestionar la escala de los ejes:

- Doble-clic sobre uno de los números del EJE OY. Se abre la ventana FORMATO EJES.
- Pestaña ESCALA

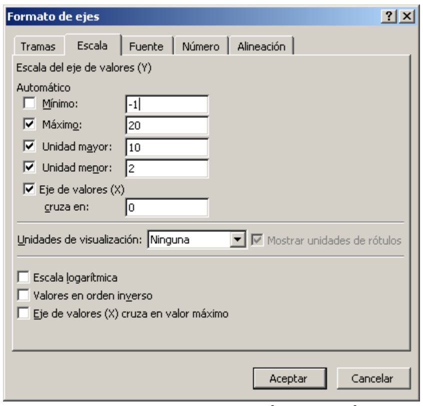

Figura 1.8. Personalización del gráfico

- Ponemos -1 en “Mínimo” y activamos AUTOMÁTICO en el resto. Dejamos sin activar Eje de valores (X) cruza en 0.
- Si queremos, podemos hacer lo mismo para el EJE OX haciendo doble-clic sobre un número del eje OX.
- Observamos la figura y decidimos qué valores mínimos y máximos queremos para los dos ejes en nuestro dibujo. En nuestro ejemplo, dado que hemos calculado los rangos de las variables, es posible que no necesitemos hacer nada más.

Es posible que no veamos la recta correspondiente a la función objetivo; es porque cae fuera de la región de soluciones posibles; variando el valor de la celda K3 podemos desplazarla a nuestro gusto.

Finalmente, mejoramos la estética general, eliminando las líneas de división, el borde, cambiamos el fondo, el grosor de las rectas, el estilo de la línea para la función objetivo, etc. Un ejemplo de estas modificaciones lo tenemos en la hoja “Resultados” de nuestro fichero.

A continuación determinaremos el conjunto de soluciones posibles. Cada una de las rectas que hemos dibujado (sin tener en cuenta la línea de isobeneficio) divide el plano en dos “semiplanos”: la parte que queda “por encima” de la recta y la que queda “por debajo” (o a la izquierda y a la derecha, según el caso). Cada uno de estos semiplanos se corresponden con la restricción >= o <=.

Para saber qué semiplano se corresponde con la restricción del conjunto de soluciones posibles original, haremos lo siguiente:

(1) $x1 + x2 \geq 5$ Tomamos un punto cualquiera que no esté en la recta $x1 + x2 = 5$, por ejemplo el (0,0), y lo substituimos en (1); como no se verifica la condición (0 no es >= 5), entonces nos interesa

el semiplano en el cual no está (0,0), en este caso, la parte que está por “encima” de la recta Rest1 de la figura.

(2) $x1 - 3x2 \leq 0$ Tomamos un punto cualquiera que no esté en la recta $x1 - 3x2 = 0$; en este caso, si sustituimos (0,0) en (2); se verifica la condición como igualdad. Elegimos otro, por ejemplo (0,4); ahora la restricción sí se verifica (-12 es <= 0), entonces nos interesa el semiplano en el que no está (0,4), en este caso, la parte que está por "encima" de la recta Rest2 de la figura.

Fijaos que el signo de la restricción (<= ó >=) no quiere decir necesariamente por encima o por debajo de la recta.

Repetiremos este proceso con el resto de restricciones, y la intersección de todos estos semiplanos nos dará la región de soluciones posibles. La podemos ver sombreada en la hoja “Conjunto_factible” del fichero.

Fijaos que la restricción (2) por sí misma no define el conjunto de soluciones posibles (si quitamos las otras restricciones no tenemos ningún conjunto acotado); es cuando tenemos todas las restricciones juntas cuando podemos definir el conjunto factible del PL. En cambio, si quitamos la primera restricción, el conjunto de soluciones posibles no cambiará. Es una restricción superflua y se puede eliminar. Por otro lado, si por ejemplo, cambiamos el signo de esta primera restricción ($x1+x2 \leq 5$) el conjunto de soluciones sería vacío (inexistencia de soluciones posibles).

