《常微分方程》期末速通

3. 高阶ODE的解法

3.1 高阶线性ODE

[定义3.1.1] 对 n 阶线性ODE $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=f(t)\ \ (i)$, 其中 $a_i(t)\ \ (i=1,\cdots,n)$ 和 $f(t)$ 都是区间 $a\leq t\leq b$ 上的连续函数. 若 $f(t)\equiv 0$, 即方程形如 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0\ \ (ii)$, 则称其为 n **阶齐次线性ODE**, 简称**齐次线性ODE**; 若 $f(t)\not\equiv 0$, 则称其为 n **阶非齐次线性ODE**, 简称**非齐次线性ODE**. 称 (ii) 为 (i) 对应的齐次ODE.

[定理3.1.1] **[高阶线性ODE的解的存在唯一性定理]** 设 n 阶线性ODE $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=f(t)\ \ (i)$, 其中 $a_i(t)\ \ (i=1,\cdots,n)$ 和 $f(t)$ 都是区间 $a\leq t\leq b$ 上的连续函数. 对 $\forall t_0\in[a,b]$ 和 $\forall x_0,x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(n-1)}$, 上述方程有定义在 $a\leq t\leq b$ 上的唯一解 $x=\varphi(t)$, 且满足初值条件 $\varphi(t_0)=x_0,\dfrac{\mathrm{d}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t}=x_0^{(1)},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}\varphi(t_0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}=x_0^{(n-1)}$.

3.2 齐次线性ODE

[定理3.2.1] **[齐次线性ODE的解的叠加原理]** 若 $x_1(t),\cdots,x_k(t)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 的 k 个解, 则它们的线性组合 $c_1\cdot x_1(t)+\cdots+c_k\cdot x_k(t)$ 也是该方程的解, 其中 $c_i\ \ (i=1,\cdots,k)$ 是常数. 特别地, $k=n$ 时, 该方程有解 $c_1\cdot x_1(t)+\cdots+c_n\cdot x_n(t)$.

[定义3.2.1] 对定义在区间 $a\leq t\leq b$ 上的函数 $x_1(t),\cdots,x_k(t)$, 若 $\exists$ 不全为零的常数 $c_1,\cdots,c_k\ s.t.$ $c_1\cdot x_1(t)+\cdots+t_k\cdot x_k(t)=0$ 在 $a\leq t\leq b$ 上恒成立, 则称这些函数**线性相关**, 否则称这些函数**线性无关**.

[例3.2.1]

(1) 函数 $\cos t$ 和 $\sin t$ 在任意区间上线性无关.

(2) 函数 $\cos^2 t$ 和 $(\sin^2 t-1)$ 在任意区间上线性相关.

(3) 函数 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 在任意区间上线性无关.

[定义3.2.2] 对定义在区间 $a\leq t\leq b$ 上的 $(k-1)$ 次可微函数 $x_1(t),\cdots,x_k(t)$, 称行列式 $W(t)=W[x_1(t),\cdots,x_k(t)]=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$ 为这些函数的**Wronsky行列式**.

[**定理3.2.2**] [**函数组线性相关的必要条件**] 若函数 $x_1(t),\cdots,x_k(t)$ 在区间 $a\leq t\leq b$ 上线性相关, 则它们的Wronsky行列式 $W(t)\equiv 0\ \ (a\leq t\leq b)$.

[**注**] 本定理的逆不成立. 如函数 $x_1(t)=\begin{cases}t^2,-1\leq t\leq 0\\0,0\leq t\leq 1\end{cases}$ 和 $x_2(t)=\begin{cases}0,-1\leq t\leq 0\\t^2,0\leq t\leq 1\end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 上的Wronsky行列式 $W(t)\equiv 0$, 但它们在该区间上线性无关, 证明如下:

设 $c_1\cdot x_1(t)+c_2\cdot x_2(t)=0\ \ (-1\leq t\leq 1)$, 则 $-1\leq t<0$ 时, 有 $c_1=0$; $0\leq t\leq 1$ 时, 有 $c_2=0$.

