第2章　插值法

2.1 插值问题和多项式插值
2.2 Lagrange多项式插值
2.3 均差与Newton多项式插值
2.4 Hermite多项式插值
2.5 分段低次插值

2.1 引言

插值问题及定义

插值多项式的存在唯一性

引例1

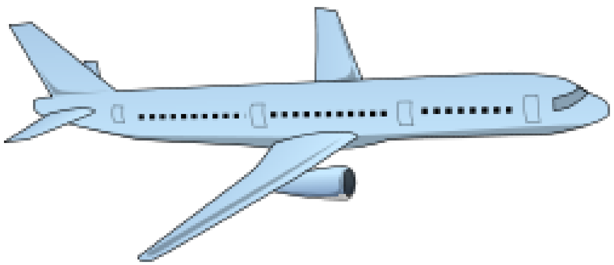
标准正态分布函数 $\Phi(x)$

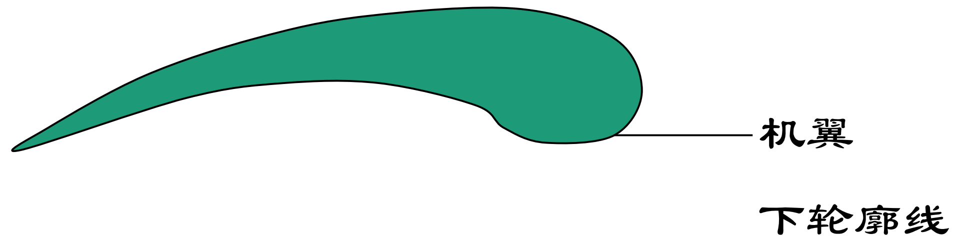
x	0	1	2	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	…
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

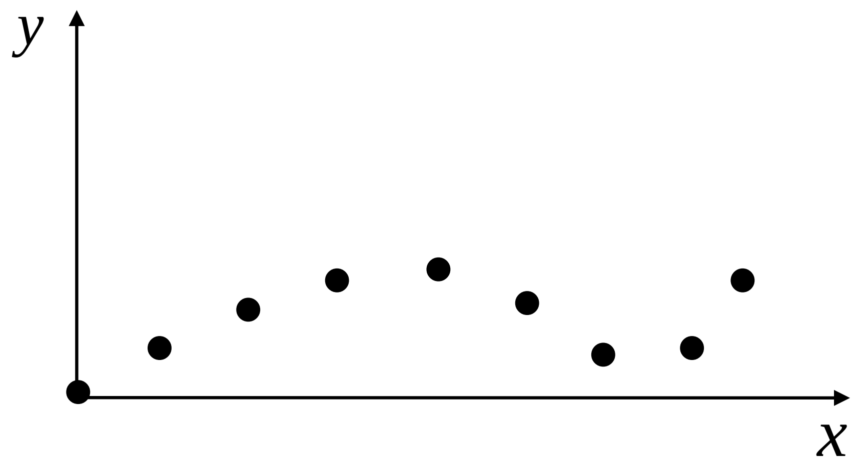
求$\Phi(1.014)$

1.014的值不在表里，怎么办？

引例2　求机翼下轮廓线上一点的近似值





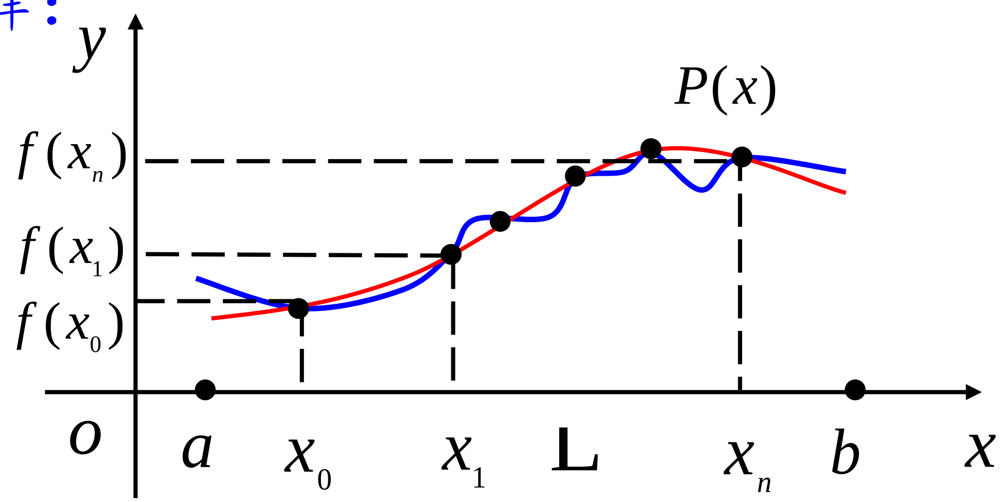


插值： 已知函数$y=f(x)$在[a, b]内的n+1个点的值$y_i=f(x_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$，构造一个简单函数$y=P(x)$，满足：

$$P(x_i)=y_i\ (i=0,1,\cdots,n)$$

目的： 在[a, b]上用简单函数$P(x)$近似$f(x)$.

几何解释：



应用： 函数值近似计算（本章）、积分、微分近似计算（数值积分与微分）。

定义2.1 插值的定义

设函数$y = f(x)$在[a, b]上连续，给定[a, b]上的n+1个互异节点 $a \le x_0 < x_1 < x_2 < x_n \le b$的函数值$y_0, y_1 \cdots, y_n$，若存在简单函数$P(x)$，满足**插值条件**:

$$P(x_i) = y_i \ (\ i = 0,1,2,\cdots,n)$$

称$P(x)$为$f(x)$在[a, b]上的**插值函数**, 称[a, b]为**插值区间**, $x_0, x_1 \cdots, x_n$称为**插值节点**，求插值函数的方法称为**插值方法**，在[a, b]上, 用简单函数$P(x)$近似函数$f(x)$所产生的误差函数称为**插值余项**，记作$R(x) = f(x) - P(x)$.

