1. 引言：朴素贝叶斯的局限性

我们知道朴素贝叶斯的局限性来源于其条件独立假设，它将文本看成是词袋子模型，不考虑词语之间的顺序信息，就会把“武松打死了老虎”与“老虎打死了武松”认作是一个意思。那么有没有一种方法提高其对词语顺序的识别能力呢？有，就是这里要提到的N-gram语言模型。

2. N-gram语言模型是啥？

2.1从假设性独立到联合概率链规则

照抄我们垃圾邮件识别中的条件独立假设，长这个样子：

$$
\begin{aligned}
&P(\text{（“我”, “司”, “可”, “办理”, “正规发票”, “保真”, “增值税”, “发票”, “点数”, “优惠”）}|S)\\
&= P(\text{“我”}|S) \times P(\text{“司”}|S) \times P(\text{“可”}|S) \times P(\text{“办理”}|S) \times P(\text{“正规发票”}|S)\\
&\times P(\text{“保真”}|S) \times P(\text{“增值税”}|S) \times P(\text{“发票”}|S) \times P(\text{“点数”}|S) \times P(\text{“优惠”}|S)
\end{aligned}
$$

为了简化起见，我们以字母x_i表示每一个词语，并且先不考虑条件“S”。于是上式就变成了下面的独立性公式。

$$
\begin{aligned}
&P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})\\
&= P(x_1)P(x_2)P(x_3)P(x_4)P(x_5)P(x_6)P(x_7)P(x_8)P(x_9)P(x_{10})\\
&= P(\text{“我”})P(\text{“司”})P(\text{“可”})P(\text{“办理”})\ldots P(\text{“优惠”})
\end{aligned}
$$

上面的公式要求满足独立性假设，如果去掉独立性假设，我们应该有下面这个恒等式，即联合概率链规则**(chain rule)**：

$$
\begin{aligned}
&P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_n)\\
&= P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)\ldots P(x_n|x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})
\end{aligned}
$$

2.2 从联合概率链规则到**n-gram**语言模型

上面的联合概率链规则公式考虑到词和词之间的依赖关系，但是比较复杂，在实际生活中几乎没办法使用，于是我们就想了很多办法去近似这个公式，比如我们要讲到的语言模型n-gram就是它的一个简化。

如果我们考虑一个词语对上一个词语的依赖关系，公式就简化了如下形式，我们把它叫做二元语法（bigram，2-gram）：

$$
\begin{aligned}
&P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})\\
&= P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_2)P(x_4|x_3)..P(x_{10}|x_9)\\
&= P(\text{“我”})P(\text{“司”}|\text{“我”})P(\text{“可”}|\text{“司”})P(\text{“办理”}|\text{“可”})\ldots P(\text{“优惠”}|\text{“点数”})
\end{aligned}
$$

如果把依赖词长度再拉长一点，考虑一个词对前两个词的依赖关系，就叫做三元语法（trigram，3-gram），公式如下:

$$
\begin{aligned}
&P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})\\
&= P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)P(x_4|x_2, x_3)\times\ldots\times P(x_{10}|x_8, x_9)\\
&= P(\text{“我”})P(\text{“司”}|\text{“我”})P(\text{“可”}|\text{“我”}, \text{“司”})P(\text{“办理”}|\text{“司”}, \text{“可”})\ldots P(\text{“优惠”}|\text{“发票”}, \text{“点数”})
\end{aligned}
$$

如果我们再考虑长一点，考虑n个词语之间的关系，恩恩，这就是n-gram的由来。歪果仁果然取名字简单粗暴又好记...