[**定理3.2.3**] 若方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 的解 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 在区间 $a\leq t\leq b$ 上线性无关, 则它们的Wronsky行列式 $W(t)\neq 0\ \ (a\leq t\leq b)$.

[**推论1**] 方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 的解 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 在区间 $a\leq t\leq b$ 上线性无关 iff 它们的Wronsky行列式 $W(t)\neq 0\ \ (a\leq t\leq b)$.

[**推论2**] 方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 的解 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 的Wronsky行列式在区间 $a\leq t\leq b$ 上要么恒为零, 要么恒非零.

[**定理3.2.4**] 方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 存在 n 个线性无关的解.

[**证**] 至少存在满足初值条件 $\begin{cases}x_1(t_0)=1,x_1'(t_0)=0,\cdots,x_1^{(n-1)}(t_0)=0\\x_2(t_0)=0,x_2'(t_0)=1,\cdots,x_2^{(n-1)}(t_0)=0\\\cdots\\x_n(t_0)=1,x_n'(t_0)=0,\cdots,x_n^{(n-1)}(t_0)=1\end{cases}$ 的解 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$,

且 $W(t)=1\neq 0$, 故线性无关.

[**定理3.2.5**] [**齐次线性ODE的通解结构**] 若函数 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 的 n 个线性无关的解, 则该方程的通解为 $x=c_1\cdot x_1(t)+\cdots+c_n\cdot x_n(t)$, 其中 $c_i\ \ (i=1,\cdots,n)$ 是常数, 且该通解包含了该方程的所有解.

[**推论**] 方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 至多有 n 个线性无关的解.

[**定义3.2.3**] 方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 的一组 n 个线性无关的解称为方程的一个**基本解组**, 基本解组不唯一. 特别地, $s.t.\ W(t_0)=1$ 的基本解组称为**标准基本解组**.

[**例3.2.2**] 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是区间 $a\leq t\leq b$ 上的连续函数. 求证: 若 $a\leq t\leq b$上有 $\dfrac{x(t)}{y(t)}\neq\mathrm{Const.}$ 或 $\dfrac{y(t)}{x(t)}\neq\mathrm{Const.}$, 则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $a\leq t\leq b$ 上线性无关.

[**解**] 若不然, 则 $\exists$ 不全为零的 $\alpha,\beta\ s.t.\ \alpha x(t)+\beta y(t)\equiv 0\ \ (a\leq t\leq b)$.

不妨设 $x(t)\neq 0$, 则 $\dfrac{y(t)}{x(t)}=-\dfrac{\alpha}{\beta}=\mathrm{Const.}$, 矛盾.

3.3 非齐次线性ODE的解法

[**定理3.3.1**] 若 $\overline{x}(t)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=f(t)\ \ (i)$ 的解, $x(t)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0\ \ (ii)$ 的解, 则 $[\overline{x}(t)+x(t)]$ 也是 (i) 的解.

[**定理3.3.2**] [**非齐次线性ODE的通解结构**] 若函数 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 的基本解组, $\overline{x}(t)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=f(t)\ \ (*)$ 的特解, 则 $(*)$ 的通解为 $x=c_1\cdot x_1(t)+\cdots+c_n\cdot x_n(t)+\overline{x}$, 其中 $c_i\ \ (1\leq i\leq n)$ 是常数, 且该通解包含了 $(*)$ 的所有解.

[**注**] 本定理表明: 若已知非齐次线性ODE的一个特解和它对应的齐次线性ODE的基本解组, 则可用常数变易法求非齐次线性ODE的通解.

具体地, 设 $x(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^n c_i(t)\cdot x_i(t)$, 则

$$
\begin{cases}
x_1(t)\cdot c_1'(t)+x_2(t)\cdot c_2'(t)+\cdots+x_n(t)\cdot c_n'(t)=0\\
x_1'(t)\cdot c_1'(t)+x_2'(t)\cdot c_2'(t)+\cdots+x_n'(t)\cdot c_n'(t)=0\\
\cdots\\
x_1^{(n-1)}(t)\cdot c_1'(t)+x_2^{(n-1)}(t)\cdot c_2'(t)+\cdots+x_n^{(n-1)}(t)\cdot c_n'(t)=f(t)
\end{cases}.
$$

[**例3.3.1**] 求方程 $x''+x=\dfrac{1}{\cos t}$ 的通解, 已知它对应的齐次线性ODE的基本解组为 $\cos t,\sin t$.

