线性方程组的迭代解法

Lecture 1 线性方程组的Jacobi迭代法

在用直接法解线性方程组时, 要对系数矩阵不断变换. 如果方程组的阶数很高, 则运算量将会很大并且大量占用计算机资源. 对大型稀疏线性方程组通常用迭代法。

基本思想: 基于不动点原理，将方程(1) 变形为同解的不动点方程(2)

$$Ax = b \qquad (1) \qquad A \in R^{n\times n}, b \in R^n, x \in R^n$$

$$x = Bx + \mathrm{f} \qquad (2) \qquad 其中 B \in R^{n\times n}, \mathrm{f} \in R^n$$

对方程组(2),采用以下迭代:

取初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$代入(2)式右端，结果记作$\boldsymbol{x}^{(1)}$， $\boldsymbol{x}^{(1)}$代入(2)式右端，结果记作$\boldsymbol{x}^{(2)}$，依此类推，有

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + f$$

$$x^{(2)} = Bx^{(1)} + f$$

$$\vdots$$

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad (3)$$
$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

这种方式就称为迭代法，以上过程称为迭代过程，产生一个序列$\{x^{(k)}\}_0^\infty$，

如果对于任意$x^{(0)}$，迭代序列的极限存在, 即$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$,则其极限点是不动点方程的解，也是原方程组的解, 称迭代法收敛; 否则称迭代法发散.

雅可比迭代法

设系数矩阵A的对角元 $\boldsymbol{a_{ii} \neq 0}(i = 1,2,\cdots,n)$,则$Ax=b$可改写为

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2)$$

$$\cdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1} + b_n)$$

或

$$x =- D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$
$$x = (I - D^{-1}A)x + D^{-1}b$$

令

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi迭代

$$x^{(k+1)} =- D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

向量形式

$$= (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b,\quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j{}^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j{}^{(k)}\right)$$

分量形式

$$= x_i{}^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j{}^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\, x_j{}^{(k)}\right)$$

$i = 1,2,\cdots,n$

例1　用Jacobi迭代法求解方程组,误差不超过1e-4

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

解:

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

取初值$x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$,使用$Jacobi$迭代法 $x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f$

$$x^{(1)} = B_J x^{(0)} + f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = [2.5,\ 3,\ 3]^T$$

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_2 = 4.924$$

$$x^{(2)} = B_J x^{(1)} + f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = [2.875,\ 2.3636,1]^T$$

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_2 = 2.1320$$

x3 =	3.1364	2.0455	0.9716	d =	0.4127
x4 =	3.0241	1.9478	0.9205	d =	0.1573
x5 =	3.0003	1.9840	1.0010	d =	0.0914
x6 =	2.9938	2.0000	1.0038	d =	0.0175
x7 =	2.9990	2.0026	1.0031	d =	0.0059
x8 =	3.0002	2.0006	0.9998	d =	0.0040
x9 =	3.0003	1.9999	0.9997	d =	7.3612e-004
x10 =	3.0000	1.9999	0.9999	d =	2.8918e-004
x11 =	3.0000	2.0000	1.0000	d =	1.7669e-004
x12 =	3.0000	2.0000	1.0000	d =	3.0647e-005

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0000 \\ 2.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

迭代次数12次可得到满足精度要求的近似解

Lecture 2 Gauss-Seidel迭代

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j{}^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j{}^{(k)}\right)$$

