

大学物理(1)速通教程

8 电磁感应

8.0 基本公式

$$\text{全磁通} \psi = \sum_i \Phi_i$$

$$[\text{Faraday电磁感应定律}] \mathcal{E}_i = -\frac{d\psi}{dt}$$

$$\text{正弦交流电最大感应电动势} \mathcal{E}_m = NBS\omega, \text{交流电压} \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_m \sin \omega t$$

$$\text{动生电动势} \mathcal{E}_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_{-}^{+} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\text{感生电动势} \mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{自感系数} L = \frac{\psi}{I}, \text{自感电动势} \mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\text{互感系数} M_{12} = M_{21} = M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}, \text{互感电动势} \mathcal{E}_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}, \mathcal{E}_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\text{磁场能量密度} w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH, \text{该结果适用于铁磁质外的所有线性磁化介质}$$

$$\text{磁场能量} W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV$$

$$\text{全电场} = \text{静电场} + \text{感生电场(涡旋电场)}, \text{即} \vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_k$$

$$\text{全电流} = \text{传导电流} + \text{位移电流}, \text{即} I_s = I_c + I_d$$

[Maxwell方程组]

定理	积分形式	微分形式
电场的Gauss定理	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{i0} = \int_V \rho_0 dV$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$
电场的环路定理	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
磁场的Gauss定理	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
磁场的Ampere环路定理	$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

前两行表明磁能生电,后两行表明电能生磁.

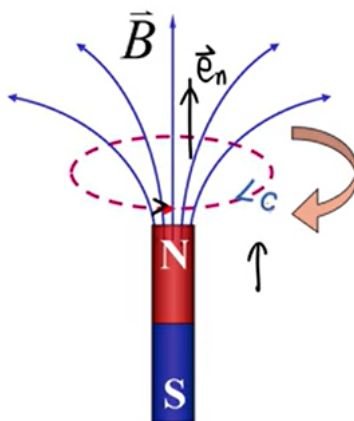
8.1 电磁感应定律

8.1. Faraday电磁感应定律

[Faraday电磁感应定律] 当穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变化时,回路中会产生感应电动势,且感应电动势的大小正比于磁通量对时间变化率的负值,即 $\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt}$, 其中负号由Lenz定律决定.

感应电动势的方向:

如下图,以俯视逆时针为回路的绕行方向.



(1) 条形磁铁插入回路中时,

因 $\Phi_m > 0$ 且 $d\Phi_m > 0$, 则 $\frac{d\Phi_m}{dt} > 0$, 进而 $\mathcal{E}_i < 0$, 即感应电动势的方向与回路绕行方向相反, 亦即俯视顺时针.

(2) 条形磁铁从回路中拔出时,

因 $\Phi_m > 0$ 且 $d\Phi_m < 0$, 则 $\frac{d\Phi_m}{dt} < 0$, 进而 $\mathcal{E}_i > 0$, 即感应电动势的方向与回路绕行方向相同, 亦即俯视逆时针.

对 N 匝线圈的串联回路(如螺线管),设每一匝的磁通量分别为 Φ_1, \dots, Φ_N .若每匝线圈的面积和通过每匝线圈的磁感强度都相等(称为磁链),则 $\Phi_1 = \dots = \Phi_N = \Phi$,定义 $\psi = \sum_i \Phi_i = N\Phi$ 为全磁通,则 N 匝线圈的Faraday电磁感应定律

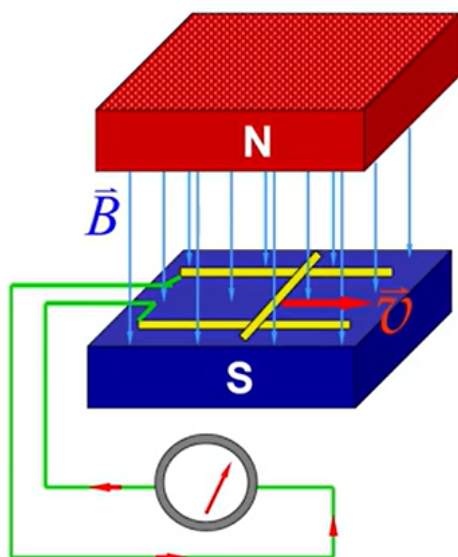
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\psi}{dt} = -N \frac{d\Phi_m}{dt}. \text{这表明:闭合回路的感应电动势与磁通量的变化率有关.}$$

设闭合回路的电阻为 R ,感应电流为 I ,则 $\frac{dq}{dt} = I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt}$,则 $dq = -\frac{1}{R} d\Phi_m$,两边积分得:
 $q = \frac{1}{R} (\Phi_{m1} - \Phi_{m0})$.这表明:闭合回路的感应电流与磁通量的变化量有关.

8.1.2 Lenz定律

[Lenz定律] 闭合的导线回路中出现的感应电流总是使它自己所激发的磁场反抗任何引起电磁感应的原因,如反抗相对运动、磁场变化或线圈变形等.

