

随机过程期末速通

4. Markov链

4.1 符号说明

[定义4.1.1] 一步转移概率 $p_{i,j} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$.

[定义4.1.2] n 步转移概率 $p_{i,j}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\}$ ($m \geq 0, n \geq 1$).

[定义4.1.3] 从 i 出发经 n 步后首次到达 j 的首达概率 $f_{i,j}^{(0)} = [i = j]$,
 $f_{i,j}^{(n)} = P\{X_n = j; X_k \neq j, k = 1, \dots, n-1 \mid X_0 = i\}$ ($n \geq 1$).

[定义4.1.4] $f_{i,j} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{i,j}^{(n)}$, 注意求和从 1 开始.

[定义4.1.5] 平均首返时间或平均回转时间 $\mu_i = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot f_{i,i}^{(n)}$.

[定义4.1.6] 时齐的连续时间Markov链的一步转移概率 $p_{i,j}(t) = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$.

[定义4.1.7] 转移率 $q_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,j}(t) - p_{i,j}(0)}{t} = \begin{cases} q_{i,i} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,i}(t) - 1}{t}, i = j \\ q_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,j}(t) - 0}{t}, i \neq j \end{cases}$.

[定义4.1.8] 在 i 的逗留时间 τ_i 服从指数分布, 分布函数 $P\{\tau_i \leq t\} = 1 - e^{-q_i t}$, 其中 $q_i = |q_{i,i}| = -q_{i,i}$.

4.2 周期的判定

[定理4.2.1] 同属一类的状态的周期相等.

4.3 常返性的判定

[定义4.3.1] 若 $f_{i,i} = 1$, 则 i 为常返态; 若 $f_{i,i} < 1$, 则 i 为非常返态或瞬过态.

[定义4.3.2] 对常返态 i , 若 $\mu_i < +\infty$, 则 i 为正常返态; 若 $\mu_i = +\infty$, 则 i 为零常返态.

[定理4.3.3]

(1) i 是常返态 iff $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{i,i}^{(n)} = +\infty$. 注意求和从 0 开始.

(2) 若 i 为非常返态, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{i,i}} < +\infty$. 注意求和从 0 开始.

[定理4.3.4]

(1) 若 i 是周期为 d 的常返态, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,i}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} = \begin{cases} \frac{d}{\mu_i}, i \text{ 为正常返态} \\ 0, i \text{ 为零常返态} \end{cases}$.

(2) 若 i 是非常返态或零常返态, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,i}^{(n)} = 0$.

[定理4.3.5] 常返态 i 是零常返态 iff $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,i}^{(n)} = 0$.

[定理4.3.6]

(1) 一个类中的状态同为常返态或非常返态.

(2) 一个类中的常返态同为正常返态或零常返态.

[定理4.3.7] 若 j 是非常返态或零常返态, 则对 $\forall i \in S$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0$.

[定理4.3.8] 状态有限的Markov链必有正常返态, 必无零常返态, 可能有非常返态, 则不可约的有限Markov链是正常返的.

4.4 遍历性的判定

[定义4.4.1] 若状态 i 正常返且非周期, 则为遍历态. 若Markov链的所有状态都是遍历的, 则该Markov链是遍历的.

[定理4.4.2] 若Markov链遍历, 则对 $\forall i, j \in S$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$.

[定义4.4.3] 称不可约、非周期、正常返的Markov链是遍历的.

5. 各随机过程的性质的比较

空的格子表示不讨论.

性质\ 过程	齐次P'过程	Brown运动	非齐次P'过程	复合P'过程	条件P'过程	更新过程
独立增量性	√	√	√	√	只有条件独立性	
平稳增量性	√	√	×	√	√	
Markov性	√	√	√		×	只在更新时有