Jacobi迭代

在雅可比迭代过程中，迭代的每一步是用$x^{(k)}$的全部分量来计算$x^{(k+1)}$，但是在计算第i个分量时,已经算出的最新分量$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots x_{i-1}^{(k+1)}$没有被利用,如果利用这些最新分量去代替旧的分量$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots x_{i-1}^{(k)}$去计算$x_i^{(k+1)}$,效果可能会好一些,由此得到高斯—塞德尔迭代法.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j{}^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j{}^{(k)}\right)$$

$$= x_i{}^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j{}^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\, x_j{}^{(k)}\right)$$

$$i = 1,2,\cdots,n$$

Gauss-Seidel迭代

上式写成向量形式

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}) + D^{-1}b$$

G-S迭代的向量形式

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$

两种方法的比较

在Gauss-Seidel迭代法中迭代使用最新计算出的分量,前面迭代结果的对应分量在以后的计算中便不需要了,因此整个计算过程中只需一组存储单元存放最新计算的结果,计算过程是串行的,无法并行运算;而Jacobi迭代的计算过程中,要两组存储单元,存储前次和当前迭代结果,但由于当前分量的计算是独立的,可并行计算.

例2 **用Gauss-Seidel迭代法求解例1中的方程组，误差不超过1e-4**

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

解： 取初值$x^{(0)} = [0,0,0]^T$, 使用$Gauss - Seidel$迭代法

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{8}(-3x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}) + 2.5$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{4}{11}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{11}x_3^{(k)} + 3$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{4}(2x_1^{(k+1)} + 1x_2^{(k+1)}) + 3$$

x1 =2.5000	2.0909	1.2273	d =3.4825
x2=2.9773	2.0289	1.0041	d =0.5305
x3 =3.0098	1.9968	0.9959	d =0.0465
x4 =2.9998	1.9997	1.0002	d =0.0112
x5 =2.9998	2.0001	1.0001	d =3.9735e-004
x6 =3.0000	2.0000	1.0000	d =1.9555e-004
x7 =3.0000	2.0000	1.0000	d =1.1576e-005

迭代7步得到满足精度的解x7

Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法解此方程组均收敛，但情况不非总是如此。

Lecture 3 超松弛(successive over relax,简称SOR)迭代

用高斯一塞德尔迭代法解线性方程组时,有时收敛速度很慢.超松弛迭代法是在高斯一塞德尔迭代法基础上的一种加速.

设由Gauss-Seidel迭代得到$x_{j=1,\cdots,n}^{(k)}$和$x_{j=1,\cdots,i-1}^{(k+1)}$，现在计算$x_i^{(k+1)}$，分两步:

Step1. 由G-S计算出一个近似值

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

Step2.对$x_i^{(k)}$和$\tilde{x}_i^{(k+1)}$进行加权平均得到改进的近似值

$$x_i^{(k+1)} = (1-w)x_i^{(k)} + w\tilde{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + w\left(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right)$$

$$= x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

SOR迭代

当ω=1时,SOR即为G-S

$$x_i^{(k+1)} = x_i{}^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j{}^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\, x_j{}^{(k)}\right)$$

G-S迭代

$$x_i^{(k+1)} = x_i{}^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j{}^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\, x_j{}^{(k)}\right)$$

Jacobi迭代

超松弛迭代的向量形式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + wD^{-1}\left(b - Lx^{(k+1)} - (D+U)x^{(k)}\right)$$

$$Dx^{(k+1)} = Dx^{(k)} + wb - wLx^{(k+1)} - w(D+U)x^{(k)}$$

$$(D+wL)x^{(k+1)} = (D - wD - wU)x^{(k)} + wb$$

$$x^{(k+1)} = (D+wL)^{-1}\left((1-w)D - wU\right)x^{(k)} + w(D+wL)^{-1}b = L_w x^{(k)} + f$$

说明：1）当松弛因子$\omega < 1$时,称为**低松弛法**,当$\omega > 1$时,称为**超松弛法**.
2）超松弛法是解大型方程组,特别是大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一.它具有计算公式简单,程序设计容易,占用计算机内贮单元较少等优点,但要选择好松弛因子ω.
3）使用计算机计算时,可用$\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon$ (ε为误差精度要求)控制迭代终止.

