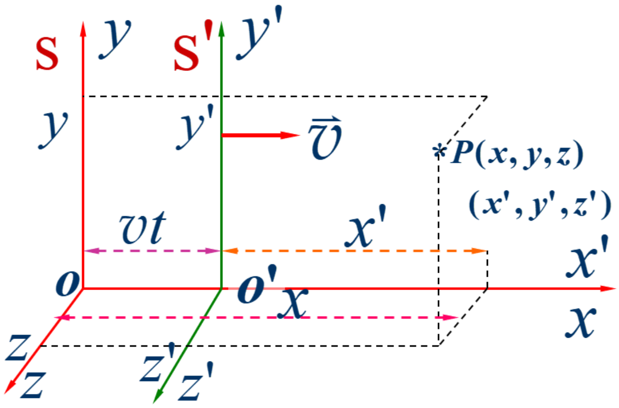
大学物理(2)期末速通教程

6. 相对论

6.0 基本公式

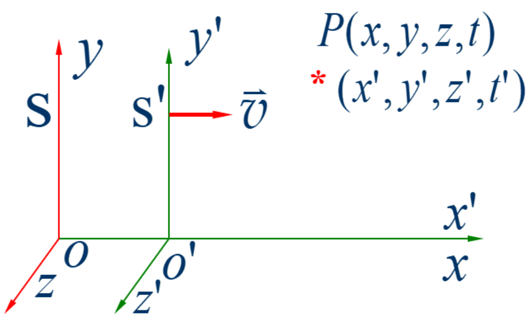
[**Galileo变换**] 如下图,考察两个惯性参考系中同一事件的位置坐标、速度、加速度关系.设S'系相对于S系以匀速v沿x轴运动,$t=t'=0$时,O与O'重合.



位置坐标变换	速度变换关系	加速度变换关系
$\begin{cases} x'=x-vt \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases}$	$\begin{cases} u_x'=u_x-v \\ u_y'=u_y \\ u_z'=u_z \end{cases}$	$\begin{cases} a_x'=a_x \\ a_y'=a_y \\ a_z'=a_z \end{cases}$

[**Lorenz变换**]

(1)如下图,考察两个惯性参考系中同一事件的位置坐标、时间的关系.设S'系相对于S系以匀速v沿x轴运动,
$t=t'=0$时,O与O'重合.



设$\beta=\dfrac{v}{c},\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$,则:

Lorenz正变换	Lorenz逆变换
$\begin{cases} x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma(x-vt) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\dfrac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$	$\begin{cases} x=\gamma(x'+vt') \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\gamma\left(t'+\dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$

(2)考察两个惯性参考系中两个事件的空间间隔和时间间隔的关系.

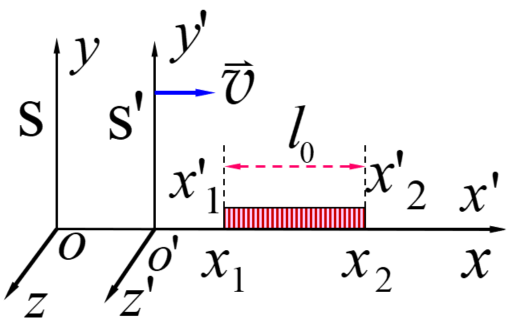
设两事件在S系中的空间间隔和时间间隔为$(\Delta x,\Delta y,\Delta z,\Delta t)$,在$S'$系中的空间间隔和时间间隔为$(\Delta x',\Delta y',\Delta z',\Delta t')$,则:

正变换	逆变换
$\begin{cases} \Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t) \\ \Delta y'=\Delta y \\ \Delta z'=\Delta z \\ \Delta t'=\gamma\left(\Delta t-\dfrac{v}{c^2}\Delta x\right) \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta x=\gamma(\Delta x'+v\Delta t') \\ \Delta y=\Delta y' \\ \Delta z=\Delta z' \\ \Delta t=\gamma\left(\Delta t'+\dfrac{v}{c^2}\Delta x'\right) \end{cases}$

(3)Lorenz速度变换:

