《数值分析》课程简介

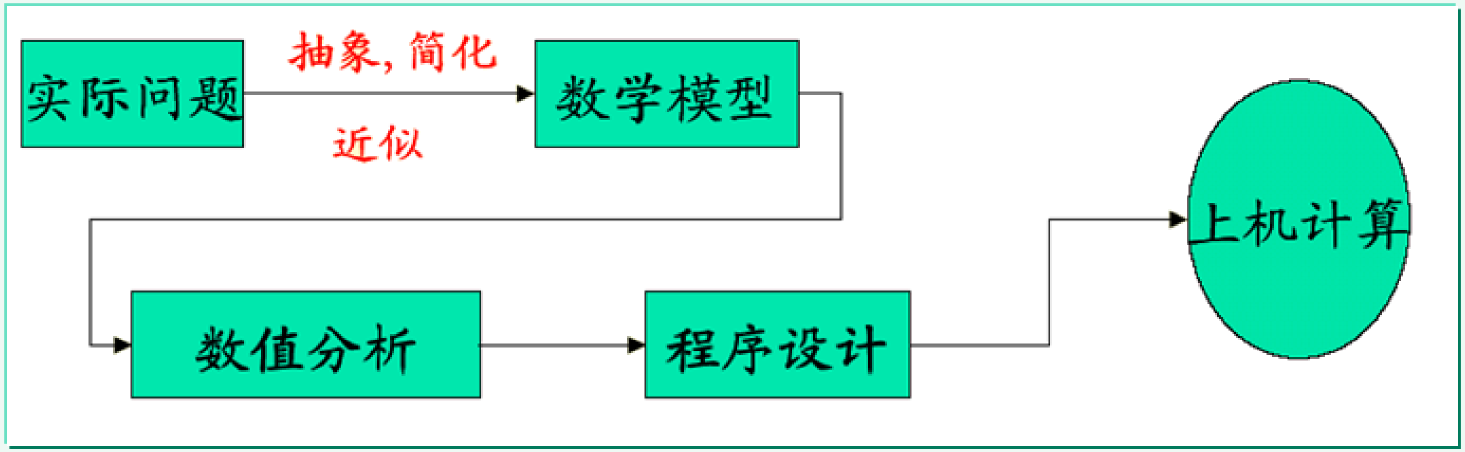
- 教材：李庆扬，易大义，王能超，数值分析（第5版），清华大学出版社
- 参考书：孙雨雷，冯君淑，数值分析（第5版，清华大学出版社）同步辅导及习题全解，中国水利水电出版社
- 先修课程：数学分析、高等代数、常微分方程

第1章 数值分析与科学计算引论

1.1 数值分析简介

- **数值分析**也称**计算方法**，是计算机出现后形成的数学科学的一个重要分支，研究用计算机求解各种数学问题的计算方法、理论以及软件实现。

计算机解决科学与工程计算问题的过程



1.1数值分析简介

数值分析课的主要内容

第1章 误差的基本概念与误差分析的方法与原则
第2章 函数插值
第3章 函数逼近
第4章 数值积分与微分
第5章 线性方程组的直接解法
第6章 线性方程组的迭代法
第7章 非线性方程/方程组数值解
第8章 矩阵的特征值与特征向量
第9章 常微分方程数值解

1.1 数值分析简介

数值分析（或科学计算）的重要性

数值分析将理论与计算密切结合，重点研究数学问题的数值算法与理论。在天气数值预报、飞机气动力设计、石油勘探、金融、生物、医学数据分析、人工智能等领域有非常广泛的应用。

与理论研究和科学实验并列为现代科学发展的三种主要手段。

1.1 数值分析简介

数值分析的学科特点

1. 面向计算机，根据计算机的特点提供实际可行的有效算法；算法只能包括加减乘除和逻辑运算，计算机才能直接处理。
2. 有可靠的理论分析，能任意逼近并达到精度要求，这需要分析算法的收敛性、稳定性和误差分析。
3. 有好的计算复杂性，包括时间和空间复杂性。
4. 有充分的数值实验来验证算法的有效性。