其实以上几个简化后的公式，就是著名的马尔科夫假设（**Markov Assumption**）：下一个词的出现仅依赖于它前面的一个或几个词。这相对于联合概率链规则，其实是一个有点粗糙的简化，不过很好地体现了就近思路，离得较远和关系比较弱的词语就被简化和省略了。实际应用中，这些简化后的n-gram语法比独立性假设还是强很多的。

2.3 怎样选择依赖词的个数"n"？

选择依赖词的个数"n"主要与计算条件概率有关。理论上，只要有足够大的语料，**n**越大越好，毕竟这样考虑的信息更多嘛。条件概率很好算，统计一下各个元组出现的次数就可以，比如:

$$P(\text{“优惠”}|\text{“发票”},\text{“点数”}) = \frac{(\text{“发票”},\text{“点数”},\text{“优惠”})\text{出现的次数}}{(\text{“发票”},\text{“点数”})\text{出现的次数}}$$

但我们实际情况往往是训练语料很有限，很容易产生数据稀疏，不满足大数定律，算出来的概率失真。比如(“发票”,“点数”，“优惠”)在训练集中竟没有出现，就会导致零概率问题。

又比如在英文语料库IBM, Brown中，三四百兆的语料，其测试语料14.7%的trigram和2.2%的bigram在训练语料中竟未出现！

另一方面，如果n很大，参数空间过大，也无法实用。假设词表的大小为$100,000$，那么n-gram模型的参数数量为$100,000^n$。这么多的参数，估计内存就不够放了。

那么，如何选择依赖词的个数n呢？从前人的经验来看：

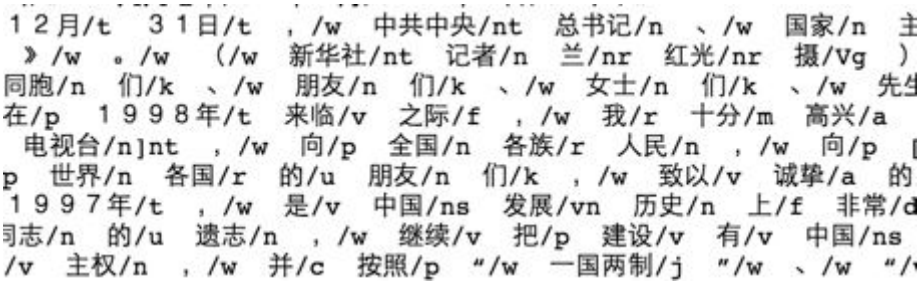
- 经验上，trigram用的最多。尽管如此，原则上，能用bigram解决，绝不使用trigram。n取≥4的情况较少。
- 更大的n：对下一个词出现的约束信息更多，具有更大的辨别力；
- 更小的n：在训练语料库中出现的次数更多，具有更可靠的统计信息，具有更高的可靠性、实用性。

3. N-gram实际应用举例

说了这么N-gram语言模型的背景知识，咱们再来看看N-gram语言模型在自然语言处理中有哪些常见应用。
PS：此部分以原理介绍为多，具体的技术实现细节请参考文中链接或者google。

3.1 词性标注

词性标注是一个典型的多分类问题。常见的词性包括名词、动词、形容词、副词等。而一个词可能属于多种词性。如“爱”，可能是动词，可能是形容词，也可能是名词。但是一般来说，“爱”作为动词还是比较常见的。所以统一给“爱”分配为动词准确率也还足够高。这种最简单粗暴的思想非常好实现，如果准确率要求不高则也比较常用。它只需要基于词性标注语料库做一个统计就够了，连贝叶斯方法、最大似然法都不要用 。词性标注语料库一般是由专业人员搜集好了的，长下面这个样子。其中斜线后面的字母表示一种词性，词性越多说明语料库分得越细：



需要比较以下各概率的大小，选择概率最大的词性即可：

$$P(\text{词性}_i|\text{“爱 ”}) = \frac{\text{“爱”作为“词性}_i\text{”的次数}}{\text{“爱”出现的次数}}; i = 1, 2, 3...$$

但这种方法没有考虑上下文的信息。而一般来说，形容词后面接名词居多，而不接动词，副词后面才接动词，而不接名词。 考虑到词性会受前面一两个词的词性的影响，可以引入**2-gram**模型提升匹配的精确度。我们匹配以下这句话（已被空格分好词）中“爱”的词性：

"闷骚的 李雷 很 爱 韩梅梅"

将公式进行以下改造，比较各概率的大小，选择概率最大的词性：

$$P(\text{词性}_i|\text{“很”的词性（副词），“爱 ”}) = \frac{\text{前面被“副词”修饰的“爱”作为“词性}_i\text{”的次数}}{\text{前面被“副词”修饰的“爱”出现的次数}}; i = 1, 2, 3..$$

