随机过程期末速通

6. 鞅

6.1 基本概念

[**例6.1.1**] 设某赌博者正进行一系列赌博, 每次赌博输赢的概率都是 $\dfrac{1}{2}$.

设 $\{Y_n;n=1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 表示每次赌博的结果,

则 $P\{Y_n=1\}=P\{Y_n=-1\}=\dfrac{1}{2}$,

其中事件 $\{Y_n=1\}$ 表示赌博者在第 n 局赢, 事件 $\{Y_n=-1\}$ 表示赌博者在第 n 局输.

若赌博者采用的赌博策略(即下的赌注)依赖于前面的赌博结果,

则它的赌博可用随机变量 $b_n=b_n(Y_1,\cdots,Y_{n-1})$ 描述,

其中 $b_n\ \ (b_n<+\infty)$ 是第 n 局的赌注, 若赢则获利 b_n , 否则输掉 b_n ,

$b_n(Y_1,\cdots,Y_{n-1})$ 表示 b_n 关于 $(Y_1,\cdots,Y_{n-1})$ 可测, 即前面局的情况确定时, 该局下的赌注也确定.

设初始赌资为 X_0 , 则 n 局后他的赌资 $X_n=X_0+\displaystyle\sum_{i=1}^n b_i\cdot Y_i,X_{n+1}=X_n+b_{n+1}\cdot Y_{n+1}$.

$E(X_{n+1}\mid Y_1,\cdots,Y_n)=E(X_n\mid Y_1,\cdots,Y_n)+E(b_{n+1}Y_{n+1}\mid Y_1,\cdots,Y_n)$

$=X_n+b_{n+1}\cdot E(Y_{n+1}\mid Y_1,\cdots,Y_n)$

* ① 随机变量 X_n 和常数 b_{n+1} 关于 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 可测.

* ② 若随机变量 $X\sim\mathcal{F}$ 且 Y 关于 $\mathcal{F}$ 独立, 则 $E(XY\mid\mathcal{F})=X\cdot E(Y\mid\mathcal{F})=X\cdot E(Y)$.

$=X_n+b_{n+1}\cdot E(Y_{n+1})$ * $\{Y_n\}$ 独立.

$=X_n$ * 因每局公平, 则 $E(Y_{n+1})=0$.

这表明: 每次赌博输赢的机会均等, 且赌博策略依赖于前面的赌博结果, 即赌博是"公平的".

故任何赌博者不可能通过改变赌博策略来将公平的赌博变为有利于自己的赌博.

[**定义6.1.1**] 设随机过程 $\{X_n;n\geq 0\}$, 一列随机变量 $\{Y_n;n\geq 0\}$.

(1) $\{X_n;n\geq 0\}$ 称为关于 $\{Y_n;n\geq 0\}$ 的**下鞅**, 如果:

① 对 $n\geq 0$, X_n 是 $Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$ 的函数, 或推广至 $X_n\sim\mathcal{F}(Y_0,\cdots,Y_n)$.

② $E(X_n^+)<\infty$, 其中正步 $X_n^+=\max\{X_n,0\}$.

③ $E(X_{n+1}\mid Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\geq X_n$.

(2) $\{X_n;n\geq 0\}$ 称为关于 $\{Y_n;n\geq 0\}$ 的**上鞅**, 如果:

① 对 $n\geq 0$, X_n 是 $Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$ 的函数, 或推广至 $X_n\sim\mathcal{F}(Y_0,\cdots,Y_n)$.

② $E(X_n^-)<\infty$, 其中负步 $X_n^-=\min\{-X_n,0\}$.

③ $E(X_{n+1}\mid Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\leq X_n$.

(3) 若 $\{X_n; n \geq 0\}$ 同时为关于 $\{Y_n; n \geq 0\}$ 的下鞅和上鞅, 则称其为关于 $\{Y_n; n \geq 0\}$ 的**鞅**, 此时 $E(X_{n+1} \mid Y_0, Y_1, \cdots, Y_n) = X_n$.

[**注1**] 鞅描述公平的赌博, 下鞅和上鞅分别描述了有利的和不利的赌博.

[**注2**] 对 $E(X_{n+1} \mid Y_0, Y_1, \cdots, Y_n) = X_n$ 两边取期望得: $E(X_{n+1}) = E(X_n) = \cdots = E(X_0)$, 这称为**鞅性**.

鞅性只是鞅的性质, 不能作为其定义.

[**注3**] 随机过程 $\{X_n; n \geq 0\}$ 关于随机变量 $\{Y_n; n \geq 0\}$ 中的"关于"表示条件期望, 不可省略.

