随机过程期末速通

4. Markov链

4.1 基本概念

4.1.1 Markov链

[**定义4.1.1**] 随机过程$\{X_n;n=0,1,2,\cdots\}$称为**Markov链**, 如果它只取有限或可列个值(不另加说明时, 以非负整数集$\{0,1,2,\cdots\}$表示), 且满足**Markov性**(或称**无后效性**), 即对$\forall n\geq 0$和$\forall$状态$i,j,i_0,\cdots,i_{n-1}$, 都有$P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i,\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0\}=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}$, 其中$X_n=i$表示该随机过程在$n$时刻处于$i$状态, $\{0,1,2,\cdots\}$称为该随机过程的**状态空间**, 记为S.

[**注1**] 对Markov链, 给定过去的状态$X_0,X_1,\cdots,X_{n-1}$和现在的状态X_n, 未来的状态X_{n+1}的条件分布与过去的状态独立, 只依赖于现在的状态.

[**注2**] 若已知过程的当前状态, 过程未来的发展与过去无关, 只依赖于当前的状态, 则称该过程在该时刻有Markov性. 若过程有Markov性, 则过去的状态都在现在的状态有体现.

[**注3**] 定义中"对$\forall n\geq 0$"体现Markov链"时时刻刻"有Markov性, "对$\forall$状态$i,j,i_0,\cdots,i_{n-1}$"体现Markov链"处处"有Markov性.

①齐次Poisson过程和非齐次Poisson过程时时刻刻、处处有Markov性, 因为指数分布有无记忆性.

②更新过程只在更新的时刻有Markov性, 在两次更新间无Markov性.

[**注4**] Markov过程的分类: 离散状态称为"链", 连续状态称为"过程".

①离散时间Markov链; ②连续时间Markov链.

③离散时间Markov过程; ④连续时间Markov过程.

齐次Poisson过程是连续时间Markov链.

[**定义4.1.2**] 称Markov链$\{X_n:n=0,1,2,\cdots\}$中的条件概率$P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}$为(**一步**)**转移概率**, 记作$p_{i,j}$, 它表示处于i状态的过程下一步转移到j状态的概率. 一般地, 转移概率与状态i,j和时刻n有关. 若转移概率$p_{i,j}$只与状态i,j有关, 而与时刻n无关, 则称该Markov链为**时齐Markov链**; 否则称为**非时齐Markov链**. 下面只讨论时齐Markov链.

[**注**] 若$p_{i,j}$与n有关, 则$p_{3,1}=P\{X_3=1\mid X_2=3\}$可记作$p_{(2,3;3,1)}$或$p_{3,1}^{2,3}$.

[**定义4.1.3**] 若Markov链的状态有限, 则称其为**有限链**; 否则称为**无限链**. 无论状态是否有限, 都可将转移概率$p_{i,j}\ \ (i,j\in S)$记作矩阵的形式$P=(p_{i,j})=\begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ p_{i,0} & p_{i,1} & p_{i,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$, 称之为**转移(概率)矩阵**, 其中$p_{i,i}$称为**伪跳**或**拟跳**, 其值可取0.

[**定义4.1.4**] 称矩阵$P=(p_{i,j})$为**随机矩阵**, 如果其元素满足如下两个性质:

①$p_{i,j}\geq 0\ \ (i,j\in S)$.

②对$\forall i\in S$, 有$\displaystyle\sum_{j\in S}p_{i,j}=1$, 即行和为$1$.

[**例4.1.1**] [**疾病、死亡模型**] 设有两种健康状态S_1,S_2和两种死亡状态S_3,S_4. 若个体病愈, 认为它处于S_1状态; 若它患病, 则它处于S_2状态. 个体可从S_1,S_2进入S_3,S_4.

这是一个Markov链, 其转移矩阵$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}&p_{14}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}&p_{24}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 其中转移到自身概率为$1$的状态$3,4$称为**吸收态**.

[**例4.1.2**] [**赌徒的破产**, **带吸收壁的随机游走**] 系统的状态为区间$[0,n]$中的整数, 反映赌博者在赌博期间的金钱数. 赌博者输光或拥有n元时停止赌博, 否则持续赌博, 每次以p的概率赢1元, 以$q=1-p$的概率输1元.

这是一个Markov链, 其转移矩阵$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0&0\\q&0&p&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&q&0&p\\0&0&0&0&\cdots&0&0&1\end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$.

[**注**] 考察一个在数轴上的区间$[0,n]$上随机游走的小球, 其中$x=0$和$x=n$处有吸收壁, 小球碰到吸收壁时停止, 故称带吸收壁的随机游走.

[**例4.1.3**] [**带反射壁的随机游走**] 系统的状态为区间$[0,n]$中的整数, 反映赌博者在赌博期间的金钱数. 赌博者输光时可获得1元(不是欠的)继续赌博, 拥有n元时停止赌博, 否则持续赌博, 每次以p的概率赢1元, 以$q=1-p$的概率输1元.

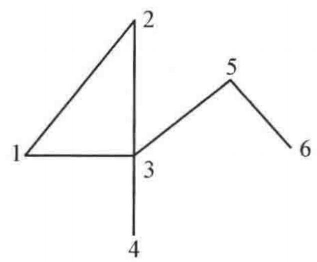
这是一个Markov链, 其转移矩阵$P=\begin{bmatrix}0&0&0&0&\cdots&0&0&0\\q&0&p&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&q&0&p\\0&0&0&0&\cdots&0&0&1\end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$.

[**注**] 考察一个在数轴上的区间$[0,n]$上随机游走的小球, 其中$x=0$处有反射壁, 小球碰到反射壁时反射到$x=1$处, 故称带反射壁的随机游走. 同理可考察$x=0$和$x=n$处都有反射壁的情况.

[**例4.1.4**] [**自由随机游走**] 系统的状态为区间$[0,n]$中的整数, 反映赌博者在赌博期间的金钱数. 赌博者不停止赌博, 输光时可借钱继续赌博. 每次以p的概率赢1元, 以$q=1-p$的概率输1元.

这是一个Markov链, 其转移矩阵$P=\begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$.

[**例4.1.5**] [**图上随机游走**] 某人在如下图所示的图上随机游走, 他在某节点时, 等概率地走到该节点的任一邻居节点.



这是一个Markov链, 其转移矩阵$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

[**例4.1.6**] [**Wright-Fisher遗传模型**] 设一对等位基因A和a的基因频率分别为p和$(1-p)$.

设总体中的个体数为$2N$, 即每代都有$2N$个个体, 可视为生完子代后父代老死.

设每个个体的基因按基因频率大小, 在下一代中转移.

设第n代中基因A出现i次, 基因a出现$(2N-i)$次,

则第$(n+1)$代中出现基因A的概率$p_i=\dfrac{i}{2N}$, 出现基因a的概率为$(1-p_i)$.

显然第$(n+1)$代的基因型是由$2N$次Bernoulli试验确定的.

设第n代中携带基因A的个体数为X_n, 则$\{X_n\}$是状态空间$S=\{0,\cdots,2N\}$的Markov链,

其转移矩阵$P=(p_{i,j})_{(2N+1)\times(2N+1)}$,

其中$p_{i,j}=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=C_{2N}^{j}p_i^j(1-p_i)^{2N-j}=C_{2N}^{j}\left(\dfrac{i}{2N}\right)^j\left(1-\dfrac{i}{2N}\right)^{2N-j}$.

[**例4.1.7**] [**存储论的订货模型**] 某商店采用(s,S)订货策略, 每天早上检查某商品的剩余量x, 则订购量$\begin{cases}0, x\geq s\\ S-x, x<s\end{cases}$. 设订货和进货无需时间, 每天的需求量$Y_n$独立同分布于$P\{Y_n=j\}=a_j\ \ (j=0,\cdots,s)$, 其中$j\leq s$即要求不可缺货.

设第n天结束时的存货量为X_n, 则$X_{n+1}=\begin{cases}X_n-Y_{n+1}, X_n\geq s\\ S-Y_{n+1}, X_n<s\end{cases}$.

$\{X_n,n\geq 1\}$是一个Markov链, 其转移概率$p_{i,j}=\begin{cases}a_{i-j}, i\geq s\\ a_{S-j}, i<s\end{cases}$, 计算如下:

①$i\geq s$时, $P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=P\{i-Y_{n+1}\mid X_n=i\}=P\{Y_{n+1}=i-j\}=a_{i-j}$.

②$i<s$时, $P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=P\{S-Y_{n+1}=j\mid X_n=i\}=P\{Y_{n+1}=S-j\}=a_{S-j}$.

[**例4.1.8**] 设保险公司在n时刻的盈余为S_n, 初始盈余S_0已知, 未来盈余$S_1,S_2,\cdots$都是随机变量,

增量(S_n-S_{n-1})表示$(n-1)$时刻到n时刻间的盈利(可为负).

设不包含利息的盈利(收保费之和 $-$ 赔款之和, 可为负)$X_1,X_2,\cdots$独立同分布,

则$S_n=S_{n-1}(1+\gamma)+X_n$, 其中$\gamma$为固定利率.

$\{S_n\}$是一个Markov链,

其转移概率$P\{S_n=y\mid S_{n-1}=x\}=P\{x(1+\gamma)+X_n=y\mid S_{n-1}=x\}=P\{X_n=y-(1+\gamma)x^2\}$.

