大家好，这篇是有关台大机器学习课程作业三的详解，题目同Coursera。

我的github地址：https://github.com/Doraemonzzz

个人主页：http://doraemonzzz.com/

作业地址:
https://www.csie.ntu.edu.tw/~htlin/course/ml15fall/

参考资料:
https://blog.csdn.net/a1015553840/article/details/51085129
http://www.vynguyen.net/category/study/machine-learning/page/6/
http://book.caltech.edu/bookforum/index.php
http://beader.me/mlnotebook/

Problem 1

$$E_{\mathcal{D}}[E_{in}(w_{lin})] = \sigma^2(1-\frac{d+1}{N})$$

这个结论的理论推导可以参考我写的Learning from data习题Exercise 3.3,3.4。

对于此题来说，直接把N解出来即可

$$N = \frac{d+1}{1-\frac{E_{\mathcal{D}}[E_{in}(w_{lin})]}{\sigma^2}}$$

```
def f(d,delta,Ein):
    return (d+1)/(1-Ein/(delta**2))

print(f(8,0.1,0.008))
```

```
44.99999999999996
```

所以$N\ge 45$即可

Problem 2

这题实际上是Learning from data Exercise 3.3以及Problem 3.10的结论，这里一并给出。

(1)H是对称矩阵

(2)$H^K = H$ (K为任意正整数)

(3)H的特征值$\in \{0,1\}$

(4)H是半正定矩阵

(5)$trace(H)=d+1$

(6)H有$d+1$个特征值为1

(1)

$$\begin{aligned}H^T&=(X(X^TX)^{-1}X^T)^T\\&=X((X^TX)^{-1})^TX^T\\&=X((X^TX)^T)^{-1}X^T\\&=X(X^TX)^{-1}X^T\\&=H\end{aligned}$$

(2)直接验证即可，先来看$K=2$的情形

$$\begin{aligned}H^2&=X(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1}X^T\\&=X(X^TX)^{-1}X^T\\&=H\end{aligned}$$

那么对于任意K

$$\begin{aligned}H^K&=H^2H^{K-2}\\&=HH^{K-2}\\&=H^{K-1}\\&=\ldots\\&=H\end{aligned}$$

(3)因为$H^K=H$，所以对于H的任意特征值λ

$$\lambda^K=\lambda\text{恒成立}$$
$$\lambda=0\text{或}1$$

(4)H为对称矩阵且特征值$\in\{0,1\}$，所以由线性代数知识可知H半正定

(5)利用迹(trace)的性质$trace(AB)=trace(BA)$

$$\begin{aligned}trace(H)&=trace(X(X^TX)^{-1}X^T)\\&=trace(X^TX(X^TX)^{-1})\\&=trace(I_{d+1})(\text{注意}H^TH\text{为}(d+1)\times(d+1)\text{阶矩阵})\\&=d+1\end{aligned}$$

(6)我们知道对称矩阵必然相似于对角阵，所以存在可逆矩阵P，使得$H=P^{-1}AP$，那么

$$d+1=trace(H)=trace(P^{-1}AP)=tr(PP^{-1}A)=tr(A)$$

而A为由$0,1$构成的对角阵(因为A和H相似且H的特征值$\in\{0,1\}$)，所以H一共有$d+1$个特征值为1

有了以上结论，看此题的选项就很轻松了。

(a),(d),(e)成立，(c)错误，稍微要看一下的是(b)，我们知道H的特征值$\in\{0,1\}$，所以H不一定可逆，因此(b)也错误。

Problem 3

先对原式进行变形

$$[\![y \neq sign(w^T x)]\!] \Longleftrightarrow [\![y^2 \neq ysign(w^T x)]\!] \Longleftrightarrow [\![1 \neq sign(yw^T x)]\!]$$

