《常微分方程》期末速通

2. 一阶微分方程的解法

2.1 变量分离方程

[**类型2.1.1**] 变量分离方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\cdot\varphi(y)$ 的方程的解法:

(1) 若 $\exists y_0\ s.t.\ \varphi(y_0)=0$, 则验证 $y=y_0$ 是否为原方程的一个解.

(2) $\varphi(y)\neq 0$ 时, 方程等价于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}=f(x)\mathrm{d}x$.

两边积分得: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C$, 解得: 通解 $\varPhi(y,x,c)=0$ 或 $y=y(x,c)$.

(3) 若 $y=y_0$ 是解, 则检查其与(2)求得的解能否合并.

[**例2.1.1**] 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)\cdot y$ 的通解.

[**解**]

(1) 经检验, $y=0$ 是方程的一个解.

(2) $y\neq 0$ 时, 分离变量得: $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=P(x)\mathrm{d}x$, 两边积分得: $\displaystyle\ln|y|=\int P(x)\mathrm{d}x+C_1$,

则通解 $|y|=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x+C_1}$, 即 $y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=C_2\cdot\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\ \ (C_2\neq 0)$.

综上, 通解为 $y=C\cdot\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$.

[**例2.1.2**] 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2\cos x$ 满足初值条件 $x=0$ 时 $y=1$ 的特解.

[**解**]

(1) 虽 $y=0$ 是原方程的解, 但它不满足初值条件.

(2) $y\neq 0$ 时, 分离变量得: $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=\cos x\mathrm{d}x$, 两边积分得: $-\dfrac{1}{y}=\sin x+C$, 则通解 $y=-\dfrac{1}{\sin x+C}$.

代入 $y(0)=1$, 解得: $C=-1$, 即特解为 $y=-\dfrac{1}{\sin x-1}$.

综上, 特解为 $y=-\dfrac{1}{\sin x-1}$.

[例2.1.3] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$.

[解] 由原方程知: $x\neq 0$. 分离变量得: $\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$, 即 $\dfrac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2}+1}\mathrm{d}x$.

两边积分得: $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}y^2}{1+y^2}=\int\dfrac{-\mathrm{d}\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+1}$, 则 $\ln|1+y^2|=-\ln\left|\dfrac{1}{x^2}+1\right|+C_1=\ln\left[\mathrm{e}^{C_1}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\right]^{-1}$,

进而 $(1+y^2)\left(\mathrm{e}^{C_1}\dfrac{1+x^2}{x^2}\right)=1$, 即 $(1+y^2)(1+x)^2=C_2x^2\ \ (C_2>0)$.

2.2 齐次方程

[类型2.2.1] 齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的方程的解法:

(1) 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$. 两边对 x 求全微分得: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$.

(2) 化为变量分离方程 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{g(u)-u}{x}$, 解得: 通解 $\Phi(u,x,c)=0$ 或 $u=\varphi(x,c)$.

(3) 回代 $u=\dfrac{y}{x}$ 解出 y .

[注] 函数 $f(x,y)$ 齐次 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 常数 t , 有 $f(x,y)=f(tx,ty)$

$\Leftrightarrow\exists$ 函数 g 或 $h\ s.t.\ f(x,y)=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 或 $f(x,y)=h\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

[例2.2.1] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$.

[解] 显然原方程齐次. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 原方程化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u$.

(1) $\tan u=0$ 时, $u=0$. 经检验: $u=0$ 是原方程的解, 此时 $y=0$.

(2) $\tan u\neq 0$ 时, 分离变量得: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 两边积分得: $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}(\sin u)}{\sin u}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,

解得: $\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$, 即 $\sin u=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot x$, 亦即 $\sin u=C_2x\ \ (C_2\neq 0)$.

故原方程解为 $\sin\dfrac{y}{x}=C_2x\ \ (C_2\neq 0)$.

综上, 通解为 $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$.

[例2.2.2] 解方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2\sqrt{xy}=y\ \ (x<0)$.

[解] 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$, 显然齐次. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2\sqrt{u}}{x}$.

(1) 经检验, $u=0$ 是方程的解, 此时 $y=0$.

(2) $u\neq 0$ 时, 分离变量得: $\dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 两边积分得: $\sqrt{u}=\ln(-x)+C$.

$\ln(-x)+C\geq 0$ 时, $u=[\ln(-x)+C]^2$, 则 $y=x\cdot[\ln(-x)+C]^2$.

综上, 通解为 $y=\begin{cases}0\\ x\cdot[\ln(-x)+C]^2,\ln(-x)+C\geq 0\\ \text{无解},\ln(-x)+C<0\end{cases}$.

[例2.2.3] 解方程 $\tan y\mathrm{d}x-\cot x\mathrm{d}y=0$.

[解]

(1) $\tan y=0$, 即 $y=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ 时, 经检验, $y=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ 是该方程的解.

(2) $\tan y\neq 0$, 即 $y\neq k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ 时, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\tan x}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cot y}$,

即 $\tan x\mathrm{d}x=\cot y\mathrm{d}y$, 亦即 $\dfrac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\dfrac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y$.

两边积分得: $-\ln|\cos x|=\ln|\sin y|+C_1=\ln\left(\mathrm{e}^{C_1}\cdot|\sin y|\right)$,

即 $\mathrm{e}^{C_1}\cdot|\sin y|\cdot|\cos x|=1$, 亦即 $\sin y\cos x=C_2\ \ (C_2\neq 0)$.

2.3 可化为齐次方程的类型I

[类型2.3.1] 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)\ \ (a,b\neq 0)$ 的方程的解法:

(1) 令 $u=ax+by+c$, 两边对 x 求全微分得: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) 化为变量分离方程 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\cdot f(u)$, 解得: 通解 $\varPhi(u,x,c)=0$ 或 $u=\varphi(x,c)$.