[例8.1.1]

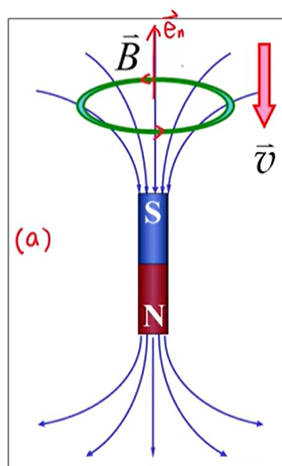


应用Lenz定律的步骤:

- ①规定回路绕行方向和回路法线方向,两者满足右手螺旋定则.
- ②判断穿过闭合回路的原磁场的方向,即 Φ_m 的正负.
- ③根据原磁场的变化确定感应电流磁场的方向:
 - (i)原磁场增强,则 Φ 增加,感应电流磁场与原磁场相反.
 - (ii)原磁场减弱,则 Φ 减小,感应电流磁场与原磁场相同.
- ④根据右手定则,由感应电流磁场方向确定感应电动势的方向.

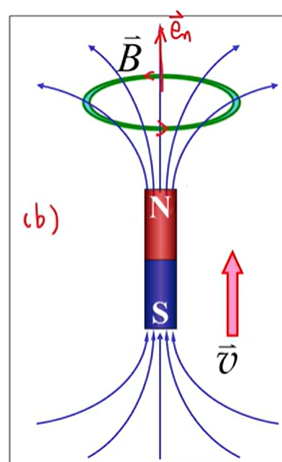
[例8.1.2] 规定回路绕行方向为俯视逆时针.

(1)



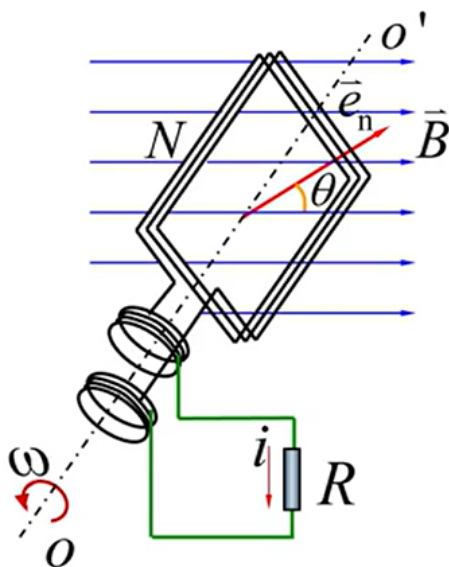
如上图,感应电流产生的磁场向上,感应电动势与回路绕行方向相同,感应电流 $I > 0$.

(2)



如上图,感应电流产生的磁场向下,感应电动势与回路绕行方向相反,感应电流 $I < 0$.

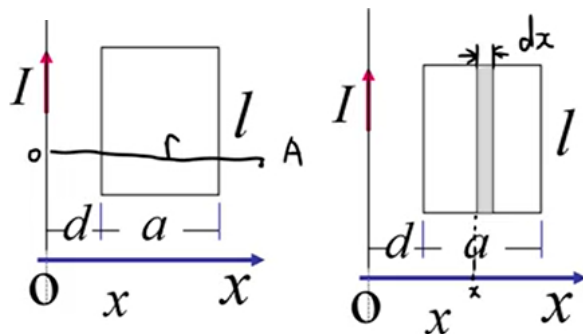
[例8.1.3] 如下图,匀强磁场中置有面积为 S 的可绕轴 OO' 转动的 N 匝线圈.若线圈以角速度 ω 匀速转动,求线圈中的感应电动势.



[解] 单匝线圈 $\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \theta = BS \cos \omega t$, 则全磁通 $\psi_m = N\Phi_m = NBS \cos \omega t$.

$\mathcal{E}_i = -\frac{d\psi_m}{dt} = NBS\omega \sin \omega t$. 记最大感应电动势 $\mathcal{E}_m = NBS\omega$, 则 $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_m \sin \omega t$, 这称为正弦交流电.

[例8.1.4] 如下图,通交流电的直导线置于磁导率为 μ 的介质中,交流电 $I = I_0 \sin \omega t$,其中 I_0 和 ω 都是大于零的常量.求与其共面的 N 匝矩形回路中的感应电动势.



[解] 先求 B .由磁介质中的Ampere环路定理: $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i0} \Leftrightarrow H 2\pi r = I$,则 $B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$.

在 x 位置取宽度为 dx 的面元,则 $dS = l dx$.

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{dx}{x}, \text{ 则 } \Phi_m = \frac{\mu I l}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}.$$

$$\text{由Faraday电磁感应定律: } \mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu I_0 l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} \sin \omega t \right) = -\frac{\mu I_0 l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} \omega \cos \omega t.$$

[注] $I = I_0 \sin \omega t$,当 t 变化时, I 可能为负.同理当 t 变化时, \mathcal{E}_i 可能为负.