若插值函数$P(x)$为次数不超过n的代数多项式，即

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

其中系数a_i为实数，则称$P(x)$为**插值多项式**，相应的插值法称为**多项式插值**；若$P(x)$为分段多项式，就称为**分段多项式插值**；若$P(x)$为三角多项式，就称为**三角插值**。

常用的插值函数有**多项式**、**有理分式**、**三角函数和指数函数**等；由于**多项式和分段多项式**计算简单，所以在工程计算中使用最多。

插值多项式存在？唯一？

H_n表示所有次数不超过n的代数多项式集合，则插值多项式的存在唯一性问题是：是否H_n中有且只有一个次数不超过n的代数多项式$P(x)$满足插值条件：

$$P(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,2,\cdots,n)，即$$

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_2^n=y_2 \\ \cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases} \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)\neq 0$$

方程组有唯一解

定理2.1(插值多项式的存在唯一性)：已知函数 $y = f(x)$ 在 [a, b] 中 **n+1** 个互异节点 $a \le x_0 < x_1 < x_2 < x_n \le b$的函数值$y_0, y_1 \cdots, y_n$，则存在唯一的次数不超过**n**的代数多项式$P(x)$，满足插值条件：$P(x_i) = y_i$ $(i = 0,1,2,\cdots, n)$

思考题：如果不限制多项式的次数，插值多项式存在吗？唯一吗？

如何构造插值多项式?

设定存在唯一的插值多项式为

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

令其满足插值条件，即方程(2.2.1)，解该方程求出系数a_i的值，代入插值多项式的上面表达式即得插值多项式。这种方法称为**待定系数法**，计算复杂。

下面讨论其它构造插值多项式的方法，例如Lagrange法、Newton法、Hermite法等。

2.2 Lagrange插值法

2.2.1 （n=1）一次或线性插值多项式，记作$L_1(x)$

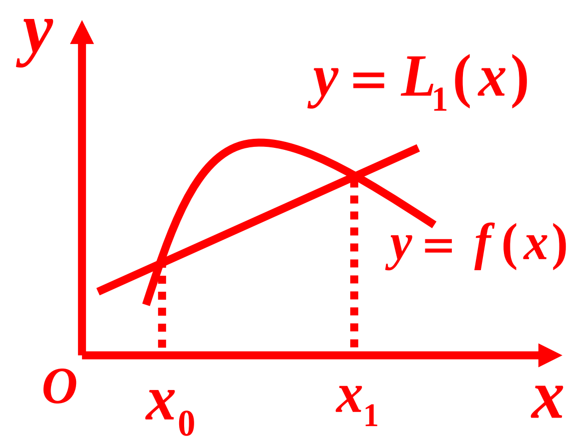
已知

x_i	x_0	x_1
y_i	y_0	y_1

求$y=L_1(x)$，使得

$L_1(x_0)=y_0, L_1(x_1)=y_1$，

如图所示，就是找过这两点的直线。



直线方程可以写为

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

为$f(x)$的线性插值多项式。

令 $\quad \boldsymbol{l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}$， $\quad \boldsymbol{l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}$

则线性插值多项式表示为

$$L_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{l_0(x)y_0+l_1(x)y_1}$$

其中 $l_0(x),l_1(x)$ 都是线性多项式，且

$$l_0(x_0)=1, l_0(x_1)=0$$
$$l_1(x_1)=1, l_0(x_0)=0$$

统一记作 $\quad l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$

称$l_0(x),l_1(x)$为节点x_0,x_1处的线性插值基函数.

易验证$L_1(x)$ 满足插值条件:

$$L_1(x_0)=y_0,\ L_1(x_1)=y_1\ .$$

2.2.2 二次插值或称为抛物线插值（n=2）

已知

x_i	x_0	x_1	x_2
y_i	y_0	y_1	y_2

求二次插值多项式，记作 $L_2(x)$，满足插值条件：

$L_2(x_i) = y_i$ （i=0,1,2）

仿照线性插值多项式的形式，令

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_0 l_0(x)$$

显然这样形式的 $L_2(x)$ 满足插值条件：

$$L_2(x_0) = y_0,\ L_2(x_1) = y_1,\ L_2(x_2) = y_2.$$

其中$l_i(x), i=1,2,3$称为节点x_i处的二次插值基函数，均为二次多项式，且满足

$$
\begin{aligned}
&l_0(x_0)=1，\ l_0(x_1)=0，\ l_0(x_2)=0;\\
&l_1(x_0)=0，\ l_1(x_1)=1，\ l_1(x_2)=0;\\
&l_2(x_0)=0，\ l_2(x_1)=0，\ l_2(x_2)=1.
\end{aligned}
$$

如何确定满足上述条件的$l_i(x), i=1,2,3$的表达式？

以l_0为例来讨论，根据条件, l_0 是二次多项式，且 x_0 , x_1是其零点，因此一定具有形式:

$$l_0(x) = A(x - x_1)(x - x_2),$$

由$l_0(x_0) = 1$知 $A(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1$，因此

$$A = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

从而

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

同理

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\quad l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

故 $L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

前面一次、二次插值多项式的形式由一个共同特点：插值多项式表示成了插值节点的已知值y_i对节点上的插值基函数l_i进行线性组合，称之为**Lagrange型插值多项式**。

Joseph-Louis Lagrange
1736~1813
法国数学家、物理学家

例1 已知$y=f(x)$的函数表，求抛物插值多项式，并求$f(1.5)$的近似值.

x_i:	1	2	3
y_i:	2	-1	2

解:

$$L_2(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}(\mathbf{2})+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}(\mathbf{-1})+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}(\mathbf{2})$$

$$=3x^2-12x+11$$

$$f(1.5)\approx L_2(1.5)=\mathbf{-1/4}$$

2.2.3 n次插值多项式(Lagrange插值多项式)

已知函数 $y=f(x)$ 在 [a, b] 中 n+1 个互异节点 $a \le x_0 < x_1 < x_2 < x_n \le b$ 的函数值 $y_0, y_1 \cdots, y_n$，存在唯一的次数不超过n的多项式，写成Lagrange插值多项式形式，记作 $L_n(x)$，类似于一/二次Lagrange型插值多项式，有

$$L_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k$$

其中 $l_k(x)$，$k=0,1,\ldots,n$，称为**n次Lagrange插值基函数,** 满足: 都是**n**次多项式，且

$$l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$$

类似于二次插纸基函数的构造， **n次Lagrange插值基函数**

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

从而**n次Lagrange**型插值多项式$L_n(x)$表示为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

令 $w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，易知

$$w'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

n次Lagrange插值基函数

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_k)w'_{n+1}(x_k)}$$

n次Lagrange型插值多项式$L_n(x)$表示为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)=w_{n+1}(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{(x-x_k)w'_{n+1}(x_k)}$$

2.2.4 插值余项和误差估计

在$[a, b]$上用$L_n(x)$近似$f(x)$，产生的误差或插值余项为$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$，关于插值余项有下面定理。

定理2.2 设 $f(x)$在$[a, b]$上有n阶连续导数，在(a, b)上$n+1$阶导数存在，则n次插值多项式$L_n(x)$近似 $f(x)$产生的误差或插值余项为

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)$$

其中$\xi \in (a, b)$且依赖于x.

