随机过程期末速通

7. Brown运动

7.1 基本概念

[**例7.1.1**] 考察一粒子在直线上的随机游走, 每个单位时间内它等可能地左移或右移一个单位长度.

设该过程每隔 Δt 时间等概率地左移或右移 Δx 的距离.

设 t 时刻粒子在下标 $X(t)$ 处, 初始时 $X(0)=0$,

则 $X(t)=\Delta x\cdot\left(X_1+\cdots+X_{\lfloor\frac{t}{\Delta t}\rfloor}\right)$, 其中 $X_i=\begin{cases}+1,若第i步向右\\-1,若第i步向左\end{cases}$.

设 $X_1,\cdots,X_{\lfloor\frac{t}{\Delta t}\rfloor}$ 相互独立, 且 $P\{X_i=1\}=P\{X_i=-1\}=\dfrac{1}{2}\ \ \left(1\leq t\leq\left\lfloor\dfrac{t}{\Delta t}\right\rfloor\right)$.

因 $E(X_i)=0,D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=1$,

则 $E[X(t)]=\Delta x\cdot\left[E(X_1)+E\left(X_{\lfloor\frac{t}{\Delta t}\rfloor}\right)\right]=0,$

$D[X(t)]=(\Delta x)^2\cdot\left[D(X_1)+\cdots+D\left(X_{\lfloor\frac{t}{\Delta t}\rfloor}\right)\right]=(\Delta x)^2\cdot\left\lfloor\dfrac{t}{\Delta t}\right\rfloor$.

下面令 $\Delta x\to 0,\Delta t\to 0$, 且使得极限有意义, 有如下三种情况:

(1) 若 $\Delta t=\Delta x$, 则 $D[X(t)]=t\cdot\Delta x\to 0\ \ (\Delta x\to 0)$, 进而 $X(t)=0$, a.s., 不符合实际.

(2) 若 $\Delta t=(\Delta x)^q\ \ (q>2)$, 则 $D[X(t)]=(\Delta x)^2\cdot\dfrac{t}{\Delta t}\to+\infty$, 不符合实际.

(3) 若 $\Delta t=C\cdot\Delta x\ \ (C>0)$, 则 $D[X(t)]=\dfrac{t}{C}$.

取 $C=\dfrac{1}{\sigma^2}\ \ (\sigma>0)$, 则 $D[X(t)]=\sigma^2 t$.

由中心极限定理:

① $X(t)$ 服从均值为 0 、方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布.

② 因随机游走的值在不重叠的时间区间中的变化相互独立, 则随机过程 $\{X(t);t\geq 0\}$ 有独立增量.

③ 因随机游走在任一时间区间中的未知变化的分布只与区间长度有关, 则 $\{X(t);t\geq 0\}$ 有平稳增量.

[**定义7.1.1**] 若随机过程 $\{X(t);t\geq 0\}$ 满足如下三个条件:

① $X(0)=0$.

② $\{X(t);t\geq 0\}$ 有平稳独立增量.

③ 对 $\forall t>0$, 随机变量 $X(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$.

则称 $\{X(t);t\geq 0\}$ 为**Brown运动**或**Wiener过程**或**扩散过程,** 记作 $\{B(t);t\geq 0\}$ 或 $\{W(t);t\geq 0\}$. 若 $\sigma=1$, 则称其为**标准Brown运动**; 若 $\sigma\neq 1$, 则伸缩其轨道得: 随机变量 $\dfrac{B(t)}{\sigma}\sim N(0,t)$, 即随机过程 $\left\{\dfrac{B(t)}{\sigma},t\geq 0\right\}$ 是标准Brown运动. 下面只讨论标准Brown运动.

[**注1**] 由平稳增量性: $B(t+h)-B(t)\sim N(0,\sigma^2 h)$.

[**注2**] 齐次Poisson过程、非齐次Poisson过程、Brown运动都有Markov性; 条件Poisson过程、更新过程都无Markov性.

[**定义7.1.2**] [**Brown运动的等价定义**] Brown运动 $\{B(t);t\geq 0\}$ 是有如下四条性质的随机过程:

① 正态增量性: 对 $\forall s\in[0,t)$, 都有随机变量 $B(t)-B(s)\sim N(0,t-s)$.

