深圳大学期末考试试卷

开/闭卷 闭卷 A/B 卷 A

课程编号 1300530001 课序号 01-09 课程名称 概率论与数理统计 学分 3

命题人(签字)________ 审题人(签字)________ ____年____月____日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

学院________ 专业________ 姓名________ 学号________ 座号________

（密封线内不答题）

密 封 线

一．选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1、A，B为两个随机事件，且$B\subset A$，则下列式子**正确**的是（ D ）。

（A）$P(B-A)=P(B)-P(A)$ （B）$P(AB)=P(A)$

（C）$P(B|A)=P(A)$ （D）$P(A\cup B)=P(A)$

2、设随机变量 X 服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，随机变量 Y 服从正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有（ A ）。

（A）$\sigma_1<\sigma_2$ （B）$\sigma_1>\sigma_2$

（C）$\mu_1<\mu_2$ （D）$\mu_1>\mu_2$

3、设随机变量X与Y相互独立，且X，Y的概率分布分别为

X	0	1	2	3	Y	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	q_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则$P\{X+Y=2\}=$（ C ）。

（A）$\frac{1}{12}$ （B）$\frac{1}{8}$

（C）$\frac{1}{6}$ （D）$\frac{1}{2}$

4、随机变量X与Y满足$D(X)=4$，$D(Y)=1$，$\rho_{XY}=0.6$，则$D(3X-2Y)=$（ B ）。

（A）40 （B）25.6

（C）34 （D）17.6

5、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中μ与σ^2未知，下面不是统计量的是（ D ）。

（A）$\hat{\mu}=X_i$ （B）$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

（C）$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ （D）$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

6、假设总体 X 的均值μ与方差σ^2都存在，X_1,X_2,X_3是来自总体的简单随机样本，μ有三

个估计量：$\hat{\mu}_1=\frac{1}{4}(X_1+2X_2+X_3)$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{6}(2X_1+3X_2+X_3)$，$\hat{\mu}_3=\frac{1}{8}(X_1+X_2+X_3)$，下列结论成立的是（ C ）。

（A）$\hat{\mu}_3$比$\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_2$有效　　（B）$\hat{\mu}_2$比$\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_3$有效

（C）$\hat{\mu}_1$比$\hat{\mu}_2$有效　　（D）$\hat{\mu}_2$比$\hat{\mu}_1$有效

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1、 在一个袋子中有 5 个相同的球，分别标有号码 1，2，3，4，5，从中任意取出 3 个球，则取得 3 个球中最大号码是 4 的概率为____________。$\frac{3}{10}$

2、 随机变量 X 服从(-2,2)上的均匀分布，则随机变量$Y=X^2$的概率密度函数为$f_Y(y)=$

____________________。$\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4\\ 0, & else\end{cases}$

3、 二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & else\end{cases}$，则$X$的边缘概率密度函数为$f_X(x)=$____________________。

$$\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

4、将一颗均匀的骰子连续抛掷 10 次，若 X 表示点数“1”出现的次数，用切比雪夫不等式估计$P\{|X-E(X)|<2\}\ge$________________。$\frac{47}{72}$

5、设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，X_1，X_2，X_3和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$分别为来自总体 X 和 Y 的样本，则统计量$\frac{\sqrt{3}(X_1+X_2+X_3)}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots Y_9^2}}$服从________________分布。

（要求给出自由度）。　　t(9)

6、对某种钢材的抗剪强度进行 16 次测试，测试结果的均值$\bar{X}=580$，已知抗剪强度服从正态分布$N(\mu,25)$，则μ的 95%的置信区间为________________________。

（注：$z_{0.90}=1.280, z_{0.95}=1.645, z_{0.975}=1.960$）　　(577.55, 582.45)

三、（10 分）假设在某个时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率。经分析，该时期内利率下调、不变以及上调的概率分别为 60%、30%、10%。根据以往经验，在利率下调时某只股票上涨的概率为 80%，在利率不变时该股票上涨的概率为 40%，在利率上调时该股票上涨的概率为 0。（1）该时期内，这只股票价格上涨的概率是多少？（2）若这只股票价格上涨，银行存款利率下调和不变的概率分别是多少，哪种概率更大？

解：（1）设 B 表示“这只股票价格上涨”，A_1表示“该时期内银行存款利率下调”，A_2表示“该时期内银行存款利率不变”，A_3表示“该时期内银行存款利率上调”，则

$$P(A_1)=0.6,\qquad P(A_2)=0.3,\qquad P(A_3)=0.1$$
$$P(B|A_1)=0.8,\qquad P(B|A_2)=0.4,\qquad P(B|A_3)=0$$
$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.6\times 0.8+0.3\times 0.4+0.1\times 0=0.6$$