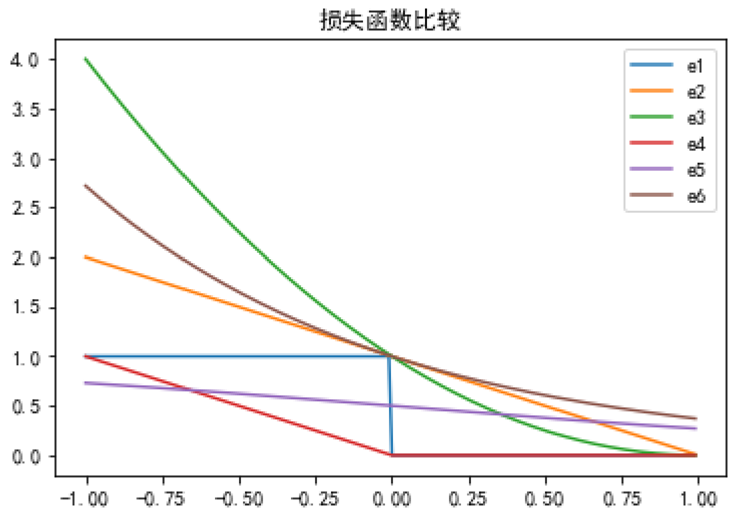
令$s = yw^T x$，所以几个误差分别可以写成

$$\begin{gathered} err_1 = [\![sign(s) \neq 1]\!] \\ err_2 = max(0, 1 - s) \\ err_3 = (max(0, 1 - s))^2 \\ err_4 = (max(0, -s)) \\ err_5 = \theta(-s) = \frac{e^{-s}}{1 + e^{-s}} = \frac{1}{1 + e^s} \\ err_6 = e^{-s} \end{gathered}$$

接着作图。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei'] #用来正常显示中文标签
plt.rcParams['axes.unicode_minus']=False #用来正常显示负号

#构造损失函数
def e1(s):
    if s>0:
        return 0
    else:
        return 1

def e2(s):
    return max(0,1-s)

def e3(s):
    t=max(0,1-s)
    return t**2

def e4(s):
    return max(0,-s)

def e5(s):
    return 1/(1+np.exp(s))

def e6(s):
    return np.exp(-s)

x=np.arange(-1,1,0.01)

y1=[e1(i) for i in x]
y2=[e2(i) for i in x]
y3=[e3(i) for i in x]
y4=[e4(i) for i in x]
y5=[e5(i) for i in x]
y6=[e6(i) for i in x]
```

```
plt.plot(x,y1,label='e1')
plt.plot(x,y2,label='e2')
plt.plot(x,y3,label='e3')
plt.plot(x,y4,label='e4')
plt.plot(x,y5,label='e5')
plt.plot(x,y6,label='e6')
plt.legend()
plt.title('损失函数比较')
plt.show()
```



因此e2,e3,e6,即(a),(b),(e)为$[\![y \neq sign(w^T x)]\!]$的上界

Problem 4

这题要找哪些函数不是处处可导，(d),(e)显然是处处可导的，因为$f(s) = max\{0, s\}$在原点不可导，所以(a),(c)不可导，唯一有点疑问的是(b)，我们来看下$f(s) = (max(0, s))^2$

$$f(s) = \begin{cases} s^2 (s \geq 0) \\ 0 (s < 0) \end{cases}$$

显然这个函数也是可导的，所以由复合函数的性质可知(b)也可导。因此这题选(a)(c)

Problem 5

$err(w) = max(0, -y_n w^T x_n)$的意思是对于分类正确的点$err(w) = 0$，对于分类不正确的点$err(w) = -y_n w^T x_n$，我们来求梯度(不考虑不可导点)

$$\frac{\partial(-y_n w^T x_n)}{\partial w_i} = -y_n x_n^{(i)} (x_n^{(i)}\text{表示}x_n\text{的第}i\text{个分量})$$

$$\nabla(-y_n w^T x_n) = -y_n x_n$$

所以对于分类错误的点(x_n, y_n)，根据SGD,更新规则为

$$w(t+1) = w(t) + \eta(-\nabla(-y_n w^T x_n)) = w(t) + \eta y_n x_n$$

所以PLA可以被看成$err(w) = max(0, -y_n w^T x_n)$的SGD

Problem 6

$$\frac{\partial E(u,v)}{\partial u}|_{(u,v)=(0,0)} = e^u + ve^{uv} + 2u - 2v - 3|_{(u,v)=(0,0)} = -2$$
$$\frac{\partial E(u,v)}{\partial v}|_{(u,v)=(0,0)} = 2e^{2v} + ue^{uv} - 2u + 4v - 2|_{(u,v)=(0,0)} = 0$$

所以

$$\nabla E(u,v) = (-2,0)^T$$

Problem 7

编程处理即可,需要利用刚刚的偏导数公式，答案为2.82500035668

