第2章 牛顿定律

在线直播课

$$\vec{r} \rightleftarrows \vec{v} \rightleftarrows \vec{a} \rightleftarrows \vec{F}$$

① $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$, $\vec{v} =$ 恒矢

② $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v})$

$= m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ (m 不变) $= m\vec{a}$

$$\vec{F} = m a_x \vec{i} + m a_y \vec{j}$$

$$= F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$$

$$= m\vec{a}_t + m\vec{a}_n$$

③ $\vec{F} = -\vec{F}'$

解题步骤

确定研究对象，隔离物体，受力分析

选择参考系，建立坐标系

矢量式

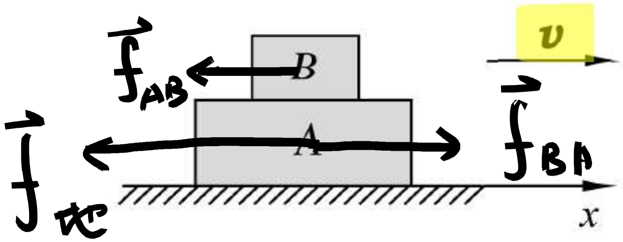
坐标系

列方程，解方程

结果讨论

例题 如图所示两个质量分别为 m_A 和 m_B 的物体 A、B，一起在水平面上沿 x 轴正向作匀减速直线运动，加速度大小为 a，A 与 B 间的静摩擦因数为 μ，则 A 作用于 B 的静摩擦力 F 的大小和方向分别为（　）

$f_{max}=\mu mg$



(A) $\mu m_B g$，与 x 轴正向相反．

(B) $\mu m_B g$，与 x 轴正向相同．

(C) $m_B a$，与 x 轴正向相同．

(D) $m_B a$，与 x 轴正向相反．

$f_{AB}=m_B a$

$\cancel{\mu m_B g}$

$f_{BA}=m_B a$

$f_{地}-f_{BA}=m_A a$

$f_{地}=(m_A+m_B)a$

不定积分: 求原函数?

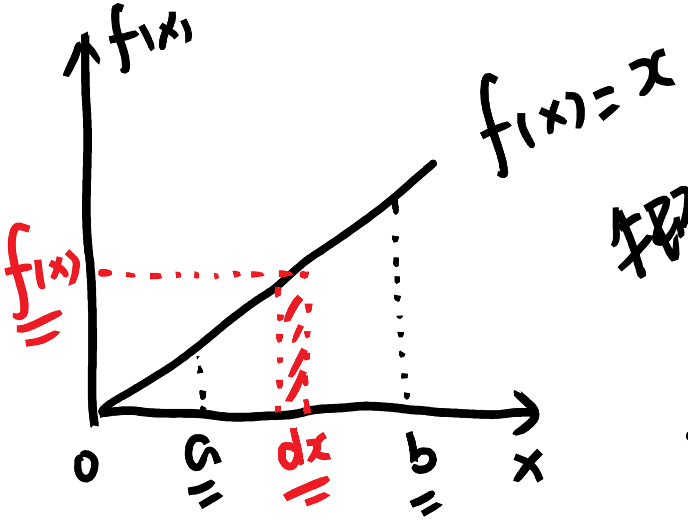
区间 I: $\forall x$ $\quad F'(x) = f(x) \quad$ $F(x) = \int f(x)\,dx + \underline{\underline{C}}$

eg $\quad f(x) = x \quad$ $F(x) = \int x\,dx + C = \frac{x^2}{2} + C$

定积分: $ds = f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x\,dx$$

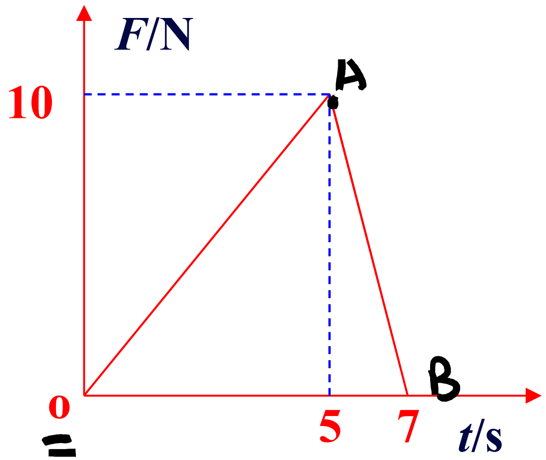
$$= \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$



牛顿-莱布尼茨 数值 $= \frac{1}{2}(b+a)(b-a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\underline{F}}(b) - \underline{\underline{F}}(a) = F(x)\Big|_a^b$$

例题 一质点的质量为1kg，沿 x 轴运动；所受的力如图所示。$t=0$ 时，质点在坐标原点，试求此质点第7s末的速度和坐标。



$t\in[0,5]$ $t=5$, $x_5=?$, $v_5=?$

$F=2t=m\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dt}$

$\int_0^v dv=\int_0^t 2t\,dt$ $v(t)=?$

$v=t^2\Big|_0^t=t^2$ 当 $t=5$ 时 $v_5=25$

$v=t^2=\dfrac{dx}{dt}$ $\int_0^x dx=\int_0^t t^2\,dt$

$x=\dfrac{t^3}{3}\Big|_0^t=\dfrac{t^3}{3}$ 当 $t=5$ 时 $x_5=\dfrac{125}{3}$

$$F(t)=\begin{cases}2t, & t\in[0,5]\\ -5t+35, & t\in[5,7]\end{cases}$$

$t=5$, $\quad \underline{x_5} = \frac{125}{3}$, $\quad v_5 = 25$ $\qquad t \in [\underline{5}, 7]$