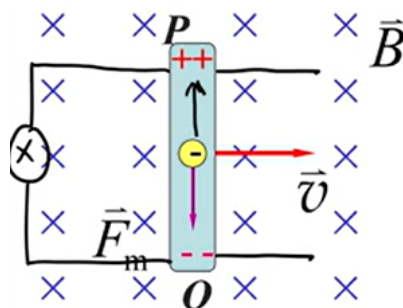
8.2 动生电动势与感生电动势

感应电动势的分类:

- ① 恒定磁场中由于导体运动或回路面积变化、取向变化等引起的磁通变化,产生的感应电动势称为动生电动势.
- ② 回路静止,仅由磁场变化引起穿过回路的磁通发生变化而产生的感应电动势称为感生电动势.

8.2.1 动生电动势

动生电动势的非静电力来源于Lorentz力.

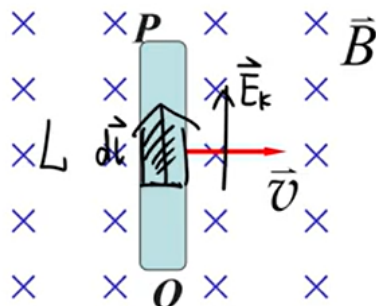


$$\text{Lorentz力 } \vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}, \text{ 则非静电力的场 } \vec{E}_k = \frac{\vec{F}_m}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

$$\text{动生电动势 } \mathcal{E}_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_O^P \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}.$$

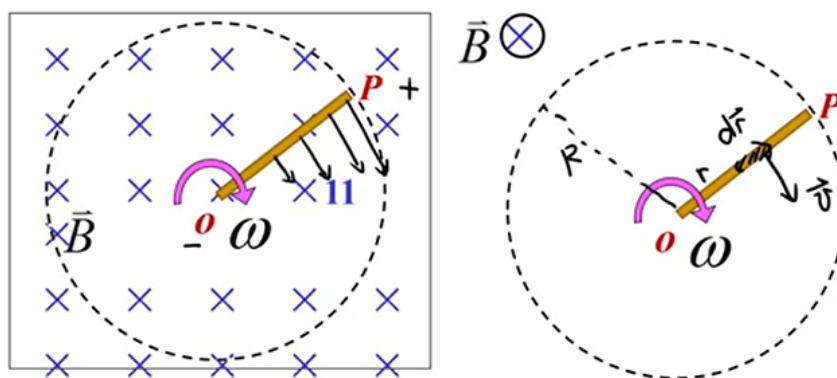
电源中 P 端电势高, O 端电势低,电动势方向 $O \rightarrow P$.

如下图,长度为 L 的导体棒在匀强磁场 \vec{B} 中做速度为 \vec{v} 的匀速直线运动.



$$\mathcal{E}_i = \int_O^P (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_O^P (vB \sin \frac{\pi}{2}) dl \cos 0 = \int_O^P Bv dl = BLv.$$

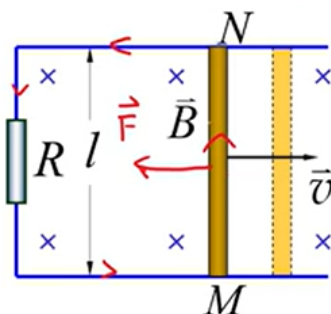
[例8.2.1] 一长为 L 的铜棒置于匀强磁场 \vec{B} 中,以角速度 ω 在与磁场方向垂直的平面上绕棒的一端转动.求铜棒两端的感应电动势.



[解] 先判断动生电动势的方向.由 $\vec{v} \times \vec{B}$ 知: P 端电势高,电动势 $O \rightarrow P$.

$$\mathcal{E}_i = \int_0^R (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^R vB \sin \frac{\pi}{2} dr \cos 0 = \int_0^R B\omega r dr = \frac{1}{2} B\omega R^2.$$

[例8.2.2] 一导线矩形框的平面垂直于匀强磁场 \vec{B} .在矩形框上,有一质量为 m 的、长为 l 的可移动的细导体棒 MN .矩形框还接有一个电阻 R ,其阻值较导线的电阻大得多.若开始时,细导体棒以速度 \vec{v}_0 沿如图所示的矩形框运动,求棒的速率随时间的变化关系.



[解] 显然感应电流逆时针,棒受Ampere力与 \vec{v} 反向,棒做加速度减小的变减速直线运动.

