《概率论与数理统计》期末速通

7. 参数估计

7.1 点估计与矩估计

7.1.1 点估计

[**例7.1.1**] 某制造厂一天中着火的次数 $X\sim\pi(\lambda)\ \ (\lambda>0)$, 其中参数 λ 未知. 用如下样本值估计 λ :

着火次数 k	0	1	2	3	4	5	6	
着火 k 次的天数	75	90	54	22	6	2	1	$\sum=250$

[**解**] 因 $X\sim\pi(\lambda)$, 则 $E(X)=\lambda$.

因 $E\left(\overline{X}\right)=E(X)=\lambda$ 且 $\overline{X}\xrightarrow{P}E(X)=\lambda$, 则可用 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 估计 λ .

$\overline{x}=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^6 k\cdot n_k}{\sum\limits_{k=0}^6 n_k}=1.22$, 即 λ 的估计值为 1.22 .

[**定义7.1.1**] 点估计问题的提法: 设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ (多于一个未知参数时可类似地讨论)的形式已知, 其中 θ 为待估参数. $X_1,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本, $x_1,\cdots,x_n$ 是一个样本值. 点估计问题需构造一个适当的统计量 $\hat\theta(X_1,\cdots,X_n)$, 用其观察值 $\hat\theta(x_1,\cdots,x_n)$ 作为 θ 的近似值. 称 $\hat\theta(X_1,\cdots,X_n)$ 为 θ 的**估计量**, 称 $\hat\theta(x_1,\cdots,x_n)$ 为 θ 的**估计值**. 估计量和估计值统称**估计**, 都简记为 $\hat\theta$. 因估计量是样本的函数, 则对不同的样本值, θ 的估计值一般不同.

7.1.2 矩估计

[**定义7.1.2**] [**矩估计的步骤**] 设总体 X 的分布中有 m 个未知参数 $\theta_1,\cdots,\theta_m$.

(1) 求总体的各阶矩 $E(X^k)\ \ (k=1,\cdots,m)$.

(2) 令样本的各阶矩等于总体的各阶矩, 得到 m 个方程 $\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i=E(X)\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2=E(X^2)\\ \cdots\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^m=E(X^m)\end{cases}$.

(3) 上述方程的解 $\hat\theta_k(X_1,\cdots,X_m)$ 为 θ_k 的**矩估计量**, 简称**矩估计**.

[**注**] 矩估计的理论依据: 样本的 k 阶矩依概率收敛于总体的 k 阶矩, 即 $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^k\xrightarrow{P}E(X^k)\ \ (k=1,2,\cdots)$, 故 $n\to+\infty$ 时, 可用 A_k 近似估计 $E(X^k)$.

常用特例:

① 一阶矩 $A_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}\xrightarrow{P}E(X)$.

② 二阶矩 $A_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E(X^2)$.

[例7.1.2] 设总体 X 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布, 其中 a,b 未知. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的样本, 求 a,b 的矩估计.

[解] 因 $X\sim U([a,b])$, 则 $E(X)=\dfrac{a+b}{2},D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$,

进而 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

令 $\begin{cases}A_1=\overline{X}=E(X)\\A_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)\end{cases}$, 即 $\begin{cases}\overline{X}=\dfrac{a+b}{2} & ①\\\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 & ②\end{cases}$.

将①代入②得: $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=\overline{X}^2+\dfrac{(b-a)^2}{12}$,

则 $\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$, 解得: $b-a=\sqrt{\dfrac{12}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$ ③ .

①和③联立, 解得: $\begin{cases}\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\\\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\end{cases}$.

[定理7.1.1] 设总体 X 的均值 μ 和方差 $\sigma^2\ \ (\sigma^2>0)$ 都存在且未知. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的样本, 则矩估计 $\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\\\widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\end{cases}$.

[证] $E(X)=\mu,E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$.

令 $\begin{cases}A_1=\overline{X}=\mu\\A_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=\sigma^2+\mu^2\end{cases}$, 即 $\begin{cases}\mu=\overline{X}\\\sigma^2+\mu^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$,

解得: $\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X}\\\widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\end{cases}$.

[注] 本定理表明: 总体的均值和方差的矩估计的表达式都相同, 与总体分布无关.

[**例7.1.3**] 随机取 8 个环, 测得它们的直径分别为 74.001 , 74.005 , 74.003 , 74.001 , 74.000 , 73.998 , 74.006 , 74.002 . 求总体均值 μ 和方差 σ^2 的矩估计值.

[**解**] 由**定理7.1.1**: 矩估计量 $\begin{cases} \hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i \\ \widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \end{cases}$,

则矩估计值: $\begin{cases} \hat{\mu}=\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{i=1}^{8}x_i=74.002 \\ \widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2=\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{i=1}^{8}\left(x_i-\hat{\mu}\right)^2=6\times 10^{-6} \end{cases}$.