(3) 回代 $u=ax+by+c$ 解出 y .

[例2.3.1] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$.

[解] 令 $u=x+y$, 两边对 x 求全微分得: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+u^2$, 分离变量并两边积分得: $\arctan u=x+C$.

故通解为 $\arctan(x+y)=x+C$.

[注] $(\arctan u)'=\dfrac{1}{1+u^2}$.

[例2.3.2] 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$.

[解] 令 $u=x+y$, 两边对 x 求全微分得: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2+1}{u^2}$, 分离变量得: $\dfrac{u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$,

两边积分得: $u-\arctan u=x+C$, 即 $x+y-\arctan(x+y)=x+C$.

故通解为 $y-\arctan(x+y)=C$.

[注] $(u-\arctan u)'=\dfrac{u^2}{1+u^2}$.

[例2.3.3] 求一平面曲线, 使得其切线介于坐标轴间的部分被切点等分.

[解] 设曲线 $y=f(x)$, 则它在点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$, 其中 (X,Y) 是切线上的点.

切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$ 和 $(0,y-xy')$.

依题意得: $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)=x\\\dfrac{1}{2}(y-xy')=y\end{cases}$, 即 $xy'+y=0$, 亦即 $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$.

分离变量并两边积分得: $xy=C$.

2.4 可化为齐次方程的类型II

[类型2.4.1] 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ 的方程的解法:

(1) $c_1=c_2=0$ 且 $x\neq0$ 时, 化为齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}{a_2+b_2\dfrac{y}{x}}$.

(2) $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=0$ 时, 有如下三种情况:

① $a_1=b_1=0$ 时, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$, 是可化为齐次方程的类型I.

$a_2=b_2=0$ 时, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{c_2}$, 是可化为齐次方程的类型I.

② $b_1=b_2=0$ 时, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{a_1x+c_1}{a_2x+c_2}$, 是变量分离方程.

$a_1=a_2=0$ 时 , 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{b_1y+c_1}{b_2y+c_2}$, 是变量分离方程.

③ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$ 时, $a_1=ka_2,b_1=kb_2$,

原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$.

令 $u=a_2x+b_2y$, 两边对 x 求全微分得: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\cdot f(u)$, 是变量分离方程.

(3) $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 时, 线性方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 有唯一解 (α,β) .

令 $\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=X+\alpha\\ y=Y+\beta\end{cases}$,

原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{a_1X+b_1Y+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)}{a_2X+b_2Y+(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)}=\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=f\left(\dfrac{Y}{X}\right)$, 是齐次方程.

[例2.4.1] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$.

[解] 因 $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-1}{1}$, 解方程组 $\begin{cases}x-y+1=0\\ x+y-3=0\end{cases}$ 得: $(x,y)=(1,2)$.

令 $\begin{cases}x=X+1\\ y=Y+2\end{cases}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{X-Y}{X+Y}$. 令 $u=\dfrac{Y}{X}$, 则 $Y=uX$, 两边对 X 求全微分得: $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}+u$.

原方程化为 $X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u}$.

(1) $1-2u-u^2=0$时, 经检验, $Y^2+2XY-X^2=0$ 是解,

即 $(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=0$ 是原方程的解.

(2) $1-2u-u^2\neq 0$ 时, 分离变量得: $\dfrac{\mathrm{d}X}{X}=\dfrac{1+u}{1-2u-u^2}\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}(1-2u-u^2)}{1-2u-u^2}$,

两边积分得: $\ln X^2=-\ln|u^2+2u-1|+C$, 则 $X^2(u^2+2u-1)=C_1\ \ (C_1\neq 0)$.

代入 $u=\dfrac{Y}{X}$ 得: $Y^2+2XY-X^2=C_1$.

代入 $\begin{cases}x=X+1\\ y=Y+2\end{cases}$ 得: $(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C_1\ \ (C_1\neq 0)$.

综上, 通解为 $-x^2-2x+2xy+y^2-6y=C$.

[例2.4.2] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{2x-2y-3}$.

[解] 因 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{-2}$, 令 $u=x-y$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u-4}{2u-3}$.

(1) $u=4$ 时, 经检验, $x-y=4$ 是原方程的解.

(2) $u-4\neq 0$ 时, 分离变量, 解得: $2u+5\ln|u-4|=x+C_1$, 即 $(u-4)^5=C_2\cdot\mathrm{e}^{x-2u}\ \ (C_2\neq 0)$.

综上, 通解为 $(x-y-4)^5=C\mathrm{e}^{2y-x}$.

2.5 一阶线性ODE的通解公式

[**类型2.5.1**] 一阶线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)\cdot y+Q(x)$ 的解法:

(1) $Q(x)\equiv 0$ 时为一阶齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)\cdot y$, 通解为 $y=C\cdot \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$.

(2) $Q(x)\not\equiv 0$ 时为一阶非齐次线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$, 通解为
$y=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int Q(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$.

[**证**] [**常数变易法**] 若将(2)按(1)形式求解, 则通解为 $y=C(x)\cdot \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$.

两边对 x 求全微分得: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}\cdot \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)P(x)\cdot \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$,

则 $\dfrac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}\cdot \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)P(x)\cdot \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
$=P(x)y+Q(x)=C(x)P(x)\cdot \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}+Q(x)$,

解得: $\dfrac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}=Q(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$, 两边积分得: $C(x)=\displaystyle\int Q(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$.

故通解为 $y=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int Q(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$.

[**注1**] 注意(2)的通解中第一个 e 之前无 C , 第二个 e 的指数有负号.