正变换	逆变换
$\begin{cases} u_x'=\dfrac{u_x-v}{1-\dfrac{v}{c^2}u_x} \\ u_y'=\dfrac{u_y}{\gamma\left(1-\dfrac{v}{c^2}u_x\right)} \\ u_z'=\dfrac{u_z}{\gamma\left(1-\dfrac{v}{c^2}u_x\right)} \end{cases}$	$\begin{cases} u_x=\dfrac{u_x'+v}{1+\dfrac{v}{c^2}u_x'} \\ u_y=\dfrac{u_y'}{\gamma\left(1+\dfrac{v}{c^2}u_x'\right)} \\ u_z=\dfrac{u_z'}{\gamma\left(1+\dfrac{v}{c^2}u_x'\right)} \end{cases}$

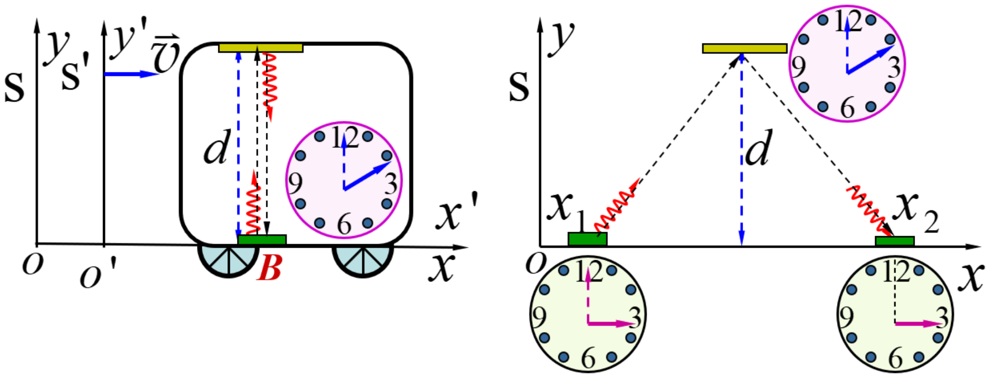
[**长度的收缩**] 如下图,设棒沿x轴对S'系静止放置,在S'系中测得两端的坐标分别为x_1'和x_2'.



(1)棒的固有长度$l_0=x_2'-x_1'$.

(2)在S系中的某时刻t测得棒长l,则$l_0=\dfrac{l}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$,即$l=l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$.

[时间的延缓] 如下图,设S'系中同一地点B发生两个事件:发射光信号(x',t_1')和接受光信号(x',t_2').



(1)S'系中,固有时间$\Delta t'=t_2-t_1=\dfrac{2d}{c}$.

(2)S系中,时间间隔$\Delta t=\dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

[相对论物理量]

(1)相对论质量$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$,其中$m_0$为静质量.

(2)相对论动量$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}=\dfrac{m_0\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma m_0\overrightarrow{v}$.

(3)相对论动能$E_k=E-E_0=mc^2-m_0c^2$,其中总能量$E=mc^2$,静能量$E_0=m_0c^2$.

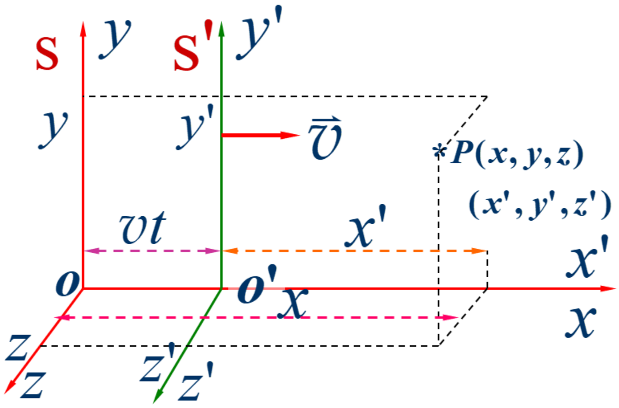
(4)相对论质能关系:$E=mc^2$.

质量的变化和能量的变化的关系:$\Delta E=\Delta m\cdot c^2$.

