第3章 动量与能量

在线直播课

2022-3-25

$\vec{v}$; $\vec{p}$; E_k

力 → 时间 : 动量 $\quad \vec{p} = m\vec{v} \quad \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

$$\begin{cases} \vec{F}\,dt = d\vec{I} = d\vec{p} = d(m\vec{v}) = d\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) \\ \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \sum_i m_i \vec{v}_i - \sum_i m_i \vec{v}_{i0} \end{cases}$$

$\vec{F} = 0$, $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i =$ 恒矢

力 → 空间 : 动能 $\quad E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$\begin{cases} \vec{F}\cdot d\vec{r} = dW = dE_k = \frac{1}{2} d(mv^2) \\ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = W = \Delta E_k = E_k - E_{k0} \end{cases}$$

动能 $W^{ex}+W^{in}=E_k-E_{k0}$

$$W^{ex}+W_c^{in}+W_{nc}^{in}=E_k-E_{k0}$$

功能 $W^{ex}+W_{nc}^{in}=E-E_0$

$W^{ex}=0$, $W_{nc}^{in}=0$, $E=$常量

W^{in}

W_c^{in} W_{nc}^{in}

$$W_c^{in}=-(E_p-E_{p0})$$

$$E=E_k+E_p$$

势能：

$$E_p=-G\frac{m_1m_2}{r}$$

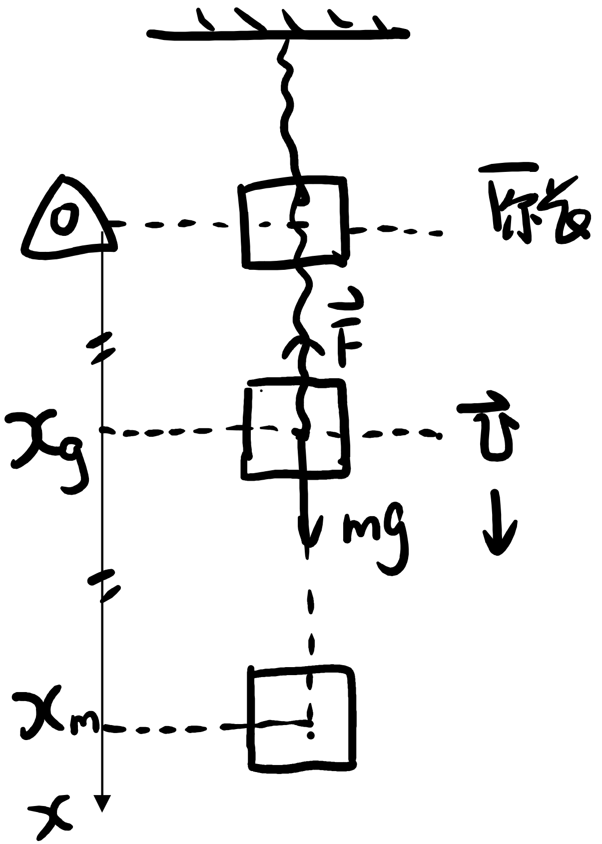
$$E_p=\frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p=mgz$$

