《常微分方程》期末速通

1. 一阶微分方程的解的存在性定理

1.1 常微分方程的概念

[**定义1.1.1**] 若微分方程只含一个自变量, 则称其为**常微分方程**(ODE); 若微分方程至少含两个自变量或出现偏导数, 则称其为**偏微分方程**(PDE). 后续无特别说明时, 微分方程都指ODE, 简称**微分方程**或**方程**.

[**例1.1.1**]

(1) 方程 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0$ 是ODE.

(2) 方程 $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}=4\dfrac{\partial T}{\partial t}$ 是PDE.

[**定义1.1.2**] 微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为该方程的**阶数**. n 阶ODE形如 $F\left(x,y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$, 其中 F 是关于 $x,y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的函数, 且 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的系数非零, y 是**未知函数**, x 是**自变量**.

[**例1.1.2**]

(1) 方程 $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^3+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x=4$ 是二阶ODE.

(2) 方程 $2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x=4$ 是一阶ODE.

[**定义1.1.3**] 若 n 阶ODE形如 $F\left(x,y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$ 的 LHS 是关于 $y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的有理整式, 即形如 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x)$, 其中 $a_1(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 都是关于 x 的已知函数, 则称其为 n **阶线性ODE**; 不是线性ODE的ODE称为**非线性ODE**.

[**注1**] 判断线性和非线性时, 只能根据方程原本的形式判断, 不能对方程变形后再判断.

[**注2**] 线性ODE只对未知函数的形式有限制, 即只能是 $y,y',\cdots,y^{(n)}$, 不能是 $\dfrac{1}{y},\cos y,\mathrm{e}^y,y^2,\cos y',\mathrm{e}^{y'},(y')^2$, 但对自变量的形式无限制.

[**例1.1.3**] 方程 $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^3+\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(\sin t)y=\cos t$ 是二阶线性ODE, 尽管方程含 $\mathrm{e}^t,\sin t,\cos t$.

[定义1.1.4] n 阶ODE $F\left(x, y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0$ 的**初值条件**形如 $y(x_0) = y_0, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = y_0^{(1)}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}y}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. 含初值条件的方程称为**初值问题**, 其解称为方程的**特解**. 特别地, $n = 1$ 时, 初值问题形如 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

1.2 一阶ODE的解的存在唯一性定理

[定义1.2.1] 设 $f(x, y)$ 是矩形 $R : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$ 上的连续函数, 称其在 R 上关于 y 满足**Lipschitz条件**(简称**L条件**), 如果 $\exists$ 常数 $L\ s.t.\ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$, 称 L 为**Lipschitz常数**(简称**L常数**).

[定理1.2.1] [**一阶ODE的解的存在唯一性定理**] 若函数 $f(x, y)$ 在矩形 $R : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$ 上连续且关于 y 满足L条件, 则方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ 存在定义在 $|x - x_0| \le h$ 上的唯一解 $y = \varphi(x)$, 该解连续且满足初值条件 $\varphi(x_0) = y_0$, 其中 $M = \max\limits_{(x,y) \in R} |f(x, y)|, h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

[注1] 要求: ① 叙述本定理的内容; ② 求 x_0, y_0, a, b, L, M, h .

[注2] L条件难验证, 若在 R 上 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 存在且连续, 则 $L = \max\limits_{(x,y) \in R} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$.

[推论] 线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x) \cdot y + Q(x)\ \ (\alpha \le x \le \beta)$ 的 $L = \max\limits_{\alpha \le x \le \beta} |P(x)|$.

[注3] 下面用Picard逐步逼近法证明本定理中 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 的部分, 类似地可证明 $x_0 - h \le x \le x_0$ 的部分.

本定理的证明用到如下的 5 个引理.

[引理1.2.1] 若函数 $y = \varphi(x)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ 定义在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上满足初值条件 $\varphi(x_0) = y_0$ 的解, 则 $y = \varphi(x)$ 是积分方程 $y = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x\ \ (x_0 \le x \le x_0 + h)$ 的定义在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 的连续解, 反之亦然.

[注1] 本定理表明: 初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$ 与积分方程 $y = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上同解.