$s=0$ 时, 有 $B(t)-B(0)\sim N(0,t)$. 本性质隐含平稳增量性.

② 独立增量性: 对 $\forall s\in[0,t)$, 都有随机变量 $B(t)$ 独立于过程的过去状态 $B(u)\ \ (0\leq u\leq s)$.

③ 轨道/路径的连续性: $B(t)\ \ (t\geq 0)$ 是 t 的连续函数.

④ 轨道处处不可导.

[**证**] 下证: 对 $\forall s\in[0,t)$, 都有 $B(t)-B(s)\sim N(0,t-s)$.

$E[B(t)-B(s)]=E[B(t)]-E[B(s)]=0$.

$D[B(t)-B(s)]=D[B(t)]+D[B(s)]-2\cdot Cov[B(t),B(s)]$

$=t+s-2\cdot\min\{t,s\}$ * **定理7.2.2**.

$=t-s$.

[**注1**] 本定义中未假设 $B(0)=0$, 故称之为始于 x 的Brown运动, 强调起始点时可记作 $\{B^x(t)\}$. **定义7.1.1**中定义的是始于 0 的Brown运动 $\{B^0(t)\}$. 因 $B^x(t)-x=B^0(t)$, 故只需研究始于 0 的Brown运动. 不加说明时, Brown运动指始于 0 的Brown运动.

[**注2**] 若Brown运动始于 x , 即 $B(0)=x$, 则 $B(t)\sim N(x,t)$, 这是因为Brown运动是鞅(**7.3节**将证明), 则 $E[B(t)]=E[B(0)]=x$.

$$P_x\{B(t)\in(a,b)\}=P\{B(t)\in(a,b)\mid B(0)=x\}=\int_a^b P\{B(t)\in\mathrm{d}y\mid B(0)=x\}\mathrm{d}y$$

$=\displaystyle\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}\mathrm{d}y$, 其中转移概率P_x 的下标 x 表示过程始于x , 被积函数 $p_t(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ 称为Brown运动的**转移概率密度**.

用独立增量性、Markov性和转移概率密度, 可计算任一Brown运动的有限维分布, 即:

$P_x\{B(t_1)\leq x_1,\cdots,B(t_n)\leq x_n\mid B(0)=x\}$

$=\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}P\{B(t_1)\in\mathrm{d}y_1,\cdots,B(t_n)\in\mathrm{d}y_n\mid B(0)=x\}$ * 每次拆出一项作条件

$=\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}P\{B(t_1)\in\mathrm{d}y_1\mid B(0)=x\}\cdot P\{B(t_2)\in\mathrm{d}y_2\mid B(t_1)\in\mathrm{d}y_1\}$

$\cdots P\{B(t_n)\in\mathrm{d}y_n\mid B(t_{n-1})\in\mathrm{d}y_{n-1}\}$

$=\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1}p_{t_1}(x,y_1)\mathrm{d}y_1\int_{-\infty}^{x_2}p_{t_2-t_1}(y_1,y_2)\mathrm{d}y_2\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},y_n)\mathrm{d}y_n$,

其中 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1}p_{t_1}(x,y_1)\mathrm{d}y_1$ 表示从 x 出发经 t_1 时间转移到 y_1 , 即 $P\{B(t_1)=y_1\mid B(0)=x\}$.

[**定义7.1.3**] 若随机过程 $\{X(t);t\geq 0\}$ 的有限维分布是空间平移不变的, 即 $P\{X(t_1)\leq x_1,\cdots,X(t_n)\leq x_n\mid X(0)=0\}=P\{X(t_1)\leq x_1+x,\cdots,X(t_n)\leq x_n+x\mid X(0)=x\}$, 则称该过程的**空间齐次的**.

[**例7.1.2**] 设标准Brown运动 $\{B(t);t\geq 0\}$. 求:

(1) $P\{B(2)\leq 0\}$.

(2) $P\{B(t)\leq 0;t=0,1,2\}$, 即联合分布 $P\{B(0)\leq 0,B(1)\leq 0,B(2)\leq 0\}$.

[**解1**]

(1) 因随机变量 $B(2)\sim N(0,2)$, 则 $P\{B(2)\leq 0\}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因 $B(0)=0\leq 0$ 恒成立, 则 $P\{B(t)\leq 0;t=0,1,2\}=P\{B(1)\leq 0,B(2)\leq 0\}$.