实用性　　理论性　　实践性

1.1数值分析简介

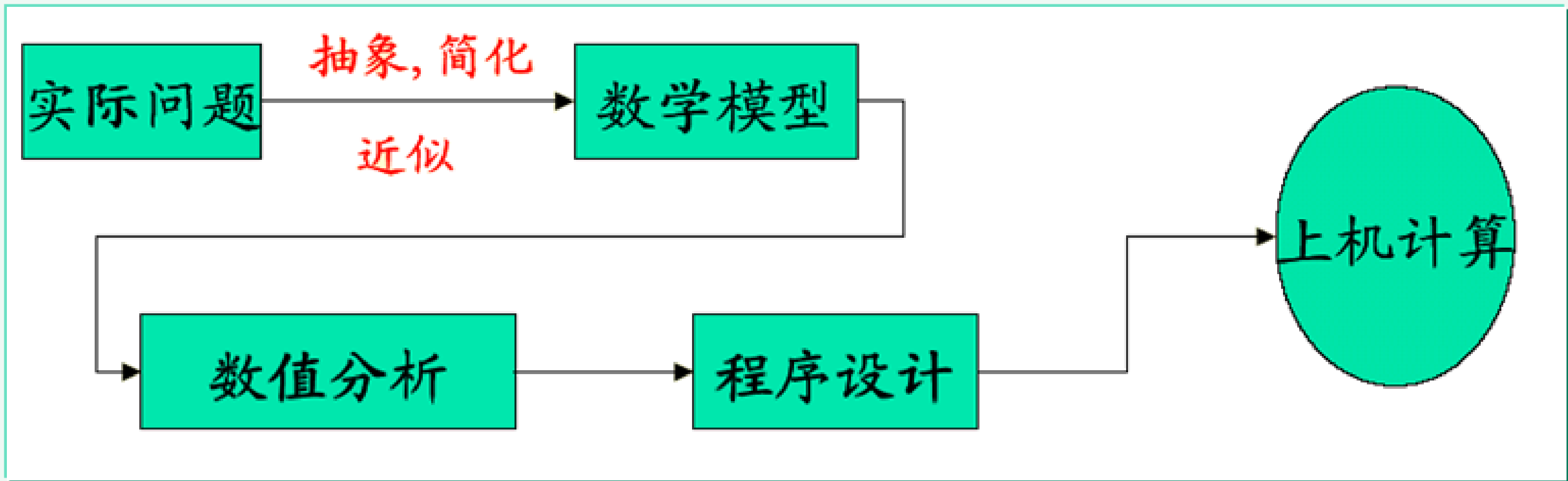
学习“计算方法”需注意如下几点

1. 掌握算法的原理和思想
2. 掌握算法的处理技巧, 步骤和计算公式
3. 重视误差分析, 理解收敛性, 稳定性分析的理论
4. 做一定数量的练习题
5. 上机实践

1.2 误差的基本理论

1． 误差的来源与分类

计算机解决科学与工程计算中的问题



其中主要会产生以下几个方面的误差：

1. 模型误差
2. 观测误差
3. 截断误差
4. 舍入误差

模型误差和观测误差

➢ **从实际问题中抽象(简化)出数学模型,模型与实际问题之间存在误差 —— 模型误差。**

例如自由落体运动，$h(t)=\frac{1}{2}gt^2$，只考虑了重力，忽略了空气阻力等因素，就是模型误差。如果模型合理，模型误差可忽略不计。如果模型误差无法忽略，就要设计更好的数学模型。

➢**模型中有许多物理量，如温度、长度、电压、电流等，通过测量得到模型中参数的值，观测产生误差—— 观测误差。**

例如，上面公式中，测量 t 时可能产生误差，就是观测误差。

方法误差和舍入误差（数值分析中要重点分析的误差）

➢ 采用数值方法求模型的近似解，数值近似解与精确解之间有误差 —— 方法误差 (截断误差)

例 $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$e^x \approx S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

此时截断误差为

$$R_n(x) = e^x - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} (0 < \theta < 1)$$

➢ **机器字长有限，数据在计算机中表示产生误差—— 舍入误差**

由于计算机的字长有限，只能对数据用有限位数存储，超过的位数四舍五入，引起舍入误差。例如计算圆面积 $A = \pi r^2$，$\pi \approx 3.1415926$

