学院 ________ 专业 __________ 姓名 __________ 学号 __________

（密 封 线 内 不 答 题）

………………………… 密 ………………………… 封 ………………………… 线 ………………………… 线 …………………………

深圳大学期末考试试卷
参考答案与评分标准

开/闭卷 闭卷　　A/B卷 B卷

课程编号 2219005101 2219005102 2219005103 课程名称 数学分析（1） 学分 4

命题人(签字)________ 审题人(签字)_____ _年_月_日

1、判断下列论述正误.正确填T，错误填F.（每题2分，共10分）

（ T ）1. 若 $f(x)$ 是闭区间[a, b]上可导的函数，若 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

（ T ）2. 有界数集必有上确界.

（ F ）3. 若 $f(x)$ 在开区间(a, b)内连续可导，则 $f(x)$ 在(a, b)内有界.

（ T ）4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$，则存在$N$＞0, 使得对任意$n$＞$N$总有 $x_n>0$.

（ F ）5. 函数 $f(x)$ 的极值点必是稳定点.

2、单项选择题(每题2分，共10分)

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$， $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列，则以下极限等式中错误的是 B .

   A. $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$； B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=1$； C. $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}-a)=0$； D. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx_n]}{n}=a$.

2. 若函数 $f(x)$ 在开区间(a, b)内可导且不等于0, 则下列结论中错误的是 B .

   A. $f(x)$ 在(a, b)内连续；　B. $f(x)$ 在(a, b)内一致连续；

   C. $|f(x)|$ 在(a, b)内可导；　D. $\dfrac{1}{f(x)}$ 在(a, b)内可导.

3. $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ C .

   A. 可去间断点；B. 跳跃间断点；C. 第二类间断点；D. 连续点.

4. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在闭区间[a, b]上可导，且 $f'(x)\le g'(x)$，则 D .

   A. $f(x)\le g(x)$； B. $f(a)\ge g(b)$； C. $g(a)\le f(b)$； D. $f(a)-f(b)\ge g(a)-g(b)$.

5. 若曲线 $y=f(x)$，$x\in[1,+\infty)$ 有斜率小于0的斜渐近线，则存在负实数b使得 C .

学院 ________ 专业 __________ 姓名 ________ 学号 __________
（密封线内不答题）
……………………密……………………封……………………线……………………线……………………

深圳大学期末考试试卷
参考答案与评分标准

开/闭卷 闭卷　　　　A/B卷 B卷

课程编号 2219005101 2219005102 2219005103 课程名称 数学分析（1） 学分 4

命题人(签字)________ 审题人(签字)_____ _年_月_日

1、判断下列论述正误.正确填T，错误填F.（每题2分，共10分）

（ T ）1. 若 $f(x)$ 是闭区间[a, b]上可导的函数，若 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

（ T ）2. 有界数集必有上确界.

（ F ）3. 若 $f(x)$ 在开区间(a, b)内连续可导，则 $f(x)$ 在(a, b)内有界.

（ T ）4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$，则存在$N$＞0, 使得对任意$n$＞$N$总有 $x_n>0$.

（ F ）5. 函数 $f(x)$ 的极值点必是稳定点.

2、单项选择题(每题2分，共10分)

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的子列，则以下极限等式中错误的是__B__.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$；B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=1$；C. $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}-a)=0$；D. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[nx_n]}{n}=a$.

2. 若函数 $f(x)$ 在开区间(a, b)内可导且不等于0, 则下列结论中错误的是__B__.

A. $f(x)$ 在(a, b)内连续；　　B. $f(x)$ 在(a, b)内一致连续；

C. $|f(x)|$ 在(a, b)内可导；　　D. $\frac{1}{f(x)}$ 在(a, b)内可导.

3. $x=0$ 是函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ __C__.

A. 可去间断点；B. 跳跃间断点；C. 第二类间断点；D. 连续点.

4. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在闭区间[a, b]上可导，且 $f'(x)\le g'(x)$，则__D__.

A. $f(x)\le g(x)$；B. $f(a)\ge g(b)$；C. $g(a)\le f(b)$；D. $f(a)-f(b)\ge g(a)-g(b)$.

5. 若曲线 $y=f(x)$，$x\in[1,+\infty)$有斜率小于0的斜渐近线，则存在负实数b使得__C__.

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=b$ ； B. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ； C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=b$ ； D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=b$.

3、填空题（请在以下横线上填入 >, <, 或 =，每题2分，共10分）

1. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ ，数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ _=_ A.

2. 集合 $S=\{x \mid x$是 $x^2<2011\}$ 的下确界 M _=_ $-\sqrt{2011}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\arcsin x}{e^x-1}, & x<0\end{cases}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ _>_ 0 .

4. 若数列 $\{a_n\}$ 是单调数列，且存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=A>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ _>_ $\frac{A}{2}$.

5. 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ _=_ $f(0)$.

4、计算题（第1-3题每题6分，第4-7题每题7分，共46分）

1. 求 $y=x^2\cos x+3\ln x$ 的导数.

解 $y'=2x\cos x-x^2\sin x+\frac{3}{x}.$ (6分)

2. 求 $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right).$

解 由于

$$\frac{2x}{x-4}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\frac{2x}{x-4}-\frac{x+2\sqrt{x}}{x-4}=\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2},$$ (4分)

所以

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2}.$$ (6分)

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\tan x - x}{x^3}\ln\left(1+\frac{\tan x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x - x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{\tan x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x - x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}\ln e} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}} = e^{\frac{1}{3}}.$$ (6分)

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\arctan x - \ln(1+x^2)}{x^2}, & x>0\\ ax+b, & x\le 0\end{cases}$, 试确定 $a,\ b$ 的值, 使得

(i) $f(x)$ 在$x = 0$处连续;

(ii) $f(x)$ 在$x = 0$处可微, 并写出其在$x = 0$处的微分.