证明：显然，若x是某个节点时，上式两端都为**0**，上式成立，因此只需证明x不是插值节点时结论成立。

固定 $x \in [a,b]$，因为 $R_n(x)$有**n+1**个零点 x_0，$x_1, \cdots, x_n$，可设

$$R_n(x) = K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = K(x)w_{n+1}(x)$$ ，

其中 $K(x)$ 是依赖于x的待定函数。

在[a,b]上构造函数

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

由插值条件及余项定义知，$\varphi(t)$ 在$x_0, x_1,\cdots,x_n$及 x 处均为

0，即$\varphi(t)$在[a,b]上有**n+2**个互异的零点，根据罗尔定理，

$\varphi'(t)$ 在 $\varphi(t)$的两

[a,b]上至少有**n+1**

有 $\varphi''(t)$在[a,b]上

$\varphi^{(n+1)}(t)$在[a,b]上

> 罗尔定理：如果函数$f(x)$满足以下条件：
>
> （1）在闭区间$[a,b]$上连续，
>
> （2）在(a,b)内可导，
>
> （3）$f(a)=f(b)$，
>
> 则至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K(x)(n+1)! = 0$$

从而 $$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

由余项表达式知，当$f(x) = x^k (k \le n)$时，由于$f^{(n+1)}(x) = 0$，因此有

$$R_n(x) = x^k - \sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = 0$$

从而

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = x^k, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

特别当**k=0**时，有

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$$

更一般的，若被插函数$f(x)$是任一个次数不超过**n**的代数多项式，则**n**次插值多项式的余项为**0**，都有$f(x) = L_n(x), \forall x \in [a, b]$.

练习1 证明$\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x)=0$，其中$l_i(x)$是关于点$x_0,x_1,\ldots,x_5$的插值基函数。

$$\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x)=\sum_{i=0}^{5}(x_i^2-2x_ix+x^2)l_i(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{5}x_i^2 l_i(x)-2x\sum_{i=0}^{5}x_i l_i(x)+x^2\sum_{i=0}^{5}l_i(x)$$

$$=x^2-2xx+x^2 1=0$$

特别地，如果有 $\max\limits_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$，则插值多项式 $L_n(x)$逼近$f(x)$的误差限为

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

几种常用的低阶插值余项公式

当**n=1**时，

$$R_1(x) = f(x) - L_1(x)$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1), \xi \in (a, b)$$

当**n=2**时，

$$R_2(x) = f(x) - L_2(x)$$

$$= \frac{1}{3!} f'''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \xi \in (a, b)$$

例2. 已知$f(x)=e^{-x}$的一组数据见下表，用抛物插值计算$e^{-2.1}$的近似值，并估计误差。

x_i	1	2	3
y_i	0.3679	0.1353	0.0183

解：记 $x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=3$，

$y_0=0.3679,\ y_1=\ 0.1353,\ y_2=0.0183$

$$e^{-2.1}\approx L_2(2.1)$$
$$=y_0\frac{(2.1-x_1)(2.1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(2.1-x_0)(2.1-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$+y_2\frac{(2.1-x_0)(2.1-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$
$$=0.3679\times\frac{0.1\times(-0.9)}{2}+0.1353\times\frac{1.1\times(-0.9)}{(-1)}+0.0183$$
$$\times\frac{1.1\times 0.1}{2}\approx 0.1184$$

$$|R_2(x)| = \frac{1}{6}\left|e^{-\xi}(x-1)(x-2)(x-3)\right|$$
$$\leq \frac{e^{-1}}{6}|(x-1)(x-2)(x-3)|,\ \ \xi \in (1,3)$$

$$|R_2(2.1)| \leq \frac{0.3679}{6} \times 0.099 \leq 0.0060701$$

练习 设$f \in C^2[a,b]$,试证明 **48页习题5是一个特例，f(a)=f(b)=0**

$$max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right| \le \frac{1}{8}(b-a)^2M,$$

其中$M = max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$

实际上，$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$就是$f(x)$在**[a,b]**上过**(a,f(a))**和**(b,f(b))**两点的线性插值多项式$L_1(x)$，由余项公式，有

$$max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right|$$

$$= max_{x\in[a,b]}|f(x)-L_1(x)| = max_{x\in[a,b]}\left|\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\right|$$

$$\le \frac{M}{2} max_{x\in[a,b]}|(x-a)(x-b)| = \frac{1}{8}(b-a)^2M$$

拉格朗日插值余项

似曾相识?

拉格朗日插值多项式余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad \xi \in (a,b),$$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i),$$

与泰勒公式的拉格朗日余项比较

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \xi \in (a,b),$$

? 思考

n次Taylor多项式也是对$f(x)$的一种插值?