实际计算中可能有多种误差的混合

例5：近似计算 $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.747\ldots\ldots$　　$e^{-1} < \int_0^1 e^{-x^2}dx < 1$

解法之一：将 e^{-x^2} 作Taylor展开后再积分

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots\right)dx$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\times\frac{1}{5} - \frac{1}{3!}\times\frac{1}{7}}_{S_4} + \underbrace{\frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} - \cdots}_{R_4}$$

取 $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \approx 1 - 0.333 + 0.1 - 0.024 = 0.743$

则 $R_4 = \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} - \frac{1}{5!}\times\frac{1}{11} + \cdots$ 称为截断误差

由截去部分引起

这里 $|R_4| < \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} < 0.005$

由留下部分引起

计算时S_4时 | 舍入误差 | $< 0.0005\times 2 = 0.001$

$\left|计算\int_0^1 e^{-x^2}dx的总体误差\right| < 0.005 + 0.001 = 0.006$

2. 误差与有效数字

定义1 设 x 为准确值，x^* 为 x 的一个近似值，称

$$e^* = x^* - x$$

为近似值的**绝对误差**，简称**误差**.

通常准确值 x 是未知的，因此误差 e^* 也是未知的.

若能根据测量工具或计算情况估计出误差绝对值的一个上界，即

$$|e^*| = |x^* - x| \le \varepsilon^*$$

则 ε^* 叫做近似值的**误差限**，它总是正数.

例如，用毫米刻度的米尺测量一长度 x，读出和该长度接近的刻度 x^*，x^*是 x的近似值，它的误差限是 0.5mm，于是

$$|x^*-x| \le 0.5\text{mm}.$$

如读出的长度为 765mm，则有 $|765-x| \le 0.5$.

虽然从这个不等式不能知道准确的 x是多少，但可知

$$764.5 \le x \le 765.5,$$

结果说明 x在区间 $[764.5, 765.5]$内.

对于一般情形 $|x^*-x|\le \varepsilon^*$，即

$$x^*-\varepsilon^*\le x\le x^*+\varepsilon^*,$$

也可以表示为

$$x=x^*\pm\varepsilon^*.$$

需要**注意**的是**误差限的大小并不能完全表示近似值的好坏**.

例如，有两个量 $x=10\pm1$，$y=1000\pm5$，则

$$x^*=10,\quad \varepsilon_x^*=1;\quad y^*=1000,\quad \varepsilon_y^*=5.$$

虽然 ε_y^* 比 ε_x^* 大 4 倍，但

$$\varepsilon_y^*/y^*=5/1000=0.5\%$$

比

$$\varepsilon_x^*/x^*=1/10=10\%$$

要小得多，这说明 y^* 近似 y 的程度比 x^* 近似 x 的程度好.

由此可见，除考虑误差的大小外，还应考虑准确值 x 本身的大小.

把近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

称为近似值 x^* 的**相对误差**，记作 e_r^* .

实际计算中，由于真值 x 总是未知的，通常取

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

作为 x^* 的相对误差， 条件是 $e_r^* = \dfrac{e^*}{x^*}$ 较小，此时利用

$e^* = x^* - x$， 知

$$\frac{e^*}{x}-\frac{e^*}{x^*}=\frac{e^*(x^*-x)}{x^*x}$$

$$=\frac{(e^*)^2}{x^*(x^*-e^*)}$$

$$=\frac{(e^*/x^*)^2}{1-(e^*/x^*)}$$

是 e_r^* 的平方项级，故可忽略不计.

相对误差也可正可负，它的绝对值上界叫做**相对误差限**，记作 ε_r^*，即 $\varepsilon_r^*=\dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}$.

根据定义，上例中 x 与 y 的相对误差限分别为

$$\frac{\varepsilon_x^*}{|x^*|} = 10\%, \qquad \frac{\varepsilon_y^*}{|y^*|} = 0.5\%,$$

可见 y^* 近似 y 的程度比 x^* 近似 x 的程度好.