7.2 最大似然估计

[**定义7.2.1**] 设总体 X 是分布律已知的离散型随机变量, 其分布含 m 个未知参数 $\theta_1,\cdots,\theta_m$. $X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的一个样本, $x_1,\cdots,x_n$ 是对应的已知样本值. 显然 $X_1,\cdots,X_n$ 取得观察值 $x_1,\cdots,x_n$ 的概率 $P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}$ 为 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}$, 该值随 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 的值的变化而变化, 是关于 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 的函数, 称其为样本的**似然函数**. 若已取得一组样本值 $x_1,\cdots,x_n$, 由实际推断原理: 取得这一组样本值的概率较大, 则可固定样本观察值 $x_1,\cdots,x_n$, 取 $s.t.$ 似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 取得最大值的参数值 $\hat{\theta}_i(x_1,\cdots,x_n)\ \ (i=1,\cdots,m)$, 称其为 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 的**最大似然估计值**, 相应的统计量 $\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n)\ \ (i=1,\cdots,m)$ 称为参数的**最大似然估计量**.

[**定义7.2.2**] 设总体 X 是概率密度已知的连续型随机变量, 其概率密度含 m 个未知参数 $\theta_1,\cdots,\theta_m$. $X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的一个样本, $x_1,\cdots,x_n$ 是对应的已知的样本值, 则 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合概率密度为 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)$. 随机点 $(X_1,\cdots,X_n)$ 落在点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的邻域(边长分别为 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 的 n 维长方体)内的概率近似为 $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)\mathrm{d}x_i$, 该值随 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 的值的变化而变化. 注意到 $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)\mathrm{d}x_i=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i$, 其中 $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i$ 不随 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 的值的变化而变化, 则只需考察函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)$, 称其为样本的**似然函数**. 若已取得一组样本值 $x_1,\cdots,x_n$, 由实际推断原理: 取得这一组样本值的概率较大, 则可固定样本观察值 $x_1,\cdots,x_n$, 取 $s.t.$ 似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 取得最大值的参数值 $\hat{\theta}_i(x_1,\cdots,x_n)\ \ (i=1,\cdots,m)$, 称其为 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 的**最大似然估计值**, 相应的统计量 $\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n)\ \ (i=1,\cdots,m)$ 称为参数的**最大似然估计量**.

[**注**] 求最大似然估计的步骤:

(1) 写出似然函数:

① 若总体为离散型, 则似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}$.

② 若总体为连续型, 则似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)$.

(2) 对似然函数两边取对数, 得到**对数似然函数**:

① 若总体为离散型, 则 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\sum\limits_{i=1}^n \ln P\{X=x_i\}$.

② 若总体为连续型, 则 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=\sum\limits_{i=1}^n \ln f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)$.

(3) 对数似然函数关于各未知参数求偏导, 得对数似然方程: $\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=0\\ \cdots\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_m}\ln L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)=0\end{cases}$.

(4) 解对数似然方程, 若有解 $\begin{cases}\theta_1=\theta_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \cdots\\ \theta_m=\theta_m(x_1,\cdots,x_n)\end{cases}$, 则最大似然估计量 $\begin{cases}\hat\theta_1=\theta_1(X_1,\cdots,X_n)\\ \cdots\\ \hat\theta_m=\theta_m(X_1,\cdots,X_n)\end{cases}$.

(5) 若对数似然方程无解, 则用单调性直接观察 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 取得最大值时的 $\theta_i(x_1,\cdots,x_n)\ \ (i=1,\cdots,m)$.

[**例7.2.1**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim b(1,p)$ 的一个样本. 求参数 p 的最大似然估计量.

[**解**] X 的分布律 $P\{X=x\}=p^x\cdot(1-p)^{1-x}\ \ (x=0,1)$.

设 $x_1,\cdots,x_n$ 是对应于样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的一个样本值.

因 $X_1,\cdots,X_n$ 独立且与 X 同分布, 则分布律 $P\{X_i=x_i\}=p^{x_i}\cdot(1-p)^{1-x_i}\ \ (x_i=0,1)$.

似然函数 $L(p)=\prod\limits_{i=1}^n P\{X_i=x_i\}=\prod\limits_{i=1}^n p^{\sum_{i=1}^n x_i}\cdot(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$.

对数似然函数 $L(p)=\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)\ln p+\left(n-\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)\ln(1-p)$.

对数似然方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L(p)=\dfrac{1}{p}\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)-\dfrac{1}{1-p}\left(n-\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)=0$.

解得: 最大似然估计值 $\hat p=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i=\overline{x}$, 则 p 的最大似然估计量为 $\hat p=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i=\overline{X}$.

[**注**] 0-1分布的最大似然估计量与矩估计量相同.

[**例7.2.2**] 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本值. 求未知参数 μ,σ^2 的最大似然估计量.

