

# 大学物理(2)期末速通教程

## 4. 气体动理论

### 4.0 基本公式

[理想气体状态方程,物态方程]

(1)对一定量的同种气体,有  $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ .

(2)理想气体状态方程:

①  $pV = \nu RT = \frac{m'}{M} RT$ , 其中Mole气体常量  $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

②  $p = nkT$ , 其中Boltzmann常数  $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , 气体分子的数密度  $n = \frac{N}{V}$ .

[平衡态理想气体的统计规律]

(1)气体分子的数密度  $n = \frac{dN}{dV} = \frac{N}{V}$ .

(2)设分子运动速度  $\vec{v}_i = v_{ix}\vec{i} + v_{iy}\vec{j} + v_{iz}\vec{k}$ .

①  $\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0, \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$ .

②  $x$ 方向速度平方的平均值  $\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_i v_{ix}^2$ .

[理想气体的压强公式]  $p = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon_k}$ , 其中  $n$  为气体分子的数密度, 分子平均平动动能  $\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ .

[理想气体的平均平动动能]  $\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$ .

[刚性分子的能量自由度]

	$t$ (平动)	$r$ (转动)	$i$ (总)
单原子分子	3	0	3
双原子分子	3	2	5
多原子分子	3	3	6

[分子的平均能量]  $\overline{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT$ .

**[理想气体的内能]**

$$(1) 1 \text{ mol 理想气体内能 } E = N_A \bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} RT.$$

$$(2) \text{理想气体的内能 } E = \nu \frac{i}{2} RT.$$

**[气体分子速率分布图]**

$$(1) \text{设 } \Delta N \text{ 为 } [v, v + \Delta v] \text{ 间的分子数, 则速率在 } [v, v + \Delta v] \text{ 范围的分子数占总分子数的百分比: } \Delta S = \frac{\Delta N}{N}.$$

$$(2) \text{温度为 } T \text{ 的平衡状态下, 速率 } v \text{ 附近单位速率区间的分子数占总分子数的百分比: 速率分布函数 } f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}.$$

$$(3) \text{速率在 } [v, v + dv] \text{ 范围内的分子数占总分子数的百分比 } \frac{dN}{N} = f(v) dv = dS.$$

$$(4) \text{速率在 } [v, v + dv] \text{ 范围内的分子数 } dN = N f(v) dv.$$

$$(5) \text{速率在 } [v_1, v_2] \text{ 范围内的分子数占总分子数的百分比 } \frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv.$$

$$(6) \text{速率在 } [v_1, v_2] \text{ 范围内的分子数 } \Delta N = \int_{v_1}^{v_2} N f(v) dv.$$

**[Maxwell气体分子速率分布律]**

$$(1) \text{最概然速率 } v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{kT}{m}} = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}.$$

$$(2) \text{① 平均速率 } \bar{v} = \frac{v_1 dN_1 + v_2 dN_2 + \dots}{N}.$$

$$\text{② } \bar{v} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}}.$$

$$(3) \text{方均根速率 } v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{kT}{m}} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}}.$$

## 4.1 平衡态理想气体状态方程

一定量气体在不受外界影响下经一定的时间, 系统达到的一个稳定的宏观性质不随时间变化的状态称为**平衡态**, 处于平衡态的气体状态可用三元组  $(p, V, T)$  表示, 其中  $p$ 、 $V$ 、 $T$  分别为气体的压强、体积、热力学温度. 平衡态可用  $p - V$  图上的一个点表示.

理想气体的宏观定义: 遵守三个实验定律的气体.

一般气体温度不太低、压强不太大时都能视为理想气体.

**[理想气体状态方程, 物态方程]** 理想气体平衡态宏观参量间的关系.

(1)对一定量的同种气体,有 $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ .

(2)理想气体状态方程:

$$\textcircled{1} pV = \nu RT = \frac{m'}{M} RT, \text{其中Mole气体常量 } R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

$$\textcircled{2} \text{在}\textcircled{1}\text{中代入 } m' = Nm, M = N_A m \text{得: } pV = \frac{Nm}{N_A} RT, \text{即 } p = nkT,$$

$$\text{其中Boltzmann常数 } k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}, \text{气体分子数密度 } n = \frac{N}{V}.$$

[热力学第零定律] 若物体A和物体B分别与物体C处于热平衡状态,则A与B也处于热平衡状态.