[**解**] 设 $x(t)=c_1(t)\cdot\cos t+c_2(t)\cdot\sin t$,

则 $\begin{cases}c_1'(t)\cdot\cos t+c_2'(t)\cdot\sin t=0\\ -c_1'(t)\cdot\sin t+c_2'(t)\cos t=\dfrac{1}{\cos t}\end{cases}$, 解得: $\begin{cases}c_1'(t)=-\dfrac{\sin t}{\cos t}\\ c_2'(t)=1\end{cases}$,

积分得: $\begin{cases}c_1(t)=\ln|\cos t|+C_1\\ c_2(t)=t+C_2\end{cases}$, 故通解为 $x=(\ln|\cos t|+C_1)\cos t+(t+C_2)\sin t$.

[例3.3.2] 求方程 $x''-x=\cos t$ 的通解, 已知它对应的齐次线性ODE的基本解组为 $x_1=\mathrm{e}^t, x_2=\mathrm{e}^{-t}$.

[解] 令 $x(t)=c_1(t)\cdot\mathrm{e}^t+c_2(t)\cdot\mathrm{e}^{-t}$,

则 $\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^t+c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=0 \\ c_1'(t)\mathrm{e}^t-c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=\cos t \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} c_1'(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\cos t \\ c_2'(t)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$,

积分得: $\begin{cases} c_1(t)=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)+C_1 \\ c_2(t)=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)+C_2 \end{cases}$,

故通解为 $x(t)=\left[-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)+C_1\right]\mathrm{e}^t+\left[-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)+C_2\right]\mathrm{e}^{-t}$.

3.4 线性ODE的复值解

[定义3.4.1] 称区间 $a\le t\le b$ 上的实变复值函数 $x=z(t)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=f(t)$ 的**复值解**, 如果 $\dfrac{\mathrm{d}^nz(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}z(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot z(t)\equiv f(t)\ \ (a\le t\le b)$.

[定理3.4.1] 若方程 $\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=0$ 的系数 $a_i(t)\ \ (1\le i\le n)$ 都是实值函数, $x=z(t)=\varphi(t)+i\cdot\psi(t)$ 是该方程的复值解, 则 $z(t)$ 的实部 $\varphi(t)$ 、虚部 $\psi(t)$ 、共轭复值函数 $\overline{z}(t)$ 都是该方程的解.

[证] 因 $z(t)=\varphi(t)+i\cdot\psi(t)$, 则 $\begin{cases} z^{(1)}(t)=\varphi^{(1)}(t)+i\cdot\varphi^{(1)}(t) \\ \cdots \\ z^{(n)}(t)=\varphi^{(n)}(t)+i\cdot\varphi^{(n)}(t) \end{cases}$.

(1) 因 $x=z(t)$ 是方程的解, 则 $z^{(n)}(t)+a_1(t)\cdot z^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}\cdot z'(t)+a_n(t)\cdot z(t)=0$.

$\left[\varphi^{(n)}(t)+a_1(t)\cdot\varphi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\cdot\varphi(t)\right]+i\cdot\left[\psi^{(n)}(t)+a_1(t)\cdot\psi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\cdot\psi(t)\right]=0$,

则 $\begin{cases} \varphi^{(n)}(t)+a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\varphi(t)=0 \\ \psi^{(n)}(t)+a_1(t)\psi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\psi(t)=0 \end{cases}$, 即 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是该方程的解.

(2) $\left[\varphi^{(n)}(t)-i\cdot\psi^{(n)}(t)\right]+a_1\left[\varphi^{(n-1)}(t)-i\cdot\psi^{(n-1)}(t)\right]+\cdots+a_n(t)[\varphi(t)-i\cdot\psi(t)]=0$,

则 $\overline{z}(t)=\varphi(t)-i\cdot\psi(t)$ 是该方程的解.

