《概率论与数理统计》期末速通

6. 样本与抽样分布

6.1 随机样本

[**定义6.1.1**] 试验的所有可能的观察值或研究对象的全体称为**总体**, 每个可能的观察值称为**个体**. 总体中包含的个体的个数称为总体的**容量**, 容量有限的总体称为**有限总体**, 否则称为**无限总体**.

[**注**] 总体中的每个个体对应试验的一个观察值, 进而对应一个随机变量 X 的值, 即每个个体对应一个随机变量, 下面称总体 X .

[**定义6.1.2**] 从总体中抽取一部分个体, 根据得到的数据推断总体分布, 被抽出的部分个体称为总体的一个**样本**. 严谨地, 在相同条件下, 对总体 X 进行 n 次重复、独立的观察, n 次观察的结果按试验次序依次记作 $X_1,\cdots,X_n$. 因 $X_1,\cdots,X_n$ 是对 X 观察的结果, 且各次观察在相同条件下独立进行, 则可认为 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立, 且与 X 同分布, 此时称 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一个**简单随机样本**, 简称**样本**, 其中 n 称为样本的**容量**.

[**注**]

(1) 对有限个体, 用放回抽样得到样本, 但使用不方便. 个体总数 $N>>$ 样本容量 n 时, 可将不放回抽样近似为放回抽样.

(2) 对无限个体, 抽取一个个体不影响其分布, 故用不放回抽样得到样本.

(3) 有限个体的个体总数较多时, 可近似为无限个体.

[**定义6.1.3**] 设随机变量 X 的分布函数为 F . 若 $X_1,\cdots,X_n$ 是有同一分布函数 F 且相互独立的随机变量, 则称 $X_1,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 、容量为 n 的**简单样本**, 简称**样本**, 它们的观察值 $x_1,\cdots,x_n$ 称为**样本值**, 又称为 X 的 n 个**独立的观察值**. 可将样本视为一个随机向量, 记作 $(X_1,\cdots,X_n)$, 此时样本值记作 $(x_1,\cdots,x_n)$.

[**注**] 若 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的一个样本, 则有: ① $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立; ② $X_1,\cdots,X_n$ 与 X 同分布.

[**定理6.1.1**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 且容量为 n 的样本, 则:

(1) 随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数 $F^*(x_1,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)=\prod\limits_{i=1}^n F(x_i)$.

(2) 离散型随机变量的样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合分布律

$$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=P\{X_1=x_1\}\cdots P\{X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^n P\{X=x_i\}\ .$$

(3) 连续型随机变量的样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合概率密度

$$f^*(x_1,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^n f(x_i)\ .$$

[例6.1.1] 设总体 $X \sim Exp(\theta)$, $X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的样本.

(1) 求随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的概率密度.

(2) 求 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布函数.

[解] X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}},x>0\\0,x\leq 0\end{cases}$, 分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}},x\geq 0\\0,x<0\end{cases}$.

(1) $f(x_1,\cdots,x_n)=\prod\limits_{i=1}^n f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{x_1+\cdots+x_n}{\theta}},x_1,\cdots,x_n>0\\0,otherwise\end{cases}$.

(2) $F(x_1,\cdots,x_n)=\prod\limits_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^n\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}}\right),x_1,\cdots,x_n\geq 0\\0,otherwise\end{cases}$.

[例6.1.2] 设总体 $X \sim b(n,p)$, $X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的样本. 求随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布律.

[解] X 的分布律 $P\{X=k\}=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\ \ (k=0,1,\cdots,n)$.

$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod\limits_{i=1}^n P\{X_i=x_i\}=\prod\limits_{i=1}^n C_n^{x_i}\cdot p^{x_i}\cdot(1-p)^{n-x_i}\ \ (x_i=0,1,\cdots,n)$.

