大学物理(1)速通教程

3. 动量与能量

3.1 动量定理

动量定理只适用于惯性系,且讨论的速度需相对于同一参考系.

[**动量**] $\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}$.

[**冲量**] 力在一段时间内持续作用的效果,是力对时间的积累,由力和力的作用时间决定.$\overrightarrow{I}=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\mathrm{d}t$.

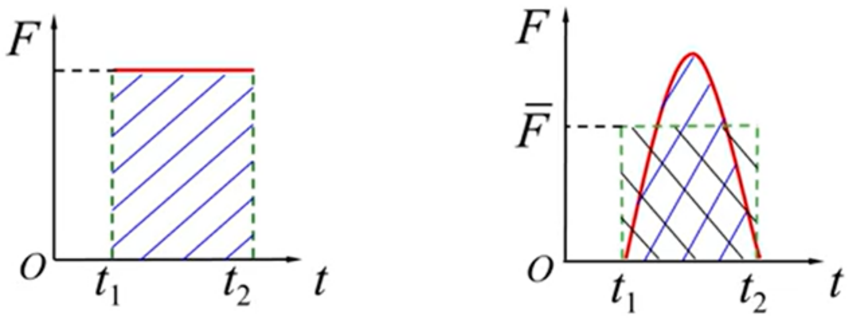


图2: $I=\overline{F}\Delta t$.

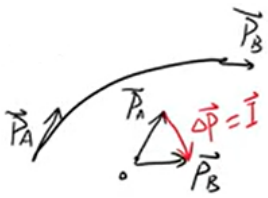
[**注**] 冲量是过程量,动量是状态量.

[**质点的动量定理**] 一段时间内合外力作用在质点上的冲量等于质点在此时间内动量的增量.

[**证**] 由牛二$\overrightarrow{F}=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}$:动量定理$\begin{cases}\text{微分形式}:\overrightarrow{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\overrightarrow{p}\\ \text{积分形式}:\overrightarrow{I}=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\mathrm{d}t=\int_{\overrightarrow{p_1}}^{\overrightarrow{p_2}}\mathrm{d}\overrightarrow{p}=\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}=\Delta\overrightarrow{p}\end{cases}$.

[**注1**] 动量定理表明:过程量=状态量的增量.这可用于求做曲线运动且受变力的质点的冲量.

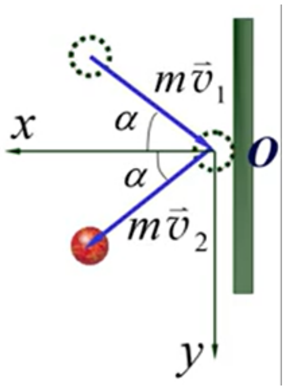
[**注2**] 冲量的方向为动量增量的方向.



[**注3**] 分量表示:$\overrightarrow{I}=I_x\overrightarrow{i}+I_y\overrightarrow{j}+I_z\overrightarrow{k}=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F}\mathrm{d}t=\left(\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t\right)\overrightarrow{i}+\left(\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t\right)\overrightarrow{j}+\left(\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t\right)\overrightarrow{k}$

$=\Delta\overrightarrow{p}=\Delta p_x\overrightarrow{i}+\Delta p_y\overrightarrow{j}+\Delta p_z\overrightarrow{k}=(p_{2x}-p_{1x})\overrightarrow{i}+(p_{2y}-p_{1y})\overrightarrow{j}+(p_{2z}-p_{1z})\overrightarrow{k}$.

[**例3.1.1**] 一质量为m、速率为$\overrightarrow{v_1}$的钢球以与钢板成45°角的方向撞击钢板后以相同的速率和角度弹回.设碰撞时间为Δt,求此时间内钢板所受的平均冲力.



[**解**] $\overrightarrow{I}=\int\overrightarrow{F}\mathrm{d}t=\overline{\overrightarrow{F}}\Delta t=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_0}$,

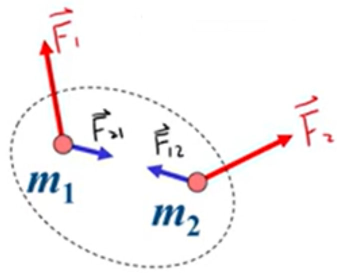
其中$\overrightarrow{p_0}=-mv_1\cos\alpha\overrightarrow{i}+mv_1\sin\alpha\overrightarrow{j},\overrightarrow{p}=mv_2\cos\alpha\overrightarrow{i}+mv_2\sin\alpha\overrightarrow{j}$,且$v_1=v_2$.解得$\overline{\overrightarrow{F}}=\dfrac{2mv_1\cos\alpha\overrightarrow{i}}{\Delta t}$.

将相互作用的若干个质点视为一个整体,称该组质点为质点系.

[**质点系的动量定理**] 作用于系统的外力的矢量和(不称"合外力")的冲量等于系统动量的增量.

$$令\overrightarrow{F^{\mathrm{ex}}}=\sum_i\overrightarrow{F_i},\overrightarrow{p}=\sum_i\overrightarrow{p_i}.\begin{cases}积分形式:\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F^{\mathrm{ex}}}\mathrm{d}t=\sum_i m_i\overrightarrow{v_i}-\sum_i m_i\overrightarrow{v_{i0}}\\ 微分形式:\overrightarrow{F^{\mathrm{ex}}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\overrightarrow{p}\end{cases}.$$

[**证**] 如下图,设m_1和m_2所受的外力分别为$\overrightarrow{F_1}$和$\overrightarrow{F_2}$,相互作用的内力为$\overrightarrow{F_{21}}$和$\overrightarrow{F_{12}}$.



