《概率论与数理统计》期末速通

4. 随机变量的数字特征

4.0 常见分布的期望和方差

分布	分布律或概率密度	期望	方差
0-1分布 $(0-1)(p)\ \ (0<p<1)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}\ \ (k=0,1)$	p	$p(1-p)$
二项分布 $b(n,p)\ \ (n\geq 1,0<p<1)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ \ (k=0,1,\cdots,n)$	np	$np(1-p)$
Poisson分布 $\pi(\lambda)\ \ (\lambda>0)$	$P\{X=k\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\ \ (k=0,1,2,\cdots)$	λ	λ
均匀分布 $U(a,b)\ \ (a<b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},a<x<b\\ 0,otherwise\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $Exp(\theta)\ \ (\theta>0)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}},x>0\\ 0,x\leq 0\end{cases}$	θ	θ^2
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)\ \ (\sigma>0)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

4.1 数学期望

4.1.1 数学期望的定义

[**定义4.1.1**]

(1) 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k\ \ (k=1,2,\cdots)$. 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}x_k\cdot p_k$ 绝对收敛, 则称该级数的和为 X 的**数学期望**, 记作 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}x_k\cdot p_k$.

(2) 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$. 若积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则称该积分的值为 X 的**数学期望**, 记作 $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x$.

(3) 数学期望简称**期望**, 又称**均值**.

(4) X 的期望完全由 X 的分布确定. 若 X 服从某分布, 则称 $E(X)$ 为该分布的期望.

[**注1**] 上述级数或积分不绝对收敛时, 随机变量的期望不存在.

[**注2**] 期望的概率意义: 反映随机变量取值的平均水平.

[**例4.1.1**] 求下列随机变量 X 的期望.

(1) X 的分布律如下:

X	-1	0	3
p	0.3	0.2	0.5

(2) $X\sim U(1,4)$.

[**解**]

(1) $E(X)=(-1)\times 0.3+0\times 0.2+3\times 0.5=1.2$.

(2) 概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3},1<x<4\\0,otherwise\end{cases}$, 则 $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\dfrac{x}{3}\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}$.

[**例4.1.2**] 设两独立工作的元件 1 和 2 的寿命 $X_k\sim Exp(\theta)\ \ (k=1,2;\theta>0)$, 求它们串联成的系统的寿命 N 的期望.

[**解**] X_1,X_2 的分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}},x>0\\0,x\leq 0\end{cases}$.

因 $N=\min\{X_1,X_2\}$, 则其分布函数 $F_N(x)=1-[1-F_X(x)]^2=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{\theta}x},x>0\\0,x<0\end{cases}$,

进而其概率密度 $f_N(x)=F_N'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\theta}x},x>0\\0,x\leq 0\end{cases}$.

故 $E(N)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_N(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\dfrac{2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\theta}x}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{2}$.

[**例4.1.3**] 某车站每天 $08:00\sim 09:00$ 和 $09:00\sim 10:00$ 都恰有一客车到站, 但到站时间随机, 且两者到站的时间相互独立. 到站时刻满足满足:

到站时刻	$08:10$ 、 $09:10$	$08:30$ 、 $09:30$	$08:50$ 、 $09:50$
概率	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{3}{6}$	$\dfrac{2}{6}$

某人 $08:20$ 到车站, 求其期望候车时间.

[**解**] 设他候车时间为 X (以分钟记). $P\{X=10\}=\dfrac{3}{6},P\{X=30\}=\dfrac{2}{6}$.

设事件 A : 第一辆客车于 $08:10$ 到站, 事件 B : 第二辆客车于 $09:10$ 到站, 则 A 与 B 相互独立.

故 $P\{X=50\}=P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}$.

同理求得 $P\{X=30\},P\{X=50\},P\{X=70\},P\{X=90\}$.

则 X 的分布律如下:

X	10	30	50	70	90
p_k	$\dfrac{3}{6}$	$\dfrac{2}{6}$	$\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{6}$	$\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{6}$

故 $E(X)\approx 27.22$.

