《常微分方程》期末速通

4. 线性ODE组

4.1 线性ODE组

[**定义4.1.1**] 对**一阶线性ODE组** $\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)\cdot x_1 + \cdots + a_{1n}(t)\cdot x_n + f_1(t) \\ \cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)\cdot x_1 + \cdots a_{nn}(t)\cdot a_n + f_n(t) \end{cases}$, 设矩阵 $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{x'} = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$, 则上述方程组可记作 $\overrightarrow{x'} = A(t)\cdot\overrightarrow{x} + \overrightarrow{f}(t)$.

[**定义4.1.2**] 对一阶线性ODE组 $\overrightarrow{x'} = A(t)\cdot\overrightarrow{x} + \overrightarrow{f}(t)$, 若 $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{0}$, 即方程形如 $\overrightarrow{x'} = A(t)\cdot\overrightarrow{x}$, 则称其为**齐次线性方程组**, 否则称为**非齐次线性方程组**.

[**定理4.1.1**] n 阶线性ODE的初值问题 $\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)\cdot x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\cdot x' + a_n(t) = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1, x'(t_0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases}$ 与一阶线性ODE组的初值问题 $\begin{cases} \overrightarrow{x'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}\overrightarrow{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{\eta} \end{cases}$ 等价且同解, 其中 $a_i \ \ (1\le i\le n), f(t)$ 都是区间 $a\le x\le b$ 上的连续函数, $t_0 \in [a,b], \eta_i \ \ (1\le i\le n)$ 都是常数, $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{x'} = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$.

特别地, $n=2$ 时, 二阶线性ODE $x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$ 与一阶线性ODE组 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$ 等价, 其中 $x_1 = x, x_2 = x'$, 则 $x'' = x_2'$.

[**注**] 不是所有的一阶线性ODE组都可化为高阶线性ODE. 如 $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$.

[例4.1.1] 将初值问题 $\begin{cases} x''+2x'+7t\cdot x=\mathrm{e}^{-t} \\ x(1)=7, x'(1)=-2 \end{cases}$ 转化为与之等价的一阶ODE组.

[解] 令 $\begin{cases} x_1=x \\ x_2=x' \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x_1'=x'=x_2 \\ x_2'=x''=-7t\cdot x_1-2x_2+\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$,

即 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7t & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}, \overrightarrow{x}'(1)=\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

[例4.1.2] 将初值问题 $\begin{cases} x^{(4)}+x=t\mathrm{e}^t \\ x(0)=1, x'(0)=-1, x''(0)=2, x'''(0)=0 \end{cases}$ 转化为与之等价的一阶ODE组.

[解] 令 $\begin{cases} x_1=x \\ x_2=x' \\ x_3=x'' \\ x_4=x''' \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x_1'=x'=x_2 \\ x_2'=x''=x_3 \\ x_3'=x'''=x_4 \\ x_4'=-x+t\mathrm{e}^t=-x_1+t\mathrm{e}^t \end{cases}$,

即 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t\mathrm{e}^t \end{bmatrix}, \overrightarrow{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

[例4.1.3] 将初值问题 $\begin{cases} x''+5y'-7x+7y=\mathrm{e}^t \\ y''-2y+13y'-15x=\cos t \\ x(0)=1, x'(0)=0, y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$ 转化为与之等价的一阶ODE组.

[解] 令 $\begin{cases} z_1=x \\ z_2=x' \\ z_3=y \\ z_4=y' \end{cases}$, 则 $\begin{cases} z_1'=x'=z_2 \\ z_2'=x''=-5z_4+7z_1-6z_3+\mathrm{e}^t \\ z_3'=y'=z_4 \\ z_4'=y''=2z_3-13z_4+15z_1+\cos t \end{cases}$,

即 $\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 2 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}, w(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.2 齐次线性ODE组的解法

[定义4.2.1] 若一个 n 阶矩阵的每一列都是齐次线性ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 的解, 则称该矩阵为该方程的**解矩阵**. 若该矩阵的列向量在区间 $a\le t\le b$ 上线性无关, 则称其为 $a\le t\le b$ 上的**基解矩阵**, 用 $\Phi(t)$ 表示由 n 个线性无关的解 $\overrightarrow{\varphi_1}(t),\cdots,\overrightarrow{\varphi_n}(t)$ 构成的基解矩阵. 若 $\Phi(t)=I$, 则称其为**标准基解矩阵**, 其中 I 为单位矩阵.