[**解**] X 的概率密度 $f(x;\mu,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$,

则 $X_i\ \ (1\le i\le n)$ 的概率密度 $f(x_i;\mu,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right]$.

似然函数 $L(\mu,\sigma^2)=\prod\limits_{i=1}^n f(x_i)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right]$.

对数似然函数 $\ln L(\mu,\sigma^2)=-\dfrac{n}{2}\ln(2\pi)-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^n(x_i-\mu)^2$, 注意保留 σ^2 .

对数似然方程 $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \mu}\ln L(\mu,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sigma^2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i-n\mu\right)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2)=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2=0 \end{cases}$,

解得: 最大似然估计值 $\begin{cases} \hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i=\overline{x} \\ \widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2 \end{cases}$, 则最大似然估计量 $\begin{cases} \hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i=\overline{X} \\ \widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n \left(X_i-\overline{X}\right)^2 \end{cases}$.

[**注**] 正态分布的最大似然估计量与矩估计量相同.

[**例7.2.3**] 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是取自总体 $X\sim U(a,b)$ 的一组样本值. 求未知参数 a,b 的最大似然估计量.

[**解**] X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b \\ 0, otherwise \end{cases}$,

则 $X_i\ \ (i=1,\cdots,n)$ 的概率密度 $f(x_i)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a\le x_i\le b \\ 0, otherwise \end{cases}$.

似然函数 $L(a,b)=\displaystyle\prod_{i=1}^n f(x_i)=\begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, a\le x_1,\cdots,x_n\le b \\ 0, otherwise \end{cases}$.

$a\le x_i\le b\ \ (i=1,\cdots,n)$ 时, 对数似然函数 $\ln L(a,b)=-n\cdot\ln(b-a)$.

对数似然方程 $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\ln L(a,b)=\dfrac{n}{b-a}=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\ln L(a,b)=-\dfrac{n}{b-a}=0 \end{cases}$, 该方程无解.

因 $L(a,b)=\dfrac{1}{(b-a)^n}$, 则 $(b-a)$ 越小, $L(a,b)$ 越大, 而 b 越小且 a 越大时 $(b-a)$ 越小,

因 $a\le\min\{x_1,\cdots,x_n\}, b\ge\max\{x_1,\cdots,x_n\}$,

则 $a=\min\{x_1,\cdots,x_n\}, b=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$ 时 $L(a,b)$ 最大,

即最大似然估计值 $\begin{cases} \hat{a}=\min\{x_1,\cdots,x_n\} \\ \hat{b}=\max\{x_1,\cdots,x_n\} \end{cases}$, 则最大似然估计量 $\begin{cases} \hat{a}=\min\{X_1,\cdots,X_n\} \\ \hat{b}=\max\{X_1,\cdots,X_n\} \end{cases}$.

[**例7.2.4**] 设总体 X 的分布律如下, 其中 $\theta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 为未知参数, 样本值为 $3,1,3,0,3,1,2,3$:

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

求: (1) θ 的矩估计值; (2) θ 的最大似然估计值.

[**解**]

(1) 一阶矩 $E(X) = 0 \cdot \theta^2 + 1 \cdot 2\theta(1-\theta) + 2 \cdot \theta^2 + 3 \cdot (1-2\theta) = 3 - 4\theta$.

令总体均值均值 $\overline{X} = E(X) = 3 - 4\theta$, 解得: 矩估计量 $\hat{\theta} = \dfrac{3 - \overline{X}}{4}$.

因样本均值 $\overline{x} = \dfrac{3+1+3+0+3+1+2+3}{8} = 2$, 则矩估计值 $\hat{\theta} = \dfrac{3-\overline{x}}{4} = \dfrac{1}{4}$.

(2) 似然函数 $L(\theta) = P\{X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 3, X_4 = 0, X_5 = 3, X_6 = 1, X_7 = 2, X_8 = 3\}$

$= 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$.

对数似然函数 $\ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln\theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta)$.

对数似然方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta) = \dfrac{6}{\theta} - \dfrac{2}{1-\theta} - \dfrac{8}{1-2\theta} = \dfrac{24\theta^2 - 28\theta + 6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)} = 0$,

解得: $\theta_1 = \dfrac{7-\sqrt{13}}{12}, \theta_2 = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} > \dfrac{1}{2}$, 舍去. 故最大似然估计值 $\hat{\theta} = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$.

[**定理7.2.1**] 设 $\hat{\theta}$ 是总体 X 的概率分布中参数 θ 的最大似然估计. 设参数 $u = u(\theta)$ 有单值反函数 $\theta = \theta(u)$, 则 $u(\theta)$ 的最大似然估计 $\hat{u} = u(\theta)$.

[**例7.2.5**] 已知参数 σ^2 的最大似然估计量 $\widehat{\sigma^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$, 求参数 σ 的最大似然估计量.