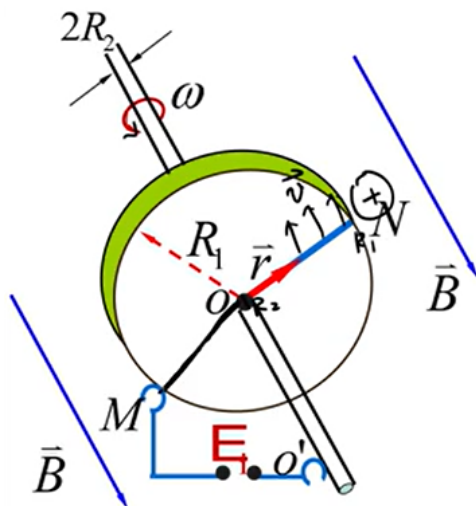
若导轨足够长,棒最终将停在导轨上,不再产生感应电动势.

$$\mathcal{E}_i = Blv, I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Blv}{R}, F = BIl = \frac{B^2 l^2 v}{R}. \text{以向右为正方向.}$$

$$F = ma = -\frac{B^2 l^2 v}{R}, a = \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v}{mR}, \text{则} \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt, \text{两边积分得} v = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}.$$

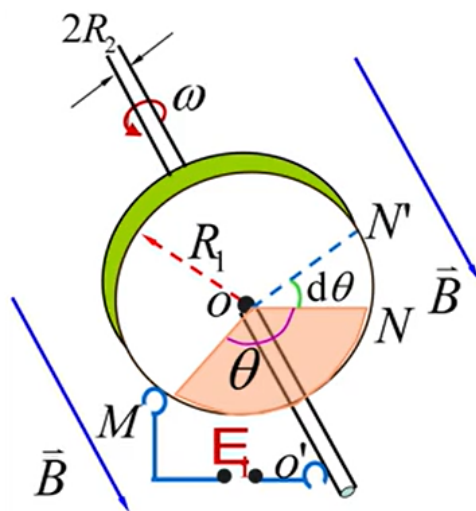
[例8.2.3] 设一半径为 R_1 的铜薄圆盘以角速度 ω 绕过盘心垂直于盘面的金属轴转动, 轴的半径为 R_2 , 圆盘放在匀强磁场 \vec{B} 中, \vec{B} 垂直于盘面. 有两个集电刷 a, b 分别与圆盘边缘和转轴相连. 求它们间的电势差, 并指出何处电势高.

[解1] 利用动生电动势.



$$\mathcal{E}_i = \int_{R_2}^{R_1} vBdr = \int_{R_2}^{R_1} \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega B (R_1^2 - R_2^2).$$

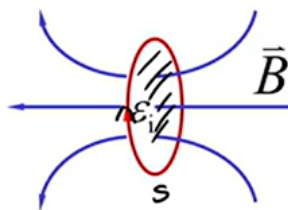
[解2] 利用电磁感应定律. 如下图, 考察阴影部分的闭合扇形回路.



$$\Phi_m = BS = B \frac{\theta}{2\pi} \pi (R_1^2 - R_2^2) = B \frac{1}{2} \omega t (R_1^2 - R_2^2), \text{则} \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{1}{2} B \omega (R_1^2 - R_2^2),$$

其中负号是因为感应电动势变小.

8.2.2 感生电动势



磁通 $\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, 则感生电动势 $\mathcal{E}_i = \oint_S \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$.

因上式中对时间求导而对面积积分, 则求导和积分可交换次序, 但因磁场是空间的函数,

则 $\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$,

其中 \vec{E}_k 称为感生电场或涡旋电场, 它是产生感生电动势的非静电力场.

$\int_S \left(\nabla \times \vec{E}_k \right) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$, 即 $\nabla \times \vec{E}_k = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

感生电场与静电场的对比:

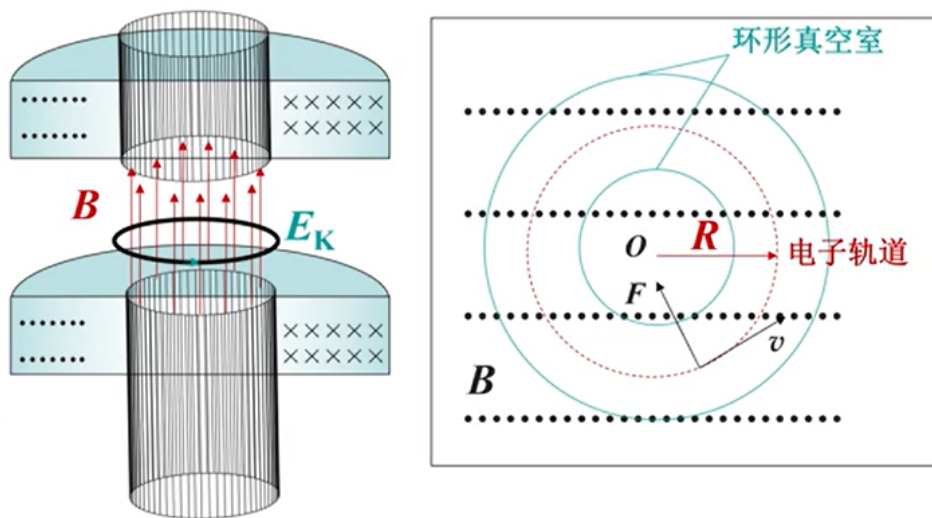
感生电场	静电场
非保守场	保守场
$\oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \neq 0$ $\nabla \times \vec{E}_k = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{是有旋场}$	$\oint_L \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$ $\nabla \times \vec{E} = 0, \text{是无旋场}$
由变化的磁场产生	由电荷产生
电场线闭合	电场线不闭合

定义全电场 $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_k$.