[定理3.4.2] 若方程 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=u(t)+i\cdot v(t)$ 有复值解 $x=U(t)+i\cdot V(t)$, 其中 $a_i(t)\ \ (1\leq i\leq n),u(t),v(t)$ 都是实函数, 则:

(1) 复值解的实部 $U(t)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=u(t)$ 的解.

(2) 复值解的虚部 $V(t)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)\cdot x=v(t)$ 的解.

[证] 因 $x=U(t)+i\cdot V(t)$, 则 $\begin{cases}x^{(1)}(t)=U^{(1)}(t)+i\cdot V^{(1)}(t)\\ \cdots \\ x^{(n)}(t)=U^{(n)}(t)+i\cdot V^{(n)}(t)\end{cases}$.

因 $x=U(t)+i\cdot V(t)$ 是方程的解,

则

$$\left[\frac{\mathrm{d}^n U}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}U}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)\cdot U\right]+i\left[\frac{\mathrm{d}^n V}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}V}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)\cdot V\right]=u(t)+i\cdot v(t)\ ,$$

进而 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^n U}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}U}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)\cdot U=u(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}^n V}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}V}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)\cdot V=v(t)\end{cases}$.

3.5 常系数齐次线性ODE的解法

[定义3.5.1] 称形如 $L[x]=\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n x=0$ 的方程为 n **阶常系数齐次线性ODE**, 其中 $a_i\ \ (1\leq i\leq n)$ 是常数. 称方程 $F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$ 为上述方程的**特征方程**, 其根称为**特征值**.

[类型3.5.1] 考察 n 阶常系数齐次线性ODE $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n x=0\ \ (*)$ 的特征方程 $F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$.

(1) 若特征值都是单根, 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程的 n 个互异的根, 则 $(*)$ 的基本解组为 $\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n t}$.

特别地, 若特征根有复根, 因特征方程的系数为实数, 则复根成对出现.

若有一对共轭复根 $\lambda=a\pm i\cdot b$, 则将它们替换为两个实值解 $\mathrm{e}^{at}\cos bt,\mathrm{e}^{at}\sin bt$.

(2) 若特征值有重根, 设 λ_1 是特征方程的 k_1 重根, 则 $(*)$ 的基本解组为 $\mathrm{e}^{\lambda_1 t},t\mathrm{e}^{\lambda_1 t},t^2\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\cdots,t^{k_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$.

[例3.5.1] 解方程 $x^{(4)}-5x^{(2)}+4x=0$.

[解] 特征方程 $F(\lambda)=\lambda^4-5\lambda^2+4=0$ 的根 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1,\lambda_4=-1$,

则基本解组 $\mathrm{e}^{2t},\mathrm{e}^{-2t},\mathrm{e}^{t},\mathrm{e}^{-t}$, 故通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{2t}+C_2\cdot\mathrm{e}^{-2t}+C_3\cdot\mathrm{e}^{t}+C_4\cdot\mathrm{e}^{-t}$.

[例3.5.2] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}-x=0$.

[解] 特征方程 $F(\lambda)=\lambda^4-1=0$ 的根 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=i,\lambda_4=-i$,

则基本解组 $\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-t},\mathrm{e}^i,\mathrm{e}^{-i}$, 替换为实值解 $\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-t},\mathrm{e}^{0t}\cos t,\mathrm{e}^{0t}\sin t$,

则通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^t+C_2\cdot\mathrm{e}^{-t}+C_3\cdot\cos t+C_4\cdot\sin t$.

[例3.5.3] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+x=0$.

[解] 特征方程 $F(\lambda)=\lambda^3+1=0$ 的根 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\omega,\lambda_3=\omega^2$, 其中 $\omega=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

则基本解组 $\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^\omega,\mathrm{e}^{\omega^2}$, 替换为实值解 $\mathrm{e}^{-t},\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$,

故通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{-t}+C_2\cdot\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\cdot\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.

[例3.5.4] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}-3\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x=0$.

[解] 特征方程 $F(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3=0$ 的根 $\lambda_{1,2,3}=1$,

则基本解组 $\mathrm{e}^t,t\mathrm{e}^t,t^2\mathrm{e}^t$, 故通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^t+C_2\cdot t\mathrm{e}^t+C_3\cdot t^2\mathrm{e}^t$.