[**注2**] 通解 $y=C\cdot \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\displaystyle\int Q(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, 其中第一项是齐次线性微分方程的通解, 第二项是非齐次线性微分方程一个特解, 则非齐次线性微分方程的通解的结构: 通解等于其对应的齐次方程的通解与自身的一个特解之和.

[**类型2.5.2**] 一阶线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=P(y)\cdot x+Q(y)$ 的解法:

(1) $Q(y)\equiv 0$ 时为一阶齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=P(y)\cdot x$, 通解为 $x=C\cdot \mathrm{e}^{\int Q(y)\mathrm{d}y}$.

(2) $Q(y)\not\equiv 0$ 时为一阶非齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=P(y)\cdot x+Q(y)$, 通解为
$x=\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\displaystyle\int Q(y)\cdot \mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$.

[**注**] 注意(2)的通解中第一个 e 之前无 C , 第二个 e 的指数有负号.

[**例2.5.1**] 解方程 $y'+y\sin x=0$, 并求满足条件 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$ 的特解.

[**解**] $P(x)=-\sin x$, 则通解为 $y=C\cdot \mathrm{e}^{\int(-\sin x)\mathrm{d}x}=C\cdot \mathrm{e}^{\cos x}$.

代入 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$ 得: 特解 $y=2\mathrm{e}^{\cos x}$.

[例2.5.2] 解方程 $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-ny=\mathrm{e}^x(x+1)^{n+1}\ \ (n\in\text{Const.})$.

[解] $x\neq -1$ 时, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{n}{x+1}y+\mathrm{e}^x(x+1)^n$.

$P(x)=\dfrac{n}{x+1},Q(x)=\mathrm{e}^x(x+1)^n,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=(x+1)^n$,

故通解为 $y=(x+1)^n\left(\displaystyle\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C\right)=(x+1)^n(\mathrm{e}^x+C)$.

[例2.5.3] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x-y^2}$.

[解] 显然 $y=0$ 是方程的一个解, 下面讨论 $y\neq 0$ 的情况. 以 y 为未知函数时原方程非线性.

以 x 为未知函数时, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{2x-y^2}{y}=\dfrac{2}{y}x-y$, 是一阶非齐次线性微分方程.

$P(y)=\dfrac{2}{y},Q(y)=-y,\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}=y^2$,

故通解为 $x=y^2\left(\displaystyle\int -\frac{\mathrm{d}y}{y}+C\right)=-y^2\ln|y|+Cy^2$.

[例2.5.4] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\sin x$.

[引理] $\displaystyle\int \sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)\mathrm{e}^{-x}+C$.

[引.证] $\displaystyle I=\int \sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int \sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}+\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$

$\displaystyle =-\sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}-\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}-\cos x\cdot\mathrm{e}^{-x}-\int \sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$=-(\sin x+\cos x)\mathrm{e}^{-x}-I$, 解得: $I=-\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)\mathrm{e}^{-x}+C$.

[解] $P(x)=1,Q(x)=\sin x,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=e^x$,

故通解为 $y=\mathrm{e}^x\left(\displaystyle\int \sin x\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right)=C\cdot\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$.

[例2.5.5] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-s\cos t+\dfrac{1}{2}\sin 2t$.

[引理] $\displaystyle\int \frac{\sin 2t}{2}\cdot\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t=(\sin t-1)\mathrm{e}^{\sin t}+C$.

[引.证] $\displaystyle\int \frac{\sin 2t}{2}\cdot\mathrm{e}^{\sin t}=\int \sin t\cdot\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}(\sin t)\xlongequal{u=\sin t}\int u\cdot\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\int u\mathrm{d}\mathrm{e}^u$

$=(u-1)\mathrm{e}^u+C=(\sin t-1)\mathrm{e}^{\sin t}+C$.

[解] $P(t)=-\cos t,Q(t)=\dfrac{\sin 2t}{2},\mathrm{e}^{\int P(t)\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-\sin t}$,

故通解为 $s=\mathrm{e}^{\int -\cos t\mathrm{d}t}\left(\displaystyle\int \frac{\sin 2t}{2}\cdot\mathrm{e}^{-\int -\cos t\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)=\sin t-1+C\mathrm{e}^{-\sin t}$.

[例2.5.6] $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{ay}{x}+\dfrac{x+1}{x}\ \ (a\in\mathrm{Const.})$.

[解]

(1) $a=0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+1}{x}$, 两边积分得: $y=x+\ln|x|+C_1$.

(2) $a=1$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x+1}{x}$. $P(x)=\dfrac{1}{x},Q(x)=\dfrac{x+1}{x},\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=|x|$,

故通解为 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\dfrac{x+1}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_2\right)=x\ln|x|-1+C_2\cdot x$.

(3) $a\neq0,1$ 时, $P(x)=\dfrac{a}{x},Q(x)=\dfrac{x+1}{x},\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^a\cdot\ln|x|$,

故通解为$y=\mathrm{e}^{\int\frac{a}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\dfrac{x+1}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{a}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_3\right)=\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}+C_3\cdot x^a$.

综上, 通解为 $y=\begin{cases}x+\ln|x|+C_1\ \ ,a=0\\ x\ln|x|-1+C_2\cdot x\ \ ,a=1\\ \dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}+C_3\cdot x^a\ \ ,a\neq0,1\end{cases}$.

[习题2.5.7] 求一平面曲线 $s.t.$ 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方.

[解] 设曲线 $y=f(x)$, 则在点 (x_0,y_0) 处的切线方程 $y-y_0=y'(x-x_0)$.

由题意: $y_0-y'x_0=x_0^2$, 则 $xy'=y-x^2$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-x$.