6.2 统计量与经验分布函数

6.2.1 统计量

[定义6.2.1] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本, $g(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的一个函数. 若 g 中不含未知参数, 则称 $g(X_1,\cdots,X_n)$ 是一个**统计量**. 若 $x_1,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的样本值, 则称 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 是统计量 $g(X_1,\cdots,X_n)$ 的**观察值**.

[例6.2.1] 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ 已知, σ^2 未知. $X_1,\cdots,X_5$ 是取自 X 的样本.

(1) $\dfrac{X_1+\cdots+X_5}{5}$ 是统计量.

(2) $\mu\cdot X_1+2X_2^2$ 是统计量.

(3) $\dfrac{X_1+X_2+X_5}{\sigma}$ 不是统计量, 因包含未知参数 σ .

[**定义6.2.2**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 的取自总体 X 的一个样本, $x_1,\cdots,x_n$ 是样本的观察值.

定义	统计量	观察值
样本均值	$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$	$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$
样本方差	$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$	$s^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)$
样本标准差	$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$	$s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$
样本 k 阶(原点)矩	$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k\ \ (k=1,2,\cdots)$	$a_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k\ \ (k=1,2,\cdots)$
样本 k 阶中心矩	$B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k\ \ (k=2,3,\cdots)$	$b_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k\ \ (k=2,3,\cdots)$

其中 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2\overline{X}\cdot X_i+\overline{X}^2\right)$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\cdot\left(n\cdot\overline{X}\right)+n\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right).$$

[**注1**] 注意方差和标准差中的系数为 $\dfrac{1}{n-1}$ 而非 $\dfrac{1}{n}$.

[**注2**] 样本的均值隐含了总体的均值的信息, 样本的方差隐含了总体的方差的信息.

[**定理6.2.1**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 的取自总体 X 的一个样本. 若 X 的 $k\ \ (k=1,2,\cdots)$ 阶矩 $E(X^k)=\mu_k$ 存在, 则 $n\to+\infty$ 时, 样本的 k 阶矩 $A_k\overset{P}{\to}\mu_k$.

[**证**] 因 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立且与 X 同分布, 则 $X_1^k,\cdots,X_n^k$ 相互独立且与 X^k 同分布,

进而 $E(X_i^k)=E(X^k)=\mu_k\ \ (i=1,\cdots,n)$.

由**弱大数定理**: $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k\overset{P}{\to}\mu_k$.

[**注**] 由依概率收敛的序列的性质: 对连续函数 g , 有 $g(A_1,\cdots,A_k)\overset{P}{\to}g(\mu_1,\cdots,\mu_k)$, 这是矩估计法的理论依据.

6.2.2 经验分布函数

[**定义6.2.3**] 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是总体 F 的一个样本. 设 $S(x)$ 为 $X_1, \cdots, X_n$ 中 $\leq x$ 的随机变量的个数, 定义**经验分布函数** $F_n(x) = \dfrac{1}{n} S(x)$. 对一个样本值, 易得 $F_n(x)$ 的观察值, 仍用 $F_n(x)$ 表示.

[**例6.2.2**]

(1) 设总体 F 有一个样本值 $1, 2, 3$, 求其经验分布函数.

(2) 设总体 F 有一个样本值 $1, 1, 2$, 求其经验分布函数.

[**解**]

(1) 经验分布函数 $F_3(x)$ 的观察值 $F_3(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ \dfrac{1}{3}, 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{2}{3}, 2 \leq x < 3 \\ 1, x \geq 3 \end{cases}$.

(2) 经验分布函数 $F_3(x)$ 的观察值 $F_3(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ \dfrac{2}{3}, 1 \leq x < 2 \\ 1, x \geq 2 \end{cases}$.

[**注1**] 可将随机变量的取值的频率近似为其概率, 用求离散型随机变量的分布函数的方式求经验分布函数.

[**注2**] 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是总体 F 的一个容量为 n 的样本值. 求经验分布函数的方法:

① 将 $x_1, \cdots, x_n$ 非降序排列, 重新编号为 $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$.

