大学物理(1)速通教程

2. Newton运动定律

2.1 Newton运动定律

Newton运动定律只适用于宏观、低速(速度远小于光速)的情况.

2.1.1 Newton第一定律

[**Newton第一定律**,**惯性定律**] 任何物体都要保持静止或匀速直线运动状态,直至外力迫使它改变运动状态,即若$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$,则$\overrightarrow{v}$为恒矢.

惯性:物体本身保持运动状态不变的性质,用质量定量刻画.

力:迫使物体运动状态改变的作用.

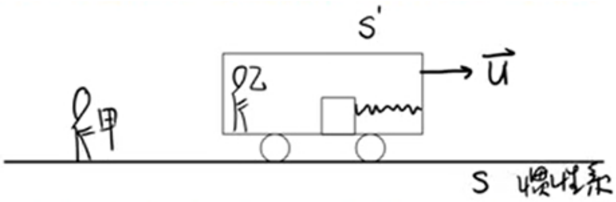
惯性系:Newton第一定律成立的参考系.

非惯性系:Newton第一定律不成立的参考系.

(1)若物体在一参考系中不受其他外力作用,保持静止或匀速直线运动状态,则该参考系称为惯性参考系.

如下图,若认为地球S系是惯性系,小车以速度$\overrightarrow{u}$做匀速直线运动,则小车的参考系S'系是惯性系.

在甲和乙看来,木块水平方向都受弹簧拉力和摩擦力,且它们平衡,符合Newton第一定律和Newton第二定律.

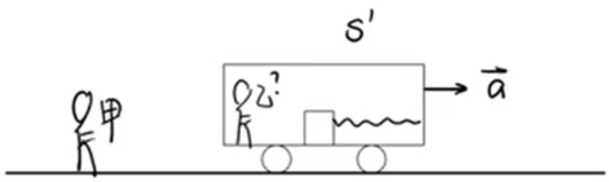


(2)相对于惯性系静止或做匀速直线运动的参考系是惯性系,相对于惯性系做变速直线运动的参考系是非惯性系.

如下图,小车以加速度$\overrightarrow{a}$做匀变速直线运动.

在甲看来,木块水平方向受弹簧拉力和摩擦力,且它们不平衡,木块随车做变速运动,符合Newton第一定律和第二定律.

在乙看来,木块水平方向受弹簧拉力和摩擦力,且它们不平衡,但木块相对于车静止,不符合Newton第一定律和第二定律.



2.1.2 Newton第二定律

动量$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}$是状态量,与时刻有关.特点:①矢量性;②瞬时性;③相对性.

[**Newton第二定律**] 动量为$\overrightarrow{p}$的物体在合外力$\overrightarrow{F}=\sum\limits_i \overrightarrow{F_i}$的作用下,其动量随时间的变化率等于作用于该物体的合外力,即$\overrightarrow{F}=\sum\limits_i \overrightarrow{F_i}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{p}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\overrightarrow{v}\right)=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{v}+m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$.当物体质量不随时间变化时,$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$,此时$\overrightarrow{F}=m\overrightarrow{a}$.

[**注1**] Newton第二定律只适用于质点.若多个物体可看作系统,也可用Newton第二定律求解.

[**注2**] Newton第二定律描述力、质量和加速度的瞬时对应关系.

①求导问题:$\overrightarrow{r}\rightarrow\overrightarrow{v}\rightarrow\overrightarrow{a}\rightarrow\overrightarrow{F}$;②积分问题:$\overrightarrow{F}\rightarrow\overrightarrow{a}\rightarrow\overrightarrow{v}\rightarrow\overrightarrow{r}$.

[**注3**] 总加速度等于各分力产生的加速度的矢量和.

①直角坐标:$\overrightarrow{F}=F_x\overrightarrow{i}+F_y\overrightarrow{j}+F_z\overrightarrow{k}=m\overrightarrow{a}=ma_x\overrightarrow{i}+ma_y\overrightarrow{j}+ma_z\overrightarrow{k}$.

②自然坐标:$\overrightarrow{F}=F_t\overrightarrow{e_t}+F_n\overrightarrow{e_n}=m\overrightarrow{a}=ma_t\overrightarrow{e_t}+ma_n\overrightarrow{e_n}$.

[**注4**] Newton第二定律只适用于惯性系.

2.1.3 Newton第三定律

[**Newton第三定律**,**作用力与反作用力定律**] 两物体间的作用力$\overrightarrow{F}$和反作用力$\overrightarrow{F'}$沿同一直线,大小相等,方向相反,分别作用在两个物体上,即$\overrightarrow{F}=-\overrightarrow{F'}$.

[**注**] 作用力与反作用力:①作用在不同物体上,不能相互抵消;②相互依存,同生同灭;③是同种性质的力.

2.1.4 力学相对性原理

[**力学相对性原理**,**Galileo相对性原理**]

(1)相对于惯性系静止或做匀速直线运动的参考系都是惯性系.

