

# 高等代数知识点梳理

## 第四章 矩阵

### 一、矩阵及其运算

#### 1、矩阵的概念

(1) 定义：由  $s \times n$  个数  $a_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,s$ ;  $j=1,2,\dots,n$ ) 排成  $s$  行  $n$  列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \text{ 称为 } s \text{ 行 } n \text{ 列矩阵, 简记为 } A = (a_{ij})_{s \times n}.$$

(2) 矩阵的相等：设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{l \times k}$ , 如果  $m=l$ ,  $n=k$ , 且  $a_{ij} = b_{ij}$ , 对  $i=1,2,\dots,m$ ;  $j=1,2,\dots,n$  都成立, 则称  $A$  与  $B$  相等, 记  $A=B$ 。

(3) 各种特殊矩阵：行矩阵, 列矩阵, 零矩阵, 方阵, (上)下三角矩阵, 对角矩阵, 数量矩阵, 单位矩阵。

#### 2、矩阵的运算

$$(1) \text{ 矩阵的加法: } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}.$$

运算规律:

$$\textcircled{1} A+B=B+A$$

$$\textcircled{3} A+O=A$$

$$\textcircled{2} (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$\textcircled{4} A+(-A)=O$$

$$(2) \text{ 数与矩阵的乘法: } k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{s1} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix}$$

运算规律:

$$\textcircled{1} (k+l)A=kA+lA$$

$$\textcircled{3} k(lA)=(kl)A$$

$$\textcircled{2} k(A+B)=kA+kB$$

$$\textcircled{4} A+(-A)=O$$

$$(3) \text{ 矩阵的乘法: } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sm} \end{pmatrix} \text{ 其中}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, 2, \cdots s; \quad j = 1, 2, \cdots m。$$

运算规律:

$$\textcircled{1} (AB)C = A(BC)$$

$$\textcircled{3} (B+C)A = BA + CA$$

$$\textcircled{2} A(B+C) = AB + AC$$

$$\textcircled{4} k(AB) = A(kB) = (kA)B$$

一般情况,

$$\textcircled{1} AB \neq BA$$

$$\textcircled{2} AB = AC, \quad A \neq 0, \quad \nRightarrow B = C$$

$$\textcircled{3} AB = 0 \nRightarrow A = 0 \text{ 或 } A = 0$$

$$(4) \text{ 矩阵的转置: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad A \text{ 的转置就是指矩阵 } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

运算规律:

$$\textcircled{1} (A')' = A$$

$$\textcircled{3} (AB)' = B' A'$$

$$\textcircled{2} (A+B)' = A' + B'$$

$$\textcircled{4} (kA)' = kA'$$

$$(5) \text{ 方阵的行列式: 设方阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ 则 } A \text{ 的行列式为 } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

运算规律:

$$\textcircled{1} |A'| = |A|$$

$$\textcircled{2} |kA| = k^n |A|$$

$$\textcircled{3} |AB| = |A| |B| = |BA|$$

这里  $A, B$  均为  $n$  级方阵。

## 二、矩阵的逆

### 1、基本概念

(1) 矩阵可逆的定义:  $n$  级方阵  $A$  称为可逆的, 如果有  $n$  级方阵  $B$ , 使得  $AB = BA = E$ , 这里  $E$  是单位矩阵。

$$(2) \text{ 伴随矩阵: 设 } A_{ij} \text{ 是矩阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 中元素 } a_{ij} \text{ 的代数余子式, 矩阵}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ 称为 } A \text{ 的伴随矩阵。}$$

### 1、基本性质

(1) 矩阵  $A$  可逆的充分必要条件是  $A$  非退化 ( $|A| \neq 0$ ), 而  $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

(2) 如果矩阵  $A, B$  可逆, 那么  $A'$  与  $AB$  也可逆, 且  $(A')^{-1} = (A^{-1})', (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。

(3) 设  $A$  是  $s \times n$  矩阵, 如果  $P$  是  $s \times s$  可逆矩阵,  $Q$  是  $n \times n$  可逆矩阵, 那么

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(PA) = \text{rank}(AQ)$$

### 三、矩阵分块

对于两个有相同分块的准对角矩阵  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_l \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_l \end{pmatrix}$  如果它们相