虽随机变量 $B(1)$ 和 $B(2)$ 不独立, 但 $[B(2)-B(1)]$ 和 $B(1)$ 是相互独立的标准正态分布的随机变量.

$$
\begin{aligned}
&P\{B(1)\leq 0,B(2)\leq 0\}=P\{B(1)\leq 0,B(1)+[B(2)-B(1)]\leq 0\}\\
&\quad=P\{B(1)\leq 0,B(2)-B(1)\leq -B(1)\}\\
&\quad=\int_{-\infty}^{0}P\{B(1)\leq 0,B(2)-B(1)+B(1)\leq 0\mid B(1)=x\}\cdot P\{B(1)\in\mathrm{d}x\}\mathrm{d}x\\
&\quad=\int_{-\infty}^{0}P\{x\leq 0,B(2)-B(1)\leq -x\mid B(1)=x\}\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x\\
&\quad=\int_{-\infty}^{0}P\{B(2)-B(1)\leq -x\mid B(1)=x\}\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x\ \ * x\leq 0\text{ 恒成立.}\\
&\quad=\int_{-\infty}^{0}\Phi(-x)\mathrm{d}\Phi(x)=\int_{0}^{+\infty}\Phi(x)\varphi(-x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\Phi(x)\mathrm{d}\Phi(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}y\mathrm{d}y=\frac{3}{8},
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别为标准正态分布的分布函数和密度函数.

[**解2**]

(2) $P\{B(1)\leq 0,B(2)\leq 0\}=\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\Phi(-x)\mathrm{d}\Phi(x)$

$$
=\int_{-\infty}^{0}[1-\Phi(x)]\mathrm{d}\Phi(x)\xlongequal{t=\Phi(x)}\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}.
$$

[**定义7.1.4**] Brown运动 $\{B(t);t\geq 0\}$ 的**二次变差** $[B,B](t)$ 定义为当 $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ 取遍区间 $[0,t]$ 的分割, 且其模 $\delta_n=\max\limits_{0\leq i\leq n-1}\{t_{i+1}^n-t_i^n\}\to 0$ 时, 依概率收敛意义下的极限

$$
[B,B](t)=[B,B]([0,t])=\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)|^2 .
$$

[**定义7.1.5**] 从 0 时刻到 T 时刻对Brown运动的一次观察称为其在区间 $[0,T]$ 上的一个**路径**或**实现**或**轨道**.

[定理7.1.1] Brown运动 $\{B(t);t\geq 0\}$ 的几乎所有样本路径 $B(t)\ \ (0\leq t\leq T)$ 都有如下性质:

(1) $B(t)$ 是 t 的连续函数.

(2) 在任意区间上不单调.

(3) 在任意点处不可微.

(4) 在任意区间上无限变差.

(5) $[B,B](t)=t=D[B(t)]$.

[证]

(5) 取区间 $[0,t]$ 的分割 $\{t_i^n\}_{i=0}^n\ s.t.\ \displaystyle\sum_n \delta_n<+\infty$.

设 $S_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}|B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)|^2$. 只需证: $E(S_n)=t,D(S_n)=0$.

$$E(S_n)=\sum_{i=0}^{n-1}E\{[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)]^2\}=\sum_{i=0}^{n-1}\{D[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)]+E[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)]\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)$$

* 增量 $B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\sim N(0,t_{i+1}^n-t_i^n)$,

则 $D[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)]=t_{i+1}^n-t_i^n,E[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)]=0$.

$=t$.

$$D(S_n)=D\left\{\sum_{i=0}^{n-1}[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)]^2\right\}\xlongequal{独立增量性}\sum_{i=0}^{n-1}D\left\{[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)]^2\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}3(t_{i+1}^n-t_i^n)^2$$

* 增量 $B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\sim N(0,t_{i+1}^n-t_i^n)$,

而 $D(Y^2)=E[(Y^2)^2]-[E(Y^2)]^2=E(Y^4)-[E(Y^2)]^2$.

$$=\sum_{i=0}^{n-1}3\cdot(t_{i+1}^n-t_i^n)\cdot(t_{i+1}^n-t_i^n)\leq 3\cdot\max\{t_{i+1}^n-t_i^n\}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)=3\delta_n t\ ,$$

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}D(S_n)<+\infty$. 由单调收敛定理: $E\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(S_n-t)^n\right]<+\infty$,

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(S_n-t)^2<+\infty$ a.s. , 进而 $S_n-t\to 0$ a.s. , 故证.