计算这个概率需要对语料库进行统计。但前提是你得先判断好“很”的词性，因为采用2-gram模型，进而就需要提前判断“李雷”的词性，需要判断“闷骚的”词性。但是“闷骚的”作为第一个词语，已经找不比它更靠前的词语了。这时就可以考虑用之前最简单粗暴的方法判断“闷骚的”的词性，统一判断为形容词即可。

PS:词性标注是自然语言处理中的一项基础性工作，有其细节实现远比我们介绍地更加丰富。感兴趣的同学可以看看这篇文章《NLTK读书笔记 — 分类与标注》 (https://superangevil.wordpress.com/2009/10/20/nltk5/)

3.2 垃圾邮件识别

是的，亲，你！没！看！错！可以用N-gram进行垃圾邮件识别，而且是朴素贝叶斯方法的进化版。下面我们用直观的例子探讨一下其在分类问题上是怎么发挥作用的 。一个可行的思路如下：

- 先对邮件文本进行断句，以句尾标点符号（“。”“!”“？”等）为分隔符将邮件内容拆分成不同的句子。
- 用N-gram分类器(马上提到)判断每个句子是否为垃圾邮件中的敏感句子。
- 当被判断为敏感句子的数量超过一定数量（比如3个）的时候，认为整个邮件就是垃圾邮件。

咳咳，有同学问N-gram分类器是什么鬼，这个分类器靠谱么。N-gram分类器是结合贝叶斯方法和语言模型的分类器。这里用Y_1, Y_2分别表示这垃圾邮件和正常邮件，用X表示被判断的邮件的句子。根据贝叶斯公式有：

$$P(Y_i|X) \propto P(X|Y_i)P(Y_i);\ i = 1, 2$$

比较i=1和2时两个概率值的大小即可得到X所属的分类。对于句子（“我”,“司”,“可”,“办理”,“正规发票”,“保真”,“增值税”,“发票”,“点数”,“优惠”)用字母X代表，每一个词语用字母x_i表示。X就可以写成一个x_i组成的向量，x_i就是这向量中某个维度的特征。对$P(X|Y_i)$ 套用**2-gram**模型。 则上式化简为：

$$\begin{aligned} &P(Y_i|X) \propto P(X|Y_i)P(Y_i);\ i = 1, 2 \\ &\propto P(x_1|Y_i)P(x_2|x_1,\ Y_i)P(x_3|x_2,\ Y_i)...P(x_{10}|x_9,\ Y_i)P(Y_i) \\ &\propto P(\text{“我”}|Y_i)P(\text{“司”}|\text{“我”},\ Y_i)P(\text{“可”}|\text{“司”},\ Y_i)...P(\text{“优惠”}|\text{“点数”},\ Y_i)P(Y_i) \end{aligned}$$

公式中的条件概率也比较好求，举个例子：

$$P(\text{“优惠”}|\text{“点数”},\ Y_i) = \frac{\text{在类别}Y_i\text{中，(“点数”，“优惠”)出现的次数}}{\text{在类别}Y_i\text{中，“点数”出现的次数}}$$

剩下的就需要在语料库中间做一个的统计就是了。因为这种方法考虑到了词语前面的一个词语的信息，同时也考虑到了部分语序信息，因此区分效果会比单纯用朴素贝叶斯方法更好。

多提几句，N-gram方法在实际应用中有一些tricks需要注意：

- 3-gram方法的公式与上面类似。此处省略。从区分度来看，3-gram方法更好些。
- 句子开头的词，比如本例中的“我”，因为要考虑其本身作为开头的特征，可以考虑在其前面再添加一个句子起始符号如**"**《**S**》**"**，这样我们就不必单独计算 $P(\text{” 我 ”}|Y_i)$，而是替换为计算 $P(\text{” 我 ”}|\text{” 《}S\text{》 ”}, Y_i)$。形式上与**2-gram**统一。 这样统计和预测起来都比较方便。
- 一般地，如果采用**N-gram**模型，可以在文本开头加入 **n-1**个虚拟的开始符号，这样在所有情况下预测下一个词的可依赖词数都是一致的。
- 与朴素贝叶斯方法一样，**N-gram**模型也会发生零概率问题，也需要平滑技术。 ，别着急，下面马上讨论到。

