大家好，这篇是有关台大机器学习课程作业二的详解，题目同Coursera。

我的github地址：
https://github.com/Doraemonzzz

个人主页：
http://doraemonzzz.com/

作业地址:
https://www.csie.ntu.edu.tw/~htlin/course/ml15fall/

参考资料:
https://blog.csdn.net/a1015553840/article/details/51085129
http://www.vynguyen.net/category/study/machine-learning/page/6/
http://book.caltech.edu/bookforum/index.php
http://beader.me/mlnotebook/ https://acecoooool.github.io/blog/

Problem 1

这一题和下一题就是learning from data第一章的Exercise 1.13

错误有两种，一种是“去真”:$\lambda\mu$，另一种是“取伪”：$(1-\lambda)(1-\mu)$，所以犯错的概率一共$\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)$

Problem 2

$$P=\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)=\lambda\mu+1-\mu-\lambda+\lambda\mu=1-\lambda+(2\lambda-1)\mu$$

所以当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$P=1-\lambda$，此时和μ独立

Problem 3

这题就是learning from data第二章的Problem 2.12

在此回顾下公式

$$E_{\text{out}}(g)\le E_{\text{in}}(g)+\sqrt{\frac{8}{N}\ln(\frac{4((2N)^{d_{vc}}+1)}{\delta})}\text{的概率大于等于}1-\delta$$

回到这题，题目中$\delta=0.05$, $\sqrt{\frac{8}{N}\ln(\frac{4((2N)^{d_{vc}}+1)}{\delta})}=0.05$ 这个方程直接解的话不好解，可以作图看一下

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Feb 19 20:07:00 2019

@author: qinzhen
"""
```

```python
import numpy as np

delta=0.05
dvc=10

def f(N):
    return (8 / N * np.log(4 * ((2 * N) ** dvc + 1) / delta)) ** 0.5 - 0.05