```
import numpy as np

def E(u,v):
    return np.exp(u)+np.exp(2*v)+np.exp(u*v)+u*u-2*u*v+2*(v*v)-3*u-2*v

def partial(point):
    u=point[0]
    v=point[1]
    pu=np.exp(u)+v*np.exp(u*v)+2*u-2*v-3
    pv=2*np.exp(2*v)+u*np.exp(u*v)-2*u+4*v-2
    return np.array([pu,pv])

point=np.zeros(2)
eta=0.01

for i in range(5):
    point-=eta*partial(point)

print(E(point[0],point[1]))
```

```
2.82500035668
```

Problem 8

这题需要用到多元泰勒公式，可以参考维基百科

$$b_{uu} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial E(u,v)}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial(e^u + ve^{uv} + 2u - 2v - 3)}{\partial u} = \frac{1}{2}(e^u + v^2e^{uv} + 2)$$
$$b_{vv} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial E(u,v)}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial(2e^{2v} + ue^{uv} - 2u + 4v - 2)}{\partial v} = \frac{1}{2}(4e^{2v} + u^2e^{uv} + 4)$$
$$b_{uv} = \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial(e^u + ve^{uv} + 2u - 2v - 3)}{\partial v} = (e^{uv} + uve^{uv} - 2)$$
$$b_u = \frac{\partial E(u,v)}{\partial u} = e^u + ve^{uv} + 2u - 2v - 3$$
$$b_v = \frac{\partial E(u,v)}{\partial v} = 2e^{2v} + ue^{uv} - 2u + 4v - 2$$
$$b = E(u,v)$$

将$u=v=0$带入可得

$$
\begin{aligned}
b_{uu}&=\frac{3}{2}\\
b_{vv}&=4\\
b_{uv}&=-1\\
b_u&=-2\\
b_v&=0\\
b&=3
\end{aligned}
$$

Problem 9

由题设我们知道Hessian矩阵正定，此处的Hessian矩阵为

$$
\nabla^2 E(u,v)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial v^2}\end{bmatrix}
$$

那么最优方向为

$$
\begin{bmatrix}\Delta u^*\\ \Delta v^*\end{bmatrix}=-(\nabla^2 E(u,v))^{-1}\nabla E(u,v)
$$

一般性的结论可以参考凸优化的课本，关于这题可以简单证明下。

现在要对$\hat{E}_2(\Delta u,\Delta v)=b_{uu}(\Delta u)^2+b_{vv}(\Delta v)^2+b_{uv}(\Delta u)(\Delta v)+b_u\Delta u+b_v\Delta v+b$求最小值，令$\Delta u=t,\Delta v=s$

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_2(\Delta u,\Delta v)&=b_{uu}(\Delta u)^2+b_{vv}(\Delta v)^2+b_{uv}(\Delta u)(\Delta v)+b_u\Delta u+b_v\Delta v+b\\
&=b_{uu}t^2+b_{vv}(s^2)+b_{uv}st+b_ut+b_vs+b
\end{aligned}
$$

由Hessian矩阵的正定性我们知道

$$
\begin{aligned}
2b_{uu}&=\frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u^2}>0\\
2b_{vv}&=\frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial v^2}>0\\
\frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u^2}\frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u^2}-(\frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u\partial v})^2&=4b_{uu}b_{uv}-b_{uv}^2>0
\end{aligned}
$$

所以可以对$\hat{E}_2(\Delta u,\Delta v)$进行配方(二次项系数不为0)，配方得