一弹簧，原长为 l_0，劲度系数为 k，上端固定，下端挂一质量为 m 的物体，先用手托住，使弹簧不伸长。

①如将物体托住慢慢放下，达静止（平衡位置）时，弹簧的最大伸长和弹性力是多少？

②如将物体突然放手，物体到达最低位置时，弹簧的伸长和弹性力各是多少？物体经过平衡位置时的速度是多少？



x_g: $mg = F = kx_g$, $x_g = \frac{mg}{k}$

$$E_0 = \overset{E_k}{0} + \overset{E_{pg}}{0} + \overset{E_{pk}}{0}$$

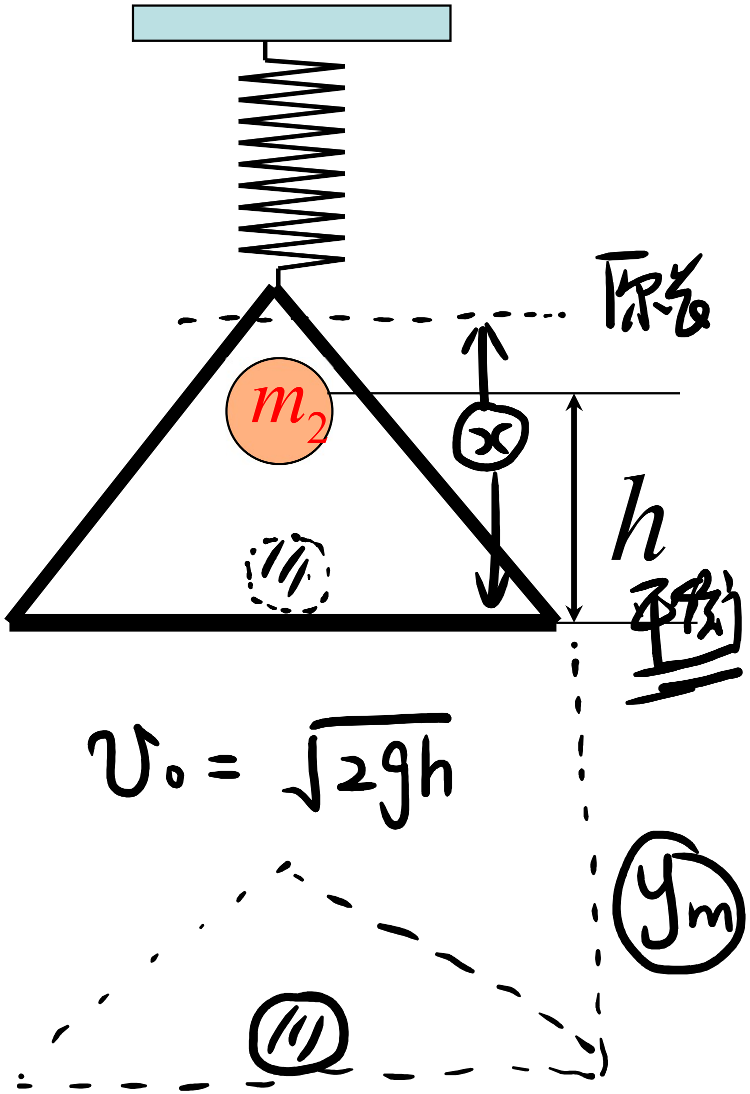
x_m: $E_m = 0 + (-mgx_m) + \frac{1}{2}kx_m^2$

$$x_m = \frac{2mg}{k}$$

$$E_g = \frac{1}{2}mv^2 - mgx_g + \frac{1}{2}kx_g^2$$

$$v = ?$$

例题 (动量与能量结合问题) 如图,框架的质量m1=0.2kg, 挂到弹簧上，使弹簧伸长x=0.1m,另一小木块质量m2= m1 ,由距离框底h=0.3m处自由下落并粘在框底上,试求框架向下移动的最大距离y_m?



$v_0 = \sqrt{2gh}$

碰：动量守恒

$$m_2 v_0 = (m_1+m_2) v, \quad v = \frac{v_0}{2}$$

落：机械能守恒 $\quad mg = kx$

$$E_0 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 + 0 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\|$$

$$E_m = 0 - (m_1+m_2) g x_m + \frac{1}{2}k(x+y_m)^2$$

$y_m = ?$

质量为m的物体，由地面以初速度v_0竖直向上发射，物体受到的空气阻力为$F=-kv$，求物体上升的最大高度。$y(v)$

法一：

$$-mg-kv=ma=m\frac{dv}{dt}$$

$$-mg-kv=m\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}$$

$$-mg-kv=mv\frac{dv}{dy}$$

$$\int_0^y dy=\int_{v_0}^{v}-\frac{mv}{mg+kv}dv$$

$$y=?$$

法二：

$$W^{ex}+W^{in}_{nc}=E-E_0$$

$$dW^{in}_{nc}=dE$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=-kv\,dy$$

