

形式语言与自动机期末速通

1. 绪论

1.1 集合

1.1.1 对称差

[定义1.1.1] 对集合 A 和集合 B ,称属于 A 但不属于 B 的元素、属于 B 但不属于 A 的元素组成的集合为 A 与 B 的**对称差**,记作 $A \oplus B$,即 $A \oplus B = \{a \mid (a \in A \wedge a \notin B) \vee (a \notin A \wedge a \in B)\}$.

[定理1.1.1] [对称差的性质] 对集合 A 和 B , $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

1.1.2 Cartesian积

[定义1.1.2] 集合 A 与集合 B 的**Cartesian积**是一个集合,该集合包含所有的有序数对 (a, b) ,其中 $a \in A, b \in B$.集合 A 与集合 B 的Cartesian积记作 $A \times B$,即 $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

[例1.1.1] 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$,集合 $B = \{r, y, b\}$,则它们的Cartesian积:

$$A \times B = \{(1, r), (1, y), (1, b), (2, r), (2, y), (2, b), (3, r), (3, y), (3, b)\}.$$

1.1.3 幂集

[定义1.1.3] 集合 A 的**幂集**是一个集合,该集合由 A 的所有子集组成,记作 2^A ,即 $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$.

[例1.1.2] 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 的幂集:

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

1.2 关系

1.2.1 二元关系

[定义1.2.1] 对集合 A 和集合 B ,任意的集合 $R \subseteq A \times B$ 称为 A 到 B 的一个**二元关系**,其中 A 称为**定义域**, B 称为**值域**, $(a, b) \in R$ 可表示为 aRb .特别地, $A = B$ 时,称 R 是 A 上的二元关系.

[例1.2.1] 对集合 $A = \{1, 3, 6\}$ 和集合 $B = \{2, 5, 7\}$, "小于"的二元关系:

$$R_{<} = \{(1, 2), (1, 5), (1, 7), (3, 5), (3, 7), (6, 7)\}.$$

1.2.2 等价关系

[定义1.2.2] 二元关系的三岐性是指自反性、对称性、传递性,称具有三岐性的二元关系为**等价关系**.等价关系划分了集合,集合 S 上的等价关系 R 确定了 S 的一个等价分类.

具体地,对集合 A 上的二元关系 R :

- (1)自反性:若 $a \in A$,则 $(a, a) \in R$.
- (2)对称性:若 $a, b \in A$ 且 $(a, b) \in R$,则 $(b, a) \in R$.
- (3)传递性:若 $a, b, c \in A$,且 $(a, b), (b, c) \in R$,则 $(a, c) \in R$.

[定义1.2.3] 称对集合 S 划分 S_1, \dots, S_n, \dots 为 S 关于等价关系 R 的**等价划分**,如果满足下列性质,其中每个 S_i ($i = 1, 2, \dots$)称为一个**等价类**.

- (1) $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$.
- (2) $S_i \cap S_j = \emptyset$ ($i \neq j$).
- (3)对任一等价类中的两元素 a, b ,有 aRb 恒成立.
- (4)对不同等价类中的两元素 a, b ,有 aRb 恒不成立.

[定义1.2.4] 等价关系 R 将集合 S 划分成的等价类的个数称为 R 在 S 上的**指数**.若 R 将 S 划分为有穷多个等价类,则称 R 有**有穷指数**;若 R 将 S 划分为无穷多个等价类,则称 R 有**无穷指数**.

1.2.3 关系的合成

[定义1.2.5] 对集合 A 、集合 B 和集合 C ,设 $R_1 \subseteq A \times B$ 是 A 到 B 的二元关系, $R_2 \subseteq B \times C$ 是 B 到 C 的二元关系,则二元关系 R_1 与二元关系 R_2 的**合成** $R_1 R_2$ 是 A 到 C 的二元关系,即 $R_1 R_2 = \{(a, c) \mid \exists (a, b) \in R_1, (b, c) \in R_2\}$.

[例1.2.2]

- (1)设 R_1 为"父子关系", R_2 为"父女关系",则它们的合成 $R_1 R_2$ 为"祖孙女关系".
- (2)设集合 $R_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$,集合 $R_2 = \{(a, 4), (c, 5)\}$,则它们的合成: $R_1 R_2 = \{(1, 4), (3, 5)\}$.