[注] Riemann积分的二次变差为 0 , 即 $\mathrm{d}t\to 0$ 时, 有 $(\mathrm{d}t)^2\to 0$. Brown运动的二次变差为 t , 即 $\mathrm{d}B(t)\to 0$ 时, 有 $[\mathrm{d}B(t)]^2\to\mathrm{d}t$.

7.2 Gauss过程

[**定理7.2.1**] 若随机变量 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且相互独立, 则二维随机变量 $(X, X+Y) \sim N\left(\overrightarrow{\mu}, \Sigma\right)$, 其中 $\overrightarrow{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}$, 协方差矩阵 $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}$.

[**证**] $\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(X, Y) & \mathrm{Cov}(X, X+Y) \\ \mathrm{Cov}(X+Y, X) & \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}$,

其中 $\mathrm{Cov}(X, X+Y) = \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_1^2 + 0 = \sigma_1^2$.

[**定义7.2.1**] 所有有限维分布都是多元正态分布的随机过程称为**Gauss过程**.

[**定理7.2.2**] Brown运动是均值函数 $m(t) = 0$ 、协方差函数 $\gamma(s, t) = \min\{t, s\}$ 的Gauss过程.

[**证**] 因Brown运动的均值为 0 , 其协方差函数 $\gamma(s, t) = \mathrm{Cov}[B(t), B(s)] = E[B(t) \cdot B(s)]$.

① 若 $t < s$, 则 $B(s) = B(t) + B(s) - B(t)$.

由独立增量性: $E[B(t) \cdot B(s)] = E\{[B(t)]^2\} + E\{B(t) \cdot [B(s) - B(t)]\} = E\{[B(t)]^2\}$

$= D[B(t)] + \{E[B(t)]\}^2 = t + 0 = t$.

② 若 $t > s$, 同理 $E[B(t) \cdot B(s)] = s$.

由**定理7.2.1**和数归: $B(t)$ 是所有有限维分布都是正态的.

[**注1**] 取 $\gamma(s, t) = \min\{t, s\}$ 是为了保证增量是大时间减小时间.

[**注2**] 类似地可求Poisson过程的协方差. 设 $t < s$.

因 $E[N(t) \cdot N(s)] = E\{[N(t)]^2\} + E\{N(t) \cdot [N(s) - N(t)]\}$

$= D[N(t)] + \{E[N(t)]\}^2 + E[N(t)] \cdot E[N(s) - N(t)]$

$= \lambda t + \lambda^2 t^2 + \lambda t \cdot \lambda(s - t) = \lambda t + \lambda^2 ts$.

故 $\mathrm{Cov}[N(t), N(s)] = E[N(t) \cdot N(s)] - E[N(t)] \cdot E[N(s)]$

$= \lambda t + \lambda^2 ts - \lambda^2 ts = \lambda t = \lambda \cdot \min\{t, s\}$.

[**例7.2.1**] 设Brown运动 $\{B(t);t\geq 0\}$. 求如下随机变量的分布:

(1) $B(1)+2\cdot B(3)$.

(2) $B(1)+B(2)+B(3)+B(4)$.

(3) $B\left(\dfrac{1}{4}\right)+B\left(\dfrac{1}{2}\right)+B\left(\dfrac{3}{4}\right)+B(1)$.

[**解1**]

(1) $E[B(1)+2\cdot B(3)]=E[B(1)]+2\cdot E[B(3)]=0$.

因 $B(1)$ 与 $B(3)$ 不独立, 则求方差时不能直接拆开.

因 $B(1)+2\cdot B(3)=B(1)+2\cdot[B(3)-B(1)]+2\cdot B(1)=3\cdot B(1)+2\cdot[B(3)-B(1)]$,

而 $B(3)-B(1)\sim N(0,3-1)=N(0,2),B(1)\sim N(0,1)$,

由独立增量性: $D[B(1)+2\cdot B(3)]=9\cdot D[B(1)]+4\cdot D[B(3)-B(1)]=17$.