[**解**] 因 $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, 而函数 $u = u(\sigma^2) = \sqrt{\sigma^2}$ 在 $u \geq 0$ 时有单值反函数 $\sigma^2 = u^2$,

则 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$.

7.3 估计量的评选标准

7.3.1 无偏性

[**定义7.3.1**] 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一组样本, $\hat{\theta} = \theta(X_1, \cdots, X_n)$ 是待估参数 θ 的估计量. 若 $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$, 则称 $\hat{\theta} = \theta(X_1, \cdots, X_n)$ 是 θ 的**无偏估计**.

[**注**] 无偏性要求估计值在待估参数的真值附近.

[**定理7.3.1**] 设总体 X 的均值 μ 和方差 $\sigma^2 > 0$ 都未知, 则:

(1) 样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值 μ 的无偏估计.

(2) 样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计.

(3) 估计量 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ 不是 σ^2 的无偏估计.

[**证**] (1)和(2)由**定理6.5.1**已证.

(3) 因 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$,

则 $E\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = E\left(\dfrac{n-1}{n}S^2\right) = \dfrac{n-1}{n}\cdot E(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$, 故证.

[**定理7.3.2**] 设总体 X 的 $k\ \ (k \geq 1)$ 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ 存在, $X_1, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本, 则无论总体服从何分布, 样本的 k 阶矩 $A_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$ 都是总体的 k 阶矩 μ_k 的无偏估计量.

[**证**] 即证 $E(A_k) = \mu_k = E(X^k)$.

因 $X_1, \cdots, X_n$ 与 X 同分布, 则 $X_1^k, \cdots, X_n^k$ 与 X^k 同分布, 且 $E(X_1^k) = \cdots = E(X_n^k) = E(X^k) = \mu_k$.

$E(A_k) = E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \dfrac{1}{n}\cdot(n\cdot\mu_k) = \mu_k$, 故证.

7.3.2 有效性

[**定义7.3.2**] 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一组样本, $\widehat{\theta_1} = \widehat{\theta_1}(X_1, \cdots, X_n)$ 和 $\widehat{\theta_2} = \widehat{\theta_2}(X_1, \cdots, X_n)$ 都在待估参数 θ 的无偏估计量. 若对 $\forall\theta$, 都有 $D\left(\widehat{\theta_1}\right) \leq D\left(\widehat{\theta_2}\right)$, 且至少对某个 θ , 上式的不等号严格成立, 则称 $\widehat{\theta_1}$ 较 $\widehat{\theta_2}$ 更有效.

[**注**] 有效性要求估计值集中在待估参数的真值附近.

[例7.3.1] 设服从指数分布的总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}},x>0\\0,otherwise\end{cases}$, 其中参数 $\theta>0$ 未知. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自 X 的一组样本, $Z=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$. 求证: (1) $\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计; (2) $n\cdot Z$ 是 θ 的无偏估计; (3) $n>1$ 时, $\overline{X}$ 较 $n\cdot Z$ 更有效.

[解]

(1) $E\left(\overline{X}\right)=E(X)=\theta$, 故证.

(2) X 的分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}},x\geq 0\\0,x<0\end{cases}$.

Z 的分布函数 $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)]^n=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{n}{\theta}z},z\geq 0\\0,z<0\end{cases}$,

则概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{n}{\theta}z},z\geq 0\\0,otherwise\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\dfrac{\theta}{n}}\mathrm{e}^{-\frac{n}{\theta}z},z\geq 0\\0,otherwise\end{cases}$, 进而 $Z\sim Exp\left(\dfrac{\theta}{n}\right)=\dfrac{\theta}{n}$.

故 $E(n\cdot Z)=n\cdot E(Z)=\theta$, 故证.

(3) $D\left(\overline{X}\right)=\dfrac{D(X)}{n}=\dfrac{\theta^2}{n}$.

因 $Z\sim Exp\left(\dfrac{\theta}{n}\right)$,

则 $D(n\cdot Z)=n^2\cdot D(Z)=n^2\cdot\dfrac{\theta^2}{n^2}=\theta^2>\dfrac{\theta^2}{n}=D\left(\overline{X}\right)\ \ (n>1)$, 故证.

7.3.3 相合性

[定义7.3.3] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一组样本, $\hat{\theta}=\theta(X_1,\cdots,X_n)$ 是待估参数 θ 的估计量. 若对 $\forall\varepsilon>0$, 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right\}$, 即 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ , 则称 $\hat{\theta}=\theta(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的**相合估计量**或**一致估计量**.

[注1] 无偏性和有效性都时在样本容量 n 固定的前提下讨论的, 而相合性考察 $n\to+\infty$ 时的情况.

[注2] 相合性是对估计量的基本要求, 无相合性的估计量是不可取的.