$F = -5t + 35$

$$F = -5t + 35 = m\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_5}^{v} dv = \int_{5}^{t} (-5t + 35)\,dt$$

$$v - v_5 = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 35t\right)\Big|_5^t$$

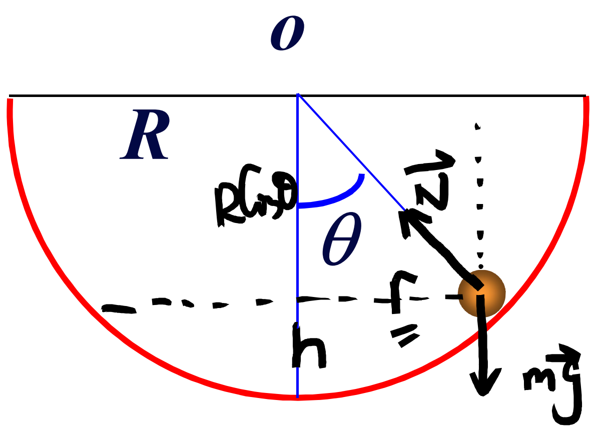
$$v = -\frac{5}{2}t^2 + 35t - \frac{175}{2}$$ 当 $t=7$ 时 $v_7 = 35$

$$\int_{x_5}^{x} dx = \int_{5}^{t} \left(-\frac{5}{2}t^2 + 35t - \frac{175}{2}\right)dt$$

$$x - x_5 = \left(-\frac{5}{6}t^3 + \frac{35}{2}t^2 - \frac{175}{2}t\right)\Big|_5^t$$ 当 $t=7$ 时 $x_7 = 105$

例题 质量为m的小球沿半球形碗的光滑的内面，正以角速度ω在一水平面内作匀速圆周运动，碗的半径为 R，求该小球作匀速圆周运动的水平面离碗底的高度。

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$



$$\begin{cases} z: & N\cos\theta = mg \\ \vec{e}_n: & N\sin\theta = m\omega^2 r = m\omega^2 R\sin\theta \end{cases}$$

$$N = m\omega^2 R$$

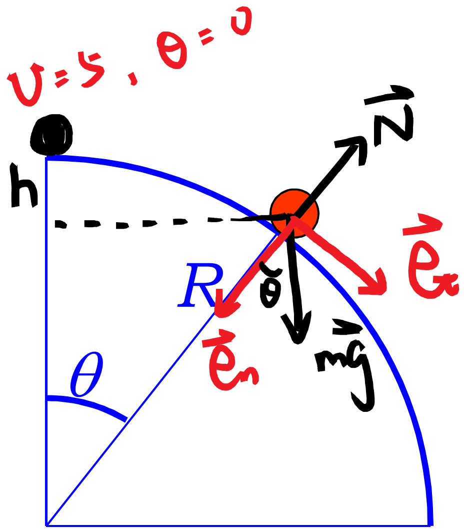
$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$$

$$h = R - R\cos\theta$$

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}$$

$$\omega \to \theta = ?$$

例题 在半径为 R 的光滑球面的顶点处，一质点开始滑落，取初速度接近于零。求质点自顶点下滑到何处时离开球面？



$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$N = 0$$

$$\begin{cases} \vec{e}_n: & mg\cos\theta - N = m\dfrac{v^2}{R} \\ \vec{e}_t: & mg\sin\theta = m\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$g\cos\theta = \frac{v^2}{R}$$

$$v^2 = gR\cos\theta$$

$$g\sin\theta = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta}$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^\theta gR\sin\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = gR(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}gR\cos\theta = gR(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

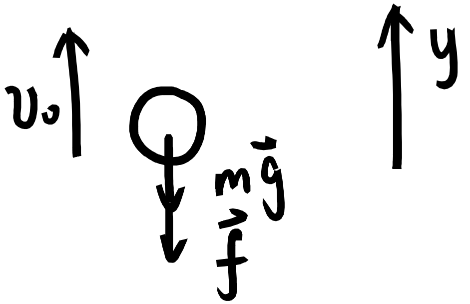
$$\theta = ?$$

$$h = R - R\cos\theta$$
$$= \frac{1}{3}R$$

例题 以初速度 v_0 从地面竖直向上抛出一质量为 m 的小球，小球除受重力外，还受一个大小为 $\alpha m v^2$ 的黏滞阻力（α 为常数，v 为小球运动的速度大小），当小球上升的最大高度.

$v=0$ ， $y_{max}=?$

$v(y)=?$



$$m\vec{g}+\vec{f}=m\vec{a}$$

$$-mg-\alpha m v^2=ma=m\frac{dv}{dt}$$

$$-g-\alpha v^2=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$-g-\alpha v^2=v\frac{dv}{dy}$$

$$-\alpha\left(v^2+\frac{g}{\alpha}\right)=v\frac{dv}{dy}$$

$$\frac{v\,dv}{v^2+\frac{g}{\alpha}}=\frac{\frac{1}{2}dv^2}{v^2+\frac{g}{\alpha}}=\frac{\frac{1}{2}d\overbrace{\left(v^2+\frac{g}{\alpha}\right)}^{z}}{\underbrace{v^2+\frac{g}{\alpha}}_{z}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{dz}{z}$$

$$\int_0^y-\alpha\,dy=\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{v^2+\frac{g}{\alpha}}=\int_{v_0^2+\frac{g}{\alpha}}^{v^2+\frac{g}{\alpha}}\frac{1}{2}\frac{dz}{z}$$

$$-\alpha y=\frac{1}{2}\ln z\Big|_{v_0^2+\frac{g}{\alpha}}^{v^2+\frac{g}{\alpha}}$$