[例3.5.5] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=0$.

[解] 特征方程 $F(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^2+1=(\lambda^2+1)=0$ 的根 $\lambda_{1,2}=i,\lambda_{3,4}=-i$,

则基本解组 $\mathrm{e}^{i\cdot t},t\mathrm{e}^{i\cdot t},\mathrm{e}^{-i\cdot t},t\mathrm{e}^{-i\cdot t}$, 替换为实值解 $\mathrm{e}^{0t}\cos t,t\mathrm{e}^{0t}\cos t,\mathrm{e}^{0t}\sin t,t\mathrm{e}^{0t}\sin t$,

故通解为 $x=C_1\cdot\cos t+C_2\cdot t\cos t+C_3\cdot\sin t+C_4\cdot t\sin t$.

[例3.5.6] 解方程 $x^{(5)}-4x^{(3)}=0$.

[解] 特征方程 $F(\lambda)=\lambda^5-4\lambda^3=0$ 的根 $\lambda_{1,2,3}=0,\lambda_4=2,\lambda_5=-2$,

则基本解组 $\mathrm{e}^{0t},t\mathrm{e}^{0t},t^2\mathrm{e}^{0t},\mathrm{e}^{2t},\mathrm{e}^{-2t}$, 故通解为 $x=C_1+C_2\cdot t+C_3\cdot t^2+C_4\cdot\mathrm{e}^{2t}+C_4\cdot\mathrm{e}^{-2t}$.

3.6 常系数非齐次线性ODE的类型I

[类型3.6.1] 考察 n 阶常系数非齐次线性ODE $L[x]=\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=f(t)\ \ (*)$. 若 $f(t)=P_m(t)\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\mathrm{e}^{\lambda t}$, 其中 $P_m(t)$ 是关于 t 的 m 次多项式, $\lambda,b_i\ \ (0\leq i\leq m)$ 都是常数, 且 λ 可取 0 , 则方程 $(*)$ 有形如 $\widetilde{x}=t^k\cdot Q_m(t)\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}=t^k\cdot(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的特解, 其中 k 为特征根 λ 的重数(单根时 $k=1$, 非根时 $k=0$), $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 都是待定常数, 将其代入 $(*)$ 后比较系数可求得.

[例3.6.1] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+3\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=\mathrm{e}^{-t}(t-5)$.

[解]

(1) 先求原方程对应的齐次线性ODE $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+3\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0$ 的通解.

特征方程 $F(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0$ 的根 $\lambda_{1,2,3}=-1$,

则基本解组 $\mathrm{e}^{-t},t\mathrm{e}^{-t},t^2\mathrm{e}^{-t}$, 进而通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{-t}+C_2\cdot t\mathrm{e}^{-t}+C_3\cdot t^2\mathrm{e}^{-t}$.

(2) 再求原方程的一个特解. 因 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}(t-5)$, 则 $m=1,\lambda=-1$. 因 λ 是三重根, 则 $k=3$.

设特解 $\widetilde{x}=t^3\cdot(A+Bt)\cdot\mathrm{e}^{-t}$, 代入原方程得: $(6A+24Bt)\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{-t}(t-5)$,

则 $\begin{cases}6A=-5\\24B=1\end{cases}$, 解得: $\begin{cases}A=-\dfrac{5}{6}\\B=\dfrac{1}{24}\end{cases}$, 即 $\widetilde{x}=t^3\cdot\left(-\dfrac{5}{6}+\dfrac{t}{24}\right)\cdot\mathrm{e}^{-t}$.

故通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{-t}+C_2\cdot t\mathrm{e}^{-t}+C_3\cdot t^2\mathrm{e}^{-t}+t^3\cdot\left(-\dfrac{5}{6}+\dfrac{t}{24}\right)\cdot\mathrm{e}^{-t}$.

[例3.6.2] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=3t+1$.

[解]

(1) 先求原方程对应的齐次线性ODE $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=0$ 的通解.