解 (i) 由于

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x\arctan x - \ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\arctan x}{x} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax + b = b,$$

且 $f(0) = b$, 所以, 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 须有 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = b = 1.$ (4分)

(ii) 由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2x\arctan x - \ln(1+x^2)}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x\arctan x - \ln(1+x^2) - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} - 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(\arctan x - x\right)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\left[1-\left(1+x^2\right)\right]}{6x\left(1+x^2\right)} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{3\left(1+x^2\right)} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{ax+1-1}{x} = a.$$

所以, 要使 $f(x)$ 在$x = 0$处可微, 须有 $f'_-(0) = f'_+(0) = a = 0.$ （6分）

这样, 我们有 $f'(0) = 0$, 函数 $f(x)$ 在$x = 0$处的微分为0. (7分)

5. 求摆线C: $\begin{cases}x = a(t-\sin t)\\ y = a(1-\cos t)\end{cases}\ \left(t\in(0,\ \pi)\right)$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解 由于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(1-\cos t),\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\sin t,$ 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

(3分)

因此, 曲线C在在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线的斜率为 $k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,$ (5分)

而 $t=\frac{\pi}{2}$ 对应曲线上点的坐标为 $\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),\ a\right)$, 所以, 切线方程为

$$y-a=x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),\ 即\ y=x-a\left(\frac{\pi}{2}-2\right).$$ (7分)

6. 求函数 $y=\mathrm{e}^x\cos x$ 在 $x=0$ 点的带拉格朗日型余项的麦克劳林公式(到含 x^3 的项).

解 由于

$y|_{x=0}=1,$

$$y'=\mathrm{e}^x\left(\cos x-\sin x\right),\quad y'|_{x=0}=1,$$

$$y''=\mathrm{e}^x\left(\cos x-\sin x-\sin x-\cos x\right)=-2\mathrm{e}^x\sin x,\quad y''|_{x=0}=0,$$

$$y'''=-2\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x),\quad y'''|_{x=0}=-2,$$

$$y^{(4)}=-4\mathrm{e}^x\cos x,$$ (5分)

则

$$\mathrm{e}^x\sin x=1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{\mathrm{e}^{\theta x}\cos\theta x}{6}x^4,\ (0<\theta<1).$$ (7分)

7. 用一块边长为a的正方形铁皮四角截去四个同样大小的小正方形，然后把四边折起做成一个无盖盒子. 问截去的小正方形边长为多少时，所做盒子的容积最大？求其最大容积.

解 设截去的小正方形的边长为x, 则所做盒子的容积为

$$V(x)=x(a-2x)^2=a^2x-4ax^2+4x^3.$$ (2分)

令 $V'(x)=a^2-8ax+12x^2=0$ 得稳定点 $x=\frac{1}{6}a$, 或 $\frac{1}{2}a$ (舍去). (4分)

由实际问题的背景可知 $V(x)$ 在 $\left(0,\ \frac{1}{2}a\right)$ 上存在最大值, 而 $V(x)$ 在 $\left(0,\ \frac{1}{2}a\right)$ 上只有一个稳定点, 所以, 该稳定点一定是取得最大值的稳定点, (6分)

最大容积为

$$V\left(\frac{1}{6}a\right)=\frac{1}{6}a\left(a-\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{2}{27}a^3,$$

即截去的小正方形边长为 $\frac{1}{6}a$ 时，所做盒子的容积最大, 最大容积为 $\frac{2}{27}a^3$. (7分)

5、证明题（每题8分, 共24分）

1. 用函数极限的e-d语言证明: $\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-6x+10\right)=2.$

证明 当$|x-2|<1$时, 有

$$\left|x^2-6x+10-2\right|=\left|x^2-6x+8\right|=|(x-2)(x-4)|<3|x-2|,\quad (3分)$$

则对任给e>0, 取$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{3},1\right\}$, (6分)

对任意$x:\ 0<|x-2|<\delta$ 有

$$\left|x^2-6x+10-2\right|<\varepsilon,$$

所以, $\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-6x+10\right)=2.$ (8分)

2. 利用函数的单调性证明: $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x),\ x>0.$

证明 令$f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$, (2分)

则$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 在$(0,+\infty)$内可导, 且

$$f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{1-x^2-1}{1+x}=-\frac{x^2}{1+x}<0,\quad (5分)$$

所以, $f(x)$在$(0,+\infty)$内严格减. 又$f(x)$在$x=0$连续, 且$f(0)=0$, (7分)

所以, 当$x>0$时有$f(x)<0$, 即

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x),\ x>0.\quad (8分)$$

3. 设$x_1\in(0,1)$, $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n},\ n=1,2,3,\cdots$. 证明: 数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

证明 首先, 我们断言对任意$n=2,3,4,\cdots$, $1<x_{n+1}<2$, 即数列$\{x_n\}$有界. (2分)

事实上, 由于$x_1\in(0,1)$, 则$1<x_2=\sqrt{1+x_1}<\sqrt{2}<2$. 假设$1<x_n<2$, 则$1<\sqrt{2}<x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}<\sqrt{1+2}<2$, 由数学归纳法可得结论.

其次, 由于

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\sqrt{1+x_{n+1}}-\sqrt{1+x_n}=\frac{1+x_{n+1}-1+x_n}{\sqrt{1+x_{n+1}}+\sqrt{1+x_n}}=\frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{1+x_{n+1}}+\sqrt{1+x_n}},$$

则$\{x_{n+2}-x_{n+1}\}$和$\{x_{n+1}-x_n\}$保持同号, 所以, 数列$\{x_n\}$是单调的, (5分)

又$\{x_n\}$有界, 则由单调有界定理可知$\{x_n\}$收敛. (6分)

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则$a=\sqrt{1+a}$, 则由数列极限的性质可知$a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 所以, 数列$\{x_n\}$收敛, 且

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. (8分)

说明：

有界性证明2分，可以有多种证法。上界最小为 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ，可以选取 $\sqrt{3}$ ，2,3 等。
说显然有界并正确指出界但未证明者给1分。
单调性证明3分，可以有多种证法。比如后项前项之比大于1，前后项之差保持同号等。

说显然单调但未证明者给1分。
利用单调有界收敛定理说明有极限给1分。
求出极限给2分。

附加题(第1题10分, 第2题每题10, 共30分)

1. 若连续函数 $f(x),\ x\in[1,+\infty)$ 有斜渐近线, 即存在常数a, b使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax-b=0$ ，则连续函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续.