应的分块是同级的, 则

$$(1) AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_l B_l \end{pmatrix};$$

$$(2) A + B = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_l + B_l \end{pmatrix};$$

$$(3) |A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_l|;$$

$$(4) A \text{ 可逆的充要条件是 } A_1, A_2, \dots, A_l \text{ 可逆, 且此时, } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_l^{-1} \end{pmatrix}.$$

### 四、初等变换与初等矩阵

#### 1、基本概念

(1) 初等变换: 初等行列变换称为初等变换所得到的矩阵。

① 用一个非零的数  $k$  乘矩阵的第  $i$  行 (列) 记作  $r_i \times k (c_i \times k)$

② 互换矩阵中  $i, j$  两行 (列) 的位置, 记作  $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$

③将第  $i$  行 (列) 的  $k$  倍加到第  $j$  行 (列) 上, 记作  $r_j + kr_i (c_i + kc_j)$  称为矩阵的三种初等行 (列) 矩阵。

(2) 初等方阵: 单位矩阵经一次初等变换所得到的矩阵。

## 2、基本性质

(1) 对一个  $s \times n$  矩阵  $A$  作一次初等行变换就相当于在  $A$  的左边乘上相应的  $s \times s$  初等矩阵; 对  $A$  作一次初等列变换就相当于在  $A$  的右边乘上相应的  $n \times n$  初等矩阵。

(2) 任意一个  $s \times n$  矩阵  $A$  都与一形式为 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
 的等价, 它称为矩阵

$A$  的标准型, 主对角线上 1 的个数等于  $A$  的秩。

(3)  $n$  级矩阵  $A$  为可逆的充分必要条件是, 它能表示成一些初等矩阵的乘积。

(4) 两个  $s \times n$  矩阵  $A, B$  等价的充分必要条件是, 存在可逆的  $s$  级矩阵  $P$  与可逆的  $n$  级矩阵  $Q$ , 使  $B = PAQ$ 。

## 3、用初等变换求逆矩阵的方法

把  $n$  级矩阵  $A, E$  这两个  $n \times n$  矩阵凑在一起, 得到一个  $n \times 2n$  矩阵  $(AE)$ , 用初等行变换把它的左边一半化成  $E$ , 这时, 右边的一半就是  $A^{-1}$ 。

## 第五章 二次型

### 1、二次型及其矩阵表示

(1) 二次型: 设  $P$  是一数域, 一个系数在数域  $P$  中的  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次多项式  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2$  称为数域  $P$  上的一个  $n$  元二次型。

(2) 二次型矩阵: 设  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是数域  $P$  上的  $n$  元二次型,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  可写成矩阵形式  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ 。其中  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ ,  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,  $A' = A$ 。  $A$  称为二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的矩阵。秩  $(A)$  称为二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的秩。

(3) 矩阵的合同：数域  $P$  上  $n \times n$  矩阵  $A, B$  称为合同的，如果有属于  $P$  上可逆的  $n \times n$  矩阵  $C$ ，使  $B = C'AC$ 。

## 2、标准型及规范性

**定理** 数域  $P$  上任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换化成标准型  $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$ ，用矩阵的语言叙述，即数域  $P$  上任意一个对称矩阵合同于一个对角矩阵。

**定理** 任意一个复系数的二次型经过一适当的非退化的线性替换化成规范型  $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$ ，且规范形是唯一的。

**定理** 任意一个实系数的二次型经过一适当的非退化的线性替换化成规范型  $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$ ，且规范形是唯一的，其中  $p$  称为此二次型的正惯性指数， $q = r - p$  称为此二次型的负惯性指数， $s = p - q$  称为此二次型的符号差。

## 3、正定二次型及正定矩阵

### (1) 基本概念

① 正定二次型：实二次型  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  称为正定的，如果对于任意一组不全为零的实数  $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ，都有  $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$ 。

② 正定矩阵：实对称矩阵  $A$  称为正定的，如果二次型  $X'AX$  正定。

③ 负定、半正定、半负定、不定的二次型：设  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  是一实二次型，对于任意一组不全为零的实数  $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ，如果  $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) < 0$ ，那么  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  称为负定的；如果都有  $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \geq 0$  那么称  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  为半正定的；如果都有  $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \leq 0$ ，那么  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  称为半负定的；如果它既不是半正定的又不是半负定的，那么  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  就称为不定的。