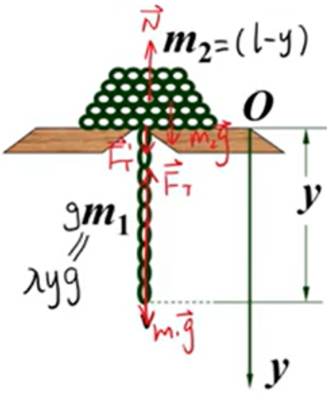
$$\begin{cases}m_1:\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_{21}}\right)\mathrm{d}t=m_1\overrightarrow{v_1}-m_1\overrightarrow{v_{10}}\\ m_2:\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left(\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_{12}}\right)\mathrm{d}t=m_2\overrightarrow{v_2}-m_2\overrightarrow{v_{20}}\end{cases}.令\overrightarrow{F^{\mathrm{ex}}}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2},相加得:$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{F^{\mathrm{ex}}}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)\mathrm{d}t=\left(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}\right)-\left(\overrightarrow{p_{10}}+\overrightarrow{p_{20}}\right)$$
$$=\left(m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}\right)-\left(m\overrightarrow{v_{10}}+m\overrightarrow{v_{20}}\right).$$

[**注1**] 质点系的动量定理与质点的动量定理形式相同,但物理量的含义不同.

[**注2**] 质点系的动量定理表明:一个系统总动量的变化只与系统所受的外力有关,与系统内力无关.只有外力的冲量能改变整个质点组的动量.内力虽能改变个别质点的动量,但不能改变整个质点组的动量.

[**例3.1.2**] 一柔软链条长为l,单位长度的质量为λ.链条放在一有小孔的桌上,链条一端由小孔稍伸下,其余部分堆在小孔周围.因某种扰动,链条因自身重量开始下落.求链条下落速度v与下落高度y的关系.忽略所有摩擦,认为链条可自由伸开.



[解] $\overrightarrow{F^{\text{ex}}}=\overrightarrow{N}+(m_1+m_2)\overrightarrow{g}=m_1\overrightarrow{g}$,则$F^{\text{ex}}=\lambda yg$.$\overrightarrow{p}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}=m_1\overrightarrow{v}$,则$p=m_1v=\lambda yv$.

$\overrightarrow{F^{\text{ex}}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\overrightarrow{p}\Leftrightarrow\lambda yg\mathrm{d}t=\mathrm{d}p=\mathrm{d}(\lambda yv)$.两边同乘$y$得:$gy(v\mathrm{d}t)=v\mathrm{d}(yv)$,即$gy\mathrm{d}y=v\mathrm{d}(yv)$.

两边同乘y得:$gy^2\mathrm{d}y=yv\mathrm{d}(yv)=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(y^2v^2)$.两边积分得:$\displaystyle\int_0^y gy^2\mathrm{d}y=\int_0^{yv}\frac{1}{2}\mathrm{d}(y^2v^2)$,解得$v=\sqrt{\dfrac{3}{2}gy}$.

3.2 动量守恒定律

动量守恒只适用于惯性系,且讨论的速度需相对于同一参考系.若动量在某一参考系中守恒,则它在其他惯性系中也守恒.

[质点的动量守恒定律] 若质点所受合外力为零,则质点的动量不变,即$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\overrightarrow{p}$为恒矢.

[注] 质点所受的合外力的冲量为零不能推出动量守恒.如外力拉着质点做圆周运动,运动一周回到起点.

显然$\overrightarrow{I}=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{p_0}=\overrightarrow{0}$,但$\overrightarrow{p}$随$\overrightarrow{v}$的方向的改变而改变.

[质点系的动量守恒定律] 若质点系所受的外力矢量和为零,则该质点系的总动量不变,即$\overrightarrow{F^{\text{ex}}}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\overrightarrow{p}=\displaystyle\sum_i m_iv_i$为恒矢.

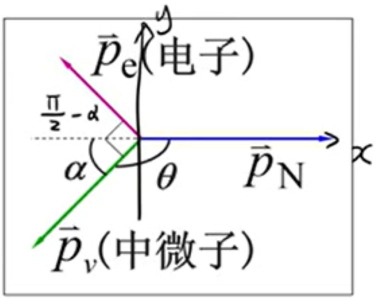
[注1] 系统的总动量不变指系统内各质点的动量的矢量和不变,个别质点的动量可能改变.

[注2] 外力与内力相比很小(如爆炸)时可忽略外力,认为动量守恒.

[注3] 动量守恒是Newton定律的必然推论,但动量守恒比Newton定律应用更广,是比Newton定律更普遍更基本的定律,适用于宏观、微观、低速、高速.

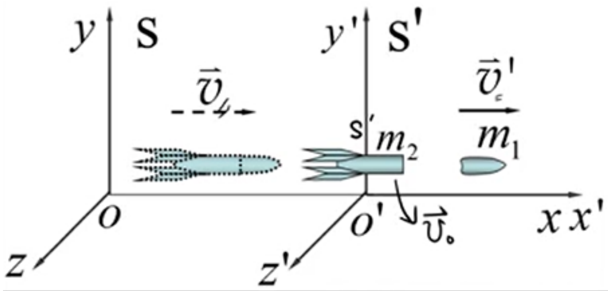
[注4] 若外力矢量和沿某一方向为零,则该方向上动量守恒.

[例3.2.1] 设一静止的原子核衰变辐射出一个电子和一个中微子后成为一个新的原子核.已知电子和中微子的运动方向互相垂直,电子和中微子的动量分别为$\overrightarrow{p_e}$和$\overrightarrow{p_\nu}$.求新原子核的动量$\overrightarrow{p_N}$.



[解] $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{p_e}+\overrightarrow{p_\nu}+\overrightarrow{p_N}$,其中$\begin{cases} x: p_e\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+p_\nu\cos\alpha=p_N \\ y: p_e\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=P_\nu\sin\alpha \end{cases}$,解出$\overrightarrow{P_N}$即可.

[例3.2.2] 设火箭以速度$\overrightarrow{v}$相对惯性系S沿水平方向飞行,不计空气阻力.现火箭分离为两部分,前方仪器舱的质量为m_1,后方火箭的质量为m_2,仪器舱相对于火箭容器的水平速度为$\overrightarrow{v'}$.求仪器舱和火箭容器相对于惯性系的速度.



