《概率论与数理统计》期末速通

8. 假设检验

8.1 假设检验

8.1.1 假设检验的思想和方法

[**定理8.1.1**] [**实际推断原理**] 小概率事件在一次试验中几乎不发生.

[**注**] 由实际推断原理: 对一个假设检验问题, 需借助某个统计量构造一个事件 A , 使得若假设 H_0 为真, 则 A 发生的概率很小; 若 H_0 不真, 则 A 发生的概率显著增大. 根据样本观察值确定 A 是否发生, 若发生, 则拒绝 H_0 ; 否则接受 H_0 .

[**例8.1.1**] 葡萄糖用某机器包装. 每袋糖的重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 机器正常时, 其均值为 0.5 , 标准差为 0.015 . 某日为检验机器是否正常, 随机抽取它包装的 9 袋糖, 测得重量分别为 0.497 , 0.506 , 0.518 , 0.524 , 0.498 , 0.511 , 0.520 , 0.515 , 0.512 . 判断机器是否正常.

[**解**] 因长期实践时标准差较稳定, 不妨设 $\sigma = 0.015$, 则 $X \sim N(\mu, 0.015)$.

问题转化为判断 μ 是否为 0.5 . 对此提出两个对立的假设: $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5$ 和 $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

因 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计, 若 H_0 为真, 则 $\left|\overline{X} - \mu_0\right|$ 应较小, 拒绝 H_0 应满足 $\left|\overline{X} - \mu_0\right|$ 较大.

设随机变量 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$, 称其为**检验统计量**.

可认为 Z 的观察值较大, 即小概率事件发生时, 可作出拒绝 H_0 的结论.

下面求一个 $k > 0\ s.t.\ \dfrac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} > k$ 时可拒绝 H_0 .

令 $P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = P\left\{\dfrac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} > k\right\} = \alpha$. 由上图, 解得: $k = z_{\frac{\alpha}{2}}$.

综上:

(1) 若检验统计量的观察值 $|z| = \dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$, 则拒绝 H_0 .

$$W = \left\{|z| = \dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \left(-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \bigcup \left(z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$$ 称为**拒绝域**, 其边界点 $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ 和 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ 称为**临界点**.

(2) 若 $|z|=\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}<z_{\frac{\alpha}{2}}$, 则接受 H_0 .

具体地, 取显著性水平 $\alpha=0.05$, 则上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位点 $z_{0.025}=1.96$.

因样本均值 $\overline{x}=\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=0.511$, $n=9,\sigma=0.015,\mu_0=0.5$,

则 Z 的观察值 $|z|=2.22>1.96$, 故拒绝 H_0 , 即认为机器工作不正常.

[**注1**] 假设检验问题的概念:

(1) 两个对立的假设:

① 机器正常: $H_0:\mu=\mu_0=0.5$, 称为**原假设**.

② 机器不正常: $H_1:\mu\neq\mu_0$, 称为**备择假设**.

(2) 根据有限的样本值判断 H_0 是否成立时, 不可避免地会发生如下两类错误:

① 第一类错误: $\{H_0\text{为真},\text{拒绝}H_0\}$, 称为**弃真错误**.

② 第二类错误: $\{H_0\text{为假},\text{接受}H_0\}$, 称为**取伪错误**.

(3) 显著性检验: 因(2)中的两类错误无法排除, 则只能控制犯错的概率, 此处只考虑控制犯第一类错误的概率, 称为**显著性检验**, 即令 $P\{H_0\text{为真},\text{拒绝}H_0\}\leq\alpha$, 其中很小的数 α 称为**显著性水平**.

[**注2**] 假设检验问题的步骤:

(1) 根据实际问题, 提出原假设和备择假设.

(2) 根据实际问题, 构造检验统计量, 在 H_0 成立的条件下确定其分布.

(3) 给定显著性水平 α , 在 H_0 成立的条件下由 $P\{H_0\text{为真},\text{拒绝}H_0\}\leq\alpha$ 求得拒绝域和临界点.

(4) 用样本值求得检验统计量的观察值, 若观察值落入拒绝域, 则拒绝 H_0 ; 否则接受 H_0 .

8.1.2 假设检验的概念

[**定义8.1.1**]

(1) 考察**假设检验问题**: 在显著性水平 α 下, 检验假设 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$, 其中 H_0 称为**原假设**或**零假设**, H_1 称为**备选假设**.

(2) 假设检验问题的任务: 根据样本, 用检验方法选择接受 H_0 或接受 H_1 .