[定理7.3.3]

(1) 样本的 $k\ \ (k\geq 1)$ 阶矩 A_k 是总体的 k 阶矩 $\mu_k=E(X^k)$ 的相合估计量, 即 $A_k\xrightarrow{P}\mu_k=E(X^k)\ \ (n\to+\infty)$.

(2) 若待估参数 $\theta=g(\mu_1,\cdots,\mu_k)$, 其中 g 为连续函数, 则 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=g\left(\widehat{\mu_1},\cdots,\widehat{\mu_k}\right)=g(A_1,\cdots,A_k)$ 是 θ 的相合估计量.

(3) 样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值 $E(X)$ 的相合估计量, 即 $\overline{X}\xrightarrow{P}E(X)\ \ (n\to+\infty)$.

(4) 样本方差 S^2 是总体方差 $D(X)$ 的相合估计量, 即 $S^2\xrightarrow{P}D(X)\ \ (n\to+\infty)$.

7.4 区间估计

点估计给出未知参数的估计值(近似值), 较粗糙, 不能反映估计的准确程度; 区间估计给出未知参数的范围, 并给出该范围包含待估参数的真值的可信程度. 一般用区间长度刻画精确度, 可信程度相同时, 区间越短, 精确度越高.

[**定义7.4.1**] 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$, 其中未知参数 $\theta\in\Theta$, Θ 是 θ 可能取值的范围. 对给定的 $\alpha\in(0,1)$, 若由取自 X 的一组样本 $X_1,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n),\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 满足 $\underline{\theta}<\overline{\theta}$, 且对 $\forall\theta\in\Theta$, 都有 $P\left\{\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$, 则称随机区间 $\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$ 是 θ 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的**置信区间**, 称 $\underline{\theta}$ 为置信水平为 $(1-\alpha)$ 的双侧置信区间的**置信下限**, 称 $\overline{\theta}$ 为置信水平为 $(1-\alpha)$ 的双侧置信区间的**置信上限**, 称 $(1-\alpha)$ 为**置信水平**.

[**注1**] 置信区间 $\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$ 是随机区间, 区间两端点都是随机变量.

[**注2**] α 值较小, 则 $(1-\alpha)$ 值较大, 即样本值落在置信区间中的概率较大.

[**注3**] 定义中取 $P\left\{\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$ 而非 $P\left\{\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\right\}=1-\alpha$ 的原因:

(1) 若 X 为连续型随机变量, 则对给定的 α , 令 $P\left\{\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\right\}=1-\alpha$ 可确定置信区间, 因为连续型随机变量的分布函数连续.

(2) 若 X 为离散型随机变量, 则对给定的 α , 未必存在一个区间 $\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$ $s.t.$ $P\left\{\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\right\}=1-\alpha$.

[**注4**] 固定样本容量为 n , 反复抽样多次, 每个样本值会确定一个区间 $\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$, 这样的区间要么包含 θ 的真值, 要么不含 θ 的真值. 这些区间中, 包含 θ 的真值的区间约占 $[100(1-\alpha)]\%$,不含 θ 的真值的区间仅占 $(100\alpha)\%$.

[**注5**] 置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间可能不唯一.

[**注6**] 求待估参数 θ 的置信区间的方法:

(1) 构造一个与样本 $X_1,\cdots,X_n$ 和 θ 有关的函数 $W=W(X_1,\cdots,X_n;\theta)$, 其分布不依赖于 θ 和其他未知参数, 称有该性质的函数 W 为**枢轴量**. 枢轴量可用点估计的方法构造.

对取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本 $X_1,\cdots,X_n$, 常用的枢轴量:

① $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

② $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$.

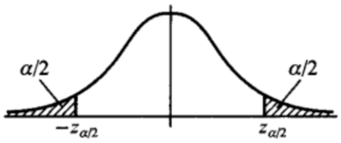
③ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

④ $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$.

(2) 对给定的置信水平 $(1-\alpha)$, 求两个常数 a,b $s.t.$ $P\{a<W(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b\}=1-\alpha$. 若能从 $a<W(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b$ 中反解得与 θ 有关的不等式 $\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$, 其中 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n;\theta),\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n;\theta)$ 都是统计量, 则区间 $\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$ 是 θ 的一个置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间.

a,b 一般取 W 的上分位点, 有如下两种情况:

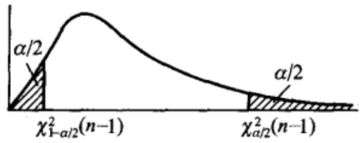
① 概率密度的图象单峰且关于 y 轴对称, 如下图所示:



如 $W \sim N(0,1)$ 或 $W \sim t(n)$ 时, 取关于 y 轴对称的两分位点,

即 $P\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < W < z_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$ 或 $P\{-t_{\frac{\alpha}{2}} < W < t_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$.