[注2] 注意积分下限是 x_0 而非 0 .

[引理1.2.2] 在**引理1.2.1**的条件下, 取**初始迭代点** $\varphi_0(x) = y_0$, 则迭代公式 $\begin{cases} \varphi_0(x_0) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\mathrm{d}t\ \ x_0 \le x \le x_0 + h; n \ge 1 \end{cases}$. 对 $\forall n \ge 1$, 函数 $\varphi_n(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上有定义、连续, 且满足 $|\varphi_n(x) - y_0| \le b$.

[引理1.2.3] 在**引理1.2.2**的条件下, 函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上一致收敛.

[[**引理1.2.4**] 在**引理1.2.3**的条件下, 设 $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(x)$, 则 $\varphi(x)$ 在 $x_0\leq x\leq x_0+h$ 上连续, 且 $|\varphi(x)-y_0|\leq b$. $y=\varphi(x)$ 是积分方程 $y=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^x f(x,y)\mathrm{d}x$ 定义在 $x_0\leq x\leq x_0+h$ 上的连续解.

[**引理1.2.5**] 在**引理1.2.4**的条件下, 若函数 $y=\psi(x)$ 是积分方程 $y=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^x f(x,y)\mathrm{d}x$ 定义在 $x_0\leq x\leq x_0+h$ 上的连续解, 则 $\psi(x)=\varphi(x)\ \ (x_0\leq x\leq x_0+h)$.

1.3 近似计算与误差分析

[**定理1.3.1**] 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 定义在 $|x-x_0|\leq h$ 上的**真解** $y=\varphi(x)$ 与用迭代公式 $\begin{cases}\varphi_0(x_0)=y_0\\ \varphi_n(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^x f(t,\varphi_{n-1}(t))\mathrm{d}t\ \ x_0\leq x\leq x_0+h;n\geq 1\end{cases}$ 求得的 n **次近似解** $\varphi_n(x)$ 在 $|x-x_0|\leq h$ 的误差 $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leq\dfrac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$, 其中 $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|,h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$.

[**例1.3.1**] 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y^2$ 过点 $(1,0)$ 的二次近似解.

[**解**] $x_0=1,y_0=0$.

$\varphi_0(x)=0$, $\varphi_1(x)=\displaystyle\int_1^x\left\{t-[\varphi_0(t)]^2\right\}\mathrm{d}t=\dfrac{x^2-1}{2}$,

$\varphi_2(x)=\displaystyle\int_1^x\left\{t-[\varphi_1(t)]^2\right\}\mathrm{d}t=-\dfrac{11}{30}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^5}{20}$,

故 $y_2=-\dfrac{11}{30}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^5}{20}$.

[**例1.3.2**] 求初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-y^2,R:|x+1|\leq 1,|y|\leq 1\\ y(-1)=0\end{cases}$ 的解的存在区间, 并求二次近似解, 给出解的存在区间的误差估计.

[**解**] $x_0=-1,y_0=0,a=1,b=1$, $L=\max\limits_{(x,y)\in R}\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|=\max\limits_{(x,y)\in R}|-2y|=2$,

$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=4,h=\min\left\{1,\dfrac{1}{4}\right\}=\dfrac{1}{4}$, 则解的存在区间为 $|x-x_0|\leq h$, 即 $\left[-\dfrac{5}{4},-\dfrac{3}{4}\right]$.

$\varphi_0(x)=0,\varphi_1(x)=\displaystyle\int_{-1}^x\left\{t^2-[\varphi_0(t)]^2\right\}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}+\dfrac{x^3}{3}$,

$\varphi_2(x)=\displaystyle\int_{-1}^x\left\{t^2-[\varphi_1(t)]^2\right\}\mathrm{d}t=\dfrac{11}{42}-\dfrac{x}{9}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{18}-\dfrac{x^7}{63}$,

则 $y_2=\dfrac{11}{42}-\dfrac{x}{9}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{18}-\dfrac{x^7}{63}$, 误差 $|\varphi_2(x)-\varphi(x)|\leq\dfrac{4\cdot 2^2}{(2+1)!}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2+1}=\dfrac{1}{24}$.