[定理4.2.1] 齐次线性ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 必有基解矩阵 $\Phi(t)$. 若 $\overrightarrow{\psi}(t)$ 是该方程的任意解, 则 $\overrightarrow{\psi}(t)=\Phi(t)\cdot\overrightarrow{c}_{n\times 1}$, 其中 $\overrightarrow{c}_{n\times 1}$ 是常列向量.

[定理4.2.2] 齐次线性ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 的解矩阵 $\Phi(t)$ 是区间 $a\le t\le b$ 上的基解矩阵 iff $|\Phi(t)|\ne 0\ \ (a\le t\le b)$.

[定理4.2.3] 齐次线性ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 的区间 $a\le t\le b$ 上的基解矩阵 $\Phi(t)$ 在 $a\le t\le b$ 上要么恒为零, 要么恒非零, 即若 $\exists t_0\in[a,b]\ s.t\ |\Phi(t_0)|\ne 0$, 则 $|\Phi(t)|\ne 0\ \ (a\le t\le b)$.

[例4.2.1] 求证: $\Phi(t)=\begin{bmatrix}t^2 & t\\ 2t & 1\end{bmatrix}$ 是方程组 $\overrightarrow{x'}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{2}{t^2} & \dfrac{2}{t}\end{bmatrix}\overrightarrow{x}$ 在任一不包含原点的区间 $t\in[a,b]$ 上的基解矩阵.

[证] 因 $\Phi'(t)=\begin{bmatrix}2t & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{2}{t^2} & \dfrac{2}{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^2 & t\\ 2t & 1\end{bmatrix}$, 则 $\Phi(t)$ 是解矩阵.

因 $|\Phi(t)|=-t^2\ne 0$, 则 $\Phi(t)$ 是基解矩阵.

[定理4.2.4] 若 $\Phi(t)$ 是齐次线性ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 在区间 $a\le t\le b$ 上的基解矩阵, $C_{n\times n}$ 是可逆的常矩阵, 则矩阵 $\Phi(t)\cdot C_{n\times n}$ 也是该方程组在 $a\le t\le b$ 上的基解矩阵.

[证] 矩阵 $X(t)$ 是 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 的解矩阵 iff $X'(t)=A(t)\cdot X(t)\ \ (a\le t\le b)$.

设 $\Psi(t)=\Phi(t)\cdot C_{n\times n}$, 则 $\Phi'(t)=\Phi'(t)\cdot C=A(t)\cdot[\Phi(t)\cdot C]=A(t)\cdot\Psi(t)$, 即 $\Psi(t)$ 是解矩阵.

因 $C_{n\times n}$ 可逆, 则 $|\Psi(t)|=|\Phi(t)|\cdot|C_{n\times n}|\ne 0$, 故 $\Psi(t)$ 是基解矩阵.

[定理4.2.5] 若 $\Phi(t),\Psi(t)$ 都是齐次线性ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 在区间 $a\le t\le b$ 上的基解矩阵, 则 $\exists$ 可逆矩阵 $C_{n\times n}\ s.t.\ \Psi(t)=\Phi(t)\cdot C_{n\times n}$.

[证] 因 $\Phi(t)$ 是基解矩阵, 则可逆.

取矩阵 $X(t)=\Phi^{-1}(t)\cdot\Psi(t)$, 则 $X(t)$ 可导, 且 $|X(t)|\ne 0$, $\Psi(t)=\Phi(t)\cdot X(t)$.