因此该时期内，这只股票价格上涨的概率是 0.6。…………………（5 分）

（2）

由贝叶斯公式，

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.8\times 0.6}{0.6}=0.8$$
$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.4\times 0.3}{0.6}=0.2$$

若这只股票价格上涨，银行存款利率下调造成的概率更大。…………………（5 分）

四、（12 分）二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & else\end{cases}$，

（1）求(X,Y)关于X和Y的边缘概率密度函数$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（2）判断X和Y是否相互独立，并说明理由；

（3）计算$P\{X+Y\le 1\}$。

解：（1）边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

…………………（3 分）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

…………………（3 分）

（2）由于$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故$X$和$Y$不独立。 …………………（2 分）

（3）

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$$

…………………（4 分）

五、（12 分）随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<2\\ cx+b, & 2\le x\le 4\\ 0, & else\end{cases}$$

已知$E(X)=2$，$D(X)=\frac{2}{3}$，求 a，b，c 的值。

解：因为$f(x)$为概率密度函数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 axdx + \int_2^4 (cx+b)dx = \frac{1}{2}ax^2\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{2}cx^2 + bx\right)\Big|_2^4 = 1$$

即有$2a+2b+6c=1$

………………（3 分）

又

$$E(X) = \int_0^2 x\cdot axdx + \int_2^4 x\cdot(cx+b)dx = \frac{1}{3}ax^3\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{3}cx^3 + \frac{1}{2}bx^2\right)\Big|_2^4$$

$$= \frac{8}{3}a + \frac{56}{3}c + 6b = 2$$

即有$4a+9b+28c=3$

………………（3 分）

因为$D(X)=\frac{2}{3}$，于是$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\frac{14}{3}$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\cdot axdx + \int_2^4 x^2\cdot(cx+b)dx = \frac{1}{4}ax^4\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{4}cx^4 + \frac{1}{3}bx^3\right)\Big|_2^4$$

$$= 4a + 60c + \frac{56}{3}b = \frac{14}{3}$$

于是有$6a+28b+90c=7$

………………（4 分）

联立三式，解方程组得到

$a=\frac{1}{4}$，$b=1$，$c=-\frac{1}{4}$

………………（2 分）

六、（12 分）假设某条生产线组装每件成品的时间服从指数分布，统计资料表明每件成品的组装时间平均为 10min。设各件产品的组装时间相互独立。

（1）求组装 100 件成品需要 900min~1200min 的概率；

（2）以 95%的概率在 16h 内最多可以组装多少件成品？

（设$\Phi(2)=0.9772$，$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.645)=0.95$，其中$\Phi(x)$是标准正态分布 N(0,1)的分布函数）

解：设第 i 件产品组装的时间为$X_i$min，i=1,2,…,100，则

$E(X_i)=10$，$D(X_i)=100$， i=1,2,…,100 ………………（2 分）

利用独立同分布的中心极限定理有

（1）

$$P\left\{900 \le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 1200\right\}$$

$$= P\left\{\frac{900 - 100 \times 10}{\sqrt{100} \times 10} \le \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 10}{\sqrt{100} \times 10} \le \frac{1200 - 100 \times 10}{\sqrt{100} \times 10}\right\}$$

$$= P\left\{-1 \le \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 10}{\sqrt{100} \times 10} \le 2\right\} \approx \Phi(2) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.8185$$

组装 100 件成品需要 900min~1200min 的概率为 0.8185。 ....（5 分）

（2）

设以 95%的概率在 16h 内最多可以组装 n 件成品，因为

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le 16 \times 60\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \times 10}{\sqrt{n} \times 10} \le \frac{960 - n \times 10}{\sqrt{n} \times 10}\right\} \approx \Phi\left(\frac{960 - n \times 10}{\sqrt{n} \times 10}\right)$$

即$\Phi\left(\frac{960-n\times10}{\sqrt{n}\times10}\right) = 0.95$

则$\frac{960-n\times10}{\sqrt{n}\times10} \approx 1.645$

得到$n \approx 81.18$，因此最多可组装 81 件成品。 ....（5 分）

七、（12 分）设总体 X 的**分布**函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\beta}, & x > 1 \\ 0, & x \le 1 \end{cases}$$

其中，未知参数$\beta > 1$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体的简单随机样本，求β的矩估计量和极大似然估计量。