② 经验分布函数 $F_n(x)$ 的观察值 $F_n(x) = \begin{cases} 0, x < x_{(1)} \\ \dfrac{k}{n}, x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)}, k = 1, \cdots, n-1 \\ 1, x \geq x_{(n)} \end{cases}$.

[**定理6.2.2**] [**Glivenko定理**] 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是总体 X 的一个样本, 其经验分布函数为 $F_n(x)$. 设 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $n \to +\infty$ 时, $F_n(x)$ 以概率 1 一致收敛于 $F(x)$, 即 $P\left\{\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0\right\} = 1$.

[**注1**] 本定理表明: n 充分大时, 经验分布的观察值 $F_n(x)$ 可近似为总体的分布函数 $F(x)$.

[**注2**] 对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $S(x) \sim b(n, F(x))$, 则 $E[F_n(x)] = \dfrac{1}{n} E[S(x)] = \dfrac{1}{n} E[n \cdot F(x)] = F(x)$.

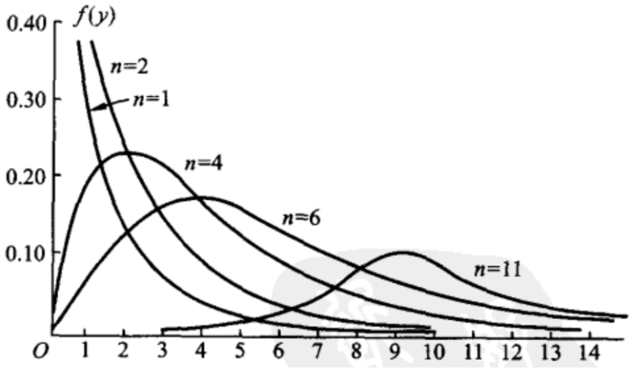
6.3 抽样分布

[**定义6.3.1**] 统计量的分布称为**抽样分布**. 总体的分布函数已知时, 抽样分布确定.

6.3.1 χ^2 分布

[定义6.3.2] $X_1, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的样本, 称统计量 $\chi^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 **分布**或**卡方分布**, 记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 其中自由度指上式右端包含的独立的随机变量的个数.

[注1] $\chi^2(n)$ 分布的概率密度 $f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \cdot y^{\frac{n}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, y > 0 \\ 0, otherwise \end{cases}$, 其图象如下图所示:



[注2] 若随机变量 $X \sim N(0,1)$, 则 $X \sim \chi^2(1)$.

[例6.3.1] 设 $X_1, \cdots, X_4$ 是取自总体 $X \sim N(0,1)$ 的样本, 则:

(1) $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \sim \chi^2(3)$.

(2) $X_1^2 + \dfrac{1}{2}(X_2 + X_3)^2 \sim \chi^2(2)$, 而非 $\chi^2(3)$,

因为 $X_2, X_3 \sim N(0,1)$, 则 $X_2 + X_3 \sim N(0,2)$, 进而 $\dfrac{(X_2 + X_3) - 0}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$.

故 $X_1^2 + \left(\dfrac{X_2 + X_3}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(2)$.

[定理6.3.1] [χ^2 **分布的性质**]

(1) [χ^2 **分布的可加性**] 若随机变量 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$ 且相互独立, 则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

(2) 若随机变量 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则期望 $E(\chi^2) = n$, 方差 $D(\chi^2) = 2n$.

[证]

(2) $E(\chi^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^n E(X_i^2) = n \cdot E(X^2) = n \cdot \{D(X) + [E(X)]^2\} = n$, 其中随机变量 $X \sim N(0,1)$.

$$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^n D(X_i^2) = n \cdot D(X^2) = n \cdot \{E(X^4) - [E(X^2)]^2\}$$

$$= n \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x - 1\right) = n \cdot 2 = 2n .$$

[例6.3.1] 设 $X_1, \cdots, X_4$ 是总体 $X \sim N(0,1)$ 的样本.