1.2.4 关系的闭包

[定义1.2.6] 设 P 是关于关系的性质的集合,关系 R 的 **P 闭包**是包含 R 且有 P 中所有性质的最小关系.

[定义1.2.7] 关系 R 的**正闭包** R^+ 满足如下三个性质:

- (1) $R \subset R^+$.
- (2)若 $(a, b), (b, c) \in R^+$,则 $(a, c) \in R^+$.
- (3)除(1)(2)外, R^+ 不再包含其他元素.

[定义1.2.8] 有传递性的闭包称为**传递闭包**,如 R^+ .

[定理1.2.1] 对集合 S 上的二元关系 R ,有:

- (1) $R^+ = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$.
- (2) S 为有限集时,有 $R^+ = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^{|S|}$.

[定义1.2.9] 关系 R 的Kleene闭包 R^* 满足如下三个性质:

- (1) $R^0 \subseteq R^*, R \subseteq R^*$.
- (2) 若 $(a, b), (b, c) \in R^*$, 则 $(a, c) \in R^*$.
- (3) 除(1)(2)外, R^+ 不再包含其他元素.

[定义1.2.10] 有自反性、传递性的闭包称为**自反传递闭包**,如 R^* .

[定理1.2.2] 对集合 S 上的二元关系 R ,有:

- (1) $R^* = R^0 \cup R^+ = R^0 \cup R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$.
- (2) S 为有限集时,有 $R^* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup \dots \cup R^{|S|}$.

[例1.2.3] 设 $R_1 = \{(a, b), (c, d), (b, d), (b, b), (d, e)\}$ 和 $R_2 = \{(a, a), (b, c), (d, c), (e, d), (c, a)\}$ 是集合 $S = \{a, b, c, d, e\}$ 上的二元关系.

$$R_1 R_2 = \{(a, c), (c, c), (b, c), (d, d)\}.$$

$$R_2 R_1 = \{(a, b), (c, b), (b, d), (d, d), (e, e)\}.$$

$$R_1^+ = \{(a, b), (c, d), (b, d), (b, b), (d, e), (a, d), (c, e), (b, e), (a, e)\}, \text{即抄一遍 } R_1 \text{ 后补上由传递性生成的元素.}$$

$$R_1^* = \{(a, b), (c, d), (b, d), (b, b), (d, e), (a, d), (c, e), (b, e), (a, e), (a, a), (c, c), (d, d), (e, e)\},$$

即抄一遍 R_1^+ 后补上由自反性生成的元素.

1.3 递归定义与归纳证明

[例1.3.1] 对集合 S 上的二元关系 R ,定义 R 的 n 次幂 R^n 为:

- (1) $R^0 = \{(a, a) \mid a \in S\}$.
- (2) $R^i = R^{i-1} R \ (i \geq 1)$.

[注] 注意(2)中等式右边 R^{i-1} 在前.

[例1.3.2] 求证:对有穷集 A ,有 $|2^A| = 2^{|A|}$.

[证]

- (1) 基础: $|A| = 0$, 即 $A = \emptyset$ 时, 有 $|2^A| = |\{\emptyset\}| = 1$.
- (2) 归纳: 设 $|A| = n \ (n \geq 0)$ 时结论成立, 下证 $|A| = n + 1$ 时结论成立.

设 $|A| = n$ 时的幂集为 $2^B, |A| = n + 1$ 时新加入的元素为 a ,

则 $2^A = 2^B \cup \{C \cup \{a\} \mid C \in 2^B\}$, 其中 $2^B \cap \{C \cup \{a\} \mid C \in 2^B\} = \emptyset$.

故 $|2^A| = |2^B| + |\{C \cup \{a\} \mid C \in 2^B\}| = |2^B| + |2^B| = 2 \cdot |2^B| = 2 \cdot 2^{|B|} = 2^{|B|+1} = 2^{|A|}$.

(3)由归纳法原理:结论对任意有穷集成立.

1.4 语言

[定义1.4.1] 一个语言的**字母表**是一个非空有穷集,记作 Σ ,其中的元素称为字母表的一个**字母**或**符号**或**字符**.字符由两个特性:①整体性,又称不可分割性;②可辨认性,又称可区分性.