n = 1
while(True):
    if(f(n) <= 0):
        break
    else:
        n += 1

print(n)
```

```
452957
```

Problem 4

这题和下面一题就是learning from data第二章的Problem 2.20，注意这里多了Variant VC bound

我们注意到(d),(e)左右两边都有ϵ，所以这里要处理一下。

先看(d)，令$a=\frac{1}{N}, b=\ln\frac{6m_{\mathcal{H}}(2N)}{\delta}$，那么不等式可以化为

$$\epsilon \le \sqrt{2a\epsilon + ab}$$

两边平方可得

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 &\le 2a\epsilon + ab \\
(\epsilon - a)^2 &\le ab + a^2 \\
-\sqrt{ab+a^2} &\le \epsilon - a \le \sqrt{ab+a^2} \\
a-\sqrt{ab+a^2} &\le \epsilon \le a+\sqrt{ab+a^2}
\end{aligned}$$

注意这里只要考虑上界，所以

$$\epsilon \le a+\sqrt{ab+a^2}$$

将$a=\frac{1}{N}, b=\ln\frac{6m_{\mathcal{H}}(2N)}{\delta}$带入可得

$$\epsilon \le \frac{1}{N}+\sqrt{\frac{1}{N^2}+\frac{1}{N}\ln\frac{6m_{\mathcal{H}}(2N)}{\delta}}$$

对于(e)，令$a=\frac{1}{2N}, b=\ln\frac{4m_{\mathcal{H}}(N^2)}{\delta}$，那么不等式可以化为

$$\epsilon \leq \sqrt{a(4\epsilon(1+\epsilon)+b)}$$

两边平方可得

$$\begin{aligned}\epsilon^2 &\leq 4a\epsilon(1+\epsilon)+ab \\ (1-4a)\epsilon^2-4a\epsilon &\leq ab\end{aligned}$$

注意这里我们只要考虑N很大的情形，所以

$$1-4a=1-\frac{2}{N}>0$$

从而

$$\begin{aligned}(1-4a)(\epsilon-\frac{2a}{1-4a})^2 &\leq ab+\frac{4a^2}{1-4a} \\ (\epsilon-\frac{2a}{1-4a})^2 &\leq \frac{ab+\frac{4a^2}{1-4a}}{1-4a} \\ -\sqrt{\frac{ab+\frac{4a^2}{1-4a}}{1-4a}} \leq \epsilon-\frac{2a}{1-4a} &\leq \sqrt{\frac{ab+\frac{4a^2}{1-4a}}{1-4a}}\end{aligned}$$

这里只要考虑上界，因此

$$\epsilon \leq \sqrt{\frac{ab+\frac{4a^2}{1-4a}}{1-4a}}+\frac{2a}{1-4a}=\sqrt{\frac{ab}{1-4a}+\frac{4a^2}{(1-4a)^2}}+\frac{2a}{1-4a}$$

将$a=\frac{1}{2N},b=\ln\frac{4m_{\mathcal{H}}(N^2)}{\delta}$带入可得

$$\epsilon \leq \sqrt{\frac{\ln\frac{4m_{\mathcal{H}}(N^2)}{\delta}}{2(N-2)}+\frac{1}{(N-2)^2}}+\frac{1}{N-2}$$

这里还有一个要注意的点，这里老师希望我们使用$m_{\mathcal{H}}(N)$的上界为$N^{d_{vc}}$，因此

$$\ln(m_{\mathcal{H}}(N)) \leq d_{vc}\ln(N)$$

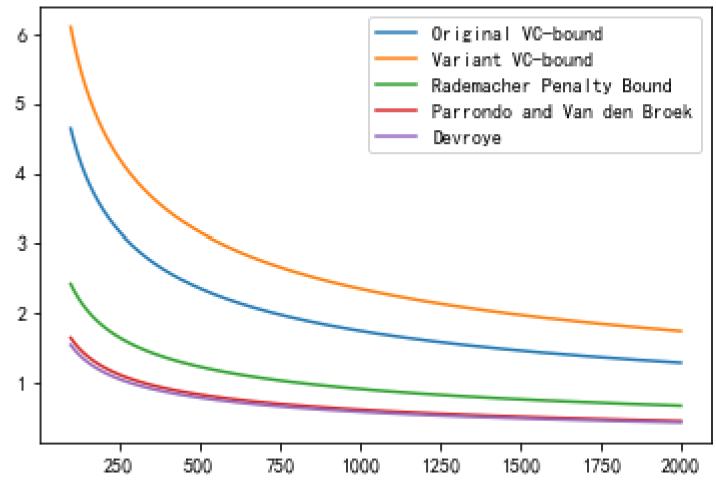
后面我们作图处理下

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Feb 19 20:12:42 2019

@author: qinzhen
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei'] #用来正常显示中文标签
```

```python
plt.rcParams['axes.unicode_minus']=False #用来正常显示负号

dvc = 50
delta = 0.05

#计算ln(m(N))
def lm(n):
    return dvc * np.log(n)

#Original VC-bound
def f1(n):
    result = (8 / n) * (np.log(4 / delta) + lm(2 * n))
    result = result ** 0.5
    return result

#Variant VC bound
def f2(n):
    result = (16 / n) * (np.log(2 / (delta ** 0.5)) + lm(n))
    result = result ** 0.5
    return result

#Rademacher Penalty Bound
def f3(n):
    k1 = 2 * (np.log(2 * n) + lm(n)) / n
    k2 = (2 / n) * np.log(1 / delta)
    k3 = 1 / n
    result = k1 ** 0.5 + k2 ** 0.5 + k3
    return result

#Parrondo and Van den Broek
def f4(n):
    k1 = 1 / n
    k2 = 1 / (n ** 2) + (1 / n) * (np.log(6 / delta) + lm(2 * n))
    k2 = k2 ** 0.5
    result = k1 + k2
    return result

#Devroye
def f5(n):
    k1 = 1 / (n - 2)
    k2 = (np.log(4 / delta) + lm(n * n)) / (2 * (n - 2)) + 1 / ((n - 2) ** 2)
    k2 = k2 ** 0.5
    result = k1 + k2
    return result
```