$P(x)=\dfrac{1}{x},Q(x)=-x,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=\ln|x|$,

故通解为 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\left(\int-x\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x+C\right)=x(C-x)$.

2.6 Bernoulli方程

[类型2.6.1] Bernoulli方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)\cdot y+Q(x)\cdot y^n\ \ (n\in\mathbb{R},n\neq0,1)$ 的解法:

(1) $y\neq0$ 时, 原方程化为 $y^{-n}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)\cdot y^{1-n}+Q(x)$.

(2) 令 $z=y^{1-n}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Q(x)$.

(3) 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)\cdot P(x)\cdot z+(1-n)\cdot Q(x)$, 是一阶线性微分方程.

(4) $n>0$ 时, 原方程有解 $y=0$.

[例2.6.1] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=6\dfrac{y}{x}-xy^2$.

[解] 该方程是 $n=2$ 的Bernoulli方程, $P(x)=\dfrac{6}{x},Q(x)=-x$.

令 $z=y^{-1}$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{6}{x}z+x\ .\ p(x)=-\dfrac{6}{x},q(x)=x,\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x^6}$,

故通解为 $z=\dfrac{1}{x^6}\left(\displaystyle\int x\cdot x^6\mathrm{d}x+C\right)=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{C}{x^6}$, 即 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{C}{x^6}$.

2.7 恰当方程

[定义2.7.1] 设 $M(x,y),N(x,y)$ 在某矩形域内是 x,y 的连续函数, 且有一阶连续偏导数. 若方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的 LHS 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$, 则称该方程为**恰当微分方程**或**全微分方程**, 其通解为 $u(x,y)=C$.

[定理2.7.1] 设 $M(x,y),N(x,y)$ 在某矩形域内是 x,y 的连续函数, 且有一阶连续偏导数, 则方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 恰当的充要条件为: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

[证]

(必) 若 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 恰当,

则 $\exists$ 二元函数 $u(x,y)\ s.t.\ M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$,

进而 $M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x},N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$. 两边分别对 y,x 求偏导得: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y},\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 都连续, 则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 都连续, 进而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, 即 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

(充) 设 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$. 下面构造二元函数 $u(x,y)\ s.t.\ M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x},N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

$M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 两边对 x 积分得: $\displaystyle\int M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)=u(x,y)\ \ (*)$,

其中 $\varphi(y)$ 是关于 y 的任意可导函数.

下面求 $\varphi(y)\ s.t.\ u(x,y)$ 同时满足 $N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

$(*)$ 式两边对 y 求偏导得: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int M(x,y)\mathrm{d}x+\dfrac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=N(x,y)$,

则 $\dfrac{\partial\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=N(x,y)-\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int M(x,y)\mathrm{d}x$.

注意到 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]$

$=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0$,

则 $\varphi(y)$ 是关于 y 的一元函数, 进而两边积分得: $\varphi(y)=\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

故 $u(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

[**注**] 方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 恰当

$\Leftrightarrow \exists$ 二元函数 $u(x,y)\ s.t.\ M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)\end{cases}\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

[**类型2.7.1**] 恰当微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的解法:

(1) 用恰当微分方程的判定求 $u(x,y)$.

① $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\ \ (i)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)\ \ (ii)\end{cases}$.

② (i) 式对 x 积分得 $u(x,y)$ 的表达式 (iii) 式.

③ (iii) 式对 y 求偏导, 求得 $\varphi'(y)$.

③ 对 $\varphi'(y)$ 积分, 求得 $\varphi(y)$, 代入 (iii) 式求得 $u(x,y)$, 写出原方程的通解.

$u(x,y)$ 也可直接用公式求解, 即: $u(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

(2) 用曲线积分求 $u(x,y)$.

设 $M(x,y),N(x,y)$ 都在某单连通区域 D 上连续, 且有一阶连续偏导数.

因 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, 则对 D 内任一按段光滑的曲线 L , 曲线积分 $\int_L M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

取 L 为从点 (x_0,y_0) 到 (x,y) 的折线路径, 则 $u(x,y)$ 有如下两种求法:

① $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\mathrm{d}y$.

② $u(x,y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}M(x,y)\mathrm{d}x$.

(3) 用常用的二元函数的全微分配凑.

$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy)$	
$\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2}=\mathrm{d}\dfrac{y}{x}$
$\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\left\|\dfrac{x}{y}\right\|\right)$	$\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}=\mathrm{d}\left(\ln\left\|\dfrac{x-y}{x+y}\right\|\right)$
$\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$	$\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\mathrm{arccot}\,\dfrac{y}{x}\right)$

实际运用中, 将只含 $x,\mathrm{d}x$ 的项、只含 $y,\mathrm{d}y$ 的项、交叉项分开配凑.

[**例2.7.1**] 解方程 $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\mathrm{d}y=0$.

[**解1**] $M(x,y)=3x^2+6xy^2,N(x,y)=6x^2y+4y^3$. 因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=12xy=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, 则该方程恰当.

下面求二元函数 $u(x,y)\ s.t.\ \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)=3x^2+6xy^2\ \ (i)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=6x^2y+4y^3\ \ (ii)\end{cases}$.

(i) 式对 x 积分得: $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)\ \ (iii)$.

(iii) 式对 y 求偏导得: $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=6x^2y+\dfrac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=6x^2y+4y^3$,

则 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=4y^3$,对 y 积分得: $\varphi(y)=y^4$.

则 $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4$, 故通解为 $x^3+3x^2y^2+y^4=C$.