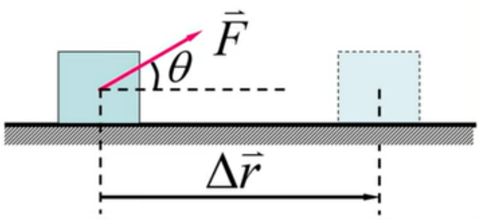
[解] 注意将$\overrightarrow{v'}$转化为相对于惯性系的速度.

水平方向由动量守恒:$(m_1+m_2)\overrightarrow{v}=m_2\overrightarrow{v_0}+m_1\left(\overrightarrow{v'}+\overrightarrow{v_0}\right)$,解出$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v_0}$即可.

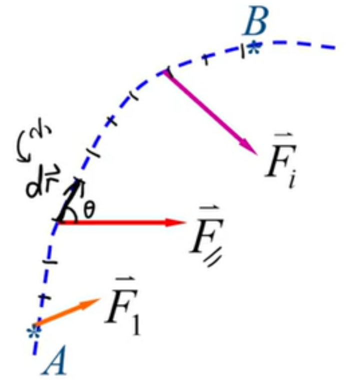
3.3 动能定理

若质点在力$\overrightarrow{F}$的作用下发生了一段位移$\Delta\overrightarrow{r}$,则称该力对该质点做了功.功是力对空间的积累.

(1)恒力做功:$W=F|\Delta r|\cos\theta=\overrightarrow{F}\cdot\Delta\overrightarrow{r}$



(2)变力做功:元功$\mathrm{d}W=\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}$,功$W=\displaystyle\int\mathrm{d}W=\int_A^B\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}$.



[**注1**] 功是标量,但有正负.①$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$W>0$;②$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时,$W=0$;③$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$时,$W<0$.

[**注2**] 功是过程量,与路径有关.

[**注3**] 力作用于质点时,功可能为零,但冲量不可能为零.

[**注4**] 合力的功等于各分力的功的代数和.设合力$F=\sum\limits_i\overrightarrow{F_i}$.

功$W=\displaystyle\int_A^B\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\int_A^B\left(\sum_i\overrightarrow{F_i}\right)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\sum_i\int_A^B\overrightarrow{F_i}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\sum_i W_i$.

[**注5**] 直角坐标系下功的分量表示:设$\overrightarrow{F}=F_x\overrightarrow{i}+F_y\overrightarrow{j}+F_z\overrightarrow{k},\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\mathrm{d}x\overrightarrow{i}+\mathrm{d}y\overrightarrow{j}+\mathrm{d}z\overrightarrow{k}$,

元功$\mathrm{d}W=\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\left(F_x\overrightarrow{i}+F_y\overrightarrow{j}+F_z\overrightarrow{k}\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\overrightarrow{i}+\mathrm{d}y\overrightarrow{j}+\mathrm{d}z\overrightarrow{k}\right)=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$.

功$W=\displaystyle\int F_x\mathrm{d}x+\int F_y\mathrm{d}y+\int F_z\mathrm{d}z$.

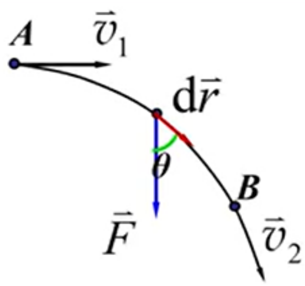
力在单位时间内做的功称为其功率.

平均功率$\overline{P}=\dfrac{W}{\Delta t}$,瞬时功率$P=\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}$.

[**注1**] 功率描述力做功的快慢.

[**注2**] 质点在力的作用下做匀速运动,合力的功率为零,但分力的功率未必为零.

[**注3**] 某机械的功率指其额定功率,即其正常工作时的最大瞬时功率.



注意到$\mathrm{d}\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{v}+\mathrm{d}\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{v}$.

$\mathrm{d}W=\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=m\mathrm{d}\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}m\mathrm{d}v^2$,

两边积分得:$W=\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=E_{k2}-E_{k1}=\Delta E_k=\frac{1}{2}mv^2.$

对质量为m、速度为v的质点,定义其动能$E_k=\frac{1}{2}mv^2.$

[**注1**] 动能是状态量,是标量,且$E_k\geq 0\ \mathrm{J}.$

[**注2**] 物体的速度与参考系的选择有关,同一运动的物体相对于不同参考系可能有不同的动能.

[**质点的动能定理**] 合外力对质点所做的功等于质点动能的增量,即$W=\int_A^B \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\Delta E_k=E_{k2}-E_{k1}.$

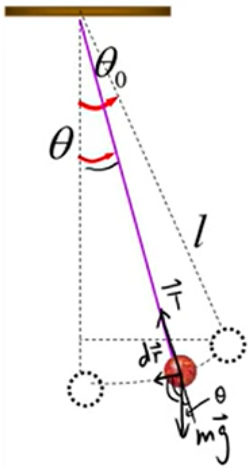
[**注1**] 过程量=状态量的增量.

[**注2**] 若外力对质点做正功,则动能增加;若外力对质点做负功,即质点克服外力做功,则动能减少.

[**注3**] 做功可以改变质点的动能,质点动能的改变靠做功量度.

[**注4**] 不同惯性系中动能定理形式不变.

[**例3.4.1**] 一质量为m的小球系在长为l的细绳下端,绳上端固定在天花板上.将绳子放在与竖直方向成30°角处静止释放,求绳子与竖直方向成10°角时小球的速率.