例3 用G-S法和SOR法求下列方程组的解,要求精度1e-6, 并取ω=1.45

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解：(1) G-S迭代法

$$B_G = -(D+L)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.625 \\ 0 & 1/3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$f = (D+L)^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

取初值$x^{(0)} = (0,0,0)^T$

迭代次数为71次, 得到满足精度的解

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0.999995 \\ 0.999994 \\ 1.999995 \end{pmatrix}$$

(2) SOR迭代法

$$x^{(k+1)} = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]x^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}b$$
$$= B_\omega x^{(k)} + f_\omega$$

取初值$x^{(0)} = (0,0,0)^T$

迭代次数为24次, 得到满足精度的解 $x = \begin{pmatrix} 0.999996 \\ 0.999998 \\ 1.999997 \end{pmatrix}$

本例说明，选取适当的松弛因子ω，SOR法的收敛速度比G-S法要快得多

例4 用SOR方法解方程组

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

精确解为 $x^* = (-1, -1, -1, -1)^T.$

解：**取**$x^{(0)} = 0$,**迭代公式为**

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \omega(1 + 4x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)})/4 \\ x_2^{(k+2)} = x_2^{(k)} - \omega(1 - x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{k})/4 \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \omega(1 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 4x_3^{(k)} - x_4^{(k)})/4 \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} - \omega(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)} + 4x_4^{(k)})/4 \end{cases}$$

取$\boldsymbol{\omega = 1.3}$,第11次迭代结果为

$$x^{(11)} = (-0.99999646, -1.0000030, -0.99999953, -0.99999912)^T,$$

$$\left\|\varepsilon^{(11)}\right\|_2 \leq 0.46 \times 10^{-5}$$

对ω取其它值,迭代次数如下表，从此例可以看到,松弛因子选择得好,会使**SOR**方法的收敛大大加速．本例中,$\boldsymbol{\omega}$**=1.3**是最佳松弛因子.

松弛因子$\boldsymbol{\omega}$	误差满足$\left\|\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})}-\boldsymbol{x}^{*}\right\|_{\mathbf{2}}<\mathbf{10}^{-\mathbf{5}}$的迭代次数
1.0	22
1.1	17
1.2	12
1.3	**11**
1.4	14
1.5	17
1.6	23
1.7	33
1.8	53
1.9	109

Lecture 4 线性方程组一般迭代法的收敛性

迭代法的收敛性问题

例如方程组
$$\left.\begin{aligned} x_1 - 10x_2 + 20x_3 &= 11 \\ -10x_1 + x_2 - 5x_3 &= -14 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\},\text{精确解}x^* = (1,1,1)^T$$

若用雅可比迭代,其迭代格式为
$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 10x_2^{(k)} - 20x_3^{(k)} + 11 \\ x_2^{(k+1)} &= 10x_1^{(k)} + 5x_3^{(k)} - 14 \\ x_3^{(k+1)} &= 5x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - 3 \end{aligned}\right\}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	11	-14	-3
2	-69	81	66
3	-931	-374	-267

选取$x^{(0)} = (0,0,0)^T$,计算结果如表所示。

计算结果表明向量序列$\{x^{(k)}\}$是**不收敛**到方程组的精确解，因此使用迭代法时，分析收敛性是非常重要的。

定义 1 设$\{x^{(k)}\}$为R^n中的向量序列, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)^T$, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$，若$\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*, i = 1, 2, \dots, n$,则称 $\{x^{(k)}\}$收敛到x^*，这种收敛性称为依坐标收敛，并记作$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$.类似地，可定义矩阵序列的依坐标收敛，即对应元素序列收敛。

定理 1 向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛到向量$x^* \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \left\|x^{(k)} - x^*\right\| = 0$

定理 2 矩阵序列$\{A^{(k)}\}$收敛到矩阵$A^* \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^{(k)} - A^*\right\| = 0$

迭代法的收敛条件

考虑一般迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$ (1)

而方程的精确解$\boldsymbol{x}^*$满足 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$

两式相减,得 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*)$

令$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - \boldsymbol{x}^*$, $k = 0, 1, 2, \cdots$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \cdots = \boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$