[**例4.1.4**] 设随机变量 $X\sim Exp(10)$. X 取不同值时的收益如下:

X **的取值**	$X\leq 1$	$1<X\leq 2$	$2<X\leq 3$	$X>3$
收益 Y	1500	2000	2500	3000

求收益 Y 的期望.

[**解**] 概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}},x>0\\0,x\leq 0\end{cases}$.

$$P\{Y=1500\}=P\{X\leq 1\}=\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-0.1}\ .$$

$$P\{Y=2000\}=P\{1<X\leq 2\}=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-0.1}-\mathrm{e}^{-0.2}\ .$$

$$P\{Y=2500\}=P\{2<X\leq 3\}=\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-0.2}-\mathrm{e}^{-0.3}\ .$$

$$P\{Y=3000\}=1-P\{Y=1500\}-P\{Y=2000\}-P\{Y=2500\}=\mathrm{e}^{-0.3}\ .$$

则 Y 的分布律为:

Y	1500	2000	2500	3000
p	$1-\mathrm{e}^{-0.1}$	$\mathrm{e}^{-0.1}-\mathrm{e}^{-0.2}$	$\mathrm{e}^{-0.2}-\mathrm{e}^{-0.3}$	$\mathrm{e}^{-0.3}$

故 $E(Y)\approx 2732.15$.

[**定理4.1.1**] [**0-1分布的期望**] 设服从0-1分布的随机变量 X 的分布律如下.

X	0	1
p	$1-p$	p

则 $E(X)=p$.

[**定理4.1.2**] [**Poisson分布的期望**] 设随机变量 $X \sim \pi(\lambda)$, 则 $E(X) = \lambda$.

[**证**] X 的分布律为 $P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \ \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda .$$

[**定理4.1.3**] [**均匀分布的期望**] 设随机变量 $X \sim U(a, b)$, 则 $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

[**证**] 概率密度 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0, otherwise \end{cases}$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x \mathrm{d}x = \frac{a+b}{2} .$$

[**定理4.1.4**] [**指数分布的期望**] 设随机变量 $X \sim Exp(\theta)$, 则 $E(X) = \theta$.

[**证**] 概率密度 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}} \mathrm{d}x = \left(-x \mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}} \mathrm{d}x = \theta$$

4.1.2 随机变量函数的数学期望

[**定理4.1.4**] 设随机变量 X , 函数 $g(x)$ 连续, $Y = g(X)$, 则:

(1) 若 X 为离散型随机变量, 且其分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k \ \ (k = 1, 2, \cdots)$. 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{n} g(x_k) \cdot p_k$ 绝对收敛, 则 $E(Y) = E[g(X)] = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} g(x_k) \cdot p_k$.

(2) 若 X 为连续型随机变量, 且其概率密度为 $f(x)$. 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 $E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \mathrm{d}x$.

[**例4.1.5**] 设随机变量 X 的分布律如下:

X	-2	0	2
p	0.4	0.3	0.3

求 $E(3X^2 + 5)$.

[**解**] $E(3X^2 + 5) = [3 \cdot (-2) + 5] \cdot 0.4 + (3 \cdot 0 + 5) \cdot 0.3 + (3 \cdot 2 + 5) \cdot 0.3 = 13.4$.

[例4.1.6] 设随机变量 $X \sim \pi(\lambda)$. 求 $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

[解] X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\ \ (k=0,1,2,\cdots)$.

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{\lambda^k\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\cdot(\mathrm{e}^{\lambda}-1)=\frac{1-\mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda}\ .$$

[例4.1.7] 设随机变量 $V\sim U(0,a)$, 随机变量 $W=kV^2$, 其中 k 为正常数. 求 $E(W)$.

