随机过程作业总结

1. 预备知识

[**习题1.1**] 设$X\sim b(n,p),Y\sim b(m,p)$, 且$X$与$Y$相互独立. 求:

(1)X的矩母函数ϕ_X.

(2)$(X+Y)$的分布.

[**解**]

(1)$\phi_X(a)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ak}\cdot P\{X=k\}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(\mathrm{e}^a\cdot p)^k(1-p)^{n-k}=(\mathrm{e}^a p+1-p)^n$.

(2)同理可求得Y的矩母函数$\phi_Y(a)=(\mathrm{e}^a p+1-p)^m$,

则$(X+Y)$的矩母函数$\phi_{X+Y}(a)=\phi_X(a)\cdot\phi_Y(a)=(\mathrm{e}^a p+1-p)^{n+m}$, 进而$(X+Y)\sim b(n+m,p)$.

[**习题1.2**] 设随机变量X的分布列$P\{X=k\}=\dfrac{2^k}{3^{k+1}}\ \ (k=0,1,2,\cdots)$.

(1)求X的矩母函数ϕ_X.

(2)X的期望和方差.

[**解**]

(1)$\phi_X(a)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{ak}\cdot P\{X=k\}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{2\mathrm{e}^a}{3}\right)^k=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{2\mathrm{e}^a}{3}}=\dfrac{1}{3-2\mathrm{e}^a}$.

(2)$\phi_X'(a)=\dfrac{2\mathrm{e}^a}{(3-2\mathrm{e}^a)^2},\phi_X''(a)=\dfrac{2\mathrm{e}^a[(3-2\mathrm{e}^a)^2+4\mathrm{e}^a]}{(3-2\mathrm{e}^a)^4}$.

$E(X)=\phi_X'(0)=2,E(X^2)=\phi_X''(0)=10$, 则$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=6$.

[**习题1.3**] 盒中有编号$1\sim 5$的5个球. 现从中任选一球, 若取到5号球, 则得5分, 并停止摸球; 若取到$i\ \ (i=1,2,3,4)$号球, 则得i分, 并将该球放回, 重新摸球. 求总得分为X的期望.

[**解**] 设首次摸到Y号球, 则$P\{Y=k\}=\dfrac{1}{5}\ \ (k=1,2,3,4,5)$.

$$E(X)=E[E(X|Y)]=\sum_{y=1}^{5}E(X|Y=y)\cdot P\{Y=y\}=\frac{1}{5}\sum_{y=1}^{n}E(X|Y=y)$$

$=\dfrac{5+\sum\limits_{y=1}^{4}[y+E(X)]}{5}$, 解得: $E(X)=15$.

2. 随机过程

[习题2.4] 给定一个随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$x\in\mathbb{R}$, 定义随机过程$\{Y(t),t\in T\}$, 其中$Y(t)=\begin{cases}1,X(t)\le x\\0,X(t)>x\end{cases}$. 求证: $\{Y(t),t\in T\}$的均值函数和自相关函数分别为$\{X(t),t\in T\}$的一维、二维分布函数.

[解]

(1)$E[Y(t)]=1\cdot P\{X(t)\le x\}+0\cdot P\{X(t)>x\}=P\{X(t)\le x\}=F_X(x)$.

(2)$Y(s)Y(t)=\begin{cases}1,X(s)\le x\wedge X(t)\le x\\0,otherwise\end{cases}$,

则$R_Y(s,t)=E[Y(s)Y(t)]=P\{X(s)\le x,X(t)\le x\}=F_X(x,x)$.

[习题2.1] 设$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程. 求证:它是宽平稳的当且仅当$E[X(s)]$与$E[X(s)X(s+t)]$都不依赖于s.

[证] (必) 若$\{X(t),t\in T\}$是宽平稳过程, 则:

(1)$E[X(t)]=\mu$,进而$E[X(s)]$不依赖于s.

(2)$\gamma(s,s+t)$只与$(s+t)-s=t$有关.

由Schwarz不等式:

$E[X(s)X(s+t)]=R_X(s,s+t)=\gamma_X(s,s+t)+\mu_X(s)\mu_X(s+t)=\gamma_X(s,s+t)+\mu^2$,

它不依赖于s.

(充) (1)因$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程, 则其所有二阶矩都存在.

(2)因$E[X(s)]$不依赖于s, 则$E[X(s)]=\mu$, 其中μ是与s无关的常数.

(3)因$R_X(s,s+t)=E[X(s)X(s+t)]$不依赖于s,

由Schwarz不等式: $\gamma_X(s,s+t)=R_X(s,s+t)-\mu^2$不依赖于$s$, 即只与$(s+t)-s=t$有关.

由宽平稳过程的定义即证.

[习题2.5] 设随机过程$\{X(t),t\in T\}$的均值函数为$\mu_X(t)$, 协方差函数为$\gamma_X(t_1,t_2)$. 设$\phi(t)$是一非随机函数, 求随机过程$\{Y(t)=X(t)+\phi(t)\}$的均值函数和协方差函数.

[解] 因$\phi(t)$非随机, 则$E[Y(t)]=E[X(t)+\phi(t)]=E[X(t)]+\phi(t)=\mu_X(t)+\phi(t)$.

$\gamma_Y(s,t)=Cov[Y(s),Y(t)]=E[Y(s)\cdot Y(t)]-E[Y(s)]\cdot E[Y(t)]$

$=E\{[X(s)+\phi(s)]\cdot[X(t)+\phi(t)]\}-[\mu_X(s)+\phi(s)]\cdot[\mu_X(t)+\phi(t)]$

$=E[X(s)\cdot X(t)]+\mu_X(s)\cdot\phi(t)+\mu_X(t)\cdot\phi(s)+\phi(s)\cdot\phi(t)$

$-[\mu_X(s)\cdot\mu_X(t)+\mu_X(s)\cdot\phi(t)+\mu_X(t)\cdot\phi(s)+\phi(s)\cdot\phi(t)]$

$=E[X(s)\cdot X(t)]-\mu_X(s)\cdot\mu_X(s)=Cov[X(s),X(t)]=\gamma_X(s,t)$.