因此**迭代法收敛的充要条件**是

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k+1}} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{0})} = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^{k+1} = 0$$

注意$\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathbf{0})} = \boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})} - \boldsymbol{x}^*$为非零常向量

定理3 **迭代格式$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})} + \boldsymbol{f}$收敛的充要条件为**

$$\lim_{k\to\infty} B^{k+1} = 0$$

定理4 迭代格式$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$对任意初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$都收敛的**充要**条件为迭代矩阵B的谱半径 $\rho(B)<1$

证明: 由定理3知迭代法收敛 $\Leftrightarrow \boldsymbol{B}^{k}\to \boldsymbol{0}(\boldsymbol{k}\to\infty)$，因此只需证明$\boldsymbol{B}^{k}\to \boldsymbol{0}(\boldsymbol{k}\to\infty)$等价于$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{B})<\boldsymbol{1}$.

由矩阵的Jordan标准形知，存在可逆阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{s.t.}\ \ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{PJP}^{-1}$, 其中

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix},\quad J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i},\sum_{i=1}^{r} n_i=n$$

$$B^k=(PJP^{-1})^k=(PJP^{-1})(PJP^{-1})\ldots(PJP^{-1})=PJ^kP^{-1}$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r^k \end{bmatrix}$$

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}^k = (\lambda_i I + E)^k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} E^j + \lambda_i^k I$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n_i - 1}\lambda_i^{k-(n_i-1)} \\ & \lambda_i^k & & \\ & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

$$B^k \to 0 \Leftrightarrow J^k \to 0 \Leftrightarrow J_i^k \to 0,\ i = 1,2,\ldots,r$$

$$J_i^k \to 0 \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1, i = 1,2,\ldots,r$$

$$\Leftrightarrow \rho(B) < 1$$

提示：迭代法收敛的速度完全取决于迭代矩阵的谱半径，谱半径越小，收敛越快，谱半径越接近1，收敛越慢；谱半径大于或等于1，发散。

例5 **判别下列方程组用J法和G-S法求解是否收敛**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解: (1) Jacobi迭代矩阵

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B_J) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 = 0 \to \lambda = 0$$

$\rho(B_J) = \max(|\lambda|) = 0 < 1$ **Jacobi迭代收敛**

(2) Gauss-Seidel法的迭代矩阵

$$B_G =- (D+L)^{-1}U$$

$$\det(\lambda I - B_G) = det\ (\lambda I + (D+L)^{-1}U)$$
$$= det\Big((D+L)^{-1}\big(\lambda(D+L)+U\big)\Big) = 0$$

等价于 $\det(\lambda(D+L)+U) = 0$

$$\det(\lambda(D+L)+U) = det\begin{pmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -\lambda & \lambda & -1 \\ -2\lambda & -2\lambda & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2+4\lambda-4) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} =- 2 \pm 2\sqrt{2}$$

$\rho(G) = \max\limits_{1\le i\le 3}|\lambda_i| = 2+2\sqrt{2} > 1$　高斯—赛德尔迭代法不收敛

练习　给定如下线性方程组，试讨论用雅可比迭代法和高斯—赛德尔迭代法的收敛性.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解（1）雅可比迭代矩阵为 $B = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$$det\,(B-\lambda I) = -\frac{1}{4}(4\lambda^3 - 3\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}$$

$\rho(B) = 1$　　故雅可比迭代不收敛.

