第一章作业

一、设 R={(a,b),(c,d),(b,d)}是集合{a,b,c,d,e}上的二元关系，求

（1）R 的传递闭包。

（2）R 的自反传递闭包。

解：（1）{(a,b), (c,d), (b,d), (a,d)}

（2）{(a,b), (c,d), (b,d), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,d)}

注意：（1）漏了(e,e)或(d,d)，或者使用 I 表示。（2）多了(a,c)?

二、请用递归证明方法，证明对字母表Σ中的任意字符串 x，x 的前缀有|x|+1 个。

证明：施归纳于|x|:

（1）当|x|=0 时，即有 x=ε，其前缀为{ε}，个数为 1，结论成立。

（2）假设|x|=n 时结论成立（n≥0），往证当|x|=n+1 时结论也成立。

为此，不妨设 x=y·a,其中|y|=n，a∈Σ为任意一个字母。

易知 y 的任意前缀的长度小于等于|y|=n,而|x|=n+1,因此有 **x∉ { y 的前缀}**(**C1**)。

下面证明**{x 的前缀} = {y 的前缀}∪{x}**（**C2**），可以分为两步

（a）**{y 的前缀}∪{x}⊆{x 的前缀}**。考虑任意 y 的前缀 u，其满足 y=uv。而 x=ya=uva=u(va)，从而 u 也是 x 的前缀。另外，易知 x 也是 x 的前缀。

（b）**{x 的前缀} ⊆{y 的前缀}∪{x}**。考虑任意 x 的前缀 u，其满足 x=uv。如果 v=ε，那么有 u=x。如果 v≠ε，根据 x=ya 和 x=uv，有 v=v'a，从而 ya=uv'a，即 y=uv'。这就是说，u 也是 y 的前缀。

因此，有

|{x 的前缀}|

= | { y 的前缀}∪{x}| （**C2**）

= | { y 的前缀}| + |{x}| （**C1**）

= (n + 1) + 1 （**归纳假设**）

= |x|+1

这也是说，结论对|x|=n+1 也成立。

（3）由归纳法原理，结论对任意字符串都成立。

注意：（1）需明确 x 与子串 y 的关系,如 x=ya 或 ay。

（2）需分析 x 的前缀与子串 y 的前缀的关系，且前缀个数要明确与|x|+1 关联。

（3）2(k+1) = k+2??

三、设Σ={00, 01, 11, 10}，求字符串 1000011111 的所有前缀的集合、后缀的集合、真前缀的集合、真后缀的集合。

解答:

前缀: { ε , 10, 1000, 100001, 10000111, 1000011111}

后缀: { ε , 11, 1111, 011111, 00011111, 1000011111}

真前缀: { ε , 10, 1000, 100001, 10000111}

真后缀: { ε , 11, 1111, 011111, 00011111}

注意：（1）注意字符！

四、设Σ={a, b}，请给出Σ上的下列语言的尽可能形式化的表示。注意：**奇数**学号选做**奇数**序号的题，**偶数**学号选做**偶数**序号的题。

(1) 所有以 a 开头的串

(2) 所有以 b 结尾的串

(3) 所有以 aa 开头，以 aa 结尾的串

(4) 所有以 ab 开头，以 ba 结尾的串

(5) 所有长度为偶数的串

(6) 所有长度为奇数的串

(7) 所有包含 3 个连续 a 的串

(8) 所有不包含 3 个连续 a 的串

(9) 所有正数第 10 个字符是 b 的串

(10) 所有倒数第 10 个字符是 b 的串

(11) 所有最多有一对连续的 a **或者** 最多有一对连续的 b 的串

(12) 所有最多有一对连续的 a **并且** 最多有一对连续的 b 的串

解答:(1) a{a,b}*

(2) {a,b}*b

(3) {aa} U {aaa} U {aa}{a,b}*{aa}

(4) {aba} U {ab}{a,b}*{ba}

(5) ({a,b}{a,b})* 或 $\{a,b\}^{2n}$ ，其中 n>=0（n>=1 或$(\{a,b\}\{a,b\})^{+}$也算对）

(6) ({a,b}{a,b})*{a,b} 或 $\{a,b\}^{2n+1}$，其中 n>=0

(7) {a,b}*aaa{a,b}*

(8) {b,ab,aab}*{a,aa, ε} 或者 $\overline{\{a,b\}^{*}aaa\{a,b\}^{*}}$

(9) $\{a,b\}^{9}$b{a,b}*

(10) {a,b}*b$\{a,b\}^{9}$

(11) ({ab,b}*{a, ε} U {ab,b}*{aa}{ba,b}*) U ({ba,a}*{b, ε} U {ba,a}*{bb}{ab,a}*)

(12) {a, ε}{ba}*{b, ε} U {b, ε}{ab}*{aa}{ba}*{b, ε} U {a, ε}{ba}*{bb}{ab}*{a, ε}
U {b, ε}{ab}*{aa}{ba}*{bb}{ab}*{a, ε} U {a, ε}{ba}*{bb}{ab}*{aa}{ba}*{b, ε}
或者 ({ab,b}*{a, ε} U {ab,b}*{aa}{ba,b}*) ∩ ({ba,a}*{b, ε} U {ba,a}*{bb}{ab,a}*)

注意：（1）不是选做！不是翻译！
（2）字符表是{a,b}，不是{0,1}!
（3）注意可能的起始或者终止字符串，起始字符串和终止字符串可能有交叉。