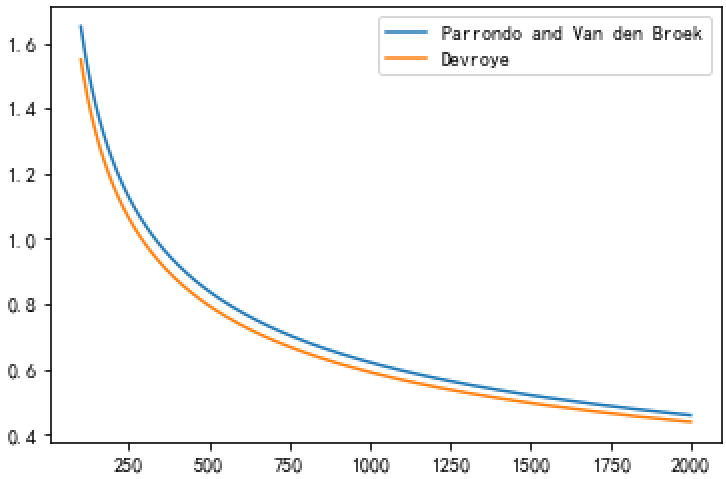
```python
#### Problem 4
#产生点集
x = np.arange(100, 2000)

y1 = [f1(i) for i in x]
y2 = [f2(i) for i in x]
y3 = [f3(i) for i in x]
y4 = [f4(i) for i in x]
```

```
y5 = [f5(i) for i in x]

plt.plot(x, y1, label="Original VC-bound")
plt.plot(x, y2, label="Variant VC-bound")
plt.plot(x, y3, label="Rademacher Penalty Bound")
plt.plot(x, y4, label="Parrondo and Van den Broek")
plt.plot(x, y5, label="Devroye")
plt.legend()
plt.show()
```



可以看到Parrondo and Van den Broek以及Devroye非常接近，我们再仔细看一下

```
#比较y4, y5
plt.plot(x, y4, label="Parrondo and Van den Broek")
plt.plot(x, y5, label="Devroye")
plt.legend()
plt.show()
```

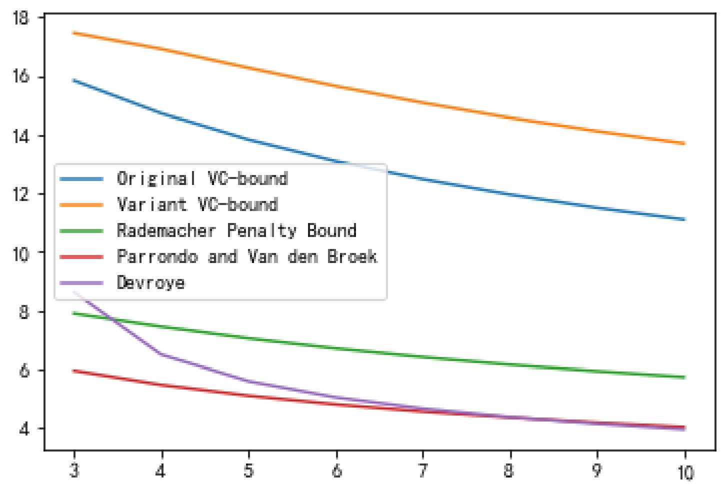


因此$n=10000$时，Devroye给出的上界最小。

Problem 5

和上题一致，我们依旧作图看一下

```
#产生点集
import numpy as np
x=np.arange(1,11)

y1=[f1(i) for i in x]
y2=[f2(i) for i in x]
y3=[f3(i) for i in x]
y4=[f4(i) for i in x]
y5=[f5(i) for i in x]

#作图
plt.plot(x,y1,label="Original VC-bound")
plt.plot(x,y2,label="Variant VC-bound")
plt.plot(x,y3,label="Rademacher Penalty Bound")
plt.plot(x,y4,label="Parrondo and Van den Broek")
plt.plot(x,y5,label="Devroye")
plt.legend()
plt.show()
```



可以看到$n=5$时，Parrando and Van den Broek给出的上界最小。
这题以及上一题可以直接计算，不过我比较喜欢作图比较，感觉更清晰一些。

Problem 6

第一种情形为$-1,1-1$或者$1,-1,1$，即区间$[l,r]$内部有元素，且区间$[l,r]$两侧均有元素。这种情形只要在N个点之间的$N-1$个间隔中挑选出两个即可，所以这种情形共有$2C_{N-1}^2=(N-1)(N-2)$，乘以2是因为$[l,r]$内部可以为-1，也可以为1。

第二种情形为$-1,1$或者$1,-1$的，即区间$[l,r]$内部有元素，一侧没有元素。这种情形只要在N个点之间的$N-1$个间隔中挑选出一个即可，所以这种情形共有$2(N-1)=2N-2$，乘以2依旧是因为±1的关系。

