

# 《概率论与数理统计》期末速通

## 2. 随机变量及其分布

### 2.1 随机变量

[例2.1.1] 将一枚硬币抛三次, 观察出现正反面的情况. 设  $X$  为三次抛掷得到的正面  $H$  的数量.

对  $\forall$  样本点  $e \in$  样本空间  $S$ ,  $X$  都有一个数与之对应, 即  $X$  是  $S$  上的一个实值单值函数.

$$X \text{ 的定义域为 } S, \text{ 值域为 } \{0, 1, 2, 3\}, \text{ 记作 } X = X(e) = \begin{cases} 3 & e = HHH \\ 2 & e = HHT, HTH, THH \\ 1 & e = HTT, THT, TTH \\ 0 & e = TTT \end{cases}.$$

$$P\{X = 0\} = P\{TTT\} = \frac{1}{8}.$$

[例2.1.2] 在一袋中装有编号分别为 1, 2, 3 的 3 个球. 从袋中任取一球, 记录其号码后放回. 再任取一球, 记录其号码.

该试验的样本空间  $S = \{e\} = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3\}$ , 其中  $i, j$  分别为第一、二次取到的球的号码.

设  $X$  为两次取到的球的号码之和, 则  $X = X(e) = X((i, j)) = i + j \ (i, j = 1, 2, 3)$ .

[定义2.1.1] 设随机试验的样本空间  $S = \{e\}$ . 若  $X = X(e)$  是定义在  $S$  上的实值单值函数, 则称其为**随机变量**.

[注1] 一般用大写英文字母  $X, Y, Z, W, \dots$  表示随机变量, 用小写英文字母  $x, y, z, w, \dots$  表示实数.

[注2] 随机变量  $X$  本质是对事件的描述, 其取值随试验的结果而定. 而试验的各个结果以一定的概率出现, 则随机变量的取值有一定概率, 值随机而定的变量.

[注3] 随机变量  $X$  取值为  $c$  记作  $\{X = c\}$ . 一般用  $\{X = c\}, \{X < c\}, \{X \geq c\}$  等表示事件.

### 2.2 离散型随机变量及其分布

[定义2.2.1] 取值有限个或可列个的随机变量称为**离散型随机变量**.

[定义2.2.2] 设离散型随机变量  $X$  的取值为  $x_k \ (k = 1, 2, \dots)$ , 且  $X$  取值  $x_k$  的概率  $P\{X = x_k\} = p_k \ (k = 1, 2, \dots)$ , 则称其为离散型随机变量  $X$  的**分布律**.

[注] 分布律可写成表格的形式:

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$\dots$
$p_k$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$	$\dots$

**[定理2.2.1]** 设离散型随机变量  $X$  取值  $x_k$  的概率  $P\{X = x_k\} = p_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 则:

(1)  $p_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

(2)  $\sum_k p_k = 1$ .

**[证]** (2) 因  $S = \bigcup_k \{X = x_k\}$ , 且事件  $\{X = x_1\}, \dots, \{X = x_k\}, \dots$  两两互斥.

由可列可加性:  $1 = P(S) = \sum_k P\{X = x_k\} = \sum_k p_k$ .

**[注]** 可以证明: 若一个数列满足(1)和(2), 可以证明它是某个随机变量的分布律.

这表明: (1)和(2)是一个数列是分布律的充要条件.

**[例2.2.1]** 设一汽车在开往目的地的路上需经过 4 组信号灯, 每组信号灯以  $\frac{1}{2}$  的概率允许或禁止汽车通过. 设  $X$  为汽车首次停下时通过的信号灯的组数, 设各组信号灯的工作相互独立. 求  $X$  的分布律.

**[解]** 设  $p$  为每组信号灯禁止汽车通过的概率.

$X$  的分布列:

$X$	0	1	2	3	4
$p_k$	$p = 0.5$	$(1-p)p = 0.25$	$(1-p)^2 p = 0.125$	$(1-p)^3 p = 0.0625$	$(1-p)^4 = 0.0625$

## 2.2.1 (0-1)分布

**[定义2.2.3]** 设随机变量  $X$  可能的取值只有 0 和 1, 且  $X$  取 1 的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 则称  $X$  服从参数为  $p$  的 (0-1)分布或两点分布.

(1) 分布律:  $P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}$  ( $k = 0, 1$ ).

(2) 分布列:

$X$	0	1
$p_k$	$1-p$	$p$

**[定理2.2.2]** 若随机试验的样本空间  $S$  只包含两个元素  $e_1, e_2$ , 则可在其上定义一个服从(0-1)分布的随机变量

$$X = X(e) = \begin{cases} 0 & e = e_1 \\ 1 & e = e_2 \end{cases}.$$

## 2.2.2 Bernoulli试验与二项分布

**[定义2.2.4]** 若随机试验  $E$  只有两个结果  $A$  和  $\bar{A}$ , 则称其为 **Bernoulli试验**. 设  $P(A) = p \in (0, 1)$ . 将  $E$  独立重复地进行  $n$  次, 称这一串重复的独立试验为  $n$  **重Bernoulli试验**, 其中"重复"指每次试验中  $P(A) = p$  不变, "独立"指每次试验的结果互不影响.