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_2(\Delta u,\Delta v)&=b_{uu}t^2+b_{vv}(s^2)+b_{uv}st+b_ut+b_vs+b\\
&=b_{uu}(t-a)^2+b_{vv}(s-b)^2+b_{uv}(s-a)(t-b)+C
\end{aligned}
$$

其中a,b,C均为常数，后续会求解出来，令$t_1=t-a,s_1=s-b$

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_2(\Delta u,\Delta v)&=b_{uu}t_1^2+b_{vv}s_1^2+b_{uv}t_1s_1+C\\
&=b_{uu}(t_1+\frac{b_{uv}}{2b_{uu}}s_1)^2+(b_{vv}-\frac{b_{uv}^2}{4b_{uu}})s_1^2+C
\end{aligned}
$$

之前已经有$b_{uu}>0,b_{vv}>0,4b_{uu}b_{uv}-b_{uv}^2>0$，所以

$$
b_{vv}-\frac{b_{uv}^2}{4b_{uu}}=\frac{4b_{uu}b_{vv}-b_{uv}^2}{4b_{uu}}>0
$$

从而

$$
\begin{gathered}
\hat{E}_2(\Delta u, \Delta v) \geq C \\
\text{当且仅当} t_1 + \frac{b_{uv}}{2b_{uu}} s_1 = 0, s_1 = 0 \text{时等号成立} \\
\text{即} t_1 = s_1 = 0
\end{gathered}
$$

因为$t_1 = t - a, s_1 = s - b, \Delta u = t, \Delta v = s$，所以等号成立条件为

$$
\Delta u = t = a, \Delta v = s = b
$$

接下来求解a, b

$$
\begin{aligned}
b_{uu}(t-a)^2 + b_{vv}(s-b)^2 + b_{uv}(t-a)(s-b) + C &= b_{uu}(t^2 - 2at + a^2) + b_{vv}(s^2 - 2sb + b^2) + b_{uv}(st - as - bt + ab) + C \\
&= b_{uu}t^2 + b_{vv}s^2 + b_{uv}st - (2ab_{uu} + bb_{uv})t - (2bb_{vv} + ab_{uv})s + C' \\
&= b_{uu}t^2 + b_{vv}s^2 + b_{uv}st + b_u t + b_v s + b
\end{aligned}
$$

那么

$$
\begin{gathered}
\begin{cases}
-2b_{uu}a - b_{uv}b = b_u \\
-b_{uv}a - 2b_{vv}b = b_v
\end{cases} \\
\begin{bmatrix} -2b_{uu} & -b_{uv} \\ -b_{uv} & -2b_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_u \\ b_v \end{bmatrix}
\end{gathered}
$$

回顾之前的等式

$$
\begin{gathered}
2b_{uu} = \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u^2}, 2b_{vv} = \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial v^2}, b_{uv} = \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u \partial v} \\
b_u = \frac{\partial E(u,v)}{\partial u}, b_v = \frac{\partial E(u,v)}{\partial v} \\
\nabla^2 E(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial v^2} \end{bmatrix} \\
\nabla E(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial E(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix}
\end{gathered}
$$

原方程可化为

$$
\begin{gathered}
-\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 E(u,v)}{\partial v^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial E(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \Delta u^* \\ \Delta v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -(\nabla^2 E(u,v))^{-1} \nabla E(u,v)
\end{gathered}
$$

这样就验证了牛顿方法的正确性。

Problem 10

有了公式之后编程实现即可