练习1 设$x > 0, x$的相对误差为δ，求ln$x$的误差。

ln$x$的误差为

$$lnx - lnx^* = ln\frac{x}{x^*} = ln\frac{x - x^* + x^*}{x^*} = ln(\delta + 1)$$

练习2 设x的相对误差为2%，求x^n的相对误差。

$$x^n - {x^*}^n \approx nx^{n-1}(x - x^*)$$ （微分中值定理）

$$\frac{x^n - {x^*}^n}{x^n} \approx \frac{nx^{n-1}(x - x^*)}{x^n} = n\frac{x - x^*}{x} = n2\%$$

当准确值 x 位数比较多时，常常按四舍五入的原则得到 x 的前几位近似值 x^*，例如

$$x = \pi = 3.14159265 \quad \cdots$$

取3位 $\quad x_3^* = 3.14, \quad \varepsilon_3^* \le 0.002,$

取5位 $\quad x_5^* = 3.1416, \quad \varepsilon_5^* \le 0.000008,$

它们的误差都不超过末位数字的半个单位，即

$$|\pi - 3.14| \le \frac{1}{2} \times 10^{-2},$$

$$|\pi - 3.1416| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}.$$

定义2 若近似值 x^*的误差限是某一位的半个单位，该位到 x^*的第一位非零数字共有 n 位，就说 x^*有 n 位**有效数字**.

表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)}), \qquad (2.1)$$

其中 $a_i (i = 1, \cdots, n)$是0到9中的一个数字，$a_1 \neq 0$，m 为整数，且

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}. \qquad (2.2)$$

按这个定义，

如取 $x^* = 3.14$ 作为 π 的近似值，x^* 就有3位有效数字，

取 $x^* = 3.1416 \approx \pi$ ， x^* 就有5位有效数字.

例1 按四舍五入原则写出下列各数具有5位有效数字的近似数：187.9325，0.03785551，8.000033，2.7182818.

按定义，各数具有5位有效数字的近似数分别是

187.93， 0.037856， 8.0000， 2.7183.

注意：

$x = 8.000033$ 的5位有效数字近似数是8.0000，而不是8，因为8只有1位有效数字.

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)}) \qquad (2.1)$$

例2 重力常数g，如果以 m/s^2 为单位，$g \approx 9.80\ \mathrm{m/s}^2$，若以km/s^{2}为单位，$g \approx 0.00980\ \ \mathrm{km/s}^2$，它们都具有3位有效数字，因为按第一种写法

$$|g - 9.80| \le \frac{1}{2} \times 10^{-2},$$

按(2.1)的表示方法，$m = 0$, $n = 3$， 按第二种写法

$$|g - 0.00980| \le \frac{1}{2} \times 10^{-5},$$

这里$m = -3, n = 3$.

至于绝对误差限，由于单位不同所以结果也不同

$$\varepsilon_1^* = \frac{1}{2} \times 10^{-2}\ \mathrm{m/s}^2, \qquad \varepsilon_2^* = \frac{1}{2} \times 10^{-5}\ \mathrm{m/s}^2,$$

但相对误差都是

$$\varepsilon_r^* = 0.005 / 9.80 = 0.00005 / 0.00980 .$$

注意相对误差与相对误差限是无量纲的，而绝对误差与误差限是有量纲的.

例2说明有效位数与小数点后有多少位数无关.

从(2.2)可得到具有 n 位有效数字的近似数 x^*，其绝对误差限为

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1},$$

在 m 相同的情况下，n 越大则 10^{m-n+1} 越小，故有效位数越多，绝对误差限越小.

$$|x - x^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}. \qquad (2.2)$$

定理1 设近似数 x^* 表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(l-1)}), \quad (2.1)'$$

其中 $a_i (i = 1, \cdots, l)$ 是0到9中的一个数字，$a_1 \neq 0$, m 为整数.