[**习题2.3**] 设$Z_0,Z_1,Z_2,\cdots$是一族独立同分布的随机变量. 设随机变量$X_n=Z_0+\cdots+Z_n$. 求证: $\{X_n;n=0,1,2\cdots\}$是平稳独立增量过程.

[**证**]

(1)下证$\{X_n;n=0,1,2\cdots\}$有独立增量性.

对一列时刻$t_1,t_2,\cdots$, 有$X(t_n)-X(t_{n-1})=\displaystyle\sum_{i=t_{n-1}+1}^{t_n}Z_i$. 由$Z_0,Z_1,Z_2,\cdots$的独立性即证.

(2)下证$\{X_n;n=0,1,2\cdots\}$有平稳增量性.

对$\forall t\geq 0,s>0$, 有$X(t+s)-X(s)=\displaystyle\sum_{i=s+1}^{t+s}Z_i$.

$$\phi_{X(t+s)-X(s)}(u)=E\left(\mathrm{e}^{u(Z_{s+1}+\cdots+Z_{t+s})}\right)=\prod_{i=s+1}^{t+s}\phi_{Z_i}(u)=[\phi_{Z_1}(u)]^t.$$

同理$\phi_{X(t)-X(0)}=[\phi_{Z_1}(u)]^t$, 则$X(t+s)-X(s)\overset{d}{=\!=}X(t)-X(0)$.

[**习题2.8**] 袋中有1个白球和2个红球, {每隔单位时间从中取一球, 记录颜色后放回. 对每个确定的t, 设随机变量$X(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{3},\text{若}t\text{时刻取得红球}\\ \mathrm{e}^t,\text{若}t\text{时刻取得白球}\end{cases}$. 求随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$的一维分布函数族.

[**解**] $X(t)$的分布律:

$X(t)$	$\dfrac{t}{3}$	e^t
p_k	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

$$F(t;x)=P\{X(t)\leq x\}=\begin{cases}0,x<\dfrac{t}{3}\\ \dfrac{2}{3},\dfrac{t}{3}\leq x<\mathrm{e}^t\\ 1,x\geq \mathrm{e}^t\end{cases}.$$

3. Poisson过程

[***习题3.2**] 设$\{N_i(t),t\geq 0\}\ \ (1\leq i\leq n)$是$n$个相互独立的Poisson过程, 参数分别为$\lambda_1,\cdots\lambda_n$. 设$T$为所有$n$个过程中第一个事件发生的时刻.

(1)求T的分布.

(2)[**Poisson过程的合成**] 求证: 随机过程$\left\{N(t)=\sum_{i=1}^n N_i(t),t\geq 0\right\}$是参数$\lambda=\sum_{i=1}^n\lambda_i$的Poisson过程.

(3)求这n个过程中只有一个事件发生时, 它属于$\{N_1,t\geq 0\}$的概率.

[**解**]

(1)设第$i\ \ (1\leq i\leq n)$个随机过程中第一个事件在X_i时刻发生.

因$X_i\sim Exp(\lambda_i)\ \ (1\leq i\leq n)$, 则$F_{X_i}(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda_i x}$.

因$T=\min\limits_{1\leq i\leq n}X_i$, 则$F_T(t)=1-\prod_{i=1}^n[1-F_{X_i}(t)]=1-\exp\left\{-t\sum_{i=1}^n\lambda_i\right\}$.

(2)①$N(0)=\sum_{i=1}^n N_i(0)=0$.

②对$\forall t\geq 0,s>0$, 有$N(t+s)-N(t)=\sum_{i=1}^n[N_i(t+s)-N_i(t)]$.

因Poisson过程$\{N_i(t),t\geq 0\}\ \ (1\leq i\leq n)$有独立增量, 则$\{N(t),t\geq 0\}$有独立增量.

③因$N_i(t+s)-N_i(t)\sim P(s\lambda_i)\ \ (1\leq i\leq n)$且相互独立,

由Poisson分布的独立可加性: $N(t+s)-N(t)\sim s\sum_{i=1}^n\lambda_i$.

由Poisson过程的第一定义即证.

(3)设$\lambda=\sum_{i=1}^n\lambda_i$.

$$P\{N_1(t)=1\mid N(t)=1\}=\frac{P\{N_1(t)=1,N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$=\frac{P\{N_1(t)=1,N_i(t)=0\ \ (2\leq i\leq n)\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$=\frac{\dfrac{(\lambda_1 t)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\cdot\prod_{i=2}^n\dfrac{(\lambda_i t)^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda_i t}}{\dfrac{(\lambda t)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\frac{\lambda_1}{\lambda}.$$

[**注**] (3)可视为进入某场所有多个入口, 但只有一个出口. 已知有一人从出口离开, 求他从第一个入口进入的概率.

[**习题3.4**] 设$\{N(t), t \geq 0\}$是强度为3的Poisson过程. 求:

(1)$P\{N(1) \leq 3\}$.

(2)$P\{N(1)=1, N(3)=2\}$.

(3)$P\{N(1) \geq 2 \mid N(1) \geq 1\}$.

[**解**]

(1)$P\{N(1) \leq 3\}=\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \frac{3^{i}}{i!} \cdot \mathrm{e}^{-3}=13 \mathrm{e}^{-3}$.