[解] V 的概率密度 $f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a},0<v<a\\0,otherwise\end{cases}$.

$$E(W)=E(kV^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}kv^2\cdot f(v)\mathrm{d}v=\int_0^a kv^2\cdot\frac{1}{a}\mathrm{d}v=\frac{ka^2}{3}\ .$$

[定理4.1.5] 设二维随机变量 (X,Y) , 二元函数函数 $g(x,y)$ 连续, 随机变量$Z=g(X,Y)$, 则:

(1) 若 (X,Y) 为离散型随机变量, 且其联合分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{i,j}\ \ (i,j=1,2,\cdots)$. 若级数 $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}g(x_i,x_j)\cdot p_{i,j}$ 绝对收敛, 则 $\displaystyle E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}g(x_i,x_j)\cdot p_{i,j}$.

(2) 若 (X,Y) 为连续型随机变量, 且其联合概率密度为 $f(x,y)$. 若积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛, 则 $\displaystyle E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

[注] 求二维离散型随机变量的函数的期望时先求其分布, 再用定义求分布的期望更简单.

[例4.1.8] 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律如下:

$Y\setminus X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求 $E[(X-Y)^2]$.

[解] 设随机变量 $Z=(X-Y)^2$. 逐点代入得:

$p_{i,j}$	0.2	0.1	0.1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.3	0.1
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(3,-1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	4	1	16	9	4

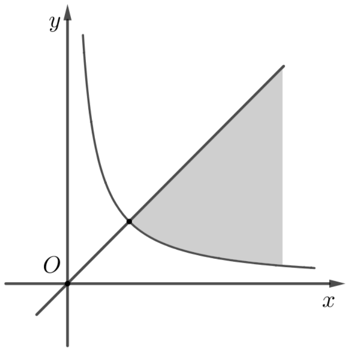
合并得 Z 的分布律:

$Z=(X-Y)^2$	0	1	4	9	16
p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.0

故 $E(Z)=5$.

[例4.1.9] 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2},\dfrac{1}{x}<y<x,x>1\\0,otherwise\end{cases}$. 求: (1) $E(Y)$; (2) $E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$.

[解] 概率密度的非零区域如下图所示:



(1) $Y=g(X,Y)$, 其中函数 $g(x,y)=y$.

$$E(Y)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}y\cdot\frac{3}{2x^3y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\cdot(\ln y)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\cdot(2\ln x)\mathrm{d}x=3\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}x^{-2}$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\frac{\ln x}{x^2}\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)=-\frac{3}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}-0-\int_1^{+\infty}x^{-3}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}x^{-3}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\,.$$

(2) $\dfrac{1}{XY}=g(X,Y)$, 其中函数 $g(x,y)=\dfrac{1}{xy}$.

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}\mathrm{d}y=\frac{3}{5}\,.$$

[**例4.1.10**] 某公司出售一件产品获利 m 元, 积压一件产品损失 n 元, 产品的销售量 $Y \sim Exp(\theta)$. 为使得利润的期望最大, 应生产多少件产品.

[**解**] Y 的概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}, y>0\\ 0, otherwise\end{cases}\ (\theta>0)$.

设生产 x 件产品, 则利润 $Q=Q(x)=\begin{cases}mY-n(x-Y), Y<x\\ mx, Y\geq x\end{cases}$.

$$E(Q)=\int_{-\infty}^{+\infty}Q(x)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}Q(x)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x[my-n(x-y)]\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\mathrm{d}y+\int_x^{+\infty}mx\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\mathrm{d}y$$

$$=(m+n)\theta-(m+n)\theta\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}-nx .$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E(Q)=(m+n)\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}-n=0$, 解得: $x=-\theta\ln\dfrac{n}{m+n}$.

$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E(Q)=-\dfrac{m+n}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}<0$, 则 $x=-\theta\ln\dfrac{n}{m+n}$ 是 $E(Q)$ 的一个极大值点.

故应生产 $x=\theta\ln\dfrac{m+n}{n}$ 件产品.