设给定x_0点的函数值$y_0 = f(x_0)$, 求满足插值条件的插值多项式；若给定x_0点的函数值$y_0 = f(x_0)$和一阶导数值，$m_0 = f'(x_0)$,求满足这两个插值条件的插值多项式。

拉格朗日插值的优缺点

优点：插值基函数及插值多项式形式对称，结构紧凑，易分析、易编程。节点不变函数值变化时，基函数不变，可用于不同批次的采样值。

缺点：节点或节点个数改变时，全部插值基函数均要随之变化，整个插值多项式也要变化，这在实际计算中是不方便的。

如何解决这一问题？牛顿插值法

实验作业：48页，No.2

本上作业：48页，No.1:(1)(2), 4

2.3 均差与牛顿插值多项式

过一点$(x_0, f(x_0))$确定唯一的零次多项式，也就是常函数，

$$P_0(x) = f(x_0);$$

若增加一个节点x_1，过两点$(x_0, f(x_0))$，$(x_1, f(x_1))$确定唯一的1次（线性）多项式，其图形是过这两点的直线，将其方程写成点斜式，即

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0)$$

$$= P_0(x) + \boxed{a_1(x - x_0)} \qquad a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\text{是函数的一阶差商}$$

特点：它可以看成是对上面零次多项式的修正，即在零次多项式基础上加一个线性多项式，且新加的项不影响零次多项式已经满足的插值条件，当然新加的项要保证在新增的节点处满足插值条件。

启发：当增加节点时，对已经得到的低次插值多项式进行适当修正，即在低次插值多项式基础上加一个高次多项式项，使其不影响原有节点的插值条件，且满足新增节点的插值条件。

比如增加一个节点$(x_2, f(x_2))$，这时唯一确定一个2次（抛物）多项式，如前所说，新增的项应该是一个二次多项式，且不影响$P_1(x)$在x_0和x_1的插值条件，因此新增项应具有$a_2(x-x_0)(x-x_1)$形成，

从而2次插值多项式可写成

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

显然有 $P_2(x_0) = P_1(x_0) = f(x_0)$， $P_2(x_1) = P_1(x_1) = f(x_1)$，

现在要确定a_2，使得$P_2(x_2) = f(x_2)$，易得

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

是“差商的差商”。

一般地，已知$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x_i}(\boldsymbol{i} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{n})$的函数值$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})$,过这**n+1**个节点的**n**次插值多项式可写成

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

其中 $a_0, a_1 \dots, a_n$为待定系数。

这种形式的插值多项式称为牛顿插值多项式，其中插值基函数为

$1, (x - x_0), \dots, (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$,

这与**Lagrange**型插值多项式不同，但优点是增加节点容易。

为了给出系数$a_0, a_1 \dots, a_n$的表达式，需要引入均差或差商的定义。

➤ 定义2　差商(亦称均差)

已知函数$f(x)$在区间$[a,b]$上$n+1$个互异节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$的函数值$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$

$$f[x_k, x_j] = \frac{f(x_k) - f(x_j)}{x_k - x_j} = \frac{f(x_j) - f(x_k)}{x_j - x_k}$$

称为$f(x)$关于节点 x_k, x_j 的1阶差商

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_k - x_i}$$

称为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j, x_k 的2阶差商

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_k]}{x_k - x_0}$$

称为 $f(x)$ 关于节点 $x_0, x_1, \ldots, x_k$ 的 k 阶差商

➢ 差商的性质

性质1 差商可用函数值线性表示

$f(x)$ 的 k 阶差商可由函数值 $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k)$ 线性表示为

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_k)}$$

例如

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_j} + \frac{f(x_j)}{x_j - x_i}$$

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}=\frac{\dfrac{f(x_k)-f(x_j)}{x_k-x_j}-\dfrac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}}{x_k-x_i}$$

$$=\frac{(f(x_k)-f(x_j))(x_j-x_i)-(f(x_j)-f(x_i))(x_k-x_j)}{(x_k-x_j)(x_j-x_i)(x_k-x_i)}$$

$$=\frac{f(x_k)(x_j-x_i)-f(x_j)(x_j-x_i)-f(x_j)(x_k-x_j)+f(x_i)(x_k-x_j)}{(x_k-x_j)(x_j-x_i)(x_k-x_i)}$$

$$=\frac{f(x_k)}{(x_k-x_j)(x_k-x_i)}-\frac{f(x_j)}{(x_k-x_j)(x_j-x_i)}+\frac{f(x_i)}{(x_j-x_i)(x_k-x_i)}$$

$$=\frac{f(x_i)}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}+\frac{f(x_j)}{(x_j-x_k)(x_j-x_i)}+\frac{f(x_k)}{(x_k-x_j)(x_k-x_i)}$$

性质2 差商值与节点顺序无关，称为差商的对称性

差商中任意交换两个节点 x_i, x_j 的顺序，差商值不变

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

也可以表示为

$$= \frac{f[x_0, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

性质3 差商与导数的关系

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上存在 k 阶导数，且节点 $x_0, x_1, ..., x_k \in [a,b]$

则 $\exists \xi \in [a,b]$, 有

$$f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

➢ 差商的计算方法(差商表)

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,\ldots,x_4]$

规定函数值为零阶差商；高阶差商是两个低一阶差商的差商。

➢ 牛顿插值多项式

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$\begin{cases} f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 1 \\ f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 2 \\ \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \\ f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,\ldots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\ldots,x_n] & \cdots\cdots \ n-1 \end{cases}$$

将下一式子依次代入上一个式子，可得：

$$f(x)=\boxed{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}$$

$$\boxed{+f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}$$

$N_n(x)$

$a_i=f[x_0,\ldots,x_i]$

$R_n(x)$

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n]\overset{\omega_{n+1}(x)}{\boxed{(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)}}$$

多项式$N_n(x)$显然满足插值条件,即$N_n(x_j)=f(x_j)$,(j=1,…, n),且次数不超过n,由插值多项式的唯一性定理知它就是前述的$L_n(x)$, 其插值系数为

$$a_k = f[x_0, \ldots, x_k] \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

☞注： 由唯一性可知 $N_n(x) \equiv L_n(x)$， 只是算法和形式不同，故其余项也相同，

$$f[x, x_0, \dots, x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (x_{\min}, x_{\max})}$$

例3 依据如下函数值表建立拉格朗日插值多项式及牛顿插值多项式.

x_k	0	1	2	4
$f(x_k)$	1	9	23	3

解: (1)拉格朗日插值多项式

插值基函数 $$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}=\frac{1}{8}x^3+\frac{7}{8}x^2-\frac{7}{4}x+1,$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}x^3-2x^2-\frac{8}{3}x,$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{4}x^2-x,$$

$$l_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}=\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{12}x,$$

拉格朗日插值多项式为:

$$L_3(x)=\sum_{i=0}^{3}l_i(x)y_i=l_0(x)+9l_1(x)+23l_2(x)+3l_3(x)$$

$$=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$$

(2) 牛顿插值多项式.