(2)$P\{N(1)=1, N(3)=2\}=P\{N(1)=1, N(3)-N(1)=1\}$

$$=P\{N(1)=1\} \cdot P\{N(3)-N(1)=1\}=\frac{3^{1}}{1!} \mathrm{e}^{-3} \cdot \frac{(3 \times 2)^{1}}{1} \mathrm{e}^{-(2 \times 3)}=18 \mathrm{e}^{-9}.$$

(3)$P\{N(1)=0\}=\dfrac{3^{0}}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-3}=\mathrm{e}^{-3}, P\{N(1)=1\}=\dfrac{3^{1}}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-3}=3 \mathrm{e}^{-3}$.

$$P\{N(1) \geq 2 \mid N(1) \geq 1\}=\frac{P\{N(1) \geq 2\}}{P\{N(1) \geq 1\}}=\frac{1-P\{N(1)=0\}-P\{N(1)=1\}}{1-P\{N(1)=0\}}=\frac{1-4 \mathrm{e}^{-3}}{1-\mathrm{e}^{-3}}.$$

[**习题3.7**] 设$\{N(t), t \geq 0\}$是强度为λ的Poisson过程. 对$\forall s>0$, 求$E[N(t) N(t+s)]$.

[**解**] $E[N(t) N(t+s)]=E\{N(t) \cdot[N(t+s)-N(t)+N(t)]\}$

$$=E\{N(t) \cdot[N(t+s)-N(t)]\}+E\{[N(t)]^{2}\}=E[N(t)] \cdot E[N(t+s)-N(t)]+E\{[N(t)]^{2}\}$$

$$=(\lambda t)(\lambda s)+(\lambda t)^{2}+\lambda t.$$

[**习题3.8**] 设某医院门诊从$08:00$起有无数名患者, 只有一位医生坐诊, 医生一次只能为一名患者看病, 看病平均时间为$20 \mathrm{~min}$, 且每名患者看病所需的时间服从独立的指数分布. 求$08:00 \sim 12:00$时间内看过病的患者在医院停留的平均时间.

[**解1**] 以$08:00$为0时刻, $09:00$为1时刻, $\cdots$.

设$[0, t]$时间内有$N(t)$名患者看过病, 则$\{N(t), t \geq 0\}$是强度$\lambda=3$ 人$/ \mathrm{h}$的Poisson过程.

$08:00 \sim 12:00$时间内看过病的患者数$E[N(4)]=\lambda t=3 \times 4=12$.

$$E\left[\sum_{i=1}^{k} T_{i} \mid N(4)=k\right]=E\left(\sum_{i=1}^{k} \widehat{U_{i}}\right)=E\left(\sum_{i=1}^{k} U_{i}\right)=\frac{4}{2} \cdot k.$$

看过病的患者停留时间之和$E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N(4)} T_{i}\right)=E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N(4)} T_{i} \mid N(4)\right]\right\}=E\left[\frac{4}{2} \cdot N(4)\right]=\frac{4}{2} E[N(4)]$.

又$E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N(4)} T_{i}\right)=E[N(4)] \cdot E\left(T_{i}\right)$, 解得: $E\left(T_{i}\right)=2 \mathrm{~h}$.

[**解2**] $E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N(4)} T_{i}\right)=E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N(4)} T_{i} \mid N(4)\right]\right\}$

$$=\frac{4}{2} E[N(4)]=24 \mathrm{~h}. \ ^{*} E\left[\sum_{i=1}^{n} T_{i} \mid N(t)=n\right]=\frac{n t}{2}.$$

每名患者的平均停留时间$=\dfrac{E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N(4)}T_i\right)}{E[N(4)]}=2\text{ h}.$

[***习题3.9**] 设$\{N(t),t\geq 0\}$是强度函数为$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程, $X_1,X_2,\cdots$是事件发生间的时间间隔.

(1)判断$X_1,X_2,\cdots$是否独立.

(2)判断$X_1,X_2,\cdots$是否同分布.

[**解**] 累积强度函数$m(t)=\displaystyle\int_0^t\lambda(s)\mathrm{d}s$. 取$t_1,t_2>0$.

(1)$P\{X_2>t_2\mid X_1=t_1\}=P\{N(t_1+t_2)-N(t_1)=0\mid X_1=t_1\}$

$$=P\{N(t_1+t_2)-N(t_1)=0\}=\exp\left[-\int_{t_1}^{t_1+t_2}\lambda(s)\mathrm{d}s\right]=\mathrm{e}^{m(t_1)-m(t_1+t_2)}.$$

上式与t_1有关, 则X_1与X_2不独立, 进而$X_1,X_2,\cdots$不独立.

(2)因$X_1\sim Exp(m(t_1))$, 则$f_{X_1}(t)=m(t_1)\mathrm{e}^{-m(t_1)}$.

由全概率公式: $P\{X_2>t_2\}=\displaystyle\int_0^{+\infty}P\{X_2>t_2\mid X_1=t_1\}f_{X_1}(t_1)\mathrm{d}t_1$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{m(t_1)-m(t_1+t_2)}m(t_1)\mathrm{e}^{-m(t_1)}\mathrm{d}t_1=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-m(t_1+t_2)}m(t_1)\mathrm{d}t_1.$$

则X_1与X_2不同分布, 进而$X_1,X_2,\cdots$不同分布.

[**习题3.10**] 设每天经过某路口的车辆数为: 早上$07:00\sim 08:00$和$11:00\sim 12:00$平均每分钟2辆, 其他时间平均每分钟1辆. 求:

(1)$07:30\sim 11:20$时间内平均有几辆车通过该路口.

(2)$07:30\sim 11:20$时间内有>500辆车通过该路口的概率.

[**解**] 以$07:00$为0时刻, $08:00$为1时刻, $\cdots$.

设$[0,t]$时间内有$N(t)$辆车通过该路口,

则$\{N(t),t\geq 0\}$是强度函数$\lambda(t)=\begin{cases}120,0<t\leq 1\\60,1<t\leq 4\\120,4<t\leq 5\end{cases}$的非齐次Poisson过程.

(1)$m(t)=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{4\frac{1}{3}}\lambda(t)\mathrm{d}t=280$.

