# 随机过程期末速通

# 3. Poisson过程

## 3.1 Poisson过程

[**定义3.1.1**] 设随机过程$\{N(t),t\geq 0\}$中$N(t)$表示从0时刻到$t$时刻事件$A$发生的次数. 若该随机过程满足如下两个条件, 则称其为**计数过程**:

①$N(t)$是非负整数.

②对$\forall$整数$s<t$, 有$N(s)\leq N(t)$, 且$[N(t)-N(s)]$为$(s,t]$时间内$A$发生的次数.

[**定义3.1.2**] [**Poisson过程的第一定义**] 称计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$为参数为$\lambda\ \ (\lambda>0)$的(**齐次**)**Poisson过程**, 如果满足如下三个条件:

①$N(0)=0$.

②该过程有独立增量.

③在任一长度为$t$的时间区间中事件发生的次数服从均值为$\lambda t$的Poisson分布, 即对$\forall s\geq 0,t>0$, 都有$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}\ \ (n=0,1,2,\cdots)$.

[**注1**] "齐次"指时间齐次(简称时齐), 即在何时观察分布都相同, 亦即Poisson分布的参数$\lambda$是常数.

[**注2**] 条件③表明: Poisson过程的增量服从Poisson分布, 且参数与增量的区间长度$t$有关.

[**注3**] 在条件③中令$s=0$, 则$[N(t)-N(0)]\sim P(\lambda t)$, 而$[N(s+t)-N(s)]\sim P(\lambda t)$, 则$[N(s+t)-N(s)]\overset{d}{=\!=}[N(t)-N(0)]$, 这表明Poisson过程有平稳增量. 结合②知: Poisson过程有独立增量和平稳增量.

[**注4**] 由Poisson分布的性质: $E[N(s+t)-N(s)]=\lambda t$, 令$s=0$, 则$E[N(t)-N(0)]=E[N(t)]=\lambda t$, 则$N(t)\sim P(\lambda t)$, 即Poisson过程的切片和增量都服从Poisson分布. $\lambda$可视为单位时间内事件发生的平均次数, 称其为Poisson过程的**强度**或**速率**或**发生率**.

[**注5**] 无特别说明时, "Poisson过程"默认指齐次Poisson过程.

[**例3.1.1**] 设火车站从早上$08:00$开始连续售票, 乘客以$10$人/小时的平均速率到达. 求:

(1)$09:00\sim 10:00$内至多有$5$名乘客购票的概率.

(2)$10:00\sim 11:00$无人购票的概率.

[**解**] 乘客购票可用参数$\lambda=10$的Poisson过程描述. 设$08:00$为时刻0, $09:00$为时刻1, $\cdots$.

(1)$P\{N(2)-N(1)\leq 5\}=\displaystyle\sum_{n=0}^5\mathrm{e}^{-10}\cdot\frac{10^n}{n!}$.

(2)$P\{N(3)-N(2)=0\}=\mathrm{e}^{-10}\cdot\dfrac{(10)^0}{0!}=\mathrm{e}^{-10}$.

[**注**] 随机服务系统中的排队现象可用Poisson过程描述, 如到达电话总机的呼叫数、到达某服务设施(商场、车站、购票出等)的人数等.

**[例3.1.2]** 设保险公司每月平均接到索赔要求4次, 求它一年要赔付的次数的期望.

**[解]** 每月保险公司接到的索赔要求可用参数$\lambda=4$的Poisson过程描述.

设一年开始的时刻为0, 1月末为时刻1, 2月末为时刻2, $\cdots$.

$E[N(12)-N(0)]=\lambda t=4\times 12=48.$

**[定义3.1.3]** [**Poisson过程的第二定义**] 称计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$为参数为$\lambda\ \ (\lambda>0)$的(**齐次**)**Poisson过程**, 如果满足如下四个条件:

①$N(0)=0.$

②该过程有平稳独立增量.

③[**稀有性**] $\exists\lambda>0\ s.t.\ \ h$单调递减趋于0时, 有$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda h+o(h).$

④[**有序性**] $h$单调递减趋于0时, 有$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h).$

**[注1]** 对$\forall h>0$, $(t,t+h]$时间内事件的发生有如下三种情况: ①不发生; ②发生1次; ③发生$\geq\ 2$次.

$h$单调递减趋于0时, 事件的发生有如下两种情况: ①不发生; ②发生1次, 即从Poisson分布退化为二项分布.