$u(x,y)$ 也可直接用公式求解:

$$u(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=(x^3+3x^2y^2)+\int(6x^2y+4y^3-6x^2y)\mathrm{d}y=x^3+3x^2y^2+y^4\ .$$

[**解2**] 因 $M(x,y)=3x^2+6xy^2,N(x,y)=6x^2y+4y^3,\dfrac{\partial M}{\partial y}=12xy,\dfrac{\partial N}{\partial x}=12xy$ 都在 $\mathbb{R}^2$ 上连续,

则对 $\mathbb{R}^2$ 上任一按段光滑的曲线 L , 曲线积分 $\displaystyle\int_L M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

取 L 为从点 $(0,0)$ 到点 (x,y) 的折线路径,

则 $u(x,y)=\displaystyle\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(4x^2y+4y^3)\mathrm{d}y=x^3+3x^2y^2+y^4$, 故通解为 $x^3+3x^2y^2+y^4=C$.

[**解3**] 注意到 $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\mathrm{d}y$

$$=(3x^2\mathrm{d}x)+(4y^3\mathrm{d}y)+(6xy^2\mathrm{d}x+6x^2y\mathrm{d}y)=\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}y^4+(3y^2\mathrm{d}x^2+3x^2\mathrm{d}y^2)$$

$$=\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}y^4+3\mathrm{d}(x^2y^2)=\mathrm{d}(x^3+3x^2y^2+y^4)=0\ ,$$

故通解为 $x^3+3x^2y^2+y^4=C$.

[例2.7.2] 验证下列方程 $\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right)\mathrm{d}y=0$ 是恰当微分方程, 并求解.

[解] $M(x,y)=\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}, N(x,y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}$.

因 $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{2xy}{(x-y)^3}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, 则恰当.

因 $R(x,y)=\displaystyle\int M(x,y)\mathrm{d}x=-\dfrac{y^2}{x-y}-\ln|x|$,

则 $u(x,y)=R(x,y)+\displaystyle\int\left[N(x,y)-\dfrac{\partial R(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}y=-\dfrac{y^2}{x-y}-\ln|x|+\int\left(\dfrac{1}{y}-1\right)\mathrm{d}y$

$=\dfrac{y^2}{x-y}-\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|-y$, 故通解为 $\dfrac{y^2}{x-y}-\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|-y=C$.

[例2.7.3] 解方程 $2x\left(y\mathrm{e}^{x^2}-1\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=0$.

[解] $M(x,y)=2x\left(y\mathrm{e}^{x^2}-1\right), N(x,y)=\mathrm{e}^{x^2}$. 因 $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x\mathrm{e}^{x^2}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, 则恰当.

原方程化为 $\left(2xy\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y\right)-2x\mathrm{d}x=0$, 即 $\mathrm{d}\left(y\mathrm{e}^{x^2}-x^2\right)=0$, 故通解为 $y\mathrm{e}^{x^2}-x^2=C$.

2.8 非恰当方程与积分因子

[定义2.8.1] 设 $M(x,y),N(x,y)$ 在某矩形域内是 x,y 的连续函数, 且有一阶连续偏导数. 对方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0\ \ (*)$, 若 $\exists$ 连续可微的函数 $\mu(x,y)\neq 0\ s.t.\ \mu(x,y)\cdot M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)\cdot N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 恰当, 即 $\exists$ 函数 $u(x,y)\ s.t.$ $u(x,y)\neq 0\ s.t.\ \mu(x,y)\cdot M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)\cdot N(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$, 则称 $\mu(x,y)$ 为方程 $(*)$ 的**积分因子**, 此时该方程的通解为 $u(x,y)=C$.

[注] 可以证明: 若方程 $(*)$ 有解, 则存在积分因子, 且积分因子不唯一, 但该方程的通解唯一.

[例2.8.1] 方程 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$ 有如下的积分因子: $\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{y^2},\dfrac{1}{xy},\dfrac{1}{x^2+y^2},\dfrac{1}{x^2-y^2}$ 等,

因为 $\mathrm{d}\left(-\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2},\mathrm{d}\dfrac{x}{y}=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2},\mathrm{d}\left(\ln\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}$,

$\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2},\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-y}{x+y}\right)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}$.

[定理2.8.1] 设 $M(x,y),N(x,y)$ 在某矩形域内是 x,y 的连续函数, 且有一阶连续偏导数, 则函数 $\mu(x,y)=0$ 是方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的积分因子 iff $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, 即 $N\dfrac{\partial\mu}{\partial x}-M\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$.

[**定理2.8.2**] 设 $M(x,y),N(x,y)$ 在某矩形域内是 x,y 的连续函数, 且有一阶连续偏导数. 对方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0\ \ (*)$, 有:

(1) 方程$(*)$存在只与 y 有关的积分因子 iff $\dfrac{1}{-M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(y)$, 此时 $\mu(y)=\mathrm{e}^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y}$.

(2) 方程 $(*)$ 存在只与 x 有关的积分因子 iff $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=\psi(x)$, 此时 $\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\psi(x)\mathrm{d}x}$.

[**证**] 以证明(2)为例, (1)同理.

若方程 $(*)$ 存在只与 x 有关的积分因子 $\mu=\mu(x)$, 则 $\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=0$.

由**定理2.8.1**: $N\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\mathrm{d}x$.

若能从上式解出 $\mu=\mu(x)$, 则上式的RHS应与 y 无关, 即 $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=\psi(x)$ 只是 x 的函数.

[**注1**] 注意(1)中系数 $\dfrac{1}{-M}$ 的负号.

[**注2**] 注意积分因子不是 $\varphi(y)$ 或 $\psi(x)$, 而是 $\mu(y)=\mathrm{e}^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y}$ 或 $\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\psi(x)\mathrm{d}x}$.

[**例2.8.2**] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$.

[**解**] 原方程化为 $[P(x)y+Q(x)]\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0\ \ (*)$.