[**注4**] 随机过程 $\{X_n; n \geq 0\}$ 关于一列随机变量 $(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$ 是鞅也可推广至关于 $\sigma\{Y_0, Y_1, \cdots, Y_n\}$ 是鞅, 后者表示 $\{X_n; n \geq 0\}$ 还对 $(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$ 构成的集合是鞅.

[**注5**] 若随机过程 $\{X_n; n \geq 0\}$ 关于一列随机变量 $(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$ 是鞅, 则 $E(|X_n|) < +\infty$.

[**定义6.1.2**] 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完备的概率空间, $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一列子 σ 代数, 且 $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \ \ (n \geq 0)$, 称其为**子 σ 代数流**. 随机过程 $\{X_n; n \geq 0\}$ 称为 $\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ **适应的**, 如果对 $\forall n \geq 0$, 随机变量 X_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测, 即对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $\{X_n \leq x\} \in \mathcal{F}_n$. 此时称 $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 为**适应列**. 在**定义6.1.1**中定义下鞅时, 假定 X_n 是 $Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$ 的函数. 令 $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_0, Y_1, \cdots, Y_n\}$, 则 $\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 是一个子 σ 代数流, 即 " X_n 是关于 $Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$ 的函数" 的确切含义为: $\{X_n; n \geq 0\}$ 是 $\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 适应的.

[**注1**] $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_0, Y_1, \cdots, Y_n\} \subset \sigma\{Y_0, Y_1, \cdots, Y_{n+1}\} = \mathcal{F}_{n+1}$, 即流逐渐扩大.

因随机变量 $X_n \in \mathcal{F}_n \subset F_{n+1}$, 则 X_n 关于子 σ 代数 $\mathcal{F}_{n+1}$ 可测.

[**注2**] 每个子 σ 代数 $\mathcal{F}_n$ 都是 σ 代数 $\mathcal{F}$ 的子集.

[**注3**] 事件 $\{X_n \leq x\} \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow$ 事件 $\{X_n > x\} \in \mathcal{F}_n$.

[**注4**] 适应可理解为下标相同, 如本定义中"如果对 $\forall n \geq 0$, 随机变量 X_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测, 即对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $\{X_n \leq x\} \in \mathcal{F}_n$ "的下标都为 n .

[**定义6.1.3**] 设 $\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中一个单调递增的子 σ 代数流, $\{X_n; n \geq 0\}$ 是随机过程.

(1) $\{X_n; n \geq 0\}$ 称为关于一列子 σ 代数 $\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 的**鞅**, 如果:

① $\{X_n\}$ 是 $\{\mathcal{F}_n\}$ 适应的.

② $E(X_n) < \infty$.

③ 对 $\forall n \geq 0$, 有 $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$.

(2) 适应列 $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 称为**下鞅**, 如果对 $\forall n \geq 0$, 都有 $E(X_n^+) < \infty$, 且 $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n$.

(3) 适应列 $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 称为**上鞅**, 如果对 $\forall n \geq 0$, 都有 $E(X_n^-) < \infty$, 且 $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$.

[**注**] 设赌博者在 n 次赌博后的赌资为 X_n , 则 $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ 表明: 平均而言, 他在下一次赌博结束时的赌资等于现在的赌资, 与他过去赌博的输赢无关, 即鞅有无后效性, 这也体现了博弈的公平性.

[**定理6.1.1**] 设 $\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中一个单调递增的子 σ 代数流, $\{X_n; n \geq 0\}$ 和 $\{Y_n; n \geq 0\}$ 是随机过程.

(1) 适应列 $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 是下鞅 iff 适应列 $\{-X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 是上鞅.

(2) 若适应列 $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 和适应列 $\{Y_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 都是下鞅, 则对 $\forall$ 正常数 a, b , 有适应列 $\{aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 是下鞅.

(3) 若适应列 $\{X_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 和适应列 $\{Y_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 都是下鞅 则适应列 $\{\max\{X_n, Y_n\}, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ 是下鞅.

(4) 若适应列 $\{X_n,\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$ 和适应列 $\{Y_n,\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$ 都是上鞅 则适应列 $\{\min\{X_n,Y_n\},\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$ 是上鞅.

[**例6.1.2**] 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列零均值的独立随机变量, 且 $E(|X_i|)<+\infty$. 设随机变量 $S_0=0,S_n=\sum\limits_{k=1}^n X_k$. 求证:

(1) 随机过程 $\{S_n;n\geq 0\}$ 是关于子 σ 代数 $\mathcal{F}_n=\sigma\{X_1,\cdots,X_n\}$ 的鞅.