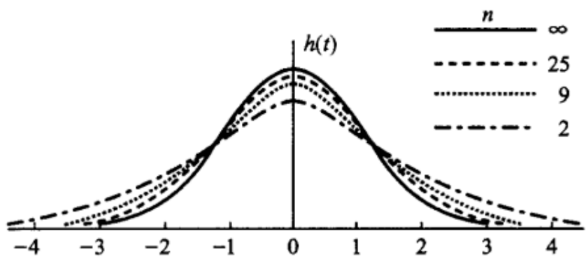
(1) 随机变量 $X^2 \sim \chi^2(1)$, 则期望 $E(X^2) = 1$, 方差 $D(X^2) = 2$.

(2) 随机变量 $X_1^2 + \cdots + X_4^2 \sim \chi^2(4)$, 则期望 $E(X_1^2 + \cdots + X_4^2) = 4$, 方差 $D(X_1^2 + \cdots + X_4^2) = 8$.

6.3.2 t 分布

[**定义6.3.3**] 设随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ 且相互独立, 则称统计量 $t = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$ 服从自由度为 n 的 t **分布**或**Student分布**, 记作 $t \sim t(n)$.

[**注1**] $t(n)$ 分布的概率密度 $h(t) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, 其图象如下图所示:



$h(t)$ 的图象关于 $t=0$ 对称.

[**注2**] 可以证明 $\lim\limits_{n \to +\infty} h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, 则 n 充分大时, t 分布近似于标准正态分布.

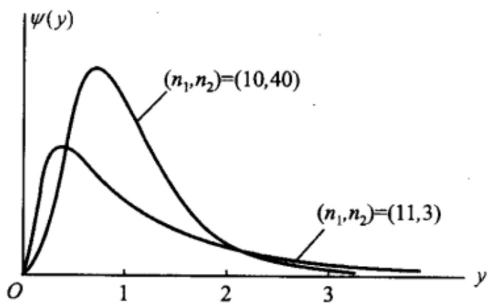
[**例6.3.2**] 设 $X_1, \cdots, X_{10}$ 是总体 $X \sim N(0,1)$ 的样本,

则 $\dfrac{X_1}{\sqrt{\dfrac{X_2^2 + \cdots + X_{10}^2}{9}}} \sim t(9)$, 因为 $X_2^2 + \cdots + X_{10}^2 \sim \chi^2(9)$.

6.3.3 F 分布

[**定义6.3.4**] 设随机变量 $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$ 且相互独立, 则称随机变量 $F = \dfrac{\dfrac{U}{n_1}}{\dfrac{V}{n_2}}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F **分布**, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$.

[**注**] $F(n_1, n_2)$ 分布的概率密度 $\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot y^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{n_1}{n_2} y\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, y > 0 \\ 0, otherwise \end{cases}$, 其图象如下图所示:



[定理6.3.2] 若随机变量 $F \sim F(n_1,n_2)$, 则随机变量 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$.

[例6.3.3] 设 $X_1,\cdots,X_{32}$ 是总体 $N(0,1)$ 的样本, 则:

(1) 统计量 $Y=\displaystyle\sum_{k=1}^{10} X_k^2 \sim \chi^2(10)$.

(2) 因随机变量 X_{16} 与 Y 相互独立, 则统计量 $Z=\dfrac{X_{16}}{\sqrt{\dfrac{Y}{10}}} \sim t(10)$.

(3) 因 Y 与随机变量 $\displaystyle\sum_{k=11}^{30} X_k^2$ 相互独立, 而 $\displaystyle\sum_{k=11}^{30} X_k^2 \sim \chi^2(20)$,

则统计量 $W=\dfrac{2Y}{\displaystyle\sum_{k=11}^{30} X_k^2}=\dfrac{\dfrac{Y}{10}}{\dfrac{\displaystyle\sum_{k=11}^{30} X_k^2}{20}} \sim F(10,20)$.