**[注2]** $P\{N(t+h)-N(t)=0\}=1-\lambda h+o(h).$

**[注3]** 实际中难验证第一定义中增量服从Poisson分布的条件, 但易验证第二定义的条件, 故第二定义常用于实际证明, 第一定义常用于理论推导.

**[定理3.1.1]** **定义3.1.3**是**定义3.1.2**的充要条件.

**[证]** 下证**定义3.1.2**$\Rightarrow$**定义3.1.3**的情况, 只需验证**定义3.1.3**的条件③和④.

③$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=P\{N(h)-N(0)=1\}$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!}=\lambda h\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!}=\lambda h[1-\lambda h+o(h)]=\lambda h+o(h).$$

④$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=P\{N(h)-N(0)\geq 2\}=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda h}\cdot\frac{(\lambda h)^n}{n!}=o(h).$

**[定理3.1.2]** [**Poisson过程的稀疏性**] 设事件$A$的发生形成强度为$\lambda$的Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$. 设每次事件发生有$p$的概率被记录, $M(t)$表示0时刻到$t$时刻被记录的事件数, 则$\{M(t),t\geq 0\}$是强度为$\lambda p$的Poisson过程.

**[证]** 每次事件发生时, 是否记录它与其他事件是否被记录独立.

因$A$的发生形成Poisson过程, 则$A$的发生服从Poisson分布, 进而$M(t)$有独立、平稳增量.

下证$M(t)$服从均值为$\lambda pt$的Poisson分布.

$$P\{M(t)=m\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{M(t)=m\mid N(t)=m+n\}\cdot P\{N(t)=m+n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_{m+n}^m p^m(1-p)^n\cdot\frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda pt)^m[\lambda(1-p)t]^n}{m!\cdot n!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda p t)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)t]^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^m}{m!}.$$

[**例3.1.3**] 设每条蚕的产卵数服从强度为$\lambda$的Poisson分布, 每个卵变为成虫的概率为$p$, 各卵是否变为成虫彼此无关. 求$[0,t]$事件内每条蚕养活$k$只小蚕的概率.

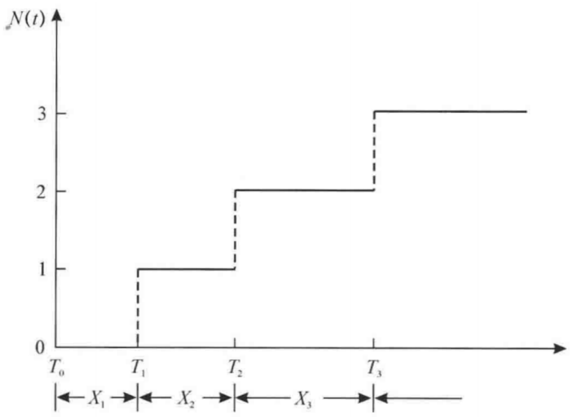
[**解**] 由**定理3.1.2**: 小蚕数服从强度为$\lambda p$的Poisson分布, 则$P = \dfrac{(\lambda p t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda p t}$.

---

---

## 3.2 与Poisson过程有关的分布

[**定义3.2.1**] 如下图是Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$的一条**样本路径**(固定$\omega$), 它是跳跃度为1的阶梯函数. 设$T_n$为第$n\ \ (n=1,2,\cdots)$次事件发生的时刻, 规定$T_0=0$. 设$X_n$为事件第$n$次发生与第$(n-1)$次发生的**时间间隔**, 称其为**逗留时间**, 则$T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$, 且$X_n = T_n - T_{n-1}\ \ (n=1,2,\cdots)$.




---

### 3.2.1 $X_n$和$T_n$的分布

$X_n$的分布与$T_n$的分布可相互推出. 下面先说明前者推后者的过程.

[**定理3.2.1**] $X_n \sim Exp(\lambda)\ \ (n=1,2,\cdots)$, 且相互独立.

[**证**] 因$X_1$是事件第一次发生的时刻, 则事件$\{X_1 > t\} \Leftrightarrow \{N(t)=0\}$,

即$(0,t]$时间内事件不发生, 进而$P\{X_1 > t\} = P\{N(t)=0\} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

故$P\{X_1 \leq t\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$, 则$X_1 \sim Exp(\lambda)$.

下面的证明不严谨.

$P\{X_2 > t \mid X_1 = s\} = P\{N(s+t) - N(s) = 0 \mid N(s) = 1\}$

$= P\{N(s+t) - N(s) = 0\} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ * 其中第二个等号是因为Poisson过程有独立增量.

则$P\{X_2 > t \mid X_1 = s\}$与$s$无关, 即条件概率与条件无关.

故$P\{X_2 \leq t\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$, 则$X_2 \sim Exp(\lambda)$, 即$X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$且相互独立. 重复上述过程即证.

[**注**] Poisson过程有平稳独立增量, 在任意时刻都是"重新开始", 是指数分布的无记忆性的体现. 这表明: 齐次Poisson过程处处有Markov性.

[**定理3.2.2**] $T_n \sim \Gamma(n,\lambda)\ \ (n=1,2,\cdots)$.