(2)$P\left\{N\left(4\dfrac{1}{3}\right)-N\left(\dfrac{1}{2}\right)>500\right\}=1-P\left\{N\left(4\dfrac{1}{3}\right)-N\left(\dfrac{1}{2}\right)\leq 500\right\}=1-\displaystyle\sum_{n=0}^{500}\dfrac{280^n}{n!}\mathrm{e}^{-280}$.

[习题3.12] 设$\{N_1(t), t \geq 0\}$和$\{N_2(t), t \geq 0\}$分别是参数为λ_1和λ_2的Poisson过程, 且它们相互独立.

(1)判断$\{Y(t) = N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$是否是Poisson过程.

(2)判断$\{Z(t) = N_1(t) - N_2(t), t \geq 0\}$是否是Poisson过程.

[解]

(1)显然$Y(t)$是计数过程, 且$Y(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0$.

因$\{N_1(t), t \geq 0\}$和$\{N_2(t), t \geq 0\}$有独立增量, 则$Y(t)$有独立增量.

$$P\{Y(t+s) - Y(s) = n\} = P\{[N_1(t+s) - N_1(s)] + [N_2(t+s) - N_1(s)] = n\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P\{N_1(t+s) - N_1(s) = k, N_2(t+s) - N_2(s) = n-k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P\{N_1(t+s) - N_1(s) = k\} \cdot P\{N_2(t+s) - N_2(s) = n-k\} \text{ *相互独立}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \cdot \frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \right) = \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{n} C_n^k (\lambda_1 t)^k (\lambda_2 t)^{n-k} \cdot \mathrm{e}^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$= \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^n}{n!} \mathrm{e}^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$, 故$\{Y(t), t \geq 0\}$是强度为$(\lambda_1 + \lambda_2)$的Poisson过程.

(2)取$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$, 则$Z(t) < 0$, 进而它不是计数过程, 也不是Poisson过程.

[习题3.14] 设移民到某地区的户数是Poisson过程, 平均每周有3户定居, 每户的人数是一个随机变量, 且每户的人数独立. 一户1人的概率为$\dfrac{1}{8}$, 一户2人的概率为$\dfrac{1}{8}$, 一户3人的概率为$\dfrac{1}{2}$, 一户4人的概率为$\dfrac{1}{4}$. 求10周内移民到该地区的总人数的期望和方差.

[解] 设$[0, t]$时间内有$N(t)$户移民到该地区.

设第$i \ \ (1 \leq i \leq N(t))$户有$Y_i$人, 则$Y_i \ \ (1 \leq Y_i \leq N(t))$独立同分布,

且$[0, t]$时间内移民到该地区的人数$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$是复合Poisson过程.

Y_i的分布律:

Y_i	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

则$E(Y_i) = 1 \cdot \dfrac{1}{8} + 2 \cdot \dfrac{1}{8} + 3 \cdot \dfrac{1}{2} + 4 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{23}{8}$,

$$E(Y_i^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} + 4^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{73}{8}.$$

故$E[X(t)] = \lambda t \cdot E(Y_i) = 3 \cdot 10 \cdot \dfrac{23}{8} = \dfrac{345}{4}, Var[X(t)] = \lambda t \cdot E(Y_i^2) = 3 \cdot 10 \cdot \dfrac{73}{8} = \dfrac{1095}{4}$.

4. Markov链

[习题1] 重复抛一枚硬币, 结果为$Y_0, Y_1, \cdots$, 其中$Y_i \ \ (i = 1, 2, \cdots)$取$0, 1$的概率都为$\dfrac{1}{2}$. 设随机变量$X_n = Y_n + Y_{n-1} \ \ (n \geq 1)$表示第$(n-1)$次和第$n$次抛的结果中1的个数. 问$\{X_n; n \geq 0\}$是否为Markov链.

[解] 不是. 因$X_n = Y_n + Y_{n-1} \ \ (n \geq 1)$, 则$X_{n+1} = Y_{n+1} - Y_n \ \ (n \geq 2)$,

进而$X_{n+1} = Y_{n+1} - (X_n - Y_{n-1})$, 即$X_{n+1}$与$Y_{n-1}$有关.

[习题2] 五个白球和五个黑球分别放在两个罐子中, 其中每个罐子有五个球. 每次从两罐中分别随机抽取一球并交换. 设n时刻左边罐子中有X_n个白球. 求X_n的转移概率.

[解] $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{25} & \dfrac{8}{25} & \dfrac{16}{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{25} & \dfrac{12}{25} & \dfrac{9}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{9}{25} & \dfrac{12}{25} & \dfrac{4}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{16}{25} & \dfrac{8}{25} & \dfrac{1}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

[习题3] 重复掷两枚四面分别为$1, 2, 3, 4$的骰子. 设第k次掷出的数字之和为Y_k, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$为前n次掷出的数字之和. 设随机变量$X_n = S_n \bmod 6$. 求X_n的转移概率.

[解] $P = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{3}{16} & \dfrac{4}{16} \\ \dfrac{4}{16} & \dfrac{3}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{3}{16} \\ \dfrac{3}{16} & \dfrac{4}{16} & \dfrac{3}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{2}{16} \\ \dfrac{2}{16} & \dfrac{3}{16} & \dfrac{4}{16} & \dfrac{3}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{2}{16} \\ \dfrac{2}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{2}{16} & \dfrac{3}{16} & \dfrac{4}{16} & \dfrac{3}{16} \end{bmatrix}$.

[习题4] 1990年, 某地区36%的住户是房主, 其余的住户为租房者. 接下来10年中, 6%的房主成为租房者, 12%的租房者成为房主. 求2000年、2010年房主的比例.

[解] 记房主、租房者分别为0、1.

(1)1步转移矩阵$P = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.06 \\ 0.12 & 0.88 \end{bmatrix}$.

1步转移后房主的比例$0.36 \times 0.94 + 0.64 \times 0.12 = 0.4152$.