(2)对不同的惯性系,Newton运动定律有相同的形式,与惯性系的运动无关.

由Galileo速度变换:绝对速度=相对速度+牵连速度,即$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v'}+\overrightarrow{u}$,其中$\overrightarrow{u}$为恒矢.

两边对t求导得:$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v'}}{\mathrm{d}t}$,即$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a'}$,两边同乘$m$得:$m\overrightarrow{a}=\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F'}=m\overrightarrow{a'}$.

这表明:在惯性系S系和相对于惯性系静止或做匀速直线运动的S'系中对物体做受力分析,得到的结果相同.

(3)在一个惯性系内做任何力学实验都不能判定该参考系相对于其他惯性系的运动状态.

2.2 量纲与国际单位制

国际单位制的七个基本物理量:长度、质量、时间、热力学温度、电流强度、光强度、物质的量.

由基本物理量的单位产生导出单位,如速率$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$的单位$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$,力$\overrightarrow{F}=m\overrightarrow{a}$的单位$1\ \mathrm{N}=1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

力学辅助单位:弧度rad.

量纲:表示一个物理量如何由基本量的组合所形成的式子,即将一个导出量用若干基本量的幂次之积表示.

力学中,长度的量纲为L,质量的量纲为M,时间的量纲为T,则力学物理量Q的量纲$\dim Q=L^pM^qT^s$,或记作$[Q]$.

如速率$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$的量纲$\dim v=[v]=L^1T^{-1}$,力$\overrightarrow{F}=m\overrightarrow{a}$的量纲$\dim F=M^1L^1T^{-2}$.

量纲的应用:

(1)确定同一物理量的不同单位间的换算关系.

(2)确定方程中比例系数的量纲和单位.

如万有引力$F=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$,则引力常量$G=\dfrac{Fr^2}{m_1m_2}$,

其量纲$\dim G=M^1L^1T^{-2}\cdot L^2\cdot M^{-2}=L^3M^{-1}T^{-2}$,单位$\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

(3)判断计算结果的正确性.

齐次原则:只有量纲相同的物理量才能相加减.

(4)利用量纲建模.

考察单摆的运动周期T.猜想它可能与物体质量m、细绳长度l、重力加速度g有关.

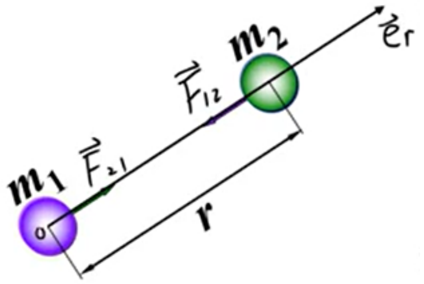
令$T=km^pl^qg^s$,其中k为常数,则$\dim T=M^pL^q(LT^{-2})^s=T^1$,

进而$\begin{cases}p=0\\ s=-\dfrac{1}{2}\\ l=\dfrac{1}{2}\end{cases}$,即$T=kl^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}=k\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

实际结果$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$,与量纲分析的结果只相差一个常数$k$.

2.3 常见的力

2.3.1 万有引力



以m_1指向m_2的方向为径向建立极轴,则$F_{12}=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$,其中引力常量$G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$,

　则$\overrightarrow{F_{12}}=-G\dfrac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$.

万有引力是一种非接触力.

重力:地球表面的物体受到的地球的引力,是地球对物体的万有引力的一个分力.

重力$\overrightarrow{P}=m\overrightarrow{g}$,大小:$P=mg$,方向竖直向下.

在地表附近,$mg=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$,则$g=\dfrac{Gm_E}{r_E^2}\approx9.80\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

自然界中存在四种相互作用,它们的力程和强度的比较:

　(强度以两质子相距$10^{-15}\ \mathrm{m}$时的相互作用为1)

种　类	相互作用粒子	力程/m	力的强度
引力作用	所有粒子、质点	∞	10^{-39}
电磁作用	带电粒子	∞	10^{-3}
弱相互作用	强子等大多数粒子	10^{-18}	10^{-12}
强相互作用	核子、介子等强子	10^{-15}	10^{-1}

电弱相互作用理论统一了弱相互作用和电磁相互作用,电弱相互作用、强相互作用与引力作用的大统一还未实现.

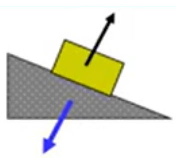
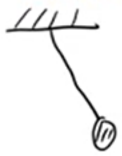
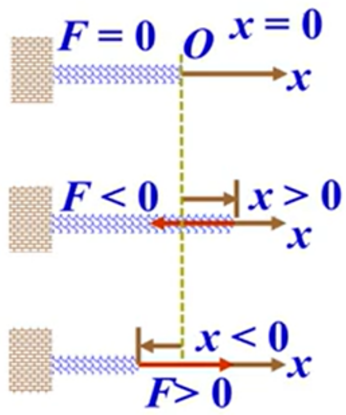
2.3.2 弹性力

形变:在外力作用下物体内两质点的相对位置发生变化.