4.1.3 数学期望的性质

[**定理4.1.6**] [**数学期望的性质**]

(1) 对常数 C , 有 $E(C)=C$.

(2) 对随机变量 X 和常数 C , 有 $E(CX)=C\cdot E(X)$.

(3) 对有限个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$, 有 $E\left(\sum\limits_{i=1}^n X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^n E(X_i)$.

(4) 对有限个相互独立的随机变量 $X_1,\cdots,X_n$, 有 $E\left(\prod\limits_{i=1}^n X_i\right)=\prod\limits_{i=1}^n E(X_i)$.

[**证**] 下面对二维连续型随机变量 (X,Y) 证明 (3) 和 (4) , 设其概率密度为 $f(x,y)$, 边缘概率密度为 $f_X(x),f_Y(y)$.

(3) $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=E(X)+E(Y) .$$

(4) $E(XY)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_X(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y\right]=E(X)\cdot E(Y) .$$

[**注**] 随机变量 X 与 Y 相互独立是 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ 的充分条件, 但非必要条件.

[例4.1.11] 某车载有 20 个人, 有 10 个车站可下车, 每人等可能地在各车站下车, 不同人是否下车相互独立. 若到达某车站无人下车, 则不停车. 求停车次数为 X 的期望.

[解] 设随机变量 $X_i=\begin{cases}0,\text{第}i\text{个车站无人下车}\\1,\text{第}i\text{个车站有人下车}\end{cases}\ (1\le i\le 10)$, 则 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布.

因 $P\{X_i=0\}=\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^{20}=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$, $P\{X_i=1\}=1-P\{X_i=0\}=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$,

则 X_1 的分布律如下:

X_i	0	1
p	$\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$	$1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$

进而 $E(X_1)=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$.

因 $X=\sum\limits_{i=1}^{10}X_i$, 则 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)\xlongequal{\text{独立同分布}}10\cdot E(X_1)=10\cdot\left[1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}\right]$.

[注] 将一个随机变量分解为若干个随机变量之和, 利用随机变量之和的期望等于随机变量期望之和求原随机变量的期望.

[例4.1.12] 设某电路中电流 $I\ \ (\mathrm{A})$ 与电阻 $R\ \ (\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为 $g(i)=\begin{cases}2i,0\le i\le 1\\0,otherwise\end{cases}$, $h(r)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{9},0\le r\le 3\\0,otherwise\end{cases}$. 求电压 $V=IR$ 的期望.

[解] $E(V)=E(IR)\xlongequal{\text{独立性}}E(I)\cdot E(R)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}i\cdot g(i)\mathrm{d}i\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty}r\cdot h(r)\mathrm{d}r\right]$

$=\left(\int_0^1 2i^2\mathrm{d}i\right)\cdot\left(\int_0^3 r\cdot\dfrac{r^2}{9}\mathrm{d}r\right)=\dfrac{3}{2}$.

4.2 方差

4.2.1 方差的定义

[定义4.2.1] 对随机变量 X, 若期望 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在, 则称该期望为 X 的**方差**, 记作 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$, 即 $D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$. 称 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**标准差**或**均方差**.

(1) 离散型随机变量 X 的方差 $D(X)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2\cdot p_k$.

(2) 连续型随机变量 X 的方差 $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2\cdot f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 为 X 的概率密度.

[注1] 因 $[X-E(X)]^2\ge 0$, 则 $D(X)\ge 0$.

[注2] 方差的概率意义:

(1) 描述 X 与其期望的偏离程度.

(2) 刻画 X 的取值的分散程度:

① $D(X)$ 较小, 则 X 的取值集中在 $E(X)$ 附近.

② $D(X)$ 较大, 则 X 的取值较分散.

[例4.2.1] 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 期望 $E(X)=2$, 方差 $D(X)=1$. 求 $\int_{-\infty}^{+\infty}(x-2)^2\cdot f(x)\mathrm{d}x$.