(2) 若 $\mu=E(X_k)\neq 0\ \ (k=1,2,\cdots)$, 则随机过程 $\{M_n=S_n-n\mu\}$ 是关于子 σ 代数流 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的鞅.

(3) 若 $\mu>0$, 则 $\{S_n\}$ 是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的下鞅; 若 $\mu<0$, 则 $\{S_n\}$ 是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的上鞅.

[**证**]

(1) 只证(1), (2)同理.

$E(X_k)=0\ \ (k=1,2,\cdots)$ 时, 显然 S_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测, 且 $E(|S_n|)\leq\sum\limits_{i=1}^n E(|X_i|)<+\infty$.

则 $E(S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=E(X_1+\cdots+X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)$

$=E(X_1+\cdots+X_n\mid\mathcal{F}_n)+E(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=S_n$. 故 $\{S_n\}$ 是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的鞅.

(3) 注意到 $E(S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=E\left(\sum\limits_{i=1}^n X_i+X_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right)=S_n+\mu$ 即证.

[**注**] (2)给出了 $X_k\ \ (k=1,2,\cdots)$ 均值非零时构造鞅的方法.

[**例6.1.3**] 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列独立同分布的随机变量, 分布律 $P\{X_i=1\}=P\{X_i=-1\}=\dfrac{1}{2}$.

考察一公平博弈问题. 将 $X_i\ \ (i=1,2,\cdots)$ 视为抛硬币游戏的结果: 若出现正面则赢 1 元, 否则输 1 元.

赌博规则: 每次抛硬币前的赌注比上一次翻一倍, 直至赌赢停止.

设 W_n 表示第 n 次赌博后的赌资, 则 $W_0=0$.

设前 n 次抛硬币都出现反面, 则已输了 $1+2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 元, 即 $W_n=-(2^n-1)$.

若下一次硬币为正面, 则 $W_{n+1}=2^n-(2^n-1)=1$.

W_n 从赢时起不再变化, 即 $P\{W_{n+1}=1\mid W_n=1\}=1$.

由公平性: $\begin{cases}P\{W_{n+1}=1\mid W_n=-(2^n-1)\}=\dfrac{1}{2}\\ P\{W_{n+1}=-2^n-2^n+1\mid W_n=-(2^n-1)\}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

设子 σ 代数 $\mathcal{F}_n=\sigma\{X_1,\cdots,X_n\}$,

则 $E(W_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)$

$=1\cdot P\{W_{n+1}=1\mid W_n=-(2^n-1)\}$

$+(-2^n-2^n+1)\cdot P\{W_{n+1}=-2^n-2^n+1\mid W_n=-2^n+1\}=W_n$,

故 $\{W_n;n\geq 0\}$ 是关于子 σ 代数流 $\{\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$ 的鞅.

[**推广**] 设每次下的赌注与前面有关, 但未必是两倍.

设第 n 次下的赌注为 B_n , 则 B_n 是关于 $X_1,\cdots,X_{n-1}$ 的函数,

即 B_n 是 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测的. 特别地, 设 B_1 是常数.

设 W_n 表示第 n 次赌博后的赌资, 则 $W_0=0$, 且 $W_n=\sum\limits_{i=1}^{n}B_i\cdot X_i$.

设 $E(|B_n|)<+\infty$, 即每次的赌资有限.

因 $E(W_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=E\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}B_i\cdot X_i\mid\mathcal{F}_n\right)=E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}B_i\cdot X_i\mid\mathcal{F}_n\right)+E(B_{n+1}\cdot X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)$

$$=\sum_{i=1}^{n}B_i\cdot X_i+B_{n+1}\cdot E(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=W_n+B_{n+1}\cdot E(X_{n+1})=W_n+B_{n+1}\cdot 0=W_n\ ,$$

则 $\{W_n;n\geq 0\}$ 是关于子 σ 代数流 $\{\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$ 的鞅.

[**例6.1.4**] [**Polya坛子抽样模型**] 考察一个装有红、黄两色球的坛子, 初始时坛中有红、黄球各一个. 现进行如下规则的抽取: 若拿出红球, 则放回的同时再放入一个同色的红球; 若拿出黄球, 则放回的同时再放入一个同色的黄球. 设 n 次抽取后坛中有 $X_n\ \ (X_n\in\{1,\cdots,n+1\})$ 个红球, 则 $X_0=1$.