(3) 根据题设和条件确定一个统计量 Z 并在 H_0 成立的条件下确定其分布, 称 Z 为**检验统计量**.

(4) Z 取某区域 C 中的值时拒绝 H_0 , 称 C 为**拒绝域**, 拒绝域的边界点称为**临界点**.

(5) 根据有限的样本值判断 H_0 是否成立时, 不可避免地会发生如下两类错误:

① 第一类错误: $\{H_0\text{为真},\text{拒绝}H_0\}$, 称为**弃真错误**.

② 第二类错误: $\{H_0\text{为假},\text{接受}H_0\}$, 称为**取伪错误**.

(6) 上述错误无法排除, 只能控制犯错的概率, 此处只考虑控制犯第一类错误的概率, 称为**显著性检验**, 即令 $P\{H_0\text{为真},\text{拒绝}H_0\}\leq\alpha$, 其中很小的数 α 称为**显著性水平**.

(7) 根据假设的形式, 假设检验分为三类:

① 假设形如 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$ 的假设检验称为**双边检验**.

② 假设形如 $H_0:\mu\le\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$ 的假设检验称为**右边检验**.

③假设形如 $H_0:\mu\ge\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$ 的假设检验称为**左边检验**.

左边检验和右边检验统称**单边检验**.

[**注1**] 根据假设是否关于参数, 假设检验分为两类:

① 参数检验: 总体分布已知, 检验关于未知参数.

② 非参数检验: 假设不关于总体的参数.

[**注2**] 原假设和备选假设的选取原则:

① 将大众普遍认为成立的命题作为原假设, 因为原假设不能轻易拒绝, 除非有足够的证据证明它不真.

② 将想证否的命题作为原假设, 将想证真的命题作为备择假设.

[**注3**] 样本容量固定时, 若犯第一类错误的概率降低, 则犯第二类错误的概率增大; 反之亦然.

为降低两类错误的概率, 应增大样本容量.

一般增大样本容量使得犯第一类错误的概率不超过某个给定的数.

8.1.3 单边检验的拒绝域

[**定理8.1.2**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本, 其中 μ 未知, σ 已知. 取显著性水平为 α , 则:

(1) 右边检验问题 $H_0:\mu\le\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$ 的拒绝域为 $z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ge z_\alpha$.

(2) 左边检验问题 $H_0:\mu\ge\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$ 的拒绝域为 $z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le -z_\alpha$.

[**证**] 只证(1), (2) 同理.

因 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计, σ 已知, 取检验统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$.

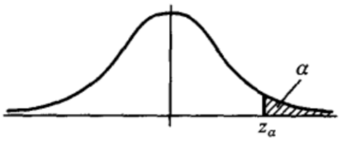
因 H_0 中的 μ 都比 H_1 中的 μ 小, 则 H_1 为真时, 样本均值的观察值 $\overline{x}$ 的值偏大.

故取拒绝域形如 $\overline{x}\ge k$, 其中 k 是某一正常数. 下面求 k .

$$P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\}=P_{\mu\in H_0}\left\{\overline{X}\ge k\right\}=P_{\mu\le\mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ge\frac{k-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right\}$$

$\le P_{\mu\le\mu_0}\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ge\dfrac{k-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right\}$ * H_0 为真时, $\mu\le\mu_0$, 则 $-\mu\ge-\mu_0$, 进而 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ge\dfrac{k-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

欲使得 $P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\}\le\alpha$, 只需令 $P_{\mu\le\mu_0}\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ge\dfrac{k-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right\}=\alpha$.



因 $Z \sim N(0,1)$, 由上图, 解得: $\dfrac{k-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=z_\alpha$, 即 $k=\mu_0+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$. 故拒绝域为 $z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\geq z_\alpha$.

[**例8.1.2**] 为检验生产商是否在牛奶中掺水, 可测定牛奶的冰点. 设牛奶的冰点温度服从均值 $\mu_0=-0.545$ 、标准差 $\sigma=0.008$ 的正态分布, 牛奶掺水会使得冰点温度升高至约 0 . 现测得 5 批牛奶的冰点温度, 其均值 $\overline{x}=-0.535$. 取显著性水平 $\alpha=0.05$, 问是否可认为牛奶掺水.

[**解**] 因想证明牛奶掺水,

则检验假设 $H_0:\mu\leq\mu_0=-0.545$ (牛奶未掺水), $H_1:\mu>\mu_0$ (牛奶掺水) , 为右边检验.

$\alpha=0.05$, 则上 α 分位点 $z_{0.05}=1.645$.