特征方程 $F(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3=0$ 的根 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$,

则基本解组 $\mathrm{e}^{3t},\mathrm{e}^{-t}$, 进而通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{3t}+C_2\cdot\mathrm{e}^{-t}$.

(2) 再求原方程的一个特解. 因 $f(t)=3t+1$, 则 $m=1,\lambda=0$. 因 λ 非根, 则 $k=0$.

设特解 $\widetilde{x}=t^0\cdot(A+Bt)\cdot\mathrm{e}^{0t}=A+Bt$, 代入原方程得: $-2B-3A-3Bt=3t+1$,

则 $\begin{cases}-2B-3A=1\\-3B=3\end{cases}$, 解得: $\begin{cases}A=\dfrac{1}{3}\\B=-1\end{cases}$, 即 $\widetilde{x}=\dfrac{1}{3}-t$.

故通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{3t}+C_2\cdot\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{1}{3}-t$.

[定理3.6.1] 设常系数非齐次ODE $L[x]=\dfrac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=f_1(t)+f_2(t)\ \ (*)$. 若 $L[x]=f_i(t)\ \ (i=1,2)$ 有特解 $\widetilde{x_i}(t)$, 则 $(*)$ 有特解 $\widetilde{x_1}(t)+\widetilde{x_2}(t)$.

[例3.6.3] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=3t+1-\mathrm{e}^{-t}$.

[解]

(1) 先求原方程对应的齐次线性ODE $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3x=0$ 的通解.

特征方程 $F(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3=0$ 的根 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$,

则基本解组 $\mathrm{e}^{3t},\mathrm{e}^{-t}$, 进而通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{3t}+C_2\cdot\mathrm{e}^{-t}$.

(2) 再求原方程的一个特解.

① 因 $f_1(t)=3t+1$, 则 $m=1,\lambda=0$. 因 λ 非根, 则 $k=0$.

设特解 $\widetilde{x_1}=t^0\cdot(A+Bt)\cdot\mathrm{e}^{0t}=A+Bt$, 代入原方程得: $-2B-3A-3Bt=3t+1$,

则 $\begin{cases}-2B-3A=1\\-3B=3\end{cases}$, 解得: $\begin{cases}A=\dfrac{1}{3}\\B=-1\end{cases}$, 即 $\widetilde{x_1}=\dfrac{1}{3}-t$.

② 因 $f_2(t)=-\mathrm{e}^{-t}$, 则 $m=0,\lambda=-1$. 因 λ 是单根, 则 $k=1$.

设特解 $\widetilde{x_2}=t^1\cdot C\cdot\mathrm{e}^{-t}=C\cdot t\mathrm{e}^{-t}$, 代入原方程解得: $C=-\dfrac{1}{4}$, 即 $\widetilde{x_2}=-\dfrac{1}{4}t\mathrm{e}^{-t}$.

故通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{3t}+C_2\cdot\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{1}{3}-t-\dfrac{1}{4}t\mathrm{e}^{-t}$.

[例3.5.7] 解方程 $s^{(2)}-a^2s=t+1\ \ (a\in\mathrm{Const.})$.

[解]

(1) 先求原方程对应的齐次线性ODE $s^{(2)}-a^2s=0$ 的通解.

特征方程 $F(\lambda)=\lambda^2-a^2=0$ 的根 $\lambda_1=a,\lambda_2=-a$.

① $a=0$ 时, 原方程化为 $s^{(2)}=t+1$, 故原方程的通解为 $s=C_1+C_2\cdot t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}$.

② $a\neq0$ 时, 基本解组 $\mathrm{e}^{at},\mathrm{e}^{-at}$, 则通解为 $s=C_3\mathrm{e}^{at}+C_4\mathrm{e}^{-at}$.

(2) 再求原方程的一个特解.

因 $f(t)=t+1$, 则 $m=1,\lambda=0$. 因 $a\neq0$ 时, λ 非根, 则 $k=0$.

设特解 $\widetilde{x}=t^0\cdot(A+Bt)\cdot\mathrm{e}^{0t}=A+Bt$, 代入原方程得: $-a^2(A+Bt)=t+1$,

则 $\begin{cases}-a^2\cdot A=1\\-a^2\cdot B=1\end{cases}$, 解得: $\begin{cases}A=-\dfrac{1}{a^2}\\B=-\dfrac{1}{a^2}\end{cases}$.