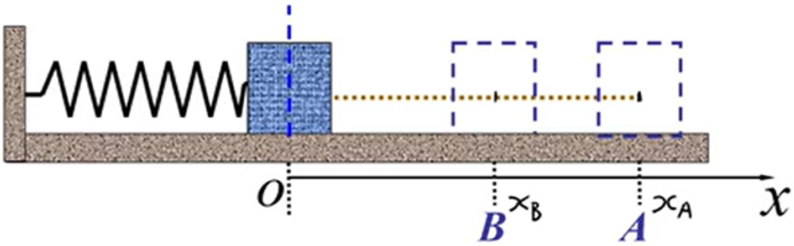


[**解**] $W=\int_A^B\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\int mg\left|\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\int mg\sin\theta\mathrm{d}s=-\int_{\theta_0}^{\theta}mg\sin\theta l\mathrm{d}\theta.$ *负号因为$\mathrm{d}\theta<0$

$W=mgl(\cos\theta_0-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2$,解出$v$即可.

3.4 保守力与非保守力

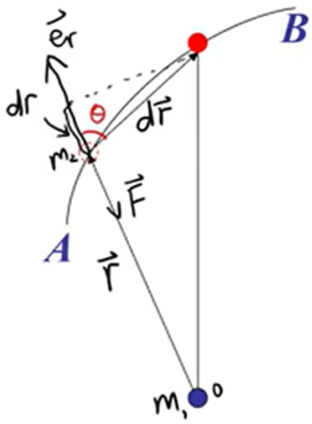
弹簧弹力做功:



弹力$\overrightarrow{F}=-kx\overrightarrow{i}$,元功$\mathrm{d}W=\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=-\left(kx\overrightarrow{i}\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\overrightarrow{i}\right)=-kx\mathrm{d}x.$

功$W=\displaystyle\int_A^B -kx\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2\right)>0$,即弹力做正功,且只与始末位置有关.

万有引力做功:

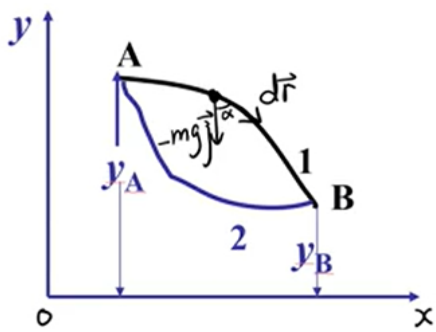


$\overrightarrow{e_r}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\left|\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right|\cos\theta=\mathrm{d}r.$

万有引力$\overrightarrow{F}=-G\dfrac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$,元功$\mathrm{d}W=\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=-G\dfrac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}.$

功$W=\displaystyle\int_{r_A}^{r_B}-G\frac{m_1m_2}{r^2}\mathrm{d}r=Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$,只与始末位置有关.

重力做功:



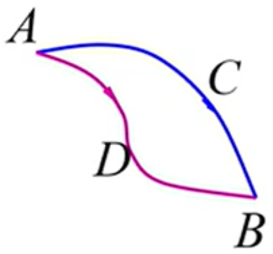
$\overrightarrow{j}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\left|\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right|\cos\alpha=\mathrm{d}y.$

重力$\overrightarrow{F}=-mg\overrightarrow{j}$,元功$\mathrm{d}W=\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=-mg\overrightarrow{j}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=-mg\mathrm{d}y.$

功$W=\displaystyle\int_{y_A}^{y_B}-mg\mathrm{d}y=-(mgy_B-mgy_A)>0$,只与始末位置有关.

若力所做的功只与物体的始末位置有关,而与路径无关,则称这样的力为保守力.

常见保守力:重力、万有引力、静电力、弹性力.



保守力的特点:

①做功只与始末位置有关.$W_{\overset{\frown}{ACB}} = W_{\overset{\frown}{ADB}}$,即$\int_{\overset{\frown}{ACB}} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\frown}{ADB}} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$。

②质点沿任意闭合路径运动一周,保守力对其所做的功为零,即$W_{\overset{\frown}{ACBDA}} = W_{\overset{\frown}{ACB}} + W_{\overset{\frown}{BDA}} = 0$.

这也是保守力的数学定义:$\oint_L \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = 0$.

做功与路径有关的力称为非保守力.

常见的非保守力:①摩擦力(耗散力):做负功;②爆炸力:做正功.

与位置有关的能量称为势能.质点在空间某点处的势能等于将其从该点沿任意路径移动到势能零点保守力所做的功.

$W = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$,则$E_{pA} = E_{pB} + \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$.

若B点为势能零点,即$E_{pB} = 0$,则$E_{pA} = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$.

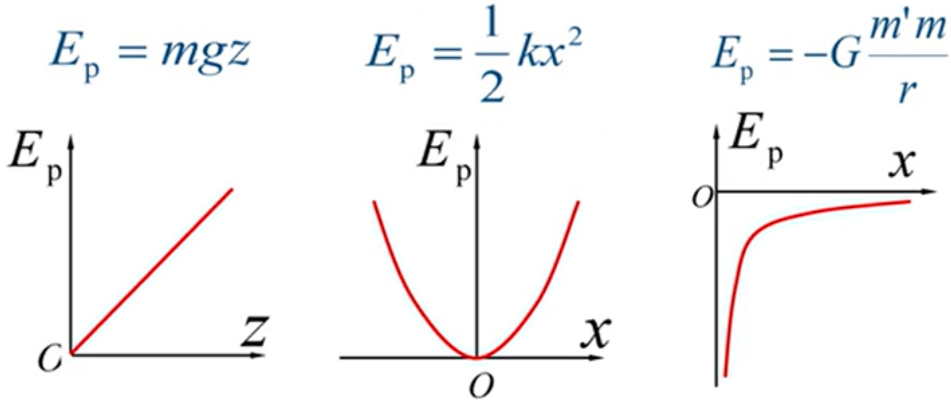
[**注1**] 势能零点的选取不同,势能的表示可能不同,各点的势能可能不同,但任意两点的势能差相同.

[**注2**] 势能属于相互作用的系统,不属于某一质点,实际上是一种相互作用的能.

[**注3**] 势能是标量,是状态的函数.

[**注4**] 只有对保守力才能引入势能.

[**注5**] 势能不依赖于参考系的选择.



取$h=0$处为重力势能零点,则$E_p=mgh$.

取弹簧原长$x=0$处为弹性势能零点,则$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$.