若 x^* 具有 n 位有效数字, 则其相对误差限为

$$\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)};$$

反之，若 x^* 的相对误差限 $\varepsilon_r^* \leq \dfrac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$,

则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(l-1)}), \quad (2.1)'$$

证明 由(2. 1)′ 可得

$$a_1 \times 10^m \le |x^*| < (a_1 + 1) \times 10^m,$$

当 x^*有 n 位有效数字时

$$\varepsilon_r^* = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} \le \frac{0.5 \times 10^{m-n+1}}{a_1 \times 10^m} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1};$$

反之，由

$$|x - x^*| = |x^*| \varepsilon_r^* < (a_1 + 1) \times 10^m \times \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-n+1}$$

$$= 0.5 \times 10^{m-n+1},$$

知 x^* 至少有 n 位有效数字.

定理说明，有效位数越多，相对误差限越小.

例3 要使$\sqrt{20}$的近似值的相对误差限小于0. 1%，需取几位有效数字?

设取n位有效数字， 由定理1

$$\varepsilon_r^* \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}.$$

由于$\sqrt{20} = 4.4\cdots$，知$a_1 = 4$，故只要取$n = 4$，就有

$$\varepsilon_r^* \le 0.125 \times 10^{-3} < 10^{-3} = 0.1\%,$$

即只要对$\sqrt{20}$的近似值取4位有效数字，其相对误差限就小于0. 1%. 此时由开方表得$\sqrt{20} \approx 4.472$.

3．数值运算的误差估计

两个近似数 x_1^* 与 x_2^*，其误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*)$ 及 $\varepsilon(x_2^*)$，它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别为

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*);$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx |x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*);$$

$$\varepsilon(x_1^* / x_2^*) \approx \frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2} \quad (x_2^* \neq 0).$$

一般情况下，当自变量有误差时函数值也产生误差，其误差限可利用函数的泰勒展开式进行估计.

设 $f(x)$ 是一元函数，x 的近似值为 x^*，以 $f(x^*)$ 近似 $f(x)$，其误差界记作 $\varepsilon(f(x^*))$，利用泰勒展开

$$f(x)-f(x^*)=f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2,$$

ξ 介于 x, x^* 之间，

取绝对值得

$$\left|f(x)-f(x^*)\right|\le\left|f'(x^*)\right|\varepsilon(x^*)+\frac{\left|f''(\xi)\right|}{2}\varepsilon^2(x^*).$$

假定 $f'(x^*)$ 与 $f''(x^*)$ 的比值不太大，可忽略 $\varepsilon(x^*)$ 的高阶项，于是可得计算函数的误差限

$$\varepsilon(f(x^*)) \approx \left|f'(x^*)\right|\varepsilon(x^*).$$

当 f 为多元函数，如计算 $A = f(x_1, \cdots x_n)$ 时. 如果 $x_1, \cdots, x_n$ 的近似值为 $x_1^*, \cdots, x_n^*$，则 A 的近似值为

$$A^* = f(x_1^*, \cdots x_n^*),$$

于是由泰勒展开，函数值 A^* 的误差 $e(A^*)$ 为

$$e(A^*) = A^* - A = f(x_1^*, \cdots, x_n^*) - f(x_1, \cdots, x_n)$$

$$\approx \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_1^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_k} \right) (x_k^* - x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* e_k^*,$$

于是误差限

$$\varepsilon(A^*) \approx \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* \right| \varepsilon(x_k^*); \qquad (2.3)$$

而 $A*$ 的相对误差限为

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_r(A^*) = \frac{\varepsilon(A^*)}{|A^*|} \approx \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* \right| \frac{\varepsilon(x_k^*)}{|A^*|}. \qquad (2.4)$$

例4 已测得某场地长 l 的值为 $l^* = 110\ \text{m}$，宽 d 的值为 $d^* = 80\ \text{m}$，已知 $|l - l^*| \le 0.2\text{m}, |d - d^*| \le 0.1\text{m}$. 试求面积 $s = ld$ 的绝对误差限与相对误差限.