4.1.2 C-K方程

[**定义4.1.5**] 对状态空间S上的Markov链$\{X_n;n=0,1,2,\cdots\}$, 称条件概率$p_{i,j}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\}\ \ (i,j\in S;m\geq 0,n\geq 1)$为Markov链的$n$**步转移概率**, 称$P^{(n)}=\left(p_{i,j}^{(n)}\right)$为$n$**步转移概率矩阵**. 特别地, $n=1$时, $p_{i,j}^{(1)}=p_{i,j},P^{(1)}=P$. 规定$p_{i,j}^{(0)}=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases}$. n步转移概率$p_{i,j}^{(n)}$表示系统从状态i经n步后转移到状态j的概率, 对中间的$(n-1)$步经过的状态无要求.

[**注**] 对时齐Markov链, 有$p_{i,j}^{(100)}=P\{X_{100}=j\mid X_0=i\}=P\{X_{105}=j\mid X_5=i\}$, 即$n$步转移概率只与步数有关, 而与起始点无关.

[**定理4.1.1**] [**条件概率的全概率公式**] 设一列事件$B_1,B_2,\cdots$的和事件是样本空间, 则对事件A和事件C, 有$P(A\mid C)=\sum\limits_i P(A\mid B_iC)\cdot P(B_i\mid C)$.

[定理4.1.2] **[C-K方程]** 对状态空间S上的Markov链$\{X_n;n=0,1,2,\cdots\}$和$\forall i,j\in S,\forall n,m\in\mathbb{N}$, 都有$p_{i,j}^{(m+n)}=\sum_{k\in S}p_{i,k}^{(m)}p_{k,j}^{(n)}$, 写作矩阵形式为$P^{(n)}=P^n$.

[证1] $p_{i,j}^{(m+n)}=P\{X_{m+n}=j\mid X_0=i\}=\dfrac{P\{X_{m+n}=j,X_0=i\}}{P\{X_0=i\}}$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k\in S}\frac{P\{X_{m+n}=j,X_m=k,X_0=i\}}{P\{X_0=k\}}\\
&=\sum_{k\in S}\frac{P\{X_{m+n}=j,X_m=k,X_0=i\}}{P\{X_0=k\}}\cdot\frac{P\{X_m=k,X_0=i\}}{P\{X_m=k,X_0=i\}}\\
&=\sum_{k\in S}P\{X_{m+n}=j\mid X_m=k,X_0=i\}\cdot P\{X_m=k\mid X_0=i\}\\
&=\sum_{k\in S}p_{i,j}^{(m)}p_{k,j}^{(n)}.
\end{aligned}
$$

[证2] 由条件概率的全概率公式:

$$
\begin{aligned}
p_{i,j}^{(m+n)}&=P\{X_{m+n}=j\mid X_0=i\}\\
&=\sum_{k\in S}P\{X_{m+n}=j\mid X_m=k,X_0=i\}\cdot P\{X_m=k\mid X_0=i\}\\
&=\sum_{k\in S}p_{i,j}^{(m)}p_{k,j}^{(n)}.
\end{aligned}
$$

[注] 设状态空间$S=\{1,2,3\}$, 则$p_{1,3}^{(100)}=\sum_{k\in S}p_{1,k}\cdot p_{k,3}^{(99)}$.

[例4.1.9] 在**例4.1.2**中, 取$n=3,p=q=\dfrac{1}{2}$. 设赌徒从2元赌金开始赌博. 求他经不超过4次赌博输光的概率.

[解] 一步转移矩阵$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

由C-K方程: $P^{(4)}=P^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{5}{8}&\frac{1}{16}&0&\frac{5}{16}\\\frac{5}{16}&0&\frac{1}{16}&\frac{5}{8}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $p_{2,0}^{(4)}=\dfrac{5}{16}$, 即$P^4$的第三行、第一列的元素.

[注] 若为恰4次赌博输光, 则答案为$p_{2,0}^{(4)}-p_{2,0}^{(3)}$. 下证$p_{2,0}^{(4)}-p_{2,0}^{(3)}\geq 0$.

$$p_{2,0}^{(4)}=\sum_{k=0}^{3}p_{2,k}^{(3)}\cdot p_{k,0}=p_{2,0}^{(3)}\cdot p_{0,0}+p_{2,1}^{(3)}\cdot p_{1,0}+p_{2,2}^{(3)}\cdot p_{2,0}+p_{2,3}^{(3)}\cdot p_{3,0}.$$

因状态0为吸收态, 即$p_{0,0}=1$, 又$p_{2,1}^{(3)}\cdot p_{1,0}+p_{2,2}^{(3)}\cdot p_{2,0}+p_{2,3}^{(3)}\cdot p_{3,0}\geq 0$, 故$p_{2,0}^{(4)}\geq p_{2,0}^{(3)}$.

这表明: 3步转移矩阵的信息包含于4步转移矩阵中.

[**例4.1.10**] 设状态空间$S=\{1,2,3\}$, 随机变量X_0的分布列如下表所示, 设一步转移矩阵为P.

X_0	1	2	3
p	$P\{X_0=1\}$	$P\{X_0=2\}$	$P\{X_0=3\}$

求:

(1)$P\{X_1=2\}$.

(2)$P\{X_0=1,X_2=3,X_5=2\}$.

(3)$P\{X_1=2,X_2=1,X_3=3,X_5=1\}$.

[**解**]

(1)$P\{X_1=2\}=\displaystyle\sum_{k=1}^3 P\{X_1=2\mid X_0=k\}$.

(2)$P\{X_0=1,X_2=3,X_5=2\}$

$=P\{X_5=2\mid X_0=1,X_2=3\}\cdot P\{X_0=1,X_2=3\}$

$=p_{3,2}^{(3)}\cdot P\{X_2=3\mid X_0=1\}\cdot P\{X_0=1\}=P\{X_0=1\}\cdot p_{1,3}^{(2)}\cdot p_{3,2}^{(3)}$.

(3)$P\{X_1=2,X_2=1,X_3=3,X_5=1\}$

$=P\{X_1=2\}\cdot p_{2,1}\cdot p_{1,3}\cdot p_{3,1}^{(2)}=\displaystyle\sum_{k=1}^3 P\{X_0=k\}\cdot p_{k,2}\cdot p_{2,1}\cdot p_{1,3}\cdot p_{3,1}^{(2)}$.

[**注1**] (2)的概率可直接写出, 即初始概率乘转移概率, 其中转移概率的下标为X_i的变化, 上标为转移步数.

[**注2**] (3)中$P\{X_1=2\}$非初始概率, 需用初始概率表示.

[**例4.1.11**] 甲、乙两人比赛, 每局甲的胜率为p, 乙的胜率为q, 平局的概率为r, 且$p+q+r=1$. 设枚举比赛后胜者$+1$分, 负者-1分, 平局分数不变, 且有人得2分时比赛结束. 设第n局时甲得分为X_n, 则$\{X_n;n=0,1,2,\cdots\}$是Markov链. 求甲得1分的条件下, 比赛不超过两局结束的概率.

[**解**] 转移概率矩阵$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\q&r&p&0&0\\0&q&r&p&0\\0&0&q&r&p\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$.

由C-K方程: $P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\q+rq&r^2+pq&2pr&p^2&0\\q^2&2rq&r^2+2pq&2pr&p^2\\0&q^2&2qr&r^2+pq&p+pr\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$.

故甲获得1分的条件下, 比赛不超过两局结束的概率为$p_{1,2}^{(2)}+p_{1,-2}^{(2)}=p+pr$.

[**注**] 比赛再进行一局结束的情况包含于2步转移矩阵的吸收态中.

[**例4.1.12**] 设质点在数轴上的点集$\{-2,-1,0,1,2\}$上作随机游走. 质点到达点(-2)处时以概率1停在原处; 到达点2处时以概率1左移一个单位长度; 到达其他点后, 分别以概率$\dfrac{1}{3}$向左移动一个单位长度、向右移动一个单位长度、停在原处. 求质点在点0处时, 不超过3步转移后仍处于点0的概率.

[**解**] 一步转移矩阵$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 2步转移矩阵$P^{(2)}=\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$.

3步转移矩阵$P^{(3)}=P^{(2)}\cdot P=\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} * & * & 0 & * & * \\ * & * & \frac{1}{3} & * & * \\ * & * & \frac{1}{3} & * & * \\ * & * & \frac{1}{3} & * & * \\ * & * & 0 & * & * \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & \frac{7}{27} & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$.

[**例4.1.13**] [**广告效益的推算**] 啤酒A的广告投放后, 发现购买啤酒A和另外三种啤酒B,C,D的顾客每两个月的平均转化率如下: ①$A\to A(0.95),B(0.02),C(0.02),D(0,01)$; ②$B\to A(0.30),B(0.60),C(0.06),D(0.04)$; ③$C\to A(0.20),B(0.10),C(0.70),D(0.00)$; ④$D\to A(0.20),B(0.20),C(0.10),D(0.50)$. 设当前购买$A,B,C,D$四种啤酒的顾客分布为$(25\%,30\%,35\%,10\%)$. 求半年后啤酒$A$的市场份额.