（2）Gauss-Seidel迭代矩阵为

$$G=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$$

$$det\,(G-\lambda I\,)=-\frac{1}{8}\lambda(8\lambda^2-5\lambda+1)=0$$

$$\lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\frac{5\pm i\sqrt{7}}{16}$$

$\rho(G)=0.3536<1$ 高斯—赛德尔迭代法收敛

Lecture 5 迭代收敛的充分非必要条件

定理3和定理4给出的充要条件使用麻烦，下面给出一个计算简便的条件，但注意是收敛的充分非必要条件。

定理5 （迭代收敛的充分非必要条件）

若$\|B\|<1$,则上面迭代式（1）对任意初始向量$x^{(0)}$和f都收敛于方程组$x=Bx+f$的解x^*,且有下述误差估计式:

$$(1)\ \left\|\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})}-\boldsymbol{x}^*\right\| \le \frac{\|\boldsymbol{B}\|}{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{B}\|}\left\|\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})}-\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}\right\|$$

$$(2)\ \left\|\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})}-\boldsymbol{x}^*\right\| \le \frac{\|\boldsymbol{B}\|^{\boldsymbol{k}}}{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{B}\|}\left\|\boldsymbol{x}^{(\mathbf{1})}-\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}\right\|$$

证明: (1) $x^* = Bx^* + f$

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + f \longrightarrow \begin{aligned} x^{(k)} - x^* &= B(x^{(k-1)} - x^*) \\ &= B(x^{(k-1)} - x^{(k)}) + B(x^{(k)} - x^*) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \|B\|\left\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\right\| + \|B\|\left\|x^{(k)} - x^*\right\|$$

$$\longrightarrow \left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$

(2) $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + f$,
$x^{(k-1)} = Bx^{(k-2)} + f \longrightarrow x^{(k)} - x^{(k-1)} = B(x^{(k-1)} - x^{(k-2)})$

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| = \|B(x^{(k-1)} - x^{(k-2)})\|$$
$$\leq \|B\|\|(x^{(k-1)} - x^{(k-2)})\|$$
$$\leq \cdots \leq \|B\|^{k-1}\|(x^{(1)} - x^{(0)})\|$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$
$$\leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

关于定理的几个说明:

1. 当$\|B\|$越小于1, 迭代法的收敛速度越快； $\|B\|$越接近1, 收敛速度越慢.
2. 如果事先给出误差精度ε,由第二个误差估计式可得到迭代次数的估计

$$K > \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\|B\|)}{\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|}}{\ln \|B\|}$$

3. 实际计算时,若$\|B\|$不太接近于1的情况下,利用第一个误差估计式可作为迭代终止条件,即当$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| < \varepsilon$时迭代终止,并取$x^{(k)}$作为方程组的近似解.

例6 试判断用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代法求解方程组$Ax=b$的收敛性，其中

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

解 (1)Jacobi迭代矩阵为 $B_J=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$

$$\|B_J\|_\infty=\frac{3}{2}>1,\ \|B_J\|_1=\frac{7}{6}>1$$

但 $\rho(B_J)=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}<1$，故Jacobi迭代收敛

(2)Gauss-Seidel迭代矩阵为

$$B_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

$$\|B_G\|_\infty = \frac{11}{12}$$

由定理5知，G-S迭代收敛

Lecture 6 迭代法收敛的特殊结论

实际应用中, 经常遇到一些线性方程组, 其系数矩阵是对称正定矩阵或者对角元素占优等, 这时根据这些矩阵的性质, 可以方便地判别上述迭代法的收敛性.

定义2 (对角占优阵)若矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = 1,2,\dots,n$$

即矩阵A的每一行对角元素的绝对值都严格大于非对角元素绝对值之和,则称A为**行严格对角占优矩阵**.

定理6 如果矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$为按行严格对角占优矩阵, 则A可逆.

证明：设A奇异，则Ax=0有非零解$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^t\neq 0$

$$0<|x_k|=max_{1\leq j\leq n}|x_j|$$

$$a_{kk}x_k=-\sum_{j=1,j\neq k}^{n}a_{kj}x_j\Rightarrow |a_{kk}||x_k|$$

$$\leq\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}||x_j|\leq |x_k|\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}|$$

$\Rightarrow |a_{kk}|\leq\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}|$ 与A严格对角占优矛盾。

定理 7 若线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A为按行严格对角占优矩阵，解此方程的雅可比迭代法和高斯—赛德尔迭代法都收敛.