故 $a\neq0$ 时, 通解为 $s=C_3\mathrm{e}^{at}+C_4\mathrm{e}^{-at}+\left(-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}t\right)$.

3.7 常系数非齐次线性ODE的类型II

[类型3.7.1] 考察 n 阶常系数非齐次线性ODE $L[x]=\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n x=f(t)\ \ (*)$. 若 $f(t)=[A_m(t)\cdot\cos bt+B_n(t)\cdot\sin bt]\cdot\mathrm{e}^{at}$, 其中 $A_m(t),B_n(t)$ 分别是关于 t 的 m,n 次多项式, 则方程 $(*)$ 有形如 $\widetilde{x}=t^k\cdot[P_s(t)\cdot\cos bt+Q_s(t)\cdot\sin bt]\cdot\mathrm{e}^{at}$ 的特解, 其中 k 为特征根 $\lambda=a+i\cdot b$ 的重数(单根时 $k=1$, 非根时 $k=0$), $P_s(t),Q_s(t)$ 分别是关于 t 的 $s=\max\{m,n\}$ 次多项式, 将其代入 $(*)$ 后比较系数可求得.

[例3.7.1] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4x=\cos 2t$.

[解]

(1) 先求原方程对应的齐次线性ODE $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4x=0$ 的通解.

特征方程 $F(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$ 的根 $\lambda_{1,2}=-2$,

则基本解组 $\mathrm{e}^{-2t},t\mathrm{e}^{-2t}$, 进而通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{-2t}+C_2\cdot t\mathrm{e}^{-2t}$.

(2) 再求原方程的一个特解.

因 $f(t)=\cos 2t$, 则 $m=0,n=0,a=0,b=2$. 因 $\lambda=0+i\cdot 2$ 非根, 则 $k=0$.

设特解 $\widetilde{x}=t^0\cdot[A\cdot\cos 2t+B\cdot\sin 2t]\cdot\mathrm{e}^{0t}=A\cdot\cos 2t+B\cdot\sin 2t$,

代入原方程得: $8B\cdot\cos 2t-8A\cdot\sin 2t=\cos 2t$, 则 $\begin{cases}8A=0\\8B=1\end{cases}$, 解得: $\begin{cases}A=0\\B=\dfrac{1}{8}\end{cases}$.

故通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{-2t}+C_2\cdot t\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{\cos 2t}{8}$.

[例3.7.2] 解方程 $x^{(2)}+x^{(1)}-2x=8\sin 2t$.

[解]

(1) 先求原方程对应的齐次线性ODE $x^{(2)}+x^{(1)}-2x=0$ 的通解.

特征方程 $F(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2=0$ 的根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$,

则基本解组 $\mathrm{e}^{-2t},\mathrm{e}^t$, 进而通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{-2t}+C_2\cdot\mathrm{e}^t$.

(2) 再求原方程的一个特解.

因 $f(t)=8\sin 2t$, 则 $m=0,n=0,a=0,b=2$. 因 $\lambda=0+i\cdot 2$ 非根, 则 $k=0$.

设特解 $\widetilde{x}=t^0\cdot[A\cdot\cos 2t+B\cdot\sin 2t]\cdot\mathrm{e}^{0t}=A\cdot\cos 2t+B\cdot\sin 2t$,

代入原方程得: $(2B-6A)\cos 2t+(-6B-2A)\sin 2t=8\sin 2t$, 解得: $\begin{cases}A=-\dfrac{2}{5}\\B=-\dfrac{6}{5}\end{cases}$.

故通解为 $x=C_1\cdot\mathrm{e}^{-2t}+C_2\cdot\mathrm{e}^t-\dfrac{2}{5}\cos 2t-\dfrac{6}{5}\cos 2t$.

3.8 Euler方程

[**类型3.8.1**] 称形如 $x^n\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1\cdot x^{n-1}\dfrac{d^{(n-1)}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\cdot x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n\cdot y=0$ 的方程为**Euler方程**, 其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是常数. 令 $x=\mathrm{e}^t$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-t}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 化为常系数齐次线性ODE.

