随机过程期末速通

2. 随机过程

2.1 基本概念

[**定义2.1.1**] **随机过程**是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一族随机变量$\{X(t),t\in T\}$, 其中T称为**指标集**或**参数集**, $X:T\times\Omega\to\mathbb{R}$是关于变量$t\in T$和$\omega\in\Omega$的二元函数, 且其分布函数可测.

[**注1**] 对二元函数$X(t,\omega)$,

①固定$t=t_0$, 则$X(t,\omega)$变为随机变量$X(t_0,\omega)$.

②固定$\omega=\omega_0$, 则$X(t,\omega)$变为无随机性的关于t的函数$X(t,\omega_0)$, 称为一个**样本轨道**或一个**样本函数**或一个**实现**.

[**注2**] 按时间和状态的连续性, 将随机过程分为四类: ①离散时间、离散状态的随机过程; ②离散时间、连续状态的随机过程; ③连续时间、离散状态的随机过程; ④连续时间、连续状态的随机过程.

(1)离散时间的随机过程表示为$\{(n,\omega),X(n,\omega),n\in\mathbb{N}\}$, 称为**时间序列**.

(2)连续时间的随机过程表示为$\{(t,\omega),X(t,\omega),t\in T\}$.

[**例2.1.1**]

(1)[**随机游走**] 某人在路上行走, 以p的概率前进一步, 以$(1-p)$的概率后退一步(步长相同). 设$X(t)$为t时刻他在路上的位置, 则$\{X(t)\}$是直线上的随机游走.

(2)[**Brown运动**] Brown运动$\{\omega:(X(t,\omega),Y(t,\omega),Z(t,\omega))\}$是三维的、连续时间、连续状态的随机过程, 其轨道处处连续但处处不可导.

(3)[**排队模型**] 顾客来到服务站要求服务. 若服务站中的服务员都忙碌, 即服务员都在为其他顾客服务时, 来到的顾客需排队等候. 顾客的到来、每个顾客所需的服务时间都是随机的. 设$X(t)$表示t时刻的队长, $Y(t)$表示t时刻到来的顾客所需的等待时间(实际工作负荷), 则$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$都是连续时间、离散状态的随机过程.

2.2 有限维分布与Kolmogorov定理

[**定义2.2.1**] 对随机过程$\{X(t),t\in T\}$和任意有限个$t_1,\cdots,t_n\in T$, 定义随机过程的n**维分布** $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$. 随机过程的所有一维分布、二维分布、$\cdots$、$n$维分布的全体$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n);t_1,\cdots,t_n\in T;n\ge 1\}$称为该随机过程的**有限维分布族**.

[**定理2.2.1**] 设随机过程$\{X(t),t\in T\}$的有限维分布族为$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n);t_1,\cdots,t_n\in T;n\ge 1\}$, 则:

(1)[**对称性**] 对$1,\cdots,n$的任一排列$j_1,\cdots,j_n$,有:

$$F_{t_{j_1},\cdots,t_{j_n}}(x_{j_1},\cdots,x_{j_n})=P\{X(t_{j_1})\le x_{j_1},\cdots,X(t_{j_n})\le x_{j_n}\}$$

$$=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n\}=F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n).$$

即花括号中的事件地位相同, 可换序.

(2)[**相容性**] 对正整数$m<n$, 有$F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty)=F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,\cdots,x_m)$.

[**注1**] 相容性可降低随机过程的维度, 相当于对事件A和样本空间Ω, 有$A=A\Omega$.

[**注2**] 本定理是判定随机过程的必要条件.

[**定理2.2.2**] [**Kolmogorov定理**] 若有限维分布族为$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n);t_1,\cdots,t_n\in T;n\geq 1\}$满足对称性和相容性, 则∃随机过程$\{X(t),t\in T\}\ s.t.\ \{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n);t_1,\cdots,t_n\in T;n\geq 1\}$是该随机过程的有限维分布族.

[**注**] 本定理是判定随机过程的充分条件.

[**定理2.2.3**] $\{X(t),t\in T\}$是随机过程的充要条件是: 其有限维分布族为$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n);t_1,\cdots,t_n\in T;n\geq 1\}$满足对称性和相容性.

[**定义2.2.2**] 用如下的数字特征描述随机过程$\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$.

(1)称$X(t,\omega)$的期望$\mu_X(t)=E[X(t,\omega)]$为该随机过程的**均值函数**, 它是对ω积分、保留t的结果, 是关于t的函数.

(2)若对$\forall t\in T$,$E\left\{[X(t,\omega)]^2\right\}$都存在, 则称$\{X(t,\omega),t\in T\}$为**二阶矩过程**, 此时有如下数字特征:

①称函数$Cov[X(t_1,\omega),X(t_2,\omega)]=\gamma(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)]\cdot[X(t_2)-\mu_X(t_2)]\}\ \ (t_1,t_2\in T)$为该随机过程的**协方差函数**. 展开知:$Cov[X(t_1,\omega),X(t_2,\omega)]=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]-E[X(t_1)]\cdot E[X(t_2)]$.

②称函数$Var[X(t,\omega)]=Cov[X(t,\omega),X(t,\omega)]=\gamma(t,t)$为该随机过程的**方差函数**.

③称函数$R_X(s,t)=E[X(s)\cdot X(t)]\ \ (s,t\in T)$为**自相关函数**.

[**例2.2.1**] 设随机过程$X(t)=X_0+tV\ \ (a\leq t\leq b)$, 其中$X_0$和$V$是相互独立且服从$N(0,1)$分布的随机变量.