(2) 正定二次型、正定矩阵的判定：对于实二次型  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ ，其中  $A$  是实对称的，下列条件等价：

①  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  是正定的；

②  $A$  是正定的；

③  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的正惯指数为  $n$ ;

④  $A$  与单位矩阵合同;

⑤  $A$  的各阶顺序主子式大于零。

## 第六章 线性空间

### 1、线性空间的定义

设  $V$  是一个非空集合,  $P$  是一个数域。在集合  $V$  的元素之间定义了一种代数运算; 这就是说, 给出了一个法则, 对于  $V$  中的任意两个元素  $\alpha$ 、 $\beta$  在  $V$  中都有唯一的一个元素  $\gamma$  与它们对应, 称为  $\alpha$  与  $\beta$  的和, 记为  $\gamma = \alpha + \beta$ 。在数域  $P$  与集合  $V$  的元素之间还定义了一种运算, 叫做数量乘法; 这就是说, 对于属于  $P$  中任意数  $k$  与  $V$  中任意元素  $\alpha$ , 在  $V$  中都有唯一的元素  $\delta$  与它们对应, 称为  $k$  与  $\alpha$  的数量乘积, 记为  $\delta = k\alpha$ 。如果加法与数量乘法满足下述规则, 那么  $V$  称为数域  $P$  上的线性空间。

$$(1) \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$(2) \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma;$$

(3) 在  $V$  中有一元素  $0$ , 对于  $V$  中任意元素  $\alpha$  都有  $\alpha + 0 = \alpha$  (具有这个性质的元素  $0$  称为  $V$  的零元素);

(4) 对于  $V$  中的每一个元素  $\alpha$ , 都有  $V$  中的元素  $\beta$ , 使得  $\alpha + \beta = 0$  ( $\beta$  称为  $\alpha$  的负元素);

$$(5) 1\alpha = \alpha;$$

$$(6) k(l\alpha) = (kl)\alpha;$$

$$(7) (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha;$$

$$(8) k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta。$$

### 2、维数, 基与坐标

(1) 如果在线性空间  $V$  中有  $n$  个线性无关的向量。但是没有更多数目的线性无关的向量, 那么  $V$  就称为  $n$  维的。如果在  $V$  中可以找到任意多个线性无关的向量, 那么  $V$  就称为无限维的。

(2) 如果在线性空间  $V$  中有  $n$  个线性无关的向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 且  $V$  中任一向量都

可以用它们线性表出，那么  $V$  是  $n$  维的，而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  就是  $V$  的一组基。

(3) 在  $n$  维线性空间中， $n$  个线性无关的向量  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  称为  $V$  的一组基。设  $\alpha$  是  $V$  中任一向量，于是  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \alpha$  线性相关，因此  $\alpha$  可以被基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  唯一的线性表出  $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n$ ，其中系数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  称为  $\alpha$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  下的坐标，记  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

### 3、基变换与坐标变换

(1) 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  与  $e_1, e_2, \dots, e_n$  是  $n$  维线性空间  $V$  中两组基，如果

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ 矩阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 称为 } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$$

到基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  的过度矩阵。

(2) 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  与  $e_1, e_2, \dots, e_n$  是  $n$  维线性空间  $V$  中两组基，由基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  到基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  的过度矩阵为  $A$ ，向量  $\alpha$  在这两组基下的坐标分别为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  与

$$(y_1, y_2, \dots, y_n), \text{ 则 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

### 4、线性子空间

(1) 数域  $P$  中线性空间  $V$  的一个非空子集  $W$  称为  $V$  的一个线性子空间，如果  $W$  对于  $V$  的两种运算也构成数域  $P$  上的线性空间。

(2) 线性空间  $V$  的非空子集  $W$  是  $V$  的子空间的充分必要条件是  $W$  对于  $V$  的两种运算封闭。

(3) 线性空间  $V$  的子空间  $V_1, V_2$  的交与和，即  $V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$  都是  $V$  的子空间。

(4) 维数公式：如果  $V_1, V_2$  是线性空间  $V$  的两个子空间，那么

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

(5) 设  $V_1, V_2$  是线性空间  $V$  的子空间，如果和  $V_1 + V_2$  中的每个向量  $\alpha$  的分解式

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_1 \in V_1$ ,  $\alpha_2 \in V_2$  是唯一的, 这个和就称为直和, 记为  $V_1 \oplus V_2$ 。