取无穷远点$r\to\infty$处为引力势能原点,则$E_p=-\dfrac{GMm}{r}$.

保守力所做的功等于势能增量的负值,即$W=-(E_{p2}-E_{p1})=-\Delta E_p$.

[**注1**] 过程量=状态量的增量.

[**注2**] 保守力做正功,势能减少.

已知势能求保守力:

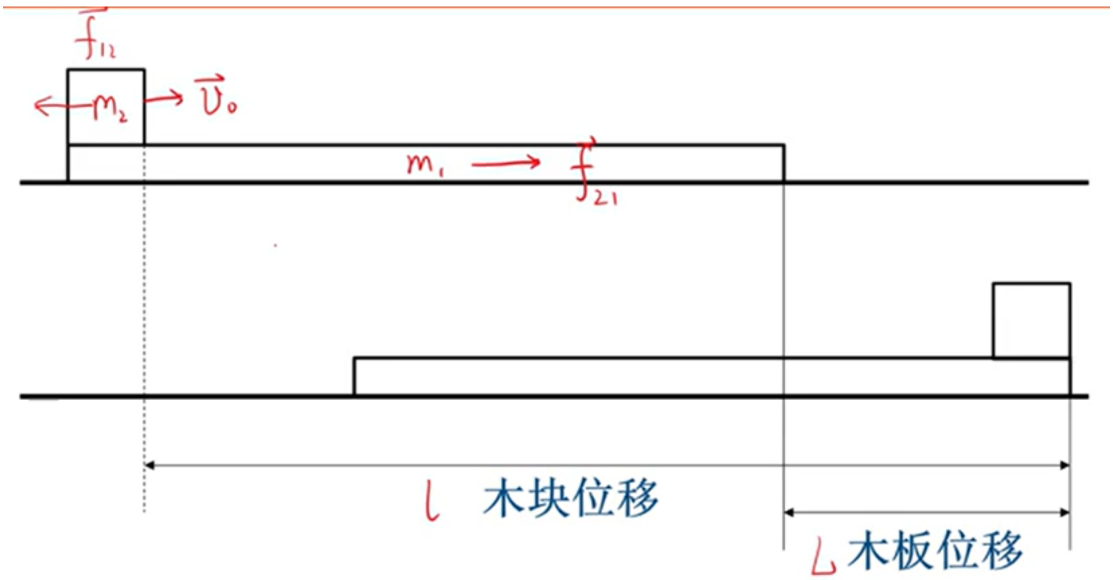
弹簧弹力$\overrightarrow{F}=-kx\overrightarrow{i}$,弹性势能$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$,弹力做功$W=\displaystyle\int\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=-\Delta E_p$.

一维:$\overrightarrow{F}=-\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{i}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{2}kx^2\right)\overrightarrow{i}=-kx\overrightarrow{i}$.

三维:$\overrightarrow{F}=F_x\overrightarrow{i}+F_y\overrightarrow{j}+F_z\overrightarrow{k}=-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}\right)E_p=-\nabla E_p=-\mathrm{grad}E_p$,

即保守力等于势能的负梯度.

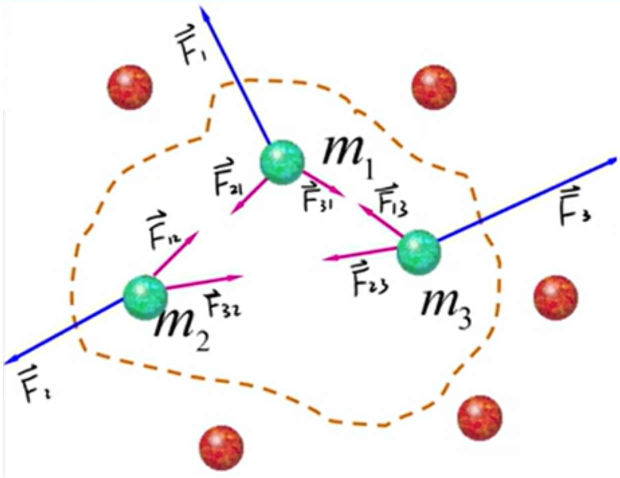
3.5 能量守恒定律



木板与木块间的摩擦力是相互作用力,大小相等,方向相反,内力可抵消.

但两力作用的位移不同,内力的功不可抵消.

如下图,对质点系,以m_1,m_2,m_3为系统,其余质点为外界.



由质点动能定理:$\begin{cases} m_1:\displaystyle\int\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_{21}}+\overrightarrow{F_{31}}\right)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\frac{1}{2}m_1v_1^2-\frac{1}{2}m_1v_{10}^2 \\ m_2:\displaystyle\int\left(\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_{12}}+\overrightarrow{F_{32}}\right)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\frac{1}{2}m_2v_2^2-\frac{1}{2}m_2v_{20}^2 \\ m_3:\displaystyle\int\left(\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_{23}}+\overrightarrow{F_{13}}\right)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}=\frac{1}{2}m_3v_3^2-\frac{1}{2}m_3v_{30}^2 \end{cases}.$

令$E_k=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}m_3v_3^2,E_{k0}=\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2+\frac{1}{2}m_3v_{30}^2.$

$$\begin{aligned} W&=\int\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_{21}}+\overrightarrow{F_{31}}\right)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}+\int\left(\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_{12}}+\overrightarrow{F_{32}}\right)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}+\int\left(\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_{13}}+\overrightarrow{F_{23}}\right)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}. \\ &=\left(\int\overrightarrow{F_1}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}+\int\overrightarrow{F_2}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}+\int\overrightarrow{F_3}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right)+ \\ &\quad\left(\int\overrightarrow{F_{21}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}+\int\overrightarrow{F_{12}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}+\int\overrightarrow{F_{31}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}+\int\overrightarrow{F_{13}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}+\int\overrightarrow{F_{32}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}+\int\overrightarrow{F_{23}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}\right). \end{aligned}$$

[**质点系的动能定理**] 作用于质点系的一切外力和内力做功之和等于质点系动能的增量.