证明 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax-b=0$ 可知, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $M>1$, 对任意 $x>M$, 有

$$\left|f(x)-ax-b\right|<\varepsilon,$$

所以, 对任意 $x_1,\ x_2>M$, 且 $\left|x_1-x_2\right|<\dfrac{\varepsilon}{3|a|}$, 有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f(x_1)-ax_1-b\right|+\left|f(x_2)-ax_2-b\right|+|a|\left|x_1-x_2\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+|a|\frac{\varepsilon}{3|a|}=\varepsilon.\quad(4分)$$

由于函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 从而 $[1,M+1]$ 上连续, 由闭区间上连续函数的性质可知 $f(x)$ 在 $[1,M+1]$ 上一致连续, 所以, 对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta'>0$, 对任意 $x_1,\ x_2\in[1,M+1]$, 只要 $\left|x_1-x_2\right|<\delta'$, 就有 $\left|f(x_1)-f(x_1)\right|<\varepsilon$. (8分)

取 $\delta=\min\left\{\delta',\dfrac{\varepsilon}{3|a|},1\right\}$, 对任意 $x_1,\ x_2\in[1,+\infty)$, 只要 $\left|x_1-x_2\right|<\delta$, 就有 $\left|f(x_1)-f(x_1)\right|<\varepsilon$, 所以, 函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续. (10分)

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶可导.

(i) 对任意 $a\in(1,+\infty),\ h>0$ 充分小，利用拉格朗日中值定理证明：存在 $\theta\in(0,1)$ ，使得

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h).$$

(ii) 对任意 $a\in(1,+\infty)$ ，利用柯西中值定理证明：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a).$$

证明 (i) 令 $F(x)=f(a+x)+f(a-x)$, (2分)

_姓名________ 学号________座号______

（密封线内不答题）

……………………………………………………密………………………………封………………………………线………………………………线……………………………

深圳大学期末考试试卷参考答案

开/闭卷 闭卷　　　　　　　　　　A/B卷 A

课程编号 1901660001-003 课程名称 数学分析（1） 学分__

命题人(签字)________审题人(签字)______ ___年__月__日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

一、判断题: 在正确的论述后的括号里打“√”，在错误的论述后的括号里打“×” (每题3分,共15分)

1. 任给 $\varepsilon>0$,若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (√)
2. 非空有界数集 S 必有确界，且确界属于 S . (×)
3. 所有的周期函数的定义域均为 R . (×)
4. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$. (√)
5. 设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上一致连续. (×)

二、用定义证明下列极限(每题8分,共16分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+n^2}{3n^3+4}=\frac{5}{3}$.

证明:

$\forall\varepsilon>0$,取 $\left\{\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right],2\right\}$, $n>N$ ……………………………………… 3分

$\left|\frac{5n^3+n^2}{3n^3+4}-\frac{5}{3}\right|=\frac{|3n^2-20|}{3\left(3n^3+4\right)}$ ……………………………………… 4分

$<\frac{3n^2}{9n^3}=\frac{1}{3n}$ ……………………………………… 6分

$<\varepsilon$. ……………………………………… 7分

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+n^2}{3n^3+4}=\frac{5}{3}$ ……………………………………… 8

名__________学号_

(密封线内不答题)

密 …………… 封 …………… 线 …………… 线 ……………

深圳大学期中考试试卷

开/闭卷 闭卷　　　　　　　　　A/B卷

课程编号____课程名称 数学分析（1） 学分_

命题人(签字)________审题人(签字)_____ _年_月_日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

一、叙述题（5分）

设E是非空数集，叙述集合E的下确界的定义.

答：E是非空数集，若$\exists \beta \in R$,且

（1） $\forall x \in E$,有$x \geq \beta$

（2） $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$,有$\beta + \varepsilon > x_0$.

则称β是数集E的下确界.

二、判断题（对的打“√”，错的打“×”，每小题3分，共15分）

1. 若函数$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，则复合函数$f(g(x))$是奇函数.　（ × ）

2. 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足：对任意自然数n，都有$a_n > b_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$都存在，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.　（ × ）

3. 数列$\{a_n\}$的奇子列与偶子列都收敛，则$\{a_n\}$本身一定也收敛.　（ × ）

4. 若函数$f(x)$在开区间单调增加，则$f(x)$的间断点都是第一类间断点.（ √ ）

5. 若函数$f(x)$在开区间连续且有界，则$f(x)$在开区间可导.　（ × ）

三、计算题（每小题6分，共36分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$;　　2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}} \quad 2'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}\lim_{x\to a}\left[\frac{(x-a)\cdot\sqrt{x-a}}{(x-a)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}+1\right] \quad 3'$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}} \quad 1'$$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[1^2+3^2+\boxed{?}+\left(2n-1\right)^2\right]$;

利用夹逼准则

$$\frac{1}{2n^3}\left[1^2+2^2+\boxed{?}+\left(2n-1\right)^2\right]<$$

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+3^2+\boxed{?}+\left(2n-1\right)^2\right]<$$

$$\frac{1}{2n^3}\left[1^2+2^2+\boxed{?}+\left(2n-1\right)^2+\left(2n\right)^2\right] \quad 4'$$

因为左边极限=右边极限=$\frac{4}{3}$

故原极限$\frac{4}{3}$ 2'

4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2}}{\ln x^{10}\cdot\frac{x^{10}+x+1}{x^{10}}} \quad 3'$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2\ln x+\ln\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{\ln x}}{\left(10\ln x+\ln\frac{x^{10}+x+1}{x^{10}}\right)\cdot\frac{1}{\ln x}} \quad 2'$$

$$=\frac{1}{5} \quad 1'$$

5.设$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-2a}{x+a})^x=8,$ 求数a的值.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-2a}{x+a})^x=\lim_{x\to\infty}\{[1+\frac{-3a}{x+a}]^{\frac{x+a}{-3a}}\}^{\frac{-3ax}{x+a}} \quad 3'$$

$$=e^{-3a}=8, \quad 2'$$

故$a=\ln\frac{1}{2}$ 1'

6. 设函数$f(x)$在a可导，且求.