```
import numpy as np
```

```python
from numpy.linalg import inv

def E(u,v):
    return np.exp(u)+np.exp(2*v)+np.exp(u*v)+u*u-2*u*v+2*(v*v)-3*u-2*v

def partial(point):
    u=point[0]
    v=point[1]
    pu=np.exp(u)+v*np.exp(u*v)+2*u-2*v-3
    pv=2*np.exp(2*v)+u*np.exp(u*v)-2*u+4*v-2
    return np.array([pu,pv])

def dpartial(point):
    u=point[0]
    v=point[1]
    puu=np.exp(u)+np.exp(u*v)*(v**2)+2
    pvv=4*np.exp(2*v)+np.exp(u*v)*(u**2)+4
    puv=np.exp(u*v)*(1+u*v)-2
    return np.array([[puu,puv],[puv,pvv]])

point=np.zeros(2)
eta=0.01

for i in range(5):
    point-=inv(dpartial(point)).dot(partial(point))

print(E(point[0],point[1]))
```

```
2.36082334564
```

Problem 11

这题问的是这六个点能否被直线和二次曲线shatter，比较简单，作图即可，这六个点可以被shatter.

Problem 12

先回顾题意，假设有N个点$x_1,\ldots x_N,x\in R^d$，现在构造这样一个R^d到R^N的映射

$$(\Phi(x))_n=z_n=[\![x=x_n]\!]$$

这题有点抽象，我们举$N=3$的例子看一下

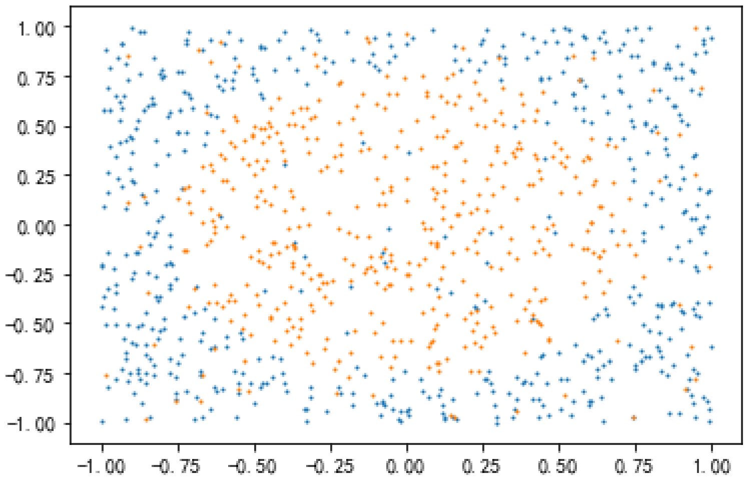
$$\begin{aligned}\Phi(x_1)&=((\Phi(x_1))_1,(\Phi(x_1))_2,(\Phi(x_1))_3)\\&=([\![x_1=x_1]\!],[\![x_1=x_2]\!],[\![x_1=x_2]\!])\\&=(1,0,0)\end{aligned}$$

所以其实这题很简单，是将N个R^d空间上的点映射到R^N上，我们知道R^N上$d_{vc}=N+1$，所以N个点一定能被shatter,所以

$$d_{vc}(H_\Phi)=+\infty$$

这里先根据题意产生一组点，作图看一下

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei'] #用来正常显示中文标签
plt.rcParams['axes.unicode_minus']=False #用来正常显示负号

#产生n组点
def generate(n):
    data=[]
    for i in range(n):
        x=np.random.uniform(-1,1)
        y=np.random.uniform(-1,1)
        flag=np.sign(x*x+y*y-0.6)
        p=np.random.random()
        if (p<0.1):
            flag*=-1
        data.append([x,y,flag])
    return data

data=generate(1000)

x1=[i[0] for i in data if i[-1]>0]
y1=[i[1] for i in data if i[-1]>0]
x2=[i[0] for i in data if i[-1]<0]
y2=[i[1] for i in data if i[-1]<0]

plt.scatter(x1,y1,s=1)
plt.scatter(x2,y2,s=1)
plt.show()
```



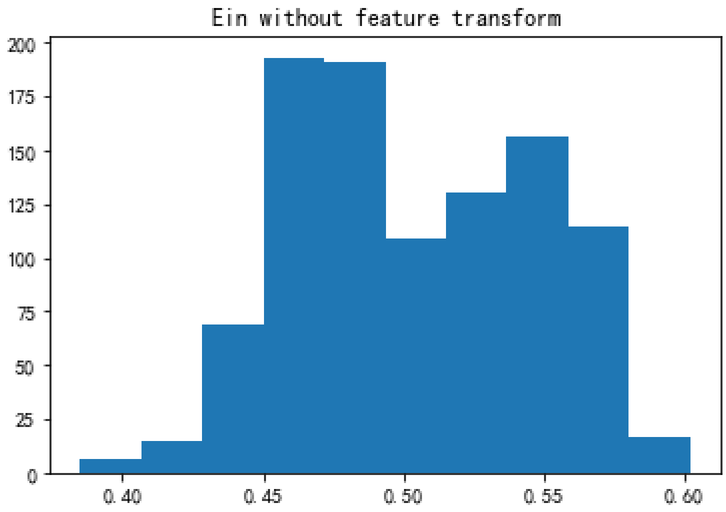
Problem 13

这题直接对数据做回归，需要模拟1000次。这里利用了公式来求回归的结果

$$w=(X^TX)^{-1}X^Ty$$

```
from numpy.linalg import inv

Ein=np.array([])
for i in range(1000):
    data=generate(1000)
    X=np.array([[1]+i[:-1] for i in data])
    Y=np.array([i[-1] for i in data])

    w=inv(X.T.dot(X)).dot(X.T).dot(Y)

    error=np.sum(np.sign(X.dot(w)*Y)<0)/1000
    Ein=np.append(Ein,error)

print(np.average(Ein))
plt.hist(Ein)
plt.title('Ein without feature transform')
plt.show()
```

```
0.50336
```