证明：仅证高斯—赛德尔迭代法收敛，类似可证雅可比迭代法收敛.

A为按行严格对角占优矩阵，则

$$a_{ii} \neq 0,\ \ i = 1,2\cdots,n$$

否则 $a_{ii} = 0 \Rightarrow 0 = |a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$，与A非奇异矛盾。

$$B_{G-S} = -(D+L)^{-1}U$$

$$0 = det(\lambda I - B_{G-S}) = det(\lambda I + (D+L)^{-1}U)$$
$$= det((D+L)^{-1})\, det(\lambda(D+L) + U)$$

$$\Rightarrow 0=\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})+\boldsymbol{U})=\mathbf{det}\,(\boldsymbol{C}\,)$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})+\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda a_{1n} & \lambda a_{2n} & \cdots & \lambda a_{nn}\end{bmatrix}$$

若$|\lambda|$≥1，可推出C为严格对角占优阵，det(C)不可能为0. 因为

$$|c_{ii}|=|\lambda a_{ii}|\geq\sum_{j=1}^{i-1}|\lambda a_{ij}|+\sum_{j=i}^{n}|\lambda a_{ij}|$$
$$\geq\sum_{j=1}^{i-1}|\lambda a_{ij}|+\sum_{j=i}^{n}|a_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|,$$

这说明使det(C)=0的λ，即B_{G-S}的特征值, 一定满足 $|\lambda|$<1, 从而 $\rho(B_{G-S})$<1 ，因此G-S迭代收敛。

例7 用**Jacobi**迭代法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$$

解: 构造迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$，$f = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - B) = \lambda^2 - 6 = 0，\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6},$$

$\rho(B) = \sqrt{6} > 1.$ 由定理5，对此方程组，Jacobi迭代不收敛.

若把两个方程交换一下

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - x_2 = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -5 \\ x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

交换后方程组的系数矩阵是行严格对角占优的，**用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代都收敛。**

定理8 若线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A为对称正定矩阵, 则

(1)高斯—赛德尔迭代法收敛.

(2) Jacobi迭代法收敛的充要条件是2D-A也正定。

（(1)是定理10的特例，证明见定理10）

定理9 对方程组 $\boldsymbol{Ax = b},\ \boldsymbol{a_{ii} \neq 0, i = 1, \ldots, n},$

SOR 迭代收敛的**必要条件**是 $\boldsymbol{0 < \omega < 2}$

证明: 若SOR方法收敛, 则 $\boldsymbol{\rho(L_\omega) < 1}$

设$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n}$为$\boldsymbol{L_\omega}$的全体特征值,则

$$|det\,(L_w)| = |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| \leq \left(\rho(L_w)\right)^n < 1$$

$$det\,(L_w) = det\,[(D + wL)^{-1}]\,det\,[(1 - w)D - wU]$$
$$= (a_{11}a_{22}\ldots a_{nn})^{-1}(1 - w)^n(a_{11}a_{22}\ldots a_{nn})$$
$$= (1 - w)^n$$

$$\Rightarrow |(1 - w)^n| < 1 \Rightarrow |1 - w| < 1 \Rightarrow 0 < w < 2$$

定理10 若方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的系数矩阵是**对称正定阵**，且$\mathbf{0} < \boldsymbol{\omega} < \mathbf{2}$，则 SOR 迭代**收敛**。

证明：只需证明在定理条件下，SOR迭代矩阵的所有特征值的模都小于1.