[**解2**]

(1) 由**定理7.2.1**: 随机向量 $\overrightarrow{x}=\begin{bmatrix}B(1)\\B(2)\\B(3)\end{bmatrix}$ 服从多元正态分布,

其均值 $\overrightarrow{\mu}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, 协方差矩阵 $\Sigma=\begin{bmatrix}\min\{1,1\}&\min\{1,2\}&\min\{1,3\}\\\min\{2,1\}&\min\{2,2\}&\min\{2,3\}\\\min\{3,1\}&\min\{3,2\}&\min\{3,3\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$.

设向量 $\overrightarrow{a}=[1\quad 0\quad 2]$,

则 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}=B(1)+2\cdot B(3)\sim N\left(0,\overrightarrow{a}\cdot\Sigma\cdot\overrightarrow{a^T}\right)=N(0,17)$, 方差的证明见**注**.

(2) 由**定理7.2.1**: 随机向量 $\overrightarrow{x}=\begin{bmatrix}B(1)\\B(2)\\B(3)\\B(4)\end{bmatrix}$ 服从多元正态分布,

其均值 $\overrightarrow{\mu}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, 协方差矩阵 $\Sigma=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}$.

设向量 $\overrightarrow{a}=[1\quad 1\quad 1\quad 1]$,

则 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}=B(1)+B(2)+B(3)+B(4)\sim N\left(0,\overrightarrow{a}\cdot\Sigma\cdot\overrightarrow{a^T}\right)=N(0,30)$.

(3) 由**定理7.2.1**: 随机向量 $\overrightarrow{y}=\begin{bmatrix}B\left(\dfrac{1}{4}\right)\\B\left(\dfrac{1}{2}\right)\\B\left(\dfrac{3}{4}\right)\\B(1)\end{bmatrix}$ 服从多元正态分布,

其均值 $\overrightarrow{\mu}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, 协方差矩阵 $\Sigma=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}$.

设向量 $\overrightarrow{a}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}$,

则 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}=B\left(\dfrac{1}{4}\right)+B\left(\dfrac{1}{2}\right)+B\left(\dfrac{3}{4}\right)+B(1)\sim N\left(0,\overrightarrow{a}\cdot\Sigma\cdot\overrightarrow{a^T}\right)=N\left(0,\dfrac{15}{2}\right)$.

[**注**] 方差的证明:

$$D\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\right)=E\left[\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\right)^2\right]-\left[E\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\right)\right]^2=E\left[\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\right)^T\right]-0$$

$$=E\left[\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x}^T\cdot\overrightarrow{a}^T\right]=\overrightarrow{a}\cdot E\left[\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x}^T\right]\cdot\overrightarrow{a}^T=\overrightarrow{a}\cdot\Sigma\cdot\overrightarrow{a^T} .$$

[**例7.2.2**] 设Brown运动 $\{B(t);t\geq 0\}$. 求概率 $P\left\{\displaystyle\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t>\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right\}$.

[**解**] 因Brown运动有连续轨道, 则对每个轨道, 积分 $\displaystyle\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t$ 存在, 下面求其分布.

因 $\displaystyle\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t$ 的分布是Riemann和 $\displaystyle\sum_i B(t_i)\Delta t_i$ 的极限分布, 其中 t_i 是区间 $[0,t]$ 的分点, $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$.

可以证明: 所有逼近和的分布都是零均值的正态分布, 则它们的极限分布是正态分布,

即 $\displaystyle\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t$ 服从零均值的正态分布. 下面求其方差.

$$D\left[\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t\right]=Cov\left[\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t,\int_0^1 B(s)\mathrm{d}s\right]$$

$$=E\left[\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t\int_0^1 B(s)\mathrm{d}s\right]-E\left[\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t\right]-E\left[\int_0^1 B(s)\mathrm{d}s\right]$$

$=E\left[\displaystyle\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t\int_0^1 B(s)\mathrm{d}s\right]$ * 可以证明期望和积分可交换, 则 $E\left[\displaystyle\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t\right]=E\left[\displaystyle\int_0^1 B(s)\mathrm{d}s\right]=0$

.