四、利用定义证明（每题8分，共16分）

1. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0.$

证明： $\forall 0<\varepsilon<1,$ 由二项式定理，当 $n>2$ 时，要使得不等式

$$\left|\frac{n^2}{3^n}-0\right|=\frac{n^2}{(1+2)^n}=\frac{n^2}{1+n\cdot 2+C_n^2\cdot 2^2+C_n^3\cdot 2^3\boxed{?}+2^n}$$

$$<\frac{n^2}{\frac{4n(n-1)(n-2)}{3}}<\frac{1}{(1-\frac{1}{n})(n-2)}<\frac{2}{n-2}<\varepsilon$$

4'

成立，解得 $n>2+\frac{2}{\varepsilon}.$ 取 $N=\left[2+\frac{2}{\varepsilon}\right]\in N^+,\forall n>N,$ 有 $\left|\frac{n^2}{3^n}-0\right|<\varepsilon,$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0.$ 4'

2. 证明: $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+3x+4)=2.$

证明：限定 $0<|x+1|<1,$ 即 $-2<x<0.$ 3'

$\forall\varepsilon>0,$ 要 $|x^2+3x+4-2|=|(x+1)(x+2)|<2|x+1|<\varepsilon$ 只需 $|x+1|<\frac{1}{2}\varepsilon$ 即可. 3'

故 $\forall\varepsilon>0,$ 取 $\delta=\min\{\frac{1}{2}\varepsilon,1\}>0,\forall 0<|x-(-1)|<\delta,$ $|x^2+3x+4-2|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+3x+4)=2.$ 2'

五、解答题(每题7分，共14分)

1. 讨论函数 在处的连续性与可导性.

解：,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，3’

而,极限不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.4’

2. 设 $x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})(n\ge 1).$ 判断数列 $\{x_n\}$ 的收敛性，并求出其极限.

证明：注意到 $x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n}),$ 则 $x_n>0,\forall n\ge 1$ $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})\ge 1$.即 $\{x_n\}$ 有下界.

另一方面, $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})-x_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{x_n}-x_n)=\frac{1-x_n^2}{2x_n}\le 0$,即 $\{x_n\}$ 是单调递减的.

根据单调有界准则可知， $\{x_n\}$ 极限存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ，对递推式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$

两边同时求极限，可得 $a=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})$ ，解得 $a=\pm 1$.由于 $x_n\ge 1$ ，故 $a=1$.即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$

六、证明题（每题7分，共14分）

1. 设函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b.$ 证明: $f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续.

证明：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$,则$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,$ $x_1,x_2>M$ $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 3’

由于函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$ 上连续，因此函数 $f(x)$在 $[a,M+1]$ 上连续，从而一致连续，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall x_1,x_2\in[a,M+1]$时 $x_1-x_2<\delta_1$ $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 2’

因此，

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min\{\delta_1,1\}>0,\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$时 $x_1-x_2<\delta$ $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

即 $f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续. 2’

2. 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

证明： $\forall\varepsilon>0,x_1,x_2\in[1,+\infty)$, 不妨设 $x_1>x_2>1$ ，要使得

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<\frac{x_1-x_2}{2}<\varepsilon$$

4'

成立，只需 $x_1-x_2<2\varepsilon$ 即可. 故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=2\varepsilon>0,\forall x_1,x_2\in[1,+\infty),|x_1-x_2|<\delta,(x_1>x_2)$

都有 $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon$, 即 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续. 3'

七、附加题（每题15分，共30分）

1. 设 x_n 表示方程 $x+x^2+\boxed{?}+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的根，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n.$

解：由于 $f_n(x)=x+x^2+\boxed{?}+x^n$ 在闭区间 $[0,1]$ 上单调递增， $f_n(0)=0,f_n(1)=n,$

所以 $x+x^2+\boxed{?}+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的根存在且唯一.

下面证明 $\{x_n\}$ 单调递减，由于

$$f_n(x_n)=x_n+x_n{}^2+\boxed{?}+x_n{}^n=1,x_n\in(0,1),$$

于是，

$$f_{n+1}(x_n)=x_n+x_n{}^2+\boxed{?}+x_n{}^n+x_n{}^{n+1}=1+x_n{}^{n+1}>1,$$

因此，由连续函数的性质可知 $x_{n+1}\in(0,x_n)$ 满足

$$f_{n+1}(x_{n+1})=x_{n+1}+x_{n+1}{}^2+\boxed{?}+x_{n+1}{}^n+x_{n+1}{}^{n+1}=1$$

即 $\{x_n\}$ 为单调递减，且有下界的数列，故数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$ 由于 $0<x_n<x_2<1(n>3),$ 所以 $0<x_n^n<x_2^n<1(n>3).$ 于是由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_2^n=0$

知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$.再由

$$f_n(x_n)=x_n+x_n{}^2+\boxed{?}+x_n{}^n=\frac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}=1,$$

可知，$\frac{a}{1-a}=1,$ 即 $a=\frac{1}{2}.$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}.$

2. 设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,+\infty)$ 上，$f(x)$ 在每一个有限区间 (a,b) 内有界，并满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A.$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$

证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$ 可知，$\forall \varepsilon>0,\exists x_0>a,$ 当 $x\ge x_0$ 时，