[**解**] 初始分布(X_0的分布):

X_0	1	2	3	4
p_i	0.25	0.3	0.35	0.1

每次转移为两个月, 则半年为3步转移, 即求X_3的分布.

一步转移矩阵$P=\begin{bmatrix} 0.95 & 0.02 & 0.02 & 0.01 \\ 0.30 & 0.60 & 0.06 & 0.04 \\ 0.20 & 0.10 & 0.70 & 0.00 \\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.50 \end{bmatrix}$. 令$\overrightarrow{\mu}=[0.25\ 0.30\ 0.35\ 0.01]$.

2步转移矩阵$P^{(2)}=\begin{bmatrix} 0.9145 & 0.035 & 0.0352 & 0.0153 \\ 0.485 & 0.38 & 0.088 & 0.047 \\ 0.36 & 0.134 & 0.5 & 0.006 \\ 0.37 & 0.234 & 0.136 & 0.26 \end{bmatrix}$.

3步转移矩阵$P^{(3)}=\begin{bmatrix} 0.8894 & 0.0458 & 0.0466 & 0.01820 \\ 0.60175 & 0.2559 & 0.0988 & 0.04355 \\ 0.4834 & 0.1388 & 0.36584 & 0.01196 \\ 0.5009 & 0.2134 & 0.14264 & 0.14306 \end{bmatrix}$.

3步转移后A的市场份额$v_1=\overrightarrow{\mu}\cdot P^{(3)}_{\cdot,1}=[0.25\ 0.30\ 0.35\ 0.01]\begin{bmatrix} 0.8894 \\ 0.60175 \\ 0.4834 \\ 0.5009 \end{bmatrix}\approx 0.624$.

4.2 状态的分类和性质

[**定义4.2.1**] 对状态空间为S的Markov链, 称状态i**可达**状态$j\ \ (i,j\in S)$, 若$\exists n\geq 0\ s.t.\ p_{i,j}^{(n)}>0$, 记作$i\rightarrow j$. 若同时又$j\rightarrow i$, 则称$i$与$j$**互通**, 记作$i\leftrightarrow j$.

[**定理4.2.1**] 互通关系是等价关系, 即有自反性、对称性和传递性.

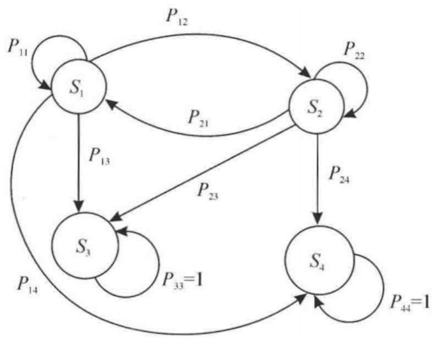
[**证**] 自反性和对称性显然. 下证传递性, 即若$i\leftrightarrow j,j\leftrightarrow k$, 则$i\leftrightarrow k$.

因$i\rightarrow j,j\rightarrow k$, 则$\exists m,n\geq 0\ s.t.\ p_{i,j}^{(m)},p_{j,k}^{(n)}>0$.

由C-K方程: $p_{i,k}^{(m+n)}=\displaystyle\sum_{l\in S}p_{i,l}^{(m)}\cdot p_{l,k}^{(n)}\geq p_{i,j}^{(m)}\cdot p_{j,k}^{(n)}>0$, 则$i\rightarrow k$. 同理可证$k\rightarrow i$.

[**定义4.2.2**] 将Markov链中互通的状态归为一类, 则每个状态恰属于一个类. 若Markov链只包含一个类, 则称它是**不可约的**; 否则称它是**可约的**.

[**例4.2.1**] 设有两种健康状态S_1,S_2和两种死亡状态S_3,S_4. 若个体病愈, 认为它处于S_1状态; 若它患病, 则它处于S_2状态. 个体可从S_1,S_2进入S_3,S_4. 这是一个Markov链, 其转移矩阵$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}&p_{14}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}&p_{24}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 概率状态转移图如下图所示:

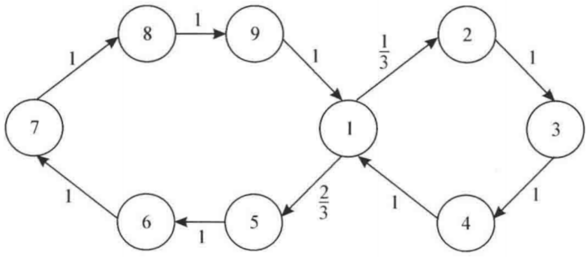


状态可分为三类: ①$\{S_1,S_2\}$; ②$\{S_3\}$; ③$\{S_4\}$.

[**定义4.2.3**] 对状态空间为S的Markov链和状态$i\in S$, 若集合$\{n:n\geq 1,p_{i,i}^{(n)}>0\}$非空, 则称其最大公约数$d=d(i)$为状态$i$的**周期**. 若$d>1$, 则称$i$是**周期的**; 若$d=1$, 则称$i$是**非周期的**或**伪周期的**. 若上述集合为空, 则称i的周期为无穷大.

[**注**] 与函数的周期不同, Markov链的状态的周期不是极小的, 即d的整数倍未必都是该Markov链的周期, 亦即不是对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$, 都有$p_{i,i}^{(nd)}>0$. 但可以证明: n充分大时, 有$p_{i,i}^{(nd)}>0$. 该性质用于求极限分布.

[**例4.2.2**] 考察如下图所示的Markov链.



从状态1出发回到状态1可能的步长为$\{4,6,8,\cdots\}$, 该集合的$\mathrm{gcd}=2$.

从状态1出发经2步不能回到状态1, 但仍称2为状态1的周期.

[**定理4.2.2**] 对状态空间为S的Markov链和状态$i,j\in S$, 若i与j属于同一类, 则它们的周期相等, 即$d(i)=d(j)$.

[**证**] 因i与j属于同一类, 则$i\leftrightarrow j$, 即$\exists m,n\geq 0\ s.t.\ p_{i,j}^{(m)},p_{j,i}^{(n)}>0$,

则$p_{i,i}^{(m+n)}=\displaystyle\sum_{k\in S}p_{i,k}^{(m)}\cdot p_{k,i}^{(n)}\geq p_{i,j}^{(m)}\cdot p_{j,i}^{(n)}>0$.

对所有 $s.t.\ p_{j,j}^{(s)}>0$的$s\in\mathbb{Z}^+$, 都有$p_{i,i}^{(m+s+n)}\geq p_{i,j}^{(m)}\cdot p_{j,j}^{(s)}\cdot p_{j,i}^{(n)}>0$.

因$d(i)$是i的周期, 则$d(i)\mid(m+n),d(i)\mid(m+s+n)$, 进而$d(i)\mid s$.

因$d(i)$整除所有 $s.t.\ p_{j,j}^{(s)}>0$的s, 则$d(i)$整除这些s的gcd, 即j的周期$d(j)$.

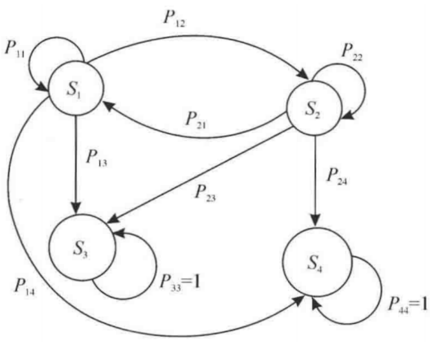
同理可证$d(j)\mid d(i)$. 故$d(i)=d(j)$.

[**定义4.2.4**] 对状态空间为S的Markov链和状态$i,j\in S$, 记$f_{i,j}^{(n)}$为从i出发经n步后首次到达j的概率, 简称**首达概率**, 则$f_{i,j}^{(0)}=\delta_{i,j}=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$, $f_{i,j}^{(n)}=P\{X_n=j;X_k\neq j,k=1,\cdots,n-1\mid X_0=i\}\ \ (n\geq 1)$. 设$f_{i,j}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_{i,j}^{(n)}$. 若$f_{i,i}=1$, 则称状态$i$为**常返状态**, 简称**常返态**; 若$f_{i,i}<1$, 则称状态$i$为**非常返状态**或**瞬过状态**, 简称**非常返态**或**瞬过态**.

[**注1**] 设事件A_n: 从状态i出发经n步到达状态j, 则集合$A_n=\{X_n=j;X_k\neq j,k=1,\cdots,n-1\mid X_0=i\}$在$n$相异时不相交, 且$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$表示$\exists n\in\mathbb{Z}^*\ s.t.$ 从i经n步到达j, 则$f_{i,j}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_{i,j}^{(n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)$为从$i$出发经若干步(未必有限)到达$j$的概率.

[**注2**] i为常返态时, 从i出发, 以概率1返回1; i为非常返态时, 以概率$1-f_{i,i}>0$不再返回i, 即随机过程从i**滑过**了, 亦即存在轨道滑过i后不再返回i.

[**例4.2.3**] 在**例4.2.1**中, 取下图中未标出的各概率都为$\dfrac{1}{4}$.



$f_{1,1}=\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\cdots=\dfrac{1}{3}<1$, 则状态1为非常返态.

$f_{3,3}=f_{3,3}^{(1)}=1$, 则状态3为常返态.