$W^{\mathrm{ex}}+W^{\mathrm{in}}=E_k-E_{k0}=\Delta E_k$,即$\displaystyle\sum_i W_i^{\mathrm{ex}}+\sum_i W_i^{\mathrm{in}}=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2+\sum_i\frac{1}{2}m_iv_{i0}^2.$

[**质点系的功能原理**] 质点系的机械能增量等于所有外力和非保守内力做功之和,即$W^{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=E-E_0.$

[**证**] $W^{\mathrm{in}}=W_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}$,其中$W_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}}=-(E_p-E_0)=-\left(\displaystyle\sum_i E_{pi}-\sum_i E_{pi0}\right).$

由质点系的动能定理:$W^{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=E_k-E_{k0}$,即$W^{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=(E_p+E_k)-(E_{p0}-E_{k0}).$

定义机械能$E=E_p+E_k$,则$W^{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=E-E_0=\Delta E$,即$\displaystyle\sum_i W_i^{\mathrm{ex}}+\sum_i W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=\sum_i E_i-\sum_i E_{i0}.$

[**机械能守恒定律**] 只有保守内力做功时,质点系的机械能守恒,即$W^{\mathrm{ex}}=W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=0$时,$E$为常量.

[**证注**] $E=E_0\Leftrightarrow E_p+E_k=E_{p0}+E_{k0}\Leftrightarrow-(E_p-E_{p0})=W_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}}=(E_k-E_{k0}).$

[**注**] $W^{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=0$不能推出$E$为常量.

不受外力作用的系统称为孤立系统.

[**能量守恒定律**] 孤立系统内各种形式的能量(热能、化学能、光能等)的总和守恒.

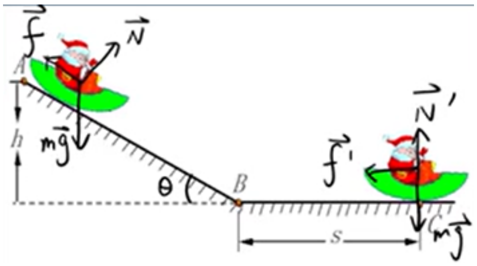
[**注1**] 能量守恒定律是生产实践和科学实验的经验总结,是自然界最普遍的规律之一.

[**注2**] 能量是系统状态的函数.

[**注3**] 系统总能量不变,但各种形式的能量可相互转化,或在物体间相互转移(通过做功实现).

[**注4**] 做功可导致能量变化,能量变化由做功量度.

[**例3.5.1**] 雪橇从高h的山顶A沿斜面静止下滑,斜面倾角为θ.平滑通过B点后,沿水平面滑行若干米后停在C处.设雪橇与地面的摩擦都为μ,求雪橇沿水平冰道滑行的距离s.



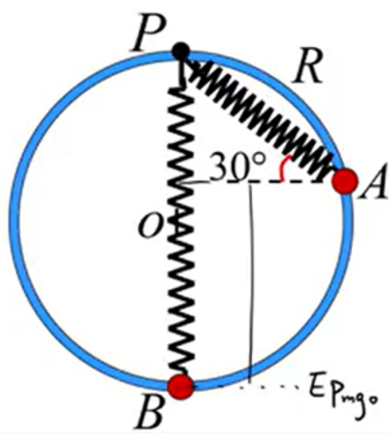
[**解1**] (动能定理) 以质点为研究对象,则外力为重力、摩擦力,无内力.

$W^{\text{ex}}+W^{\text{in}}=E_k-E_{k0}$即$(mgh-\mu mg\cos\theta s_{AB}-\mu mgs)+0=0-0$,解出$s$即可.

[**解2**] (功能原理) 以质点和地球为系统,则无外力,内力为非保守的摩擦力.

$W^{\text{ex}}+W^{\text{in}}_{\text{nc}}=E-E_0$,即$0+(-\mu mg\cos s_{AB}-\mu mgs)=0-mgh$,解出$s$即可.

[**例3.5.2**] 一轻弹簧的一端系在铅直放置的光滑圆环的顶点P处,另一端系着一质量为m的小球,小球穿过圆环并在环上运动.初始时球静止于A点,弹簧处于自然状态,其长为环半径R.当球运动到环底端B点时,球对环无压力.求弹簧的劲度系数k.



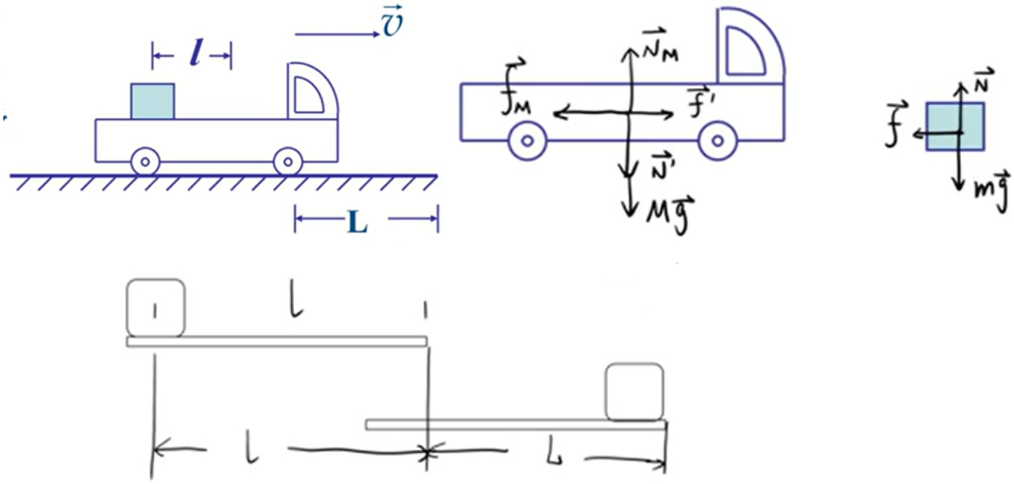
[**解**] 以小球、弹簧、圆环、地球为系统,则无外力和非保守内力做功,机械能守恒.