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

任取 $x>x_0$，记 $n=[x-x_0], L=x-x_0-n,$ 则 $0\le L<1.$ 于是 x 可表示为 $x=x_0+n+L,$ 这样就有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|=\left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(x_0+L)}{n}-A\right]+\frac{f(x_0+L)}{x}-\frac{x_0+L}{x}A\right|$$

$$\le\left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(x_0+L)}{n}-A\right]\right|+\left|\frac{f(x_0+L)}{x}\right|+\left|\frac{x_0+L}{x}A\right| \qquad (2)$$

由(1)式可得

$$\left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(x_0+L)}{n}-A\right]\right|$$

$$\le\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[f(x_0+L+k)-f(x_0+L+k-1)]-nA\right|$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|[f(x_0+L+k)-f(x_0+L+k-1)]-A|<\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

又因为 $f(x)$ 在 (a,x_0+1) 上有界，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x_0+L)}{x}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x_0+L}{x}=0.$ 于是 $\exists x_1>a,$ 当 $x>x_1$ 时，

$$\left|\frac{f(x_0+L)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3};\left|\frac{x_0+L}{x}A\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (4)$$

取 $X=\max\{x_0,x_1\},$ 于是当 $x>X$ 时，由（2）、（3）、（4）式就有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\dfrac{1}{3}.$

证明:

$\forall\varepsilon>0$, 取δ ε, ... 3

则 $0<|x-4|<\delta$ 4

$\left|\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+3}-\dfrac{1}{3}\right|$ 5分

$=\dfrac{|\sqrt{2x+1}-3|}{3(\sqrt{2x+1}+3)}=\dfrac{2|x-4|}{3(\sqrt{2x+1}+3)^2}$

$<\dfrac{2}{27}|x-4|<|x-4|$ 6分

$<\varepsilon.$ 7分

故$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\dfrac{1}{3}$... 8分

三、计算题(每题6分,共54分)

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\boxed{?}+n}-\sqrt{1+2+\boxed{?}(n-1)})$.

解：原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ 4分

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ 5分

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ 6分

2. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\boxed{?}+\dfrac{1}{(2n)^2}\right).$

解：因为

$\dfrac{1}{4n}=\dfrac{n}{(2n)^2}<\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\boxed{?}+\dfrac{1}{(2n)^2},$

$\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\boxed{?}+\dfrac{1}{(2n)^2}<\dfrac{n}{(n+1)^2}=\dfrac{n}{n^2+2n+1}$ 2分

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}=0,$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+2n+1}=0,$ 4分

由于迫敛性定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\boxed{?}+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)=0.$ 6分

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$.

解：

原 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$ 2

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\sin\frac{1}{n})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right]^{2\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}(1+\sin\frac{1}{n})$ 4分

$=\left[\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\frac{1}{n})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right]^{2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\frac{1}{n})$

$=e^2$. 6分

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\arcsin\frac{1}{x}}{x-\cos x}$.

解：

原 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\arcsin\frac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}$ 2

$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{1}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}}$

$=\frac{0}{1-0}$ 4分

$=0$. 6分

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\arctan x^2}$.

解：利用 $\arctan x^2\sim x^2(x\to 0)$ 1分

原 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}$ 3

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{2}$ 5分

$=1.$ 6分

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x<0.\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^-}x+1}{1+\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}}$............................2分

$=\dfrac{0+1}{1+0}=1\neq f(0)$............................4分

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处不连续. 6分

7. 求曲线 $\begin{cases}x=e^t\cos 2t\\ y=e^t\sin 2t\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.

解:

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d(e^t\cos 2t)}{dt}=e^t\cos 2t-2e^t\sin 2t=e^t(\cos 2t-2\sin 2t)$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d(e^t\sin 2t)}{dt}=e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t=e^t(\sin 2t+2\cos 2t)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t(\sin 2t+2\cos 2t)}{e^t(\cos 2t-2\sin 2t)}=\dfrac{\sin 2t+2\cos 2t}{-2\sin 2t+\cos 2t}.$ 3分

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{\sin 2t+2\cos 2t}{-2\sin 2t+\cos 2t}\right|_{t=0}=2$

$x(0)=e^t\cos 2t\big|_{t=0}=1,\quad y(0)=e^t\sin 2t\big|_{t=0}=0,$

故 $y=2(x-1)$... 6

8. 求曲线 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的渐近线.

解. 由于 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2}=\infty,$

故 $x=2$ 为垂直渐近线. ……………………………2分

设斜渐近线为 $y=kx+b$,则

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x-2)}=1,$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-2}=2,$

于是为斜渐近线 $y=x+2$...6分

9. 求 $y=3^x\ln x^2+\arccos\sqrt{x}-\tan x^2$ 的微分.

解：由一阶微分形式不变性及微分运算法则有

$dy=d(3^x\ln x^2+\arccos\sqrt{x}-\tan x^2)=d(3^x\ln x^2)+d(\arccos\sqrt{x})-d(\tan x^2)$ 2分

$=(3^x\ln 3\ln x^2+3^x\dfrac{2}{x})dx-\dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}}dx-2x\sec^2 x^2dx$ 4分

$=(3^x\ln 3\ln x^2+3^x\dfrac{2}{x}-\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-x}}-2x\sec^2 x^2)dx.$ 6分

四、证明题(共15分)

1. 设 $a_n=\dfrac{\sin 2}{2}+\dfrac{\sin 2^2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin 2^n}{2^n}$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.(8分)

证明:

$\forall n,m$为 $m>n$

$|a_m-a_n|=\left|\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}}+\dfrac{\sin 2^{n+2}}{2^{n+2}}\cdots+\dfrac{\sin 2^m}{2^m}\right|$

$\le\left|\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}}\right|+\left|\dfrac{\sin 2^{n+2}}{2^{n+2}}\right|+\cdots+\left|\dfrac{\sin 2^m}{2^m}\right|$

$\le\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2^{n+2}}\cdots+\dfrac{1}{2^m}=\dfrac{1}{2^{n+1}}(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{m-n-1}})$