[**定义4.2.5**] 对状态空间为S的Markov链和状态$i\in S$, 定义**平均首返时间**或**平均回转时间**$\mu_i=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot f_{i,i}^{(n)}$, 它表示从$i$出发首次回到$i$所需的平均步数或时间. 对常返态$i$, 若$\mu_i<+\infty$, 则称$i$为**正常返状态**, 简称**正常返态**; 若$\mu_i=+\infty$, 则称i为**零常返状态**, 简称**零常返态**.

[**注1**] 正常返态i是真正的常返态, 从i出发在平均有限步内可回到i; 对零常返态j, 可能从j出发需无穷多步才可回到j.

[**注2**] 对自由随机游走, 当且仅当左移一步的概率p和右移一步的概率q满足$p=q=\dfrac{1}{2}$时, 各状态才是零常返态; 否则前进的方向有倾向性.

[**注3**] μ_i定义的由来:

对状态$i\in S$, 设T_i为从i出发, 首次回到i所需的步数, 则T_i是随机变量.

$$\mu_i=E(T_i)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\cdot P\{T_i=n\}=\sum_{n=1}^{+\infty}n\cdot f_{i,i}^{(n)},$$

其中n从1开始, 因为$n=0$时未发生转移. 特别地, $n=1$时, 自环也视为一步转移.

[**定义4.2.6**] 对状态空间为S的Markov链和状态$i\in S$, 若i是正常返态且是非周期的, 则称其为**遍历状态**, 简称**遍历态**. 若i是遍历态且$f_{i,i}^{(1)}=1$, 则称i为**吸收状态**, 简称**吸收态**, 此时有$\mu_i=1$. 若S中所有状态都是遍历的, 则称该Markov链是**遍历**的.

[**注**] 在概率状态转移图中, 遍历态未必有自环, 但吸收态必有自环.

[**例4.2.4**] 设状态空间$S=\{1,2,3,4\}$的Markov链的转移矩阵$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. 判断各状态的类型.

[**解**]

(1)按是否互通将状态分类为: $\{1,2\},\{3\},\{4\}$.

(2)求各状态的周期:

①$d(1)=2$, 则$d(2)=d(1)=1$.

②$d(3)=1$.

③$d(4)=+\infty$.

(3)判断各状态的类型:

①$f_{1,1}=f_{1,1}^{(1)}+f_{1,1}^{(2)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$, 则状态$1$为常返态.

②$f_{2,2}=f_{2,2}^{(2)}+f_{2,2}^{(3)}+\cdots=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots=1$, 则状态$2$为常返态.

③$f_{3,3}=f_{3,3}^{(1)}=\dfrac{2}{3}<1$, 则状态$3$为瞬过态.

④因$d(4)=+\infty$, 则状态4为瞬过态.

(4)判断常返态是正常返态还是零常返态.

①$\mu_1=1\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}<+\infty$, 则状态$1$为正常返态.

②$\mu_2=2\cdot\dfrac{1}{2}+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots=3<+\infty$, 则状态$2$为正常返态.

[**注**] **定理4.3.3**将证明: 若状态i,j同属一类, 则它们同为常返态或非常返态, 且它们同为常返态时, 也同为正常返态和零常返态.

[**定理4.2.3**] 设Markov链的状态空间为S. 对$\forall$状态$i,j\in S$和$n\in\mathbb{Z}\bigcap[1,+\infty)$,都有$p_{i,j}^{(n)}=\sum_{l=1}^n f_{i,j}^{(l)}\cdot p_{j,j}^{(n-l)}$.

[**证1**]

(1)$n=1$时, 因$p_{i,j}^{(1)}=f_{i,j}^{(1)}$, 则结论显然成立.

(2)假设结论对$(n-1)$成立, 即$p_{i,j}^{(n-1)}=\sum_{l=1}^{n-1}f_{i,j}^{(l)}\cdot p_{i,j}^{(n-1-l)}$.

(3)对n, 有:

$$
\begin{aligned}
p_{i,j}^{(n)}&=\sum_{k\in S}p_{i,k}\cdot p_{k,j}^{(n-1)}\ \ \text{*C-K方程.}\\
&=p_{i,j}^{(1)}\cdot p_{j,j}^{(n-1)}+\sum_{k\in S\setminus\{j\}}p_{i,k}\cdot p_{k,j}^{(n-1)}\ \ \text{*分离出第一步到状态}j\text{的情况.}\\
&=f_{i,j}^{(1)}\cdot p_{j,j}^{(n-1)}+\sum_{k\in S\setminus\{j\}}f_{i,k}^{(1)}\left[\sum_{l=1}^{n-1}f_{k,j}^{(l)}\cdot p_{j,j}^{(n-1-l)}\right]\ \ \text{*假设.}\\
&=f_{i,j}^{(1)}\cdot p_{j,j}^{(n-1)}+\sum_{l=1}^{n-1}\left[\sum_{k\in S\setminus\{j\}}f_{i,k}^{(1)}\cdot f_{k,j}^{(l)}\right]\cdot p_{j,j}^{(n-1-l)}\ \ \text{*可以证明可交换和号.}\\
&=f_{i,j}^{(1)}\cdot p_{j,j}^{(n-1)}+\sum_{l=1}^{n-1}f_{i,j}^{(l+1)}\cdot p_{j,j}^{(n-1-l)}\ \ \text{*首达概率}f_{i,j}\text{的定义和}f_{i,j}^{(l+1)}=\sum_{k\neq j}f_{i,k}^{(1)}\cdot f_{k,j}^{(l)}.\\
&\xlongequal{l\mapsto l+1}f_{i,j}^{(1)}\cdot p_{j,j}^{(n-1)}+\sum_{l=2}^{n}f_{i,j}^{(l)}\cdot p_{j,j}^{(n-l)}=\sum_{l=1}^{n}f_{i,j}^{(l)}\cdot p_{j,j}^{(n-l)}.
\end{aligned}
$$

[**证2**] 设$T_{i,j}$为从状态i出发首达状态j的步数.

$$
\begin{aligned}
p_{i,j}^{(n)}&=P\{X_n=j\mid X_0=i\}=\sum_{l=1}^n P\{X_n=j\mid T_{i,j}=l,X_0=i\}\cdot P\{T_{i,j}=l\mid X_0=j\}\\
&=\sum_{l=1}^n P\{X_n=j\mid X_l=j;X_k\neq j,k\in[1,k-1];X_0=i\}\cdot P\{T_{i,j}=l\mid X_0=i\}\\
&\xlongequal{\text{马氏性}}\sum_{l=1}^n P\{X_n=j\mid X_l=j\}\cdot f_{i,j}^{(l)}=\sum_{l=1}^n f_{i,j}^{(l)}\cdot p_{i,j}^{(n-l)}.
\end{aligned}
$$

[**注1**] 本定理与C-K方程的不同: 本定理规定了转移过程中以首达j为分界点.

[**注2**] 用DP直接证明本定理:

$dp1[i][j][n]$表示从状态i经n步到达状态j的概率, $dp2[i][j][n]$表示从状态i经n步首达状态j的概率.

注意到从i出发无论如何行进, 都存在首达j的状态,

按首达j时的步数$k\in[1,n]$分类, 显然该划分是不重不漏的, 即事件间无交集,

故状态转移方程$dp1[i][j][n]=\sum_{k=1}^n dp2[i][j][k]\cdot dp1[j][j][n-k]$.

[**定理4.2.4**] 对事件A, 设示性函数$I_A(\omega)=\begin{cases}1,\omega\in A\\0,\omega\notin A\end{cases}$, 则$P(A)=E(I_A)$.

[**证**] $E[I_A(\omega)]=1\cdot P\{\omega\in A\}=P(A)$.

[**推论**] 设事件A的示性函数为I_A. 在事件B发生的条件下A发生的条件概率$P(A\mid B)=E(I_A\mid B)$.

[**定理4.2.5**] 设Markov链的状态空间为S. 对状态$i\in S$, 有:

(1)i是常返态 iff $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}=+\infty$.

(2)i是非常返态时, 有$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{i,i}}<+\infty$.

[**证**] 由**定理4.2.3**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}=p_{i,i}^{(0)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{l=1}^{n}f_{i,i}^{(l)}\cdot p_{i,i}^{(n-l)}\right]$$

$$=1+\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{n=l}^{+\infty}f_{i,i}^{(l)}\cdot p_{i,i}^{(n-l)}$$ *可以证明级数可交换求和次序, 注意交换后求和的上下限.

$$\xlongequal{m=n-l}1+\left(\sum_{l=1}^{+\infty}f_{i,i}^{(l)}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(m)}\right)$$, 解得: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{i,i}}$.

故有$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}<+\infty\Leftrightarrow f_{i,i}<1$和$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}=+\infty\Leftrightarrow f_{i,i}=1$.

[**注1**] 本定理可作为常返态和非常返态的定义.

[**注2**] 区分本定理与用μ_i定义的常返态和非常返态.

[**注3**] 注意本定理的求和从0开始.