解 因 $s = ld, \dfrac{\partial s}{\partial l} = d, \dfrac{\partial s}{\partial d} = l,$ 由

$$\varepsilon(A^*) \approx \sum_{k=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^* \right| \varepsilon(x_k^*);$$

知

$$\varepsilon(s^*) \approx \left| \left(\frac{\partial s}{\partial l} \right)^* \right| \varepsilon(l^*) + \left| \left(\frac{\partial s}{\partial d} \right)^* \right| \varepsilon(d^*),$$

其中

$$\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)^{*} = d^* = 80\ \mathrm{m},\quad \left(\frac{\partial s}{\partial d}\right)^{*} = l^* = 110\ \mathrm{m},$$

而 $\varepsilon(l^*) = 0.2\mathrm{m},\ \varepsilon(d^*) = 0.1\mathrm{m},$

于是绝对误差限

$$\varepsilon(s^*) \approx 80 \times (0.2) + 110 \times (0.1) = 27\ (\mathrm{m}^2);$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(s^*) = \frac{\varepsilon(s^*)}{|s^*|} = \frac{\varepsilon(s^*)}{l^* d^*} \approx \frac{27}{8800} = 0.31\ \%.$$

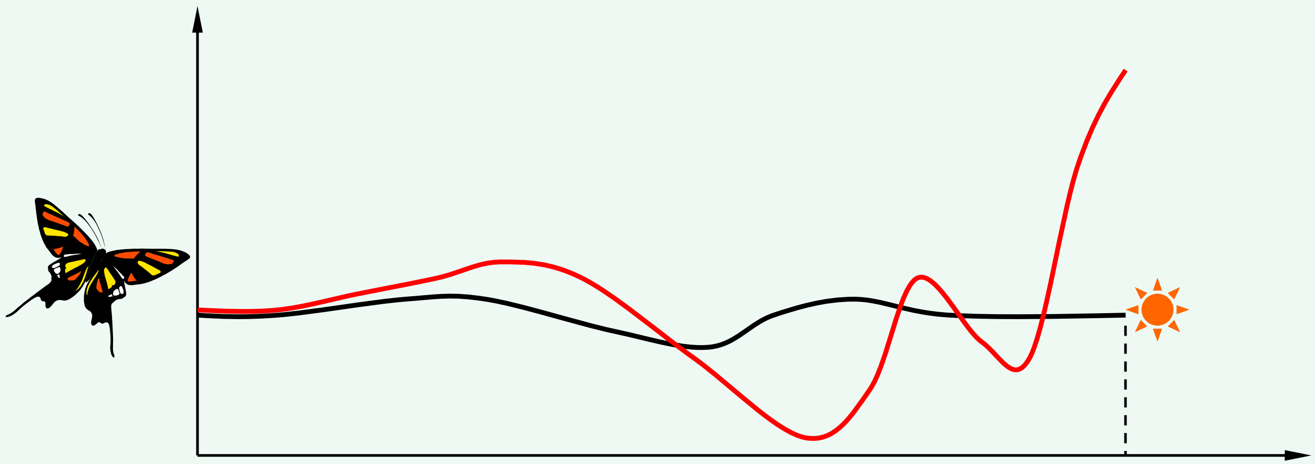
1.3 误差定性分析与避免误差危害

数值算法的稳定性

用一个算法进行计算，若原始数据有误差，它会在计算过程中传播，若原始数据的误差在计算过程中传播并使计算结果的误差增长很快，则该算法是数值不稳定。

误差的传播与积累

例：蝴蝶效应 —— 亚马逊雨林一只蝴蝶翅膀振动，也许会引起得克萨斯州的一场龙卷风？！



数值稳定性 ——数值计算过程中，当原始数据有微小扰动时，由于误差的传播和积累，可能导致计算结果的巨大变化！

例5 计算 $I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx$， $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

公式一： $I_n = 1 - n\, I_{n-1}$

注意此公式精确成立

$$I_0 = \frac{1}{e}\int_0^1 e^x dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63212056 \xlongequal{\text{记为}} I_0^*$$

则初始误差 $|E_0| = |I_0 - I_0^*| < 0.5\times 10^{-8}$

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^n \cdot e^0\, dx < I_n < \frac{1}{e}\int_0^1 x^n \cdot e^1\, dx \qquad \therefore \frac{1}{e(n+1)} < I_n < \frac{1}{n+1}$$

$$I_1^* = 1 - 1\cdot I_0^* = 0.36787944$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_{10}^* = 1 - 10\cdot I_9^* = 0.08812800$$

$$I_{11}^* = 1 - 11\cdot I_{10}^* = 0.03059200$$

$$I_{12}^* = 1 - 12\cdot I_{11}^* = 0.63289600 \; ?$$

$$I_{13}^* = 1 - 13\cdot I_{12}^* = -7.2276480 \; ??$$

$$I_{14}^* = 1 - 14\cdot I_{13}^* = 94.959424 \; ?!$$

$$I_{15}^* = 1 - 15\cdot I_{14}^* = -1423.3914 \; !!$$

What happened ?!