因 $M(x,y)=P(x)y+Q(x),N(x,y)=-1$, 则 $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=-P(x)$,

进而方程 $(*)$ 有关于 x 的积分因子 $\mu(x)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

$(*)$ 两边同乘 $\mu(x)$ 得: $P(x)\cdot\mathrm{e}^{\int -P(x)\mathrm{d}x}y\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+Q(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0$,

即 $-y\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+Q(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0$,

亦即 $-\mathrm{d}\left(y\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\right)+Q(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0$.

故通解为 $y\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-\displaystyle\int Q(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=C$, 即 $y=\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\displaystyle\int Q(x)\cdot\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$.

[**例2.8.3**] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\ \ (y>0)$.

[**解**] 原方程化为 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x$, 即 $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\ \ (*)$.

显然该方程有积分因子 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

方程 $(*)$ 两边同乘 μ 得: $\dfrac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{d}x$, 则通解为 $\sqrt{x^2+y^2}=x+C$.

[**例2.8.4**] 解方程 $y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$.

[**解1**] 因 $M(x,y)=y, N(x,y)=y-x, \dfrac{\partial M}{\partial y}=1, \dfrac{\partial N}{\partial x}=-1$, 则原方程非恰当.

因 $\dfrac{1}{-M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=-\dfrac{2}{y}=\varphi(y)$, 则该方程有只与 y 有关的积分因子 $\mu(y)=\mathrm{e}^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y^2}$.

原方程两边同乘 $\mu(y)$ 得: $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}y}{y}-\dfrac{x\mathrm{d}y}{y^2}=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y}+\ln|y|\right)=0$,

故通解为 $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=C$.

[**解2**] 原方程化为 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=-y\mathrm{d}y\ \ (*)$. 显然该方程有积分因子 $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$ 或 $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

因方程 $(*)$ 的 RHS 只含 y , 则取积分因子 $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$.

方程 $(*)$ 两边同乘 $\mu(y)$ 得: $\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y}+\ln|y|\right)=0$, 故通解为 $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=C$.

[**解3**] 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x-y}$, 是齐次微分方程.

令 $u=\dfrac{x}{y}$, 则 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\dfrac{u}{1-u}$, 即 $\dfrac{1-u}{u^2}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. 解得: $-\dfrac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|+C$,

故通解为 $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=C$.

[**解4**] 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y}x-1$, 这是以 x 为未知函数的非齐次线性微分方程,

故通解为 $x=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}y}{y}}\left[\displaystyle\int\left(-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{d}y}{y}}\right)\mathrm{d}y+C\right]=y(-\ln|y|+C)$.

[**例2.8.5**] 解方程 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

[**解**] 显然该方程有积分因子 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

方程两边同乘 $\mu(x,y)$ 得: $\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\mathrm{d}x=0$, 即 $\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{x}{y}-x\right)=0$,

故通解为 $\arctan\dfrac{x}{y}-x=C$.

[**例2.8.6**] 求方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 分别有形如 $\mu(x+y)$ 和 $\mu(xy)$ 的积分因子的充要条件.

[**解**] μ 是方程 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$ 的积分因子的充要条件是: $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$,

即 $M\dfrac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial M}{\partial y}=N\dfrac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial N}{\partial x}$, 亦即 $N\dfrac{\partial\mu}{\partial x}-M\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu\ \ (*)$.

(1) 令 $z=x+y$, 则 $\mu(x+y)=\mu(z)$, 此时 $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}$.

代入 $(*)$ 式得: $(N-M)\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}\mathrm{d}z$.

故方程 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$ 有形如 $\mu(x+y)$ 积分因子的充要条件是: $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=f(z)=f(x+y)$.

(2) 令 $z=xy$, 则 $\mu(xy)=\mu(z)$, 此时 $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z},\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}$.

代入 $(*)$ 式得: $(yN-xM)\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}$.

故方程 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$ 有形如 $\mu(xy)$ 积分因子的充要条件是: $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=g(z)=g(xy)$.

2.9 一阶隐式微分方程I

[**类型2.9.1**] 考察一阶隐式微分方程 $F(x,y,y')=0$.

(1) 若 y 有显示表示, 即原方程可化为 $y=f(x,y')\ \ (*)$, 其中 $f(x,y')$ 有连续偏导数.

令 $p=y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则方程 $(*)$ 化为 $y=f(x,p)$.

两边对 x 求微分得: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 即 $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\ \ (i)$, 这是关于 x 和 p 的一阶微分方程.

① 若方程 (i) 的通解为 $p=\varphi(x,C)$, 则方程 $(*)$ 的通解为 $f(x,\varphi(x,C))$.

② 若方程 (i) 的通解为 $x=\psi(p,C)$, 则方程 $(*)$ 的通解为 $\begin{cases}x=\psi(p,C)\\y=f(\psi(p,C),p)\end{cases}$.

③ 若方程 (i) 的通解为 $\varPhi(x,p,C)=0$, 则方程 $(*)$ 的通解为 $\begin{cases}\varPhi(x,p,C)=0\\y=f(x,p)\end{cases}$.

(2) 若 x 有显式表示, 则原方程可化为 $x=f(y,y')\ \ (**)$, 其中 $f(y,y')$ 有连续偏导数.

令 $p=y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则方程 $(**)$ 化为 $x=f(y,p)$.

两边对y求微分得: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 即 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\ \ (ii)$, 这是关于 y 和 p 的一阶微分方程.

① 若方程 (ii) 的通解为 $p=\psi(y,C)$, 则方程 $(**)$ 的通解为 $f(\psi(y,C),y)$.