② 概率密度的图象不关于 y 轴对称, 如下图所示:



如 $W \sim \chi^2(n)$ 或 $W \sim F(n_1,n_2)$ 时, 分别取左侧、右侧的面积为 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的分位点,

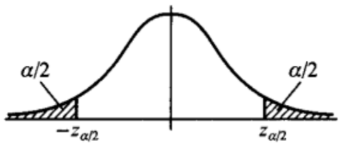
即 $P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < W < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha, P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}} < W < F_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$.

[**例7.4.1**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本, 其中均值 μ 未知, 方差 $\sigma^2 > 0$ 已知. 求 μ 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间.

[**解**] 先构造一个与 μ 有关且分布确定的统计量, 用于确定置信区间 $\left(\underline{\mu},\overline{\mu}\right)$ $s.t.\ P\left\{\underline{\mu} < \mu < \overline{\mu}\right\} = 1-\alpha$.

注意到 $\overline{X} \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, 则 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

设标准正态分布的上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点为 $z_{\frac{\alpha}{2}}$.



如上图, 注意到标准正态分布的概率密度函数在 $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ 和 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ 间的面积为 $(1-\alpha)$,

即 $P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$, 解得: $P\left\{\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$.

故 μ 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$, 这样的置信区间可记作 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

取定参数的值可得确定的置信区间, 如:

(1) 取 $1-\alpha = 0.95$, 则 $\alpha = 0.05$, 上 $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} \xlongequal{\text{查表}} 1.96$.

取 $n=16,\sigma=1$, 则置信区间 $\left(\overline{X}-\dfrac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96\right)$.

(2) 取 $\overline{x}=5.20$, 则置信区间 $(4.71,5.69)$, 该区间不再是随机区间.

此时, 称区间 $(4.71,5.69)$ 包含 μ 的真值的可信程度为 95% .

(3) 置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间不唯一.

① 取 $\alpha=0.05$, 由上述过程得: 置信区间 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$,

其长度为 $2\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}\times 1.96=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 3.92$.

② 注意到 $P\left\{-z_{0.04}<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}<z_{0.01}\right\}=0.95=1-\alpha$,

解得: $P\left\{\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{0.01}<\mu<\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{0.04}\right\}$,

故置信区间 $\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{0.01},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{0.04}\right)$, 其长度为 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.01}+z_{0.04})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 4.08$.

③ 因 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 3.92<\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 4.08$, 则置信区间 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ 更精确.

这一点由标准正态分布单峰且关于 y 轴对称的概率密度决定, 即形如 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ 的置信区间的长度最短.

7.5 正态总体的均值和方差的区间估计

7.5.1 单个正态总体的情况

[**定理7.5.1**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差.

(1) 总体方差 σ^2 已知时, 总体均值 μ 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

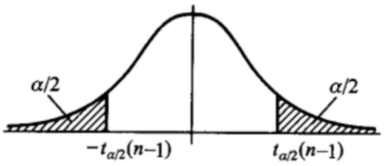
(2) σ^2 未知时, μ 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$.

(3) μ 未知时, σ^2 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$, 则总体的标准差 σ 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的置信区间为 $\left(\dfrac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\dfrac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$.

[**证**]

(1) 见**例7.4.1**.

(2) 因 $E(S^2)=\sigma^2$, 即 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 而 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$, 故取枢轴量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$.

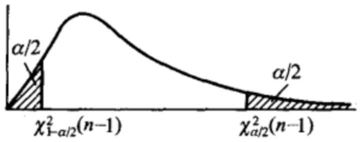


由上图: $P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$,

解得: $P\left\{\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\mu<\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$,

故置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$.

(3) 因 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, 故取枢轴量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$.



由上图: $P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$,

解得: $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right\}=1-\alpha$,

故置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$.

[**例7.5.1**] 在一批糖果中随机抽取 16 个, 重量分别为 506, 508, 499, 503, 504, 510, 497, 512, 514, 505, 493, 496, 506, 502, 509, 496. 设糖果的重量近似服从正态分布. 求:

(1) 总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

(2) 总体标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

[**解**]

(1) 待估参数为 μ, 总体方差 σ^2 未知.

$1-\alpha=0.95$, 则 $\alpha=0.05$, $\dfrac{\alpha}{2}=0.025$. $n=16$, 则 $t(n-1)$ 的上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点 $t_{0.025}(15)=2.1315$.

样本均值的观察值 $\overline{x}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=503.75$,

样本标准差的观察值 $S=\sqrt{\dfrac{1}{16-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=6.2022$.

由**定理7.5.1**的(2):

置信水平 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间为 $\left(503.75\pm\dfrac{6.2022}{\sqrt{16}}\times2.1315\right)$, 即 $(500.4,507.1)$.

这表明: 用样本值估计糖果的重量的均值在 $(500.4, 507.1)$ 范围内, 估计的可信程度为 95% .