[例6.3.4] 设 $X_1,\cdots,X_{20}$ 是总体 $N(0,4)$ 的样本, 则随机变量 $\dfrac{X_k-0}{2}=\dfrac{X_k}{2} \sim N(0,1)\ \ (k=1,\cdots,20)$.

(1) 设统计量 $Y=\displaystyle\sum_{k=1}^{9} X_k^2$, 则 $\dfrac{Y}{4}=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\left(\dfrac{X_k}{2}\right)^2 \sim \chi^2(9)$.

(2) 因随机变量 X_{20} 与 Y 相互独立, 则统计量 $Z=\dfrac{3X_{20}}{\sqrt{Y}}=\dfrac{\dfrac{X_{20}}{2}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{Y}{4}}{9}}} \sim t(9)$.

(3) 因 Y 与随机变量 $\displaystyle\sum_{k=11}^{18} X_k^2$ 相互独立, 则统计量 $W=\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{Y}{\displaystyle\sum_{k=11}^{18} X_k^2}=\dfrac{\dfrac{Y}{9}}{\dfrac{\displaystyle\sum_{k=11}^{18} X_k^2}{8}} \sim F(9,8)$.

6.4 分位点

[定义6.4.1] 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$. 若对固定的 $\alpha \in (0,1)$, $\exists z_\alpha \in \mathbb{R}\ s.t.$ $P\{X>z_\alpha\}=\displaystyle\int_{z_\alpha}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\alpha$, 则称点 z_α 为 X 的**上 α 分位点**.

[定义6.4.2] 设随机变量 $X \sim N(0,1)$. 对固定的 $\alpha \in (0,1)$, 称 $s.t.\ P\{X>z_\alpha\}=\displaystyle\int_{z_\alpha}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x=\alpha$ 的点 z_α 为 $N(0,1)$ 的**上 α 分位点**, 其中 $\varphi(x)$ 是 $N(0,1)$ 的概率密度.

[定理6.4.1] 设随机变量 $X \sim N(0,1)$. 对固定的 $\alpha \in (0,1)$, 设 z_α 是 X 的上 α 分位点, 则 $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$.

[证] 由正态分布的概率密度的图象关于 y 轴对称, 结合几何意义即证.

[定义6.4.3] 设随机变量 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$. 对固定的 $\alpha \in (0,1)$, 称 $s.t.\ P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y = \alpha$ 的点 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 的**上 α 分位点**, 其中 $f(y)$ 是 $\chi^2(n)$ 的概率密度.

[定义6.4.4] 设随机变量 $t \sim t(n)$. 对固定的 $\alpha \in (0,1)$, 称 $s.t.\ P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \alpha$ 的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 的**上 α 分位点**, 其中 $h(t)$ 是 $t(n)$ 的概率密度.

[定理6.4.2] 设随机变量 $X \sim t(n)$. 对固定的 $\alpha \in (0,1)$, 设 z_α 是 X 的上 α 分位点, 则 $t_{1-\alpha} = -t_\alpha$.

[证] 由 t 分布的概率密度的图象关于 y 轴对称, 结合几何意义即证.

[定义6.4.5] 设随机变量 $F \sim F(n)$. 对固定的 $\alpha \in (0,1)$, 称 $s.t.\ P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} \psi(y)\mathrm{d}y = \alpha$ 的点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 的**上 α 分位点**, 其中 $\psi(x)$ 是 $F(n)$ 的概率密度.

[定理6.4.3] 设随机变量 $X \sim F(n_1,n_2)$. 对固定的 $\alpha \in (0,1)$, 设 F_α 是 X 的上 α 分位点, 则 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$.

[证] 因 $F \sim F(n_1,n_2)$,

则 $1-\alpha = P\{F > F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\} = P\left\{\dfrac{1}{F} < \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\}$

$= 1 - P\left\{\dfrac{1}{F} \geq \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\} = 1 - P\left\{\dfrac{1}{F} > \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\}$, 进而 $P\left\{\dfrac{1}{F} > \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\} = \alpha$.