## 4.2 理想气体的微观模型的统计规律

[理想气体的微观模型]

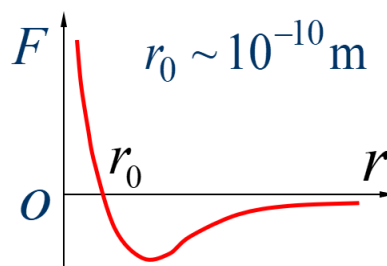
(1)气体分子可视为质点,因分子的线度 $d \approx 10^{-10} \text{ m}$ ,分子间距 $r \approx 10^{-9} \text{ m}$ ,则 $d \ll r$ .

(2)除碰撞瞬间,气体分子间无相互作用力.

(3)气体分子是弹性质点,即碰撞都为完全弹性碰撞.

(4)气体分子的运动遵循经典力学的规律.

[分子力]



① $r < r_0$ 时,分子力主要表现为斥力.

② $r > r_0$ 时,分子力主要表现为引力.

③ $r \rightarrow 10^{-9} \text{ m}$ 时, $F \rightarrow 0$ .

## 4.3 理想气体的压强

[统计方法] 对物理量 $M$ 进行多次测量,测量值为 $M_i$ 的次数为 $N_i$ ,实验总次数为 $N = N_1 + N_2 + \dots$ ,

$$(1) M \text{的统计平均值 } \overline{M} = \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2 + \dots}{N}, \text{或 } \overline{M} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2 + \dots}{N}.$$

$$(2) \text{状态 } i \text{出现的概率 } W_A = \frac{N_i}{N}, \text{则 } \overline{M} = \sum_i W_i M_i.$$

$$[\text{归一化条件}] \sum_i W_i = 1.$$

## [平衡态理想气体速度的统计规律]

(1) 气体分子速度分量的统计平均值:

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta N_1 v_{1x} + \Delta N_2 v_{2x} + \cdots + \Delta N_i v_{ix} + \cdots}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_i + \cdots} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_{ix}}{N},$$

$$\overline{v_y} = \frac{\Delta N_1 v_{1y} + \Delta N_2 v_{2y} + \cdots + \Delta N_i v_{iy} + \cdots}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_i + \cdots} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_{iy}}{N},$$

$$\overline{v_z} = \frac{\Delta N_1 v_{1z} + \Delta N_2 v_{2z} + \cdots + \Delta N_i v_{iz} + \cdots}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \cdots + \Delta N_i + \cdots} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_{iz}}{N}.$$

气体处于平衡态时, 气体分子沿各方向运动的概率相等, 故  $\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0$ .

(2) 气体分子速度平方的统计平均值:

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_i^2}{N} = \frac{\sum_i \Delta N_i v_{ix}^2}{N} + \frac{\sum_i \Delta N_i v_{iy}^2}{N} + \frac{\sum_i \Delta N_i v_{iz}^2}{N} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}.$$

气体处于平衡态时, 气体分子沿各方向运动的概率相等, 故  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$ .

## [平衡态理想气体的统计规律]

(1) 气体分子按位置分布均匀, 即气体分子的数密度  $n = \frac{dN}{dV} = \frac{N}{V}$ .(2) 气体分子沿各方向运动的概率相等. 设分子运动速度  $\vec{v}_i = v_{ix}\vec{i} + v_{iy}\vec{j} + v_{iz}\vec{k}$ .

$$\textcircled{1} \overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0, \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}.$$

$$\textcircled{2} x \text{ 方向速度平方的平均值 } \overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_i v_{ix}^2.$$

[理想气体的压强公式]  $p = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon_k}$ , 其中  $n$  为气体分子的数密度, 分子平均平动动能  $\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ .

## 4.4 理想气体的平均平动动能

[理想气体的平均平动动能] 理想气体物态方程  $p = nkT$  与压强公式  $p = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon_k}$  联立得: 分子平均平动动能  $\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$ .

## [物理意义]

(1) 温度是分子平均平动动能的量度.

(2) 温度是大量分子的集体表现.

(3) 同一温度下, 各种气体分子的平均平动动能相等.

**[例4.4.1]** 等体积的氢气和氮气的密度、分子平均平动动能都相同,且都处于平衡状态,问它们的温度和压强的关系.

**[解]** (1)因它们的分子平均平动动能相同,则它们温度相同.

(2)因  $p = nkT = \frac{N}{V}kT$ , 而等体积且密度相同的氢气和氮气中,氢气的分子数较大,故氢气的压强较大.