取检验统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$, 其观察值 $z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=2.7951\geq 1.645$,

则在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0 , 即认为牛奶掺水.

8.2 正态总体的均值的假设检验

8.2.1 单个正态总体的均值的假设检验

[**定理8.2.1**] 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本, 其中总体均值 μ 未知. 取显著性水平为 α .

(1) 若总体方差 σ^2 已知, 则用 Z **检验** , 即取检验统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$	$\lvert z\rvert\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
右边检验	$H_0:\mu\leq\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$	$z\geq z_\alpha$
左边检验	$H_0:\mu\geq\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$	$z\leq -z_\alpha$

(2) 若 σ^2 未知, 则用 t **检验**, 即取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$	$\lvert t\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
右边检验	$H_0:\mu\leq\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$	$t\geq t_\alpha(n-1)$
左边检验	$H_0:\mu\geq\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$	$t\leq -t_\alpha(n-1)$

[**证**]

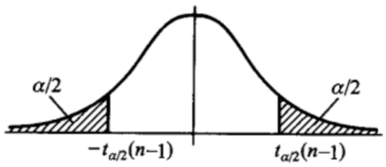
(1) 见**定理8.1.2**.

(2) 以证明检验问题 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$ 的拒绝域为 $|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 为例.

若 H_0 为真, 则 $\mu=\mu_0$. 取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$.

若 H_0 为真, 因样本均值 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计, 则 $\left|\overline{X}-\mu\right|$ 较小. 若 $\left|\overline{X}-\mu\right|$ 较大, 则拒绝 H_0 .

故拒绝域形如 $|t|=\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}\geq k$, 其中 k 是一个正常数. 下面求 k .



令 $P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\}=P_{\mu_0}\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\geq k\right\}=\alpha$. 由上图: 解得: $k=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

故拒绝域为 $|t|=\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

[**例8.2.1**] 设某元件的寿命 $\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中总体均值 μ 和总体方差 σ^2 都未知. 现测得 16 只元件的寿命如下: 159 , 280 , 101 , 212 , 224 , 379 , 179 , 264 , 222 , 362 , 168 , 250 , 149 , 260 , 485 , 170 . 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 的条件下, 问是否能认为元件的平均寿命 >225 .

[**解**] 检验假设: $H_0:\mu\leq\mu_0=225,H_1:\mu>\mu_0$, 为右边检验.

取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$, 由**定理8.2.1**的(2): 拒绝域为 $t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}\geq t_\alpha(n-1)$.

$n=16$, 则上 α 分位点 $t_{0.05}(15)=1.7531$.

样本均值 $\overline{x}=\dfrac{1}{16}\displaystyle\sum_{i=1}^{16}x_i=241.5$, 样本标准差 $s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=98.7259$.

观察值 $t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}=0.6685<1.7531$,

则在显著性水平 $\alpha=0.05$ 的条件下接受 H_0 , 即可认为元件的平均寿命 >225 .

8.2.2 两个正态总体的均值的假设检验

[定理8.2.2] 设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是取自总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的一组样本, 其中总体均值 μ_1 和 μ_2 、总体方差 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 都未知. 设这两个样本相互独立, 样本均值分别为 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$, 样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2 . 取显著性水平为 α , 给定一个常数 δ , 用 t **检验**, 即取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta,H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$\lvert t\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
右边检验	$H_0:\mu_1-\mu_2\leq\delta,H_1:\mu_1-\mu_2>\delta$	$t\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$
左边检验	$H_0:\mu_1-\mu_2\geq\delta,H_1:\mu_1-\mu_2<\delta$	$t\leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$

[证] 以证明检验问题 $H_0:\mu_1-\mu_2=\delta.\ H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$ 的拒绝域为 $\lvert t\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$ 为例.

若 H_0 为真, 则 $\mu_1-\mu_2=\delta$.

取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$, 其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_w=\sqrt{S_w^2}$.

类似于一个正态总体的均值的 t 检验,

易知拒绝域形如 $\lvert t\rvert=\dfrac{\lvert\overline{x}-\overline{y}-\delta\rvert}{s_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\geq k$, 其中 k 是一个正常数. 下面求 k .

令 $P\{H_0为真,拒绝H_0\}=P_{\mu_1-\mu_2=\delta}\left\{\dfrac{\left\lvert\overline{X}-\overline{Y}-\delta\right\rvert}{S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\geq k\right\}=\alpha$, 解得: $k=t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$.