[**证1**] 因$T_n=\sum_{i=1}^n X_i$, 而$X_i \sim Exp(\lambda)\ \ (i=1,2,\cdots)$且相互独立,

由$\Gamma$分布的独立可加性: $T_n \sim \Gamma(\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{个}},\lambda)=\Gamma(n,\lambda)$.

[**证2**] 注意到事件$\{N(t)\geq n\} \Leftrightarrow T_n \leq t$,

则$F_{T_n}(t)=P\{T_n\leq t\}=P\{N(t)\geq n\}=\sum_{j=n}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^j}{j!}$.

$$f_{T_n}(t)=F'_{T_n}(t)=\sum_{j=n}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}-\sum_{j=n}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

$$\xlongequal{k=j-1}\sum_{k=n-1}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}-\sum_{j=n}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

故$T_n \sim \Gamma(n,\lambda)$.

[**注**] 设$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$, 则其密度函数$f(t)=\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\ \ (t\geq 0)$.

$\Gamma$分布有性质:

①$\alpha=1$时, $f(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\ \ (t\geq 0)$, 退化为指数分布, 即$X\sim Exp(\lambda)\Leftrightarrow X\sim\Gamma(1,\lambda)$.

②[**独立可加性**] 若$X\sim\Gamma(n,\lambda),Y\sim\Gamma(m,\lambda)$且相互独立, 则$X+Y\sim\Gamma(n+m,\lambda)$.

[**定义3.2.2**] [**Poisson过程的第三定义**] 称计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的**Poisson过程**, 如果事件每次发生的时间间隔$X_i\sim Exp(\lambda)\ \ (i=1,2,\cdots)$且相互独立.

[**例3.2.1**] 设从$08:00$开始有无穷多人排队等候, 只有一名服务员, 且每人接受服务的时间都服从均值为20分钟的指数分布且相互独立. 求:

(1)到$12:00$为止平均离开的人数.

(2)到 $12:00$ 为止, 恰有9人接受服务的概率.

[**解**]

(1)因指数分布的均值$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=20\ \mathrm{min}=\dfrac{1}{3}\ \mathrm{h}$,

则上述排队过程可用强度$\lambda=3$的Poisson过程描述.

以$08:00$为0时刻, $09:00$为1时刻, $\cdots$, 则到$12:00$为止平均离开$\lambda t=3\times 4=12$人.

(2)$P\{N(4)=9\}=\mathrm{e}^{-12}\dfrac{12^9}{9!}$.

[**例3.2.2**] 设某地观测到的流星数是Poisson过程, 且每小时平均观测到3颗流星. 求$08:00\sim 12:00$时间内该地未观测到流星的概率.

[**解**] 以$08:00$为0时刻, $09:00$为1时刻, $\cdots$.

设$N(t)$为0时刻到$t$时刻观测到的流星数, 则$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为3的Poisson过程.

因$N(4)-N(0)\sim P(3\times 4)=P(12)$, 则$P\{N(4)-N(0)=0\}=\mathrm{e}^{-12}$.

---

## 3.2.2 事件发生的条件分布函数

[**定理3.2.3**] 设Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$中$(0,t]$时间内事件$A$发生1次, 则$A$发生的时刻服从$[0,t]$上的均匀分布.

[**证**] $P\{T_1\leq s\mid N(t)=1\}=\dfrac{P\{T_1\leq s,N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}}$

$=\dfrac{P\{N(s)=1,N(t)-N(s)=0\}}{P\{N(t)=1\}}$ *独立增量性

$=\dfrac{P\{N(s)=1\}\cdot P\{N(t)-N(s)=0\}}{P\{N(t)=1\}}=\dfrac{\lambda s\mathrm{e}^{-\lambda s}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\dfrac{s}{t}=\dfrac{s-0}{t}$.

[**注**] Poisson过程有平稳增量, 则$A$在$[0,t]$时间区间上任一等长的子区间内发生的概率相等.

[**定理3.2.4**] 设Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$中$(0,t]$时间内事件$A$发生$n$次, 即$N(t)=n$, 则事件发生的时刻$T_1,\cdots,T_n$的联合分布密度$f(t_1,\cdots,t_n)=\dfrac{n!}{t^n}\ \ (0<t_1<\cdots<t_n)$.

[**证**] 设$0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}=t$.

对每个$t_i\ \ (i=1,\cdots,n)$, 取充分小的$h_i\ s.t.\ t_i+h_i<t_{i+1}$.