3.3 中文分词

之前说过，中文分词技术是“中文NLP中，最最最重要的技术之一”，重要到某搜索引擎厂有专门的team在集中精力优化这一项工作，重要到能影响双语翻译10%的准确度，能影响某些query下搜索引擎几分之一的广告收入。不过简单的分词实现方式中，包含的原理其实也非常易懂。

说起来，中文分词也可以理解成一个多分类的问题。 这里用X表示被分词的句子“我司可办理正规发票”， 用Y_i表示该句子的一个分词方案。，咱们继续套用贝叶斯公式：

$$P(Y_i|X) \propto P(X|Y_i)P(Y_i);\ i=1,2,3...$$

比较这些概率的大小，找出使得$P(Y_i|X)$ 最大的Y_i即可得到X 所属的分类(分词方案)了。

Y_i作为分词方案，其实就是个词串，比如（“我司”，“可”，“办理”，“正规发票”）或者（“我”，“司可办”，“理正规”，“发票”），也就是一个向量了。

而上面贝叶斯公式中$P(X|Y_i)$ 项的意思就是在分类方案 Y_i 的前提下，其对应句子为X 的概率。而无论分词方案是（“我司”，“可”，“办理”，“正规发票”）还是（“我”，“司可办”，“理正规”，“发票”），或者其他什么方案，其对应的句子都是“我司可办理正规发票”。也就是说任意假想的一种分词方式之下生成的句子总是唯一的（只需把分词之间的分界符号扔掉剩下的内容都一样）。于是可以将 $P(X|Y_i)$ 看作是恒等于**1**的。这样贝叶斯公式又进一步化简成为：

$$P(Y_i|X) \propto P(Y_i);\ i=1,2,3...$$

也就是说我们只要取最大化的$P(Y_i)$ 就成了。而Y_i就是一个词串，也就是一个向量，可以直接套用我们上面的N-gram语言模型。这里采用2-gram。于是有：

$$P(Y_1) = P(\text{“我司”，“可”，“办理”，“正规发票”})$$
$$= P(\text{“我司”})P(\text{“可”}|\text{“我司”})P(\text{“办理”}|\text{“可”})P(\text{“正规发票”}|\text{“办理”})$$

第二种分词方案的概率为：

$$P(Y_2) = P(\text{“我”，“司可办”，“理正规”，“发票”})$$
$$= P(\text{“我”})P(\text{“司可办”}|\text{“我”})P(\text{“理正规”}|\text{“司可办”})P(\text{“发票”}|\text{“理正规”})$$

由于在语料库中“司可办”与“理正规”一起连续出现的概率为0，于是$P(Y_2)=0$,$P(Y_1)$ 的概率更高，优先选择Y_1的分词方案。

3.4机器翻译与语音识别

除了上述说到的应用，N-gram语言模型在机器翻译和语音识别等顶级NLP应用中也有很大的用途。 当然，机器翻译和语音识别是非常复杂的过程，N-gram语言模型只是其中的一部分，但是缺少它整个过程却进行不下去。对于这两个应用我们不打算罗列大量的公式，而只是举些例子，让大家了解一下语言模型是怎么发挥作用的。 对于机器翻译而言，比如中译英，我们对于同一句话『李雷出现在电视上』，得到的三个译文：