## 4.5 能量均分定理与理想气体的内能

**[自由度]** 分子能量中独立的速度和坐标的二次方项的数目称为分子能量自由度的数目,简称**自由度**,用符号*i*表示.

自由度数目  $i = t + r + v$ , 其中*t*、*r*、*v*分别是分子平动、转动、振动贡献的自由度.

**[刚性分子的能量自由度]**

	<i>t</i> (平动)	<i>r</i> (转动)	<i>i</i> (总)
单原子分子	3	0	3
双原子分子	3	2	5
多原子分子	3	3	6

**[能量均分定理]** 气体处于平衡态时,分子中任一自由度的平均能量都相等,都为  $\frac{1}{2}kT$ .

**[分子的平均能量]**  $\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2}kT$ ,

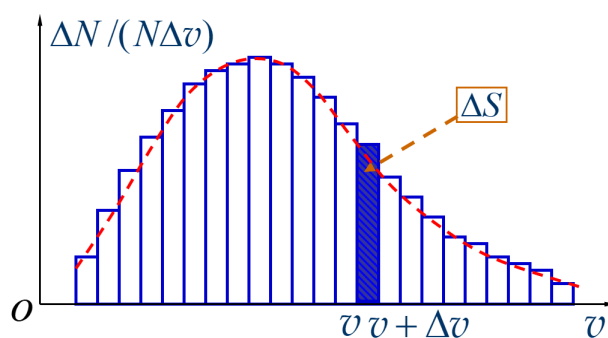
**[理想气体的内能]** 理想气体的内能等于分子动能与分子内原子间的势能之和.

(1) 1 mol理想气体内能  $E = N_A \bar{\varepsilon} = \frac{i}{2}RT$ .

(2) 理想气体的内能  $E = \nu \frac{i}{2}RT$ , 内能的变化量  $dE = \nu \frac{i}{2}RdT$ .

## 4.6 Maxwell气体分子速率分布律

[分子速率分布图]



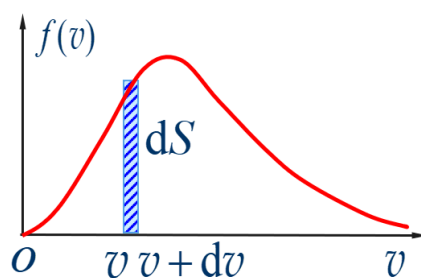
设分子总数为  $N$ .

(1) 设  $\Delta N$  为  $[v, v + \Delta v]$  间的分子数, 则  $\Delta S = \frac{\Delta N}{N}$  表示速率在  $[v, v + \Delta v]$  范围的分子数占总分子数的百分比.

(2) 速率分布函数  $f(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N\Delta v} = \frac{1}{N} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta v} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ .

$f(v)$  物理意义: 温度为  $T$  的平衡状态下, 速率  $v$  附近单位速率区间的分子数占总分子数的百分比.

①



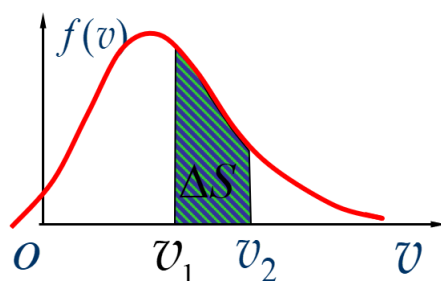
$$(i) \frac{dN}{N} = f(v)dv = dS.$$

$f(v)dv$  的物理意义: 速率在  $[v, v + dv]$  范围内的分子数占总分子数的百分比.

$$(ii) dN = Nf(v)dv.$$

$Nf(v)dv$  的物理意义: 速率在  $[v, v + dv]$  范围内的分子数.