若以此区间内的任一值作为 μ 的近似值, 则其误差不大于区间长度, 即 $2 \times \dfrac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 = 6.61$.

(2) $\chi^2(n-1)$ 的上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点 $\chi^2_{0.025}(15) = 27.488$, 上 $\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ 分位点 $\chi^2_{0.975}(15) = 6.262$.

样本标准差 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\dfrac{1}{16-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{16}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = 6.2022$.

由**定理7.5.1**的(3): 置信水平 $1-\alpha = 0.95$ 的置信区间为 $(4.58, 9.60)$.

7.5.2 两个正态总体的情况

[**定理7.5.2**] 取置信水平为 $(1-\alpha)$. 设 $X_1, \cdots, X_{n_1}$ 是取自第一个总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的一组样本, $Y_1, \cdots, Y_{n_2}$ 是取自第二个总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的一组样本, 且这两个样本相互独立. 设第一、二个总体的样本均值分别为 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$, 样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2 .

(1) 总体的方差 σ_1^2 和 σ_2^2 都已知时, 两正态总体的均值差 $(\mu_1 - \mu_2)$ 的置信区间为 $\left(\overline{X} - \overline{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 未知时, $(\mu_1 - \mu_2)$ 的置信区间为 $\left(\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) \cdot S_w \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}\right)$, 其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}, S_w = \sqrt{S_w^2}$.

[**证**]

(1) 随机变量 $\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)$ 的期望 $E\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) = E\left(\overline{X}\right) - E\left(\overline{Y}\right) = \mu_1 - \mu_2$,

则 $\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)$ 是 $(\mu_1 - \mu_2)$ 的无偏估计.

因 $\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$, 且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 独立,

则 $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$,

标准化得: 随机变量 $\dfrac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$, 取其为枢轴量.

因 $P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$,

解得: $P\left\{\overline{X} - \overline{Y} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X} - \overline{Y} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right\} = 1 - \alpha$,

故置信区间为 $\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

(2) 注意到 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$, 取其为枢轴量.

因 $P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)<\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}=1-\alpha$,

故 $\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$.

[**注**] 对两正态总体的均值差 $(\mu_1-\mu_2)$ 的置信区间:

① 若置信下限 >0 , 则 $\mu_1>\mu_2$.

② 若置信区间包含 0 , 则 μ_1 较 μ_2 无显著差别.

[**例7.5.2**] 为比较I、II两种型号的子弹的枪口速度, 随机地取I型子弹 10 发, 测得枪口速度的平均值 $\overline{x_1}=500$, 标准差 $s_1=1.10$; 随机地取II型子弹 20 发, 测得枪口速度的平均值 $\overline{x_2}=496$, 标准差 $s_2=496$. 设两总体都近似地服从正态分布, 且方差相等. 求两总体的均值差 $(\mu_1-\mu_2)$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

[**解**] 可认为两样本相互独立. 设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 其中 σ^2 未知.

$1-\alpha=0.95$, 则 $\alpha=0.05,\ \dfrac{\alpha}{2}=0.025$.

$n_1=10,n_2=20$, 则 $n_1+n_2-2=28$, 进而上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点 $t_{0.025}(28)=2.0484$.

$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\dfrac{9\times(1.10)^2+19\times(1.20)^2}{28}$, 则 $S_w=\sqrt{S_w^2}=1.1688$.

由**定理7.5.2**的(2): 置信区间为 $(3.07,4.93)$. 置信下限 $3.07>0$, 可认为 $\mu_1>\mu_2$.

[**例7.5.3**] 为提高某化学过程的产率, 试图采用新催化剂. 设采用原催化剂进行了 $n_1=8$ 次试验, 得产率的平均值 $\overline{x_1}=91.73$, 样本方差 $s_1^2=3.89$; 采用新催化剂进行了 $n_2=8$ 次试验, 得产率的平均值 $\overline{x_2}=93.75$, 样本方差 $s_2^2=4.02$. 设两总体独立, 且都服从方差相等的正态分布. 求两总体的均值差 $(\mu_1-\mu_2)$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

[**解**] 设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 其中 σ^2 未知.

$1-\alpha=0.95$, 则 $\alpha=0.05,\ \dfrac{\alpha}{2}=0.025$.

$n_1=8,n_2=8$, 则 $n_1+n_2-2=14$, 进而上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点 $t_{0.025}(14)=2.1448$.

$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=3.96$, 则 $S_w=\sqrt{S_w^2}=1.99$.

由**定理7.5.2**的(2): 置信区间为 $(-4.15,0.11)$. 置信区间包含 0 , 可认为两催化剂的效果无显著差别.