(2)2步转移矩阵$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 0.8908 & 0.1092 \\ 0.2184 & 0.7816 \end{bmatrix}$.

2步转移后房主的比例$0.36 \times 0.8908 + 0.64 \times 0.2184 = 0.460464$.

[习题5] 考察赌徒破产链. 取$n=4$, 设$1\leq i\leq 3$时, $p_{i,i+1}=0.4, p_{i,i-1}=0.6$, 两端点为吸收态, 即$p_{0,0}=1, p_{4,4}=1$. 求$p_{1,4}^{(3)}$和$p_{1,0}^{(3)}$.

[解] 1步转移矩阵$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2步转移矩阵$P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.24 & 0 & 0.16 & 0 \\ 0.36 & 0 & 0.48 & 0 & 0.16 \\ 0 & 0.36 & 0 & 0.24 & 0.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3步转移矩阵$P^{(3)}=P^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.744 & 0 & 0.192 & 0 & 0.064 \\ 0.36 & 0.288 & 0 & 0.192 & 0.16 \\ 0.216 & 0 & 0.288 & 0 & 0.496 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

故$p_{1,4}^{(3)}=0.064, p_{1,0}^{(3)}=0.744$.

[习题6] 某司机在机场A、宾馆B和宾馆C间按如下方式行车: 若他在机场, 则下一时刻等概率地前往两宾馆之一; 若他在两宾馆之一, 则下一时刻以$\dfrac{3}{4}$的概率前往机场, 以$\dfrac{1}{4}$的概率前往另一宾馆. 求:

(1)该链的转移概率矩阵.

(2)设0时刻时司机在机场, 求2时刻时司机在这三个可能的地点的概率和3时刻时他在宾馆B的概率.

[解]

(1)1步转移矩阵$P=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{4} & 0 & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

(2)2步转移矩阵$P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix} 0.75 & 0.125 & 0.125 \\ 0.1875 & 0.4375 & 0.375 \\ 0.1875 & 0.375 & 0.4375 \end{bmatrix}$.

3步转移矩阵$P^{(3)}=P^3=\begin{bmatrix} 0.1875 & 0.40625 & 0.40625 \\ 0.609375 & 0.1875 & 0.203125 \\ 0.609375 & 0.203125 & 0.1875 \end{bmatrix}$.

故2时刻时司机在A, B, C的概率分别为$0.75, 0.125, 0.125$, 3时刻时他在宾馆B的概率为0.40625.

[习题7] 设昨日、前日都无雨时, 今天下雨的概率为0.3; 昨日、前日中至少有一天下雨时, 今天下雨的概率为0.6. 设第n天的天气为W_n, 其取值为$R=$雨天或$S=$晴天. 虽W_n不是Markov链, 但最近两日的天气情况$X_n=(W_{n-1},W_n)$是状态空间$S=\{RR,RS,SR,SS\}$的Markov链. 求:

(1)该链的转移概率.

(2)两步转移概率.

(3)在周日和周一晴天的条件下, 求周三下雨的概率.

[解] 记RR,RS,SR,SS分别为$0,1,2,3$.

(1)1步转移矩阵$P=\begin{bmatrix}0.6&0.4&0&0\\0&0&0.6&0.4\\0.6&0.4&0&0\\0&0&0.3&0.7\end{bmatrix}$.

(2)2步转移矩阵$P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix}0.36&0.24&0.24&0.16\\0.36&0.24&0.12&0.28\\0.36&0.24&0.24&0.16\\0.18&0.12&0.21&0.49\end{bmatrix}$.

(3)3步转移矩阵$P^{(3)}=P^3=\begin{bmatrix}0.36&0.24&0.192&0.108\\0.288&0.192&0.228&0.292\\0.36&0.24&0.192&0.208\\0.234&0.156&0.219&0.391\end{bmatrix}$.

周三下雨的概率$P(SR\bigcup RR)=p_{3,2}^{(3)}+p_{3,0}^{(3)}=0.219+0.234=0.453$.

[习题8] 考虑下列转移矩阵, 确定这些Markov链中的非常返态、常返态和不可约闭集.

(1) $\begin{bmatrix}0.4&0.3&0.3&0&0\\0&0.5&0&0.5&0\\0.5&0&0.5&0&0\\0&0.5&0&0.5&0\\0&0.5&0&0.3&0.4\end{bmatrix}$.

[解] 由概率状态转移图知: 该Markov链有3个类$\{1,3\},\{2,4\},\{5\}$.

$$f_{1,1}=0.4+\sum_{n=0}^{+\infty}0.3\times(0.5)^n\times0.5=0.4+\sum_{n=1}^{+\infty}0.3\times0.5^n=0.7<1,$$

则状态1、状态3都为非常返态.

$f_{5,5}=0.4<1$, 则状态5为非常返态.

$f_{2,2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}0.5^n=1$, 则状态2、状态4都为常返态.

(2) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$.

[**解**] 由概率状态转移图: 该Markov链有1个类$\{1,2,3,4,5,6\}$.

因有限状态的Markov链必有正常返态, 则所有状态都是常返态.

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$.

[**解**] 由概率状态转移图: 该Markov链有3个类$\{1,5\},\{2,4\},\{3\}$.

$f_{1,1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}1\times 0.3\times 0.7^n=1$, 则状态$1$、状态$5$都为常返态.

$f_{2,2}=0.2+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}0.8\times 0.6\times 0.4^n=1$, 则状态$2$、状态$4$都为常返态.

$f_{3,3}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}0.3^n=\dfrac{3}{7}<1$, 则状态$3$为非常返态.

(4) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

[**解**] 由状态转移图: 该Markov链有4个类$\{1,4\},\{2,5\},\{3\},\{6\}$.