建立如下差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
0	1			
1	9	8		
2	23	14	3	
4	3	−10	−8	-11/4

牛顿插值多项式为

$$N_3(x)=1+8(x-0)+3(x-0)(x-1)-\frac{11}{4}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$$

可见，用两种方法构造的插值多项式是一样的。

当题目中没有指明用哪一种方法建立插值多项式时，原则上拉格朗日插值方法和牛顿插值方法都可行，做题目时选择较为简便的一种方法。近似计算时，由于牛顿插值多项式的非整理形式可以直接写成秦九韶算法的形式，计算量小，且当增加节点时只需增加一项，前面的工作依然有效，因而通常情况下牛顿插值比较方便。拉格朗日插值法没有上述优点，但它在理论证明上因插值基函数的许多特点而得到广泛应用。

实验作业：48页，No.2,改用牛顿插值法做

本上作业：48页，No.1 (3), 8

2.4 Hermite插值多项式

前面讨论的插值多项式仅要求在插值节点上函数值相等，有的实际问题还要求在节点上导数值相等，甚至高阶导数值也相等，满足这种要求的插值多项式称为**Hermite**插值多项式。

1. 重节点均差与泰勒插值

一个关于均差的结论。

定理**3.** 设$f \in C^n[a,b], x_0, x_1, \dots, x_n$为**[a,b]**上的互异节点，则$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$是其变量的连续函数。

若**[a,b]**上的节点互异，根据均差定义，若$f \in C^1[a,b]$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

由此定义重节点均差 $f[x_0, x_0] = \lim\limits_{x\to x_0} f[x_0, x] = f'(x_0)$

类似地，可定义重节点的二阶均差，当$x_0 \neq x_1$时，有

$$f[x_0,x_0,x_1]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_0,x_0]}{x_1-x_0}$$

当$x_1 \to x_0$时，有 $f[x_0,x_0,x_0]=\lim\limits_{\substack{x_1\to x_0\\ x_2\to x_0}} f[x_0,x_1,x_2]=\frac{1}{2}f''(x_0)$

一般地，可定义n重节点的均差，

$$f[x_0,x_0,\ldots,x_0]=\lim_{x_i\to x_0} f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

在牛顿均差插值多项式中，令$x_i \to x_0(i=1,2,\ldots,n)$，由上式可得泰勒多项式

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

它是在点x_0满足条件：$P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0),k=0,1,\ldots,n$

的**Hermite**插值多项式，其余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \theta\in(a,b)$$

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] \triangleq \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (当 x_0 \neq x_1)$$

$$f[x_0, x_0] \triangleq \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \quad (当 x_1 = x_0)$$

$$f[\underbrace{x_0, x_0}, x_1] \triangleq \frac{f[x_0, x_0] - f[x_0, x_1]}{x_0 - x_1} \quad (当 x_1 \neq x_0)$$

$$f[x_0, x_0, x_0] \triangleq \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} f[x_0, x_1, x_2] \quad (当 x_1 \neq x_0)$$

$$= \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} \frac{f''(\xi)}{2!}$$

(ξ介于 x_0, x_1, x_2 之间
当 $x_1, x_2 \to x_0$ 时，有$\xi \to x_0$)

$$= \frac{f''(x_0)}{2!}$$

类似地，$f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{n+1个}] = \lim_{x_1, x_2, \cdots x_n \to x_0} f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$

$$= \lim_{x_1, x_2, \cdots x_n \to x_0} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

		一阶差商	二阶差商	
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_1] = f'(x_1)$	$f[x_0, x_1, x_1]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2]$

$$N_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$+ f[x_0, x_1, x_1](x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ f[x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_1)$$

一般地，只要给出**m+1**个插值条件（包括函数值和导数值）就可构造出次数不超过**m**次的**Hermite**插值多项式，由于导数条件各不相同，这里就不给出一般**Hermite**插值公式。**Taylor**多项式是一个典型的例子，下面再讨论**2**个典型的例子。

2. 两个典型的Hermite插值

例1 考虑满足条件$P(x_i)=f(x_i)(i=0,1,2)$及$P'(x_1)=f'(x_1)$的插值多项式及其余项表达式。由给定条件，可确定次数不超过**3**的插值多项式，由于此多项式通过点$(x_i,f(x_i))(i=0,1,2)$, 故其形式为

$$P(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+$$
$$A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

由条件$P'(x_1)=f'(x_1)$确定系数**A**,得

$$\mathrm{A}=\frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

为了求出余项$R(x)=f(x)-P(x)$的表达式，可设

$R(x)=f(x)-P(x)=k(x)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$, 其中$k(x)$为待定函数。

构造 $\varphi(t)=f(t)-P(t)-k(x)(t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$,

显然$\varphi(x_j)=0, j=0,1,2$,且$\varphi'(x_1)=0$, $\varphi(x)=0$. 故$\varphi(t)$在(a,b)内有5个零点（二重根算2个）. 假设f有好的可微性，反复应用罗尔定理，得$\varphi^{(4)}(t)$在(a,b)内至少有一个零点θ，故

$$\varphi^{(4)}(\theta)=f^{(4)}(\theta)-4!\,k(x)=0$$

因此$k(x)=\frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}$，余项表达式为

$$R(x)=f(x)-P(x)=\frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

θ在x_0,x_1,x_2,x之间。

例2 考虑两点三次**Hermite**插值多项式$H_3(x)$，满足

$$H_3(x_k)=y_k,\ H_3(x_{k+1})=y_{k+1},$$

$$H_3'(x_k)=m_k,\ H_3'(x_{k+1})=m_{k+1},$$

采用基函数方法，令

$$H_3(x)=\alpha_k(x)y_k+\alpha_{k+1}(x)y_{k+1}+\beta_k(x)m_k+\beta_{k+1}(x)m_{k+1}$$