3.9 可降阶的高阶ODE的类型I

[**类型3.9.1**] 若 n 阶ODE $F\left(t,x,x',\cdots,x^{(n)}\right)=0\ \ (i)$ 不含未知函数 x 及其部分阶导数 $x',\cdots,x^{(k-1)}$, 即方程形如 $F\left(t,x^{(k)},\cdots,x^{(n)}\right)=0\ \ (1\le k\le n)$ 时, 令 $y=x^{(k)}$ 即降阶为关于 y 的 $(n-k)$ 次ODE $F\left(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)}\right)=0\ \ (ii)$. 若 (ii) 的通解为 $y=\varphi(t,c_1,\cdots,c_{n-k})$, 则积分 k 次即得 (i) 的通解 $x=\psi(t,c_1,\cdots,c_n)$, 其中 $c_i\ \ (1\le i\le n)$ 是常数.

[**例3.9.1**] 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^5x}{\mathrm{d}t^5}-\dfrac{1}{t}\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}=0$.

[**解**] 令 $y=\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\dfrac{1}{t}y=0$, 分离变量并积分得: $y=C\cdot t$,

即 $\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}=Ct$, 积分得: $x=C_1\cdot t^5+C_2\cdot t^3+C_3\cdot t^2+C_4\cdot t+C_5$.

3.10 可降阶的高阶ODE的类型II

[**类型3.10.1**] 若 n 阶ODE $F\left(t,x,x',\cdots,x^{(n)}\right)=0\ \ (i)$ 不显含自变量 t , 则以 $x'=y$ 为新的未知函数, 以 x 为新的自变量, 因 $x'=y$, $x''=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x'=y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $x'''=y\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+y^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\cdots$, 数归易证 $x^{(k)}\ \ (1\le k\le n)$ 可用 $y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}x^{k-1}}$ 表示, 代入原方程即降阶为关于 x,y 的 $(n-1)$ 阶方程 $G\left(x,y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)$.

[**例3.10.1**] 解方程 $x\cdot x''+(x')^2=0$, 其中自变量为 t .

[**解**] 令 $x'=y$, 则 $x''=y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程得: $xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=0$.

(1) $y=0$ 时, 经检验, $y=0$ 是一个解, 此时 $x'=0$, 代入原方程得 $\forall x=C_1$ 都是方程的解,

(2) $y\neq 0$ 时, 原方程化为 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$, 即 $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$, 解得: $xy=C_2$.

$x=0$ 时, 该解已含于(1)中. $x\neq 0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{C_2}{x}$, 解得: $\dfrac{x^2}{2}=C_2t+C_3$.

[**例3.10.2**] 解方程 $x''=\dfrac{1}{2x'}$, 其中自变量为 t .

[**解**] 令 $y=x'$, 原方程化为 $y'=\dfrac{1}{2y}$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2y}$, 解得: $y=\pm(t+C_1)^{\frac{1}{2}}$,

即 $x'=\pm(t+C_1)^{\frac{1}{2}}$, 两边积分得: $x=\pm\dfrac{2}{3}(t+C_1)^{\frac{3}{2}}+C_2$, 故通解为 $9(x-C_2)^2=4(t+C_1)^3$.

[**例3.10.3**] 解方程 $x \cdot x'' - (x')^2 + (x')^3 = 0$, 其中自变量为 t .

[**解**] 令 $y = x'$, 原方程化为 $xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y^2 + y^3 = 0$.

(1) $y = 0$ 时, $x = C_1$. 经检验, $x = C_1$ 是原方程的解.

(2) $y \neq 0$ 时, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y - y^2}{x}$, 解得: $y = \dfrac{C_2 x}{1 + C_2 x} \ \ (C_2 \neq 0)$, 即 $x' = \dfrac{C_2 x}{1 + C_2 x}$.

$x = 0$ 时, 该解已含于(1)中. $x \neq 0$ 时, 解得: $x + \dfrac{1}{C_2} \ln |x| = t + C_3$.