[解] $\int_{-\infty}^{+\infty}(x-2)^2\cdot f(x)\mathrm{d}x=D(X)=1$.

[定理4.2.1] 若随机变量 X 的方差存在, 则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

[证] $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E\{X^2-2E(X)\cdot X+[E(X)]^2\}$ * $2E(X)$ 为常数

$=E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+[E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$.

[注1] $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$ 为方差的定义式, $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ 为方差的计算式.

[注2]

(1) 求离散型随机变量 X 的方差 $D(X)$ 的步骤:

公式: $D(X)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2\cdot p_k=E(X^2)-[E(X)]^2$.

① 求 $E(X)$.

② 求随机变量 X^2 的分布律和期望 $[E(X)]^2$.

③ 求 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

(2) 求连续型型随机变量 X 的方差 $D(X)$ 的步骤:

公式:
$$\begin{aligned}D(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2\cdot f(x)\mathrm{d}x=E(X^2)-[E(X)]^2\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\mathrm{d}x-\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x\right]^2.\end{aligned}$$

① 求 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x$.

② 求 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\mathrm{d}x$.

③ 求 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

[定理4.2.2] 设随机变量 X 的期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$. 称随机变量 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 为 X 的**标准化变量**, 其期望 $E(X^*)=0$, 方差 $D(X^*)=1$.

[证] $E(X^*)=E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\dfrac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$.

$$D(X^*)=E[(X^*)^2]-[E(X^*)]^2=E\left[\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=E\left[\dfrac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$=\dfrac{1}{\sigma^2}E\{[X-E(X)]^2\}=\dfrac{D(X)}{\sigma^2}=1\ .$$

[**注**] 随机变量 X 的期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$ 不代表 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

[**定理4.2.3**] [**0-1分布的方差**] 若随机变量 $X\sim(0-1)$, 其分布律如下:

X	0	1
p	$1-p$	p

则方差 $D(X)=p(1-p)$.

[**证**] 期望 $E(X)=p$.

随机变量 X^2 的分布律如下:

X^2	0	1
p	$1-p$	p

则期望 $E(X^2)=p$, 进而 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p(1-p)$.

[**定理4.2.3**] [**Poisson分布的方差**] 若随机变量 $X\sim\pi(\lambda)$, 则 $D(X)=\lambda$.

[**证**] X 的分布律 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots)$, 期望 $E(X)=\lambda$.

因 $E(X^2)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\cdot\dfrac{\lambda^k\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot\dfrac{\lambda^k\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!}=\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1+1)\cdot\dfrac{\lambda^k\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!}$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)\cdot\dfrac{\lambda^k\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda^k\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda^k\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-2)!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^{k+1}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}+\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda^2+\lambda\ ,$$

则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$.

[**注**] Poisson分布的参数 λ 表示分布的期望和方差. 若已知Poisson分布的期望或方差, 则可确定该Poisson分布.

[**定理4.2.4**] [**均匀分布的方差**] 若随机变量 $X\sim U(a,b)$, 则 $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

[**证**] X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},a<x<b\\0,otherwise\end{cases}$, 期望 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

期望 $E(X^2)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{b-a}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}$,

则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

[**定理4.2.5**] [**指数分布的方差**] 若随机变量 $X\sim Exp(\theta)$, 则 $D(X)=\theta^2$.

[**证**] X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}},x>0\\0,x\leq 0\end{cases}\ (\theta>0)$, 期望 $E(X)=\theta$.

期望 $E(X^2)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=2\theta^2$,

则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\theta^2$.

4.2.2 方差的性质

[**定理4.2.6**] [**方差的性质**]

(1) 对常数 C , 方差 $D(C)=0$.

(2) 对随机变量 X 和常数 C , 方差 $D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X),D(C+X)=D(X)$.

(3) 设 X,Y 是两个随机变量, 则:

① 方差 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\cdot E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}$

$=D(X)+D(Y)\pm 2\cdot[E(XY)-E(X)\cdot E(Y)]$.