因 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$, 则 $P\left\{\dfrac{1}{F} > F_\alpha(n_2,n_1)\right\} = \alpha = P\left\{\dfrac{1}{F} > \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\}$,

进而 $F_\alpha(n_2,n_1) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}$.

6.5 正态总体的样本均值与样本方差的分布

[**定理6.5.1**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本, 期望 $E(X)=\mu$ 和方差 $D(X)=\sigma^2$ 都存在, 则:

(1) 样本均值的期望 $E\left(\overline{X}\right)=\mu$.

(2) 样本均值的方差 $D\left(\overline{X}\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.

(3) 样本方差的期望 $E(S^2)=\sigma^2$.

[**证**]

(1) $E\left(\overline{X}\right)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n E(X_i)=\dfrac{1}{n}\cdot(n\mu)=\mu$.

(2) $D\left(\overline{X}\right)=\dfrac{1}{n^2}D\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\right)\xlongequal{\text{独立性}}\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^n D(X_i)=\dfrac{1}{n^2}\cdot(n\sigma^2)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.

(3) 因 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$,

$E\left(\overline{X}^2\right)=D\left(\overline{X}\right)+\left[E\left(\overline{X}\right)\right]^2=\dfrac{\sigma^2}{n}+\mu^2$,

则 $E(S^2)=E\left[\dfrac{1}{n-1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2-n\cdot\overline{X}^2\right)\right]=\dfrac{1}{n-1}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^n E(X_i^2)-n\cdot E\left(\overline{X}^2\right)\right]$

$=\dfrac{1}{n-1}\left[n\cdot E(X^2)-n\cdot E\left(\overline{X}^2\right)\right]=\dfrac{1}{n-1}\left[n(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\dfrac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]=\sigma^2$.

[**注**] 本定理与 X 服从何分布无关, 只需保证期望和方差存在.

[定理6.5.2] 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 样本均值为 $\overline{X}$, 样本方差为 S^2 , 则:

(1) $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

(3) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

(4) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$.

(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$.

[证]

(1) 因 $X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且相互独立, 而 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$,

则 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, 其中 $E\left(\overline{X}\right) = E(X) = \mu, D\left(\overline{X}\right) = \dfrac{D(X)}{n} = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

(4) 由(1): $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, 则标准化变量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

由(2): $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$. 由(3): $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

故 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \sim t(n-1)$.

[注] (2)中 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$, 注意非 $\chi^2(n)$,

因为随机变量 $\left(X_i-\overline{X}\right)\ (1 \le i \le n)$ 非独立,

因为 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \overline{X} = 0$, 则它们存在约束关系.

[**例6.5.1**] 设 $X_1, \cdots, X_5$ 是取自总体 $X \sim N(2,7)$ 的样本, 由**定理6.5.2**:

(1) 样本均值 $\overline{X} \sim N\left(2, \dfrac{7}{5}\right)$.

(2) 随机变量 $\dfrac{4}{7}S^2 = \dfrac{5-1}{7}S^2 \sim \chi^2(4)$.

(3) 随机变量 $\dfrac{\overline{X}-2}{\dfrac{S}{\sqrt{5}}} \sim t(4)$.

[**定理6.5.3**] 设 $X_1, \cdots, X_{n_1}$ 是取自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1, \cdots, Y_{n_2}$ 是取自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, 且这两个样本相互独立. 设两样本的样本方差分别为 $S_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, S_2^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1}\sum\limits_{i=1}^{n_2}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$, 则:

(1) $\dfrac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

(2) 两总体的方差相同, 即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时, 有 $\dfrac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, 其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, S_w = \sqrt{S_w^2}$.

[**证**]

(1) 由**定理6.5.2**: $\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1), \dfrac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$.

因 S_1^2 与 S_2^2 相互独立, 则 $\dfrac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma^2}} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2}}{n_1 - 1}}{\dfrac{\dfrac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}}{n_2 - 1}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.