$$dE=d\left(\frac{1}{2}mv^2+mgy\right)$$

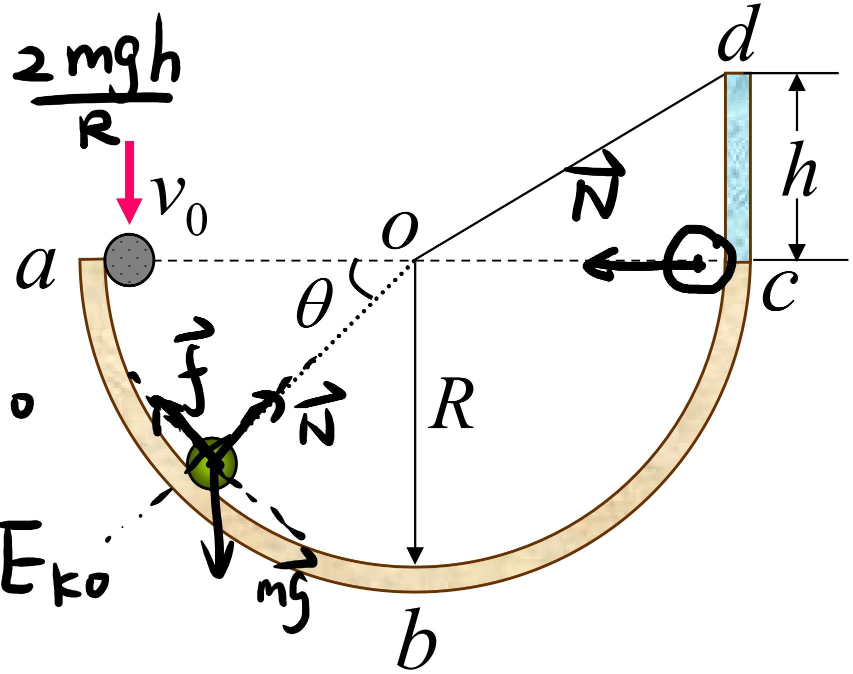
$$=mv\,dv+mg\,dy$$

$$-kv\,dy=mv\,dv+mg\,dy$$

$$dy=-\frac{mv}{mg+kv}dv$$

例：质量为m的质点以初速度v_0自a点沿图示的轨道内壁运动，其中abc段为半圆弧，cd段无摩擦。若质点最终能到达d点（$h < v_0^2/2g$），求：（1）在c点时质点对圆弧内壁所施的正压力；（2）用做功定义求半圆弧内壁摩擦力对质点所做的总功。

(1) $v_c = \sqrt{2gh}$ ， $N = m\dfrac{v_c^2}{R} = \dfrac{2mgh}{R}$

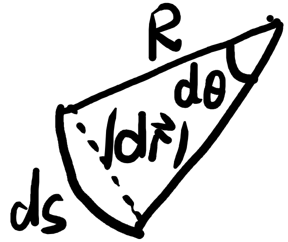


(2) $W = W^{ex} + W^{in}_{nc} = E - E_0$

$= W^{ex} + W^{in} = E_k - E_{k0}$

$$\vec{f} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_t: & mg\cos\theta - f = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \\ \vec{e}_n: & N - mg\sin\theta = ma_n = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$



$$|d\vec{r}| \doteq ds = R\,d\theta$$

$$f = mg\cos\theta - m\frac{dv}{dt}$$

$$dW = \vec{f}\cdot d\vec{r} = f\,R\,d\theta = \left(mg\cos\theta - m\frac{dv}{dt}\right)R\,d\theta$$