注意到 $A(t)\cdot\Psi(t)=\Psi'(t)=\Phi'(t)\cdot X(t)+\Phi(t)\cdot X'(t)$

$=A(t)\cdot[\Phi(t)\cdot X(t)]+\Phi(t)\cdot X'(t)=A(t)\cdot\Psi(t)+\Phi(t)\cdot X'(t)\ \ (a\le t\le b)$,

则 $\Phi(t)\cdot X'(t)=O_{n\times n}\ \ (a\le t\le b)$, 而 $\Phi(t)\ne O_{n\times n}$, 则 $X'(t)=O_{n\times n}$, 即 $X(t)$ 是常矩阵.

取 $C_{n\times n}=X(t)=\Phi^{-1}(t)\cdot\Psi(t)$ 即证.

[推论] 齐次线性ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 的基解矩阵 $\Phi(t),\Psi(t)$ 和特解 $\overrightarrow{\psi}(t)$ 的关系:

(1) $\overrightarrow{\psi}(t)$ 与 $\Phi(t)$ 的关系: $\overrightarrow{\psi}(t)=\Phi(t)\cdot\overrightarrow{c}_{n\times 1}$, 其中 $\overrightarrow{c}_{n\times 1}$ 为常列向量.

(2) $\Phi(t)$ 与 $\Psi(t)$ 的关系: $\Phi(t)=\Psi(t)\cdot C_{n\times n}$, 其中 $C_{n\times n}$ 为可逆常矩阵.

[定理4.2.6] 若 $\Phi(t)$ 是区间 $a\le t\le b$ 上一齐次线性ODE组的基解矩阵, 则该方程组为 $\overrightarrow{x'}=\Phi'(t)\cdot\Phi^{-1}(t)\cdot\overrightarrow{x}\ \ (a\le t\le b)$.

[例4.2.2] 设 $A(t)$ 是区间 $t\in[a,b]$ 上的连续 $n\times n$ 的实矩阵, $\varPhi(t)$ 是方程 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 的基解矩阵, $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\varphi}(t)$ 是它的一个解. 求证:

(1) 对方程 $\overrightarrow{y'}=-A^T(t)\cdot\overrightarrow{y}$ 的任一解 $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{\psi}(t)$, 有 $\overrightarrow{\psi^T}(t)\cdot\overrightarrow{\varphi}(t)\in\mathrm{Const.}$.

(2) $\Psi(t)$ 是方程 $\overrightarrow{y'}=-A^T(t)\cdot\overrightarrow{y}$ 的基解矩阵 iff $\exists$ 可逆的常矩阵 $C\ s.t.\ \Psi^T(t)\cdot\varPhi(t)=C$.

[证]

(1) 因 $\overrightarrow{\psi'}=-A^T(t)\cdot\overrightarrow{\psi}$, 则 $\left[\overrightarrow{\psi^T}(t)\right]'=-\overrightarrow{\psi^T}(t)\cdot A(t)$.

$$\left[\overrightarrow{\psi^T}(t)\cdot\overrightarrow{\varphi}(t)\right]'=\left[\overrightarrow{\psi^T}(t)\right]'\cdot\overrightarrow{\varphi}(t)+\overrightarrow{\psi^T}(t)\cdot\overrightarrow{\varphi'}(t)$$

$=\left[\overrightarrow{\psi^T}(t)\right]'\cdot\overrightarrow{\varphi}(t)+\overrightarrow{\psi^T}(t)\cdot A(t)\cdot\overrightarrow{\varphi}(t)=0$, 故证.