故拒绝域为 $\lvert t\rvert=\dfrac{\lvert\overline{x}-\overline{y}-\delta\rvert}{s_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$.

[注1] 常取 $\delta=0$.

[注2] 若 σ_1^2 和 σ_2^2 都已知, 则用 Z **检验**, 即取检验统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1^2}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2^2}}}\sim N(0,1)$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta,H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$\lvert z\rvert\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
右边检验	$H_0:\mu_1-\mu_2\leq\delta,H_1:\mu_1-\mu_2>\delta$	$z\geq z_\alpha$
左边检验	$H_0:\mu_1-\mu_2\geq\delta,H_1:\mu_1-\mu_2<\delta$	$z\leq -z_\alpha$

[例8.2.2] 用A和B两种方法分别测定水的融化热, 测得的数据如下:

方法A	79.98 , 80.04 , 80.02 , 80.04 , 80.03 , 80.03 , 80.04 79.97 , 80.05 , 80.03 , 80.02 , 80.00 , 80.02
方法B	80.02 , 79.94 , 80.03 , 80.02 , 80.00 , 80.02

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$, 其中总体均值 μ_1, μ_2 和总体方差 σ^2 都未知. 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的条件下检验假设 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0, H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

[解] 对样本A: $n_1 = 13$, 样本均值 $\overline{x_1} = 80.02$, 样本方差 $s_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1} \sum\limits_{i=1}^{n_1} (x_{1,i} - \overline{x_1})^2 = 0.024^2$.

对样本B: $n_2 = 8$, 样本均值 $\overline{x_2} = 79.97$, 样本方差 $s_2^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1} \sum\limits_{i=1}^{n_2} (x_{2,i} - \overline{x_2})^2 = 0.03^2$.

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 0.0007178, S_w = \sqrt{S_w^2} \ .$$

取检验统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$,

由**定理8.2.2**的右边检验: 拒绝域为 $t \geq t_{0.05}(13 + 8 - 2) = 1.7291$.

观察值 $t = \dfrac{\overline{x_1} - \overline{x_2} - 0}{S_w \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = 3.33 > 1.7291$,

则在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的条件拒绝 H_0 , 即认为方法A测得的熔化热大于方法B测得的熔化热.

8.3 正态总体的方差的假设检验

8.3.1 单个正态总体的方差的假设检验

[定理8.3.1] 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一组样本, 其中总体均值 μ 和总体方差 σ^2 都未知. 取显著性水平为 α . 用 χ^2 **检验**, 即取检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
右边检验	$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi^2_\alpha(n-1)$
左边检验	$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

[证] 只证(1)和(2), (3)同理.

(1) 因 $E(S^2) = \sigma^2$, 则样本方差 S^2 是 σ^2 无偏估计.

若 H_0 为真, 则 $\sigma^2 = \sigma_0^2$. 取检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$.

因 S^2 是 σ^2 无偏估计, 若 H_0 为真, 则比值 $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ 在 1 附近摆动,

进而拒绝域形如 $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} \le k_1'$ 或 $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2'$, 其中 k_1' 和 k_2' 是两个正常数.

两边同乘 $(n-1)$ 并令 $k_i = (n-1)k_i' \ \ (i=1,2)$ 得: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$.

下面求 k_1, k_2 .

令 $P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\} = P_{\sigma_0^2}\left\{\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right) \bigcup \left(\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right)\right\}$

$= P_{\sigma_0^2}\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right\} + P_{\sigma_0^2}\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right\}$ * 两事件互斥.

$= \alpha$.

为计算方便, 取 $P_{\sigma_0^2}\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right\} = \dfrac{\alpha}{2}, P_{\sigma_0^2}\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right\} = \dfrac{\alpha}{2}$.

由 χ^2 分布的概率密度的图象, 解得: $k_1 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), k_2 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

故拒绝域为 $\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

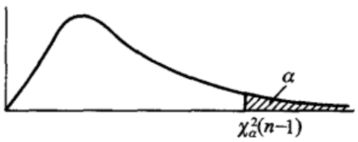
(2) H_0 中的 σ^2 都比 H_1 中的 σ^2 小, 则 H_1 为真时, S^2 的观察值 s^2 往往偏大,

故拒绝域形如 $S^2 \ge k$, 其中 k 是正常数. 下面求 k .

令 $P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\} = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\{S^2 \ge k\} = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \dfrac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\}$.

$\le P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \dfrac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\} = \alpha$

* 因 H_0 为真时, 有 $\dfrac{1}{\sigma^2} \ge \dfrac{1}{\sigma_0^2}$, 则 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \dfrac{(n-1)k^2}{\sigma_0^2}$.