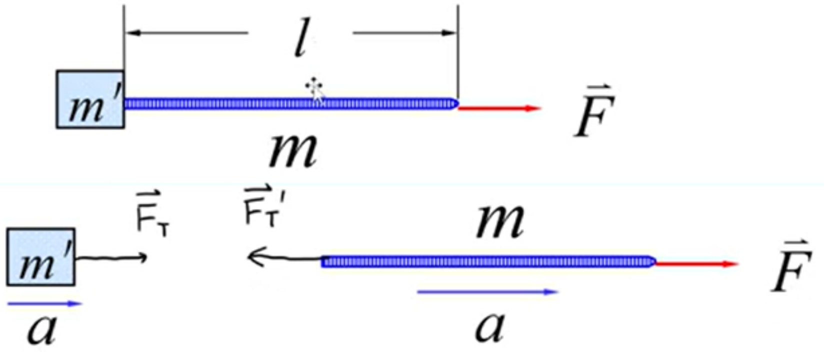
弹性形变:在外力作用下物体发生形变,撤去外力后物体能恢复原状.

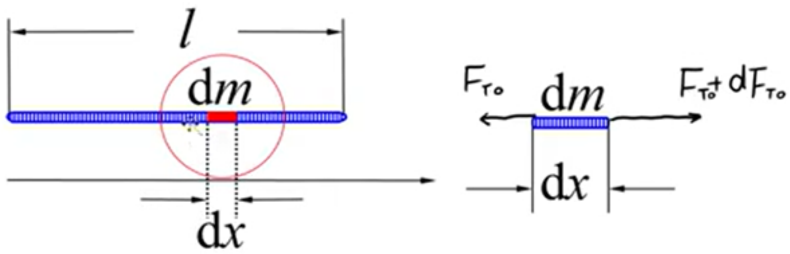
弹性力:作用在相互作用的物体间的,由物体的弹性形变产生的弹性恢复力,是一种接触力.

常见的弹性力:

正压力、支持力N	张力T(内部的弹性力)	弹簧的弹力(Hooke定律:$F=-k\Delta x$)
		

[**例2.3.1**] 质量为m、长为l的柔软细绳,一端系着放在光滑桌面上质量为m'的物体,在绳另一端施加力$\overrightarrow{F}$.设绳长不变,绳质量分布均匀.求:(1)绳作用在物体上的力;(2)绳任一点处的张力.





[**解**] (1) $F_T=m'a,F-F_T'=ma,F_T=F_T'\Rightarrow a=\dfrac{F}{m+m'},F_T=\dfrac{m'}{m+m'}F$. (连接体问题)

忽略绳重,即$m=0$时,$a=\dfrac{F}{m},F_T=F$,相当于外力$\overrightarrow{F}$直接作用在物体m'上.

考虑绳重时,$F>F_T$.

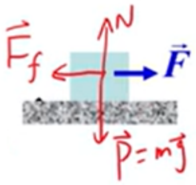
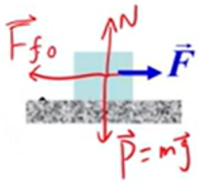
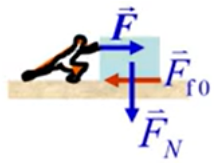
(2) 取质元$\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}l$,其中质量线密度$\lambda=\dfrac{m}{l}$.

$(F_{T0}+\mathrm{d}F_{T0})-F_{T0}=\mathrm{d}ma$,则$\mathrm{d}F_{T0}=\dfrac{m}{l}a\mathrm{d}x=\dfrac{m}{l}\dfrac{F}{m+m'}\mathrm{d}x$,

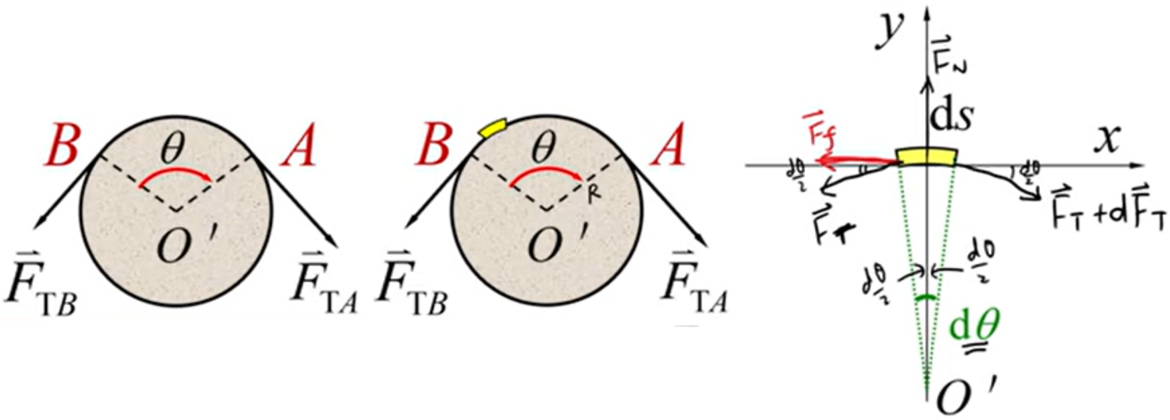
两边积分得:$\displaystyle\int_{F_{T0}}^{F}\mathrm{d}F_{T0}=\int_x^l\frac{mF}{m(m+m')}\mathrm{d}x$,则$F_{T0}=\left(m'+m\dfrac{x}{l}\right)\dfrac{F}{m+m'}$.