**[定义2.2.5]** 若随机变量  $X$  的分布律有形式  $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), 则称  $X$  服从参数为  $n, p$  的**二项分布**, 记作  $X \sim b(n, p)$ .

**[注1]**  $n = 1$  时, 二项分布退化为(0-1)分布.

**[注2]** 随  $k$  的增加,  $P\{X = k\}$  先随之单调增大, 达到最大值后单调减小.

**[例2.2.2]** 已知一大批产品中一级品率为 0.2, 现从中任取 20 个产品, 求其中恰有  $k$  ( $0 \leq k \leq 20$ ) 个一级品的概率.

**[解]** 这是不放回抽样, 但因产品数量多, 而抽取的产品相对于产品数量很小, 故可视为放回抽样,

进而抽取 20 个产品等价于进行 20 重Bernoulli试验  $E$ .

设事件  $A$ : 某产品是一级品, 则  $P(A) = 0.2$ ,

且 20 个产品中的一级品数  $X$  等于 20 重Bernoulli试验中  $A$  发生的次数, 则  $X \sim b(20, 0.2)$ .

故  $P\{X = k\} = C_{20}^k (0.2)^k (0.8)^{20-k}$  ( $0 \leq k \leq 20$ ).

**[例2.2.3]** 某人进行射击, 每次射击的命中率为 0.02. 现独立射击 400 次, 求至少命中 2 次的概率.

**[解]** 设随机试验  $E$ : 进行一次射击, 事件  $A$ : 射击命中. 设独立射击 400 次中命中  $X$  次, 则  $X \sim b(400, 0.02)$ .

$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X < 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 0.9972$ .

**[注]**

①  $P\{X \geq 2\}$  接近 1, 这表明: 一个事件尽管在一次试验中发生的概率很小, 但独立试验次数足够多时, 该事件几乎必然发生.

② 若某人在 400 次独立射击中命中次数  $< 2$ , 由实际推断原理: 他每次射击的命中率为 0.02 的假设是错误的.

**[例2.2.4]** 设有 80 个设备, 各设备工作相互独立, 发生故障的概率都为 0.01, 且一个设备的故障只能由一个人处理. 现有如下两种配备维修工人的方法: ①由 4 个人维护, 每人负责 20 个设备; ② 80 个设备由 3 个人共同维护. 比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率.

**[解]**

① 设第 1 个人维护的 20 个设备同一时刻有  $X$  个发生故障, 则  $X \sim b(20, 0.01)$ .

设事件  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ): 第  $i$  个人维护的 20 个设备发生故障且不能及时维修.

80 个设备发生故障且不能及时维修的概率:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P(A_1) = P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 0.0169.$$

② 设 80 个设备同一时刻有  $Y$  个发生故障, 则  $Y \sim b(80, 0.01)$ .

80 个设备发生故障且不能及时维修的概率:  $P\{Y \geq 4\} = 1 - \sum_{i=1}^3 P\{Y = i\} \approx 0.0087$ .

**[注]** 方法②与方法①相比, 每个人的任务重了, 但效率提高了.

### 2.2.3 Poisson分布

**[定义2.2.6]** 若随机变量  $X$  可能的取值为  $0, 1, 2, \dots$ , 且分布律  $P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), 其中  $\lambda > 0$  是常数, 则称  $X$  服从参数为  $\lambda$  的Poisson分布, 记作  $X \sim \pi(\lambda)$  或  $X \sim P(\lambda)$ .

**[证]** 下证  $P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 是某个离散型随机变量的分布律.

① 因  $k \in \mathbb{N}, \lambda > 0$ , 则  $P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \geq 0$ .

②  $\sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$ .

**[定理2.2.3]** 设  $\lambda > 0$  是常数,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 且  $np_n = \lambda$ , 则对  $\forall$  固定的整数  $k \geq 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{1-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

**[注]** 本定理表明: 二项分布  $b(n, p)$  当  $n \rightarrow \infty$  时为Poisson分布  $P(\lambda)$ .

**[推论]** 设  $np = \lambda$ , 则  $n$  很大 ( $n \geq 20$ ),  $p$  很小 ( $p \leq 0.05$ ) 时, 有近似式:  $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

**[例2.2.5]** 某公司制造的产品的次品率为  $0.1\%$ , 每个产品称为次品相互独立. 求 1000 个产品中至少有 2 个次品的概率.

**[解]** 设 1000 个产品中有  $X$  个次品, 则  $X \sim b(1000, 0.001)$ .

(1) 二项分布:

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - (0.999)^{1000} - C_{1000}^1 (0.999)^{999} (0.001) \\ &\approx 0.2642411. \end{aligned}$$

(2) Poisson定理:  $n = 1000, p = 0.001, \lambda = np = 1$ .