(6) 设  $V_1, V_2$  是线性空间  $V$  的子空间, 下列这些条件是等价的:

- ①  $V_1 + V_2$  是直和;
- ② 零向量的表示式是唯一的;
- ③  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ;
- ④  $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ 。

## 5、线性空间的同构

(1) 数域  $P$  上两个线性空间  $V$  与  $V'$  称为同构的, 如果由  $V$  到  $V'$  有一个 1—1 的映上的映射  $\sigma$ , 具有以下性质:

- ①  $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$ ;
- ②  $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$ 。

其中  $\alpha, \beta$  是  $V$  中任意向量,  $k$  是  $P$  中任意数, 这样的映射  $\sigma$  称为同构映射。

(2) 数域  $P$  两个有限维数线性空间同构的充分必要条件是它们有相同维数。

## 第七章 线性变换

### 一、线性变换及其运算

#### 1、线性变换的定义

线性空间  $V$  的一个变换  $\mathfrak{A}$  称为线性变换, 如果对于  $V$  中任意元素  $\alpha, \beta$  和数域  $P$  中任意数  $k$ , 都有  $\mathfrak{A}(\alpha + \beta) = \mathfrak{A}(\alpha) + \mathfrak{A}(\beta)$ ,  $\mathfrak{A}(k\alpha) = k\mathfrak{A}(\alpha)$ 。

#### 2、线性变换的运算

设  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  是数域  $P$  上线性空间  $V$  的两个线性变换,  $k \in P$ 。

(1) 加法:  $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\alpha) = \mathfrak{A}(\alpha) + \mathfrak{B}(\alpha)$

(2) 数乘:  $(k\mathfrak{A})(\alpha) = k\mathfrak{A}(\alpha)$

(3) 乘法:  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\alpha) = (\mathfrak{A})(\mathfrak{B}(\alpha))$

(4) 逆变换:  $V$  的变换  $\mathfrak{A}$  称为可逆的, 如果有  $V$  的变换  $\mathfrak{B}$ , 使  $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$  ( $V$  的恒等变换)。

#### 3、变换的矩阵



(1) 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是数域  $P$  上的  $n$  维线性空间  $V$  的一组基,  $\mathfrak{A}$  是  $V$  中的一个线性变

换, 基向量的象可以被基线性表出: 
$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + \dots + a_{1n}\varepsilon_n \\ Ae_2 = a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \dots + a_{2n}\varepsilon_n \\ \dots \\ Ae_n = a_{n1}\varepsilon_1 + a_{n2}\varepsilon_2 + \dots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$
, 用矩阵来表示是

$$\mathfrak{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\mathfrak{A}\varepsilon_1, \mathfrak{A}\varepsilon_2, \dots, \mathfrak{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A, \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 矩阵}$$

$A$  称为  $\mathfrak{A}$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  下列矩阵。

(2) 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是数域  $P$  上  $n$  维向量空间  $V$  的一组基, 在这组基下, 每个线性变换按公式对应一个  $n \times n$  矩阵。这个对应具有以下性质:

- ①线性变换的和对应于矩阵的和;
- ②线性变换的乘积对应于矩阵的乘积;
- ③线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积;
- ④可逆的线性变换与可逆矩阵对应, 且逆变换对应于逆矩阵。

(3) 设线性变换  $\mathfrak{A}$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  下的矩阵是  $A$ , 向量  $\xi$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  下的坐标是  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 则  $\mathfrak{A}\xi$  在基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  下的坐标  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  可按公式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ 计算。}$$

(4) 设  $A, B$  为数域  $P$  上两个  $n$  级矩阵, 如果可以找到数域  $P$  上的  $n$  级可逆矩阵  $X$ , 使得  $B = X^{-1}AX$ , 就说  $A$  相似于  $B$ 。

(5) 线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似的; 反过来, 如果两个矩阵相似, 那么它们可以看作同一线性变换在两组基下所对应的矩阵。

## 二、特征值与特征向量

### 1、特征值与特征向量的定义

设  $\mathfrak{A}$  是数域  $P$  上线性空间  $V$  的一个线性变换, 如果对于数域  $P$  中一数  $\lambda_0$ , 存在一非零向量  $\xi$ , 使得  $\mathfrak{A}\xi = \lambda_0\xi$ , 那么  $\lambda_0$  称为  $\mathfrak{A}$  的一个特征值,  $\xi$  称为  $\mathfrak{A}$  的属于特征值  $\lambda_0$  的一个特