其中$\alpha_k(x),\alpha_{k+1}(x),\beta_k(x),\beta_{k+1}(x)$是关于节点$x_k$ 及x_{k+1}的**3**次**Hermite**插值基函数，分别满足条件

$$\alpha_k(x_k)=1,\alpha_k(x_{k+1})=0,\ \alpha_k'(x_k)=\alpha_k'(x_{k+1})=0;$$

$$\alpha_{k+1}(x_k)=0,\alpha_{k+1}(x_{k+1})=1,\ \alpha_{k+1}'(x_k)=\alpha_{k+1}'(x_{k+1})=0;$$

$$\beta_k(x_k)=\beta_k(x_{k+1})=0,\ \beta_k'(x_k)=1,\beta_k'(x_{k+1})=0;$$

$$\beta_{k+1}(x_k)=\beta_{k+1}(x_{k+1})=0,\ \beta_{k+1}'(x_k)=0,\beta_{k+1}'(x_{k+1})=1;$$

先考虑基函数$\alpha_k(x)$的表达式，由基函数的条件，x_{k+1}是它的二重零点，可设 $\alpha_k(x)=(ax+b)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$

再由 $\alpha_k(x_k)=ax_k+b=1$, 及

$$\alpha_k'(x)=a\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2+2(ax+b)\frac{x-x_{k+1}}{(x_k-x_{k+1})^2}, \alpha_k'(x_k)=0\text{得}$$

$a=-\frac{2}{x_k-x_{k+1}}$, $b=1+\frac{2x_k}{x_k-x_{k+1}}$, 从而

$$\alpha_k(x)=\left(1+\frac{2(x-x_k)}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$$

同理可得 $\alpha_{k+1}(x)=\left(1+\frac{2(x-x_{k+1})}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$

再考虑基函数$\boldsymbol{\beta}_k(\boldsymbol{x})$的表达式，由基函数的条件，可设

$$\boldsymbol{\beta}_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{k+1}}{\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k+1}}\right)^2$$

再由$\boldsymbol{\beta}'_k(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{a} = \mathbf{1}$得

$$\boldsymbol{\beta}_k(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{k+1}}{\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k+1}}\right)^2$$

同理可得　$$\boldsymbol{\beta}_{k+1}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{k+1})\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k}\right)^2$$

$$H_3(x)$$

$$= \left(1 + \frac{2(x - x_k)}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 y_k + \left(1 + \frac{2(x - x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 y_{k+1}$$

$$+ (x - x_k)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 m_k + (x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 m_{k+1}$$

余项 $R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}(x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2$

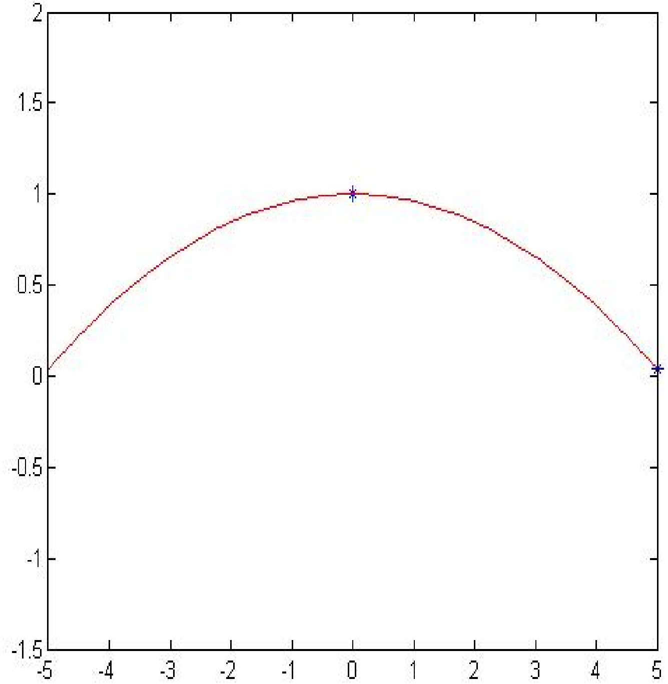
本上作业：48页，No.13，14，15，16

插值多项式次数n越大越好吗？

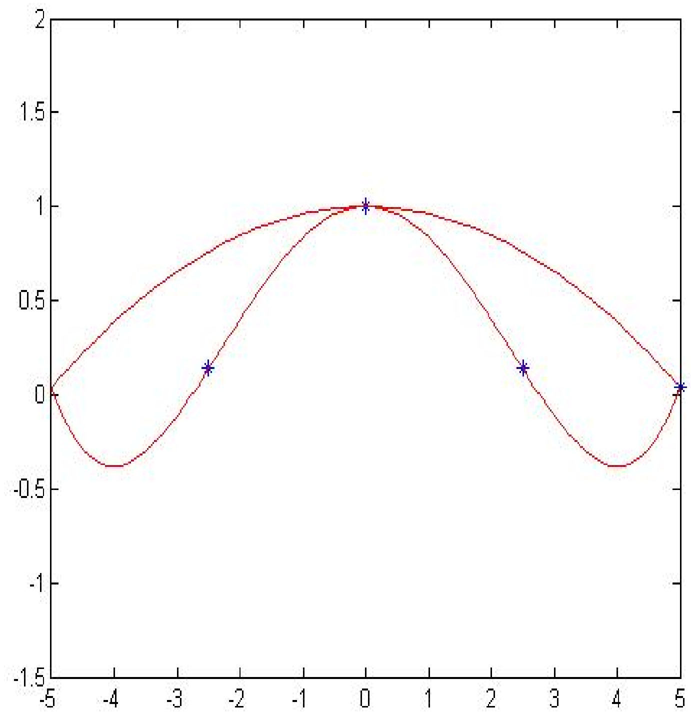
例： $$g(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad -5\le x\le 5$$

采用拉格朗日插值多项式，选取不同插值节点个数n+1，其中n为插值多项式的次数，当n分别取2, 4, 6, 8, 10时，绘出插值多项式的曲线，如下图.