[相对论动量守恒定律] $\sum\limits_i\overrightarrow{F_i}=\overrightarrow{0}$时,$\sum\limits_i\overrightarrow{p_i}=\sum\limits_i\dfrac{m_{i0}\overrightarrow{v_i}}{\sqrt{1-\beta^2}}$不变.

6.1 Galileo变换与绝对时空观

[**Galileo变换**] 如下图,考察两个惯性参考系中同一事件的位置坐标、速度、加速度的关系.设S'系相对于S系以匀速v沿x轴运动,$t=t'=0$时,O与O'重合.



(1)

位置坐标变换	速度变换关系	加速度变换关系
$\begin{cases} x'=x-vt \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases}$	$\begin{cases} u_x'=u_x-v \\ u_y'=u_y \\ u_z'=u_z \end{cases}$	$\begin{cases} a_x'=a_x \\ a_y'=a_y \\ a_z'=a_z \end{cases}$

(2)因$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a'}$,则$\overrightarrow{F}=m\overrightarrow{a}=m\overrightarrow{a'}$.

[**牛顿力学的相对性原理**] 在两相互作匀速运动的惯性系中,牛顿运动定律有相同的形式.

[**注**] 牛顿力学的相对性原理在宏观、低速范围内与实验结果一致.

[**注**] 光速不满足Galileo变换.

[经典力学的绝对时空观]

(1)绝对时间:

①空间只是运动的场所,与其中的物质完全无关而独立存在.

②空间永恒不变,绝对静止.

③空间的度量与参考系无关,是绝对不变的.

(2)绝对时间:时间均匀流逝,与物质运动无关,不同的惯性系有同一时间.

(3)实验表明:绝对时空观不正确.相对论否定了这种绝对时空观,建立了新的时空概念.

6.2 狭义相对论的基本原理与Lorenz变换

[狭义相对论的基本原理]

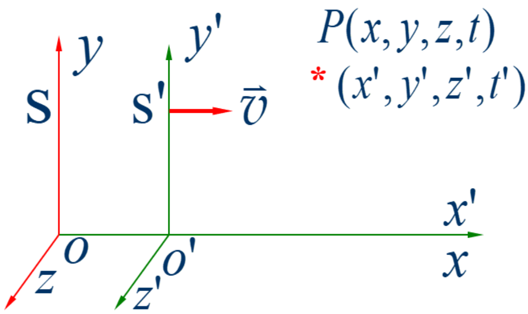
(1)[**相对性原理**] 物理定律在所有惯性系中有相同形式,所有惯性系对运动的描述等效.

(2)[**光速不变原理**] 真空中的光速是常量,与光源或观测者的运动无关,不依赖于参考系的选择.

[注] Galileo变换与狭义相对论的基本原理不符,而狭义相对论的基本原理符合实验事实.

[Lorenz变换] Lorenz变换是符合相对论的时空变换关系.

(1)如下图,考察两个惯性参考系中同一事件的位置坐标、时间的关系.设S'系相对于S系以匀速v沿x轴运动, $t=t'=0$时,O与O'重合.



设$\beta=\dfrac{v}{c},\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$,则:

Lorenz正变换	Lorenz逆变换
$\begin{cases} x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma(x-vt) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\dfrac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\left(1-\dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$	$\begin{cases} x=\gamma(x'+vt') \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\gamma\left(t'+\dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$

[注] $v<<c$时,$\beta=\dfrac{v}{c}<<1$,Lorenz变换转化为Galileo变换.

(2)考察两个惯性参考系中两个事件的空间间隔和时间间隔的关系.

设两事件在S系中的空间间隔和时间间隔为$(\Delta x,\Delta y,\Delta z,\Delta t)$,在$S'$系中的空间间隔和时间间隔为$(\Delta x',\Delta y',\Delta z',\Delta t')$,则:

正变换	逆变换
$\begin{cases} \Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t) \\ \Delta y'=\Delta y \\ \Delta z'=\Delta z \\ \Delta t'=\gamma\left(\Delta t-\dfrac{v}{c^2}\Delta x\right) \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta x=\gamma(\Delta x'+v\Delta t') \\ \Delta y=\Delta y' \\ \Delta z=\Delta z' \\ \Delta t=\gamma\left(\Delta t'+\dfrac{v}{c^2}\Delta x'\right) \end{cases}$