[**注4**] 本定理的由来:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}=\sum_{n=0}^{+\infty}P\{X_n=i\mid X_0=i\}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}E\left(I_{\{X_n=i\}}\mid X_0=i\right)$$ * **定理4.2.4**的推论.

$$=E\left(\sum_{n=0}^{+\infty}I_{\{X_n=i\}}\mid X_0=i\right)$$ * 期望的性质, 无需独立.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}I_{\{X_n=i\}}$表示到达$i$的总次数, $\displaystyle E\left(\sum_{n=0}^{+\infty}I_{\{X_n=i\}}\mid X_0=i\right)$表示从$i$出发到达$i$的平均总次数.

①$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}=+\infty$时, 在无穷多步内到达$i$无穷多次, 则状态$i$为常返态.

②$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}<+\infty$时, 在无穷多步内到达$i$有限次, 则到达某些状态后无法返回$i$, 则状态$i$为瞬过态.

[注5] 判定状态的常返性时, 优先用$f_{i,i}^{(n)}$和μ_i判定, 若求首达概率不方便, 则用$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_{i,i}^{(n)}$判定.

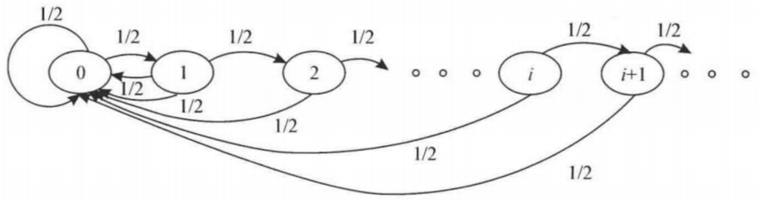
[定理4.2.6] 设Markov链的状态空间为S. 对状态$i,j\in S$, 若$i\leftrightarrow j$, 且i为常返态, 则$f_{j,i}=1$.

[证] 若$f_{j,i}<1$, 从j出发有$1-f_{j,i}>0$的概率不能在平均有限步内回到i.

这表明: 存在一个正概率, 使得从i出发不能在平均有限步内回到i, 与i为常返态矛盾.

[注] 本定理表明: Markov链中的类是封闭的, 即从类内到类外的转移都可回到类内, 但可能存在从类外到类内的转移无法回到类外.

[例4.2.5] 设状态空间$S=\{0,1,2,\cdots\}$的Markov链的概率状态转移图如下图所示, 其中$p_{0,0}=\dfrac{1}{2},p_{i,i+1}=\dfrac{1}{2},p_{i,0}=\dfrac{1}{2}\ \ (i\in S)$.



易得: $f_{0,0}^{(1)}=\dfrac{1}{2},f_{0,0}^{(2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2},\cdots,f_{0,0}^{(n)}=\dfrac{1}{2^n},$

则$f_{0,0}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1,\mu_0=\sum_{n=1}^{+\infty}n\cdot 2^{-n}<+\infty$, 则状态0为正常返态.

又因状态0是非周期的, 则状态0为遍历态. 对$\forall$状态$i>0$, 因$i\leftrightarrow 0$, 则状态i也是遍历态.

故该Markov链是遍历的.

4.3 极限定理与平稳分布

4.3.1 极限定理

[例4.3.1] 考察转移矩阵$P=\begin{bmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{bmatrix}\ \ (0<p,q<1)$的Markov链.

(1)$f_{0,0}=(1-p)+p\cdot q\cdot\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}(1-q)^l=(1-p)+p\cdot q\cdot\frac{1}{q}=1$, 则状态0为常返态.

错位相减易得$\mu_0<+\infty$, 则状态0为正常返态. 同理状态1为正常返态.

(2)考察$n\to+\infty$时的$P^{(n)}=P^n$.

将P对角化得: $P=QDQ^{-1}$,

其中$Q=\begin{bmatrix}1 & -p\\ 1 & q\end{bmatrix},Q^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q}\\ -\dfrac{1}{p+q} & \dfrac{1}{p+q}\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-p-q\end{bmatrix}$.

则$P^n=QD^nQ^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{q+p(1-p-q)^n}{p+q} & \dfrac{p-p(1-p-q)^n}{p+q}\\ \dfrac{q-q(1-p-q)^n}{p+q} & \dfrac{p+q(1-p-q)^n}{p+q}\end{bmatrix}$.

因$0<p,q<1$, 则$0<p+q<2$, 进而$0<|p+q-1|=|1-p-q|<1$.

故$\lim\limits_{n\to+\infty}P^n=\begin{bmatrix}\dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q}\\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q}\end{bmatrix}$, 即该Markov链的$n$步转移概率有稳定的极限.

注意到$\dfrac{q}{p+q}+\dfrac{q}{p+q}=1$, 则该极限是一个分布.

[**注**] $\lim\limits_{n\to+\infty}P^n$ 的各列分别相同, 这表明: 起点不影响极限分布.

[**定理4.3.1**] [**Markov链的基本极限定理**] 设Markov链的状态空间为S.

(1)若状态$i\in S$是周期为d的常返态, 则$\lim\limits_{n\to+\infty}p_{i,i}^{(nd)}=\dfrac{d}{\mu_i}=\begin{cases}\dfrac{d}{\mu_i}, i\text{为正常返态}\\ 0, i\text{为零常返态}\end{cases}$.

(2)若状态$i\in S$是非常返态, 因$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}<+\infty$, 则$\lim\limits_{n\to+\infty}p_{i,i}^{(n)}=0$.

(3)若状态$i\in S$是零常返态, 则无需考虑周期, 有$\lim\limits_{n\to+\infty}p_{i,i}^{(n)}=0$.

[**注**] μ_i不易直接求时, 可用极限分布求, 即$\mu_i=\dfrac{d}{\lim\limits_{n\to+\infty}p_{i,i}^{(n)}}$.

[**定理4.3.2**] 设Markov链的状态空间为S. 若状态$i\in S$是常返态, 即$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{i,i}^{(n)}=+\infty$, 则状态$i$是零常返态 iff $\lim\limits_{n\to+\infty}p_{i,i}^{(n)}=0$.

[**证**]

(1)若状态i为零常返态, 由基本极限定理: $\lim\limits_{n\to+\infty}p_{i,i}^{(nd)}=0$.

对非d的倍数的$m\in\mathbb{N}^*$, 有$p_{i,i}^{(m)}=0$. 综上, $\lim\limits_{n\to+\infty}p_{i,i}^{(n)}=0$.

(2)若$\lim\limits_{n\to+\infty}p_{i,i}^{(n)}=0$, 且状态$i$为正常返态, 则$\mu_i<+\infty$. 由基本极限定理: $\lim\limits_{n\to+\infty}p_{i,i}^{(nd)}=0$, 矛盾.

[**例4.3.2**] 考察直线上的自由随机游走, 其状态空间$S=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$, 转移概率$p_{i,i+1}=1-p_{i,i-1}=p\ \ (i\in S)$.

对状态0, 因从0出发经奇数步无法返回0, 则$p_{0,0}^{(2n+1)}=0\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$.

从0出发, 经偶数步返回0 iff 向左、向右移动的距离相等,

则$p_{0,0}^{(2n)}=C_{2n}^n\cdot p^n(1-p)^n=\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}[p(1-p)]^n$.

由Stirling公式: n充分大时, 有$n! \sim \mathrm{e}^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2n}$, 则$p_{0,0}^{(2n)} \sim \dfrac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$.

考察级数$S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_{0,0}^{(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$.

①$p = \dfrac{1}{2}$时, $4p(1-p) = 1$, 此时$S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$发散, 则状态$0$为常返态.

因$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_{0,0}^{(2n)} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n\pi}} = 0$, 则状态$0$为零常返态.

该极限不是分布.

②$p \neq \dfrac{1}{2}$时, 因$4 \cdot p(1-p) < 4 \cdot \left(\dfrac{p + (1-p)}{2}\right)^2 = 1$,

则$S < \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} = +\infty$, 进而状态$0$为瞬过态.

$p = \dfrac{1}{3}$时, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_{0,0}^{(2n)} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(4 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{n\pi}} = 0$, 虽极限也为0, 但与常返态有本质区别.

[**定理4.3.3**] Markov链中, 状态的常返性是一个类性质. 设Markov链的状态空间为S. 对$\forall$ 状态$i, j \in S$, 且$i \leftrightarrow j$, 有:

(1)状态i, j同为常返态或非常返态.

(2)状态i, j同为常返态时, 它们同为正常返态或零常返态.

[**证**]

(1)因$i \leftrightarrow j$, 则$\exists n, m \in \mathbb{N}\ s.t.\ p_{i,j}^{(m)}, p_{j,i}^{(n)} > 0$.

由C-K方程: $p_{i,i}^{(n+m+l)} = \displaystyle\sum_{k_1 \in S}\sum_{k_2 \in S} p_{i,k_1}^{(n)} \cdot p_{k_1,k_2}^{(l)} \cdot p_{k_2,i}^{(m)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,j}^{(l)} \cdot p_{j,i}^{(m)}$ ①.

同理$p_{j,j}^{(n+m+l)} \geq p_{j,i}^{(m)} \cdot p_{i,i}^{(l)} \cdot p_{i,j}^{(n)}$ ②.