② 若 X 与 Y 相互独立, 则方差 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

③ 对有限个相互独立的随机变量 $X_1,\cdots,X_n$, 方差 $D\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n D(X_i)$.

④ 方差 $D(aX+bY)=a^2\cdot D(X)+b^2\cdot D(Y)$.

(4) 方差 $D(X)=0$ iff 随机变量 X 以概率 1 取常数 $E(X)$, 即 $P\{X=E(X)\}=1$.

[**证**]

(1) $D(C)=E\{[C-E(C)]^2\}=E(0)=0$.

(2) $D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}=E\{CX-C\cdot[E(X)]^2\}$

$=E\{C^2[X-E(X)]^2\}=C^2\cdot E\{[X-E(X)]^2\}=C^2\cdot D(X)$.

$D(C+X)=E\{[C+X-E(C+X)]^2\}=E\{[X-E(X)]^2\}=D(X)$.

(3) 下证 $D(X+Y)$ 的情况.

$D(X+Y)=E\{[X+Y-E(X+Y)]^2\}=E\{[X-E(X)+Y-E(Y)]^2\}$

$=E\{[X-E(X)]^2+[Y-E(Y)]^2+2\cdot[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}$

$=E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\}+2\cdot E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}$

$=D(X)+D(Y)+2\cdot E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}$,

其中 $E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}=E[XY-X\cdot E(Y)-Y\cdot E(X)+E(X)\cdot E(Y)]$

$=E(XY)-E(Y)\cdot E(X)-E(X)\cdot E(Y)+E(X)\cdot E(Y)$

$=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$,

则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\cdot[E(XY)-E(X)\cdot E(Y)]$.

若 X 与 Y 相互独立, 则 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$, 进而 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

[**注1**] (3) 的 ② 中, X 与 Y 相互独立是 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 的充分条件, 但非必要条件.

[**注2**] 即使 X 与 Y 相互独立, 也无简便的方法计算方差 $D(XY)$.

[**定理4.2.7**] [**二项分布的方差**] 若随机变量 $X\sim b(n,p)$, 则期望 $E(X)=np$, 方差 $D(X)=np(1-p)$.

[**证**] 设 X 是 n 重Bernoulli试验中事件 A 发生的次数, 且每次试验中 A 发生的概率为 p .

设随机变量 $X_k=[A\text{在第}k\text{次试验中发生}]\ \ (1\leq k\leq n)$,

则 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立, 且都服从0-1分布, 进而期望 $E(X_k)=p$, 方差 $D(X_k)=p(1-p)$.

因 $X=\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$, 则 $E(X)=n\cdot E(X_k)=np,D(X)=n\cdot D(X_k)=np(1-p)$.

[**定理4.2.8**] [**正态分布的方差**] 若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$.

[**证**] 设标准化变量 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $E(Z)=0,D(Z)=1$.

因 $X=\sigma\cdot Z+\mu$, 则 $E(X)=\sigma\cdot E(Z)+\mu=\mu,D(X)=0+D(\sigma\cdot Z)=\sigma^2\cdot D(Z)=\sigma^2$.

[**注**] 本定理表明: 若已知正态分布的期望和方差, 则可确定该正态分布.

[**推论1**] 若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则随机变量 $a\cdot X+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

[**推论2**] 若随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立, 且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)\ \ (1\leq i\leq n)$, 则随机变量 $\displaystyle\sum_{i=1}^n c_i\cdot X_i\sim N\left(\sum_{i=1}^n c_i\cdot\mu_i,\sum_{i=1}^n c_i^2\cdot\sigma_i^2\right)$.

[**例4.2.2**] 设活塞直径 $X\sim N(22.40,0.03^2)$, 气缸直径 $Y\sim N(22.50,0.04^2)$, 且 X 与 Y 相互独立 . 任取一活塞和一气缸, 求活塞能装入气缸的概率.

[**解**] 活塞能装入气缸 iff $X<Y$.

