随机过程期末速通

5. 更新过程

5.1 更新过程

[**定义5.1.1**] 设$\{X_n;n=1,2,\cdots\}$是一列独立同分布的非负随机变量, 其分布函数$F(x)$满足$F(0)=P\{X_n=0\}\neq 1$. 设$\mu=E(X_n)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}F(x)$, 则$0<\mu\leq+\infty$. 设$T_n=\sum_{i=1}^n X_i\ \ (n\geq 1)$, 规定$T(0)=0$, 其中$X_n$是第$(n-1)$次和第$n$次更新相距的时间, T_n是第n次更新发生的时刻. 称$N(t)=\sup\{n:T_n\leq t\}$定义的计数过程为**更新过程**, 其中$N(t)$是t时刻之前的总更新次数. 更新过程中事件发生一次称为一次**更新**,

[**注1**] ①若$F(0)=1$, 则$\mu=0$, 即一个零件永远不会坏.

②若$\mu=+\infty$, 则零件换一个坏一个.

[**注2**] 更新过程是齐次Poisson过程的第三定义的推广, 即要求$X_1,X_2,\cdots$独立同分布, 但不要求它们的分布是指数分布. 齐次Poisson过程是更新过程的特例.

[**注3**] 更新过程只在更新时有Markov性.

[**注4**] 更新过程分为如下两类:

①**普通更新过程**: 从换零件起开始计时.

②**延迟更新过程**: 第一段为零件当前剩余的寿命, 与后面的段分布不同.

Poisson过程不考虑何时开始计时的原因: 指数分布的无记忆性.

[**定理5.1.1**] 对更新过程$N(t)=\sup\{n:T_n\leq t\}$, 在有限时间$[0,t]$内发生无穷次更新(称该更新过程**爆炸**)的概率为0, 即无穷多次更新只可能在无限长的时间内发生, 进而在有限时间内只能发生有限次更新, 即$N(t)<+\infty$的概率为1.

[**定理5.1.2**] 设更新过程$N(t)=\sup\{n:T_n\leq t\}$, 其中$T_n=\sum_{i=1}^n X_i\ \ (n\geq 1)$, 规定$T(0)=0$. 设$X_1,X_2,\cdots$的分布函数为$F(x)$, T_n的分布为$F_n(x)$, 则$F_n(x)$是$F(x)$的n重卷积, 进而$N(t)$的分布$P\{N(t)=n\}=F_n(t)-F_{n+1}(t)$.

[**证1**] $P\{N(t)=n\}=P\{T_n\leq t<T_{n+1}\}=P\{T_n\leq t,T_{n+1}>t\}$

$$=P\{T_n\leq t\}-P\{T_n\leq t,T_{n+1}\leq t\}\ \ *\ P(AB)=P(A)-P\left(A\overline{B}\right).$$

$$=P\{T_n\leq t\}-P\{T_{n+1}\leq t\}=F_n(t)-F_{n+1}(t).$$

[**证2**] $P\{N(t)=n\}=P\{N(t)\geq n\}-P\{N(t)\geq n+1\}$

$$=P\{T_n\leq t\}-P\{T_{n+1}\leq t\}=F_n(t)-F_{n+1}(t).$$