$E_A=E_{kA}+E_{pA弹}+E_{pA重}=0+0+mg(2R-R\sin 30^\circ)$.

$E_B=E_{kB}+E_{pB弹}+E_{pB重}=\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kR^2+0$.

B点处:$\overrightarrow{F}+m\overrightarrow{g}=m\overrightarrow{a_n}$,即$kR-mg=m\dfrac{v^2}{R}$,解出$k$即可.

[例3.5.3] 一质量为M的卡车载有一质量为m的木箱,以速度$\vec{v}$沿平直路面行驶.因故突然刹车,卡车向前滑行一段距离L,同时木箱在卡车上向前滑行距离l后停下.设木箱与卡车间的滑动摩擦系数为μ_1,卡车在地面滑动时所受阻力为总重的μ_2倍.求L.



[解] $W^{\text{in}}=W^{\text{in}}_{\text{木块}}+W^{\text{in}}_{\text{车}}=[-\mu_1 mg(L+l)]+[\mu_1 mgL-\mu_0(m+M)gL]$.

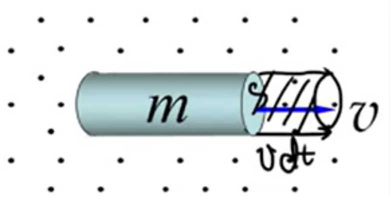
$W^{\text{ex}}+W^{\text{in}}=E_k-E_{k0}\Leftrightarrow 0+W^{\text{in}}=0-\dfrac{1}{2}(m+M)v^2$,解出$L$即可.

3.6 碰撞

碰撞时,因$F^{\text{in}}>>F^{\text{ex}}$,则动量守恒.

碰撞分为三类:①完全弹性碰撞:机械能守恒;②非弹性碰撞,机械能不守恒;③完全非弹性碰撞,机械能不守恒.

[例3.6.1] 设宇宙中有密度为ρ的尘埃,这些尘埃相对于惯性系静止.一质量为m、横截面积为S的圆柱形宇宙飞船以初速度v_0穿过尘埃.因尘埃附着在飞船上,飞船速度改变.求飞船速度与其在尘埃中的飞行时间的关系.

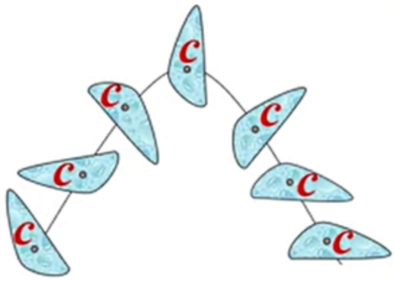


[解] $\mathrm{d}t$时间内附着在飞船表面的尘埃质量$\mathrm{d}m=\rho vS\mathrm{d}t$.

由动量守恒:$m_0v_0=mv$,即$m=\dfrac{m_0v_0}{v}$.

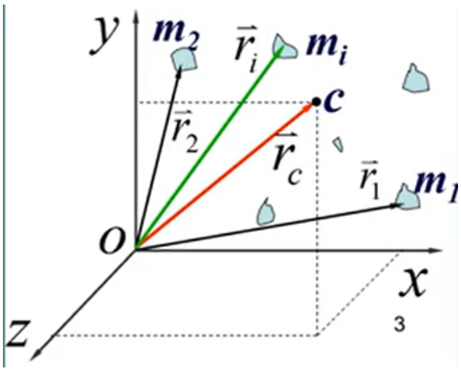
则$\mathrm{d}m=mv_0\left(-\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2}\right)$,即$\rho vS\mathrm{d}t=-\dfrac{m_0v_0}{v^2}\mathrm{d}v$,两边积分求得$v(t)$.

3.7 质心运动定律



如上图,板上的C点的运动轨迹为抛物线,其余点的运动可分解为随C点的平动和绕C点的转动.

质点系的质心是以质量为权重取平均值的特殊点.



如上图,设质点系有n个质点,各质点质量分别为$m_1,\cdots,m_n$,位矢分别为$\overrightarrow{r_1},\cdots,\overrightarrow{r_n}$.设质点系总质量为$m'$.

定义质心的位矢$\overrightarrow{r_C}=\dfrac{m_1\overrightarrow{r_1}+\cdots+m_n\overrightarrow{r_n}}{m_1+\cdots+m_n}=\dfrac{\displaystyle\sum_i m_i\overrightarrow{r_i}}{m'}$.

[**注1**] 密度均匀、形状对称的物体的质心在其几何中心.

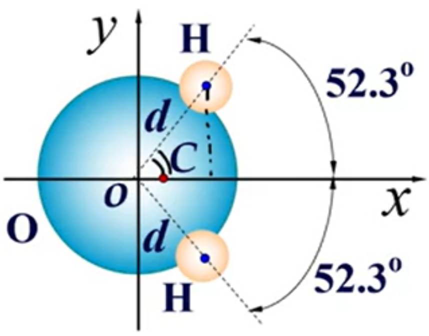
[**注2**] 质心位矢与坐标系的选取有关,但质心相对于各质点的相对位置不随坐标系的选择而变化.

[**注3**] 直角坐标系中,$\overrightarrow{r_C}=x_C\overrightarrow{i}+y_C\overrightarrow{j}+z_C\overrightarrow{k}$.

①质量离散分布时:$x_C=\dfrac{\displaystyle\sum_i m_ix_i}{m'},y_C=\dfrac{\displaystyle\sum_i m_iy_i}{m'},z_C=\dfrac{\displaystyle\sum_i m_iz_i}{m'}$.

②质量连续分布时:$x_C=\dfrac{\displaystyle\int x\mathrm{d}m}{m'},y_C=\dfrac{\displaystyle\int y\mathrm{d}m}{m'},z_C=\dfrac{\displaystyle\int z\mathrm{d}m}{m'}$.