$=\displaystyle\int_0^1\int_0^1 E[B(t)\cdot B(s)]\mathrm{d}t\mathrm{d}s$ * 可以证明期望和积分可交换.

$$=\int_0^1\int_0^1 Cov[B(t)\cdot B(s)]\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\int_0^1\int_0^1\min\{t,s\}\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

$=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^t s\mathrm{d}s+\int_0^1\mathrm{d}s\int_0^s t\mathrm{d}t=\int_0^1\dfrac{t^2}{2}\mathrm{d}t+\int_0^1\dfrac{s^2}{2}\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}$, 则 $\displaystyle\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t\sim N\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$,

进而 $P\left\{\displaystyle\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t>\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right\}=P\left\{\dfrac{\displaystyle\int_0^1 B(t)\mathrm{d}t-0}{\sqrt{\dfrac{1}{3}}}>\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{3}-0}}{\sqrt{\dfrac{1}{3}}}\right\}=1-\varPhi(2)$,

其中 $\varPhi(x)$ 为标准正态分布的分布函数.

7.3 Brown运动的鞅性

[定理7.3.1] 设Brown运动 $\{B(t); t \geq 0\}$, 则:

(1) $\{B(t)\}$ (关于由自身生成的 σ 代数, 下同)是鞅.

(2) $\{[B(t)]^2 - t\}$ 是鞅.

(3) 对 $\forall u \in \mathbb{R}$, $\exp\left[u \cdot B(t) - \dfrac{u^2}{2}t\right]$ 是鞅.

[证]

(1) 因增量 $[B(t+s) - B(t)]$ 与 $\mathcal{F}_t$ 独立, 则对 $\forall$ 函数 $g(x)$,

都有 $E\{g[B(t+s) - B(t)] \mid \mathcal{F}_t\} = E\{g[B(t+s) - B(t)]\}$.

因 $B(t) \sim N(0, t)$, 则 $B(t)$ 可积, 且 $E[B(t)] = 0$.

故 $E[B(t+s) \mid \mathcal{F}_t] = E\{B(t) + [B(t+s) - B(t)] \mid \mathcal{F}_t\}$

$= E[B(t) \mid \mathcal{F}_t] + E[B(t+s) - B(t) \mid \mathcal{F}_t]$

$= B(t) + E[B(t+s) - B(t)]$

* 因 $B(t)$ 关于 $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(u); 0 \leq u < t\}$ 可测, $[B(t+s) - B(t)]$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 独立.

$= B(t) + 0 = B(t)$.

(2) 因 $E\{[|B(t)|]^2\} = E\{[B(t)]^2\} = D[B(t)] + \{E[B(t)]\}^2 = t + 0 < +\infty$, 则 $B(t)$ 绝对可积.

因 $[B(t+s)]^2 = [B(t) + B(t+s) - B(t)]^2$

$= [B(t)]^2 + 2 \cdot B(t) \cdot [B(t+s) - B(t)] + [B(t+s) - B(t)]^2$,

则 $E\left\{[B(t)]^2 + 2 \cdot B(t) \cdot [B(t+s) - B(t)] + [B(t+s) - B(t)]^2 \mid \mathcal{F}_t\right\}$

$= [B(t)]^2 + 2 \cdot B(t) \cdot E[B(t+s) - B(t)] + E\{[B(t+s) - B(t)]^2\}$

* 因 $B(t)$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测, $[B(t+s) - B(t)]$ 与 $\mathcal{F}_t$ 独立.

$= [B(t)]^2 + 2 \cdot B(t) \cdot E[B(t+s) - B(t)] + \{D[B(t+s) - B(t)] + E[B(t+s) - B(t)]\}$

$= [B(t)]^2 + 2 \cdot B(t) \cdot 0 + \{D[B(t+s) - B(t)] - 0\} = [B(t)]^2 + s$,

两边减 $(t+s)$ 即证.

(3) 因 $B(t) \sim N(0, t)$ 的矩母函数 $E\left[\mathrm{e}^{u \cdot B(t)}\right] = \mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}t}$,

则 $\mathrm{e}^{u \cdot B(t)}$ 可积, 且 $E\left\{\exp\left[u \cdot B(t) - \dfrac{u^2}{2}t\right]\right\} = 1$.