(3)Lorenz速度变换:

正变换	逆变换
$\begin{cases} u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x} \\ u_y' = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}u_x\right)} \\ u_z' = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}u_x\right)} \end{cases}$	$\begin{cases} u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}u_x'} \\ u_y = \dfrac{u_y'}{\gamma\left(1 + \dfrac{v}{c^2}u_x'\right)} \\ u_z = \dfrac{u_z'}{\gamma\left(1 + \dfrac{v}{c^2}u_x'\right)} \end{cases}$

[**注**] 在S系中沿x方向发射一光信号,在S'系中观察,有$u_x' = \dfrac{c - v}{1 - \dfrac{vc}{c^2}} = c$.

这表明:光速在任何惯性系中是同一常量,可用光速联系时间测量和距离测量.

[**例6.2.1**] 某选手在地球上用$10\ \mathrm{s}$沿直线跑完了$100\ \mathrm{m}$,在其跑动方向上有一以$0.7c$速度飞行的飞船,求在飞船上的观测者看来该选手跑的时间和距离.

[**解**] 由Lorenz变换:

(1)$\Delta t' = \dfrac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = 14\ \mathrm{s}.$

(2)$\Delta x' = \dfrac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = -2.94 \times 10^9\ \mathrm{m}.$

6.3 狭义相对论的时空观

[**狭义相对论的时空观**]

(1)在不同的惯性系看,两个事件的空间关系、时间关系都是相对的,只有将空间和时间联系在一起才有意义.

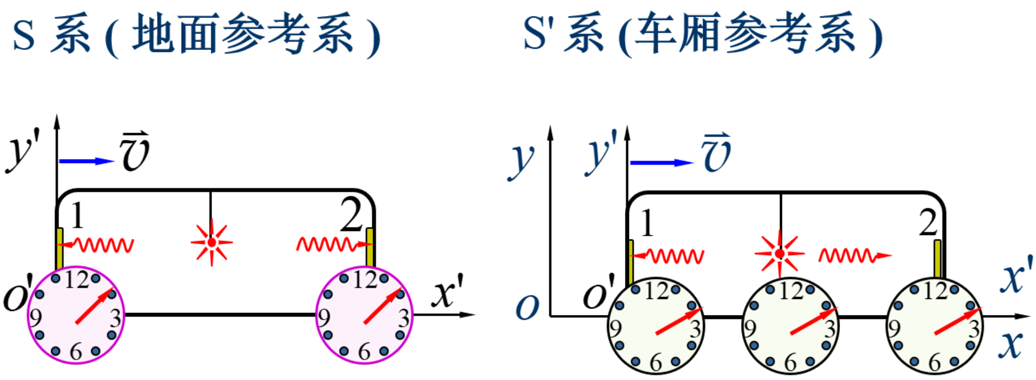
(2)空间和时间是不可分割的整体.

(3)光速c是建立不同惯性系间时空变换的纽带.

6.3.1 同时的相对性

[**同时的相对性**] 同时有相对性.对都沿两个惯性参考系运动方向但不同地点发生的两个事件,在其中一个惯性系中同时,在另一个惯性系中不同时.只有在同一地点、同一时刻发生的两个事件在其他惯性系中观察也是同时的.

[例6.3.1] 如下图,设地面参考系S系中x_1、x_2两处分别发生一个事件,空间间隔$\Delta x = x_2 - x_1$,时间间隔$\Delta t = t_2 - t_1$.求对车厢参考系S'系中两事件发生的时间间隔.



(1)设S系中两事件发生的时空坐标分别为(x_1, y_1, z_1, t_1)、(x_2, y_2, z_2, t_2),则时间间隔$\Delta t = t_2 - t_1$.