[注] 一般用小写字母中较靠前的字母表示字母表中的字母,如 a, b, c, \dots .

[例1.4.1]

(1) \emptyset 不是字母表,因为不满足非空性.

(2)集合 $\{a, b, a, c\}$ 不是字母表,因为不满足可区分性.

(3)集合 $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ 不是字母表,因为不满足有穷性.

[定义1.4.2] 对两个字母表 Σ_1 和 Σ_2 ,定义它们的**乘积** $\Sigma_1 \Sigma_2 = \{ab \mid a \in \Sigma_1, b \in \Sigma_2\}$.

[例1.4.2]

(1) $\{0, 1\}\{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}$.

(2) $\{0, 1\}\{a, b, c, d\} = \{0a, 0b, 0c, 0d, 1a, 1b, 1c, 1d\}$.

(3) $\{aa, ab, bb\}\{0, 1\} = \{aa0, aa1, ab0, ab1, bb0, bb1\}$.

[定义1.4.3] 对字母表 Σ ,定义其 **n 次幂**:

(1) $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$,其中 ε 由 Σ 中的0个字符组成,即空串.

(2) $\Sigma^n = \Sigma^{n-1} \Sigma$.

[注] 注意(2)中等式右边 Σ^{n-1} 在前.

[定义1.4.4] 对字母表 Σ ,定义其**正闭包** $\Sigma^+ = \{x \mid x \text{ 是 } \Sigma \text{ 中的至少一个字符连接而成的字符串}\}$,定义其**Kleene闭包** $\Sigma^* = \{x \mid x \text{ 是 } \Sigma \text{ 中的若干个(含0个)字符连接而成的字符串}\}$.

[定理1.4.1] 对字母表 Σ ,

(1)其正闭包 $\Sigma^+ = \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \dots \cup \Sigma^n \cup \dots$.

(2)其Kleene闭包 $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^+ = \Sigma^0 \cup \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \dots \cup \Sigma^n \cup \dots$.

[例1.4.3]

(1) $\{0, 1\}^+ = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \dots\}$, 即所有非空二进制串.

$\{0, 1\}^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \dots\}$, 即所有二进制串(含空串).

(2) $\{a, b, c, d\}^+ = \{a, b, c, d, aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, \dots\}$.

$\{a, b, c, d\}^* = \{\varepsilon, a, b, c, d, aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, \dots\}$.

[定义1.4.5] 对字母表 Σ , 称 $\forall x \in \Sigma^*$ 为 Σ 上的一个**句子**, 又称**字**、**(字符、符号)行**、**(字符、符号)串**. 两句子相等当且仅当它们对应位置上的字符都相等.

[注] 一般用小写字母中较靠后的字母表示字母表上的句子, 如 x, y, z, \dots .

[定义1.4.6] 对句子 $x, y \in \Sigma^*$, 句子 x, y 的**并置**(又称**连结**)是由串 x 直接相接串 y 所组成的字符串, 记作 xy .

[定义1.4.7] 对句子 $x, y \in \Sigma^*$ 和字母 $a \in \Sigma$, 句子 xay 中的 a 称为 a 在该句子中的一个**出现**. 特别地, $x = \varepsilon$ 时, a 的出现称为该字符串的**首字母**; $y = \varepsilon$ 时, a 的出现称为该字符串的**尾字母**. 对句子 $x \in \Sigma^*$, 称其中字母出现的总个数为该句子的**长度**, 记作 $|x|$. 特别地, 长度为0的句子称为**空句子**, 记作 ε .

[注] $\{\varepsilon\} \neq \emptyset$.

[定义1.4.8] 定义句子 $x \in \Sigma^*$ 的 **n 次幂**:

(1) $x^0 = \varepsilon$.

(2) $x^n = x^{n-1}x$.

[例1.4.4] 对句子 $x = 001$,

(1) $x^0 = \varepsilon$.

(2) $x^4 = 001001001001$.

[定义1.4.8] 设句子 $x, y, z \in \Sigma^*$, 其中 $x = yz$.

(1) 称 y 为 x 的**前缀**. 特别地, 若 $z \neq \varepsilon$, 则称 y 为 x 的**真前缀**.

(2) 称 z 为 x 的**后缀**. 特别地, 若 $y \neq \varepsilon$, 则称 z 为 x 的**真后缀**.