因$X_0,V\sim N(0,1)$, 则$E(X_0)=E(V)=0,Var(X_0)=Var(V)=1$,

且$X(t)\sim N(0,1)$, $(X_1(t_1),\cdots,X_n(t_n))$服从$n$维正态分布, 其中$X_1(t_1),\cdots,X_n(t_n)$不要求独立,

进而$E[X(t)]=E(X_0)+t\cdot E(V)=0$.

因X_0与V相互独立, 则$E(X_0\cdot V)=E(X_0)\cdot E(V)=0$.

考察$X(t)$的均值函数和协方差函数.

①$E[X(t)]=E(X_0+tV)=E(X_0)+t\cdot E(V)=0$.

②$Cov[X(t_1),X(t_2)]=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]-E[X(t_1)]-E[X(t_2)]$

$=[E(X_0^2)+t_1\cdot E(X_0\cdot V)+t_2\cdot E(X_0\cdot V)+t_1t_2\cdot E(V^2)]-0-0$

$=1+0+0+t_1t_2\cdot 1=t_1t_2+1$.

2.3 随机过程的基本类型

2.3.1 平稳过程

平稳过程分为严平稳过程和宽平稳过程, 前者用分布定义, 后者用数字特征定义.

[定义2.3.1] 若随机过程$\{X(t), t\in T\}$对$\forall t_1,\cdots,t_n\in T$和$\forall h\ s.t.\ t_i+h\in T\ \ (i=1,\cdots,n)$, 都有$[X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h)]$与$[X(t_1),\cdots,X(t_n)]$有相同的联合分布, 记作$[X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h)]\overset{d}{=\!=}[X(t_1),\cdots,X(t_n)]$, 则称该随机过程是**严平稳过程**.

[注1] 两个随机变量在分布意义下相等即观察到相同值的概率相等, 如二维的情况, 有$P\{\omega:X(t_1,\omega)\le x_1, X(t_2,\omega)\le x_2\}=P\{\omega:X(t_1+h,\omega)\le x_1, X(t_2+h,\omega)\le x_2\}$, 即$F_{X(t_1,t_2)}(x_1,x_2)=F_{X(t_1+h,t_2+h)}(x_1,x_2)$.

[注2] 严平稳过程与宽平稳过程的关系:

① 前者用分布定义, 后者用数字特征定义.

② 严平稳过程的条件远强于宽平稳过程, 但严平稳不能推出宽平稳, 因为分布的数字特征未必存在, 如Cauchy分布不存在期望. 但分布的数字特征存在时, 严平稳过程因为分布相同, 则均值函数、方差函数、协方差函数等也相同.

③ 二阶矩存在时, 严平稳可推出宽平稳.

[定义2.3.2] 若随机过程$X(t)$的所有二阶矩都存在, 且$E[X(t)]=\mu$, 其中μ是常数, 且$\gamma(t,s)$只与时间差$(t-s)$有关, 则称$\{X(t),t\in T\}$为**宽平稳过程**.

[注] $\gamma(t,s)$只与时间差$(t-s)$有关即协方差结构有时间平移不变性, 如二维时, 有$Cov[X(t_1,\omega),X(t_2,\omega)]=Cov[X(t_1+h,\omega),X(t_2+h,\omega)]$.

[定理2.3.1] 设宽平稳过程$\{X(t),t\in T\}$的协方差函数为$\gamma(s,t)$, 则:

(1)因$\gamma(s,t)=\gamma(0,t-s)$, 则记作$\gamma(t-s)$.

(2)对$\forall t\in\mathbb{R}$, 有$\gamma(-t)=\gamma(t)$.

(3)$\gamma(0)=Var[X(t)]$.

2.3.2 独立增量过程

[定义2.3.3] 若随机过程$X(t)$对$\forall t_1,\cdots,t_n\in T$且$t_1<\cdots<t_n$, 增量$X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立, 则称$\{X(t),t\in T\}$为**独立增量过程**.

[注] 增量的随机变量相互独立要求计算增量的区间不重叠, 但区间长度不要求相等. 对$t_1<t_2$, 一般取区间$(t_1,t_2]$.

[定义2.3.4] 若随机过程$X(t)$对$\forall t_1,t_2$, 都有$X(t_1+h)-X(t_1)\overset{d}{=\!=}X(t_2+h)-X(t_2)$, 则称$\{X(t),t\in T\}$为**平稳增量过程**.

[注1] 本定理中的平稳是严平稳, 可不要求计算增量的区间是平移的, 只需保证区间长度相等.

[注2] $X(t)$有平稳增量$\Leftrightarrow X(t+s)-X(s)\overset{d}{=\!=}X(t)-X(0)\Leftrightarrow \psi_{X(t+s)-X(s)}(a)=\psi_{X(t)}(a)$.

[定理2.3.2] 设$\{X(t),t\ge 0\}$是独立增量过程, 且$X(0)=0$, 则它有平稳增量的充要条件是: 其特征函数有可乘性, 即$\psi_{X(s+t)}(a)=\psi_{X(t)}(a)\cdot\psi_{X(s)}(a)$.

[证] $\psi_{X(t+s)}(a)=E\left(\mathrm{e}^{iaX(t+s)}\right)=E\left(\mathrm{e}^{ia[X(t+s)-X(s)+X(s)-X(0)]}\right)$

$$=E\left(\mathrm{e}^{ia[X(t+s)-X(s)]}\right)\cdot E\left(\mathrm{e}^{ia[X(s)-X(0)]}\right)=\psi_{X(t+s)-X(s)}(a)\cdot\psi_{X(s)}(a).$$