当$m'>>m$时,$F_{T0}=F$,且绳上的张力大小线性变化.

2.3.3 摩擦力

滑动摩擦力$F_f=\mu F_N$	**静摩擦力**$F_{f0}=F$	**最大静摩擦力**$F_{f0m}=\mu_0F_N$
		
摩擦力与相对运动方向相反	摩擦力与相对运动趋势方向相反	一般$\mu\approx\mu_0$

[**例2.3.2**] 如下图,绳索绕在圆柱上,绳绕圆柱的张角为θ,绳与圆柱间的静摩擦因数为μ.求绳处于滑动边缘时绳两端的张力F_{TA}和F_{TB}间的关系,忽略绳重.



[**解**] 不妨设$F_{TA}>F_{TB}$,则圆柱有顺时针转动的趋势,绳与圆柱的接触面的摩擦力的方向为接触点处的切线方向,指向逆时针.

$$-\overrightarrow{F_T}+\overrightarrow{F_T}+\mathrm{d}\overrightarrow{F_T}-\overrightarrow{F_f}+\overrightarrow{F_N}=m\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0},\text{则}\begin{cases}x\text{轴}:(F_T+\mathrm{d}F_T)\cos\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}-F_T\cos\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}-F_f=0\\ y\text{轴}:(F_T+\mathrm{d}F_T)\sin\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}+F_T\sin\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}=F_N\end{cases}.$$

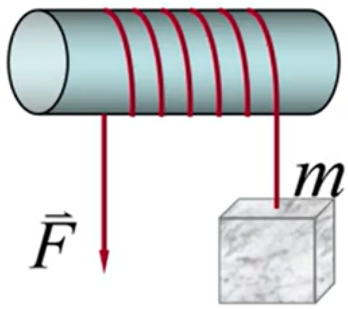
$\cos\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx1,\sin\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}$,则$\begin{cases}\mathrm{d}F_T=F_f=\mu F_N\\ F_T\mathrm{d}\theta+\mathrm{d}F_T\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}=F_N\end{cases}$,其中$\mathrm{d}F_T\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}$为二阶无穷小量,可忽略.

进而$\mathrm{d}F_T=\mu F_T\mathrm{d}\theta$,两边积分得$F_{TB}=F_{TA}\mathrm{e}^{-\mu\theta}$.

[**注**] $\mu=0.25$时:

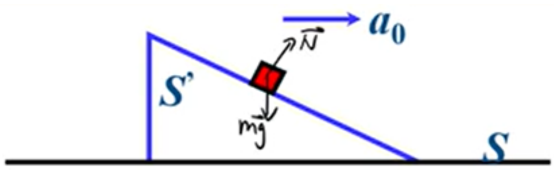
θ	π	2π	10π
$\dfrac{F_{TB}}{F_{TA}}$	0.46	0.21	0.00039

结论:缠得越多圈越省力.



2.4 非惯性系与惯性力

2.4.1 直线运动参考系中的惯性力



设S系为惯性系,非惯性系S'系相对于S系做加速度a_0的匀变速直线运动,则$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a'}+\overrightarrow{a_0}$.

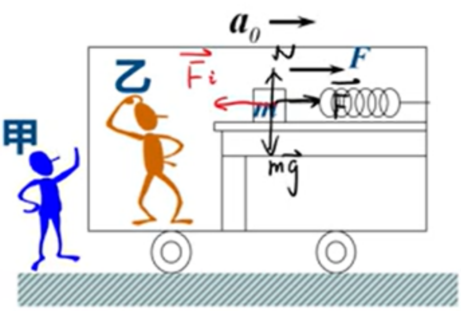
地S系:$\overrightarrow{N}+m\overrightarrow{g}=m\overrightarrow{a}=m\left(\overrightarrow{a'}+\overrightarrow{a_0}\right)$,斜面$S'$系:$\overrightarrow{N}+m\overrightarrow{g}\neq m\overrightarrow{a'}$.

因S与S'系的Newton运动定律有相同的形式,可将S系中RHS的$m\overrightarrow{a_0}$移到LHS,

则S'系$\overrightarrow{N}+m\overrightarrow{g}-m\overrightarrow{a_0}=m\overrightarrow{a'}$.