(2)设S系中两事件发生的时空坐标分别为(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)、(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2),则时间间隔$\Delta t' = \dfrac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

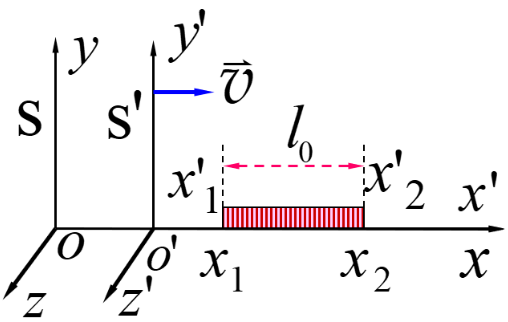
(3)下面讨论在S系中同时的两个事件在S'系中是否同时.有如下四种情况:

	对S系	**对S'系**
$\Delta x \neq 0, \Delta t = 0$	同时不同地	不同时
$\Delta x = 0, \Delta t \neq 0$	同地不同时	不同时
$\Delta x = 0, \Delta t = 0$	同地同时	同时
$\Delta x \neq 0, \Delta t \neq 0$	不同地不同时	不同时

6.3.2 长度的收缩

[长度的收缩] 长度有相对性.

如下图,设棒沿x轴对S'系静止放置,在S'系中测得两端的坐标分别为x'_1和x'_2.



(1)固有长度:物体相对静止时测得的长度,是最长的.

棒的固有长度$l_0 = x'_2 - x'_1$.

(2)设在S系中的某时刻t**同时**测得棒两端的坐标为x_1和x_2,则此时棒长$l = x_2 - x_1$.

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - vt) - (x_1 - vt)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

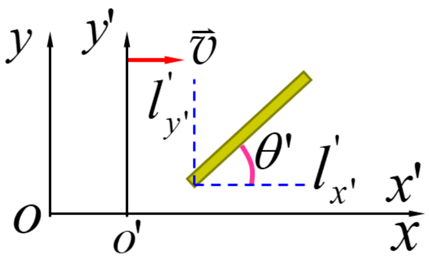
则$l=l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}<l_0$,即长度收缩.

同理将棒固定于S系,由S'系测量也会出现长度收缩的现象.

[例6.3.2] 设光子火箭相对于地球以速率$v=0.95c$飞行,且以火箭为参考系测得火箭长$15\ \mathrm{m}$.求以地球为参考系时火箭的长度.

[解] $l=l_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=4.68\ \mathrm{m}$.

[例6.3.3] 如下图,长$1\ \mathrm{m}$的棒静止放置在$O'x'y'$平面内,在S'系测得该棒与$O'x'$轴成45°角.设S'系相对于S系的运动速度为$v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$.求从S系测得的棒的长度和与Ox轴的夹角.



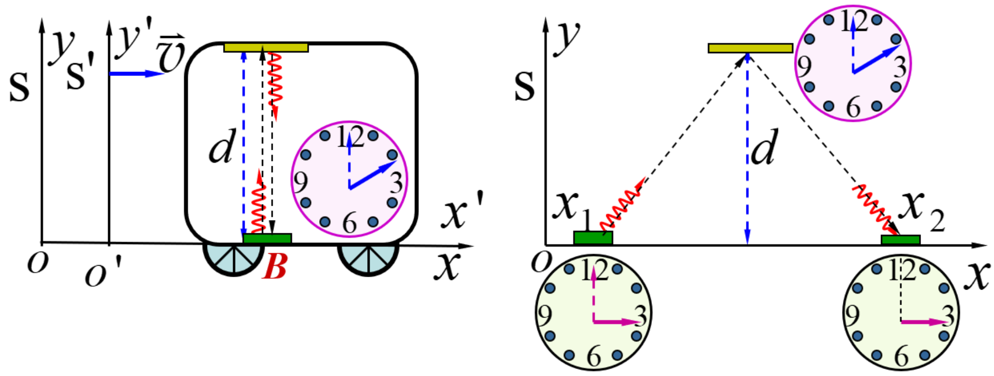
[解] S'系中,$\theta'=45^\circ,l'=1\ \mathrm{m}$,则$l'_x=l'_y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{m}$.

S系中,$l_x=l'_x\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \mathrm{m},l_y=l'_y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{m}$,

则$l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}=0.79\ \mathrm{m}$,进而$\theta=\arctan\dfrac{l_y}{l_x}\approx 63.43^\circ$.