$$= mgR\cos\theta\,d\theta - mR\frac{dv}{dt}\,d\theta$$

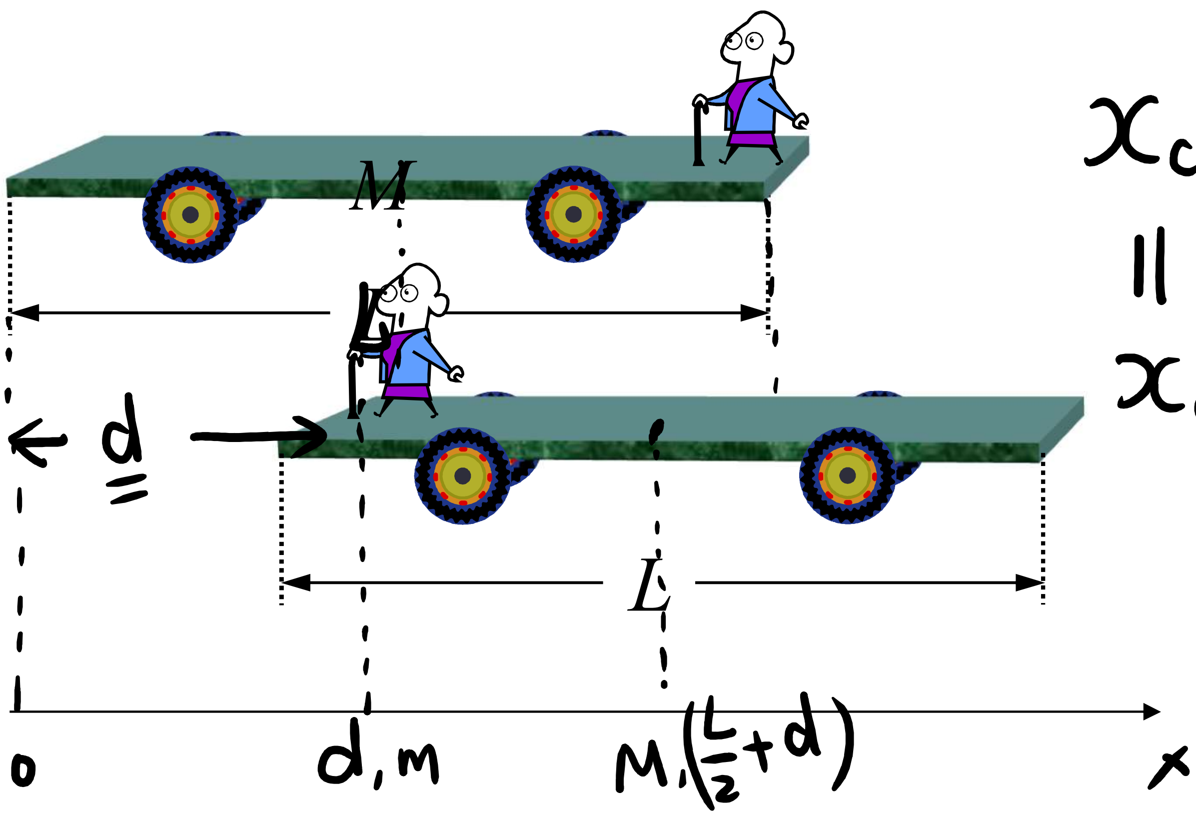
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$W = \int dW = \int_0^{\pi} mgR\cos\theta\,d\theta - \int_{v_0}^{v_c} mv\,dv$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}mv_c^2}} - \underline{\underline{\frac{1}{2}mv_0^2}}$$