质点所受的惯性力的大小等于其质量与非惯性系整体相对于惯性系的加速度(牵连加速度)的乘积,方向与该加速度方向相反,即$\overrightarrow{F_i}=-m\overrightarrow{a_0}$.

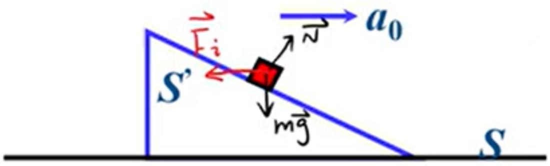
惯性力是参考系变速运动引起的附加力,本质上是物体惯性的体现.它不是物体间的相互作用,无施力物体,无反作用力,但有真实的作用效果.



甲(S系):$\overrightarrow{F}=m\overrightarrow{a}$,木块相对于$S$系匀变速

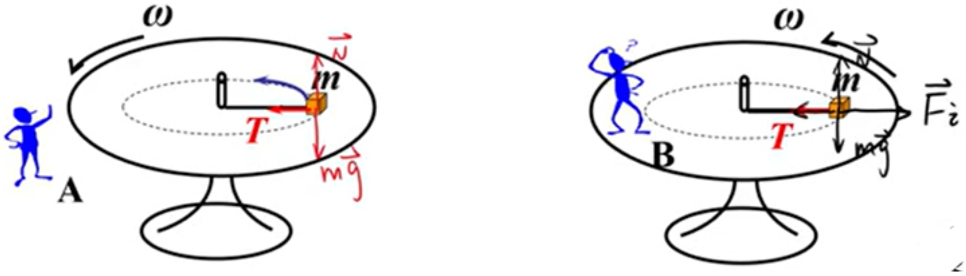
乙(S'系):$\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F_i}=m\overrightarrow{a'}=\overrightarrow{0}$,木块相对于$S'$系静止

[**例2.4.1**] 三棱柱以加速度a_0沿水平向右运动,其斜面光滑.设质量为m的物体恰能静止在斜面上,求物体对三棱柱的压力.



[**解**] S'系:$m\vec{g}+\vec{N}-m\vec{a_0}=m\vec{a'}=\vec{0}$,解出$\vec{N}$即可.

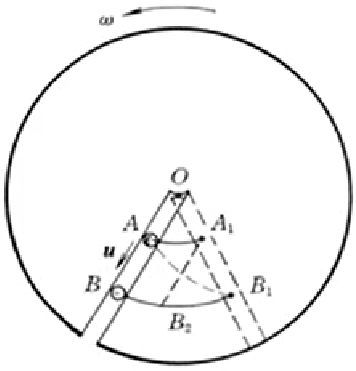
2.4.2 匀速转动参考系中的惯性力



观察者A(惯性系):$\vec{T}=m\vec{a}=m\vec{a_n}$,质点受绳子拉力提供向心力,做匀速圆周运动.

观察者B(非惯性系):$\vec{T}+\vec{F_i}=m\vec{a'}=\vec{0},\vec{F_i}=-m\vec{a_0}=-m\vec{a_n}$,质点受绳子拉力,但相对静止.

物体相对于匀速转动的参考系时,物体受惯性离心力和Coriolis力的作用.

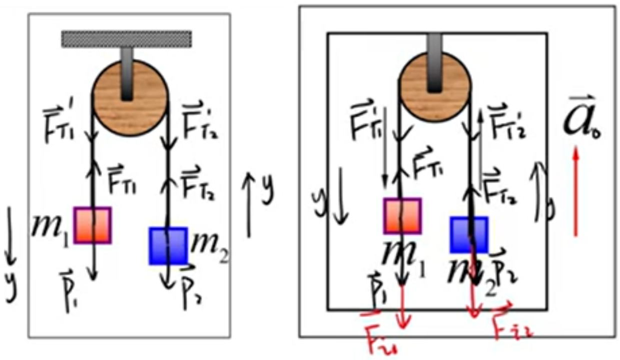


如上图,一带有径向光滑沟槽的圆盘以恒定角速度$\vec{\omega}$绕过盘心且垂直于盘面的轴O做定轴转动,处于沟槽中的质量为m的小球以速度$\vec{u}$沿沟槽相对于盘做匀速运动,则Coriolis力$\vec{F_c}=2m\vec{u}\times\vec{\omega}$.

2.5 Newton运动定律的应用

步骤:①选择研究对象,隔离物体;②受力分析;③建立合适的坐标系;④列方程,先列矢量式,再展开为标量式;⑤解方程;⑥结果讨论.

[**例2.5.1**] [**Atwood机**] (1)如左图,滑轮和绳子质量不计,忽略所有摩擦.设$m_1>m_2$,求重物释放后物体的加速度和绳的张力;(2)若将此装置置于电梯顶部,当电梯以加速度$\vec{a_0}$相对于地面向上运动时,求两物体相对电梯的加速度和绳的张力.