$=\dfrac{1}{2^{n+1}}\dfrac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^n}(1-\dfrac{1}{2^{m-n}})$

$<\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{n},$ 3分

所以,

$\forall\varepsilon>0,$取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right],$ $m>n>N$ 5分

$|a_m - a_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

由Cauchy准则证得数列$\{a_n\}$收敛. 8分

2. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，过点$A(0,f(0))$与$B(1,f(1))$的直线与曲线$y=f(x)$相交于点$C(c,f(c))$，其中$0<c<1$. 证明：在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$f''(\xi)=0$.(7分)

证明: 因为$f(x)$在区间$[0,c]$上满足拉格朗日中值定理的条件. 故存在$\xi_1 \in (0,c)$，使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c)-f(0)}{c-0}.$$

由于点C在弦AB上，故有

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-f(0).$$

从而

$$f'(\xi_1) = f(1)-f(0).$$ 3分

同理可证, 存在$\xi_2 \in (c,1)$，使得

$$f'(\xi_2) = f(1)-f(0).$$

由$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，知在$[\xi_1,\xi_2]$上，$f'(x)$满足罗尔定理的条件，所以存在$\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,1)$，使得

$$f''(\xi)=0.$$ 7分

五、附加题(每题15分,共30分)

1.设$f(x)=\frac{x+2}{x+1}\sin\frac{1}{x}$，$a>0$为任一正常数. 试证:(1) $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续；(2) $f(x)$在$(0,a)$内非一致连续.

证明: (1)证明$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

对任意的$x_1,x_2 \in [a,+\infty)$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le\left|\frac{x_1+2}{x_1+1}\sin\frac{1}{x_1}-\frac{x_2+2}{x_2+1}\sin\frac{1}{x_1}\right|+\left|\frac{x_2+2}{x_2+1}\sin\frac{1}{x_1}-\frac{x_2+2}{x_2+1}\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\le\left|\frac{x_1+2}{x_1+1}-\frac{x_2+2}{x_2+1}\right|+\frac{x_2+2}{x_2+1}\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$=\left|\frac{x_1+2}{x_1+1}-\frac{x_2+2}{x_2+1}\right|+\frac{x_2+2}{x_2+1}\cdot 2\cdot\left|\cos\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\right|\left|\sin\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\right|$$

$$\le\frac{|x_2-x_1|}{(x_1+1)(x_2+1)}+(1+\frac{1}{x_2+1})\cdot 2\cdot\frac{\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|}{2}$$

$$\le(\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{a+2}{a^2(a+1)})|x_2-x_1|=L|x_2-x_1|.$$

从而对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

(2)证明$f(x)$在$(0,a)$内非一致连续.

取 $x'_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},x''_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}},(n=1,2,\boxed{?})$, 则$n$充分大时，$x'_n$，$x''_n\in(0,a)$,且

$$|x'_n-x''_n|=\frac{\pi}{4n^2\pi^2-\frac{\pi^2}{4}}\to 0(n\to\infty)$$, 但

$$|f(x'_n)-f(x''_n)|=\left|\frac{4n\pi+\pi+1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}+1}+\frac{4n\pi-\pi+1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}+1}\right|>2.$$

故$f(x)$在$(0,a)$内非一致连续.

2.证明：若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且$|f'(x)|\le k,x\in(-\infty,+\infty)$,且$0<k<1$，则函数$f(x)$存在不动点$x$，即$f(x)=x$.

证明：任意取定一点x_0, 令

$$x_1=f(x_0),\quad x_2=f(x_1),\boxed{?},\quad x_{n+1}=f(x_n),\quad \boxed{?}.$$

得到一个数列$\{x_n\}$,应用拉格朗日定理，我们有

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n| &= |f(x_n)-f(x_{n-1})| = |f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})| \\ &= |f'(\xi_n)||x_n-x_{n-1}| \le k|x_n-x_{n-1}| \\ &= k|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})| \\ &= k|f'(\xi_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})| = k|f'(\xi_{n-1})||x_{n-1}-x_{n-2}| \\ &\le k^2|x_{n-1}-x_{n-2}| \le \cdots \le k^{n-1}|f'(\xi_1)||x_1-x_0| \\ &\le k^n|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

其中 $x_{k-1}<\xi_k<x_k, k=1,2,\cdots,n.$ 从而 $\forall n,p\in N_+$，有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= |x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-x_{n+p-2}+\cdots+x_{n+1}-x_n| \\ &\le |x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n| \\ &\le k^{n+p-1}|x_1-x_0|+k^{n+p-2}|x_1-x_0|+\cdots+k^n|x_1-x_0| \\ &= (k^{n+p-1}+k^{n+p-2}+\cdots+k^n)|x_1-x_0| \\ &\le \frac{k^n-k^{n+p}}{1-k}|x_1-x_0| < \frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}k^n=0(0<k<1)$，即 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,$有$k^n<\varepsilon$，从而 $\forall n,p\in N_+$ 且 $n>N$，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{\varepsilon}{1-k}|x_1-x_0|.$$

故由数列的柯西收敛准则，知数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则有

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f(x_{n-1})=f(\lim_{n\to\infty}x_{n-1})=f(x).$$

于是函数 $f(x)$ 存在不动点 x，即 $f(x)=x$.

