《常微分方程》复习资料

1．（变量分离方程）形如 $\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$（1.1）的方程，称为变量分离方程，这里 $f(x),\varphi(y)$ 分别是 x,y 的连续函数．

解法：（1）分离变量，当 $\varphi(y)\neq 0$ 时，将（1.1）写成 $\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx$，这样变量就“分离”了；

（2）两边积分得 $\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+c$（1.2），由（1.2）所确定的函数 $y=\varphi(x,c)$ 就为（1.1）的解．

注：若存在 y_0，使 $\varphi(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 也是（1.1）的解，可能它不包含在方程（1.2）的通解中，必须予以补上．

2．（齐次方程）形如 $\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$ 的方程称为齐次方程，这里 $g(u)$ 是 u 的连续函数．

解法：（1）作变量代换（引入新变量）$u=\frac{y}{x}$，方程化为 $\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$，（这里由于 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$）；

（2）解以上的分离变量方程；

（3）变量还原．

3．（一阶线性微分方程与常数变异法）一阶线性微分方程 $a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0$ 在 $a(x)\neq 0$ 的区间上可写成 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$（3.1），这里假设 $P(x),Q(x)$ 在考虑的区间上是 x 的连续函数．若 $Q(x)=0$，则（3.1）变为 $\frac{dy}{dx}=P(x)y$（3.2），（3.2）称为一阶齐次线性方程．若 $Q(x)\neq 0$，则（3.1）称为一阶非齐次线性方程．

解法：（1）解对应的齐次方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y$，得对应齐次方程解 $y=ce^{\int p(x)}dx$，c 为任意常数；

（2）常数变异法求解（将常数 c 变为 x 的待定函数 $c(x)$，使它为（3.1）的解）：令 $y=c(x)e^{\int p(x)dx}$ 为（3.1）的解，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}e^{\int p(x)dx}+c(x)p(x)e^{\int p(x)dx}$，代入（3.1）得 $\frac{dc(x)}{dx}=Q(x)e^{-\int p(x)dx}$，积分得 $c(x)=\int Q(x)e^{-\int p(x)dx}+\tilde{c}$；

（3）故（3.1）的通解为 $y=e^{\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+\tilde{c})$．

4．（伯努利方程）形如 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$ 的方程，称为伯努利方程，这里 $P(x),Q(x)$ 为 x 的连续函数．

解法：（1）引入变量变换 $z=y^{1-n}$，方程变为 $\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$；

（2）求以上线性方程的通解；

（3）变量还原．

5．（可解出 y 的方程）形如 $y=f(x,\frac{dy}{dx})$ (5.1)的方程，这里假设 $f(x,y')$ 有连续的偏导数．

解法：（1）引进参数 $p=\frac{dy}{dx}$，则方程（5.1）变为 $y=f(x,p)$（5.2）；

（2）将（5.2）两边对 x 求导，并以 $\frac{dy}{dx}=p$ 代入，得 $p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$（5.3），这是关于变量 x,p 的一阶微分方程；

（3）(i) 若求得（5.3）的通解形式为 $p=\varphi(x,c)$，将它代入（5.2），即得原方程（5.1）的通解 $y=f(x,\varphi(x,c))$，c 为任意常数；

（ii）若求得（5.3）的通解形式为 $x=\psi(p,c)$，则得（5.1）的参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\psi(p,c) \\ y=f(\psi(p,c),p) \end{cases}$，其中 p 是参数，c 是任意常数；

（iii）若求得（5.3）的通解形式为 $\Phi(x,p,c)=0$，则得（5.1）的参数形式的通解为 $\begin{cases} \Phi(x,p,c)=0 \\ y=f(x,p) \end{cases}$，其中 p 是参数，c 是任意常数.

6.（可解出 x 的方程）形如 $x=f(y,\dfrac{dy}{dx})$ (6.1)的方程，这里假设 $f(y,y')$ 有连续的偏导数.

解法：（1）引进参数 $p=\dfrac{dy}{dx}$，则方程（6.1）变为 $x=f(y,p)$（6.2）；

（2）将（6.2）两边对 y 求导，并以 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{p}$ 代入，得 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial y}$（6.3），这是关于变量 y,p 的一阶微分方程；

（3）若求得（6.3）的通解形式为 $\Phi(y,p,c)=0$，则得（6.1）的参数形式的通解为 $\begin{cases} x=f(y,p) \\ \Phi(y,p,c)=0 \end{cases}$，其中 p 是参数，c 是任意常数.

7.（不显含 y 的方程）形如 $F(x,\dfrac{dy}{dx})=0$ 的方程，这里假设 $F(x,y')$ 有连续的偏导数.

解法：（1）设 $p=\dfrac{dy}{dx}$，则方程变为 $F(x,p)=0$；

（2）引入参数 t，将 $F(x,p)=0$ 用参数曲线表示出来，即 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ p=\psi(t) \end{cases}$，（关键一步也是最困难一步）；

（3）把 $x=\varphi(t)$，$p=\psi(t)$ 代入 $dy=pdx$，并两边积分得 $y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c$；

（4）通解为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c \end{cases}$.