[解] (1)$\begin{cases} m_1: \overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{F_{T1}}=m_1\overrightarrow{a_1} \\ m_2: \overrightarrow{P_2}+\overrightarrow{F_{T2}}=m_2\overrightarrow{a_2} \end{cases}$,且$\overrightarrow{F_{T1}}=-\overrightarrow{F'_{T1}},\overrightarrow{F_{T2}}=-\overrightarrow{F'_{T2}}$.

即$\begin{cases} m_1: m_1g-F_{T1}=m_1a_1 \\ m_2: F_{T2}-m_2g=m_2a_2 \end{cases}$,且$F_{T1}=F_{T2},a_1=a_2=a$.

解得$a=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g,F_T=\dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$.这表明:物体做匀加速直线运动,且绳的拉力为恒力.

(2)$\begin{cases} m_1: \overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{F_{T1}}+\overrightarrow{F_{i1}}=m_1\overrightarrow{a'_1} \\ m_2: \overrightarrow{P_2}+\overrightarrow{F_{T2}}+\overrightarrow{F_{i2}}=m_2\overrightarrow{a'_2} \end{cases}$,且$\overrightarrow{F_{i1}}=-m_1\overrightarrow{a_0},\overrightarrow{F_{i2}}=-m_2\overrightarrow{a_0}$.

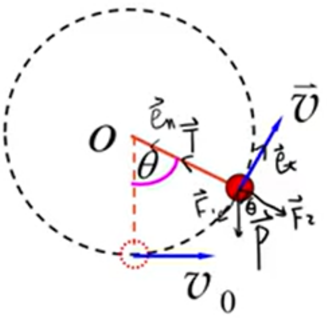
即$\begin{cases} m_1g-F_{T1}+m_1a_0=m_1a'_1 \\ F_{T2}-m_2g-m_2a_0=m_2a'_2 \end{cases}$,且$F_{T1}=F_{T2},a'_1=a'_2$,

其中a'是物体相对于绳的加速度,a是物体相对于地面的加速度.

而$\begin{cases} \overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{a_0}+\overrightarrow{a'_1} \\ \overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a_0}+\overrightarrow{a'_2} \end{cases}$,即$\begin{cases} a_1=a'_1-a_0 \\ a_2=a_0+a'_2 \end{cases}$,解出$a'_1,a'_2,F_T$即可.

[注] (2)中两物体相对于绳的加速度相同,但相对于地面的加速度不同.

[例2.5.2] 如图,长为l的轻绳一端系着质量为m的小球,另一端固定于O点.$t=0$时小球位于竖直平面内的最低位置,且有水平速度$\overrightarrow{v_0}$.求小球在任意位置的速率和绳的张力.



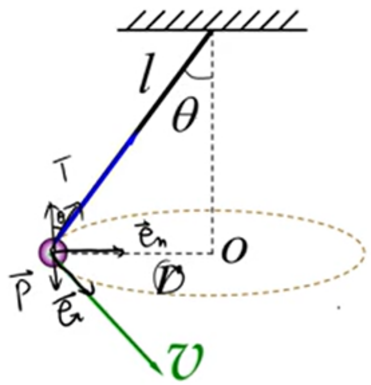
[解] $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{T}=m\overrightarrow{a}=m\left(a_t\overrightarrow{e_t}+a_n\overrightarrow{e_n}\right)$,即$\begin{cases} \overrightarrow{e_t}: -mg\sin\theta=ma_t \\ \overrightarrow{e_n}: T-mg\cos\theta=ma_n=m\dfrac{v^2}{l} \end{cases}$.

$-g\sin\theta=a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$,两边同乘$l$得:$\displaystyle\int_0^\theta -gl\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_{v_0}^v v\mathrm{d}v$,

解得$v=\sqrt{v_0^2+2gl(\cos\theta-1)}$,代入解得$T=mg\cos\theta+\dfrac{m}{l}\left[v_0^2+2gl(\cos\theta-1)\right]$.

[注] 当$\theta \in [0,\pi]$时,$\theta \uparrow, v \downarrow, T \downarrow$;$\theta \in [\pi, 2\pi]$时,$\theta \uparrow, v \uparrow, T \uparrow$.

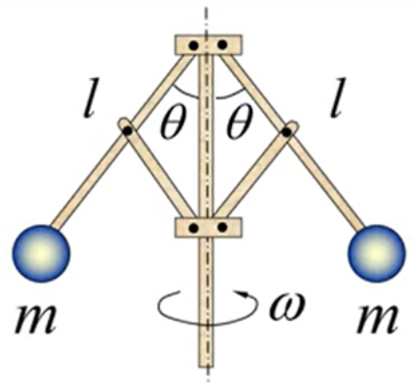
[例2.5.3] 如图,摆长为l的圆锥摆的一端固定在天花板上,另一端悬挂质量为m的小球,小球在水平面内绕通过圆心O的竖直轴做角速度为ω的匀速率圆周运动.忽略空气阻力,求绳与竖直方向所成角θ.