设λ是L_ω的任一特征值，对应特征向量y，即

$$L_w y = \lambda y,\ \ y = (y_1, y_2, ..., y_n)^t \neq 0$$

$$\Rightarrow (D + wL)^{-1}[(1 - w)D - wU]y = \lambda y$$

$$\Rightarrow [(1 - w)D - wU]y = \lambda(D + wL)y$$

上页最后一行：$[(1-w)D-wU]y=\lambda(D+wL)y$

$$\Rightarrow ([(1-w)D-wU]y,y)=\lambda\big((D+wL)y,y\big)$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{([(1-w)D-wU]y,y)}{\big((D+wL)y,y\big)}=\frac{(Dy,y)-w(Dy,y)-w(Uy,y)}{(Dy,y)+w(Ly,y)}$$

$$(Dy,y)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}|y_i|^2\equiv\sigma>0$$

记$(Ly,y)=\alpha+i\beta$

$$A=A^t\Rightarrow U=L^t$$

$$\Rightarrow (Uy,y)=y^tUy=y^tL^ty=(y,Ly)=\overline{(Ly,y)}=\alpha-i\beta$$

$$\Rightarrow y^t Ay = (Ay, y) = \big((L + D + U)y, y\big)$$

$$= (Ly, y) + (Dy, y) + (Uy, y) = \sigma + 2\alpha > 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sigma - w\sigma - w(\alpha - i\beta)}{\sigma + w(\alpha + i\beta)} = \frac{(\sigma - w\sigma - w\alpha) + iw\beta}{(\sigma + w\alpha) + iw\beta}$$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 = \frac{(\sigma - w\sigma - w\alpha)^2 + w^2\beta^2}{(\sigma + w\alpha)^2 + w^2\beta^2}$$

$$(\sigma - w\sigma - w\alpha)^2 - (\sigma + w\alpha)^2 = w\sigma(\sigma + 2\alpha)(w - 2) < 0$$

$$\Rightarrow |\lambda| < 1$$

定理11　若方程组 $Ax = b$的系数矩阵A是严格对角占优阵，则当$0 < \omega \leq 1$时，SOR 迭代收敛。

例8 分别用雅可比迭代法、高斯—塞德尔迭代法和超松弛迭代法(取$\omega = 1.15$)解下面线性方程组，当$\max\limits_{1\le i\le 4}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < 10^{-5}$时迭代终止.方程组的精确解为$x^* = (1,-2,-1,3)^T$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

解：取$x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$

雅可比迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \dfrac{1}{5}\left(-2 - 5x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 2x_4^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+2)} = x_2^{(k)} + \dfrac{1}{8}\left(-6 - 2x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 3x_4^{k}\right) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \dfrac{1}{4}\left(6 - x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 4x_3^{(k)} + x_4^{(k)}\right) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \dfrac{1}{7}\left(12 + x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} - 2x_3^{(k+1)} - 7x_4^{(k)}\right) \end{cases}$$

迭代24次,得近似解

$$x^{(24)} = (0.9999941, -1.9999950, -1.0000040, 2.9999990)^T$$

高斯一塞德尔迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \dfrac{1}{5}\left(-2 - 5x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 2x_4^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+2)} = x_2^{(k)} + \dfrac{1}{8}\left(-6 - 2x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 3x_4^{k}\right) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \dfrac{1}{4}\left(6 - x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 4x_3^{(k)} + x_4^{(k)}\right) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \dfrac{1}{7}\left(12 + x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} - 2x_3^{(k+1)} - 7x_4^{(k)}\right) \end{cases}$$

迭代14次得近似解

$$\boldsymbol{x^{(14)} = 0.9999966, -1.9999970, -1.0000010, 2.9999990^{T}}$$

超松弛迭代法的迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{\omega}{5}\left(-2 - 5x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 2x_4^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+2)} = x_2^{(k)} + \frac{\omega}{8}\left(-6 - 2x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 3x_4^{k}\right) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{\omega}{4}\left(6 - x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 4x_3^{(k)} + x_4^{(k)}\right) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \frac{\omega}{7}\left(12 + x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} - 2x_3^{(k+1)} - 7x_4^{(k)}\right) \end{cases}$$

取$\boldsymbol{\omega = 1.15}$,迭代8次得方程组近似解为

$$x^{(8)} = (0.9999965, -1.9999970, -1.0000010, 2.9999990)^T$$