② 若方程 (ii) 的通解为 $y=\varphi(p,C)$, 则方程 $(**)$ 的通解为 $\begin{cases}x=f(\varphi(p,C),p)\\y=\varphi(p,C)\end{cases}$.

③ 若方程 (ii) 的通解为 $\Psi(x,p,C)=0$, 则方程 $(**)$ 的通解为 $\begin{cases}\Psi(x,p,C)=0\\x=f(y,p)\end{cases}$.

[**例2.9.1**] 解方程 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+2x\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$.

[**解1**] 令 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则 $y=p^3+2px\ \ ①$.

两边对 x 求微分得: $p=3p^2\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+2x\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+2p$, 即 $3p^2\mathrm{d}p+2x\mathrm{d}p+p\mathrm{d}x=0\ \ ②$.

(1) $p=0$时, 经检验, $y=0$ 是一个解.

(2) $p\neq 0$ 时, 上式两边同乘 p 得: $3p^3\mathrm{d}p+2px\mathrm{d}p+p^2\mathrm{d}x=0$, 即 $\mathrm{d}p^4+\mathrm{d}(p^2x)=0$.

则方程②的通解为 $\dfrac{3}{4}p^4+p^2x=C$, 解得: $x=\dfrac{C-3p^4}{4p^2}$.

代入①式, 解得: $y=\dfrac{2C}{p}-\dfrac{p^3}{2}$. 故通解为 $\begin{cases}x=\dfrac{C-3p^4}{4p^2}\\y=\dfrac{2C}{p}-\dfrac{p^3}{2}\end{cases}\ \ (p\neq 0)$.

[**解2**] 令 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则 $y=p^3+2px\ \ ③$.

(1) $p=0$时, 经检验, $y=0$ 是一个解.

(2) $p\neq 0$ 时, 由③式解得: $x=\dfrac{y-p^3}{2p}$.

两边对 y 求微分得: $\dfrac{1}{p}=\dfrac{p\left(1-3p^2\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)-(y-p^3)\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}}{2p^2}$,

即 $p\mathrm{d}y+y\mathrm{d}p+2p^3\mathrm{d}p=0$, 其通解为 $2py+p^4=C$, 解得: $y=\dfrac{C-p^4}{2p}$.

代入③式, 解得: $x=\dfrac{C-3p^4}{4p^2}$. 故通解为 $\begin{cases}x=\dfrac{C-3p^4}{4p^2}\\y=\dfrac{C}{2p}-\dfrac{p^3}{2}\end{cases}\ \ (p\neq 0)$.

[**例2.9.2**] 解方程 $y=(y')^2\mathrm{e}^{y'}$.

[**解**] 令 $y'=p$, 则原方程化为 $y=p^2\mathrm{e}^p$.

(1) $p=0$ 时, $y=C$. 经检验, $y=0$ 是解.

(2) $p\neq 0$ 时, 两边对 x 求微分得: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2\mathrm{e}^p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 即 $p=\mathrm{e}^p(2p+p^2)\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 即 $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^p(p+2)\mathrm{d}p$.

两边积分得: $x=\mathrm{e}^p(p+1)+C$. 故通解为 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^p(p+1)+C\\y=p^2\mathrm{e}^p\end{cases}$.

2.10 一阶隐式微分方程II

[**类型2.10.1**] 考察一阶隐式微分方程 $F(x,y,y')=0$.

(1) 若方程形如 $F(x,y')=0$, 令 $p=y'$, 则原方程化为 $F(x,p)=0$, 它表示平面 xOp上的一条曲线.

设该曲线的参数表示为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\p=\psi(t)\end{cases}$, 其中 t 为参数,

则 $\mathrm{d}y=\psi(t)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t$, 两边积分得: $y=\displaystyle\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t+C$.

故通解为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\displaystyle\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t+C\end{cases}$.

(2) 若方程形如 $F(y,y')=0$, 令 $p=y'$, 则原方程化为 $F(y,p)=0$, 它表示平面 yOp 上的一条曲线.

① $p=y'=0$ 时, 原方程有解 $y=C$.

② $p=y'\neq 0$ 时, 设该曲线的参数表示为 $\begin{cases}y=\varphi(t)\\p=\psi(t)\end{cases}$, 其中 t 为参数.

因 $\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x$, 则 $\mathrm{d}x=\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t$, 两边积分得: $x=\displaystyle\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C$.

故通解为 $\begin{cases}x=\displaystyle\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C\\y=\varphi(t)\end{cases}$.

[**例2.10.1**] 解方程 $x^3+(y')^3-3xy'=0$, 其中 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

[**解**] 令 $y'=p=tx$, 代入原方程, 解得: $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$, 则 $p=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

$\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x=\dfrac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t$, 两边积分得: $y=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+C$.

故通解为 $\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^3}\\y=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+C\end{cases}$.

[**例2.10.2**] 解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$, 其中 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

[**解**] 显然 $y=0$ 非方程的解, 下面讨论 $y\neq 0$ 的情况.

令 $2-y'=ty$, 则 $y'=2-ty$, 代入原方程得: $y^2(ty-1)=t^2y^2$,

解得: $y=\dfrac{1}{t}+t$, 则 $y'=2-ty=1-t^2$.

(1) $y'=0$ 时, 原方程化为 $y^2=4$. 经检验, $y=\pm 2$ 是解.

(2) $y'\neq 0$ 时, $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{y'}=-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$, 两边积分得: $x=\dfrac{1}{t}+C$. 故通解为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}+C \\ y=\dfrac{1}{t}+t \end{cases}$.

[**例2.10.3**] 解方程 $x(y')^3=1+y'$.

[**解1**] 令 $y'=p$.