考察第n步的误差 $|E_n|$

$$|E_n| = |I_n - I_n^*| = |(1-nI_{n-1}) - (1-nI_{n-1}^*)| \quad = n|E_{n-1}| = \cdots = n!|E_0|$$

可见初始的小扰动 $|E_0| < 0.5\times10^{-8}$ 迅速积累, 误差呈递增走势。

这一算法是不稳定的算法

公式二： $I_n = 1 - n\,I_{n-1} \quad \Rightarrow \quad I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n)$

方法：先估计一个I_N, 再反推要求的I_n ($n << N$)。

$$\because \ \frac{1}{e(N+1)} < I_N < \frac{1}{N+1}$$

注意此公式与公式一在理论上等价

可取 $I_N^* = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e(N+1)} + \frac{1}{N+1}\right] \approx I_N$

当 $N \to +\infty$ 时, $|E_N| = |I_N - I_N^*| \to 0$

取 $I_{15}^{*}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e\cdot 16}+\frac{1}{16}\right]\approx 0.042746233$

$$\Rightarrow I_{14}^{*}=\frac{1}{15}(1-I_{15}^{*})\approx 0.063816918$$

$$I_{13}^{*}=\frac{1}{14}(1-I_{14}^{*})\approx 0.066870220$$

$$I_{12}^{*}=\frac{1}{13}(1-I_{13}^{*})\approx 0.071779214$$

$$I_{11}^{*}=\frac{1}{12}(1-I_{12}^{*})\approx 0.077351732$$

$$I_{10}^{*}=\frac{1}{11}(1-I_{11}^{*})\approx 0.083877115$$

$$\vdots$$

$$I_{1}^{*}=\frac{1}{2}(1-I_{2}^{*})\approx 0.36787944$$

$$I_{0}^{*}=\frac{1}{1}(1-I_{1}^{*})\approx 0.63212056$$

考察反推一步的误差：

$$|E_{N-1}| = \left|\frac{1}{N}(1-I_N) - \frac{1}{N}(1-I_N^*)\right| = \frac{1}{N}|E_N|$$

以此类推，对 $n < N$ 有：

$$|E_n| = \frac{1}{N(N-1)\dots(n+1)}|E_N|$$

误差逐步递减, 这样的算法称为稳定的算法

在我们今后的讨论中，误差将不可回避，

算法的稳定性会是一个非常重要的话题。

减少误差的若干原则

1. 避免两个相近数相减

例：$a_1 = 0.12345$，$a_2 = 0.12346$，各有5位有效数字。

而 $a_2 - a_1 = 0.00001$，只剩下1位有效数字。

🕶 几种经验性避免方法：

$$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{x}};\qquad \ln(x+\varepsilon)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right);$$

当 $|x| << 1$ 时：

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2};$$

$$e^x - 1 = x\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\ldots\right)$$

2. 避免除数的绝对值远小于被除数的绝对值

$$\eta\left(\frac{x}{y}\right) \approx \frac{|x^*|\eta(y)+|y^*|\eta(x)}{|y^*|^2}$$，当$|x|>>|y|$时，舍入误差会扩大。

例：$\frac{2.718}{0.001}=2718.2$　当分母y作微小变化：0.0001，则

$$\frac{2.7182}{0.0011}=2471.1$$

计算结果对y的扰动很敏感，而y通常是近似值，所以计算结果不可靠；另外，很小的数作除数有时还会造成计算机的溢出而停机。

3. 避免大数吃小数

例：用单精度计算 $x^2-(10^9+1)x+10^9=0$ 的根。

精确解为 $x_1=10^9$，$x_2=1$

算法1：利用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

在计算机内，10^9存为0.1×10^{10}，1存为0.1×10^1。做加法时，两加数的指数先向大指数对齐，再将浮点部分相加。即1的指数部分须变为10^{10}，则：$1 = 0.0000000001 \times 10^{10}$，取单精度时就成为：