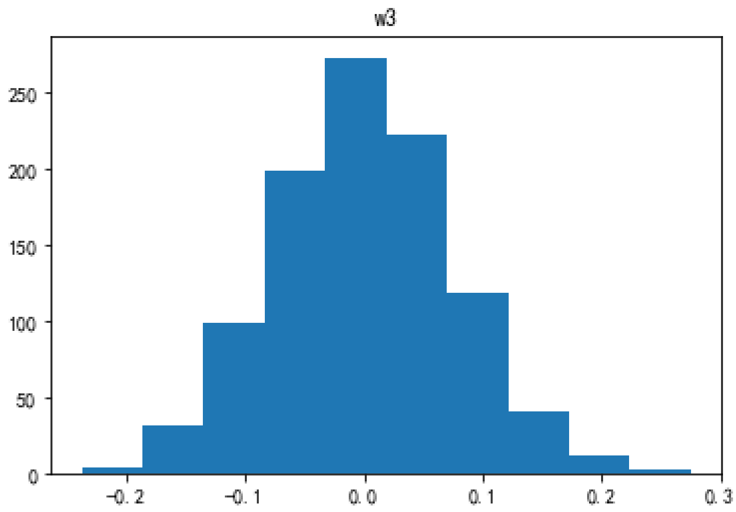
所以E_{in}的均值约为0.5

Problem 14

先做特征转换，再重复上题的步骤，画出$\tilde{w}_3$的直方图，这里把15题的任务一起做了。

```
W=[]
Eout=np.array([])
for i in range(1000):
    data=generate(1000)
    X=np.array([[1]+i[:-1]+[i[0]*i[1],i[0]**2,i[1]**2] for i in data])
    Y=np.array([i[-1] for i in data])

    w=inv(X.T.dot(X)).dot(X.T).dot(Y)
```

```
    #测试数据
    data1=generate(1000)
    X1=np.array([[1]+i[:-1]+[i[0]*i[1],i[0]**2,i[1]**2] for i in data1])
    Y1=np.array([i[-1] for i in data1])

    error=np.sum(np.sign(X1.dot(w)*Y1)<0)/1000
    Eout=np.append(Eout,error)

    #记录w
    W.append(w)

W=np.array(W)
w3=np.array([i[3] for i in W])
plt.hist(w3)
plt.title('w3')
plt.show()

print(W.mean(axis=0))
print("w3的平均值"+str(w3.mean()))
```

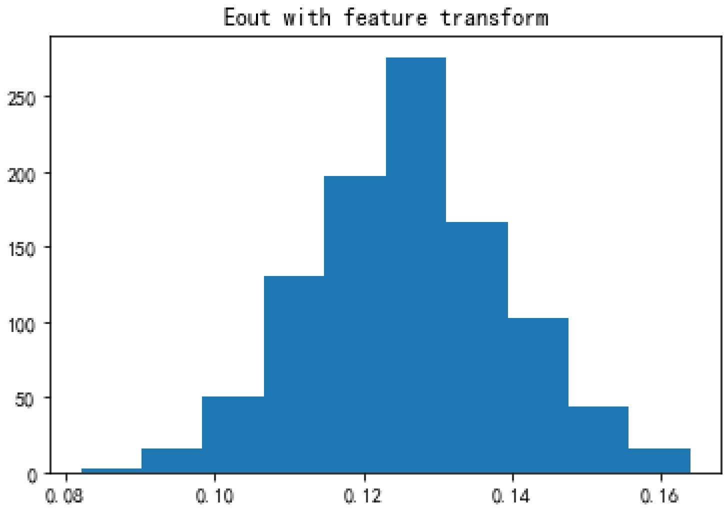



```
[ -9.92410543e-01   1.64976493e-03  -6.48205307e-04   1.52070206e-04
   1.55620104e+00   1.55888923e+00]
w3的平均值0.000152070206015
```