(1) $p=0$ 时, $y=C$. 原方程化为 $Cx^3=1$, 无解.

(2) $p\neq 0$ 时, $x=\dfrac{1+y'}{(y')^3}=\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{p^2}$.

两边对 y 求微分得: $\dfrac{1}{p}=\left(-\dfrac{3}{p^4}-\dfrac{2}{p^3}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 即 $\dfrac{2p+3}{p^3}\mathrm{d}p=-\mathrm{d}y$.

两边积分得: $y=\dfrac{3}{2p^2}+\dfrac{2}{p}+C$. 故通解为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{p^2} \\ y=\dfrac{3}{2p^2}+\dfrac{2}{p}+C\ \ (p\neq 0) \end{cases}$.

[**解2**] $y'=0$ 时, $y=C$. 原方程化为 $Cx^3=1$, 无解. 下面讨论 $y'\neq 0$ 的情况.

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\dfrac{1}{t}$, 则 $x=\dfrac{1+y'}{(y')^3}=t^3+t^2$.

$\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{t}=(3t+2)\mathrm{d}t$, 两边积分得: $y=\dfrac{3}{2}t^2+2t+C$. 故通解为 $\begin{cases} x=t^3+t^2 \\ y=\dfrac{3}{2}t^2+2t+C \end{cases}$.

[**例2.10.4**] 解方程 $(y')^3-x^3(1-y')=0$.

[**解1**] 令 $y'=tx$, 原方程化为 $[t^3-(1-tx)]x^3=0$.

① $x^3=0$, 即 $x=0$ 时, 经检验: $y'=0$ 是解, 此时 $y=C$.

② $t^3-(1-tx)=0$, 即 $t^3=1-tx$ 时, 若 $t=0$, 则①中已求得解 $y'=0$.

$t\neq 0$ 时, 解得: $x=\dfrac{1}{t}-t^2$.

两边对 y 求微分得: $\dfrac{1}{1-t^3}=\left(-\dfrac{1}{t^2}-2t\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$, 即 $\mathrm{d}y=\left[(1-t^3)\left(-\dfrac{1}{t^2}-2t\right)\right]\mathrm{d}t$,

两边积分得: $y=-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{2}{5}t^5+\dfrac{1}{t}+C$. 故通解为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{t}-t^2\\ y=-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{2}{5}t^5+\dfrac{1}{t}+C\end{cases}\quad(t\neq 0)$.

[**解2**] 令 $x=ty'$, 原方程化为 $(y')^3+t^3(y')^3(1-y')=0$.

① $y'=0$ 时, 经检验: $y'=0$ 是原方程的解, 此时 $y=C$.

② $y'\neq 0$ 时, 原方程化为 $1-t^3(1-y')=0$, 解得: $y'=1-\dfrac{1}{t^3}$, 则 $x=t-\dfrac{1}{t^2}$.

$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left(1-\dfrac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}\left(t-\dfrac{1}{t^2}\right)$, 两边积分得: $y=-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{2}{5t^5}+t+C$.

故通解为 $\begin{cases}x=t-\dfrac{1}{t^2}\\ y=-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{2}{5t^5}+t+C\end{cases}$.

[**例2.10.5**] 解方程 $y[1+(y')^2]=2a\ \ (a\in\mathrm{Const.})$.

[**解1**] 令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=p$, 则 $y=\dfrac{2a}{1+p^2}$. 两边对 x 求微分得: $p=-2a\cdot\dfrac{2p}{(p+1)^2}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

① $p=0$ 时, $y=C$, 代入原方程解得: $y=2a$.

② $p\neq 0$ 时, $-4a\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{(p+1)^2}=\mathrm{d}x$, 两边积分得: $x=\dfrac{4a}{p+1}+C$. 故通解为 $\begin{cases}x=\dfrac{4a}{p+1}+C\\ y=\dfrac{2a}{p^2+1}\end{cases}$.

[**解2**] 令 $y'=\tan t$, 原方程化为 $y=2a\cos^2 t$.

两边对 x 求微分得: $\tan t=-2a\cdot\sin 2t\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$, 即 $-4a\cos^2 t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$,

两边积分得: $x=-2at-a\sin 2t+C$, 故通解为 $\begin{cases}x=-2at-a\sin 2t+C\\ y=2a\cos^2 t\end{cases}$.

[**例2.10.6**] 解方程 $x^2+(y')^2=1$.

[**解1**] 令 $y'=\cos t$, 原方程化为 $x=\sin t$. 两边对 y 求导得: $\mathrm{d}y=\cos^2 t\mathrm{d}t$,

两边积分得: $y=\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin 2t}{4}+C$. 故通解为 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin 2t}{4}+C\end{cases}$.

[**解2**] 令 $x=\cos t$, 则 $y'=\sin t$.

$$y=\int\mathrm{d}y=\int y'\mathrm{d}x=\int\sin t\mathrm{d}(\cos t)=-\int\sin^2 t\mathrm{d}t=-\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C,$$

故通解为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin 2t}{4}+C\end{cases}$.

[**例2.10.7**] 解方程 $y^2(y'-1)=(2-y')^2$

[**解**] 令 $2-y'=ty$, 原方程化为 $y^2(1-ty)=t^2y^2$.

(1) $t=0$, 即 $2-y'=0$ 时, 经检验, $y'=2$ 是解, 此时 $y=2C$, 代入原方程, 解得: $y=0$.

(2) $t\neq 0$ 时, 解得: $y=\dfrac{1}{t}-t$, 则 $y'=1+t^2$.

$\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{y'}=-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$, 两边积分得: $x=\dfrac{1}{t}+C$. 故通解为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{t}+C\\ y=\dfrac{1}{t}-t\end{cases}$.