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - e^{-1} - e^{-1} \approx 0.2642411.$$

## 2.3 随机变量的分布函数

**[定义2.3.1]** 对随机变量  $X$  和  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 称函数  $F(x) = P\{X \leq x\}$  为  $X$  的**分布函数**.

**[注1]**  $F(x)$  是定义域为  $\mathbb{R}$ 、值域为  $[0, 1]$  的函数.

**[注2]** 用分布函数可求随机变量在任一区间上取值的概率, 如

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2\} &= P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1), \\ P\{x_1 \leq X \leq x_2\} &= P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} + P\{X = x_1\}. \end{aligned}$$

**[注3]** 几何表示: 将  $X$  视为数轴上随机点的坐标, 则分布函数  $F(x)$  在  $x$  处的函数值表示  $X$  落在区间  $(-\infty, x]$  上的概率.

**[注4]** 分布函数对离散型连续变量和连续性随机变量都适用.

**[定理2.3.1]** 对随机变量  $X$ ,  $F(x)$  是  $X$  的分布函数的充要条件为如下三条性质: ①  $F(x)$  单调不减; ②  $0 \leq F(x) \leq 1$ , 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ; ③  $F(x)$  是右连续的, 即对  $\forall x$ , 都有  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$ .

**[例2.3.1]** 设随机变量  $X$  的分布律如下:

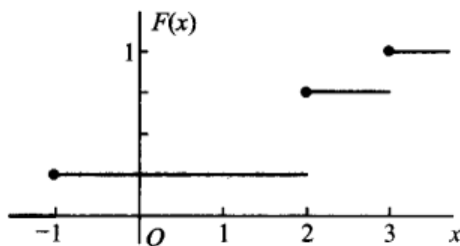
$X$	-1	2	3
$p_k$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(1) 求  $X$  的分布函数.

(2) 求  $P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$ ,  $P\left\{\frac{3}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}\right\}$ ,  $P\{2 \leq X \leq 3\}$ .

**[解]**

$$(1) F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ P\{X = -1\} = \frac{1}{4} & -1 \leq x < 2 \\ P\{X = -1\} + P\{X = 2\} = \frac{3}{4} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}, \text{其图象如下图所示:}$$



$$(2) P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}. \text{另解: } P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$P\left\{\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}\right\} = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$P\{2 \leq x \leq 3\} = P\{X = 2\} + P\{2 < X \leq 3\} = P\{X = 2\} + F(3) - F(2) = \frac{3}{4}.$$

**[定理2.3.2]** 设离散型随机变量  $X$  的分布律  $P\{X = x_k\} = p_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 则其分布函数  $F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$ .

**[注1]** 离散型随机变量的分布函数是分段函数, 其中分段区间除  $(-\infty, x_0)$  外都是左闭右开的, 且图象是一条阶梯型曲线.

**[注2]**  $F(x)$  在  $x = x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 处有跳跃, 跳跃值为  $p_k = P\{X = x_k\}$ .

[例2.3.2] 已知离散型随机变量  $X$  的分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.3 & -2 \leq x < 1 \\ 0.6 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$ . 求  $X$  的分布律.

[解]  $P\{X = -2\} = 0.3 - 0 = 0.3, P\{X = 1\} = 0.6 - 0.3 = 0.3, P\{X = 2\} = 1 - 0.6 = 0.4$ .

$X$	-2	1	2
$p_k$	0.3	0.3	0.4

## 2.4 连续型随机变量及其概率密度

### 2.4.1 连续型随机变量

[例2.4.1] 设靶子是一个半径为 2 的圆盘, 击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比. 若射击都能中靶, 设弹着点与圆心的距离为  $X$ . 求随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ .

[解] ①  $x < 0$  时, 因  $\{X = k\}$  是不可能事件, 则  $F(x) = P(\emptyset) = 0$ .

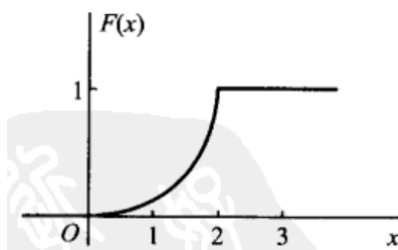
②  $0 \leq x \leq 2$  时, 设  $P\{0 \leq X \leq x\} = kx^2$ , 其中  $k$  是常数.

因  $x = 2$  时, 有  $P\{0 \leq X \leq 2\} = 4k = 1$ , 则  $k = \frac{1}{4}$ .

故  $F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X < 0\} + P\{0 \leq X \leq x\} = 0 + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$ .