①式和②式分别两边求和得:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} p_{i,i}^{(n+m+l)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,i}^{(m)} \cdot \sum_{l=0}^{+\infty} p_{j,j}^{(l)}, \sum_{l=0}^{+\infty} p_{j,j}^{(n+m+l)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,i}^{(m)} \cdot \sum_{l=0}^{+\infty} p_{i,i}^{(l)}.$$

这表明: $\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} p_{i,i}^{(l)}$与$\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} p_{j,j}^{(l)}$相互控制, 则它们同为有限数或无穷大, 故状态$i, j$同为常返态或非常返态.

(2)设状态i为零常返态.

注意到$p_{i,i}^{(n+m+l)} \geq p_{i,j}^{(n)} \cdot p_{j,j}^{(m)} \cdot p_{j,i}^{(l)} \geq 0$, 此处可取$0$是因为$p_{j,j}^{(m)}$可能取$0$.

上式令$m \to +\infty$得: $0 \geq \displaystyle\lim_{m\to+\infty} p_{j,j}^{(m)} \geq 0$, 则状态$j$是零常返态. 故证.

[**定理4.3.4**] 设Markov链的状态空间为S.

(1)设$j \in S$是非常返态或零常返态, 则对$\forall i \in S$, 都有$\lim\limits_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0$.

(2)若Markov链不可约、正常返、非周期, 则对$\forall i, j \in S$, 都有$\lim\limits_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_j}$, 即只与终点有关.

[**证**]

(1)由**定理4.2.3**: $p_{i,j}^{(n)} = \sum\limits_{l=1}^n f_{i,j}^{(l)} \cdot p_{i,j}^{(n-l)}$. 上式有$l$和$n$两个变量, 考虑固定其中一个.

取$1 \leq N < n$, 则$p_{i,j}^{(n)} = \sum\limits_{l=1}^n f_{i,j}^{(l)} \cdot p_{i,j}^{(n-l)} = \sum\limits_{l=1}^N f_{i,j}^{(l)} \cdot p_{j,j}^{(n-l)} + \sum\limits_{l=N+1}^n f_{i,j}^{(l)} \cdot p_{j,j}^{(n-l)}$

$\leq \sum\limits_{l=1}^N f_{i,j}^{(l)} \cdot p_{j,j}^{(n-l)} + \sum\limits_{l=N+1}^n f_{i,j}^{(l)}$. *因$p_{j,j}^{(n-l)} \leq 1$.

两边取极限得: $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)}$

$\leq \sum\limits_{l=1}^N f_{i,j}^{(l)} \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} p_{j,j}^{(n-l)} + \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{l=N+1}^n f_{i,j}^{(l)}$ *其中$\sum\limits_{l=1}^N f_{i,j}^{(l)}$为有界量, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{j,j}^{(n-l)}$为无穷小.

$\leq 0 + \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{l=N+1}^n f_{i,j}^{(l)} \ \ (*)$.

因$\sum\limits_{l=1}^{+\infty} f_{i,j}^{(l)} \leq 1$, 则$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{l=N+1}^n f_{i,j}^{(l)} = 0$. $(*)$式两边令$N \to +\infty$得: $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)} = 0$.

(2)取$1 \leq N < n$, 由**定理4.2.3**: $\sum\limits_{l=1}^N f_{i,j}^{(l)} \cdot p_{j,j}^{(n-l)} \leq p_{i,j}^{(n)} \leq \sum\limits_{l=1}^N f_{i,j}^{(l)} \cdot p_{j,j}^{(n-l)} + \sum\limits_{l=N+1}^n f_{i,j}^{(l)}$.

固定N, 令$n \to +\infty$, 再令$N \to +\infty$, 由基本极限定理: $\dfrac{1}{\mu_j} \leq \lim\limits_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)} \leq \dfrac{1}{\mu_j}$, 故证.

[**注1**] 本定理与**定理4.3.3**的不同: 无起点i的限制.

[**推论**] 设Markov链的状态空间为S. 对状态$i, j \in S$, 若$i \to j$, 则

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} 0, j\text{为非常返态或零常返态} \\ \dfrac{1}{\mu_j}, j\text{为正常返态} \end{cases}.$$

[**注2**] 因$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^n p_{i,j}^{(k)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^n E\left(I_{\{X_k = j\}} \mid X_0 = i\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} E\left(\sum\limits_{k=1}^n I_{\{X_k = j\}} \mid X_0 = i\right)$,

则本推论可用于求$n \to +\infty$时各状态所占的比例, 如**例4.3.5**.

[**定理4.3.5**] 状态有限的Markov链必有正常返态, 必无零常返态, 可能有非常返态, 则不可约的有限Markov链是正常返的.

[**证**] 设Markov链的状态空间$S=\{1,\cdots,N\}$.

(1)若N个状态都是非常返态, 则对$\forall i,j\in S$, 有:

①若$i\rightarrow j$, 则$p_{i,j}^{(n)}\rightarrow 0$.

②若$i\nrightarrow j$, 则$p_{i,j}^{(n)}=0$.

综上, $\displaystyle\lim_{n\rightarrow+\infty}\sum_{j=1}^N p_{i,j}^{(n)}=0$, 与$\displaystyle\sum_{j=1}^N p_{i,j}^{(n)}=1$矛盾.

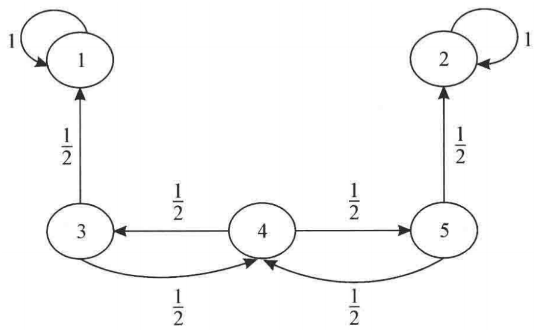
(2)若$i\in S$是零常返态, 设集合$C=\{j:i\rightarrow j\}$, 则$\displaystyle\sum_{j\in C}p_{i,j}^{(n)}=1$.

对$\forall j\in C$, 若$j\nrightarrow i$, 则与i为常返态矛盾, 故$j\rightarrow i$.

又$i\rightarrow j$, 则$i\leftrightarrow j$, 进而j是零常返态, 则$\displaystyle\lim_{n\rightarrow+\infty}p_{i,j}^{(n)}=0$, 进而$\displaystyle\lim_{n\rightarrow+\infty}\sum_{j\in C}p_{i,j}^{(n)}=0$, 矛盾.

[**推论**] 若Markov链有一个零常返态, 则它有无穷多个零常返态.

[**例4.3.3**] 状态空间$S=\{1,2,3,4,5\}$的Markov链的转移矩阵$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$. 求其常返态、瞬过态, 并求常返态$i$求其平均回转时间$\mu_i$.



[**解1**] 由状态转移图: 该Markov链有3类$\{1\},\{2\},\{3,4,5\}$.

状态1、状态2的周期都为1, 状态3、状态4、状态5的周期都为2.

因$\displaystyle\lim_{n\rightarrow+\infty}P^n=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0*&*&0&0&0*&*&0&0&0*&*&0&0&0\end{bmatrix}$, 则状态1、状态2都为正常返态, 状态3、状态4、状态5都为瞬过态.

由状态转移图: $\mu_1=\mu_2=1$.

[**解2**] 因$f_{1,1}=1$, 则状态1为常返态. 又$\mu_1=1$, 则状态1为正常返态. 同理状态2为正常返态.

$f_{3,3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{3}<1$, 则状态3为瞬过态.

[**注**] 因状态1的周期为1的常返态, 则 $\lim_{n\to+\infty}p_{k,1}^{(n)}=\frac{1}{\mu_1}=1$, 同理 $\lim_{n\to+\infty}p_{k,2}^{(n)}=1$.

因状态3、状态4、状态5都为瞬过态, 则 $\lim_{n\to+\infty}p_{k,3}^{(n)}=\lim_{n\to+\infty}p_{k,4}^{(n)}=\lim_{n\to+\infty}p_{k,5}^{(n)}=0$.

因概率之和非1, 故该极限不是分布.

4.3.2 平稳分布与极限分布

[**定义4.3.1**] 对状态空间为S的Markov链, 称概率分布$\{p_j,j\in S\}$为**平稳分布**或**不变分布**, 如果对$\forall j\in S$, 都有 $p_j=\sum_{i\in S}p_i\cdot p_{i,j}$.

[**注1**] 若Markov链的初始分布$P\{X_0=j\}=p_j\ \ (j\in S)$为平稳分布,

则X_1的分布$P\{X_1=j\}=\sum_{i\in S}P\{X_1=j\mid X_0=i\}\cdot P\{X_0=i\}=\sum_{i\in S}p_{i,j}\cdot p_i=p_j$,

即X_1与X_0同分布, 进而$X_2,X_3,\cdots$与X_0同分布.

[**注2**] 平稳分布只保证每次转移后分布相同, 不保证所在的状态相同.

[**注3**] 平稳分布存在 iff 方程组有解.

[**定义4.3.2**] 称不可约、非周期、正常返的Markov链为**遍历的**, 称极限 $\lim_{n\to+\infty}p_{i,j}^{(n)}=\pi_j\ \ (j\in S)$为其**极限分布**. 由**定理4.3.4**: $\pi_j=\frac{1}{\mu_j}$.

[**注**] 判定遍历时, 若不要求用定义, 由 **定理4.3.5** : 可用不可约、非周期、有限状态判定遍历.