[例1.4.5] 对句子 $abaabb \in \{a, b\}^*$,

(1) 前缀: $\varepsilon, a, ab, aba, abaa, abaab, abaabb$.

真前缀: $a, ab, aba, abaa, abaab, abaabb$.

(2) 后缀: $\varepsilon, b, bb, abb, aabb, baabb, abaabb$.

真后缀: $b, bb, abb, aabb, baabb, abaabb$.

[定义1.4.9] 设句子 $w, x, y, z \in \Sigma^*$.若 $w = xyz$,则称 y 为 w 的**子串**.

[定义1.4.10] 对字母表 Σ ,称 $L \subset \Sigma^*$ 为 Σ 上的一个**语言**,称 $x \in L$ 为 L 中的一个**句子**.

[定义1.4.11] 对语言 $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ 和语言 $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$,定义它们的**乘积**为语言 $L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}$,它是字母表 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 上的语言.

[定义1.4.12] 对语言 $L \in \Sigma^*$,定义 L 的 n 次幂:

(1) $n = 0$ 时, $L^0 = \{\varepsilon\}$.

(4) $n \geq 1$ 时, $L^n = L^{n-1}L$.

[注] 注意(2)中等式右边 L^{n-1} 在前.

[定义1.4.13] 对语言 $L \in \Sigma^*$,定义:

(1)其正闭包 $L^+ = L \cup L^2 \cup \dots \cup L^n \cup \dots$.

(4)其Kleene闭包 $L^* = L^0 \cup L^+ = L^0 \cup L \cup L^2 \cup \dots \cup L^n \cup \dots$.

[例1.4.6] 下列集合都是字母表 $\{0, 1\}$ 上的语言:

(1) $\{0, 1\}$.

(2) $\{0, 1, 00, 11\}$.

(3) $\{00, 11\}^*$.

(4) $\{0\}\{0, 1\}^*\{1\}$.

[例1.4.7] 考察下列字母表 $\Sigma = \{0, 1\}$ 上的语言:

(1) $L_1 = \{0, 1\}$.

(2) $L_2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

(3) $L_3 = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\} = \Sigma^+$.

(4) $L_4 = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\} = \Sigma^*$.

(5) $L_5 = \{0^n \mid n \geq 1\}$.

(6) $L_6 = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$.

(7) $L_7 = \{1^n \mid n \geq 1\}$.

(8) $L_8 = \{0^n 1^m \mid n, m \geq 1\}$.

(9) $L_9 = \{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 1\}$.

(10) $L_{10} = \{0^n 1^m 0^k \mid n, m, k \geq 1\}$.

(11) $L_{11} = \{x \mid x \in \Sigma^+ \text{ 且 } x \text{ 中 } 0 \text{ 和 } 1 \text{ 的个数相同}\}$.

[注] ①上述语言都是 L_4 的子集,也称**子语言**.

- ② L_1, L_2 都是有穷语言, 其他的语言都是无穷语言.
- ③ L_1 是 Σ 上所有长度为 1 的句子组成的语言.
- ④ L_2 是 Σ 上所有长度为 2 的句子组成的语言.
- ⑤ $L_5 L_7 \neq L_6$, 但 $L_5 L_7 = L_8$, 即不同语言中的 n 可能不同.
- ⑥ $L_6 \subseteq L_5 L_7, L_9 \subseteq L_{10}$.
- ⑦ L_{11} 不要求所有 0 在所有 1 之前, 故 $L_6 \subset L_{11}$.

[例 1.4.8] 设字母表 $\Sigma = \{0, 1\}$, 写出下列语言的形式表示.

- (1) 所有以 0 开头的串: $\{0\}\{0, 1\}^*$.
- (2) 所有以 11 开头、以 11 结尾的串: $\{11\}\{0, 1\}^*\{11\} \cup \{11, 111\}$.
- 注意写出语言的乘积的表示后需检查是否有遗漏的串.
- (3) 所有包含子串 001 的串: $\{0, 1\}^*\{001\}\{0, 1\}^*$.
- (4) 所有正数第 10 个字符是 0 的串: $\{0, 1\}^9\{0\}\{0, 1\}^*$.
- (5) 所有不包含连续 3 个 0 的串: $\{1, 01, 001\}^* \cup \{10, 100\}$.
-
-