③  $x \geq 2$  时, 因射击都能中靶, 则  $F(x) = P\{X \leq x\} = 1$ .

综上,  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$ .



[注1] 因  $F(x)$  的图象是一条连续曲线而非阶梯型曲线, 故  $X$  非离散型随机变量. 事实上, 它是连续型随机变量.

[注2] 可以证明  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ , 其中  $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$  是非负函数.

[定义2.4.1] 若对随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ , 存在非负可积的函数  $f(x)$  s. t. 对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ , 则称  $X$  为连续型随机变量, 称  $f(x)$  为  $X$  的概率密度函数, 简称概率密度.

[注] 概率密度  $f(x)$  在个别点处的函数值不影响分布函数  $F(x)$  的值.

**[定理2.4.1]** 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x)$ , 分布函数为  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ , 则:

(1)  $f(x) \geq 0$ .

(2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ .

(3)  $P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ .

(4) 若  $f(x)$  可积, 则  $F(x)$  连续.

(5) 若  $f(x)$  连续, 则  $F(x)$  可导, 且  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

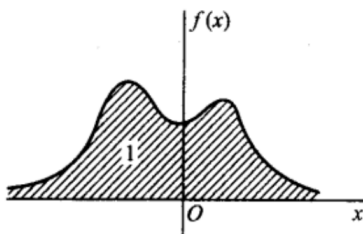
**[证]**

(2) 因  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ,

则  $1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ .

(3)  $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ .

**[注1]** (2)的几何意义: 介于  $y = f(x)$  与  $x$  轴间的无界区域的面积为 1, 如下图所示:



**[注2]** (3)的几何意义:  $X$  落在区间  $(x_1, x_2]$  的概率等于区间  $(x_1, x_2]$  上介于  $y = f(x)$  与  $x$  轴间的曲边梯形的面积.

**[注3]** 可以证明: 若函数  $f(x)$  有性质(1)和(2), 则  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  是某一随机变量  $X$  的分布函数,  $f(x)$  是  $X$  的概率密度.

**[定理2.4.2]** 设连续型随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x)$ , 分布函数为  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ , 则:

(1)  $F(x)$  连续.

(2) 若  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 则  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

(3) 对  $\forall$  常数  $a \in \mathbb{R}$ , 有  $P\{X = a\} = 0$ .

(4)

$$P\{a < X < b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**[证]** (3) 取  $\Delta x > 0$ , 因  $\{X = a\} \subset \{a - \Delta x < X \leq a\}$ , 则  $P\{X = a\} \leq P\{a - \Delta x < X \leq a\}$ .

因  $P\{x = a\} \geq 0$ , 且  $P\{a - \Delta x < X \leq a\} = F(a) - F(a - \Delta x) \rightarrow 0$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), 由夹逼定理即证.

**[注]** (3)表明: 若  $A$  是不可能事件, 则  $P(A) = 0$ ; 但若  $P(A) = 0$ , 则  $A$  未必是不可能事件.

[例2.4.2] 设随机变量  $X$  有概率密度  $f(x) = \begin{cases} kx, 0 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2}, 3 \leq x \leq 4 \\ 0, otherwise \end{cases}$ . 求:

(1) 常数  $k$ .

(2)  $X$  的分布函数  $F(x)$ .

(3)  $P\left\{1 < X \leq \frac{7}{2}\right\}$ .

[解]

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^3 kx dx + \int_3^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = 1, \text{ 解得: } k = \frac{1}{6}.$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, 0 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2}, 3 \leq x \leq 4 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

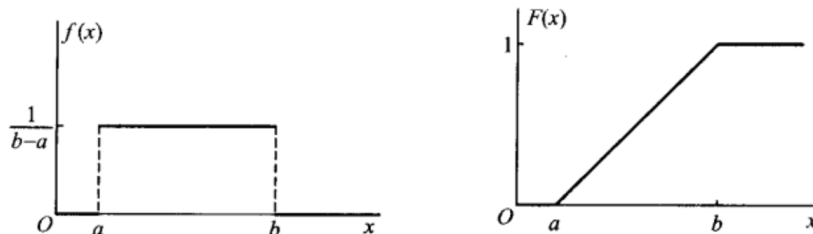
$$\text{则 } F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \int_0^x \frac{t}{6} dt, 0 \leq x < 3 \\ \int_0^3 \frac{t}{6} dx + \int_3^x \left(2 - \frac{t}{2}\right) dt, 3 \leq x < 4 \\ 1, x \geq 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{x^2}{12}, 0 \leq x < 3 \\ -3 + 2x - \frac{x^2}{4}, 3 \leq x < 4 \\ 1, x \geq 4 \end{cases}.$$

$$(3) P\left\{1 < X \leq \frac{7}{2}\right\} = F\left(\frac{7}{2}\right) - F(1) = \frac{41}{48}.$$

## 2.4.2 均匀分布

[定义2.4.2] 若连续型随机变量  $X$  有概率密度  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0, otherwise \end{cases}$ , 则称  $X$  在区间  $(a, b)$  上服从**均匀分布**, 记作  $X \sim U(a, b)$ , 其分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x < b \\ 1, x \geq b \end{cases}$ .