8.（不显含 x 的方程）形如 $F(y,\dfrac{dy}{dx})=0$ 的方程，这里假设 $F(y,y')$ 有连续的偏导数.

解法：（1）设 $p=\dfrac{dy}{dx}$，则方程变为 $F(y,p)=0$；

（2）引入参数 t，将 $F(y,p)=0$ 用参数曲线表示出来，即 $\begin{cases} y=\varphi(t) \\ p=\psi(t) \end{cases}$，（关键一步也是最困难一步）；

（3）把 $y=\varphi(t)$，$p=\psi(t)$ 代入 $dx=\dfrac{dy}{p}$，并两边积分得 $x=\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c$；

（4）通解为 $\begin{cases} x=\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c \\ y=\varphi(t) \end{cases}$.

9.（$F(x,y^{(k)},\cdots,y^{(n-1)},y^{n})=0(k\ge 1)$ 型可降阶高阶方程）特点：不显含未知函数 y 及 $y',\cdots,y^{(k-1)}$.

解法：令 $y^{(k)}=z(x)$，则 $y^{(k+1)}=z'$，$y^{(n)}=z^{(n-k)}$. 代入原方程，得 $F(x,z(x),z'(x),\cdots,z^{(n-k)}(x))=0$. 若能求得 $z(x)$，

将 $y^{(k)}=z(x)$ 连续积分 k 次，可得通解.

10.（$y^{(n)}=f(y,y^{(k)},\cdots,y^{(n-1)})$ 型可降阶高阶方程）特点：右端不显含自变量 x.

解法：设 $y'=p(y)$，则 $y''=\frac{dp}{dy}\bullet\frac{dy}{dx}=P\frac{dP}{dy},y'''=P^2\frac{d^2p}{dy^2}+P(\frac{dP}{dy})^2,\cdots$ ，代入原方程得到新函数 $P(y)$ 的 $(n-1)$ 阶方程，求得其解为 $\frac{dy}{dx}=P(y)=\varphi(y,C_1,\cdots,C_{n-1})$，原方程通解为 $\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1,\cdots,C_{n-1})}=x+C_n$.

11.（恰当导数方程）特点：左端恰为某一函数 $\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 对 x 的导数，即 $\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=0$.

解法：类似于全微分方程可降低一阶 $\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=C$，再设法求解这个方程.

12.（齐次方程）特点：$F(x,ty,ty',\cdots,ty^{(n)})=t^kF(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$（$k$ 次齐次函数).

解法：可通过变换 $y=e^{\int zdx}$ 将其降阶，得新未知函数 $z(x)$. 因为 $y'=ze^{\int zdx},y''=(z'+z^2)e^{\int zdx},\cdots,y^{(n)}=\Phi(z,z',\cdots,z^{(n-1)})e^{\int zdx}$，代入原方程并消去 $e^{k\int zdx}$，得新函数 $z(x)$ 的 $(n-1)$ 阶方程 $f(x,z,z',\cdots,z^{(n-1)})=0$.

13.（存在唯一性定理）考虑初值问题 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$（13.1），其中 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R:|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b$ 上连续，并且对 y 满足 Lipschitz 条件：即存在 $L>0$，使对所有 $(x,y_1),(x,y_2)\in R$ 常成立 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$，则初值问题（13.1）在区间 $|x-x_0|\le h$ 上的解存在且唯一，这里 $h=\min(a,\frac{b}{M}),M=\underset{(x,y)\in R}{Max}|f(x,y)|$.

初值问题(13.1)等价于积分方程 $y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y)dt$，构造 Picard 逐步逼近函数列 $\{\varphi_n(x)\}\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0\\\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))dx\end{cases}$

$x_0\le x\le x_0+h$，$n=1,2,\cdots$.

14.（包络的求法）曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$（14.1）的包络包含在下列两方程 $\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\\Phi'_c(x,y,c)=0\end{cases}$ 消去参数 c 而得到的曲线 $F(x,y)=0$ 之中．曲线 $F(x,y)=0$ 称为（14.1）的 $c-$判别曲线.

15.（奇解的直接计算法）方程 $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$（15.1）的奇解包含在由方程组 $\begin{cases}F(x,y,p)=0\\F'_c(x,y,p)=0\end{cases}$ 消去参数 p 而得到的曲线 $\Phi(x,y)=0$ 之中，此曲线称为（15.1）的 $p-$判别曲线，这里 $F(x,y,p)=0$ 是 x,y,p 的连续可微函数.

注：$p-$判别曲线是否为方程的奇解，尚需进一步讨论.

16.（克莱罗方程）形如 $y=x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right)$（16.1）的方程，称为克莱罗方程，这里 $f''(p)\neq0$.