(2) (必) 设 $\Psi(t)$ 是方程 $\overrightarrow{y'}=-A^T(t)\cdot\overrightarrow{y}$ 的基解矩阵,

则 $\left[\Psi^T(t)\cdot\varPhi(t)\right]'=[\Psi^T(t)]'\cdot\varPhi(t)+\Psi^T(t)\cdot\varPhi'(t)$

$=[-A^T(t)\cdot\Psi(t)]^T\cdot\varPhi(t)+\Psi^T(t)\cdot A(t)\cdot\varPhi(t)$

$=-\Psi^T(t)\cdot A(t)\cdot\varPhi(t)+\Psi^T(t)\cdot A(t)\cdot\varPhi(t)=O$, 则 $\Psi^T(t)\cdot\varPhi(t)=C$.

因 $\varPhi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 都是基解矩阵, 则 $|\varPhi(t)|,|\Psi(t)|\neq 0$,

进而 $|C|=|\Psi^T(t)|\cdot|\varPhi(t)|\neq 0$, 故 C 可逆.

(充) 设 $\exists$ 可逆的常矩阵 $C\ s.t.\ |C|\neq 0$, 且 $\Psi^T(t)\cdot\varPhi(t)=C$.

因 $\varPhi(t)$ 是基解矩阵, 则 $\varPhi(t)$ 可逆, 进而 $\Psi^T(t)=C\cdot\varPhi^{-1}(t)$.

因 $|\Psi^T(t)|=|C|\cdot|\varPhi^{-1}(t)|\neq 0$, 则 $\Psi(t)$ 是方程 $\overrightarrow{y'}=-A^T(t)\cdot\overrightarrow{y}$ 的基解矩阵.

4.3 非齐次线性ODE组的解法

[定理4.3.1] **[非齐次线性ODE组的通解结构]** 设 $\overrightarrow{\overline{\varphi}}(t)$ 是非齐次ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}+\overrightarrow{f}(t)\ \ (*)$ 的一个特解, $\varPhi(t)$ 是 $(*)$ 对应的齐次线性ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 的基解矩阵, 则 $(*)$ 的通解为 $\varphi(t)=\varPhi(t)\cdot\overrightarrow{c}_{n\times 1}+\overrightarrow{\overline{\varphi}}(t)$, 其中 $\overrightarrow{c}_{n\times 1}$ 是常数列向量.

[定理4.3.1] 若 $\varPhi(t)$ 是齐次线性ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}$ 的基解矩阵, 则向量值函数 $\overrightarrow{\varphi}(t)=\varPhi(t)\displaystyle\int_{t_0}^t\varPhi^{-1}(s)\cdot\overrightarrow{f}(s)\mathrm{d}s$ 是非齐次ODE组 $\overrightarrow{x'}=A(t)\cdot\overrightarrow{x}+\overrightarrow{f}(t)$ 的解, 且满足初值条件 $\overrightarrow{\varphi}(t_0)=\overrightarrow{0}$.

[例4.3.1] 考察非齐次方程组 $\overrightarrow{x'}=A\overrightarrow{x}+\overrightarrow{f}(t)$, 其中矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$, 向量值函数 $\overrightarrow{f}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\end{bmatrix}$.

(1) 求证: $\varPhi(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&t\mathrm{e}^{2t}\\0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$ 是齐次方程组 $\overrightarrow{x'}=A\overrightarrow{x}$ 的基解矩阵.

(2) 求 $\overrightarrow{x'}=A\overrightarrow{x}+\overrightarrow{f}(t)$ 满足初值条件 $\overrightarrow{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 的解 $\overrightarrow{\varphi}(t)$.

[解]

(1) $\varPhi'(t)=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{2t}+2t\mathrm{e}^{2t}\\0&2\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&t\mathrm{e}^{2t}\\0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}=A\cdot\varPhi(t)$, 则 $\varPhi(t)$ 是解矩阵.

因 $|\varPhi(t)|=\mathrm{e}^{4t}\neq 0$, 则 $\varPhi(t)$ 是基解矩阵.