[注] 服从均匀分布的连续型随机变量的概率密度  $f(x)$  和分布函数  $F(x)$  的图象如下图所示:



[定理2.4.3] 若连续型随机变量  $X$  在区间  $(a, b)$  上服从均匀分布, 则  $X$  落在  $(a, b)$  中任意等长的子区间内的可能性相同, 即它落在  $(a, b)$  中的子区间的概率只依赖于子区间的长度, 与子区间的位置无关.

[证] 对任一长度为  $l$  的子区间  $(c, c+l) \subset [a, b]$ ,

$$\text{有 } P\{c < X \leq c+l\} = \int_c^{c+l} f(x)dx = \int_c^{c+l} \frac{dx}{b-a} = \frac{l}{b-a}.$$



[例2.4.3] 设电阻值  $R$  是均匀分布在  $900\ \Omega \sim 1100\ \Omega$  的随机变量. 求:

(1)  $R$  的概率密度.

(2)  $R$  落在  $950\ \Omega \sim 1050\ \Omega$  的概率.

(3)  $R$  落在  $750\ \Omega \sim 1050\ \Omega$  的概率.

[解]

$$(1) f(r) = \begin{cases} \frac{1}{1100 - 900} = \frac{1}{200}, & 900 < r < 1100 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$(2) P\{950 < R < 1050\} = \int_{950}^{1050} f(r) dr = \int_{950}^{1050} \frac{dr}{200} = 0.5.$$

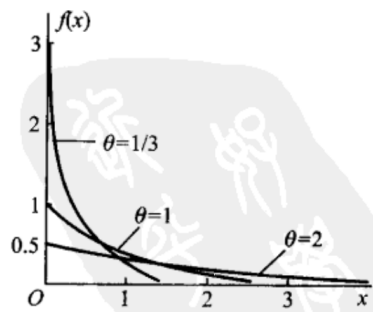
$$(3) P\{750 < R < 1050\} = \int_{750}^{1050} f(r) dr = \int_{900}^{1050} f(r) dr = \frac{3}{4}.$$

### 2.4.3 指数分布

[定义2.4.3] 若连续型随机变量  $X$  的概率密度  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 其中常数  $\theta > 0$ , 则称  $X$  服从参数为  $\theta$  的

指数分布, 记作  $X \sim \text{Exp}(\theta)$ , 其分布函数  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ .

[注] 服从参数为  $\theta$  的指数分布的连续型随机变量的概率密度  $f(x)$  的图象如下图所示:



[定理2.4.4] 若连续型随机变量  $X$  服从指数分布, 则它的概率分布有**无记忆性**, 即对  $\forall s, t > 0$ , 有  $P\{(X > s+t)|(X > s)\} = P\{X > t\}$ .

$$\begin{aligned} \text{[证]} \quad P\{(X > s+t)|(X > s)\} &= \frac{P\{(X > s+t) \cap (X > s)\}}{P\{X > s\}} = \frac{P\{X > s+t\}}{P\{X > s\}} \\ &= \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(s)} = \frac{e^{-\frac{s+t}{\theta}}}{e^{-\frac{s}{\theta}}} = e^{-\frac{t}{\theta}} = P\{X > t\}. \end{aligned}$$

[注] 设  $X$  为某元件的寿命, 则本定理表明: 已知该元件已使用了  $s$  小时, 则它总共能使用至少  $(s+t)$  小时的条件概率与初始时它至少能使用  $t$  小时的概率相等, 即元件对它已使用过  $s$  小时无记忆.

**[例2.4.4]** 设顾客在银行窗口的等待时间  $X$  (min) 服从指数分布, 其概率密度  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ . 某顾客

在窗口等待, 若等待时间超过 10 min 则离开. 他一个月需到银行 5 次, 设他一个月内未等到服务而离开窗口  $Y$  次.

(1) 求  $Y$  的分布律.

(2) 求  $P\{Y \geq 1\}$ .

**[解]** 设事件  $A$ : 该顾客未等到服务而离开窗口, 则他去银行 5 次等价于进行了 5 重Bernoulli试验, 则  $Y \sim b(5, P(A))$ .

$P(A) = P\{X > 10\} = 1 - P\{X \leq 10\} = 1 - F(10) = e^{-2}$ , 则  $Y \sim b(5, e^{-2})$ .

(1)  $P\{Y = k\} = C_5^k (e^{-2})^k (1 - e^{-2})^{5-k} \quad (k = 0, 1, \dots, 5)$ .

(2)  $P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y < 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - e^{-2})^5$ .

