第3章 动量与能量

在线直播课

2022-3-18

$\vec{v}$, $\vec{p}$, E_k

力→时间：　$\vec{p} = m\vec{v}$　　$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

$$\begin{cases} d\vec{I} = \vec{F}\,dt = d\vec{p} = d(m\vec{v}) = d\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) \\ \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 \end{cases}$$

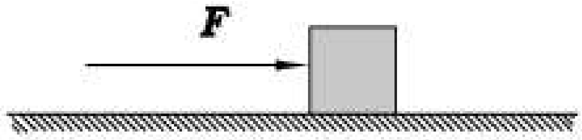
$$\vec{F} = 0 \,, \quad \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

$\vec{v}$

力→空间：　$E_k = \frac{1}{2} m v^2$　　$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$\begin{cases} dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = dE_k = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) \\ W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = E_k - E_{k0} \end{cases}$$

质点在恒力 F 作用下由静止开始作直线运动．如图．已知在时间 Δt_1 内，速率由 0 增加到 v；在 Δt_2 内，由 v 增加到 $2v$．设该力在 Δt_1 内，冲量大小为 I_1，所作的功为 A_1；在 Δt_2 内，冲量大小为 I_2，所作的功为 A_2．



则(D)

(A) $A_1 = A_2$，$I_1 < I_2$

(B) $A_1 = A_2$，$I_1 > I_2$

(C) $A_1 > A_2$，$I_1 = I_2$

(D) $A_1 < A_2$，$I_1 = I_2$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{F}\Delta t = \vec{P} - \vec{P}_0$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = F\Delta x = E_k - E_{k0}$$

Δt_1:

$$I_1 = P_1 - P_0 = mv - 0 = mv$$

$$W_1 = E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

Δt_2:

$$I_2 = P_2 - P_1 = 2mv - mv = mv$$

$$W_2 = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}m(2v)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}mv^2$$

质量为 m 的质点在 Oxy 平面内运动，运动学方程为 $\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$.

$\vec{v} = -a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}$

(1)试求质点的动量；

(2)试求从 $t=0$ 到 $t=\frac{2\pi}{\omega}$ 这段时间内质点受到的合力的冲量，并说明在上述时间内，质点的动量是否守恒？为什么？

(1) $\vec{p} = m\vec{v} = -am\omega\sin\omega t\vec{i} + bm\omega\cos\omega t\vec{j}$

(2) $\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t=\frac{2\pi}{\omega}) - \vec{p}(t=0) = 0$

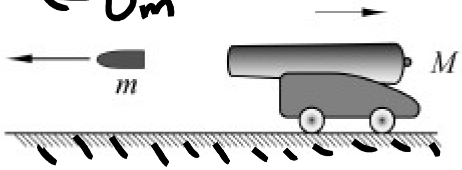
守恒 → $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$，$\vec{p}$ 不变

$\vec{F}=0$，$\vec{p}=$恒矢

$\vec{p}(t=\frac{2\pi}{\omega}) = \vec{p}(0)$

一个质量为 M 的榴弹炮，装在轴部光滑的小车上，如图所示，榴弹炮在发射质量为 m、相对炮口速度为 v_m 的炮弹时，它静止在船的水平甲板上，试求(1)发射后炮弹相对于船的速度 v；(2)发射后榴弹炮相对于船的速度 V，当 $M=100\ m$、$v_m=100$ m/s 时，求：(3) v 和 V。

$\leftarrow \vec{v}_m$



船：S系

车：S'系

"+"

初：$\vec{P}_0 = 0$

末：$\vec{P} = (M-m)\vec{V} + m(\vec{V}+\vec{v}_m)$

$0 = (M-m)V + m(V - v_m)$

$V = \frac{m}{M} v_m$

$v = ?$

绝对：弹 → S系 ($\vec{v}$)

相对：弹 → S系 ($\vec{v}_m$)

牵连：S' → S系 ($\vec{V}$)

(车)

弹簧对物体的作用力为 $\vec{F}=-kx\vec{i}-ky\vec{j}$.这里 k 为物体在 xy 平面运动时的劲度系数.求当物体从起点 (x_i,y_i) 移到终点 (x_f,y_f) 时弹力作功的表达式.

$$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1=\vec{j}\cdot\vec{j} \qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=0$$

$$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}(-kx\vec{i}-ky\vec{j})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j})$$

$$=\int_{x_i}^{x_f}-kx\,dx-\int_{y_i}^{y_f}ky\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_i}^{x_f}-\frac{1}{2}ky^2\Big|_{y_i}^{y_f}$$

$$=-\left[\left(\frac{1}{2}kx_f^2+\frac{1}{2}ky_f^2\right)-\left(\frac{1}{2}kx_i^2+\frac{1}{2}ky_i^2\right)\right]$$

一沿 x 轴正方向的力作用在一质量为 3.0 kg 的质点上.已知质点的运动学方程为 $x=3t-4t^2+t^3$.这里 x 以 m 为单位,时间 t 以 s 为单位.试求:

(1)力在最初 4.0 s 内作的功;

(2)在 $t=1$ s 时,力的瞬时功率.