(2) $\varPhi^{-1}(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1&-t\\0&1\end{bmatrix}$, 则 $\varPhi^{-1}(0)=I$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\varphi}(t)&=\varPhi(t)\cdot\varPhi^{-1}(0)\cdot\overrightarrow{\varphi}(0)+\varPhi(t)\cdot\int_0^t\varPhi^{-1}(s)\cdot\overrightarrow{f}(s)\mathrm{d}s\\&=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&t\mathrm{e}^{2t}\\0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}\cdot I\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&t\mathrm{e}^{2t}\\0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2s}&-s\mathrm{e}^{-2s}\\0&\mathrm{e}^{-2s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin s\\\cos s\end{bmatrix}\mathrm{d}s\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{25}(-15t+27)\mathrm{e}^{2t}-\dfrac{2}{25}\cos t-\dfrac{14}{25}\sin t\\-\dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{2t}-\dfrac{2}{5}\cos t+\dfrac{1}{5}\sin t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

4.4 基解矩阵的求法

[定义4.4.1] 对常矩阵 $A_{n\times n}$, 定义矩阵指数 $\exp A=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{A^k}{k!}=I+A+\dfrac{A^2}{2!}+\cdots+\dfrac{A^m}{m!}+\cdots$.

[定理4.4.1] 矩阵 $\varPhi(t)=\exp{(At)}$ 是齐次ODE组 $\overrightarrow{x}=A\cdot\overrightarrow{x'}$ 的基解矩阵, 且 $\varPhi(0)=I$.

[例4.4.1] 求齐次ODE组 $\overrightarrow{x}=A\cdot\overrightarrow{x'}$ 的基解矩阵, 其中矩阵 $A=\mathrm{diag}\{a_1,\cdots,a_n\}$.

[解] $\exp{(At)}=I+\begin{bmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{bmatrix}\dfrac{t}{1!}+\cdots+\begin{bmatrix}a_1^m&&\\&\ddots&\\&&a_n^m\end{bmatrix}\dfrac{t^m}{m!}+\cdots$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{a_1t}&&\\&\ddots&\\&&\mathrm{e}^{a_nt}\end{bmatrix}.$$

[**例4.4.2**] 求齐次ODE组 $\overrightarrow{x}=A\cdot\overrightarrow{x'}$ 的基解矩阵, 其中矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$.

[**解**] 注意到 $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$,

则 $\exp\left(At\right)=\exp\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\cdot t\right)\cdot\exp\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot t\right)$

$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&0\\0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}\cdot\left(I+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot t+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2\cdot t^2+\cdots\right)$.

注意到 $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, 故 $\exp\left(At\right)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&t\mathrm{e}^{2t}\\0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$.

[**定理4.4.2**] 若矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_n}$, 它们对应的特征值分别为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ (未必互异), 则矩阵 $\varPhi(t)=\left[\mathrm{e}^{\lambda_1t}\overrightarrow{v_1},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_nt}\overrightarrow{v_n}\right]$ 是齐次ODE组 $\overrightarrow{x}=A\cdot\overrightarrow{x'}$ 的一个基解矩阵.

[**注**] 本定理中的 $\varPhi(t)$ 未必是 $\exp\left(At\right)$, 它们的关系即两个基解矩阵的关系, 亦即 $\exp\left(At\right)=\varPhi(t)\cdot C_{n\times n}$, 其中 $C_{n\times n}$ 是可逆的常矩阵. 令 $t=0$, 则 $\exp\left(At\right)=\varPhi(t)\cdot\varPhi^{-1}(0)$, 这给出了 $\exp\left(At\right)$ 的求法.

[**例4.4.3**] 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&5\\-5&3\end{bmatrix}$. 求:

(1) 齐次ODE组 $\overrightarrow{x}=A\cdot\overrightarrow{x'}$ 的基解矩阵 $\varPhi(t)$.

(2) 求 $\exp\left(At\right)$.

[**解**]

(1) 令 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-5\\5&\lambda-3\end{vmatrix}=0$, 解得: 特征值 $\lambda_1=3+5i,\lambda_2=3-5i$.