则由已知可知, 当 $h>0$ 充分小时, $F(x)$ 在 $[0,h]$ 上连续, 在 $(0,h)$ 内可导, 且

$$F'(x)=f'(a+x)-f'(a-x), \qquad (5分)$$

则由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(a+h)+f(a-h)-2f(a)=f(a+h)+f(a-h)-\left(f(a)+f(a)\right)$$

$$=F(h)-F(0)=F'(\theta h)h=\left(f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h)\right)h,$$

即

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h). \qquad (10分)$$

(ii) 取 $F(x)$ 如2中, $G(x)=x^2$, (2分)

则对任意 $a\in(1,+\infty)$, 当 $h>0$ 充分小时, $F(x)$ 和 $G(x)$ 都在 $[0,h]$ 上连续, 在 $(0,h)$ 内可导, 则由柯西中值定理, 存在 $\xi\in(0,h)$, 使得

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=\frac{F(h)-F(0)}{G(h)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi}. \quad (6分)$$

由于 $h\to 0$ 蕴含着 $\xi\to 0$, 所以,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=\lim_{\xi\to 0}\frac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to 0}\left(\frac{f'(a+\xi)-f'(a)}{\xi}+\frac{f'(a-\xi)-f'(a)}{-\xi}\right)$$

$$=f''(a). \qquad (10分)$$

___、___ ________
__姓名__________
学号__________座
号______
（密封线内不答题）
……………………………
……………………………
……
密 ……………………………
……………………………
…
封 ……………………………
……………………
线 ……………………………
…………………
线 ……………………………
……………………

深圳大学期末考试试卷参考答案

开/闭卷 闭卷　　　　A/B卷 A

课程编号 1901660001-003 课程名称 数学分析（1） 学分__

命题人(签字)________审题人(签字)_____ ___年__月__日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

一、判断题: 在正确的论述后的括号里打“√”，在错误的论述后的括号里打“×” (每题3分,共15分)

1. 任给 $\varepsilon>0$,若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (√)
2. 非空有界数集 S 必有确界，且确界属于 S. (×)
3. 所有的周期函数的定义域均为 R. (×)
4. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$. (√)
5. 设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上一致连续. (×)

二、用定义证明下列极限(每题8分,共16分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+n^2}{3n^3+4}=\frac{5}{3}$.

证明:

$\forall\varepsilon>0$,取 $\left\{\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right],2\right\}$, $n>N$ ………………………………… 3分

$\left|\frac{5n^3+n^2}{3n^3+4}-\frac{5}{3}\right|=\frac{|3n^2-20|}{3\left(3n^3+4\right)}$ ………………………………… 4分

$<\frac{3n^2}{9n^3}=\frac{1}{3n}$ ………………………………… 6分

$<\varepsilon$. ………………………………… 7分

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+n^2}{3n^3+4}=\frac{5}{3}$ ………………………………… 8

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\dfrac{1}{3}.$

证明:

$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta\ \ \varepsilon$, ... 3

则 $0<|x-4|<\delta$ 4

$$\left|\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}-\frac{1}{3}\right|$$ 5分

$$=\frac{|\sqrt{2x+1}-3|}{3(\sqrt{2x+1}+3)}=\frac{2|x-4|}{3(\sqrt{2x+1}+3)^2}$$

$$<\frac{2}{27}|x-4|<|x-4|$$ 6分

$<\varepsilon$. 7分

故$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\dfrac{1}{3}$ 8分

三、计算题(每题6分,共54分)

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+2+\boxed{?}+n}-\sqrt{1+2+\quad\boxed{?}(n-1)}\right)$.

解: 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ 4分

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$ 5分

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ 6分

2. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\boxed{?}+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$.

解: 因为

$$\frac{1}{4n}=\frac{n}{(2n)^2}<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\boxed{?}+\frac{1}{(2n)^2},$$

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\boxed{?}+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{n}{(n+1)^2}=\frac{n}{n^2+2n+1}$$ 2分

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}=0,$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+2n+1}=0,$ 4分

由于迫敛性定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\boxed{?}+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)=0.$ 6分

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$.

解：

原 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$ 2

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\sin\frac{1}{n})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right]^{2\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}(1+\sin\frac{1}{n})$ 4分

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sin\frac{1}{n})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right]^{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sin\frac{1}{n})$

$=e^2.$ 6分

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arcsin\frac{1}{x}}{x-\cos x}$.

解：

原 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arcsin\frac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arcsin\frac{1}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}}$ 2

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{1}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}}$

$=\dfrac{0}{1-0}$ 4分

$=0.$ 6分

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\arctan x^2}$.

解：利用 $\arctan x^2 \sim x^2 (x\to 0)$ 1分

原 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}$ 3

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{2}$ 5分

$=1.$ 6分

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x<0.\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^-}x+1}{1+\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}}$ 2分

$=\dfrac{0+1}{1+0}=1\neq f(0)$...........................4分

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处不连续. 6分

7. 求曲线 $\begin{cases}x=e^t\cos 2t\\ y=e^t\sin 2t\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.

解：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d(e^t\cos 2t)}{dt}=e^t\cos 2t-2e^t\sin 2t=e^t(\cos 2t-2\sin 2t)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d(e^t\sin 2t)}{dt}=e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t=e^t(\sin 2t+2\cos 2t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(\sin 2t+2\cos 2t)}{e^t(\cos 2t-2\sin 2t)}=\frac{\sin 2t+2\cos 2t}{-2\sin 2t+\cos 2t}.$$ 3分

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{\sin 2t+2\cos 2t}{-2\sin 2t+\cos 2t}\right|_{t=0}=2$$

$$x(0)=\left.e^t\cos 2t\right|_{t=0}=1,\qquad y(0)=\left.e^t\sin 2t\right|_{t=0}=0,$$

故 $y=2(x-1)$... 6

8. 求曲线 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的渐近线.

解. 由于 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2}$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}=\infty,$$

故 $x=2$ 为垂直渐近线. ……………………………2分

设斜渐近线为 $y=kx+b$,则

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-2)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x-2}=2,$$

于是为斜渐近线 $y=x+2$..6分

9. 求 $y=3^x\ln x^2+\arccos\sqrt{x}-\tan x^2$ 的微分.