征向量。

## 2、特征多项式的定义

设  $A$  是数域  $P$  上的一个  $n$  级矩阵,  $\lambda$  是一个文字, 矩阵  $\lambda E - A$  的行列式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为  $A$  的特征多项式, 这是数域  $P$  上的一个  $n$  次多项式,

则  $f(A) = A^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})A^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|E = 0$ 。

## 3、特征值与特征向量的性质

(1) 设  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  是  $n$  级矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  的全体特征值, 则  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ ,  $\lambda_1 \cdots \lambda_n = |A|$ ;

(2) 属于不同特征值的特征向量是线性无关的;

(3) 如果  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  是线性变换  $A$  的不同的特征值, 而  $a_{i1}, \cdots, a_{ir_i}$  是属于特征值  $\lambda_i$  的线性无关的特征向量,  $i = 1, 2, \cdots, k$ , 那么向量组  $a_{11}, \cdots, a_{1r_1}, \cdots, a_{k1}, \cdots, a_{kr_k}$  也线性无关。

## 4、线性变换在某组基下为对角矩阵的条件

(1) 设  $\mathfrak{A}$  是  $n$  维线性空间  $V$  的一个线性变换,  $\mathfrak{A}$  的矩阵可以在某一组基下为对角矩阵的充要条件是,  $\mathfrak{A}$  有  $n$  个线性无关的特征值。

(2) 如果在  $n$  维线性空间  $V$  中的, 线性变换  $\mathfrak{A}$  的特征多项式在数域  $P$  中有  $n$  个不同的根, 即  $\mathfrak{A}$  有  $n$  个不同的特征值, 那么  $\mathfrak{A}$  在某组基下的矩阵是对角矩阵。

(3) 在复数域上的线性空间中, 如果线性变换  $\mathfrak{A}$  的特征多项式没有重根, 那么  $\mathfrak{A}$  在某组基下的矩阵是对角矩阵。

## 三、矩阵的相似

### 1、矩阵相似的定义

设  $A, B$  为数域  $P$  上两个  $n$  级矩阵, 如果可以找到数域  $P$  上的  $n$  级可逆矩阵  $X$ , 使得  $B = X^{-1}AX$ , 就说  $A$  相似于  $B$ , 记为  $A \sim B$ 。

### 2、相似矩阵的性质

(1) 相似矩阵有相同的特征多项式;

(2) 相似矩阵有相同的最小多项式。

## 四、线性变换的值域与核

1、设  $\mathfrak{A}$  是线性空间  $V$  的一个线性变换， $\mathfrak{A}$  的全体象组成的集合称为  $\mathfrak{A}$  的值域，用  $\mathfrak{A}V$  表示。 $\mathfrak{A}V$  是  $V$  的子空间， $\dim(\mathfrak{A}V)$  称为  $\mathfrak{A}$  的秩，所有被  $\mathfrak{A}$  变成零向量的向量组成的集合称为  $\mathfrak{A}$  的核，记为  $\mathfrak{A}^{-1}(0)$ 。 $\mathfrak{A}^{-1}(0)$  是  $V$  的子空间，维（ $\dim(\mathfrak{A}^{-1}(0))$ ）称为  $\mathfrak{A}$  的零度。

2、设  $\mathfrak{A}$  是  $n$  维线性空间  $V$  的线性变换， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是  $V$  的一组基。在这组基下  $\mathfrak{A}$  的矩阵是  $A$ ，则

$$(1) \mathfrak{A}V = L(A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \dots, A\varepsilon_n);$$

$$(2) \dim(\mathfrak{A}) = \text{rank}(A)$$

3、设  $\mathfrak{A}$  是  $n$  维线性空间  $V$  的线性变换，则  $\dim(\mathfrak{A}V) + \dim(\mathfrak{A}^{-1}(0)) = n$ 。

## 五、不变子空间

设  $\mathfrak{A}$  是数域  $P$  上线性空间  $V$  的线性变换， $W$  是  $V$  的子空间，如果  $W$  中的向量在  $\mathfrak{A}$  下的象仍在  $W$  中，就称  $W$  是  $\mathfrak{A}$  的不变子空间，简称  $\mathfrak{A}$ -子空间。