由上图, 有 $\dfrac{(n-1)k}{\sigma_0^2} = \chi^2_\alpha(n-1)$, 解得: $k = \dfrac{\sigma_0^2}{n-1} \cdot \chi^2_\alpha(n-1)$.

故拒绝域为 $\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)$.

[**例8.3.1**] 某电池的寿命长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000$ 的正态分布. 现有一批电池, 寿命的波动性可能有所改变. 现任取 26 只电池, 测得其寿命的样本方差 $s^2 = 9200$. 在显著性水平 $\alpha = 0.02$ 的条件下, 能否判断这批电池的寿命的波动性较以往有显著变化.

[**解**] 问题转化为: 在显著性水平 $\alpha = 0.02$ 的条件下, 检验假设 $H_0 : \sigma^2 = 5000, H_1 : \sigma^2 \neq 5000$.

$n = 26$. 取检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$.

由**定理8.3.1**的双边假设: 拒绝域为 $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 11.524$ 或 $\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 44.314$.

观察值 $\chi^2 = 46 > 44.314$, 则在显著性水平 $\alpha = 0.02$ 的条件下拒绝 H_0 ,

即认为这批电池的寿命的波动性较以往有显著变化.

8.3.2 两个正态总体的方差的假设检验

[**定理8.3.2**] 设 $X_1, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是取自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的一组样本, 其中总体均值 μ_1, μ_2 和总体方差 σ_1^2, σ_2^2 都未知. 设这两个样本相互独立, 样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2 . 取显著性水平为 α , 用 F **检验**, 即取检验统计量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$, 则检验问题和拒绝域如下:

检验问题	假设	拒绝域
双边检验	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$
右边检验	$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F \geq F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$
左边检验	$H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F \leq F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$

[**证**] 以证明(2)为例.

因 $E(S_i^2) = \sigma_i^2 \ \ (i=1,2)$, 则 S_i^2 是 σ_i^2 的无偏估计. 取检验统计量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$.

若 H_0 为真, 则 $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, E(S_1^2) \leq E(S_2^2)$.

若 H_1 为真, 则 $E(S_1)^2 > E(S_2^2)$, 进而 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ 的观察值 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ 往往偏大.

故拒绝域形如 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \geq k$, 其中 k 是一个正常数. 下面求 k .

令 $P\{H_0\text{为真, 拒绝}H_0\} = P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2}\left\{\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \geq k\right\}$

$\leq P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2}\left\{\dfrac{\dfrac{S_1^2}{S_2^2}}{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \geq k\right\}$ * 因 H_0 为真时, 有 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$, 则 $\dfrac{\dfrac{S_1^2}{S_2^2}}{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \geq \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$.

$= \alpha$.

因 $\dfrac{\dfrac{S_1^2}{S_2^2}}{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1-1,n_2-1)$, 由 F 分布的概率密度的图象, 解得: $k=F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$.

故拒绝域 $F \geq F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$.

[**注**] 注意 F 检验的假设统计量不服从 F 分布.

[**例8.3.2**] 用A和B两种方法分别测定水的融化热, 测得的数据如下:

方法A	79.98 , 80.04 , 80.02 , 80.04 , 80.03 , 80.03 , 80.04 79.97 , 80.05 , 80.03 , 80.02 , 80.00 , 80.02
方法B	80.02 , 79.94 , 80.03 , 80.02 , 80.00 , 80.02

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 其中总体均值 μ_1,μ_2 和总体方差 σ^2 都未知. 在显著性水平 $\alpha=0.01$ 的条件下检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$, 并说明假设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 是合理的, 即两总体有**方差齐性**.

[**解**] 对样本A: $n_1=13$, 样本均值 $\overline{x_1}=80.02$, 样本方差 $s_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1,i}-\overline{x_1})^2=0.024^2$.

对样本B: $n_2=8$, 样本均值 $\overline{x_2}=79.97$, 样本方差 $s_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2,i}-\overline{x_2})^2=0.03^2$.

取检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$, 由**定理8.3.2**的双边假设:

拒绝域为 $F\geq F_{0.005}(12,7)=8.18$ 或 $F\leq F_{0.995}(12,7)=\dfrac{1}{F_{0.005}(7,12)}=0.18$.

观察值 $f=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=0.60\in(0.18,8.18)$, 故在显著性水平 $\alpha=0.01$ 的条件下接受 H_0 ,

即认为两总体的方差相等.