$P\{t_i<T_i\leq t_i+h_i;i=1,\cdots,n\mid N(t)=n\}$

$$=\frac{P\{N(t_i+h_i)-N(t_i)=1,N(t_{i+1})-N(t_i+h_i)=0,N(t_1)=0;1\leq i=1,\cdots,n\}}{P\{N(t)=n\}}$$

$$=\frac{\left(\prod_{i=1}^n\mathrm{e}^{-\lambda h_i}\dfrac{(\lambda h_i)^1}{1!}\right)\left(\prod_{i=1}^n\mathrm{e}^{-\lambda(t_{i+1}-t_i-h_i)}\dfrac{[\lambda(t_{i+1}-t_i-h_i)]^0}{0!}\right)\left(\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\dfrac{(\lambda t_1)^0}{0!}\right)}{\mathrm{e}^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

*每段区间都不交, 由独立增量性

$$=\frac{(\lambda h_1\mathrm{e}^{-\lambda h_1})\cdots(\lambda h_n\mathrm{e}^{-\lambda h_n})\cdot\mathrm{e}^{-\lambda(t-h_1-\cdots-h_n)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}=\frac{n!}{t^n}\cdot(h_1\cdots h_n).$$

在$N(t)=n$的前提下, 联合随机变量$(T_1,\cdots,T_n)$的条件密度函数等于$(T_1,\cdots,T_n)$落在$n$维柱集$(t_1,t_1+h_1]\times\cdots\times(t_n,t_n+h_n]$中的概率除以该区域的体积,

即$f(t_1,\cdots,t_n\mid N(t)=n)=\lim\limits_{\substack{h_i\to 0\\ i=1,\cdots,n}}\dfrac{P\{t_i<T_i\leq t_i+h_i;i=1,\cdots,n\mid N(t)=n\}}{h_1\cdots h_n}$

$=\dfrac{n!}{t^n}\ \ (0<t_1<\cdots<t_n)$.

注意到$\dfrac{n!}{t^n}=\underbrace{\dfrac{1}{t}\times\cdots\times\dfrac{1}{t}}_{n个}\times n!$是区间$[0,t]$上$n$个服从均匀分布且相互独立的随机变量$Y_1,\cdots,Y_n$的顺序统计量$Y_{(1)},\cdots,Y_{(n)}$的联合分布, 故已知$(0,t]$时间区间上$A$发生$n$次的前提下, 每次发生的时刻$T_1,\cdots,T_n$(不排序)可视为区间$[0,t]$上服从均匀分布且相互独立的随机变量.

**[例3.2.3]** 乘客按强度为$\lambda$的Poisson过程到达火车站, 火车在$t$时刻出发. 求在$(0,t]$时间内到达的乘客的等待时间之和的期望, 即$E\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\right]$, 其中$T_i$是第$i$个乘客到达的时刻.

**[解]** 考察在$N(t)=n$条件下的条件期望.

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\right]=E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\middle|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}(t-T_i)\middle|N(t)=n\right]$$

$$=nt-E\left[\sum_{i=1}^{n}T_i\middle|N(t)=n\right].$$

设$U_1,\cdots,U_n$是$n$个相互独立的服从$(0,t]$上的均匀分布的随机变量.

因$T_1,\cdots,T_n$与其顺序统计量$\widehat{U_1},\cdots,\widehat{U_n}$的联合分布函数相同, 则$E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}T_i\right)=E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\widehat{U_i}\right)$.

又因顺序统计量之和的期望与任意顺序之和的期望相等,

则$E\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}T_i\middle|N(t)=n\right]=E\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\widehat{U_i}\right]=E\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}U_i\right]$

$$=E\left(\sum_{i=1}^{n}U_i\right)=n\cdot E(U_1)=n\cdot\frac{t}{2}=\frac{nt}{2},$$

进而$E\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\right]=nt-E\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}T_i\middle|N(t)=n\right]=\dfrac{nt}{2}$.

故$E\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\right]=E\left\{E\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\middle|N(t)\right]\right\}=\dfrac{t}{2}\cdot E[N(t)]=\dfrac{\lambda t^2}{2}$.

**[例3.2.4]** 设事件$A$的发生形成强度为$\lambda$的Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$. 设事件在$s$时刻发生有$P(s)$的概率被记录, $M(t)$表示0时刻到$t$时刻被记录的事件数, 求$M(t)$的分布.

**[解]** 下面的过程是不严谨的.

显然$M(t)$有独立增量性.

受$P(s)$影响, $M(t)$无平稳增量性, 则$M(t)$不是Poisson过程. 事实上, 它是非齐次Poisson过程.

因不同时刻事件发生被记录的概率不同, 则事件发生且被记录不是Bernoulli试验.

取概率的平均值$p=P\{事件在[0,t]时间内发生且被记录\}$,

$$=\int_0^t P\{事件在s时刻发生且被记录\}\mathrm{d}s=\frac{1}{t}\int_0^t P(s)\mathrm{d}s$$

假设每次事件发生被记录的概率都为$p$, 转化为Bernoulli试验.