[例1.3.3]

(1) 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 定义在矩形 $R=[-1,1]\times[-1,1]$ 上的、过点 $(0,0)$ 的解的存在区间.

(2) 求上述区间上与真解误差不超过 0.05 的近似解.

[解]

(1) $x_0=0,y_0=0,a=1,b=1$, $L=\max\limits_{(x,y)\in R}\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|=\max\limits_{-1\leq x\leq 1}|2y|=2$,

$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=2,h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}=\min\left\{1,\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}$.

解的存在区间为 $|x-x_0|\leq h$, 即 $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}$.

(2) 因 $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|=\dfrac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}=\dfrac{M}{L}\cdot\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot(Lh)^{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}<0.05$,

而 $n=3$ 时, 有 $\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{1}{24}<\dfrac{1}{20}=0.05$, 故只需迭代到 $n=3$.

$\varphi_0(x)=0$, $\varphi_1(x)=\displaystyle\int_0^x\left\{t^2+[\varphi_0(t)]^2\right\}\mathrm{d}t=\dfrac{x^3}{3}$,

$\varphi_2(x)=\displaystyle\int_0^x\left\{t^2+[\varphi_1(t)]^2\right\}\mathrm{d}t=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^7}{63}$,

$\varphi_3(x)=\displaystyle\int_0^x\left\{t^2+[\varphi_2(t)]^2\right\}\mathrm{d}t=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^7}{63}+\dfrac{2}{2079}x^{11}+\dfrac{x^{15}}{59535}\quad\left(-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}\right)$.

1.4 一阶ODE的解的延拓定理

[定义1.4.1] 若函数 $f(x,y)$ 在区域 G 上连续, 称其在 G 上关于 y 满足**局部Lipschitz条件**(简称**局部L条件**), 如果对 G 中的任一内点, 都存在以其为中心的含于 G 的闭矩形 $R\ s.t.\ f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足L条件, 对不同的内点, R 和L常数 L 可能不同.

[定理1.4.1] [**一阶ODE的解的延拓定理**] 若方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 中函数 $f(x,y)$ 在有界区域 G 上连续, 且在 G 上关于 y 满足局部L条件, 则该方程过 G 中任一点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可延拓, 直至点 $(x,\varphi(x))$ 趋于 G 的边界. 以向 x 增大的方向延拓为例, $y=\varphi(x)$ 至多延拓到区间 $[x_0,d)$, 其中 $x\to d$ 时, $(x,\varphi(x))$ 趋于 G 的边界.

[推论] 在上述条件下, 若 G 为无界区域, 则有如下两种情况:

(1) $y=\varphi(x)$ 可延拓到区间 $[x_0,+\infty)$.

(2) $y=\varphi(x)$ 至多延拓到区间 $[x_0,d)$, 其中 d 为有限数, 且 $x\to d$ 时, $y=\varphi(x)$ 无界或 $(x,\varphi(x))$ 趋于 G 的边界.

[例1.4.1] 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-1}{2}$ 分别过点 $(0,0)$ 和 $(\ln 2,-3)$ 的解的最大存在区间.

[解] 易得该方程的通解为 $y=\frac{1+C\mathrm{e}^x}{1-C\mathrm{e}^x}$.

易证 $f(x,y)=\frac{y^2-1}{2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上满足解的存在唯一性定理和解的延拓定理.

(1) 方程过 $(0,0)$ 的特解为 $y=\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$, 存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 方程过 $(\ln 2,-3)$ 的特解为 $y=\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$.

因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}=-1$, 则解至多延拓到 $(0,+\infty)$.

[例1.4.2] 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2$ 在区间 $-1<x<3$ 上分别满足条件 $y(1)=1$ 和 $y(1)=-1$ 的解的最大存在区间.

[解] 易得该方程的通解为 $y=-\frac{1}{x+C}$.

(1) 满足 $y(1)=1$ 的特解为 $y=-\frac{1}{x+2}$.

因 $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-1,\ \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=+\infty$, 则解至多延拓到 $(-1,2)$.

(2) 满足 $y(1)=-1$ 的特解为 $y=-\frac{1}{x}$.

因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 3^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=-3$, 则解至多延拓到 $(0,3)$.