$f_{1,1}=0.8+0.2\times 0.1\times\sum\limits_{n=0}^{+\infty}0.9^n=1$, 则状态$1$、状态$4$都为常返态.

$f_{2,2}=0.5+0.5\times 0.2\times\sum\limits_{n=0}^{+\infty}0.8^n=1$, 则状态$2$、状态$5$都为常返态.

$f_{3,3}=0, f_{6,6}=0$, 则状态3、状态6都为非常返态.

[习题9] 求下列Markov链的平稳分布.

(1)转移矩阵$P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\0.2 & 0.5 & 0.3\\0.1 & 0.3 & 0.6\end{bmatrix}$.

[解] 设平稳分布$\overrightarrow{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$, 则$\begin{cases}\pi_1=0.5\pi_1+0.2\pi_2+0.1\pi_3\\\pi_2=0.4\pi_1+0.5\pi_2+0.3\pi_3\\\pi_3=0.1\pi_1+0.3\pi_2+0.6\pi_3\\\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$.

解得:$\overrightarrow{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\left(\dfrac{11}{47},\dfrac{19}{47},\dfrac{17}{47}\right)$.

(2)转移矩阵$P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\0.3 & 0.4 & 0.3\\0.2 & 0.2 & 0.6\end{bmatrix}$.

[解] 设平稳分布$\overrightarrow{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$, 则$\begin{cases}\pi_1=0.5\pi_1+0.4\pi_2+0.1\pi_3\\\pi_2=0.3\pi_1+0.4\pi_2+0.2\pi_3\\\pi_3=0.1\pi_1+0.3\pi_2+0.6\pi_3\\\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$.

解得:$\overrightarrow{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

[习题10] 有三种健康计划: HMO、PPO、FFS, 人们按下面的转移矩阵改变健康计划:

	HMO	PPO	FFS
HMO	0.85	0.1	0.05
PPO	0.2	0.7	0.1
FFS	0.1	0.3	0.6

2000年, 三种计划的比例依次为30%、25%、45%. 求:

(1)2001年这三种计划的比例.

(2)从长远看, 选择这三种计划的比例.

[解]

(1)$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{\mu}\cdot P=\begin{bmatrix}0.30 & 0.25 & 0.45\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.85 & 0.1 & 0.05\\0.2 & 0.7 & 0.1\\0.1 & 0.3 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.35 & 0.34 & 0.31\end{bmatrix}$.

(2) 易证该Markov链遍历, 则$\exists$平稳分布, 且平稳分布是其唯一的极限分布.

设平稳分布$\overrightarrow{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$, 则$\begin{cases}\pi_1=0.85\pi_1+0.2\pi_2+0.1\pi_3\\\pi_2=0.1\pi_1+0.7\pi_2+0.3\pi_3\\\pi_3=0.05\pi_1+0.1\pi_2+0.6\pi_3\\\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$.

解得:$\overrightarrow{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\left(\dfrac{18}{34},\dfrac{11}{34},\dfrac{5}{34}\right)$.

[习题1] 将两个红球、四个白球分别放入甲、乙两盒子中. 每次从两盒中各取一球交换. 设 n 次交换后甲盒中有 X_n 个红球.

(1) 求证: $\{X_n; n=0,1,2,\cdots\}$ 是Markov链, 并求其一步转移矩阵.

(2) 求证: 上述Markov链是遍历的.

(3) 求上述Markov链的极限分布.

[解]

(1) $\{X_n; n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $S=\{0,1,2\}$ 的Markov链,

其一步转移概率矩阵 $P=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{3}{8} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 由状态转移图: 该Markov链不可约、非周期, 且状态有限,

则它包含正常返态, 进而所有状态都是正常返的, 故该Markov链遍历.

(3) 因该Markov链遍历, 则 $\exists$ 平稳分布, 且平稳分布是其唯一的极限分布.

设 $\overrightarrow{\pi}=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$. 令 $\begin{cases} \overrightarrow{\pi}=\overrightarrow{\pi}\cdot P \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1 \end{cases}$, 解得: $\overrightarrow{\pi}=\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{8}{15},\dfrac{1}{15}\right)$.

[习题2] 设三个盒子装有红色和白色两种球, 装球情况如下:

盒子	红球	白球
甲	90	10
乙	50	50
丙	40	60

对三盒分别作如下抽取:

① 甲: 任取一球, 记录颜色后, 放回一个与其颜色不同的球.

② 乙: 任取一球, 记录颜色后放回.

③ 丙: 任取一球, 记录颜色后不放回.

现某人从中选一个盒子, 对该盒子作对应的抽取, 得到的记录为 (红, 红, 红, 红, 白) , 问他最可能选哪个盒子.

[解] 分别对每个盒子求对其作抽取得到记录 (红, 红, 红, 红, 白) 的概率.

(1) 设 n 次抽取后甲盒中有 X_n 个红球,

则 $\{X_n; n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $S_1=\{0,\cdots,100\}$ 的非时齐Markov链,

其一步转移概率 $P\{X_{n+1}=k-1 \mid X_n=k\}=\dfrac{k}{100}, P\{X_{n+1}=k+1 \mid X_n=k\}=\dfrac{100-k}{100}$.

得到记录 (红, 红, 红, 红, 白) 的概率 $P_1=\dfrac{90}{100}\times\dfrac{89}{100}\times\dfrac{88}{100}\times\dfrac{87}{100}\times\dfrac{14}{100}\approx 0.0859$.

(2) 设 n 次抽取后甲盒中有 Y_n 个红球, 则 $\{Y_n; n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $S_2=\{50\}$ 的时齐Markov链,

其一步转移概率 $P\{X_{n+1}=50 \mid X_n=50\}=1$.

得到记录 (红, 红, 红, 红, 白) 的概率 $P_2=\left(\dfrac{50}{100}\right)^5=0.03125$.