[**定理7.5.3**] 取置信水平为 $(1-\alpha)$. 设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 是取自第一个总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的一组样本, $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 是取自第二个总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的一组样本, 且这两个样本相互独立. 设第一、二个总体的样本均值分别为 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$, 样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2 . 总体均值 μ_1 和 μ_2 都未知时, 两总体的方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

[**证**] 注意到 $\dfrac{\dfrac{S_1^2}{S_2^2}}{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$, 取其为枢轴量.

因 $P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)<\dfrac{\dfrac{S_1^2}{S_2^2}}{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}=1-\alpha$,

解得: $P\left\{\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}<\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right\}=1-\alpha$,

故置信区间为 $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$.

[**注**] 对两正态总体的方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间, 若置信区间包含 1 , 则 σ_1^2 较 σ_2^2 无显著差别.

[**例7.5.4**] 为研究机器A和机器B生产的钢管的内径, 随机抽取A生产的管子 18 只, 测得样本方差 $s_1^2=0.34$; 随机抽取B生产的管子 13 只, 测得样本方差 $s_2^2=0.29$. 设两样本相互独立, 且分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 其中 $\mu_i,\sigma_i^2\ \ (i=1,2)$ 都未知. 求两总体的方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.90 的置信区间.

[**解**] $1-\alpha=0.90$, 则 $\alpha=0.10$.

$n_1=18,n_2=13$, 则上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点 $F_{0.05}(17,12)=2.59$,

上 $\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ 分位点 $F_{0.95}=F_{1-0.05}=\dfrac{1}{F_{0.05}(12,17)}=\dfrac{1}{2.38}$.

由**定理7.5.3**: 置信区间为 $(0.45,2.79)$. 置信区间包含 1 , 则 σ_1^2 较 σ_2^2 无显著差别.

7.6 单侧置信区间

[**定义7.6.1**] 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$, 其中未知参数 $\theta\in\Theta$, Θ 是 θ 可能取值的范围. 对给定的 $\alpha\in(0,1)$:

(1) 若由取自 X 的一组样本 $X_1,\cdots,X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$, 对 $\forall\theta\in\Theta$, 都有 $P\left\{\theta>\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$, 则称随机区间 $(\underline{\theta},+\infty)$ 为 θ 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的**单侧置信区间**, 称 $\underline{\theta}$ 为置信水平为 $(1-\alpha)$ 的**单侧置信下限**.

(2) 若由取自 X 的一组样本 $X_1,\cdots,X_n$ 确定的统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$, 对 $\forall \theta\in\Theta$, 都有 $P\left\{\theta<\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$, 则称随机区间 $(-\infty,\overline{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $(1-\alpha)$ 的**单侧置信区间**, 称 $\overline{\theta}$ 为置信水平为 $(1-\alpha)$ 的**单侧置信上限**.

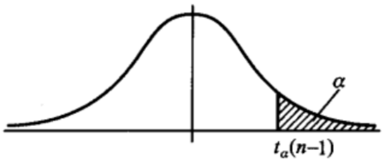
[**定理7.6.1**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本, 其中均值 μ 和方差 σ^2 都未知. 取置信水平为 $(1-\alpha)$, 则:

(1) μ 的单侧置信下限 $\underline{\mu}=\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_\alpha(n-1)$.

(2) σ^2 的单侧置信上限 $\overline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$.

[**证**]

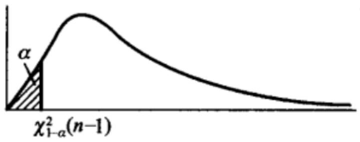
(1) 因 $E\left(\overline{X}\right)=\mu$, 则 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计. 注意到 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$, 取其为枢轴量.



如上图, 因 $P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}<t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$, 解得: $P\left\{\mu>\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$,

故单侧置信区间 $\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_\alpha(n-1)\right)$, 单侧置信下限 $\underline{\mu}=\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_\alpha(n-1)$.

(2) 因 $E(S^2)=\sigma^2$, 则 S^2 是 σ^2 的无偏估计. 注意到 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, 取其为枢轴量.



如上图, 因 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha$, 解得: $P\left\{\sigma^2<\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\}=1-\alpha$,

故单侧置信区间 $\left(0,\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$, 注意区间左端点为 0 , 因为方差非负, 则单侧置信上限 $\overline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$.

[**例7.6.1**] 从一批灯泡中随机取 5 只作寿命试验, 测得寿命分别为 1050 , 1100 , 1120 , 1250 , 1280 . 设灯泡寿命服从正态分布. 求灯泡寿命的均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

[**解**] 设总体服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中均值 μ 和方差 σ^2 都未知.

$1-\alpha=0.95$, 则上 α 分位点 $t_{0.05}(4)=2.1318$.

样本均值 $\overline{x}=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=1160$, 样本方差 $s^2=\dfrac{1}{5-1}\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=9950$,

样本标准差 $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{9950}$.

由**定理7.6.1**: 单侧置信下限 $\underline{\mu}=\overline{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}\cdot t_\alpha(n-1)=1065$.