## 第九章 欧几里得空间

### 一、欧氏空间的基本概念

1、设  $V$  是数域  $R$  上线性空间，在  $V$  上定义了一个二元实函数，称为内积，记为  $(\alpha, \beta)$ ，特具有一下性质：

$$(1) (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha);$$

$$(2) (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta);$$

$$(3) (\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma);$$

(4)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ ，当且仅当  $\alpha = 0$  时  $(\alpha, \beta) = 0$ 。这里  $\alpha, \beta, \gamma$  是  $V$  中任意的向量， $k$  是任意实数，这样的线性空间  $V$  称为欧几里得空间。

2、非负实数  $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$  称为向量  $\alpha$  的长度，记为  $|\alpha|$ 。

3、非零向量  $\alpha, \beta$  的夹角  $\langle \alpha, \beta \rangle$  规定为  $\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$ ， $0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi$ 。

4、如果向量  $\alpha, \beta$  的内积为零，即  $(\alpha, \beta) = 0$ ，那么  $\alpha, \beta$  称为正交或互相垂直，记为  $\alpha \perp \beta$ 。

5、设  $V$  是一个  $n$  维欧几里得空间，在  $V$  中取一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  令  $a_{ij} = (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ ， $i, j = 1, 2, \dots, n$  矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  称为基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  的度量矩阵。

- (1) 度量矩阵是正定的；
- (2) 不同基底的度量矩阵是合同的。

6、欧氏空间  $V$  中一组非零向量，如果它们两两正交，就称为一正交向量组。在  $n$  维欧氏空间中，由  $n$  个向量组成的正交向量组称为正交基；由单位向量组成的正交基称为标准正交基。

## 二、同构

1、实数域  $R$  上欧氏空间  $V$  与  $V'$  称为同构，如果由  $V$  到  $V'$  有一个 1-1 上的映射  $\sigma$ ，适合

- (1)  $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$ ；
- (2)  $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$ ；
- (3)  $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$ ；

这里  $\alpha, \beta \in V$ ， $k \in R$ ，这样的映射  $\sigma$  称为  $V$  到  $V'$  的同构映射。

2、两个有限维欧氏空间同构的充分条件是它们的维数相同。

## 三、正交矩阵

### 1、基本概念

- (1)  $n$  级实数矩阵  $A$  称为正交矩阵，如果  $A' A = E$ 。
- (2) 欧氏空间  $V$  的线性变换  $A$  称为正交变换，如果它保持向量的内积不变，即对任意的  $\alpha, \beta \in V$  都有  $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$

### 2、主要结论

设  $\mathfrak{A}$  是欧氏空间  $V$  的一个线性变换，于是下面 4 个命题等价：

- (1)  $\mathfrak{A}$  是正交变换；
- (2)  $\mathfrak{A}$  保持向量的长度不变，即对于  $\alpha \in V$ ， $|\mathfrak{A}\alpha| = |\alpha|$ ；
- (3) 如果  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是标准正交基，那么  $\mathfrak{A}\varepsilon_1, \mathfrak{A}\varepsilon_2, \dots, \mathfrak{A}\varepsilon_n$  也是标准正交基；
- (4)  $\mathfrak{A}$  在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

## 四、正交子空间

### 1、基本概念

(1) 设  $V_1, V_2$  是欧氏空间  $V$  中两个子空间。如果对于任意的  $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$  恒有  $(\alpha, \beta) = 0$ , 则称  $V_1, V_2$  为正交的, 记  $V_1 \perp V_2$ 。一个向量  $\alpha$ , 如果对于任意的  $\beta \in V_1$ , 恒有  $(\alpha, \beta) = 0$ , 则称  $\alpha$  与子空间  $V_1$  正交, 记为  $\alpha \perp V_1$ 。

(2) 子空间  $V_2$  称为子空间的一个正交补, 如果  $V_1 \perp V_2$ , 并且  $V_1 + V_2 = V$ 。

### 2、主要结论

(1) 如果子空间  $V_1, \dots, V_s$  两两正交, 那么和  $V_1 + \dots + V_s$  是直和。

(2) 欧氏空间  $V$  的每一个子空间  $V_1$  都有唯一的正交补  $V_1^\perp$ 。

(3)  $V_1^\perp$  恰由所有与  $V_1$  正交的向量组成。

## 五、对称矩阵的性质

### 1、实对称矩阵的性质

(1) 实对称矩阵的特征值皆为实数;