故 $E\left[\mathrm{e}^{u \cdot B(t+s)} \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[\mathrm{e}^{u \cdot B(t) + u[B(t+s) - B(t)]} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathrm{e}^{u \cdot B(t)} \cdot E\left[\mathrm{e}^{u \cdot [B(t+s) - B(t)]} \mid \mathcal{F}_t\right]$

$= \mathrm{e}^{u \cdot B(t)} \cdot E\left[\mathrm{e}^{u \cdot [B(t+s) - B(t)]}\right] = \mathrm{e}^{u \cdot B(t)} \cdot \mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}s}$, 两边乘 $\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}(t+s)}$ 即证.

[注] 鞅 $\{[B(t)]^2 - t\}$ 是Brown运动的特征, 即若连续鞅 $\{X(t)\}$ $s.t.$ $\{[X(t)]^2 - t\}$ 也是鞅, 则 $\{X(t)\}$ 是Brown运动.

7.4 Brown运动的Markov性

[**定义7.4.1**] 设连续随机过程 $\{X(t);t\geq 0\}$. 若对 $\forall t,s>0$, 都有 $P\{X(t+s)\leq y\mid\mathcal{F}_t\}=P\{X(t+s)\leq y\mid X(t)\}$ a.s., 则称 $\{X(t);t\geq 0\}$ 为**连续时间连续状态的Markov过程**, 其中 $\mathcal{F}_t=\sigma\{X(u);0\leq u\leq t\}$.

[**定理7.4.1**] Brown运动 $\{B(t)\}$ 有Markov性.

[**证1**] 因分布函数不易求, 而矩母函数与分布函数一一对应, 考虑验证矩母函数有Markov性.

$E\left(\mathrm{e}^{u\cdot B(t+s)}\mid\mathcal{F}_t\right)=E\left(\mathrm{e}^{u\cdot[B(t+s)-B(t)+B(t)]}\mid\mathcal{F}_t\right)$

$=\mathrm{e}^{u\cdot B(t)}\cdot E\left(\mathrm{e}^{u\cdot[B(t+s)-B(t)]}\right)$ * 因 $\mathrm{e}^{u\cdot B(t)}$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测, 增量 $[B(t+s)-B(t)]$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 独立.

$=\mathrm{e}^{u\cdot B(t)}\cdot\mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}s}$ * 因 $B(t+s)-B(t)\sim N(0,s)$.

$=\mathrm{e}^{u\cdot B(t)}\cdot E\left[\mathrm{e}^{u\cdot[B(t+s)-B(t)]}\mid B(t)\right]=E\left[\mathrm{e}^{u\cdot B(t+s)}\mid B(t)\right]$, 故证.

[**证2**] $E\left(\mathrm{e}^{u\cdot B(t+s)}\mid\mathcal{F}_t\right)=E\left(\mathrm{e}^{u\cdot[B(t+s)-B(t)+B(t)]}\mid\mathcal{F}_t\right)=\mathrm{e}^{u\cdot B(t)}\cdot E\left(\mathrm{e}^{u\cdot[B(t+s)-B(t)]}\right)$.

同理 $E\left[\mathrm{e}^{u\cdot B(t+s)}\mid B(t)\right]=\mathrm{e}^{u\cdot B(t)}\cdot E\left(\mathrm{e}^{u\cdot[B(t+s)-B(t)]}\right)=E\left(\mathrm{e}^{u\cdot B(t+s)}\mid\mathcal{F}_t\right)$, 故证.

[**定义7.4.2**] 连续时间连续状态的Markov过程 $\{X(t)\}$ 的**转移概率**定义为在过程在 s 时刻处于 x 状态的条件下, 过程在时刻 t 的条件分布函数 $F(y,t,x,s)=P\{X(t)\leq y\mid X(s)=x\}$, 其中 $X(s)=x$ 表示 $X(s)\in\mathrm{d}x$.

[**定理7.4.2**] Brown运动 $\{B(t)\}$ 有**时齐性**, 即分布不随时间的平移而变化, 进而Brown运动的所有有限维分布都是时齐的.

[**证**] 因 $B(t-s)\sim N(x,t-s)$, 注意均值非 0 ,

则 $P\{B(t-s)\leq y\mid B(0)=x\}=\displaystyle\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(u-x)^2}{t-s}\right)\mathrm{d}u$,

进而 $P\{B(t)\leq y\mid B(s)=x\}=P\{B(t-s)\leq y\mid B(0)=x\}$.