6.3.3 时间的延缓

[时间的延缓] 如下图,设S'系中同一地点B发生两个事件:发射光信号(x',t'_1)和接受光信号(x',t'_2).



(1)固有时间:同一地点发生的两时间的时间间隔.

S'系中,固有时间$\Delta t'=t_2-t_1=\dfrac{2d}{c}$.

(2)时间延缓:运动的钟走得慢.

S系中,两事件的时空坐标分别为(x_1,t_1)和(x_2,t_2).

$t_1=\gamma\left(t'_1+\dfrac{v}{c^2}x'\right),t_2=\gamma\left(t'_2+\dfrac{v}{c^2}x'\right),\Delta t=\gamma\left(\Delta t'+\dfrac{v}{c^2}\Delta x'\right)$.

因$\Delta x'=0$,则$\Delta t=t_2-t_1=\gamma\Delta t'=\dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}>\Delta t'$.

$v<<c$时,$\Delta t\approx\Delta t'$.

(3)说明:

①时间延缓是一种相对效应.

②时间的流逝不是绝对的,运动将改变时间的进程.

[**例6.3.4**] 设光子火箭以速率$v=0.95c$相对于地球作直线运动,火箭上的计时器记录观测星云的时间为$10\ \mathrm{min}$,求地球上的计时器记录的时间.

[**解**] 设地球、火箭分别为S、S'系,则$\Delta t=\dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=32.01\ \mathrm{min}$.

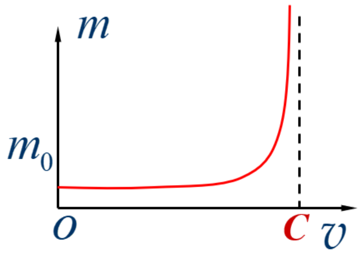
6.4 相对论性动量与能量

[**相对论物理量**]

(1)相对论质量

①静质量m_0:物体相对于惯性系静止时的质量.

②相对论质量$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. $v<<c$时,$m\approx m_0$.



(2)相对论动量$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}=\dfrac{m_0\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma m_0\overrightarrow{v}$. $v<<c$时,$\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}\to m_0\overrightarrow{v}$.

(3)相对论动能$E_k=mc^2-m_0c^2$,其中总能量$E=mc^2$,静能量$E_0=m_0c^2$.

$v<<c$时,$E_k\to\dfrac{1}{2}m_0v^2$.

(4)相对论质能关系:$E=mc^2$.

①质量的大小标志着能量的大小,物质的质量是能量的一种储藏.

②质量的变化和能量的变化的关系:$\Delta E=\Delta m\cdot c^2$.

[**相对论动量守恒定律**] $\sum\limits_i\overrightarrow{F_i}=\overrightarrow{0}$时,$\sum\limits_i\overrightarrow{p_i}=\sum\limits_i\dfrac{m_{i0}\overrightarrow{v_i}}{\sqrt{1-\beta^2}}$不变.

[**例6.4.1**] 设一质子以速率$v = 0.8c$运动,求其能量、动能、动量的大小.

[**解1**] (1)总能量$E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 1563\ \mathrm{MeV}$.

(2)静能量$E_0 = m_0c^2 = 938\ \mathrm{MeV}$,则动能$E_k = E - E_0 = 625\ \mathrm{MeV}$.

(3)$p = mv = \dfrac{m_0v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 6.68\times 10^{-19}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$.

[**解2**] (3)$cp = \sqrt{E^2 - E_0^2} \Rightarrow p = \dfrac{\sqrt{E^2-E_0^2}}{c} = 6.68\times 10^{-19}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$.

[**例6.4.2**] 求$1\ \mathrm{u}$的铀-235的原子裂变释放的能量,其中u为原子质量单位,$1\ \mathrm{u} = 1.66\times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$.

[**解**] 核反应方程: ${}_{92}^{235}U + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{54}^{139}Xe + {}_{38}^{95}Sr + 2\,{}_{0}^{1}n$.

质量亏损$\Delta m = 0.22\ \mathrm{u}$,则放出的能量$Q = \Delta E = \Delta m\cdot c^2 \approx 200\ \mathrm{MeV}$.