$x = 3t - 4t^2 + t^3$

$v = 3 - 8t + 3t^2$

$a = -8 + 6t$

$F = ma = 3(-8+6t)$

$dx = d(3t - 4t^2 + t^3)$

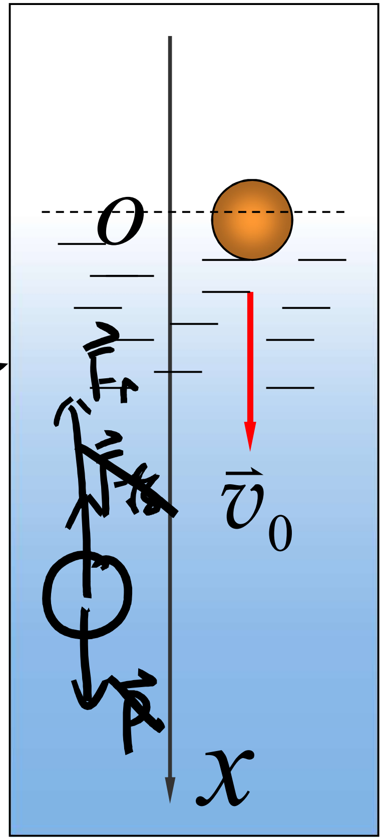
(1) $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$

$= E_{k4} - E_{k0}$

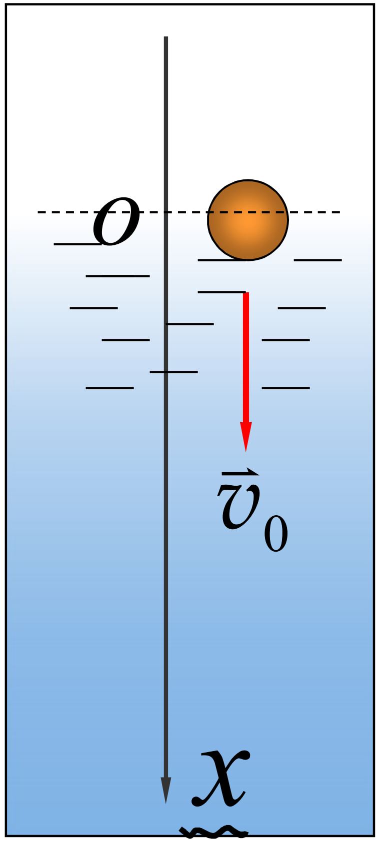
(2) $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$= 3(-8+6t)(3 - 8t + 3t^2)$

例 1　一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为 v_0．设此球在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力为 $F_r = -bv$，b 为一常量．求阻力对球作的功与时间的函数关系．



$\vec{F}_r = -b\vec{v} = m\vec{a}$



$W(t) = ?$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_r dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} -bv\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} -bv \frac{dx}{dt} dt \quad \left(\frac{dx}{dt} = v\right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} -bv^2 dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} -bv_0^2 e^{-2\frac{b}{m}t} dt = ?$$

$v(t) = ?$

$$-bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_0^t -\frac{b}{m} dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v}$$

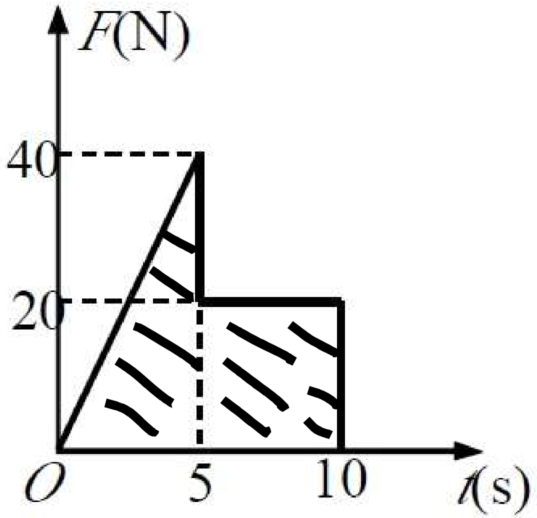
$$-\frac{b}{m}t = \ln\frac{v}{v_0}$$

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$W = E_K - E_{K0}$$

$$= ?$$

一质量为 $m = 5$ kg 的物体，在 0 到 10 秒内，受到如图所示的变力 F 的作用，由静止开始沿 x 轴正向运动，而力的方向始终为 x 轴的正方向，求：10 秒内变力 F 所做的功？



$$W = \Delta E_k$$

$$= E_k - E_{k0} = ?$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt \qquad I = 200$$

$$F = \begin{cases} 8t & t \in [0.5] \\ 20 & t \in [5.10] \end{cases}$$

$$v = 40$$