(3) 设 n 次抽取后丙盒中有 Z_n 个红球,

则 $\{Z_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $S_3=\{0,\cdots,40\}$ 的非时齐Markov链,

其一步转移概率 $P\{X_{n+1}=k-1\mid X_n=k\}=\dfrac{k}{100-n},P\{X_{n+1}=k\mid X_n=k\}=\dfrac{100-n-k}{100-n}$.

得到记录 (红, 红, 红, 红, 白) 的概率 $P_3=\dfrac{40}{100}\times\dfrac{39}{99}\times\dfrac{38}{98}\times\dfrac{37}{97}\times\dfrac{60}{96}\approx 0.0146$.

甲盒对应的概率越大, 故最可能选甲盒.

[**习题3**] 对状态空间为 S 的Markov链和状态 $i,j\in S$, 若 $f_{i,i}<1,f_{j,j}<1$. 求证: (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p_{i,j}^{(n)}<+\infty$; (2)

$$f_{i,j}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p_{i,j}^{(n)}}{1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p_{j,j}^{(n)}}.$$

[**证**]

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p_{i,j}^{(n)}=f_{i,j}\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{j,j}^{(n)}\le\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{j,j}^{(n)}=\dfrac{1}{1-f_{j,j}}<+\infty$.

(2) 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p_{i,j}^{(n)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{l=1}^{n}f_{i,j}^{(l)}\cdot p_{j,j}^{(n-l)}=\sum\limits_{l=1}^{+\infty}f_{i,j}^{(l)}\cdot\left(\sum\limits_{n=l}^{+\infty}p_{j,j}^{(n-l)}\right)$

$=f_{i,j}\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{j,j}^{(n)}=f_{i,j}+f_{i,j}\cdot\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p_{j,j}^{(n)}$, 移项即证.

[**习题4**] 设Markov链的转移概率矩阵 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. 问:

(1) 第二个状态至少需几步才能转移到第三个状态.

(2) 两步转移概率矩阵.

[**解**]

(1) 因 $p_{2,3}=0$, 则状态 2 经一步无法转移到状态 3 .

因 $p_{2,1}=\dfrac{1}{2},p_{1,3}=\dfrac{1}{3}$, 由C-K方程: $p_{2,3}^{(2)}\ge p_{2,1}\cdot p_{1,3}>0$,

则状态 2 至少经两步转移到状态 3 .

(2) $P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix}\frac{13}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6}\\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & 0\\ \frac{5}{24} & \frac{11}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$.

[**习题5**] 设Markov链的转移概率矩阵 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$. 对 $n=1,2,3$, 求首达概率 $f_{1,1}^{(n)}$ 和 $f_{1,2}^{(n)}$.

[**解**]

(1) $f_{1,1}^{(1)}=\dfrac{1}{2},f_{1,1}^{(2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6},f_{1,1}^{(3)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$.

(2) $f_{1,2}^{1}=\dfrac{1}{2},f_{1,2}^{(2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4},f_{1,2}^{(3)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.

---

5. 鞅

[**习题1**] 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列独立同分布的随机变量. 设 $m(t)=E\left(\mathrm{e}^{tX_i}\right)$, 固定 t 并设 $m(t)<+\infty$. 设 $S_0=0,S_n=X_1+\cdots+X_n\ \ (n>0)$. 求证: 随机过程 $\left\{M_n=[m(t)]^{-n}\cdot\mathrm{e}^{tS_n}\right\}$ 是关于 $X_1,X_2,\cdots$ 的鞅.

[**证**] 显然 M_n 关于 $\sigma(X_1,\cdots,X_n)$ 可测.

$$E(|M_n|)=[m(t)]^{-n}\cdot E\left[\mathrm{e}^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right]\xlongequal{\text{独立同分布}}[m(t)]^{-n}\prod_{i=1}^{n}E\left(\mathrm{e}^{tX_i}\right)=1<+\infty\,.$$

$$\begin{aligned}&E(M_{n+1}\mid X_1,\cdots,X_n)=E\left\{[m(t)]^{-(n+1)}\cdot\mathrm{e}^{tS_{n+1}}\mid X_1,\cdots,X_n\right\}\\&\quad=E\left\{[m(t)]^{-(n+1)}\cdot\mathrm{e}^{tS_n}\cdot\mathrm{e}^{tX_{n+1}}\mid X_1,\cdots,X_n\right\}\\&\quad=[m(t)]^{-(n+1)}\cdot\mathrm{e}^{tS_n}\cdot m(t)=M_n\text{ , 故证.}\end{aligned}$$

[**习题2**] 考察整数上的随机游走, 设右移的概率 $p<\dfrac{1}{2}$, 左移的概率为 $(1-p)$. 设 n 时刻质点在坐标 S_n 处, 且 $S_0=a\ \ (0<a<N)$. 求证: $\left\{M_n=\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right\}$ 是鞅.

[**证**] 显然 M_n 关于 $\sigma(S_0,\cdots,S_n)$ 可测.

$E(|M_n|)=\max\left\{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^1,\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{-1}\right\}^{S_0+n}<+\infty$.

因 $S_n=S_0+\sum\limits_{i=1}^n X_i$, 其中 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布, 且 X_i 的分布列如下:

X_i	1	-1
p	p	$1-p$

则 $E(M_{n+1}\mid S_0,\cdots,S_n)=E\left[\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{S_{n+1}}\middle|S_0,\cdots,S_n\right]=E\left[\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{S_n+X_{n+1}}\middle|S_0,\cdots,S_n\right]$

$$=\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{S_n}\cdot E\left[\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}\middle|S_0,\cdots,S_n\right]=\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{S_n}\cdot E\left[\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}\right]$$

$$=\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{S_n}\cdot\left[p\cdot\dfrac{1-p}{p}+(1-p)\cdot\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{-1}\right]=\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{S_n}=M_n$$, 故证.