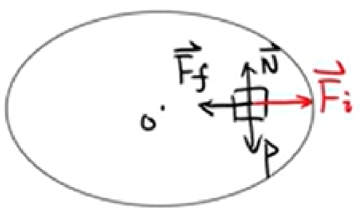
[解] $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{T}=m\overrightarrow{a}=m\left(a_t\overrightarrow{e_t}+a_n\overrightarrow{e_n}\right)$,即$\begin{cases}\text{竖直}: mg=T\cos\theta \\ \text{水平}: \begin{cases}\overrightarrow{e_t}: a_t=0 \\ \overrightarrow{e_n}: T\sin\theta=ma_n=m\dfrac{v^2}{r}\end{cases}\end{cases}$.

则$\dfrac{mg}{\cos\theta}\sin\theta=T\sin\theta=m\dfrac{v^2}{l\sin\theta}=m\omega^2 l\sin\theta \Rightarrow \omega^2=\dfrac{g}{l\cos\theta}\Rightarrow\theta=\arccos\dfrac{g}{\omega^2 l}$.

[注] $v\uparrow,\theta\uparrow$,利用此原理制成蒸汽机的调速器:



[例2.5.4] 一水平木制圆盘绕过其中心且垂直于盘面的轴匀速转动.在盘上离中心r处放一铁块.若铁块与木板间的静摩擦因数为μ,求圆盘转速至少为多少时铁块开始在圆盘上移动.

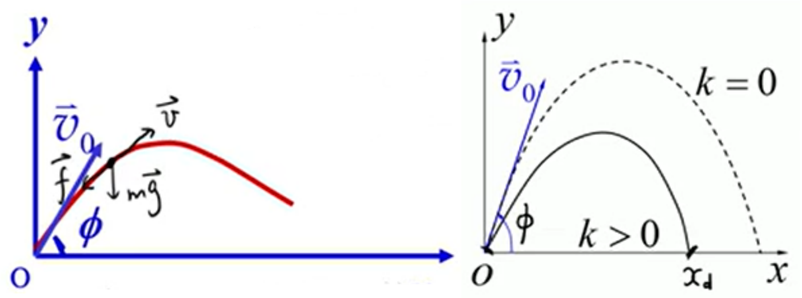


[解] 注意转动的圆盘是非惯性系.

$\overrightarrow{F_f}+\overrightarrow{F_i}=m\overrightarrow{a'}=\overrightarrow{0}$.其中$a'$为铁块相对于盘的加速度,$\overrightarrow{F_i}=-m\overrightarrow{a_0}=-m\overrightarrow{a_n}$.

则$\mu mg-m\omega^2 r=0$,解得$\omega=\sqrt{\dfrac{\mu g}{r}}$.

[**例2.5.5**] [**有空气阻力时的抛体问题**] 设质量为m的炮弹,以初速度v_0、与水平面成仰角θ射出.若空气阻力与速度成正比,即$\overrightarrow{f}=-k\overrightarrow{v}$,求运动轨迹方程$y(x)$.



[**解**] (1)无空气阻力时:设$v_{x0}=v_0\cos\theta, v_{y0}=v_0\sin\theta$.

$$-mg\overrightarrow{j}=m\overrightarrow{g}=m\overrightarrow{a}=m\left(a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j}\right),\text{其中}\begin{cases}a_x=0=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\\a_y=-g=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\end{cases},\begin{cases}v_x=v_{x0}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\v_y=v_{y0}-gt=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{cases}.$$

解得$\begin{cases}x=v_0t\\y=v_{y0}t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$,消去$t$所得的轨迹方程$y(x)$是抛物线.

(2)有空气阻力时:$m\overrightarrow{g}+\overrightarrow{f}=m\overrightarrow{a}=m\left(a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j}\right)$,即$\begin{cases}x:-kv_x=ma_x=m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\\y:-mg-kv_y=ma_y=m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\end{cases}$.

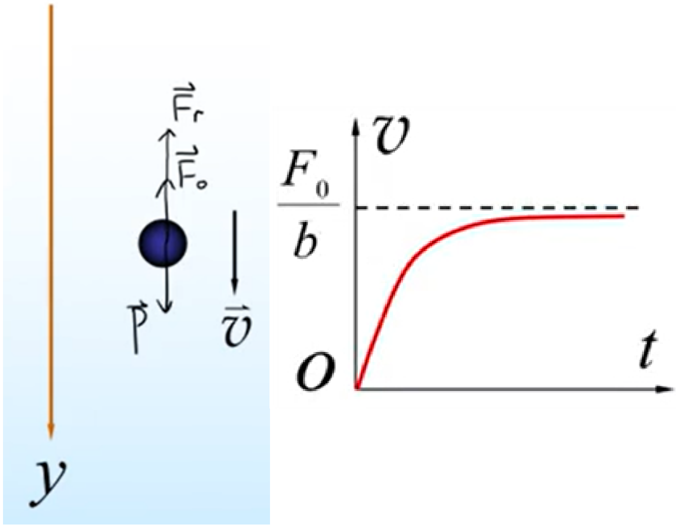
亦即$\begin{cases}x:-\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{v_x}\\y:-g-\dfrac{k}{m}v_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\end{cases}$.