[**定理4.3.6**] 对不可约、非周期的Markov链, 有:

(1)若它是正常返的, 则对 $\forall j\in S$, 有 $\pi_j=\lim_{n\to+\infty}p_{i,j}^{(n)}>0$为平稳分布, 且为该Markov链唯一的极限分布.

(2)若所有状态都是瞬过态或零常返态, 则该Markov链不存在平稳分布.

[**证**]

(1) ① 先证明是分布.

对遍历的Markov链, 由 **定理4.3.4** : $\lim_{n\to+\infty}p_{i,j}^{(n)}>0$ 存在, 记作 π_j .

因 $\sum_{j\in S}p_{i,j}^{(n)}=1$, 则 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{j\in S}p_{i,j}^{(n)}=1$.

因 $\sum_{j\in S}\pi_j=\sum_{j\in S}\lim_{n\to+\infty}p_{i,j}^{(n)}\xlongequal[\text{极限关于步数}]{\text{求和关于状态}}\lim_{n\to+\infty}\sum_{j\in S}p_{i,j}^{(n)}=1$, 故 $\{\pi_j,j\in S\}$ 是分布.

② 再证是平稳分布.

$\pi_j=\sum_{k\in S}\pi_k\cdot p_{k,j}\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}p_{i,j}^{(n)}=\sum_{k\in S}\lim_{n\to+\infty}p_{i,k}^{(n)}\cdot p_{k,j}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in S}p_{i,k}^{(n)}\cdot p_{k,j}$,

这正是 $(n+1)$ 步的C-K方程, 故 $\{\pi_j,j\in S\}$ 是平稳分布.

③ 最后证唯一性.

若还有一个平稳分布 $\{\widetilde{\pi}_j, j \in S\}$, 则 $\widetilde{\pi}_j = \sum\limits_{k \in S} \widetilde{\pi}_k \cdot p_{k,j}^{(n)}$.

令 $n \to +\infty$, 则 $\widetilde{\pi}_j = \sum\limits_{i \in S} \widetilde{\pi}_i \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} p_{i,j}^{(n)} = \sum\limits_{i \in S} \widetilde{\pi}_i \cdot \pi_j$.

因 $\sum\limits_{i \in S} \widetilde{\pi}_i = 1$, 则 $\widetilde{\pi}_j = \pi_j$, 故证.

(2) 若存在平稳分布 $\{\pi_j, j \in S\}$, 由 (1) 知: $\pi_j = \sum\limits_{j \in S} \pi_i \cdot p_{i,j}^{(n)}$.

令 $n \to +\infty$, 则 $p_{i,j}^{(n)} \to 0$, 进而 $\pi_j = 0 \ \ (j \in S)$, 与 $\{\pi_j, j \in S\}$ 是分布矛盾.

[**例4.3.4**] 求转移矩阵$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$的Markov链的平稳分布.

[**解**] 由状态转移图: 该Markov链不可约、非周期.

因$f_{1,1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \left[\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right] \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left[\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right] = 1$,

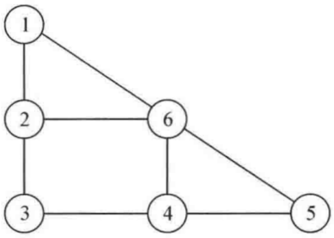
则状态1为正常返态, 进而状态2、状态3都为正常返态.

则该Markov链正常返, 进而平稳分布为其唯一的极限分布.

令$\begin{cases} \overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi} P \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \pi_i = 1 \end{cases}$, 即$\begin{cases} \pi_1 = 0.5\pi_1 + 0.5\pi_2 \\ \pi_2 = 0.5\pi_1 + 0.5\pi_3 \\ \pi_3 = 0.5\pi_2 + 0.5\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$, 解得: $\overrightarrow{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

该极限分布表明: 0时刻从状态i出发, 充分长时间后Markov链处于状态1、状态2、状态3的概率都为$\dfrac{1}{3}$.

[**例4.3.5**] 有 6 个车站, 连接情况如下图所示.



汽车每天可从一个车站驶向与之直接相邻的车站, 并在夜晚到达车站留宿, 次日凌晨重复相同活动. 设每天凌晨汽车等可能地开往任一相邻车站. 求证: 充分长时间后, 各车站每晚留宿的汽车比例趋于稳定, 并求该比例.

[**解**] 设某汽车第 n 天在车站 X_n 留宿, 则 $\{X_n;n=0,1,\cdots\}$ 是时齐Markov链,

其转移概率矩阵 $P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

易证该Markov链是遍历的, 则其平稳分布是其唯一的极限分布.

设 $\overrightarrow{\pi}=(\pi_1,\cdots,\pi_6)$. 令 $\begin{cases} \overrightarrow{\pi}\cdot P=\overrightarrow{\pi} \\ \sum\limits_{i=1}^{6}\pi_i=1 \end{cases}$, 解得: $\overrightarrow{\pi}=\left(\frac{1}{8},\frac{3}{16},\frac{1}{8},\frac{3}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$.

[**例4.3.6**] 设甲袋中有 k 个白球和 1 个黑球, 乙袋中有 $(k+1)$ 个白球. 每次从两袋中各取一球交换. 求证: 经 n 次交换后, 黑球仍在甲袋中的概率 p_n 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\frac{1}{2}$.

[**解**] 设 n 次操作后甲袋中有 X_n 个黑球, 则 $\{X_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $S=\{0,1\}$ 的时齐Markov链,

其转移概率矩阵 $P=\begin{bmatrix} \frac{k}{k+1} & \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{k}{k+1} \end{bmatrix}$.

易证该Markov链是遍历的, 则其平稳分布是其唯一的极限分布.

设 $\overrightarrow{\pi}=(\pi_0,\pi_1)$. 令 $\begin{cases} \overrightarrow{\pi}\cdot P=\overrightarrow{\pi} \\ \pi_0+\pi_1=1 \end{cases}$, 解得: $\overrightarrow{\pi}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\lim\limits_{n\to+\infty}P\{X_n=1\}=\pi_1=\frac{1}{2}$.

[**例4.3.7**] 某商品连续 24 个季度的销售情况为 $1,1,2,1,2,2,1,1,1,2,1,2,1,1,2,2,1,1,2,1,2,1,1,1$, 其中 1 表示畅销, 2 表示滞销. 设该商品的销售情况近似满足时齐性和Markov性.

(1) 求销售状态的一步转移概率矩阵.

(2) 若现在畅销, 预测之后的第四个季度的销售情况.

(3) 若影响销售的因素不变, 预测长期销售情况.

[**解**] 设第 n 个季度该商品的销售情况为 X_n , 则 $\{X_n;n=1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $S=\{0,1\}$ 的时齐Markov链.

(1) 有 7 次 $1\to1$ 和 7 次 $1\to2$, 则 $p_{1,1}=p_{1,2}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$.

有 7 次 $2\to1$ 和 7 次 $2\to2$, 则 $p_{2,1}=\dfrac{7}{9},p_{2,2}=\dfrac{2}{9}$.

故一步转移概率矩阵 $P=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\\dfrac{7}{9}&\dfrac{2}{9}\end{bmatrix}$.

(2) $P^4=\begin{bmatrix}0.611&0.389\\0.605&0.395\end{bmatrix}$.

因 $p_{1,1}^{(4)}=0.611>0.389=p_{1,2}^{(4)}$, 则第四个季度以 0.611 的概率畅销.

(3) 设 $\overrightarrow{\pi}=(\pi_1,\pi_2)$. 令 $\begin{cases}\overrightarrow{\pi}\cdot P=\overrightarrow{\pi}\\\pi_1+\pi_2=1\end{cases}$, 解得: $\overrightarrow{\pi}=\left(\dfrac{14}{23},\dfrac{9}{23}\right)$.

故长期下, 该商品以 $\dfrac{14}{23}$ 的概率畅销.

[**例4.3.8**] 某人有 r 把伞用于上下班. 一天开始时他在家(一天结束时他在办公室), 且天下雨, 只有有伞可取, 他将拿一把伞到办公室(家)中; 若天不下雨, 则他不带伞. 设每天开始(结束)时下雨的概率为 p , 不下雨的概率为 q , 且与过去的情况独立.

(1) 定义一个包含 $(r+1)$ 个状态的Markov链并确定其转移概率.

(2) 求极限分布.

(3) 若天下雨且伞全部在另一处, 则他将被淋湿. 求他被淋湿的平均次数所占的比例.

[**解**]

(1) 设第 n 天他身边有 X_n 把伞, 则 $\{X_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $S=\{0,\cdots,r\}$ 的时齐Markov链,

其一步转移概率 $p_{0,r}=1,p_{i,r-i}=q,p_{i,r-i+1}=p\ \ (i=1,\cdots,r)$.

(2) 易证上述Markov链是遍历的, 则其平稳分布是其唯一的极限分布.

设 $\overrightarrow{\pi}=(\pi_0,\cdots,\pi_r)$. 令 $\begin{cases}\overrightarrow{\pi}\cdot P=\overrightarrow{\pi}\\\displaystyle\sum_{i=0}^r\pi_i=1\end{cases}$, 即 $\begin{cases}\pi_0=\pi_r\cdot q\\\pi_j=\pi_{r-j}\cdot q+\pi_{r-j+1}\cdot p\\\pi_r=\pi_0+\pi_1\cdot p\\\displaystyle\sum_{i=0}^r\pi_i=1\end{cases}\quad(j=1,\cdots,r-1)$.