随机过程 $\{X_n;n\geq 0\}$ 是一非时齐Markov链, 其转移概率 $\begin{cases}P\{X_{n+1}=k+1\mid X_n=k\}=\dfrac{k}{n+2}\\P\{X_{n+1}=k\mid X_n=k\}=\dfrac{n+2-k}{n+2}\end{cases}$.

设第 n 次抽取后红球占比 $M_n=\dfrac{X_n}{n+2}$, 则 $E(|M_n|)=E\left(\left|\dfrac{X_n}{n+2}\right|\right)=\dfrac{E(|X_n|)}{n+2}\leq\dfrac{n+1}{n+2}<+\infty$.

因 $E(X_{n+1}\mid X_n=k)=k\cdot P\{X_{n+1}=k\mid X_n=k\}+(k+1)\cdot P\{X_{n+1}=k+1\mid X_n=k\}$

$=k+\dfrac{k}{n+2}$, 则 $E(X_{n+1}\mid X_n)=X_n+\dfrac{X_n}{n+2}$.

因 $\{X_n\}$ 是Markov链, 则子 σ 代数 $\mathcal{F}_n=\sigma\{X_1,\cdots,X_n\}$ 中对随机变量 X_{n+1} 有影响的信息都包含在 X_n 中,

则 $E(M_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)\xlongequal{\text{Markov性}}E(M_{n+1}\mid X_n)=E\left(\dfrac{X_{n+1}}{n+3}\middle|X_n\right)=\dfrac{1}{n+3}E(X_{n+1}\mid X_n)$

$=\dfrac{1}{n+3}\left(X_n+\dfrac{X_n}{n+2}\right)=\dfrac{X_n}{n+2}=M_n$, 故 $\{M_n\}$ 是关于子 σ 代数流 $\{\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$ 的鞅.

[**注**] 本模型常用于描述群体的增殖和只考虑感染的传染病传播. 以前者为例, 若 $\{M_n\}$ 为上鞅, 则该物种渐少; 若 $\{M_n\}$ 为下鞅, 则该物种渐多.

[**定理6.1.2**] [**条件Jensen不等式**] 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数, 随机变量 M 满足: ① $E(|M|)<+\infty$; ② $E(|\varphi(M)|)<+\infty$, 则对 $\forall$ 递增的子 σ 代数流 $\{\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$, 都有 $E[\varphi(M)\mid\mathcal{F}_n]\geq\varphi(E(M\mid\mathcal{F}_n))$.

[**定理6.1.3**] 设 $\{M_n;n\geq 0\}$ 是关于子 σ 代数流 $\{\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$ 的鞅(或下鞅), $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数(或非降凸函数), 且 $E[\varphi(M_n)^+]<\infty$, 则对 $\forall n\geq 0$, 随机过程 $\{\varphi(M_n);n\geq 0\}$ 是关于 $\{\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$ 的下鞅.

(1) 随机过程 $\{|M_n|;n\geq 0\}$ 是下鞅.

(2) $E(M_n^2)<+\infty$ 时, 随机过程 $\{M_n^2;n\geq 0\}$ 是下鞅.

[**注**] 本定理表明: 在一定条件下, 凸函数将鞅和下鞅都变为下鞅.

6.2 鞅停时定理与鞅收敛定理

6.2.1 鞅停时定理

[**定义6.2.1**] 称随机函数 $T \in \{0,1,2,\cdots\}$ 是关于一列随机变量 $\{X_n;n\geq 0\}$ 的**停时**, 如果对 $\forall n\geq 0$, 都有 $\{T=n\}\in\sigma\{X_0,X_1,\cdots,X_n\}$, 即根据之前的情况可确定何时停下. 事件 $\{T=n\}$ 和 $\{T\neq n\}$ 都由 n 时刻及其之前的信息完全确定, 无需也无法借助将来的情况.

[**例6.2.1**] 对固定的常数 n , 确定的时刻 $T=n$ 是一个停时. 如赌博开始前已确定 n 局后结束.

[**例6.2.2**] 设 $\{X_n;n\geq 0\}$ 是一列随机变量, A 是一个事件集.

设 $T(A)=\inf\{n,X_n\in A\}$, 规定 $T(\varnothing)=\infty$.

$T(A)$ 是随机过程 $\{X_n;n\geq 0\}$ 首次进入 A , 即发生 A 中的事件的时刻, 称其为 $\{X_n;n\geq 0\}$ 到 A 的**首达时**.