静电场 $\oint_L \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0, \nabla \times \vec{E}_c = 0$, 感生电场 $\oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \nabla \times \vec{E}_k = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Maxwell方程组之一, 变化的磁场产生电场: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

电子感应加速器:



要解决的问题:如何让电子在稳定轨道上圆周运动且不断被加速.

显然Lorentz力提供向心力. $F_m = Bev = ma_n = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{Be}$.为保证 R 不变, $v \uparrow$,只需 $B \uparrow$.

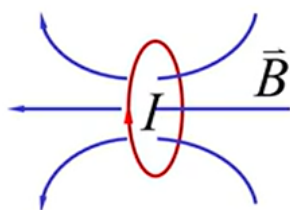
但 B 不能无限变大,实际应用中若通正弦交流电,则使得电子在 $\frac{T}{4}$ 内达到要求的速度并离开加速器.

8.3 自感与互感

电容器承装电场的能量,电感承装磁场的能量.

自感系数和互感系数的量纲相同.

8.3.1 自感



设闭合线圈中的磁通为 Φ .类似于电容 $C = \frac{Q}{U}$,定义自感系数 $L = \frac{\Phi}{I}$.

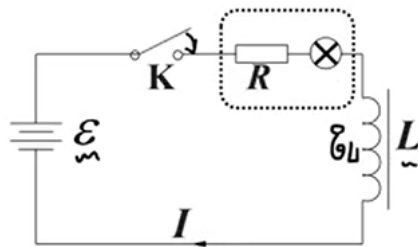
无铁磁质时,自感仅与线圈形状、磁介质和匝数有关.若线圈有 N 匝,则自感系数 $L = \frac{\psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}$.

自感的应用:稳流、保护用电器、LC谐振电路、滤波电路、感应圈等.

$$\text{自感电动势 } \mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -\left(L\frac{dI}{dt} + \frac{dL}{dt}I\right) = -\left(L\frac{dI}{dt} + 0 \cdot I\right) = -L\frac{dI}{dt}.$$

$I \uparrow$ 时, $\frac{dI}{dt} > 0$,则 \mathcal{E}_L 与原电流方向相反,阻碍电流变大;同理 $I \downarrow$ 时, \mathcal{E}_L 与原电流方向相同阻碍电流减小.

如下图,考察闭合电键 K 后电路中电流的变化,忽略自感线圈的电阻.



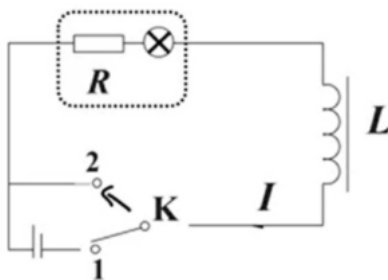
$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = IR \Leftrightarrow \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = IR \Leftrightarrow -L \frac{dI}{dt} = R \left(I - \frac{\mathcal{E}}{R} \right), \text{分离变量得} \frac{dI}{I - \frac{\mathcal{E}}{R}} = -\frac{R}{L} dt,$$

$$\text{两边积分得} \int_0^{\frac{\mathcal{E}}{R}} \frac{dI}{I - \frac{\mathcal{E}}{R}} = \int_0^t \left(-\frac{R}{L} \right) dt, \text{解得} I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \text{显然} I \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (t \rightarrow \infty).$$

故闭合电键后,电路中的电流缓慢增大直至稳态,灯泡缓慢变亮.

自感线圈的作用:保护灯泡免受闭合电键瞬间大电流的冲击.

如下图,若电键 K 突然从1打到2,考察回路中电流的变化,忽略自感线圈的电阻.初始电流 $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$.



$$\mathcal{E}_L = -IR \Leftrightarrow L \frac{dI}{dt} = IR, \text{分离变量并两边积分得} \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = \int_0^t \left(-\frac{R}{L} \right) dt,$$

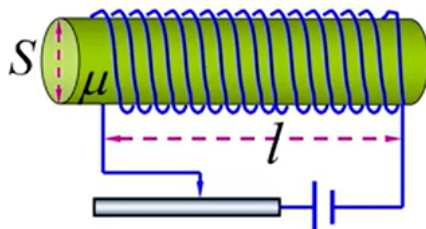
$$\text{解得} I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \text{显然} I \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

自感的计算方法:

①设线圈中通电流 i , 求出磁场 B , 求出全磁通 ψ , 利用 $L = \frac{\psi}{i}$ 求 L . (常用)

②求自感电动势 \mathcal{E}_L , 利用 $L = \left| \frac{\mathcal{E}_L}{-\frac{di}{dt}} \right|$ 求 L .