因 X 与 Y 相互独立, 则 随机变量 $X-Y\sim N(-0.10,0.0025)$.

$$P\{X<Y\}=P\{X-Y<0\}=P\left\{\frac{X-Y-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}<\frac{0-(-0.010)}{\sqrt{0.0025}}\right\}$$

$$=\varPhi\left(\frac{0.10}{0.05}\right)=\varPhi(2)\approx 0.9972\,.$$

4.2.3 Chebyshev不等式

[**定理4.2.9**] [**Chebyshev不等式**] 若随机变量 X 的期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, 有 $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

[**证**] 下面证明 X 为连续型随机变量的情况. 设 X 的概率密度为 $f(x)$.

因 $|X-\mu|\geq\varepsilon$ 时, 有 $\dfrac{|X-\mu|^2}{\varepsilon^2}\geq 1$,

则 $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}(x-\mu)^2\cdot f(x)\mathrm{d}x$

$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)\mathrm{d}x=\frac{D(x)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

[**推论**] 若随机变量 X 的期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, 有 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}=1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

[**注**] 未知随机变量 X 的分布, 但已知其期望和方差时, Chebyshev不等式给出了概率 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}$ 的范围.

[**例4.2.3**] 设随机变量 $X\sim b(n,p)$. 估计 $P\{|X-np|\geq\sqrt{n}\}$.

[**解**] $P\{|X-np|\geq\sqrt{n}\}=P\{|X-E(X)|\geq\sqrt{n}\}\leq\frac{np(1-p)}{\left(\sqrt{n}\right)^2}=p(1-p)$.

4.3 协方差与相关系数

[**定义4.3.1**] 对随机变量 X 和 Y , 称期望 $E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}$ 为 X 与 Y 的**协方差**, 记作 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$; 称 $\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$ 为 X 与 Y 的**线性相关系数**, 简称**相关系数**.

[**注1**] 若 X 与 Y 相互独立, 则 $E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}=0$, 则该值不为 0 时, 反映了 X 与 Y 间的相关关系.

[**注2**] $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)]\cdot[Y-E(Y)]\}$ 为协方差的定义式,
$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$ 为协方差的计算式.

[**注3**] 协方差有量纲, 将其无量纲化得到相关系数.

[**定理4.3.1**] [**协方差的性质**]

(1) 对随机变量 X , 协方差 $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$.

(2) 对随机变量 X 和常数 C , 协方差 $\mathrm{Cov}(X,C)=0$.

(3) 对两个随机变量 X 和 Y , 协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$.

(4) 对两个随机变量 X,Y 和两个常数 a,b , 协方差 $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\cdot\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(5) 对三个随机变量 X_1,X_2 和 Y , 协方差 $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

(5) 对两个随机变量 X 和 Y , 方差 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm2\cdot\mathrm{Cov}(X,Y)$.

[**证**]

(1) $\mathrm{Cov}(X,X)=E(XX)-E(X)\cdot E(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=D(X)$.

(2) $\mathrm{Cov}(X,C)=E(CX)-E(C)\cdot E(X)=C\cdot E(X)-C\cdot E(X)=0$.

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y),\mathrm{Cov}(Y,X)=E(YX)-E(Y)\cdot E(X)$,

由 $E(XY)=E(YX)$ 即证.

(4) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=E(aX\cdot bY)-E(aX)\cdot E(b\cdot Y)=ab\cdot E(XY)-ab\cdot E(X)\cdot E(Y)$

$= ab \cdot [E(XY) - E(X) \cdot E(Y)] = ab \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$.

(5) $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = E[(X_1 + X_2) \cdot Y] - E(X_1 + X_2) \cdot E(Y)$

$= E(X_1 Y + X_2 Y) - [E(X_1) + E(X_2)] \cdot E(Y)$

$= E(X_1 Y) + E(X_2 Y) - E(X_1) \cdot E(Y) - E(X_2) \cdot E(Y)$

$= [E(X_1 Y) - E(X_1) \cdot E(Y)] + [E(X_2 Y) - E(X_2) \cdot E(Y)]$

$= \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$.