因事件 $\{T(A)=n\}=\{X_i\notin A,i\in[0,n-1];X_n\in A\}$, 则 $\{T_A=n\}$ 完全由 $X_0,\cdots,X_n$ 确定,

进而 $T(A)$ 是关于 $\{X_n;n\geq 0\}$ 的停时.

[**定理6.2.1**] [**鞅停时定理**, **可选抽样定理**] 设 $\{X_n;n\geq 0\}$ 是一列随机变量, $\{M_n;n\geq 0\}$ 是关于子 σ 代数流 $\{F_n=\sigma\{X_0,X_1,\cdots,X_n\};n\geq 0\}$ 的鞅, 且停时 T 满足: ① $P\{T<+\infty\}=1$; ② $E(|M_T|)<+\infty$; ③ $\lim\limits_{n\to+\infty}E(|M_n|\cdot I_{\{T>n\}})=0$. 则有 $E(M_T)=E(M_0)$, 即停时处有鞅性.

6.2.2 鞅收敛定理

[**定理6.2.2**] [**鞅收敛定理**] 设 $\{M_n;n\geq 0\}$ 是关于一列随机变量 $\{X_n;n\geq 0\}$ 的一致可积鞅, 则 $M_\infty=\lim\limits_{n\to+\infty}M_n$ 存在, 且 $E(M_\infty)=E(M_0)$, 即无穷远处有鞅性.

6.3 连续鞅

[**定义6.3.1**] 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个完备的概率空间, $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ 是一个非降的 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数流, 简称**子 σ 代数流**, 简记作 $\{\mathcal{F}_t\}$. 随机过程 $\{X(t); t \geq 0\}$ 简记作 $\{X_t\}$, 称其是 $\{F_t\}$ **适应的**, 若对 $\forall t \geq 0$, 随机变量 X_t 都关于子 σ 代数 $\mathcal{F}_t$ 可测, 此时称 $\{X_t\}$ 为**适应过程**. 适应过程 $\{X_t\}$ 称为关于 $\{F_t\}$ 的**鞅**, 如果每个 X_t 可积(即 $E(|X_t|) < +\infty$) , 且对 $\forall s \in [0, t)$, 几乎必然有 $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$. 特别地, $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_u; 0 \leq u \leq t\}$ 时, 几乎必然有 $E(X_t \mid X_u, 0 \leq u \leq s) = X_s$, 即 $\{X_t\}$ 关于由自己生成的 σ 代数是鞅, 简称 $\{X_t\}$ 是**鞅**.

[**注**] 鞅性: $E(X_t) = E[E(X_t \mid X_0)] = E(X_0)$.

[**例6.3.1**] 设 $\{Y_t; t \geq 0\}$ 是一列零初值且有独立平稳增量的随机过程. 设随机变量 $X_t = X_0 \cdot \mathrm{e}^{Y_t}$, 其中 X_0 为常数.

假设 $E\left(\mathrm{e}^{Y_1}\right) = 1$, 则 $E(|X_t|) = |X_0| \cdot E\left(\mathrm{e}^{Y_t}\right) \xlongequal{\text{矩母函数的性质}} |X_0| \cdot \left[E\left(\mathrm{e}^{Y_1}\right)\right]^t = |X_0| < +\infty$,

其中 X_0 需加绝对值是因为未知 X_0 的正负.

对 $\forall s \in [0, t)$,

有 $E(X_t \mid X_r, 0 \leq r \leq s)$

$= E(X_s \cdot \mathrm{e}^{Y_t - Y_s} \mid X_r, 0 \leq r \leq s)$ * $Y_t = Y_1 + (Y_2 - Y_1) + \cdots + (Y_t - Y_{t-1})$.

$= X_s \cdot \left[E\left(\mathrm{e}^{Y_1}\right)\right]^{t-s}$ * X_s 关于条件可测, $\mathrm{e}^{Y_t - Y_s}$ 关于条件独立.

$= X_s \cdot E\left(\mathrm{e}^{Y_t - Y_s}\right)$

* ① X_s 关于 $\{X_r; 0 \leq r \leq s\}$ 可测.
* ② $\{X_r; 0 \leq r \leq s\}$ 关于 $\{Y_t; 0 \leq t \leq s\}$ 可测, 即 X_r 依赖于 Y_t 及之前的信息.
* ③ $(Y_t - Y_s)$ 与 $\{Y_u; 0 \leq u \leq s\}$ 独立.

$= X_s \cdot E\left(\mathrm{e}^{Y_{t-s}}\right)$ * 平稳增量性, 即 $\phi_{Y_t - Y_s}(1) = \phi_{Y_{t-s}}(1)$.

$= X_s$, a.s.