解：由一阶微分形式不变性及微分运算法则有

$$dy=d(3^x\ln x^2+\arccos\sqrt{x}-\tan x^2)=d(3^x\ln x^2)+d(\arccos\sqrt{x})-d(\tan x^2) \quad \text{.................. 2分}$$

$$=(3^x\ln3\ln x^2+3^x\frac{2}{x})dx-\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}}dx-2x\sec^2x^2dx \quad \text{............... 4分}$$

$$=(3^x\ln3\ln x^2+3^x\frac{2}{x}-\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-x}}-2x\sec^2x^2)dx. \quad \text{... 6分}$$

四、证明题(共15分)

1. 设 $a_n=\dfrac{\sin2}{2}+\dfrac{\sin2^2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin2^n}{2^n}$ ，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.(8分)

证明:

$\forall n,m$为 $m>n$

$$|a_m-a_n|=\left|\frac{\sin2^{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{\sin2^{n+2}}{2^{n+2}}\cdots+\frac{\sin2^m}{2^m}\right|$$

$$\le\left|\frac{\sin2^{n+1}}{2^{n+1}}\right|+\left|\frac{\sin2^{n+2}}{2^{n+2}}\right|+\cdots+\left|\frac{\sin2^m}{2^m}\right|$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}\cdots+\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^{n+1}}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n-1}})$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}(1-\frac{1}{2^{m-n}})$$

$$<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}, \quad \text{.. 3分}$$

所以,

$\forall\varepsilon>0,$取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right],$ $m>n>N$

.... 5分

$|a_m - a_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

由Cauchy准则证得数列 $\{a_n\}$ 收敛. 8分

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0, f(0))$ 与 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$，其中 $0 < c < 1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi) = 0$.(7分)

证明: 因为 $f(x)$ 在区间 $[0,c]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件. 故存在 $\xi_1 \in (0,c)$，使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0}.$$

由于点 C 在弦 AB 上，故有

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0).$$

从而

$$f'(\xi_1) = f(1) - f(0).$$ 3分

同理可证, 存在 $\xi_2 \in (c,1)$，使得

$$f'(\xi_2) = f(1) - f(0).$$

由 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$，知在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上，$f'(x)$ 满足罗尔定理的条件，所以存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,1)$, 使得

$$f''(\xi) = 0.$$ 7分

五、附加题(每题15分,共30分)

1.设 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}\sin\frac{1}{x}$，$a > 0$ 为任一正常数. 试证:(1) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续；(2) $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内非一致连续.

证明: (1)证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

对任意的 $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le\left|\frac{x_1+2}{x_1+1}\sin\frac{1}{x_1}-\frac{x_2+2}{x_2+1}\sin\frac{1}{x_1}\right|+\left|\frac{x_2+2}{x_2+1}\sin\frac{1}{x_1}-\frac{x_2+2}{x_2+1}\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\le\left|\frac{x_1+2}{x_1+1}-\frac{x_2+2}{x_2+1}\right|+\frac{x_2+2}{x_2+1}\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$=\left|\frac{x_1+2}{x_1+1}-\frac{x_2+2}{x_2+1}\right|+\frac{x_2+2}{x_2+1}\cdot 2\cdot\left|\cos\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\right|\left|\sin\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\right|$$

$$\le\frac{|x_2-x_1|}{(x_1+1)(x_2+1)}+(1+\frac{1}{x_2+1})\cdot 2\cdot\frac{\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|}{2}$$

$$\le(\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{a+2}{a^2(a+1)})|x_2-x_1|=L|x_2-x_1|.$$

从而对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

(2)证明$f(x)$在$(0,a)$内非一致连续.

取$x'_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},x''_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}},(n=1,2,\boxed{?}),$ 则n充分大时，x'_n，$x''_n\in(0,a)$,且

$$|x'_n-x''_n|=\frac{\pi}{4n^2\pi^2-\frac{\pi^2}{4}}\to 0(n\to\infty)$$, 但

$$|f(x'_n)-f(x''_n)|=\left|\frac{4n\pi+\pi+1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}+1}+\frac{4n\pi-\pi+1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}+1}\right|>2.$$

故$f(x)$在$(0,a)$内非一致连续.

2.证明：若函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且$|f'(x)|\le k,x\in(-\infty,+\infty),$且$0<k<1$，则函数$f(x)$存在不动点$x$，即$f(x)=x$.

证明：任意取定一点x_0, 令

$$x_1=f(x_0),\quad x_2=f(x_1),\boxed{?},\quad x_{n+1}=f(x_n),$$

得到一个数列$\{x_n\}$,应用拉格朗日定理，我们有

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1}-x_n| &= |f(x_n)-f(x_{n-1})| = |f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})| \\
&= |f'(\xi_n)||x_n-x_{n-1}| \le k|x_n-x_{n-1}| \\
&= k|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})| \\
&= k|f'(\xi_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})| = k|f'(\xi_{n-1})||x_{n-1}-x_{n-2}| \\
&\le k^2|x_{n-1}-x_{n-2}| \le \boxed{?} \le k^{n-1}|f'(\xi_1)||x_1-x_0| \\
&\le k^n|x_1-x_0|,
\end{aligned}
$$

其中$x_{k-1}<\xi_k<x_k, k=1,2,\boxed{?},n.$ 从而$\forall n,p\in N_+$，有

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p}-x_n| &= |x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-x_{n+p-2}+\boxed{?}+x_{n+1}-x_n| \\
&\le |x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\boxed{?}+|x_{n+1}-x_n| \\
&\le k^{n+p-1}|x_1-x_0|+k^{n+p-2}|x_1-x_0|+\boxed{?}+k^n|x_1-x_0| \\
&= (k^{n+p-1}+k^{n+p-2}+\boxed{?}+k^n)|x_1-x_0| \\
&\le \frac{k^n-k^{n+p}}{1-k}|x_1-x_0| < \frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|.
\end{aligned}
$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}k^n=0(0<k<1)$，即$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,有k^n<\varepsilon$，从而$\forall n,p\in N_+$且$n>N$，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{\varepsilon}{1-k}|x_1-x_0|.$$

故由数列的柯西收敛准则，知数列$\{x_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，已知函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，则有

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f(x_{n-1})=f(\lim_{n\to\infty}x_{n-1})=f(x).$$

于是函数$f(x)$存在不动点x，即$f(x)=x$.