[例8.3.1] 如下图,已知长直密绕螺线管的 l, S, N, μ , 忽略边缘效应,求其自感 L .

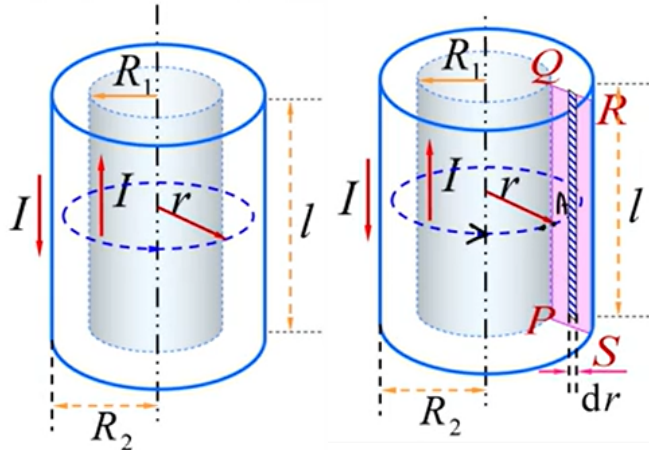


[解] 设线圈通电流 I .

线圈数密度 $n = \frac{N}{l}$, 则磁感强度 $B = \mu n I$, 磁通 $\Phi_m = BS = \mu n I S$, 全磁通 $\psi = N \Phi_m = \mu n^2 I l S$.

故自感 $L = \frac{\psi}{I} = \mu n^2 l S$, 它与螺线管中的磁介质、线圈缠绕的数密度、螺线管的体积有关.

[例8.3.2] 如下图, 有两同轴圆筒形导体, 内外半径分别为 R_1 和 R_2 , 通过它们的电流均为 I , 但电流方向相反. 设两圆筒间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质, 求其自感 L .



[解] 因最终结果与 I 无关, 不妨设内层电流向上, 外层电流向下.

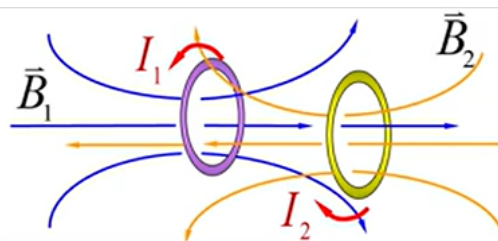
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}, \text{ 则 } B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}, \text{ 它是 } r \text{ 的函数, 即磁场不均匀.}$$

考察磁场对紫色截面的通量, 显然 \vec{B} 垂直于截面. 取面元 $dS = l dr$.

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu I}{2\pi r} l dr, \text{ 则 } \Phi_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I l}{2\pi r} dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \text{ 故 } L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

8.3.2 互感

如下图, 考虑两线圈间的互感. 记1号线圈在2号线圈中的互感的互感系数为 M_{21} .



$$I_1 \text{ 在 } I_2 \text{ 回路中产生的磁通 } \Phi_{21} = M_{21} I_1.$$

$$I_2 \text{ 在 } I_1 \text{ 回路中产生的磁通 } \Phi_{12} = M_{12} I_2.$$

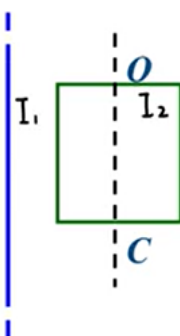
$$\text{关系: } M_{12} = M_{21} = M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}.$$

互感仅与两线圈的形状、大小、匝数、相对位置和周围的磁介质有关.

互感的应用: 通过互感线圈使能量或信号由一个线圈传递到另一线圈. 如电源变压器、中周变压器、输入变压器、输出变压器、电压互感器、电流互感器等.

由于互感,电路间会相互干扰,可采用磁屏蔽等方法减小干扰.

[例8.3.3] 如下图,讨论下列情况中互感是否变化.



- (1) 线框平行直线移动时,因 I 不变, Φ_m 不变,则 M 不变.
- (2) 线框垂直于直导线向右移动时, $\Phi_m \downarrow$, $M \downarrow$.同理向左移动时 $M \uparrow$.
- (3) 线框绕 OC 轴转动时, \vec{S} 与 \vec{B} 的夹角改变, Φ_m 改变, M 改变.
- (4) 直导线中电流变化时,若 $I_1 \uparrow$,则 $B_1 \uparrow$, $\Phi_{21} \uparrow$,但 $M = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$,若 Φ_{21} 是关于 I_1 的一次函数,则 M 不变.