两边积分得$\begin{cases}\displaystyle\int_{v_{x0}}^{v_x}\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x}=\int_0^t-\frac{k}{m}\mathrm{d}t\\\displaystyle\int_{v_{y0}}^{v_y}\frac{k\mathrm{d}v_y}{mg+kv_y}=\int_0^t-\frac{k}{m}\mathrm{d}t\end{cases}$,解得$\begin{cases}v_x=(v_0\cos\theta)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\\v_y=\left(v_0\sin\theta+\dfrac{m}{k}g\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-\dfrac{m}{k}g\end{cases}$.

进而$\begin{cases}x=\dfrac{mv_0\cos\theta}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)\\y=\left(\dfrac{mv_0\sin\theta}{k}+\dfrac{m^2g}{k}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)-\dfrac{mg}{k}t\end{cases}$.

消去t得轨迹方程$y=\left(\tan\theta+\dfrac{mg}{kv_0\cos\theta}\right)x+\dfrac{m^2g}{k^2}\ln\left(1-\dfrac{kx}{mv_0\cos\theta}\right)$.

[**例2.5.6**] 一质量为m、半径为r的球体在水中静止释放沉入水底.已知阻力$F_r=-6\pi r\eta v$,其中η为粘滞系数.求$v(t)$.



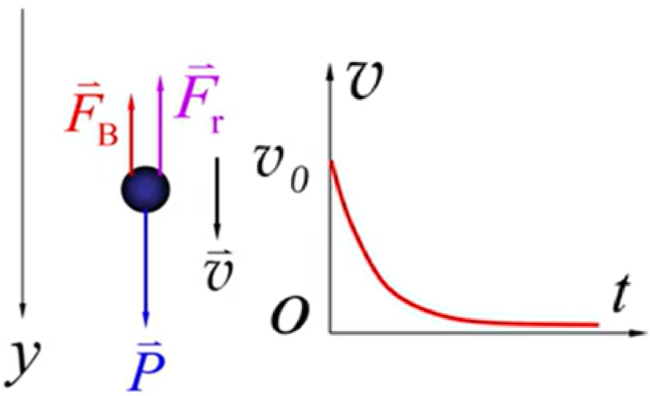
[解] 令$b=6\pi r\eta$,则$F_r=-bv$.因重力与浮力的合力是恒力,令$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{P}+\overrightarrow{F_0}$.

$\overrightarrow{P}+\overrightarrow{F_0}+\overrightarrow{F_r}=m\overrightarrow{a}$,即$\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F_r}=m\overrightarrow{a}$,则$F-bv=ma=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,

进而$-b\left(v-\dfrac{F}{b}\right)=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,两边积分得$\displaystyle\int_0^t-\frac{b}{m}\mathrm{d}t=\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{v-\frac{F}{b}}$,解得$v=\dfrac{F}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}\right)$.

$t\to\infty$时,极限速度$v_L\to\dfrac{F}{b}$.而$t=\dfrac{3m}{b}$时,$v\approx v_L(1-0.05)=0.95v_L$,一般认为$t\geq\dfrac{3m}{b}$时达到极限速度.

[注] 如下图,若球在水面上有竖直向下的速率v_0,且在水中$F_B=P$,则球的在水中的合外力为阻力$F_r=-bv$.



$\overrightarrow{F_r}=m\overrightarrow{a}$,即$-bv=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,两边积分得$\displaystyle\int_0^t-\frac{b}{m}\mathrm{d}t=\int_{v_0}^v\frac{\mathrm{d}v}{v}$,解得$v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$,球做变减速直线运动.

[例2.5.7] 设质量为$0.5\ \mathrm{kg}$的质点受力$\overrightarrow{F}=t\overrightarrow{i}\ (\mathrm{SI})$的作用,且$t=0$时该质点以$\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{j}\ (\mathrm{m/s})$的速度通过坐标原点.求质点在任意时刻的位矢.

[解] $\overrightarrow{F}=t\overrightarrow{i}=m\overrightarrow{a}\Rightarrow 4t\overrightarrow{i}=\overrightarrow{a}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{j}$,则$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=4t\\\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=0\end{cases}$.

结合初始条件$t=0$时,$x_0=y_0=0$,解得$\begin{cases}v_x=v_{x0}+2t^2=2t^2=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\v_y=v_{y0}=2=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{cases}$,

解得$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}t^2 \\ y = 2t \end{cases}$,故位矢$\overrightarrow{r} = \dfrac{2}{3}t^2\overrightarrow{i} + 2t\overrightarrow{j}$.