(6) $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2 \cdot E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\}$

$= D(X) + D(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$.

[**定理4.3.2**] [**相关系数的性质**]

(1) 随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}$ 有界, 且 $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.

(2) 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{X,Y}$, 则 $|\rho_{X,Y}| = 1$ iff $\exists$ 常数 $a, b\ s.t.\ P\{Y = a + b \cdot X\} = 1$, 即 X 与 Y 以概率 1 存在线性关系.

① $\rho_{X,Y} = 1$ iff $\exists$ 常数 $a, b\ s.t.\ P\{Y = a + b \cdot X\} = 1$, 其中 $b > 0$, 此时称 X 与 Y **正相关**.

② $\rho_{X,Y} = -1$ iff $\exists$ 常数 $a, b\ s.t.\ P\{Y = a + b \cdot X\} = 1$, 其中 $b < 0$, 此时称 X 与 Y **负相关**.

③ $\rho_{X,Y} = 0$, 则称 X 与 Y **不相关**.

[**注**] 相关系数 $\rho_{X,Y}$ 的概率意义: 描述 X 与 Y 间线性关系的强弱的量, $|\rho_{X,Y}|$ 越大, 则 X 与 Y 间的线性关系越强, 否则越差. $|\rho_{X,Y}| = 1$ 时, X 与 Y 以概率 1 存在线性关系.

[**定理4.3.3**] 随机变量 X 与 Y 相互独立是 X 与 Y 不相关的充分条件.

[**证**] 因 X 与 Y 相互独立, 则 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$, 进而 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

由 $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$ 即证.

[**注1**] 本定理的必要性不成立, 因为 X 与 Y 不相关只表示 X 与 Y 间无线性关系, 不能推出 X 与 Y 间完全无关, 即相互独立. 反例见 **例4.3.1** . 但对服从二维正态分布的随机变量, 相关与独立等价, 见 **定理4.3.4** .

[**注2**]

(1) 证明随机变量 X 与 Y 相互独立的方法:

① 对 $\forall x, y$, 联合分布函数 $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

② 对 $\forall i, j$, 联合分布律 $p_{i,j} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$.

③ 对 $\forall x, y$, 联合概率密度 $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

(2) 证明随机变量 X 与 Y 不相关的方法:

① 相关系数 $\rho_{X,Y} = 0$.

② 协方差 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

③ 期望 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$. (优先使用)

④ 方差 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

[例4.3.1] 二维随机变量 (X,Y) 的分布律如下:

$Y \setminus X$	-2	-1	1	2
1	0	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	0
4	$\dfrac{1}{4}$	0	0	$\dfrac{1}{4}$

求证: (1) 随机变量 X 与 Y 不相关; (2) X 与 Y 不独立.

[证]

(1) X 的分布律:

X	-2	-1	1	2
p	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

则期望 $E(X)=0$.

Y 的分布律:

Y	1	4
p	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

则期望 $E(Y)=\dfrac{5}{2}$.

XY 的分布律:

XY	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
p	$\dfrac{1}{4}$	0	0	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	0	0	$\dfrac{1}{4}$

则期望 $E(XY)=0$.

因 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=0$, 则 X 与 Y 不相关

(2) 观察知: X 与 Y 有关系 $Y=X^2$. 下证 X 与 Y 不独立.

由 $P\{X=2,Y=1\}=0\neq\dfrac{1}{8}=P\{X=-2\}\cdot P\{Y=1\}$ 即证.

[注] 本例中的 X 与 Y 既不独立也不相关. 事实上, 独立性与相关性无必然关系.

[定理4.3.4] 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 其概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$, 则:

(1) X 与 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}=\rho$.

(2) X 与 Y 不相关 iff X 与 Y 独立.