②

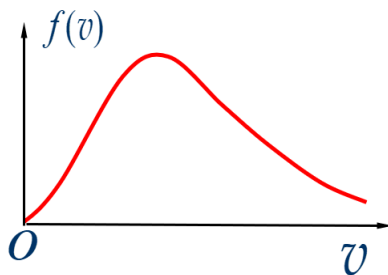


$$(i) \text{速率在 } [v_1, v_2] \text{ 范围内的分子数占总分子数的百分比 } \frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv.$$

$$(ii) \text{速率在 } [v_1, v_2] \text{ 范围内的分子数 } \Delta N = \int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv.$$

**[Maxwell气体分子速率分布律]** 平衡态理想气体的速率分布函数  $f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$ , 其中  $m$  为气体分子的相对分子质量.

(1) Maxwell速率分布曲线:

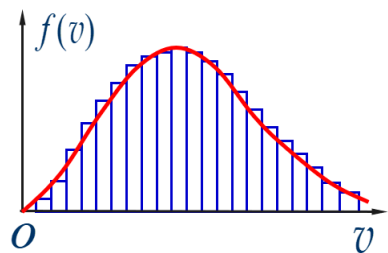


(2) 最概然速率  $v_p$  满足  $\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v=v_p} = 0$ , 解得:  $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{kT}{m}}$ .

$v_p$  的物理意义: 气体在一定温度下分布在最概然速率  $v_p$  附近单位速率间隔内的相对分子数最多.

(3)  $v_p$  中代入  $M = mN_A$ ,  $R = N_A k$  得:  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$ .

(4)



① 平均速率  $\bar{v} = \frac{v_1 dN_1 + v_2 dN_2 + \dots}{N}$ .

②  $\bar{v} = \frac{\int_0^N v dN}{N} = \frac{\int_0^{+\infty} v N f(v) dv}{N} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}}$ .

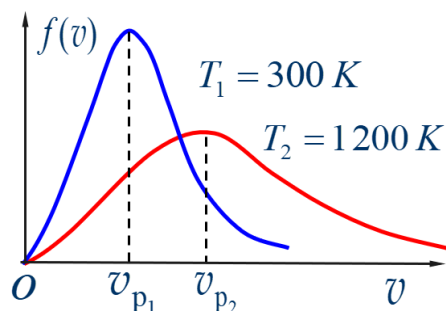
(5)  $\overline{v^2} = \frac{\int_0^N v^2 dN}{N} = \frac{\int_0^{+\infty} v^2 N f(v) dv}{N} = \frac{3kT}{m}$ .

方均根速率  $v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{kT}{m}} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}}$ .

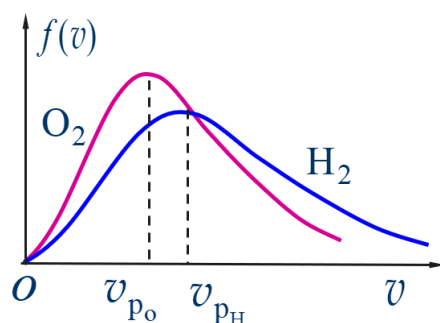
(6) 三种速率的大小关系:  $v_p < \bar{v} < \sqrt{\overline{v^2}}$ .

## [例4.6.1]

(1)  $N_2$ 分子在不同温度下的速率分布图:



(2) 同一温度下不同气体的速率分布图:

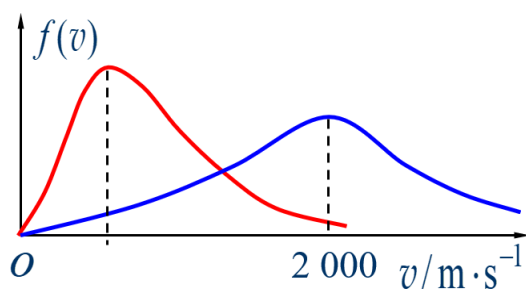


[例4.6.2] 设气体分子数为  $N$ , 相对分子质量为  $m$ , 速率分布函数为  $f(v)$ .

(1) 速率在  $[v_p, \bar{v}]$  范围内的分子数:  $\int_{v_p}^{\bar{v}} N f(v) dv$ .

(2) 速率在  $[v_p, +\infty)$  范围内的分子的动能之和:  $\int_{v_p}^{+\infty} \frac{1}{2} m v^2 N f(v) dv$ .

[例4.6.3] 如下图为氢气和氧气在同一温度下的Maxwell速率分布曲线. 分别求两气体的最概然速率.



[解] 因  $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ , 而  $m(H_2) < m(O_2)$ , 故  $v_p(H_2) > v_p(O_2)$ .

(1) 由图知:  $v_p(H_2) = 2000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

(2) 因  $\frac{v_p(H_2)}{v_p(O_2)} = \sqrt{\frac{m(O_2)}{m(H_2)}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$ , 故  $v_p(O_2) = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