考察$N(t)$给定的条件下的条件期望.

$$
\begin{aligned}
P\{M(t)=m\}&=\sum_{k=0}^{+\infty}P\{M(t)=m\mid N(t)=m+k\}\cdot P\{N(t)=m+k\}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty}C_{m+k}^m p^m(1-p)^k\cdot\frac{(\lambda t)^{m+k}}{(m+k)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{(\lambda tp)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k!}(\lambda t)^k\\
&=\frac{(\lambda tp)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda pt}\ \ (m=0,1,2,\cdots).
\end{aligned}
$$

故$M(t)\sim P(\lambda pt)=P\left(\int_0^t\lambda\cdot P(s)\mathrm{d}s\right)$, 其中$\lambda P(s)$是非齐次Poisson过程中的累积强度函数$\lambda(s)$.

---

---

## 3.3 Poisson过程的推广

### 3.3.1 非齐次Poisson过程

[**定义3.3.1**] [**非齐次Poisson过程的第二定义**] 计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$称为**强度函数**为$\lambda(t)\ \ (\lambda(t)>0,t\geq 0)$的**非齐次Poisson过程**, 如果满足下列四个条件:

①$N(0)=0.$

②$\{N(t),t\geq 0\}$有独立增量.

③$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h).$

④$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h).$

[**注**] $P\{P(t+h)-N(t)=0\}=1-\lambda(t)h-2\cdot o(h)=1-\lambda(t)h+o(h).$

[**定义3.3.2**] [**非齐次Poisson过程的第一定义**] 计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$称为**强度函数**为$\lambda(t)\ \ (\lambda(t)>0,t\geq 0)$的**非齐次Poisson过程**, 如果满足下列三个条件:

①$N(0)=0.$

②$\{N(t),t\geq 0\}$有独立增量.

③设**均值函数**(或称**累积强度函数**)$m(t)=\displaystyle\int_0^t\lambda(s)\mathrm{d}s$. 对$\forall$实数$t\geq 0,s>0$, 增量$[N(t+s)-N(t)]$服从参数为$m(t+s)-m(t)=\displaystyle\int_t^{t+s}\lambda(u)\mathrm{d}u$的Poisson分布.

[**注**] 齐次Poisson过程和非齐次Poisson过程的增量服从的Poisson分布的参数为曲线$\lambda(t)$与$t$轴所围的、在区间$[t,t+s]$中的面积.

**[例3.3.1]** 设某设备的使用期限为$10\ \mathrm{y}$, 在前$5\ \mathrm{y}$内它平均每$2.5\ \mathrm{y}$维修一次, 后$5\ \mathrm{y}$内平均$2\ \mathrm{y}$维修一次. 求它使用期限内只维修过一次的概率.

**[解]** 上述过程可用强度函数$\lambda(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2.5},0\leq t<5 \\ \dfrac{1}{2},5<t\leq 10\end{cases}$的非齐次Poisson过程描述.

累积强度函数$m(10)=\displaystyle\int_0^{10}\lambda(t)\mathrm{d}t=\int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{2.5}+\int_5^{10}\frac{\mathrm{d}t}{2}=4.5$.

故$P\{N(10)-N(0)=1\}=\mathrm{e}^{-4.5}\dfrac{(4.5)^1}{1!}=\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}$.

---

### 3.3.2 复合Poisson过程

**[定义3.3.3]** 称随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$为**复合Poisson过程**, 如果对$\forall t\geq 0$, 有$X(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$, 其中$\{N(t),t\geq 0\}$是Poisson过程, $\{Y_i\mid i=1,2,\cdots\}$是一族独立同分布的随机变量, 且与$\{N(t),t\geq 0\}$独立.

**[注]** 复合Poisson过程未必是计数过程, 但当$Y_i=c\in\mathrm{Const}.$时可转化为Poisson过程.

**[例3.3.2]** 随机个独立同分布的随机变量之和是复合Poisson过程.

**[例3.3.3]** 保险公司接到的索赔次数服从Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$, 每次要求赔付的金额$Y_i$独立同分布. 设每次的索赔数额与时刻无关, 则$[0,t]$时间内保险公司需赔付的总金额$\{X(t),t\geq 0\}$是复合Poisson过程, 其中$X(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$.

**[例3.3.4]** **[顾客成批到达的排队系统]** 设顾客到达某服务系统的时刻$S_1,S_2,\cdots$形成强度为$\lambda$的Poisson过程, 在每个时刻$S_n\ \ (n=1,2,\cdots)$可同时有多名顾客到达. $Y_n$表示$S_n$时刻到达的顾客数, 假设$Y_n\ \ (n=1,2,\cdots)$相互独立, 且与$\{S_n\}$独立, 则$[0,t]$时间内到达服务系统的顾客总数可用复合Poisson过程描述.