Problem 15

做出E_{out}的直方图

```
plt.hist(Eout)
plt.title('Eout with feature transform')
plt.show()
print(Eout.mean())
```




```
0.125974
```

所以E_{out}的平均值为0.126左右

Problem 16

这题实际上是多元Logistic回归，同课件里的例子，我们要最大化似然函数，这等价于题目中所说的最小化负的对数似然函数，先把似然函数求解出来

$$L=\prod_{j=1}^{N}\frac{exp(w_{y_j}^Tx_j)}{\sum_{i=1}^{K}exp(w_i^Tx_j)}$$

$$ln(L)=\sum_{j=1}^{N}[ln(exp(w_{y_j}^Tx_j))-ln(\sum_{i=1}^{K}exp(w_i^Tx_j))]=\sum_{j=1}^{N}[w_{y_j}^Tx_j-ln(\sum_{i=1}^{K}exp(w_i^Tx_j))]$$

所以只要最小化

$$E_{in}=-\frac{ln(L)}{N}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}[ln(\sum_{i=1}^{K}exp(w_i^Tx_j))-w_{y_j}^Tx_j]$$

即可

Problem 17

求偏导即可

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{in}}{\partial w_n}&=\frac{\partial(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}[ln(\sum_{i=1}^{K}exp(w_i^Tx_j))-w_{y_j}^Tx_j])}{\partial w_n}\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\frac{exp(w_n^Tx_j)x_j}{\sum_{i=1}^{K}exp(w_i^Tx_j)}-[\![y_j=n]\!]x_j)\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(h_n(x_j)-[\![y_j=n]\!])x_j\end{aligned}$$

Problem 18

使用梯度下降公式

$$\nabla E_{in}(w) = -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{y_n x_n}{1+e^{y_n w^T x_n}}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} -y_n x_n \theta(-y_n w^T x_n)$$

```
import numpy as np

train=[]
test=[]

#数据读入
with open('hw3_train.dat') as file:
    for i in file.readlines():
        train.append([1]+list(map(float,i.strip().split(' '))))

with open('hw3_test.dat') as file:
    for i in file.readlines():
        test.append([1]+list(map(float,i.strip().split(' '))))

train=np.array(train)
test=np.array(test)

#定义函数
def f(y,w,x):
    temp=y*w.dot(x)
    return (-y*x)/(np.exp(temp)+1)

def sig(w,x):
    return 1/(math.exp(-w.dot(x))+1)

#数据维度
m=train.shape[1]-1
#数据组数
n=train.shape[0]

w=np.zeros(m)
k=0.001

for i in range(2000):
    s=np.zeros(m)
    for j in range(n):
        s+=f(train[j][-1],w,train[j][:-1])
    s=s/n
    w-=k*s

#计算Xw
r1=test[:,:-1].dot(w)
#计算sign(Xw)
```

```
r2=np.sign(r1)
#求出误差
print((r2!=test[:,-1]).sum()/test.shape[0])
print(w)
```

```
0.475
[ 0.01878417 -0.01260595  0.04084862 -0.03266317  0.01502334 -0.03667437
  0.01255934  0.04815065 -0.02206419  0.02479605  0.06899284  0.0193719
 -0.01988549 -0.0087049   0.04605863  0.05793382  0.061218   -0.04720391
  0.06070375 -0.01610907 -0.03484607]
```

所以E_{out}为0.475

Problem 19

取$\eta = 0.01$

```
w=np.zeros(m)
k=0.01

for i in range(2000):
    s=np.zeros(m)
    for j in range(n):
        s+=f(train[j][-1],w,train[j][:-1])
    s=s/n
    w-=k*s

#计算Xw
r1=test[:,:-1].dot(w)
#计算sign(Xw)
r2=np.sign(r1)
#求出误差
print((r2!=test[:,-1]).sum()/test.shape[0])
print(w)
```

```
0.22
[-0.00385379 -0.18914564  0.26625908 -0.35356593  0.04088776 -0.3794296
  0.01982783  0.33391527 -0.26386754  0.13489328  0.4914191   0.08726107
 -0.25537728 -0.16291797  0.30073678  0.40014954  0.43218808 -0.46227968
  0.43230193 -0.20786372 -0.36936337]
```