## 2.4.4 正态分布

**[定义2.4.4]** 若连续型随机变量  $X$  的概率密度  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ , 其中  $\sigma > 0, \mu$  都是常数, 则称  $X$  服从参数为  $\mu, \sigma$  的**正态分布**或**Gauss分布**, 记作  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其分布函数  $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ .

**[证]** 下证  $F(x)$  是分布函数. 因  $\sigma > 0$ , 则  $f(x) \geq 0$ . 下证  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ .

**[引理]** 概率积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ .

令  $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ , 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1$ .

**[注]** 正态分布的分布函数无法用初等函数表示.

**[定理2.4.5]** 设服从正态分布的连续型随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x)$ . 对曲线  $y = f(x)$ , 有:

(1)  $y = f(x)$  关于直线  $x = \mu$  对称, 则对  $\forall h \in \mathbb{R}$ , 有  $P\{\mu - h < X \leq \mu\} = P\{\mu < X \leq \mu + h\}$ .

(2)  $f(x)$  在区间  $(-\infty, \mu]$  上单调增, 在区间  $[\mu, +\infty)$  上单调减.

(3)  $x = \mu$  时,  $f(x)$  取得最大值  $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ .

(4) 等长度的区间离  $x = \mu$  越远,  $X$  落在该区间上的概率越小.

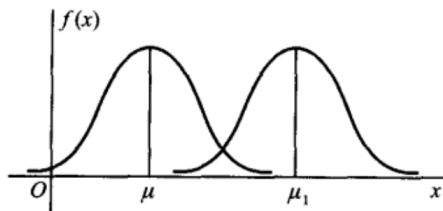
(5)  $f(x)$  只在  $x = \mu \pm \sigma$  处有拐点.

(6)  $y = f(x)$  以  $x$  轴为水平渐近线.

**[证]** (5) 令  $f''(x) = \frac{(x-\mu)^2 - \sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^5} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0$ , 则  $(x-\mu)^2 = \sigma^2$ , 解得:  $x = \mu \pm \sigma$ .

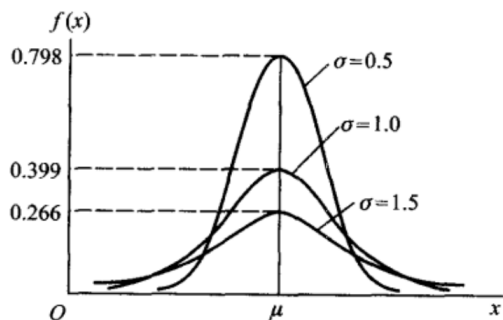
[注1] 考察服从参数为  $\mu, \sigma$  的正态分布的连续型随机变量的概率密度  $f(x)$  的图象.

(1) 固定  $\sigma$ , 变化  $\mu$  时, 图象沿  $x$  轴平移, 形状不变, 故  $\mu$  称为正态分布的**位置参数**. 如下图为  $\mu_1 > \mu$  时的图象:



(2) 固定  $\mu$ , 变化  $\sigma$  时, 图象位置不变, 但  $\sigma$  越小,  $f_{\max} = f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$  越大, 即图象越尖.

如下图为  $\sigma$  分别取 0.5, 1.0, 1.5 的图象. 由图象知: 固定  $\mu$ ,  $\sigma$  越小,  $X$  落在区间  $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$  内的概率越大.

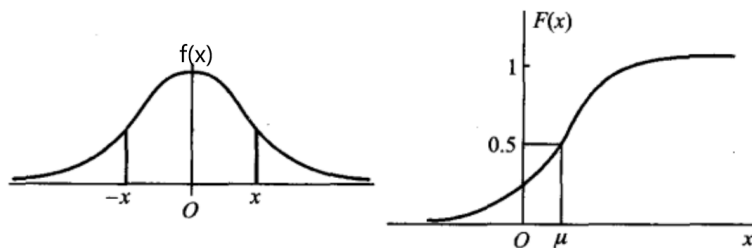


[例2.4.5] 设连续型随机变量  $X \sim N(2, \sigma^2)$ , 且  $P\{2 < X < 4\} = 0.3$ . 求  $P\{0 < X < 2\}$ .

[解] 因  $y = \varphi(x)$  的图象关于  $x = 2$  对称, 则  $P\{0 < X < 2\} = P\{2 < X < 4\} = 0.3$ .

[定义2.4.5] 对连续型随机变量  $X$ , 若  $X \sim N(0, 1)$ , 则称  $X$  服从**标准正态分布**, 其概率密度  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , 分布函数  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

[注]  $f(x) = \varphi(x)$  和  $F(x) = \Phi(x)$  的图象如下图所示:



[定理2.4.6] 设连续型随机变量  $X$  服从标准正态分布, 其概率密度和分布函数分别为  $\varphi(x)$  和  $\Phi(x)$ , 则:

(1)  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ .