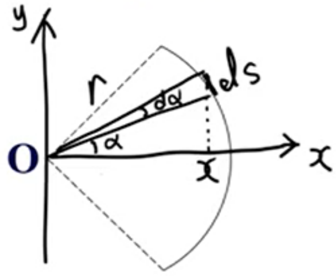
[**例3.7.1**] 水分子的结构如下图.每个氢原子和氧原子间的距离为d,氢原子与氧原子两连线的夹角$\theta=104.6^\circ$.求水分子的质心.



[**解**] 以氧原子中心为原点、氢原子与氧原子所成角的角平分线为x轴.由对称性:$y_C=0$.

$$x_C=\frac{\sum\limits_i m_ix_i}{m'}=\frac{m_O\cdot 0+2m_H\cdot d\cos 52.3^\circ}{2m_H+m_O}.$$

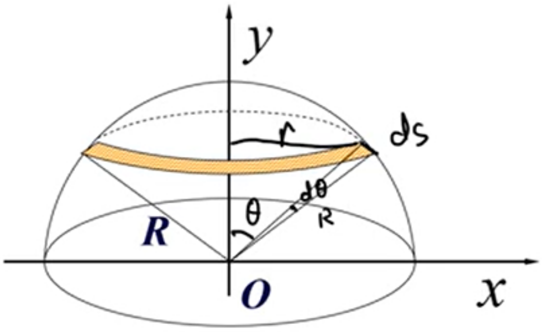
[**例3.7.2**] 求半径为r、质量为m、圆心角为2θ的圆弧的质心.



[**解**] 由对称性:$y_C=0$.取质元$\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}s=\dfrac{m}{r\cdot 2\theta}r\mathrm{d}\alpha=\dfrac{m}{2\theta}\mathrm{d}\alpha$.

$$x_C=\frac{\displaystyle\int x\mathrm{d}m}{m}=\frac{\displaystyle\int_{-\theta}^{\theta}r\cos\alpha\frac{m}{2\theta}\mathrm{d}\alpha}{m}=\frac{r\sin\alpha}{\alpha}.$$

[**例3.7.3**] 求半径为r的匀质半薄球壳的质心.



[**解**] 由对称性:$x_C=0$.取质元$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}s=\rho 2\pi rR\mathrm{d}\theta=\rho 2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

$$y_C=\frac{\displaystyle\int y\mathrm{d}m}{\rho 2\pi R^2}=\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos\theta\rho 2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2\pi R^2\rho}=\frac{R}{2}.$$

设质点系中每个质点的质量不随时间变化.

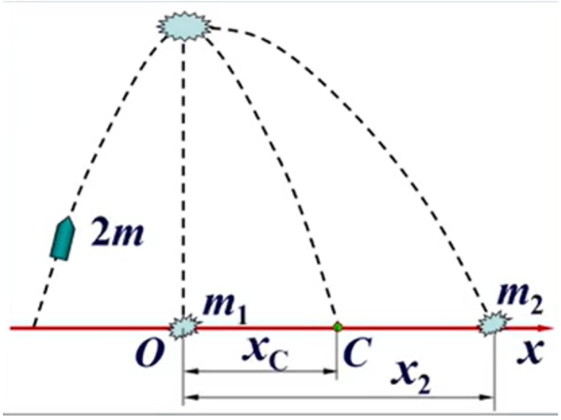
[**质心运动定律**] 作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘质心的加速度,即$\overrightarrow{F^{\text{ex}}}=\left(\sum\limits_i m_i\right)\overrightarrow{a_C}$,

[**证**] $\overrightarrow{r_C}=\dfrac{\sum\limits_i m_i\overrightarrow{r_i}}{m'}$,则$m'\overrightarrow{r_C}=\sum\limits_i m_i\overrightarrow{r_i}$.两边对时间求导得:$m'\dfrac{\overrightarrow{r_C}}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_i m_i\dfrac{\overrightarrow{r_i}}{\mathrm{d}t}$.

系统总动量$\overrightarrow{p}=\sum\limits_i m_i\overrightarrow{v_i}=m'\overrightarrow{v_C}$.由牛二:$\overrightarrow{F^{\text{ex}}}=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m'\overrightarrow{v_C}\right)=m'\overrightarrow{a_C}$.

[**注**] 合外力$\overrightarrow{F^{\text{ex}}}=\overrightarrow{0}$时,$\overrightarrow{v_C}$为恒矢,系统动量守恒.

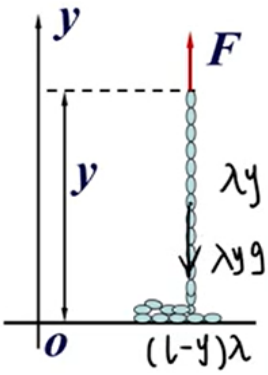
[例3.7.4] 设一质量为$2m$的弹丸从地面斜抛出,在飞行至最高点处爆炸为质量相等的两碎片,其中一个竖直自由下落,另一个水平抛出,它们同时落地.求第二个碎片落在何处.



[解] $m_1=m_2=m,x_1=0$.设x_C为弹丸碎片落地时质心离原点的距离.

$x_C=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}\Rightarrow x_2=2x_C$.

[例3.7.5] 一长为l、密度均匀的柔软链条的单位长度的质量为λ.将其卷成一堆放在地面.若手持链条的一端将其以匀速$\vec{v}$上提,求一端被提离地面高度为y时手的提力.



[解] 只需质心坐标的y分量.$y_C=\dfrac{\sum\limits_i m_iy_i}{m}=\dfrac{\lambda y\cdot\dfrac{y}{2}+\lambda(l-y)\cdot 0}{\lambda l}=\dfrac{y^2}{2l}$.

$v_C=\dfrac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{y^2}{2l}\right)=\dfrac{2y}{2l}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v}{l}y$,则$a_C=\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v}{l}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v^2}{l}$.

$F-\lambda yg=F^{\mathrm{ex}}=ma_C=m\dfrac{v^2}{l}$,则$F=\lambda yg+m\dfrac{v^2}{l}$.