解法：令 $p=\dfrac{dy}{dx}$，得 $y=xp+f(p)$．两边对 x 求导，并以 $\dfrac{dy}{dx}=p$ 代入，即得 $p=x\dfrac{dp}{dx}+p+f'(p)\dfrac{dp}{dx}$，经化简，得 $\dfrac{dp}{dx}[x+f'(p)]=0$．

如果 $\dfrac{dp}{dx}=0$，则得到 $p=c$．于是，方程（16.1）的通解为： $y=cx+f(c)$．

如果 $x+f'(p)=0$，它与等式 $y=xp+f(p)$ 联立，则得到方程（16.1）的以 p 为参数的解： $\begin{cases}x+f'(p)=0\\ y=xp+f(p)\end{cases}$ 或

$\begin{cases}x+f'(c)=0\\ y=xc+f(c)\end{cases}$ 其中 c 为参数．消去参数 p 便得方程的一个解．

17．（函数向量组线性相关与无关）设 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$ 是一组定义在区间 $[a,b]$ 上的函数列向量，如果存在一组不全为 0 的常数 $c_1,c_2,\cdots c_m$，使得对所有 $a\le t\le b$，有恒等式 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)=0$，

则称 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性相关；否则就称这组向量函数在区间 $[a,b]$ 上线性无关．

18．（Wronsky 行列式）设有 n 个定义在 $a\le t\le b$ 上的向量函数 $x_1(t)=\begin{bmatrix}x_{11}(t)\\ x_{21}(t)\\ \vdots\\ x_{n1}(t)\end{bmatrix},x_2(t)=\begin{bmatrix}x_{12}(t)\\ x_{22}(t)\\ \vdots\\ x_{n2}(t)\end{bmatrix},\cdots,x_n(t)=\begin{bmatrix}x_{1n}(t)\\ x_{2n}(t)\\ \vdots\\ x_{nn}(t)\end{bmatrix}$，

由这 n 个向量函数所构成的行列式 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots x_n(t)\triangleq W(t)\equiv\begin{vmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}$ 称为这 n 个向量函数所构成的 Wronsky 行列式．

如果向量函数 $x_1(t),x\quad t\quad\cdots\quad_n$ 在 $a\le t\le b$ 上线性相关，则它们的 Wronsky 行列式 $W(t)\equiv 0,a\le t\le b$．

19．（基解矩阵的计算公式）

（1）如果矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，它们相应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（不必互不相同），那么矩阵 $\Phi(t)=[e^{\lambda_1 t}v_1,e^{\lambda_2 t}v_2,\cdots,e^{\lambda_n t}v_n],-\infty<x<+\infty$ 是常系数线性微分方程组 $x'=Ax$ 的一个基解矩阵；

（2）矩阵 A 的特征值、特征根出现复根时（略）；

（3）矩阵 A 的特征根有重根时（略）．

20．（常系数齐线性方程）考虑方程 $L[x]=\dfrac{d^nx}{dt^n}+a_1\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=0$（20.1），其中 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 为常数，称（20.1）为 n 阶常系数齐线性方程．

解法：（1）求（20.1）特征方程的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$；

（2）计算方程（20.1）相应的解：

（i）对每一个实单根 λ_k，方程有解 $e^{\lambda_k t}$；

（ii）对每一个 $m>1$ 重实根 λ_k，方程有 m $e^{\lambda_k t},te^{\lambda_k t},t^2e^{\lambda_k t},\cdots,t^{m-1}e^{\lambda_k t}$；

（iii）对每一个重数是 1 的共轭复数 $\alpha \pm \beta i$，方程有两个解：$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$；

（iv）对每一个重数是 $m>1$ 的共轭复数 $\alpha \pm \beta i$，方程有 $2m$ 个解：$\begin{matrix} e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots, t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t; \\ e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \end{matrix}$；

（3）根据（2）中的（i）、（ii）、（iii）、（iv）情形，写出方程（20.1）的基本解组及通解.

21.（常系数非齐次线性方程）$y''+py'+qy=f(x)$ 二阶常系数非齐次线性方程对应齐次方程 $y''+py'+qy=0$，通解结构 $y=Y+\overline{y}$.

设非齐次方程特解 $\overline{y}=Q(x)e^{\lambda x}$ 代入原方程 $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$

（1）若 λ 不是特征方程的根，$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$，可设 $Q(x)=Q_m(x)$，$\overline{y}=Q_m(x)e^{\lambda x}$；

（2）若 λ 是特征方程的单根，$\lambda^2+p\lambda+q=0$，$2\lambda+p\neq 0$，可设 $Q(x)=xQ_m(x)$，$\overline{y}=xQ_m(x)e^{\lambda x}$；

（3）若 λ 是特征方程的重根，$\lambda^2+p\lambda+q=0$，$2\lambda+p=0$，可设 $Q(x)=x^2Q_m(x)$，$\overline{y}=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$.

综上讨论，设 $\overline{y}=x^k e^{\lambda x}Q_m(x)$，$k=\begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$.