- LiLei appeared in TV
- In LiLei appeared TV
- LiLei appeared on TV

其对应短语的翻译概率是一致的，从短语翻译的角度我们无法评定哪句才是正确的翻译结果。这时候，如果我们再使用语言模型(比如机器翻译里面最常见的是3-gram)，我们计算会得到最后一句话
$P(\text{“}LiLei\text{”}|\text{“}《S》\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}appeared\text{”}|\text{“}LiLei\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}on\text{”}|\text{“}LiLei\text{”},\text{“}appeared\text{”})P($
概率高于第一句
$P(\text{“}LiLei\text{”}|\text{“}《S》\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}appeared\text{”}|\text{“}LiLei\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}in\text{”}|\text{“}LiLei\text{”},\text{“}appeared\text{”})P($
第二句
$P(\text{“}in\text{”}|\text{“}《S》\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}LiLei\text{”}|\text{“}in\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}appeared\text{”}|\text{“}LiLei\text{”},\text{“}in\text{”})P(\text{“}TV\text{”}|\text{“}app$
因此我们选择第三句作为正确的答案。这也表明大量语料上的语言模型能够在一定程度上，体现出我们表达某种语言时候的说话习惯。

对应到语音识别问题中，我们也会遇到相同的问题，对于以下的2个句子：

- I went to a party
- Eye went two a bar tea

或者对应下述2个句子：

- 你现在在干什么？
- 你西安载感什么？

其对应的发音是完全一致的，这时如果我们借助于语言模型，我们会发现
$P(\text{“}I\text{”}|\text{“}《S》\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}went\text{”}|\text{“}I\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}to\text{”}|\text{“}I\text{”},\text{“}went\text{”})P(\text{“}a\text{”}|\text{“}went\text{”},\text{“}to\text{”})P(\text{“}p$
概率大于
$P(\text{“}Eye\text{”}|\text{“}《S》\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}went\text{”}|\text{“}Eye\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“}two\text{”}|\text{“}Eye\text{”},\text{“}went\text{”})P(\text{“}a\text{”}|\text{“}went\text{”},\text{“}$
而
$P(\text{“你”}|\text{“}《S》\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“现在”}|\text{“你”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“在”}|\text{“你”},\text{“现在”})P(\text{“干什么”}|\text{“在”},\text{“现在”})$概率远大于
$P(\text{“你”}|\text{“}《S》\text{”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“西安”}|\text{“你”},\text{“}《S》\text{”})P(\text{“载”}|\text{“西安”},\text{“你”})P(\text{“感”}|\text{“西安”},\text{“载”})P(\text{“什}$
因此我们会选择**I went to a party** 和 你现在在干什么 作为正确的语音识别结果。

上面只是简单的举例，但是大家应该看出来了，在机器翻译和语音识别中，N-gram语言模型有着至关重要的地位。同样在现在最顶级的计算机视觉任务『图片内容表述』中，语言模型也发挥着至关重要的作用。语言模型的重要性可见一斑。

4. 平滑技术

现在我们可以比较专门探讨平滑技术了。为了解决零概率问题呢，我们需要给 **“**未出现的**n-gram**条件概率分布一个非零估计值，相应得需要降低已出现 **n-gram**条件概率分布，且经数据平滑后一定保证概率和为 **1”**。这就是平滑技术的基本思想。

4.1 拉普拉斯平滑

这是最古老的一种平滑方法，又称加一平滑法，其保证每个**n-gram**在训练语料中至少出现 **1**次。以计算概率 $P(\text{“优惠”}|\text{“发票”},\text{“点数”})$ 为例，公式如下：

$$P(\text{“优惠”}|\text{“发票”},\text{“点数”}) = \frac{(\text{“发票”},\text{“点数”},\text{“优惠”})\text{出现的次数}+1}{(\text{“发票”},\text{“点数”})\text{出现的次数}+\text{所有不重复的三元组的个数}}$$

在所有不重复的三元组的个数远大于(“发票”,“点数”)出现的次数时，即训练语料库中绝大部分n-gram都是未出现的情况（一般都是如此），拉普拉斯平滑有**“喧宾夺主”**的现象，效果不佳。

4.2 古德图灵(Good Turing)平滑

通过对语料库的统计，我们能够知道出现r次 （$r > 0$） 的n元组的个数为N_r。可以令从未出现的n元组的个数为N_0。古德图灵平滑的思想是:

- 出现**0**次的**n**元组也不能认为其是**0**次，应该给它一个比较小的估计值 ，比如为d_0次。
- 为了保证总共的（出现和未出现的）n元组的次数不变，其他所有已出现的**n**元组的次数**r**应该打一个折扣，比如为d_r次。
- 然后再用新的d_r去计算各个条件概率。