① 对 $\lambda_1=3+5i$, 令 $\begin{bmatrix}5i&-5\\5&5i\end{bmatrix}\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, 解得: λ_1 对应的特征向量 $\overrightarrow{u}=(1,i)^T$.

② 对 $\lambda_2=3-5i$, 令 $\begin{bmatrix}-5i&-5\\5&-5i\end{bmatrix}\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, 解得: λ_2 对应的特征向量 $\overrightarrow{v}=(i,1)^T$.

因 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ 线性无关, 则 $\varPhi(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(3+5i)t}&i\cdot\mathrm{e}^{(3-5i)t}\\i\cdot\mathrm{e}^{(3+ti)t}&\mathrm{e}^{(3-5i)t}\end{bmatrix}$.

(2) $\exp\left(At\right)=\varPhi(t)\cdot\varPhi^{-1}(0)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(3+5i)t}&i\cdot\mathrm{e}^{(3-5i)t}\\i\cdot\mathrm{e}^{(3+ti)t}&\mathrm{e}^{(3-5i)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&i\\i&1\end{bmatrix}^{-1}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(3+5i)t}&i\cdot\mathrm{e}^{(3-5i)t}\\i\cdot\mathrm{e}^{(3+ti)t}&\mathrm{e}^{(3-5i)t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-i\\-i&1\end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(3+5i)i}+\mathrm{e}^{(3-5i)t}&-i\cdot\left(\mathrm{e}^{(3+5i)i}-\mathrm{e}^{(3-5i)t}\right)\\i\cdot\left(\mathrm{e}^{(3+5i)i}-\mathrm{e}^{(3-5i)t}\right)&\mathrm{e}^{(3+5i)i}+\mathrm{e}^{(3-5i)t}\end{bmatrix}=\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t&\sin 5t\\-\sin 5t&\cos 5t\end{bmatrix}$.

[例4.4.4] 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-3&3\\4&-5&3\\4&-4&2\end{bmatrix}$. 求:

(1) A 的特征值和特征向量.

(2) 方程组 $\overrightarrow{x'}=A\overrightarrow{x}$的一个基解矩阵.

(3) $\exp\left(At\right)$.

[解]

(1) 令 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&3&-3\\-4&\lambda+5&-3\\-4&4&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-2)=0$,

解得: 特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$.

① 对 $\lambda_1=-2$, 令 $\begin{bmatrix}-4&3&-3\\-4&3&-3\\-4&4&-4\end{bmatrix}\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, 解得: $\overrightarrow{u}=(0,1,1)^T$,

进而 λ_1 对应的特征向量为 $\alpha\cdot\overrightarrow{u}\ (\alpha\neq0)$.

② 对 $\lambda_2=-1$, 令 $\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-4&4&-3\\-4&4&-3\end{bmatrix}\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, 解得: $\overrightarrow{v}=(1,1,0)^T$,

进而 λ_2 对应的特征向量为 $\beta\cdot\overrightarrow{v}\ (\beta\neq0)$.

③ 对 $\lambda_3=2$, 令 $\begin{bmatrix}0&3&-3\\-4&7&-3\\-4&4&0\end{bmatrix}\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$, 解得: $\overrightarrow{w}=(1,1,1)^T$,

进而 λ_3 对应的特征向量为 $\gamma\cdot\overrightarrow{w}\ (\gamma\neq0)$.

(2) 因 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$线性无关, 则 $\varPhi(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&0&\mathrm{e}^{-t}\\\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{-t}\\\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{-2t}&0\end{bmatrix}$ 是一个基解矩阵.

(3) 因 $\varPhi(0)=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$, 则 $\varPhi^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$,

进而 $\exp\left(At\right)=\varPhi(t)\cdot\varPhi^{-1}(0)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-t}&\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-t}\\\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t}&-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}&\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-t}\\\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t}&-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$.