**[例3.3.5]** 设顾客进入商店的过程可用参数为$\lambda$的Poisson过程描述, 且各顾客花费的金额构成一族独立同分布的随机变量. 设$X(t)$为$[0,t]$时间内顾客花费的总金额, 则$\{X(t),t\geq 0\}$是复合Poisson过程.

**[定理3.3.1]** 设复合Poisson过程$\left\{X(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i,t\geq 0\right\}$, 其中$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为$\lambda$的Poisson过程, $Y_i\ \ (i=1,\cdots,N(t))$ 独立同分布, 且与 $N(t)$ 独立. 则:

(1)$X(t)$有独立增量.

(2)$X(t)$有平稳增量.

(3)若$E(Y_i^2)<+\infty$, 则$E[X(t)]=\lambda t\cdot E(Y_1),Var[X(t)]=\lambda t\cdot E(Y_1^2)$.

**[证]**

(1)取$0\leq t_0<t_1<\cdots<t_n$, 则$X(t_k)-X(t_{k-1})=\displaystyle\sum_{i=N(t_{k-1})+1}^{N(t_k)}Y_i\ \ (k=1,\cdots,n)$.

由Poisson过程的独立增量性和$Y_1,Y_2,\cdots$相互独立即证.

(2)即证$X(t+s)-X(s)\overset{d}{=\!=}X(t)-X(0)$. 因分布函数不易求得, 考虑求矩母函数.

①因$X(t+s)-X(s)=\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t+s)}Y_i-\sum_{i=1}^{N(s)}Y_i=Y_{N(s)+1}+\cdots+Y_{N(t+s)}$,

则$\phi_{X(t+s)-X(s)}(u)=E\left(\mathrm{e}^{u(Y_{N(s)+1}+\cdots+Y_{N(t+s)})}\right)$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}E\left[\mathrm{e}^{u(Y_{N(s)+1}+\cdots+Y_{N(t+s)})}\mid N(t+s)-N(s)=n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}E\left(\mathrm{e}^{u(Y_1+\cdots+Y_n)}\right)\cdot P\{N(t+s)-N(s)=n\}$$

*因$Y_1,Y_2,\cdots$独立同分布, 故可将$Y_{N(s)+1},\cdots,Y_{N(t+s)}$平移至$Y_1,\cdots,Y_n$.

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}[\phi_{Y_1}(u)]^n\cdot P\{N(t+s)-N(s)=n\}.$$

②因$X(t)-X(0)=Y_1+\cdots+Y_{N(t)}$, 则$\phi_{X(t)-X(0)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[\phi_{Y_1}(u)]^n\cdot P\{N(t)-N(0)=n\}$.

由Poisson过程的平稳增量性即证.

(3)$\phi_{X(t)}(u)=E\left(\mathrm{e}^{uX(t)}\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}E\left[\mathrm{e}^{uX(t)}\mid N(t)=n\right]\cdot P\{N(t)=n\}$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}E\left[\mathrm{e}^{u(Y_1+\cdots+Y_n)}\mid N(t)=n\right]\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\sum_{n=0}^{+\infty}E\left(\mathrm{e}^{u(Y_1+\cdots+Y_n)}\right)\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}E\left(\mathrm{e}^{uY_1}\right)\times\cdots\times E\left(\mathrm{e}^{uY_n}\right)\times\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$ * 随机变量之和的矩母函数等于各自的矩母函数之积.

$=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\left[E\left(\mathrm{e}^{uY_1}\right)\right]^n\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right\}\mathrm{e}^{-\lambda t}$ * $Y_1,Y_2,\cdots$独立同分布.

$=\mathrm{e}^{\lambda t\cdot\left[E\left(\mathrm{e}^{uY_1}\right)-1\right]}$.

$\phi'_{X(t)}(u)=\mathrm{e}^{\lambda t\left[E\left(\mathrm{e}^{uY_1}\right)-1\right]}\cdot\lambda t\cdot E\left(\mathrm{e}^{uY_1}\right)\cdot Y_1$, 则$E[X(t)]=\lambda t\cdot E(Y_1)$.

同理$Var[X(t)]=\lambda t\cdot E(Y_1^2)$.

[**例3.3.6**] 设索赔要求以平均每月两次的速率的Poisson过程到达保险公司, 保险公司每次赔付服从均值为$1\mathrm{e}4$元的正态分布. 求一年中保险公司的平均赔付额.

[**解**] 设保险公司赔付的总金额$\{X(t),t\geq0\}$是复合Poisson过程,

其中$X(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$, 每个人的赔付额$Y_1,Y_2,\cdots\sim N(1\mathrm{e}4,\sigma^2)$, $\lambda=2$.

由**定理3.3.1**: $E[X(12)]=\lambda t\cdot E(Y_1)=2\times12\times1\mathrm{e}4=2.4\mathrm{e}5$ 元.