因状态 $j=1,\cdots,r$ 的转移规律相同, 则它们的极限概率 π_j 相等,

进而 $\begin{cases} \pi_0 = \pi_r \cdot q \\ \pi_0 + r \cdot \pi_r = 1 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{q}{r+q} \\ \pi_j = \dfrac{1}{r+q} \end{cases} \ (j = 1, \cdots, r)$.

(3) 他被淋湿 iff 他身边无伞且天下雨, 则他被淋湿的平均次数所占的比例为 $\pi_0 \cdot p = \dfrac{pq}{r+q}$.

[**例4.3.9**] 一蚂蚁在直线上爬行, 原点处一只蜘蛛在等待觅食, N 处有一挡板, 蚂蚁到 N 处只能返回. 设蚂蚁向左爬、向右爬的概率分别为 p 和 $(1-p)$. 求证: 蚂蚁被蜘蛛吃掉的概率为 1 .

[**解**] 设 n 时刻蚂蚁的位置在 X_n , 则 $\{X_n; n = 0, \cdots, N\}$ 是状态空间 $S = \{0, \cdots, N\}$ 的时齐Markov链,

其转移概率矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$.

由状态转移图: 该Markov链分为两类 $\{0\}, \{1, \cdots, N\}$, 前一类为吸收态, 后一类为非常返态.

因 $\mu_0 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot f_{i,i}^{(n)} = 1$, 则 $\pi_0 = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_{i,0}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_0} = 1$.

4.4 连续时间Markov链

[**定义4.4.1**] 过程 $\{X(t); t \geq 0\}$ 的状态空间 S 是离散空间, 不妨设它为 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 或其子集. 若对 $\forall s, t \geq 0$ 和状态 $i, j \in S$, 都有 $P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u); 0 \leq u < s\} = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$, 则称 $\{X(t); t \geq 0\}$ 是一个**连续时间Markov链**. 记条件概率 $P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$ 为 $p_{i,j}(s,t)$, 它表示过程在 s 时刻处于状态 i , 经 t 时间后转移到状态 j 的**转移概率**, 称 $P(s,t) = (p_{i,j}(s,t))$ 为**转移概率矩阵**. 称连续时间Markov链是**时齐的**, 如果转移概率 $p_{i,j}(s,t)$ 与起始时刻 s 无关, 此时将 $p_{i,j}(s,t)$ 简记为 $p_{i,j}(t)$, 将 $P(t)$ 简记为 $(p_{i,j}(t))$. 下面只讨论时齐的连续时间Markov链, 简称**连续时间Markov链**.

[**注**] $P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u); 0 \leq u < s\}$ 中, $X(t+s)$ 是将来的信息, $X(s)$ 是现在的信息, $X(u) = x(u) \ \ (0 \leq u < s)$ 是过去的信息, 即已知现在, 将来与过去无关.

[**定理4.4.1**] 设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 是连续时间Markov链, 且 0 时刻恰到达状态 $i \in S$. 设过程离开 i 前在 i 停留的时间为 τ_i , 称其为**逗留时间**, 则 τ_i 服从指数分布.

[**证**] 只需证明对 $\forall s, t \geq 0$, 都有 $P\{\tau_i = s + t \mid \tau_i = s\} = P\{\tau_i > t\}$,

即过程已在状态 i 待了 s 时间, 再待 t 时间的概率与已待了 s 时间无关, 亦即无记忆性.

注意到事件 $\{\tau_i > s\} \Leftrightarrow \{X(u) = i; 0 < u \leq s \mid X(0) = i\}$,

事件 $\{\tau_i > s + t\} \Leftrightarrow \{X(u) = i, 0 < u \leq s; X(v) = i, s < v \leq s + t \mid X(0) = i\}$,

则 $P\{\tau_i > s + t \mid \tau_i > s\}$

$= P\{X(u) = i, 0 < u \leq s; X(v) = i, s < v \leq s + t \mid X(u) = i, 0 \leq u \leq s\}$

$= P\{X(v) = i; s < v \leq s + t \mid X(s) = i\}$

$$* P(AB \mid A) \xlongequal{\text{已知}A\text{发生}} P(B \mid A) \xlongequal{\text{Markov性}} P[B \mid X(s) = i] .$$

$$\xlongequal{\text{时齐性}} P\{X(u) = i; 0 < u \leq t \mid X(0) = i\} = P\{\tau_i > t\} .$$

[**注1**] 显然服从指数分布可推出Markov性. 因连续时间Markov链有Markov性, 则 τ_i 应有无记忆性, 本定理证明了Markov性可推出服从指数分布.

[**注2**] 一般剩余时间(或称剩余寿命)依赖于逗留时间, 即过程无Markov性. 为使得过程有Markov性, 逗留时间应服从指数分布.

[**注3**] 本定理给出了一种构造连续时间Markov链的方法(即充要条件), 它是满足如下两条性质的随机过程:

① 转移到另一状态前, 处于状态 i 的时间服从参数为 μ_i 的指数分布.

② 过程离开状态 i 时, 以 $p_{i,j}$ 的概率转移到状态 j , 且满足 $\displaystyle\sum_{j \in S} p_{i,j} = 1$.

τ_i 的期望 $E(\tau_i) = \dfrac{1}{\mu_i}$. 特别地, $\mu_i = +\infty$ 时, 过程在状态 i 的平均停留时间为 0 , 即一进入就离开, 称这样的状态是**瞬过的**. 下面只讨论不含瞬过态的连续时间Markov链, 即对 $\forall i \in S$, 都有 $0 \leq \mu_i < +\infty$. 称 $\mu_i = 0$ 的状态 i 为**吸收态**, 即一进入该状态, 停留的平均时间为无限长. 故连续时间Markov链以**嵌入Markov链**(在跳点处嵌入一条Markov链)的方式在各状态间转移, 且两次转移间以指数分布停留, 该指数分布与过程所属的状态有关, 但与将转移到的状态独立, 即现在不依赖于将来.

[**定义4.4.2**] 称一个连续时间Markov链的**正则的**, 如果以概率 1 在任意有限长的时间内转移的次数有限, 即不允许在有限时间内出现无限次转移, 亦即正则性防止随机过程爆炸. **连续性条件** $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} p_{i,j}(t) = \delta_{i,j} = [i = j]$. 下面只讨论满足正则性条件的连续时间Markov链.

[**定理4.4.2**] 齐次Poisson过程是连续时间Markov链.

[**证**] 参数为 λ 的Poisson过程 $\{N(t); t \geq 0\}$ 取值为 $\{0, 1, 2, \cdots\}$.

过程在任一状态 $i \in S$ 停留的时间服从指数分布, 且离开 i 时以概率 1 转移到状态 $(i+1)$.

由独立增量性: 过程在 i 的逗留时间与状态转移独立, 或由平稳增量性: $\mu_i = \mu_{i+1} = \dfrac{1}{\lambda} \ \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$,

故齐次Poisson过程是连续时间Markov链, 下面求其转移概率.

① $j < i$ 时, $p_{i,j}(t) = 0$.

② $j = i$ 时,

$$p_{i,j}(t) = P\{N(t+s) = i \mid N(s) = i\} = P\{N(t+s) - N(s) = 0\}$$

$$\xlongequal{\text{时齐性}} P\{N(t) - N(0) = 0\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda t} .$$

③ $j = i + 1$ 时, $p_{i,j}(t) = P\{N(t+s) = i + 1 \mid N(s) = i\} = P\{N(t) = 1\} = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

④ $j > i + 1$ 时, $p_{i,j}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

[**注**] 连续时间Markov链与Poisson过程的区别: 连续时间Markov链只要求两次跳转间的间隔服从指数分布, 但不要求所有间隔都同分布.

[**定义4.4.3**] 设 $\{X(t);t\geq 0\}$ 是状态空间为 S 的连续时间Markov链. 对状态 $i,j\in S$, 定义**转移率**

$$q_{i,j}=\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{i,j}(t)-p_{i,j}(0)}{t}=\begin{cases}q_{i,i}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{p_{i,i}(t)-1}{t},i=j\\q_{i,j}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{p_{i,j}(t)-0}{t},i\neq j\end{cases}.$$

[**注1**] 设状态 $i\in S$ 的逗留时间为 τ_i . 可以证明: $P\{\tau_i\leq t\}=1-\mathrm{e}^{-q_it}$, 其中 $q_i=|q_{i,i}|=-q_{i,i}$.

[**注2**] 对状态 $i,j\in S$, 设初始在状态 i , 在 τ_1 时刻转移到状态 j , 则嵌入Markov链的转移概率 $P\{X(\tau_1)=j\mid X(0)=i\}=\dfrac{q_{i,j}}{\sum\limits_{k\neq i}q_{i,k}}$, 且 $P\{\tau_1\leq t,X(\tau_1)=j\mid X(0)=i\}=\left(1-\mathrm{e}^{-q_it}\right)\dfrac{q_{i,j}}{\sum\limits_{k\neq i}q_{i,k}}$, 即两事件条件独立.