所以E_{out}为0.22

Problem 20

使用随机梯度下降，只要对之前的式子稍作修改即可。

```
w=np.zeros(m)
k=0.001
```

```
for i in range(2000):
    j=np.random.choice(n)
    s=f(train[j][-1],w,train[j][:-1])
    w-=k*s

#计算Xw
r1=test[:,:-1].dot(w)
#计算sign(Xw)
r2=np.sign(r1)
#求出误差
print((r2!=test[:,-1]).sum()/test.shape[0])
print(w)
```

```
0.477
[ 0.03102133 -0.00824134  0.05216681 -0.02260935  0.02279948 -0.03096168
  0.01339008  0.05210572 -0.00518606  0.02777817  0.07374788  0.03573774
 -0.01246505 -0.00478996  0.04042543  0.06805246  0.07474674 -0.04407857
  0.06226404 -0.01511765 -0.03630915]
```

所以E_{out}为0.477

以下两题为附加题

Problem 21

先回顾题目

$$
\begin{aligned}
h &= (h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_N)) \\
y &= (y_1, y_2, \ldots, y_N) \\
RMSE(h) &= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_n - h(x_n))^2}
\end{aligned}
$$

题目问的是要计算$h^T y$，至少需要调用几次$RMSE(h)$，注意这里只知道h。首先肯定要求y，因为有N个未知数，所以第一感觉是要调用N次，但是$N=1$时就不成立，因为有平方项。所以推测调用N次不行，接下来证明这个结论，注意这里h,y为行向量，所以和一般看到的形式略有不同。

对$RMSE(h)$进行改写

$$
\begin{aligned}
RMSE(h) &= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_n - h(x_n))^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{N}||h-y||^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{N}(h-y)(h-y)^T} \\
&= \sqrt{\frac{1}{N}(yy^T - 2hy^T + hh^T)}
\end{aligned}
$$

两边平方移项可得

$$
yy^T - 2hy^T + hh^T = N \times (RMSE(h))^2
$$

现在对两个不同的h_1, h_2调用$RMSE(h)$

$$yy^T - 2h_1y^T + h_1h_1^T = N \times (RMSE(h_1))^2$$
$$yy^T - 2h_2y^T + h_2h_2^T = N \times (RMSE(h_2))^2$$
$$\text{两式相减可得}$$
$$2(h_2 - h_1)y^T = N \times (RMSE(h_1))^2 - N \times (RMSE(h_2))^2$$

这样就得到了一个线性方程。现在对$h_1, h_2, \ldots, h_k$分别调用$RMSE(h)$，计算$RMSE(h_i) - RMSE(h_1)$，其中$(i = 2, \ldots k)$，根据之前所述可以得到$k-1$个线性方程组，有如下形式

$$M_1y^T = M_2$$
$$M_1 \in R^{(k-1)\times N}, y^T \in R^N, M_2 \in R^{k-1}$$

由线性代数知识我们知道

当$r(M_1) < N$时，该方程有无穷多组解，当$r(M_1) = N$时，该方程有唯一解，其中$r(M)$表示矩阵M的秩。

所以当$k = N$时，$r(M_1) \le k - 1 < N$，此时有无穷多组解，所以无法确定$y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$；当$k = N + 1$时，$r(M_1)$可能为$N$，若$r(M_1) = N$，此时可以唯一解出$y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$。

综上，至少需要调用$N + 1$次$RMSE(h)$。

Problem 22

为方便叙述，这里做以下记号，注意这里为列向量，和上题有所不同

$$h = \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \ldots & h_K(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \ldots & h_K(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1(x_N) & h_2(x_N) & \ldots & h_K(x_N) \end{pmatrix} \in R^{N\times K}$$
$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_K)^T \in R^K$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$$

那么$RMSE(H)$可以表示为

$$RMSE(H) = \sqrt{\frac{1}{N}||y - hw||^2} = \sqrt{\frac{1}{N}(y - hw)^T(y - hw)}$$

由线性回归的推导我们知道最小化$RMSE(H)$的w满足以下条件

$$X^TXw = X^Ty$$

X已知，y未知，所以求出y即可，由上一题我们知道至少调用$N + 1$次$RMSE(H)$就可以求出y，所以这题也至少需要调用$N + 1$次。