**[例3.3.7]** 设顾客以$6人/\mathrm{min}$的平均速率进入商场, 该过程可用Poisson过程描述. 设进入商场的每位顾客有$0.9$的概率购物, 且各顾客是否购物相互独立, 且与商场中的顾客数无关. 求:

(1)$12\ \mathrm{h}$内购物的顾客数的均值.

(2)设进入商场的第$i$个顾客消费$Z_i$元, 且$Z_i \sim b(200, 0.5)$. 求$12\ \mathrm{h}$内商场的营业额的均值.

**[解]** 设$(0, t]$时间内有$N_1(t)$个顾客进入商场, 则$\{N_1(t), t \geq 0\}$是速率$\lambda = 6\ (人/\mathrm{min})$的Poisson过程.

设随机变量$Y_i = \begin{cases} 1, 第i个顾客购物 \\ 0, 第i个顾客未购物 \end{cases}$, 则$Y_i \sim B(1, 0.9)$, 且与$\{N_1(t), t \geq 0\}$独立.

(1)设$(0, t]$时间内有$N_2(t)$个顾客购物, 则$N_2(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$.

由**定理3.3.1**: $E[X(12)] = \lambda t \cdot E(Y_1) = 6 \times (12 \times 60) \times (1 \times 0.9) = 3888$.

(2)设$(0, t]$时间内的营业额为$N_3(t)$, 则$N_3(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N_1(t)} Z_i$.

$E[N_3(t)] = E[N_1(t)] \cdot E(Z_1) = (6 \times 12 \times 60) \times (200 \times 0.5) = 432000$ 元.

---

## 3.3.3 条件Poisson过程

**[定义3.3.4]** 设随机变量$\Lambda > 0$在$\Lambda = \lambda$的条件下, 计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为$\lambda$的Poisson过程, 则称$\{N(t), t \geq 0\}$为条件Poisson过程.

**[注]** 设$\Lambda$的分布为$G$. 由**广义全概率公式**: 随机选择一个个体在长度为$t$的时间区间内发生$n$次的概率$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{d}G(\lambda)$, 其中$\mathrm{d}G(\lambda)$对离散型随机变量为$P\{\Lambda = \lambda\}$, 对连续型随机变量为$f_\Lambda(\lambda)\mathrm{d}\lambda$.

**[定理3.3.2]** 条件Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$不是Poisson过程, 它有平稳增量, 无独立增量.

**[注]** 对条件Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$, $P\{N(t) = n, P(t+s) - N(t) = 0\}$不能拆开为$P\{N(t) = n\} \cdot P\{N(t+s) - N(t) = 0\}$, 因为条件Poisson过程无独立增量. 但在$\Lambda = \lambda$的条件下, 条件Poisson过程转化为Poisson过程, 此时有**条件独立性**, 即$P\{N(t) = n, P(t+s) - N(t) = 0 \mid \Lambda = \lambda\}$
$= P\{N(t) = n \mid \Lambda = \lambda\} \cdot P\{N(t+s) - N(t) = 0 \mid \Lambda = \lambda\}$.

[**定理3.3.3**] 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是条件Poisson过程, 随机变量 $\Lambda > 0$ , 且 $E(\Lambda^2) < +\infty$ , 则:

(1)$E[N(t)] = t \cdot E(\Lambda)$.

(2)$Var[N(t)] = t^2 \cdot Var(\Lambda) + t \cdot E(\Lambda)$.

[**证1**]

(1)$E[N(t)] = E\{E[N(t) \mid \Lambda]\}$ $* \{N(t) \mid \Lambda; t \geq 0\}$ 是Poisson过程.

$= E(\Lambda t) = t \cdot E(\Lambda)$ .

(2)$Var[N(t)] = E[N^2(t)] - \{E[N(t)]\}^2 = E\{E[N^2(t) \mid \Lambda]\} - [t \cdot E(\Lambda)]^2$.

在$\Lambda = \lambda$的条件下, $E\{[N(t)]^2 \mid \Lambda = \lambda\} = \{E[N(t) \mid \Lambda = \lambda\}^2 + Var[N(t) \mid \Lambda = \lambda]$.

因$\{N(t) \mid \Lambda = \lambda\}$是Poisson过程, 则$E[N^2(t) \mid \Lambda = \lambda] = (\lambda t)^2 + \lambda t$,

故$E[N^2(t) \mid \Lambda] = (\Lambda t)^2 + \Lambda t$,

则$Var[N(t)] = E[(\Lambda t)^2 + \Lambda t] - t^2 \cdot [E(\Lambda)]^2 = E[(\Lambda t)^2] + E(\Lambda t) - t^2 \cdot [E(\Lambda)]^2$

$= Var(\Lambda t) + [E(\Lambda t)]^2 + t \cdot E(\Lambda) - t^2 \cdot [E(\Lambda)]^2$

$= t^2 \cdot Var(\Lambda) + t \cdot E(\Lambda)$ .