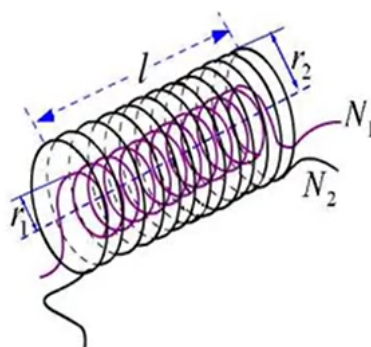
互感的计算方法:

①利用 $M_{12} = M_{21} = M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$ 计算,即 $i_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \psi_{21} \rightarrow M$ 或 $i_2 \rightarrow B_2 \rightarrow \psi_{12} \rightarrow M$. (常用)

②先求两线圈之一的互感电动势,即 $\mathcal{E}_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$ 或 $\mathcal{E}_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$,再求互感系数

$$M = \left| \frac{\mathcal{E}_{21}}{-\frac{dI_1}{dt}} \right| = \left| \frac{\mathcal{E}_{12}}{-\frac{dI_2}{dt}} \right|.$$

[例8.3.4] 如下图,有两长度均为 l ,半径分别为 r_1 和 r_2 ($r_1 < r_2$),匝数分别为 N_1 和 N_2 的两同轴长直密绕螺线管.求它们的互感 M .

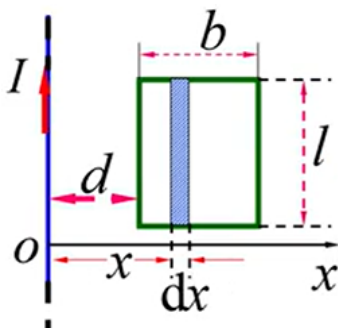


[解] 注意螺线管产生的磁场主要集中在其内部,在其外部磁场很弱,可忽略.

数密度 $n_1 = \frac{N_1}{l}$,磁感强度 $B_1 = \mu_0 n_1 I_1$,磁通 $\Phi_{21} = B_1 \pi r_1^2 = \mu_0 n_1 I_1 \pi r_1^2$,

全磁通 $\psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l I_1 \pi r_1^2$,互感 $M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l \pi r_1^2$.

[例8.3.5] 如下图,在磁导率为 μ 的均匀无限大磁介质中,一无限长直导线与一长、宽分别为 l 和 b 的矩形线圈共面,直导线与矩形线圈的一侧平行,相距 d .求两者的互感 M .



[解] $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi x = I \Rightarrow B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi x}$, 则 $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_d^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d}$.

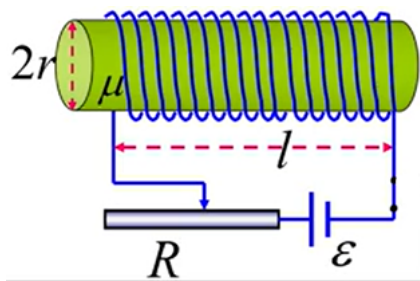
故 $M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d}$.

8.4 磁场的能量与能量密度

静电场的能量与能量密度从电容切入: 电容 $C = \frac{Q}{U}$, 电场能量 $W_e = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$.

电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2} D E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$, 则 $W_e = \int_V w_e dV$.

如下图,考察自感线圈的磁场能量.



$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = IR \Leftrightarrow \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = IR$, 两边同乘 dt 得 $\mathcal{E} dt - L dI = IR dt$,

两边同乘 I 并积分得 $\int_0^t \mathcal{E} I dt - \int_0^I I L dI = \int_0^t I^2 R dt$, 即 $\int_0^t \mathcal{E} I dt = \frac{1}{2} L I^2 + \int_0^t I^2 R dt$,

其中 $\int_0^t \mathcal{E} I dt$ 为电源做功, $\int_0^t I^2 R dt$ 为电阻产生的Joule热, 定义磁场能量 $W_m = \frac{1}{2} L I^2$.

对上述螺线管, 已知磁介质的磁导率 μ , 长度 l , 横截面积 S , 匝数的数密度 n ,

$L = \mu n^2 l S = \mu n^2 V$, $B = \mu n I$, 则 $I = \frac{B}{\mu n}$, 进而磁场能量 $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V$,

磁场能量密度 $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B H$. 事实上, 该结果适用于铁磁质外的所有线性磁化介质.

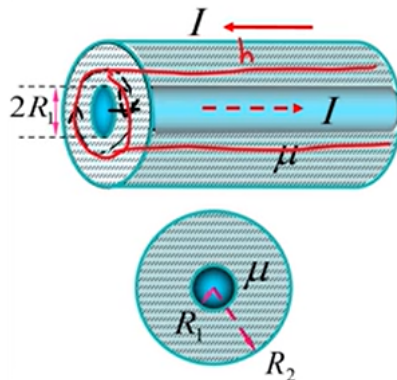
若磁场中各点处的 w_m 相等, 则 $W_m = w_m V$.