Método de la línea de isobeneficio (isocoste)

Para resolver el PL por el método de la línea de isobeneficio, sólo necesitamos aumentar (es un PL de maximización) el valor de Z (celda K3 en nuestro ejemplo) hasta llegar a un vértice tal que, si aumentamos ligeramente este valor de Z, entonces la recta “función objetivo” no toca el conjunto sombreado. Mediante este método hemos detectado que la solución óptima se alcanza en el vértice donde se cortan las restricciones 3 y 4. Para saber cuál es este vértice (calcular sus coordenadas), debemos resolver el sistema con dos ecuaciones (las dos restricciones) y dos incógnitas:

(3) $10x1 + 15x2 = 150$
(4) $20x1 + 10x2 = 160$

Como veremos con el método de los vértices, la solución de este sistema es $x1=4,5$ y $x2=7$, con un valor óptimo de $Z=50500$.

Método de los vértices

Ya sabemos que el óptimo se encuentra en un vértice (a veces en más de uno). Para los PLs bidimensionales, un vértice es la intersección de dos rectas asociadas a dos restricciones. En nuestro ejemplo, como tenemos 9 restricciones (hemos de incluir las restricciones de signo), tendremos muchas intersecciones (todas las posibles combinaciones)

vértice 1) solución de las ecuaciones 1 y 2
vértice 2) solución de las ecuaciones 1 y 3
...
vértice 8) solución de las ecuaciones 1 y 9
vértice 9) solución de las ecuaciones 2 y 3
...

Algunos de estos vértices serán factibles y otros no (depende de si verifican las restricciones que no intervienen en el cálculo). Por ejemplo, el vértice (6,8), intersección de (6) y (7), no es factible porque, si sustituimos en la tercera restricción, tenemos $10*6+15*8=180 > 150$, aunque sí verifica otras restricciones, por ejemplo la restricción 2. En cambio, el vértice 9, (4’5, 7), es factible dado que verifica todas las restricciones.

La representación gráfica es importante porque nos ahorra el trabajo de calcular todos estos vértices: sólo nos interesan los que se corresponden con la región factible. Concretamente, en este caso sólo hemos de calcular 6 vértices. El resto no delimitan la región posible (no verifican alguna restricción, como por ejemplo, la condición de no negatividad). Después, y a partir del valor de la función objetivo en cada uno de estos puntos, encontraremos el óptimo.

Veamos ahora cómo utilizar el Excel para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Utilizamos el método de los determinantes. Por ejemplo, para encontrar la intersección de las rectas (3) y (4):

(3) 10x1 + 15x2 = 150
(4) 20x1 + 10x2 = 160

- Matriz del sistema
  10 15
  20 10
  su determinante es 10*10-15*20=-200

- Cálculo de "x1": sustituimos en la matriz del sistema la columna "x1" (primera) por los términos independientes y calculamos el determinante; este valor lo dividiremos por el determinante de la matriz del sistema; es decir
  150 15
  160 10
  determinante: 150*10-15*160=-900; dividiendo: x1 = -900/-200 = 9/2 = 4.5

- Cálculo de "x2": sustituimos en la matriz del sistema la columna “x2” (segunda) por los términos independientes y calculamos el determinante; este valor lo dividiremos por el determinante de la matriz del sistema; es decir
  10 150
  20 160
  determinante: 160*10-150*20=-1400; dividiendo: x2 = -1400/-200 = 7

- Este vértice lo sustituiremos en la función objetivo para evaluarlo: 5000*4.5+4000*7=50500

Estas fórmulas de determinantes son las que introducimos en la hoja de cálculo, en el recuadro “solución de un sistema de dos ecuaciones”. En la imagen siguiente vemos cómo introducir estas fórmulas, cuyos resultados podemos encontrar en la hora “Vértices” del fichero Modulo1_Manual Excel_ejemplo_1.xls.