例： $$g(x)=\frac{1}{1+x^2},\ -5\le x\le 5$$

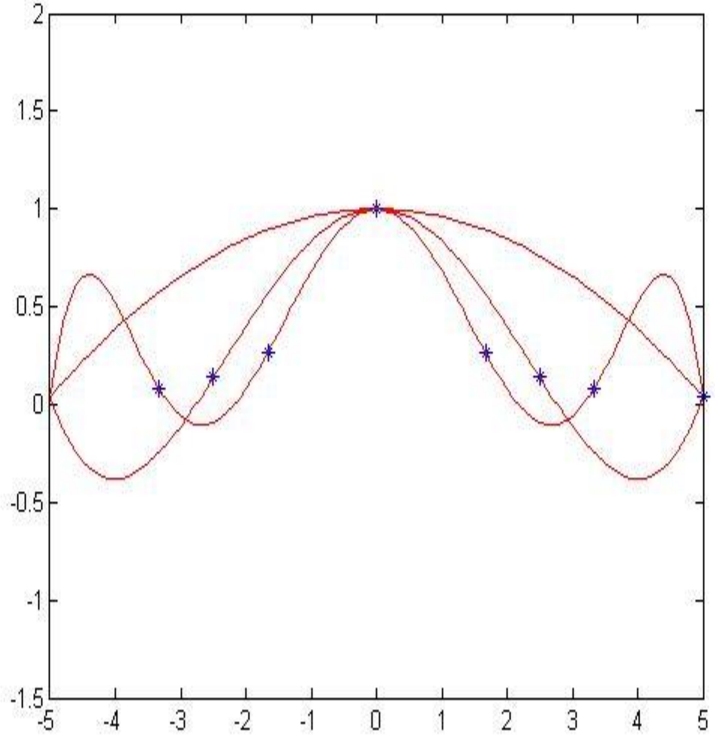


例： $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\ -5\le x\le 5$

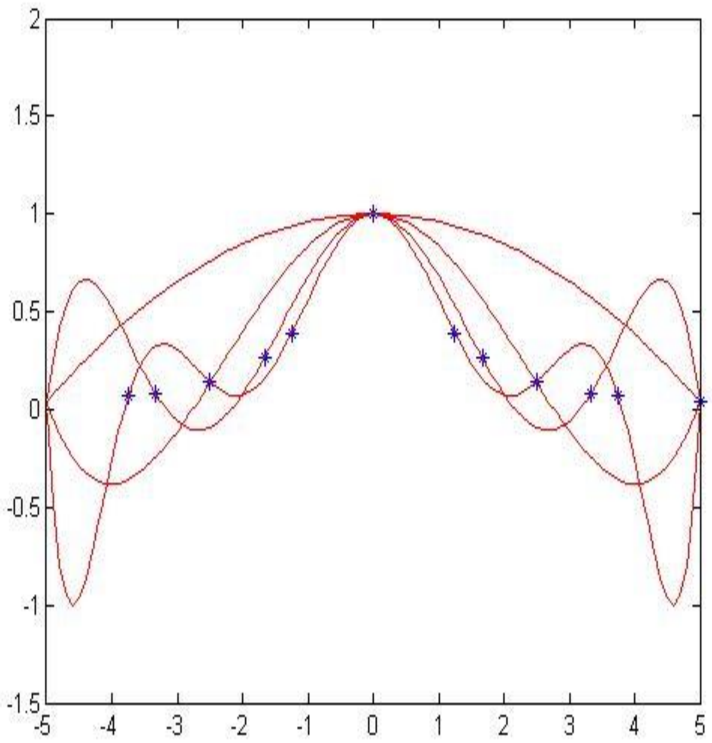


例：

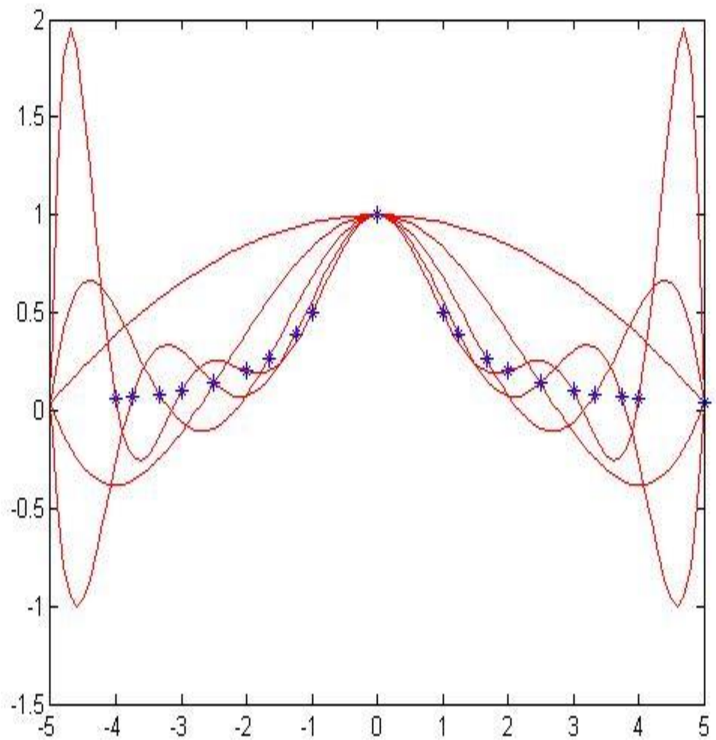
$$g(x)=\frac{1}{1+x^2},\ -5\le x\le 5$$



例： $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\ -5\le x\le 5$



例： $$g(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad -5\le x\le 5$$



由图形看出，当插值节点个数取得较多时，构造的高次插值多项式产生很大的震荡，导致插值余项不收敛到0，拉格朗日插值多项式的这种振荡现象叫 Runge现象。

2.5 分段低次插值

分段低次插值的思路

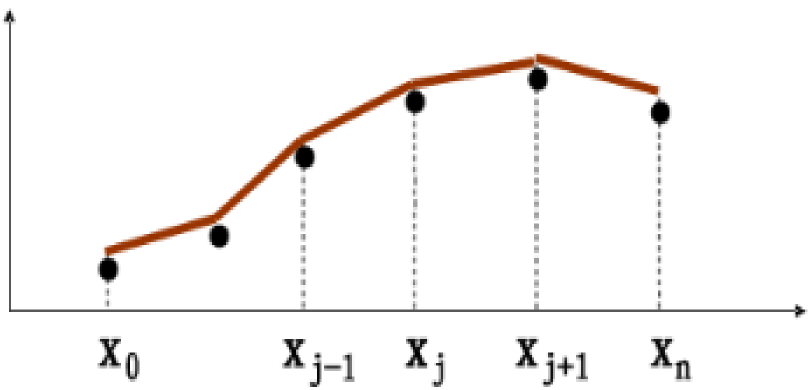
分段线性插值

问题1 插值多项式次数高精度未必显著提高

问题1 插值多项式次数越高摄入误差可能显著增大

如何提高插值精度呢

采用分段低次插值是一种办法



分段低次插值的概念

已知节点 $a=x_0<x_1< \quad <x_n=b$ 上的函数值为 $y_0, y_1 \quad y_n$

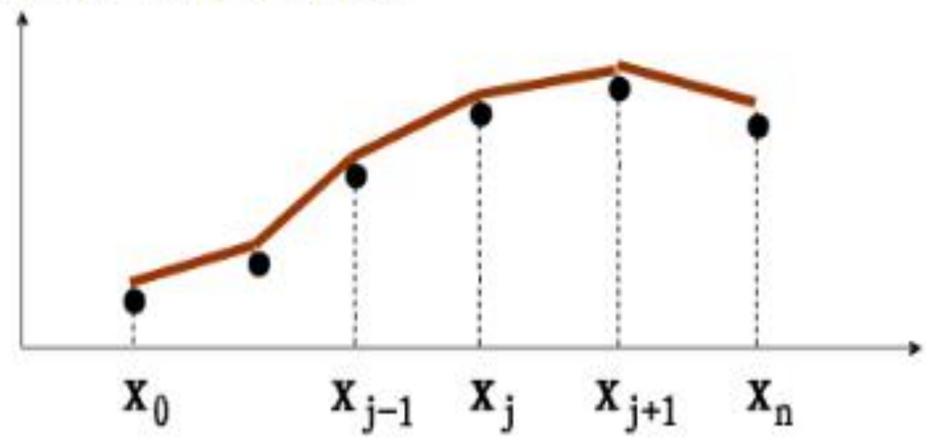
构造插值函数$\varphi(x)$使其满足:

(1) $\varphi(x)\in C^0[a,b]$

(2) $\varphi(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n)$

(3) $\varphi(x)$是线性函数, $\forall[x_i,x_{i+1}] \quad (i=0,1,2,\ldots,n)$,

则称φ(x)是f(x)在[a ,b]上的分段线性插值多项式。



多项式的构造

计算量与 n 无关，n 越大误差越小.

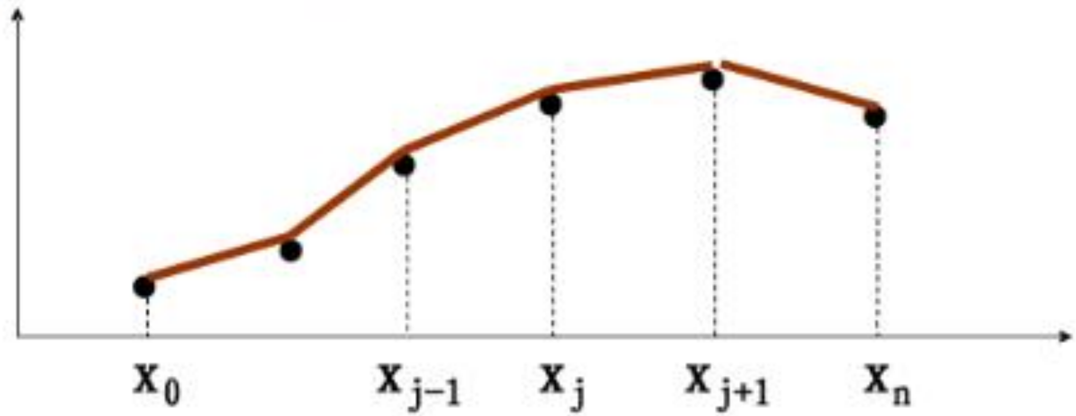
分段线性插值

基函数