[**习题3**] 设分支过程的第 n 代有 X_n 个个体, 每个个体产生的后代的分布的均值为 μ , 方差为 σ^2 . 已知 $\{M_n=\mu^{-n}X_n\}$ 是鞅. 设 $\mathcal{F}_n$ 是 $X_0,\cdots,X_n$ 生成的 σ 代数, 求证: $E(X_{n+1}^2\mid\mathcal{F}_n)=\mu^2\cdot X_n^2+\sigma^2X_n$.

[**证**] 设第 $i\ \ (1\le i\le X_n)$ 个个体产生的后代的分布为 Z_i ,

则 $E(Z_i)=\mu,D(Z_i)=\sigma^2$, 且 $Z_1,\cdots,Z_{X_n}$ 独立同分布, $Z_i\ \ (1\le i\le X_n)$ 关于 $\mathcal{F}_n$ 独立.

$$E\left(X_{n+1}^2\mid\mathcal{F}_n\right)=E\left[\left(\sum_{i=1}^{X_n}Z_i\right)^2\middle|\mathcal{F}_n\right]\xlongequal{\text{独立同分布}}X_n\cdot E(Z_1^2)+X_n(X_n-1)\cdot E(Z_1\cdot Z_2)$$

$$=X_n\cdot\{D(Z_1)+[E(Z_1)]^2\}+X_n(X_n-1)\cdot[E(Z_1)]^2$$

$$=\sigma^2\cdot X_n+\mu^2\cdot X_n+\mu^2\cdot X_n(X_n-1)=\mu^2\cdot X_n^2+\sigma^2X_n$$.

6. Brown运动

[**习题1**] 设标准Brown运动 $\{B(t);t\geq 0\}$.

(1) 求 $B(1)+\cdots+B(n)$ 的分布.

(2) 求证: $\left\{X(t)=t\cdot B\left(\dfrac{1}{t}\right)\right\}$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上的Brown运动.

[**证**]

(1) 因 $\{B(t)\}$ 是标准Brown运动, 则随机向量 $\overrightarrow{x}=\begin{bmatrix}B(1)\\ \vdots\\ B(n)\end{bmatrix}\sim$ 多元正态分布, 且均值为 0 .

协方差矩阵 $\Sigma=\begin{bmatrix}1&1&1&1&\cdots&1&1&1\\1&2&2&2&\cdots&2&2&2\\1&2&3&3&\cdots&3&3&3\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&2&3&4&\cdots&n-2&n-1&n-1\\1&2&3&4&\cdots&n-2&n-1&n\end{bmatrix}_{n\times n}$.

设向量 $\overrightarrow{A}=(1,\cdots,1)$, 则 $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{x}=B(1)+\cdots+B(n)$ 是有零均值的随机变量,

其方差 $\overrightarrow{A}\cdot\Sigma\cdot\overrightarrow{A^T}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(2) $X(0)=0$.

$X(t)=t\cdot B\left(\dfrac{1}{t}\right)\sim N(0,t)$.

$$X(t)-X(s)=t\cdot B\left(\frac{1}{t}\right)-s\cdot B\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$=t\cdot B\left(\frac{1}{t}\right)-t\cdot B\left(\frac{1}{s}\right)+t\cdot B\left(\frac{1}{s}\right)-s\cdot B\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$=t\cdot\left[B\left(\frac{1}{t}\right)-B\left(\frac{1}{s}\right)\right]+(t-s)\cdot B\left(\frac{1}{s}\right)\sim N(0,|t-s|) ,$$

即 $X(t)$ 有平稳增量. 又 t 非随机, 则 $X(t)$ 有独立增量.

综上, $\{X(t)\}$ 是 $[0,+\infty)$ 上的Brown运动.

[习题2] 设标准Brown运动 $\{B(t); t \geq 0\}$.

(1) 求条件概率 $P\{B(2) > 0 \mid B(1) > 0\}$.

(2) 事件 $\{B(2) > 0\}$ 与事件 $\{B(1) > 0\}$ 是否独立.

[证]

(1) $P\{B(2) > 0 \mid B(1) > 0\} = \dfrac{P\{B(2) > 0, B(1) > 0\}}{P\{B(1) > 0\}}$

$= 2 \cdot P\{B(2) > 0, B(1) > 0\}$ * 因 $B(1) \sim N(0, 1)$, 则 $P\{B(1) > 0\} = \dfrac{1}{2}$.

$= 2 \cdot P\{B(2) - B(1) > -B(1), B(1) > 0\}$

$= 2 \int_0^{+\infty} P\{B(2) - B(1) > -x\} \cdot \varphi(x) \mathrm{d}x$

$= 2 \int_0^{+\infty} [1 - \varPhi(-x)] \mathrm{d}\varPhi(x) = 2 \int_0^{+\infty} \varPhi(x) \mathrm{d}\varPhi(x) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 y \mathrm{d}y = \dfrac{3}{4}$.

(2) 因 $B(2) \sim N(0, 2)$, 则 $P\{B(2) > 0\} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{3}{4} = P\{B(2) > 0 \mid B(1) > 0\}$, 故不独立.

[习题3] 设 $\{B_1(t); t \geq 0\}, \{B_2(t); t \geq 0\}$ 是相互独立的标准Brown运动. 求证: 随机过程 $\{X(t) = B_1(t) - B_2(t); t \geq 0\}$ 是Brown运动.

[证] $X(0) = B_1(0) - B_2(0) = 0$.

因 $\{B_1(t)\}$ 和 $\{B_2(t)\}$ 都有独立平稳增量, 而 $X(t) - X(s) = [B_1(t) - B_1(s)] - [B_2(t) - B_2(s)]$,

则 $\{X(t)\}$ 有独立平稳增量.

$E[X(t)] = E[B_1(t)] - E[B_2(t)] = 0, D[X(t)] = D[B_1(t)] + D[B_2(t)] = 2t$, 则 $X(t) \sim N(0, 2t)$, 故证.