(2)  $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ .

[证] (1)  $\Phi(-x) + \Phi(x) = P\{X \leq -x\} + P\{X \leq x\} = P\{X \leq x\} + P\{X \geq x\} = 1$ .

**[定理2.4.7]** 任一正态分布可经一线性变换转化为标准正态分布. 具体地, 设连续型随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则随机变量  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ .

$$[\text{证}] \quad Z \text{ 的分布函数 } F_Z(x) = P\{Z \leq x\} = P\{X \leq \mu + \sigma x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu + \sigma x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$\stackrel{u=\frac{t-\mu}{\sigma}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

**[定理2.4.8]** 设连续型随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则:

$$(1) F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

$$(2) P\{x_1 < X \leq x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

**[证]**

$$(1) F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

$$(2) P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

**[例2.4.6]** 将一温度调节器放在储存某种液体的容器内, 调节器在  $d^\circ\text{C}$ , 液体温度  $X$  ( $^\circ\text{C}$ ) 是一个随机变量, 且  $X \sim N(d, 0.5^2)$ .

(1) 若  $d = 90^\circ\text{C}$ , 求  $X < 89^\circ\text{C}$  的概率.

(2) 若要保持液体温度至少为  $80^\circ\text{C}$  的概率不低于 0.99, 求  $d$  的取值范围.

**[解]**

$$(1) X \sim N(90, 0.5^2),$$

$$\text{则 } P\{X < 89\} = \Phi\left(\frac{89 - 90}{0.5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.997 = 0.0228.$$

$$(2) 0.99 \leq P\{X \geq 80\} = 1 - P\{X < 80\} = 1 - \Phi\left(\frac{80 - d}{0.5}\right), \text{ 则 } \Phi\left(\frac{d - 80}{0.5}\right) \geq 0.99 = \Phi(2.327).$$

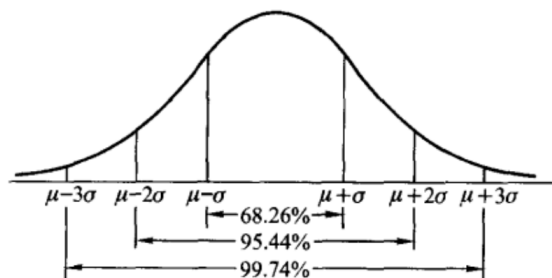
$$\text{因 } \Phi(x) \text{ 单调递增, 则 } \frac{d - 80}{0.5} \geq 2.327, \text{ 解得: } d > 81.1635.$$

**[定理2.4.9] [3 $\sigma$ 法则]** 若连续型随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , 则  $X$  落在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  内几乎是必然的. 具体地, 有:

$$(1) P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 68.25\%.$$

$$(2) P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 95.44\%.$$

$$(3) P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = 99.74\%.$$



## 2.5 随机变量的函数的分布

**[定义2.5.1]** 设  $X$  是随机变量. 对连续函数  $g(\cdot)$ , 以  $X$  为自变量的函数  $Y = g(X)$  也是随机变量, 称其为随机变量  $X$  的函数.

**[定义2.5.2]** 离散型随机变量的**概率分布**是指其分布律, 连续型随机变量的**概率分布**是指其概率密度.

### 2.5.1 离散型随机变量的函数

**[例2.5.1]** 设随机变量  $X$  的分布律如下. 求随机变量  $Y = (X - 1)^2$  的分布律.

$X$	-1	0	1	2
$p_k$	0.2	0.3	0.1	0.4

**[解]** 下面的方法称为**矩阵法**或**逐点代入合并法**.

逐点代入:

$p_k$	0.2	0.3	0.1	0.4
$X$	-1	0	1	2
$Y = (X - 1)^2$	4	1	0	1

合并:

$Y$	0	1	4
$p_k$	0.1	0.7	0.2

## 2.5.2 连续型随机变量的函数

**[例2.5.2]** 设随机变量  $X$  有概率密度  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ . 求随机变量  $Y = 2X + 8$  的概率密度.

**[解]** 下面的方法称为**分布函数求导法**.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2X + 8 \leq Y\} = P\left\{X \leq \frac{y-8}{2}\right\} = F_X\left(\frac{y-8}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = \frac{d}{dy} \left[ F_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \right] = f_X \cdot \left(\frac{y-8}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{y-8}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \end{aligned}$$

**[注]** 已知连续型随机变量  $X$  的概率密度  $f_X(x)$  和分布函数  $F_X(x)$ , 用分布函数求导法求随机变量  $Y = g(X)$  的概率密度  $f_Y(y)$  和分布函数  $F_Y(y)$  的步骤:

① 用分布函数的定义求  $Y$  的分布函数:  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(X) \leq y} f_X(x) dx$ , 此处只需写出积分的形式, 无需计算. 若  $f_X(x)$  是分段函数, 则将积分换为  $X$  的分布函数.