B	C	D	E
	Resolución de un sistema de dos ecuaciones		
	Coef x1	Coef x2	Ter. indep.
Rest3	10	15	150
Rest4	20	10	160
Vértice			
x1	=(E4*D5-E5*D4)/(C4*D5-D4*C5)		
x2	=(C4*E5-C5*E4)/(C4*D5-D4*C5)		
F. Obj.	5000	4000	
Z=	=C11*C8+D11*C9		

Figura 1.9. Cálculo de vértices y valor de la función objetivo

En el cuadro “resolución de un sistema de dos ecuaciones” hemos de cambiar los coeficientes de las restricciones y los términos independientes para encontrar todos los vértices y calcular el valor de la función objetivo en cada uno de ellos. Además, hemos de comprobar si los vértices obtenidos son factibles o no (sustituyendo en el resto de restricciones). Recordad que los ejes vertical y horizontal tienen ecuaciones x1=0 y x2=0, respectivamente.

Para encontrar las coordenadas de todos los vértices y calcular el valor de la función objetivo en cada uno de ellos, usaremos el cuadro "Resolución de un sistema de dos ecuaciones" (rango casillas B3:E12 de la hoja Vértices); sólo debemos cambiar los coeficientes de las restricciones y los términos independientes. Además, debemos comprobar si los vértices obtenidos son factibles o no (sustituyendo en el resto de restricciones). Recordad que los ejes vertical y horizontal tienen ecuaciones x1=0 y x2=0, respectivamente.

Más concretamente:

• En las casillas C4, D4 y E4 ponemos los coeficientes de una de las restricciones que queremos que intervengan en el vértice.

• En las casillas C5:E5 ponemos los coeficientes de la segunda restricción que queremos que pase por el vértice.

• En las casillas C11 y D11 ponemos los coeficientes la función objetivo Z.

Una vez hecho esto vemos que en las casillas C8 y C9 nos aparecen las coordenadas del vértice definido por las dos restricciones. Finalmente, en la casilla C12 se muestra el valor de la función Z en el vértice calculado antes.

Podéis experimentar con el funcionamiento de este cuadro variando estos coeficientes. En la hoja Vértices encontraréis los seis vértices (puntos factibles) de la región posible.

Además, encontraréis dos puntos más, los cuales son intersecciones de restricciones, pero no son vértices, dado que no son factibles.

El primero de los puntos no factibles encontrados es la intersección de las restricciones Rest1 y Rest2; como podéis comprobar, este punto (3'75, 1'25) no es factible, dado que no verifica la quinta restricción:

(5) 30x1 + 10x2 = 30*3.75 + 10*1.25 = 125 (la restricción dice ≥ 135)

El segundo de los puntos no factibles es la intersección de las restricciones Rest1 y Rest5; como podéis comprobar, este punto (4'25, 0'75) no es factible, dado que no verifica la segunda restricción:

(2) x1 - 3x2 = 4.25 – 3*0.75 = 2 (la restricción dice ≤ 0)

Estas comprobaciones sobre la factibilidad son muy importantes e interesantes, dado que son independientes del dibujo de la región factible, y por lo tanto, nos pueden ayudar a comprobar si está dibujada correctamente.

Ejercicio 1

Encuentra el óptimo del PL del Ejemplo 1 si cambiamos el signo de la función objetivo, es decir, si cambiamos Max Z = 5000x1 + 4000x2 por Min Z = 5000x1 + 4000x2.

Solución:
Disminuyendo el valor de Z veremos que el mínimo se encuentra en la intersección de las restricciones 2 y 5, en el vértice (4'05, 1'35), con un valor de Z=25650.

Ejercicio 2

Resuelve el PL siguiente:

Max Z = 750x1 + 450x2
s.a
(1) 40x1 + 40x2 ≤ 560
(2) 70x1 + 40x2 ≥ 420
(3) 50x1 + 20x2 ≥ 300
(4) 5x1 + 3x2 ≤ 54
(5) 2x1 - 3x2 ≤ 4
(6) x1, x2 ≥ 0

Solución:
En el fichero Modulo1_Manual Excel_ejercicio_1_2.xls encontrarás la solución del PL. Observa que tenemos una solución múltiple acotada.