(2) 设  $A$  是  $n$  级实对称矩阵, 则  $R^n$  中属于  $A$  的不同特征值的特征向量必正交;

(3) 对于任意一个  $n$  级实对称矩阵  $A$ , 都存在一个  $n$  级正交矩阵  $T$ , 使  $T'AT = T^{-1}AT$  成对角矩阵。

### 2、对称矩阵

(1) 设  $\mathfrak{A}$  是欧氏空间  $V$  中的一个线性变换, 如果对于任意的  $\alpha, \beta \in V$ , 有  $(\mathfrak{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathfrak{A}\beta)$  则称  $\mathfrak{A}$  为对称变换。

(2) 对称变换的性质:

① 对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵;

② 设  $\mathfrak{A}$  是对称变换,  $V_1$  是  $\mathfrak{A}$ -子空间, 则  $V_1^\perp$  也是  $\mathfrak{A}$ -子空间;

③ 设  $\mathfrak{A}$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  中的对称变换, 则  $V$  中存在一组由  $\mathfrak{A}$  得特征向量构成的标准正交基。

## 六、向量到子空间的距离, 最小二乘法

1、长度 $|\alpha - \beta|$ 称为向量 $\alpha$ 和 $\beta$ 的距离，记为 $d(\alpha, \beta)$ ，且

$$(1) d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha);$$

$$(2) d(\alpha, \beta) \geq 0, \text{ 当且仅当 } \alpha = \beta \text{ 时等号成立};$$

$$(3) d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta) \text{ (三角不等式)}.$$

2、实系数线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n - b_n = 0 \end{cases}$$

可能无解，即任何一组实数 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 都可能使 $\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{is}x_s - b_i)^2$ 不等

于零，寻找实数组 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_s^0$ 使上式最小，这样的 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_s^0$ 称为方程组的最小二乘解。

3、线性方程组 $AX = b$ 的最小二乘解即为满足方程组 $A'AX = A'b$ 的解 $X_0$ 。

## 第十章 双线性函数

### 一、线性函数

#### 1、基本概念

(1) 设 $V$ 是数域 $P$ 上的一个线性空间， $f$ 是 $V$ 到 $P$ 的一个映射，如果 $f$ 满足：

$$\textcircled{1} f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$$

$$\textcircled{2} f(k\alpha) = kf(\alpha)$$

其中 $\alpha, \beta$ 是 $V$ 中任意元素， $k$ 是 $P$ 中任意数，则称 $f$ 为 $V$ 上的一个线性函数。

(2) 设 $V$ 是数域 $P$ 上的一个 $n$ 维线性空间。 $V$ 上全体线性函数组成的集合记作 $L(V, P)$ 。用自然数方法定义 $L(V, P)$ 中的加法和数量乘法， $L(V, P)$ 称为数域 $P$ 上的线性空间，称为 $V$ 的对偶空间。

(3) 设数域 $P$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ ，作 $V$ 上 $n$ 个线性函数

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \text{ 使得 } f_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} 1, j=i \\ 0, j \neq i \end{cases} i, j=1, 2, \cdots, n \text{ 则 } f_1, f_2, \cdots, f_n \text{ 为 } L(V, P) \text{ 的一组基,}$$

称为  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  的对偶基。

## 2、主要结论

(1) 设  $V$  是  $P$  上一个  $n$  维线性空间,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是  $V$  的一组基,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $P$  中任意  $n$  个数, 存在唯一的  $V$  上线性函数  $f$  使  $f(\varepsilon_i) = a_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。

(2) 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  及  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是线性空间  $V$  的两组基, 它们的对偶基分别为  $f_1, f_2, \dots, f_n$  及  $g_1, g_2, \dots, g_n$ 。如果由  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  到  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过度矩阵为  $A$ , 那么由  $f_1, f_2, \dots, f_n$  到  $g_1, g_2, \dots, g_n$  的过度矩阵为  $(A')^{-1}$ 。