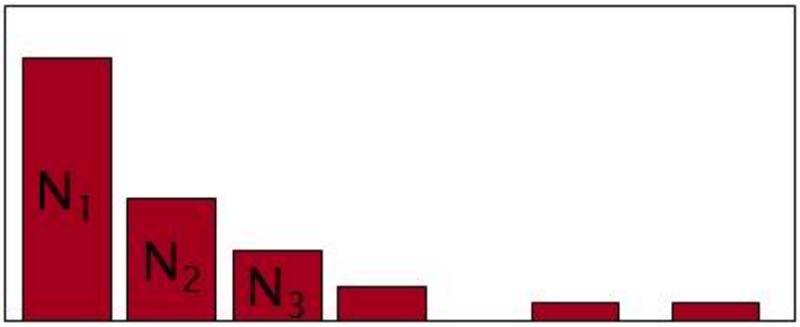
所以问题的关键是计算d_r。为了保证平滑前后**n**元组的总共出现次数不变，有：

$$\sum_{r=0}^{\infty} d_r \times N_r = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) \times N_{r+1}$$

所以干脆令：

$$d_r \times N_r = (r+1) \times N_{r+1};\ r = 0, 1, 2...$$

这样就可以求出d_r了。但是，当$N_r > N_{r+1}$ 时，使得模型质量变差，如下图所示：



直接的改进策略就是 **“**对出现次数超过某个阈值的 **n**元组，不进行平滑，阈值一般取 **8~10”**，其他方法请参见“Simple Good-Turing” (http://faculty.cs.byu.edu/~ringger/CS479/papers/Gale-SimpleGoodTuring.pdf)。

4.3 组合估计平滑

不管是拉普拉斯平滑，还是古德图灵平滑技术，对于未出现的 **n**元组都一视同仁，而这难免存在不合理。 因为哪怕是未发生的事件，相互之间真实的概率也会存在差别。

另一方面，一个n元组可能未出现，但是其(n-1)元组或者(n-2)元组是出现过的，这些信息如果不利用就直接浪费掉了。在没有足够的数据对高元 **n-gram**模型进行概率估计时，低元 **n-gram**模型通常可以提供有用的信息。 因此可以利用利用低元n-gram模型的信息对高元n-gram模型进行估计：

- 如果低元n-gram模型的概率本来就很低，那么就给高元n-gram模型一个较低的估计值；
- 如果低元n-gram模型有一个中等的概率，那么就给高元n-gram模型一个较高的估计值。

常用的组合估计算法有线性差值法和**Katz**回退法。具体公式比较复杂，这里就不列了。感兴趣的同学可参考Christopher D. Manning 的《统计自然语言处理基础》 (http://book.douban.com/subject/1224802/)

5. 从**N-gram**谈回贝叶斯方法

聊了这么多N-gram语言模型，我们再回到贝叶斯方法，从实际应用中看看他们的关联。 最原始的用贝叶斯方法进行分类的公式其实非常简单：

$$P(Y_i|X) \propto P(X|Y_i)P(Y_i);\ i=1,2,3...$$

具体到不同应用中，它就可以演化出多种玩法：

- 对于拼写纠错（非词错误） ，X是错误的词语，Y_i是候选的改正词语，二者都是标量。
- 对于垃圾邮件识别，X是邮件中的句子，Y_i是备选的邮件类别。X可以处理成向量，Y_i还是标量。
  - 如果对向量X采用条件独立假设，就是朴素贝叶斯方法。
  - 如果对向量X采用马尔科夫假设，就是N-gram语言模型。
- 对于中文分词，X是被分词的句子，Y_i是备选的分词方案（词串）。这里把X看成是一个整体，所以可以理解成标量。而Y_i则是向量。这里对向量Y_i采用马尔科夫假设，也是N-gram语言模型。

那么有没有一种模型处理的X和Y_i都是向量呢？有的，这就是传说中的隐马尔科夫模型(HMM)。以后的课会讲到。