若磁场中各点处的 w_m 不相等,则 $W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV$.

从能量角度理解电感中的电流不能突变:磁能不能突变,否则功率为无穷大.

从磁能看,任一电流系统都有相应的电感 L ,则可从能量出发求 L ,即 $L = \frac{2W_m}{I^2}$.

[例8.4.1] 如下图,同轴电缆间充满磁导率为 μ 的磁介质,芯线与圆筒上的电流 I 大小相等、方向相反.已知内外半径分别为 R_1 和 R_2 ,求同轴电缆的磁能.

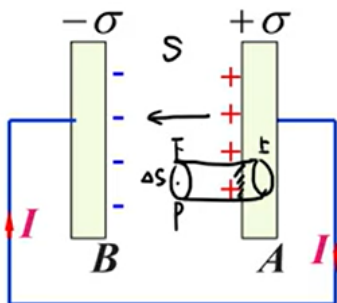


[解] $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}, B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}, w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{\mu I^2}{4\pi^2 r^2}$.

取半径为 r 、厚度为 dr 、高度为 h 的薄圆筒为体积元.

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r h dr = \frac{\mu I^2}{4\pi} h \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

8.5 位移电流



传导电流 $I_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} S$, 传导电流的电流密度 $j_c = \frac{d\sigma}{dt}$.

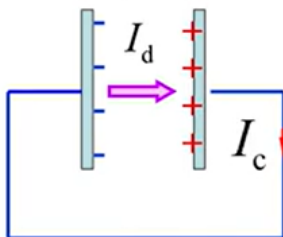
极板间, $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \Delta S = \sigma \Delta S \Rightarrow D = \sigma$, 两边对 t 求导得 $\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{d\sigma}{dt} = j_c$.

$D = \sigma$ 两边同乘 S 得 $\Phi_D = q$, 两边对 t 求导得 $\frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = \frac{dq}{dt} = I_c$.

定义位移电流 $I_d = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$, 位移电流的电流密度 $\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

通过电场中某一截面的位移电流等于通过该截面的电位移通量对时间的变化率,

$$\text{即 } I_d = \int_S \vec{j}_d \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{d\psi}{dt}.$$



定义全电流 $I_s = I_c + I_d$, 它是连续的, 其中 $I_c = \int_S \vec{j}_c \cdot d\vec{S}$, $I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right) = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$.

在如上图的串联电路中, $I_d = I_c$, 电流方向相同.

传导电流与位移电流的异同:

(1) 共同点: 都能激发磁场.

(2) 不同点:

传导电流 I_c	位移电流 I_d
带电粒子宏观定向移动形成	真空中: 纯粹变化的电场产生 介质中: 一部分来自束缚电荷的移动
只能在导体中流动	依赖于 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, 有变化的电场就有位移电流
能产生焦耳热、化学效应(如电解)	不能产生焦耳热、化学效应(如电解)

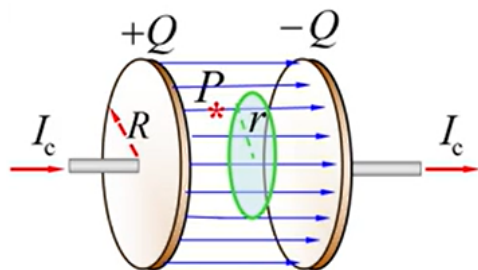
考察磁介质中的Ampere环路定理:

$$\text{积分形式: } \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i0} = I_c + I_d = \int_S \vec{j}_c \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

$$\text{微分形式: } \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

这表明: 变化的电场能产生磁场.

[例8.5.1] 有一圆形平行板电容器, 半径 $R = 3 \text{ cm}$. 现对其充电, 使得电路上的传导电流 $I_c = \frac{dQ}{dt} = 2.5 \text{ A}$. 忽略边缘效应. 求: (1) 两极板间的位移电流; (2) 两极板间离轴线距离 $r = 2 \text{ cm}$ 的点 P 处的磁感强度.



[解] (1) $I_d = I_c$.

(2) 电位移对半径为 r 的截面的通量 $\Phi_D = D\pi r^2 = \sigma\pi r^2 = \frac{Q}{R^2}r^2$, 则位移电流 $I_d = \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{r^2}{R} \frac{dQ}{dt}$.

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_d \Leftrightarrow H2\pi r = 0 + \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt} \Rightarrow H = \frac{r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt}, B = \mu H = \frac{\mu r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt}.$$

8.6 Maxwell方程组

Maxwell假设: ①有旋电场 \vec{E}_k ; ②位移电流密度 $\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

[Maxwell方程组]

定理	积分形式	微分形式
电场的Gauss定理	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{i0} = \int_V \rho_0 dV$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$
电场的环路定理	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
磁场的Gauss定理	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
磁场的Ampere环路定理	$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

前两行表明磁能生电,后两行表明电能生磁.