解：总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \beta x^{-\beta-1}, & x > 1 \\ 0, & x \le 1 \end{cases}$$

..................（2 分）

因此

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{1}^{+\infty} x \cdot \beta x^{-\beta-1} dx = \frac{\beta}{\beta - 1}$$

令$\bar{X} = \frac{\beta}{\beta-1}$

得到β的矩估计量为$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$

..................（4 分）

似然函数为

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \beta x_i^{-\beta-1} = \beta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\beta-1}, \qquad x_i > 1, i = 1,2, \dots, n$$

..................（2 分）

因此

$$lnL(\beta) = nln\beta + (-\beta - 1)\sum_{i=1}^{n} ln\, x_i$$

………………（2 分）

令$\frac{d}{d\beta}lnL = 0$

得到$\frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} ln\, x_i = 0$

β的极大似然估计值为$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} lnx_i}$

β的极大似然估计量为$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} lnX_1}$

………………（2 分）

附加题（30 分）

1、（15 分）一个口袋中装有 a 个白球和 b 个黑球。若一次次有放回地摸球，直至摸到白球为止，求偶数次摸到白球的概率；若甲乙两人从口袋中轮流摸取一球，甲先摸，乙接着摸，不放回，直至有一人取到白球为止，求甲先摸到白球的概率。

解：（1）

记事件B_i ={第 i 次摸到黑球}，W_i ={第 i 次摸到白球}。则

事件{偶数次摸到白球}=$B_1W_2 \cup B_1B_2B_3W_4 \cup B_1B_2B_3B_4B_5W_6 \cup \cdots$

故所求概率为

P{偶数次摸到白球}=$P(B_1W_2 \cup B_1B_2B_3W_4 \cup B_1B_2B_3B_4B_5W_6 \cup \cdots)$

$= P(B_1W_2) + P(B_1B_2B_3W_4) + P(B_1B_2B_3B_4B_5W_6) + \cdots$

$$= \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^3\cdot\frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^5\cdot\frac{a}{a+b} + \cdots$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}\left[1 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{b}{a+b}\right)^2} = \frac{b}{a+2b}$$

………………（7 分）

（2）甲先摸到白球，则可能结果如下（至多有限次摸球）：

$甲_W$

$甲_B乙_B甲_W$

$甲_B乙_B甲_B乙_B甲_W$

$甲_B乙_B甲_B乙_B甲_B乙_B甲_W$

⋮

①当 b 为偶数时，则所求概率为

$$p_{甲}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}\cdot\frac{a}{a+b-2}$$
$$+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}\cdot\frac{b-2}{a+b-2}\cdot\frac{b-3}{a+b-3}\cdot\frac{a}{a+b-4}$$
$$+\cdots+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}\cdots\frac{2}{a+2}\cdot\frac{1}{a+1}\cdot\frac{a}{a}$$
$$=\frac{a}{a+b}\left[1+\frac{b(b-1)}{(a+b-1)\cdot(a+b-2)}+\cdots+\frac{b!}{(a+b-1)\cdot(a+b-2)\cdots(a+1)\cdot a}\right]$$

…………………（4 分）

②当 b 为奇数时，则所求概率为

$$p_{甲}=\frac{a}{a+b}\left[1+\frac{b(b-1)}{(a+b-1)\cdot(a+b-2)}+\cdots+\frac{b!}{(a+b-1)\cdot(a+b-2)\cdots(a+1)}\right]$$

…………………（4 分）

2、（15 分）二维随机变量(X,Y)在矩形区域：$G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & 若X\le Y\\ 1, & 若X>Y\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & 若X\le 2Y\\ 1, & 若X>2Y\end{cases}$$

求随机变量U和V的联合分布及U与V的相关系数ρ。

解：二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

…………………（2 分）

则

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}$$

$$=\iint\limits_{x\le y}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{0\le x\le y\le 1}\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\right)=\frac{1}{4}$$

同理，可得

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\right)=\frac{1}{4}$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,X>2Y\}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

随机变量U和V的联合分布律（含边缘分布律）：

V \ U	0	1	$p_{\cdot j}$

0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

………………（6 分）

于是

$$E(U)=\frac{3}{4},\ \ D(U)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

………………（2 分）

$$E(V)=\frac{1}{2},\ \ D(V)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

………………（2 分）

$$E(UV)=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

………………（2 分）

则U与V的相关系数

$$\rho=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)\cdot D(V)}}=\frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

………………（1 分）