$10^9+1=0.10000000\times10^{10}+0.00000000\times10^{10}=0.10000000\times10^{10}$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=10^9,\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

大数吃小数

✍算法2：先解出 $x_1=\dfrac{-b-sign(b)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=10^9$

再利用 $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\ \Rightarrow\ x_2=\dfrac{c}{a\cdot x_1}=\dfrac{10^9}{10^9}=1$

注：求和时从小到大相加，可使和的误差减小。

例：按从小到大、以及从大到小的顺序分别计算

$$1+2+3+\ldots+40+10^9$$

4. 先化简再计算，减少步骤，避免误差积累。

一般来说，计算机处理下列运算的速度为 $(+,-)>(\times,\div)>(\exp)$

5. 选用稳定的算法。

评价算法的准则：复杂度、精度、稳定性

1.4 数值计算方法中常采用的处理方法

近似替代

离散化

递推化/迭代

例1 计算无理数e的近似值.

把不能用有限次运算求解的问题,简化为用有限次运算求解的问题

解: $\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots +$

$\therefore e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

这是一个无限过程,计算机无法实现. 一般,只能算出前有限项的和,作为其近似值

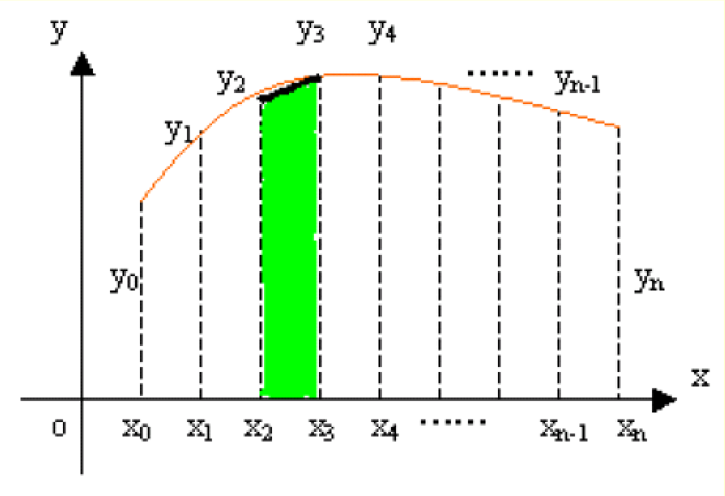
$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

由Taylor公式,由此产生的误差: $\left|R_n\right| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$

$$\because e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, (0 < \theta < 1)$$

离散化---把求连续变量的问题转化为求离散变量的问题

例2 计算定积分 $I=\int_a^b f(x)dx$



I为如图所示的曲边梯形的面积，这个连续的问题，无法在计算机上计算.

一般，可以如下计算:

1. n等分[a, b]，$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b, y_i=f(x_i), i=0,1,\ldots n.$

2. 用n个小梯形的面积之和近似代替曲边梯形的面积

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+\ldots+y_{n-1}]$$

递推化(迭代法)——复杂的计算归结为简单过程的多次重复，易于用循环结构来编代码实现。

例 **计算代数多项式值的秦九韶(中国宋代数学家)算法**

设有代数多项式$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

构造递推算法:

$$P_n(x)=(a_nx+a_{n-1})x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

令 $u_0=a_n,$

$u_1=a_nx+a_{n-1}=u_0x+a_{n-1},$

$$P_n(x)=u_1x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$=(u_1x+a_{n-2})x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_1x+a_0$$

令 $u_2=u_1x+a_{n-2}$

$$P_n(x)=(u_2x+a_{n-3})x^{n-3}+a_{n-4}x^{n-4}+\cdots+a_1x+a_0=\cdots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_0=a_n, \\ u_k=u_{k-1}x+a_{n-k}, k=1,2,\ldots,n \\ P_n(x)=u_n \end{array}}$$

作业：19页，习题 4，5，9，10，14