[**证2**]

(1)$E\{E[N(t) \mid \Lambda]\} = \sum\limits_\lambda E[N(t) \mid \Lambda = \lambda] \cdot P\{\Lambda = \lambda\} = \sum\limits_\lambda (\lambda t) \cdot P\{\Lambda = \lambda\}$

$= t \sum\limits_\lambda \lambda \cdot P\{\Lambda = \lambda\} = t \cdot E(\Lambda)$.

(2)$E\{E[N^2(t) \mid \Lambda]\} = \sum\limits_i E[N^2(t) \mid \Lambda = \lambda_i] \cdot P\{\Lambda = \lambda_i\} = \sum\limits_i [(\lambda_i t)^2 + \lambda_i t] \cdot P\{\Lambda = \lambda_i\}$

$= t^2 \sum\limits_i \lambda_i^2 \cdot P\{\Lambda = \lambda_i\} + t \sum\limits_i \lambda_i \cdot P\{\Lambda = \lambda_i\} = t^2 \cdot E(\Lambda^2) + t \cdot E(\Lambda)$.

[**例3.3.8**] 设事故发生频率有两种可能$\lambda_1,\lambda_2$, 且$P\{\Lambda=\lambda_1\}=p,P\{\Lambda=\lambda_2\}=1-p=q\ \ (0<p<1)$. 已知到$t$时刻为止已发生$n$次事故. 求:

(1)下一次事故在$(t+s)$时刻前不到来的概率.

(2)上述发生的频率为$\lambda_1$的概率.

[**解**]

(1)$P\{N(t+s)-N(t)=0\mid N(t)=n\}=\dfrac{P\{N(t)=n,N(t+s)-N(t)=0\}}{P\{N(t)=n\}}$,

其分母$P\{N(t)=n\}=p\cdot\dfrac{(\lambda_1t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda_1t}+(1-p)\cdot\dfrac{(\lambda_2t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda_2t}$,

分子$P\{N(t)=n,N(t+s)-N(t)=0\}$

$$=\sum_{i=1}^2P\{N(t)=n,N(t+s)-N(t)=0\mid\Lambda=\lambda_i\}\cdot P\{\Lambda=\lambda_i\}$$

$$=p\cdot P\{N(t)=n,N(t+s)-N(t)=0\mid\Lambda=\lambda_1\}$$

$$+(1-p)\cdot P\{N(t)=n,N(t+s)-N(t)=0\mid\Lambda=\lambda_2\}$$

$$=p\cdot\frac{(\lambda_1t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda_1t}\cdot\frac{(\lambda_1s)^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda_1s}+(1-p)\cdot\frac{(\lambda_2t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda_2t}\cdot\frac{(\lambda_2s)^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda_2s}.$$

故$P\{N(t+s)-N(t)=0\mid N(t)=n\}=\dfrac{p\cdot(\lambda_1t)^n\mathrm{e}^{-\lambda_1(t+s)}+(1-p)\cdot(\lambda_2t)^n\mathrm{e}^{-\lambda_2(t+s)}}{p\cdot(\lambda_1t)^n\mathrm{e}^{-\lambda_1t}+(1-p)\cdot(\lambda_2t)^n\mathrm{e}^{-\lambda_2t}}$

$$=\frac{p\cdot\lambda_1^n\mathrm{e}^{-\lambda_1(t+s)}+q\cdot\lambda_2^n\mathrm{e}^{-\lambda_2(t+s)}}{p\cdot\lambda_1^n\mathrm{e}^{-\lambda_1t}+q\cdot\lambda_2^n\mathrm{e}^{-\lambda_2t}}.$$

(2)由Bayes公式: $P\{\Lambda=\lambda_1\mid N(t)=n\}$

$$=\frac{P\{N(t)=n\mid\Lambda=\lambda_1\}\cdot P\{\Lambda=\lambda_1\}}{P\{N(t)=n\mid\Lambda=\lambda_1\}\cdot P\{\Lambda=\lambda_1\}+P\{N(t)=n\mid\Lambda=\lambda_2\}\cdot P\{\Lambda=\lambda_2\}}$$

$$=\frac{p\cdot\dfrac{(\lambda_1t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda_1t}}{p\cdot\dfrac{(\lambda_1t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda_1t}+q\cdot\dfrac{(\lambda_2t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda_2t}}=\frac{p\cdot\lambda_1^n\mathrm{e}^{-\lambda_1t}}{p\cdot\lambda_1^n\mathrm{e}^{-\lambda_1t}+q\cdot\lambda_2^n\mathrm{e}^{-\lambda_2t}}.$$