(3) 设  $V$  是  $P$  上一个线性空间,  $V^*$  是其对偶空间, 取定  $V$  中一个向量  $x$ , 定义  $V^*$  的一个函数  $x^{**}$  如下:  $x^{**}(f) = f(x), f \in V^*$  容易验证  $x^{**}$  上的一个线性函数, 因此是  $V^*$  的对偶空间  $(V^*)^* = V^{**}$  中的一个元素, 映射  $x \mapsto x^{**}$  是  $V$  到  $V^{**}$  的一个同构映射。

## 二、双线性函数

### 1、基本概念

(1) 设  $V$  是数域  $P$  上一个线性空间,  $f(\alpha, \beta)$  是  $V$  上一个二元函数。如果  $f(\alpha, \beta)$  有下列性质:

$$① f(\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = k_1f(\alpha, \beta_1) + k_2f(\alpha, \beta_2);$$

$$② f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1f(\alpha_1, \beta) + k_2f(\alpha_2, \beta);$$

其中  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2$  是  $V$  中任意向量,  $k_1, k_2$  是  $P$  中任意数, 则称  $f(\alpha, \beta)$  为  $V$  上的一个双线性函数。

(2) 设  $f(\alpha, \beta)$  是数域  $P$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的一个双线性函数。  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是  $V$  的一组基, 则矩阵  $A = (f(\varepsilon_i, \varepsilon_j))_{n \times n}$  叫做  $f(\alpha, \beta)$  在  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  下的度量矩阵。

(3) 设  $f(\alpha, \beta)$  是线性空间  $V$  上的一个双线性函数, 如果从  $f(\alpha, \beta) = 0$  任意  $\beta \in V$  都成立可推出  $\alpha = 0$ ,  $f$  就叫做非退化的。

## 2、主要结论

(1) 双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的。

(2) 双线性函数非退化的充要条件为其度量矩阵是非退化的。

### 三、对称双线性函数

#### 1、基本概念

(1)  $f(\alpha, \beta)$  是线性空间  $V$  上的一个双线性函数, 如果对  $V$  中任意两个向量  $\alpha, \beta$  都有  $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$  则称  $f(\alpha, \beta)$  为对称双线性函数。如果对  $V$  中任意两个向量  $\alpha, \beta$  都有  $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$  则称  $f(\alpha, \beta)$  为反对称双线性函数。

(2) 设  $V$  是数域  $P$  上线性空间,  $f(\alpha, \beta)$  是  $V$  上双线性函数。当  $\alpha = \beta$  时,  $V$  上函数  $f(\alpha, \alpha)$  称为与  $f(\alpha, \beta)$  对应的二次函数。

#### 2、主要结论

(1) 设  $V$  是数域  $P$  上  $n$  维线性空间,  $f(\alpha, \beta)$  是  $V$  对称双线性函数, 则存在  $V$  的一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , 使  $f(\alpha, \beta)$  在这组基下的矩阵为对角矩阵。

(2) 设  $V$  是数域  $P$  上  $n$  维线性空间,  $f(\alpha, \beta)$  是  $V$  对称双线性函数, 则存在  $V$  的一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , 对  $V$  中任意向量  $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ ,  $\beta = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$  有  $f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ,  $(0 \leq r \leq n)$ 。

(3) 设  $V$  是实数域上  $n$  维线性空间,  $f(\alpha, \beta)$  是  $V$  上对称双线性函数, 则存在  $V$  的一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  对  $V$  中任意向量  $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ ,  $\beta = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$  有  $f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_r y_r$ ,  $(0 \leq p \leq r \leq n)$ 。

(4) 设  $f(\alpha, \beta)$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的一个反对称双线性函数。则存在  $V$  的一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-r}, \eta_1, \dots, \eta_s$ , 使 
$$\begin{cases} f(\varepsilon_i, \varepsilon_{-i}) = 1, i = 1, \dots, r \\ f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i + j \neq 0 \\ f(\alpha, \eta_k) = 0, \alpha \in V, k = 1, \dots, s \end{cases}$$

(5) 设  $V$  是数域  $P$  上的一个线性空间, 在  $V$  上定义了一个非退化的双线性函数, 则  $V$  称为一个双线性度量空间。特别地, 当  $V$  为  $n$  维实线性空间,  $f(\alpha, \beta)$  是  $V$  上非退化对称



双线性函数时， $V$  称为一个伪欧氏空间。