② 概率密度  $f_Y(y) = F'_Y(y)$ .

**[变限积分求导法则]** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 函数  $u(x) : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, v(x) : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  都可导, 且  $a \leq u(x), v(x) \leq b$ , 则  $\left[ \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt \right]' = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$ .

**[例2.5.3]** 设随机变量  $X$  有概率密度  $f_X(x)$ . 求随机变量  $Y = X^2$  的概率密度.

**[解]** ① 因  $Y = X^2 \geq 0$ , 则  $y < 0$  时, 有  $F_Y(y) = 0$ .

②  $y \geq 0$  时,  $F_Y(y) = P\{X^2 \leq Y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ .

综上,  $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), & y \geq 0 \end{cases}$ .

因改变  $F_Y(y)$  在个别点处的函数值不改变  $f_Y(y)$ , 则无需讨论分段点处的可导性, 只需分别对各段求导, 即:

$$\begin{aligned} \text{则 } f_Y(y) &= F'_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ f_X(\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y}) \cdot (-\sqrt{y})', & y \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y})], & y \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

**[定理2.5.1]** 设随机变量  $X$  有概率密度  $f_X(x)$ . 若  $y = g(x)$  是关于  $x$  的严格单调且可导的函数, 即恒有  $g'(x) > 0$  或  $g'(x) < 0$ , 则  $Y = g(X)$  是连续型随机变量, 其概率密度  $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ , 其中  $x = h(y)$  是  $y = g(x)$  的反函数,  $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}, \beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$ .

(1)  $g'(x) > 0$  时, 有  $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot [h'(y)], & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ .

(2)  $g'(x) < 0$  时, 有  $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot [-h'(y)], & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ .

[证] 下证  $g'(x) > 0$  的情况, 此时  $\alpha = g(-\infty), \beta = g(+\infty), h'(y) > 0$ , 则  $h(y)$  严格单调增.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \leq h(y)\}.$$

①  $y \leq \alpha$  时,  $\{g(X) \leq y\}$  是不可能事件, 则  $F_Y(y) = 0$ ,

②  $y \geq \beta$  时,  $\{g(X) \leq y\}$  是必然事件, 则  $F_Y(y) = 1$ .

③  $\alpha < y < \beta$  时,  $F_Y(y) = P\{X \leq h(y)\} = F_X(h(y))$ .

$$\text{综上, } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \alpha \\ F_X(h(y)), & \alpha < y < \beta \\ 1, & y \geq \beta \end{cases} \text{ 则 } f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot h'(y), & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

[推论] 在本定理的条件下, 若  $f_X(x)$  在有限区间  $[a, b]$  以外的其他点处为 0, 且  $x \in [a, b]$  时, 有  $g'(x) > 0$  或  $g'(x) < 0$ , 则  $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ , 其中  $\alpha = \min\{g(a), g(b)\}, \beta = \max\{g(a), g(b)\}$ .

[注] 连续型随机变量的函数未必是连续型随机变量.

[例2.5.4] 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . 求证: 随机变量  $Y = aX + b$  ( $a \neq 0$ ) 服从正态分布.

$$[\text{证}] f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$y = g(x) = ax + b$ , 则  $g'(x) = a \neq 0$ , 进而  $g(x)$  在  $\mathbb{R}$  上严格单调.

$$\text{因 } g(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, g(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

$$\text{则 } \alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\} = -\infty, \beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\} = +\infty.$$

$$y = g(x) = ax + b \text{ 的反函数 } x = h(y) = \frac{y-b}{a}, \text{ 则 } h'(y) = \frac{1}{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } f_Y(y) &= f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot |a| \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot (|a| \cdot \sigma)} \exp\left(-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(|a| \cdot \sigma)^2}\right), \text{ 则 } Y \sim N(a\mu + b, (|a| \cdot \sigma)^2). \end{aligned}$$

[例2.5.5] 设随机变量  $V = A \sin \theta$ , 其中  $A$  是一个正常数, 随机变量  $\theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . 求  $V$  的概率密度.

[解] 因  $V(\theta)' = A \cos \theta > 0$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ), 则  $V(\theta)$  严格单调增, 且  $V(\theta) \in (-A, A)$ .

$$V(\theta) = A \sin \theta \text{ 的反函数 } \theta = \arcsin \frac{V}{A} \stackrel{\Delta}{=} h(V), \text{ 则 } h'(V) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - V^2}}.$$

$$\text{因 } \theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$\text{故 } f_V(V) = \begin{cases} f_\theta(h(V)) \cdot |h'(V)|, & -A < V < A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - V^2}}, & -A < V < A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

[注] 若  $\theta \sim U(0, \pi)$ , 则  $V(\theta)$  不单调, 只能用分布函数求导法求解.