例：光滑地面上，一质量为M长度L的小车端点站有一质量为m的人。开始两者静止，求此时人从车的一端走到另一端时人和车各自对地移动的距离。

质心：$\vec{r}_c$　　$\vec{F}^{ex}=0$，$\vec{v}_c=$恒矢

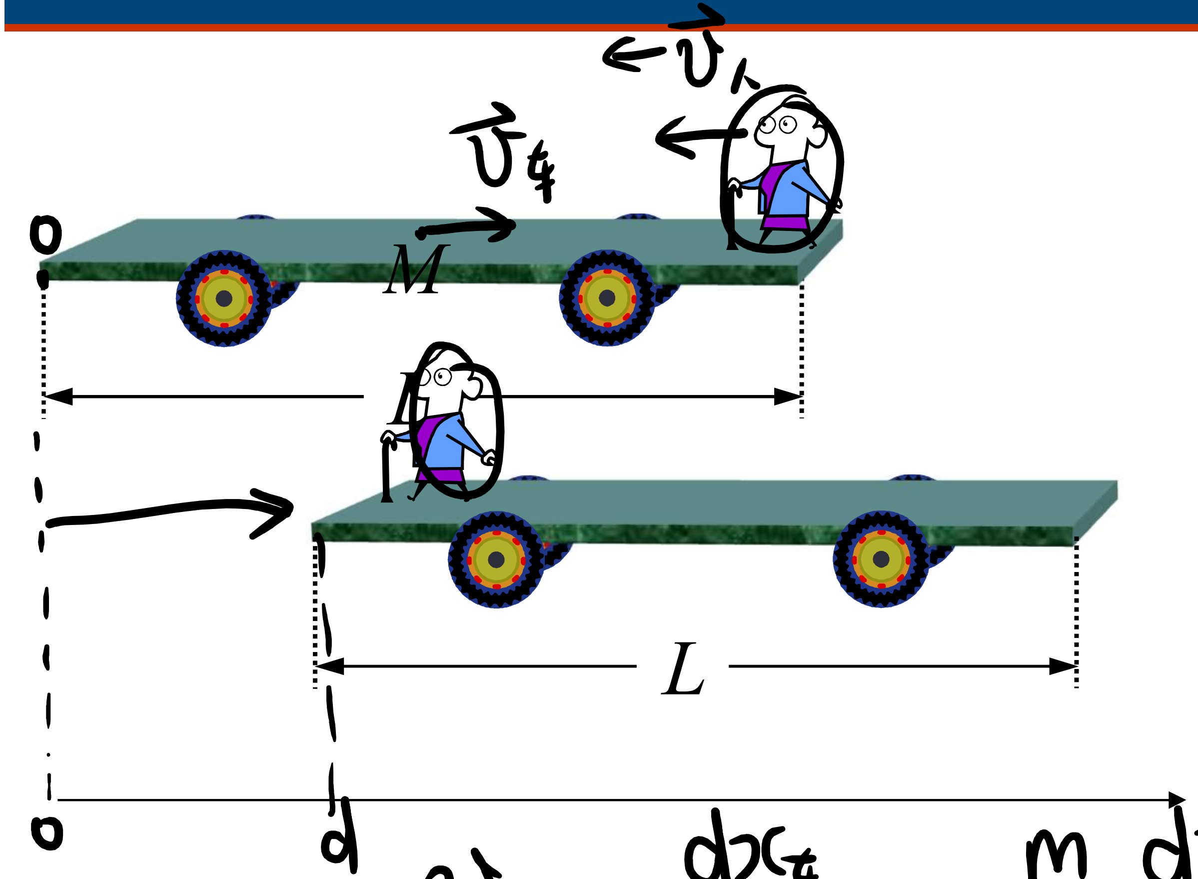


$$x_c=\frac{mL+M\frac{L}{2}}{M+m}$$

$$\parallel$$

$$x_c'=\frac{md+M\left(\frac{L}{2}+d\right)}{M+m}$$

$$d=\frac{mL}{M+m}$$



$$\vec{F}^{ex} = 0, \quad \vec{P} = \text{恒}$$

$$0 = M\vec{v}_{\text{车}} + m\vec{v}_{\text{人}}$$

$$0 = Mv_{\text{车}} - mv_{\text{人}}$$

$$v_{\text{车}} = \frac{m}{M} v_{\text{人}}$$

$$v_{\text{车}} = \frac{dx_{\text{车}}}{dt} = \frac{m}{M}\frac{dx_{\text{人}}}{dt}$$

$$\int_0^d dx_{\text{车}} = \int_L^d \frac{m}{M}\, dx_{\text{人}}$$

$$d = ?$$