$$l_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}, & x_0\le x\le x_1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1}\le x\le x_i\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x_i\le x\le x_{i+1}\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$l_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1}\le x\le x_n\\ 0 & 其它\end{cases}$$



一般表达式

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k\, l_k(x)$$

缺点：节点处是尖点时，分段线性插值多项式连续但不可导，可能不满足实际要求。

改进：使用埃尔米特插值或样条插值法。

分段低次插值的概念

分段二次插值

选取跟节点 x 最近的三个节点 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 进行二次插值。

即在每一个区间 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 上，取：

$$f(x) \approx L_2(x) = \sum_{k=i-1}^{i+1} [y_k \prod_{\substack{j=i-1 \\ j \neq k}}^{i+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}]$$

这种分段的低次插值称为**分段二次插值**，在几何上就是用分段抛物线代替 $y = f(x)$，故分段二次插值又称为**分段抛物插值**。

实验作业：**49**页，**17**

总结

- Lagrange和Newton插值法都要求插值函数在插值节点处与已知函数值相等（过节点）。但在实际应用中，许多问题不仅要求插值函数在节点上的函数值相等，而且还要求在这些点处的一阶导数甚至高阶导数相等（足够光滑）。(**Hermite**插值方法)

- 一般地，插值节点越多插值多项式的次数越高，误差越小，函数逼近越好，但实际上并非对所有连续函数都如此。因为插值余项不仅与插值节点有关，还与函数的高阶导数有关。

- **分段线性插值法的思想是：将插值节点用折线段连接起来逼近函数。**

- 尽管分段线性插值多项式计算简单、在插值节点处连续，但不能保证在节点处的光滑性，即曲线可能出现尖点。为使插值多项式具有光滑性，可以采用分段三次Hermite插值法。

分段三次Hermite插值法

- 不仅克服了高次插值多项式计算复杂的特点，而且保证了逼近曲线的光滑性，但插值条件要求给出节点处的一阶导数值。
- 实际问题中还要求曲线具有二阶的光滑度，即有连续的二阶导数。

例如飞机的机翼形线设计需要有二阶的光滑度。可采用样条插值。常用的样条曲线是由分段的三次多项式曲线连接而成，并在连接点处有连续的二阶导数。