第三种情形为1或者-1，因此有2种情形。

因此

$$m_{\mathcal{H}}(N)=(N-1)(N-2)+2N-2+2=N^2-N+2$$

Problem 7

接着上题，注意

$$m_{\mathcal{H}}(3)=3^2-3+2=8=2^3$$
$$m_{\mathcal{H}}(4)=4^2-4+2=14<2^4$$

因此$d_{vc}=3$

Problem 8

做映射$y=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$，所以这个问题可以化为类似Problem 6的问题，但用我之前的思路考虑比较麻烦，这里用另一种思路。注意这里两圆之间的部分为$+1$，因此问题为N个点之间以及两侧$N+1$个间隔中挑选2个，最后要需要考虑全-1的情形，因此

$$m_H(N)=C_{N+1}^2+1$$

Problem 9

这题就是learning from data第二章的Problem 2.16，结论为$d_{vc}=D+1$

这里分两步证明:

(a)存在$D+1$个点可以被shatter

(b)任意$D+2$个点无法被shatter

(a)记$y_j=\sum_{i=0}^D c_i x_j^i$，现在取$D+1$个点，$x_1,x_2\ldots x_{D+1},x_j=j$

那么

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_{D+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^D c_i x_1^i\\ \sum_{i=0}^D c_i x_2^i\\ \ldots\\ \sum_{i=0}^D c_i x_{D+1}^i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^D\\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^D\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & (D+1) & (D+1)^2 & \ldots & (D+1)^D\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\\ \ldots\\ c_D\end{pmatrix}$$

我们知道

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^D \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^D \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (D+1) & (D+1)^2 & \ldots & (D+1)^D \end{pmatrix}$$ 对 应 的 行 列 式 为 范 德 蒙 行 列 式 ， 不 为 0

那么对任意的$y=(y_1,y_2,\ldots,y_{D+1})^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^D \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^D \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (D+1) & (D+1)^2 & \ldots & (D+1)^D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \ldots \\ c_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_{D+1} \end{pmatrix}$$

关于$c=(c_0,c_1,\ldots c_D)^T$有解，因此存在$D+1$个点可以被shatter

(b)记$z_j=(1,x_j,x_j^2\ldots x_j^D)\in R^{D+1}$，那么现在任取$D+2$个点$x_1,x_2\ldots x_{D+2}$，对应可以得到$z_1,z_2\ldots z_{D+2}$。$R^{D+1}$空间任意$D+2$个点必然线性相关，所以不妨设$z_{D+2}$可以被线性表出，注意$c=(c_0,c_1,\ldots c_D)^T$

$$z_{D+2}=\sum_{i=1}^{D+1}k_iz_i$$
$$c^Tz_{D+2}=\sum_{i=1}^{D+1}c^Tk_iz_i$$
$$\text{sign}(c^Tz_{D+2})=\text{sign}(\sum_{i=1}^{D+1}k_ic^Tz_i)$$

也就是说z_{D+2}的分类被$z_1,z_2\ldots z_{D+1}$确定，那么

$$(\textbf{sign}(z_1),\textbf{sign}(z_2)\ldots\textbf{sign}(z_{D+1}),-\textbf{sign}(z_{D+2}))$$

这种情形必然无法被划分出来，因此$d_{vc}\le D+1$

结合(a),(b)我们可得

$$d_{vc}=D+1$$

Problem 10

对于d维决策树，我们可以理解为将区域划分为2^d个互相独立的区域，每个区域可以表示$+1$或者-1，所以一共可以表示出2^{2^d}种，因此

$$d_{vc}=2^d$$

Problem 11

这题的答案是$+\infty$，题目挺有意思的，有一题类似的题目可以参考learning from data的Problem 2.18。

我们先看题目，乍一看挺复杂的，我们先考虑$h_\alpha(x)$为$+1$以及-1的条件。

要使得$h_\alpha(x)$为$+1$，那么

$$
\begin{gathered}
|(\alpha x) \bmod 4-2|-1 \geq 0 \\
(\alpha x) \bmod 4-2 \geq 1 \text{或} (\alpha x) \bmod 4-2 \leq -1 \\
(\alpha x) \bmod 4 \geq 3 \text{或} 0 \leq (\alpha x) \bmod 4 \leq 1
\end{gathered}
$$

要使得$h_\alpha(x)$为-1，那么

$$
\begin{gathered}
|(\alpha x) \bmod 4-2|-1<0 \\
-1<(\alpha x) \bmod 4-2<1 \\
1<(\alpha x) \bmod 4<3
\end{gathered}
$$

简单来说，当$(\alpha x) \bmod 4$处于1到3时，$h_\alpha(x)$为-1，否则为$+1$。

接下来，我们这样构造α以及x:

任取$(y_1,\ldots,y_N)\in\{-1,+1\}^N$，我们构造$z=(z_1,\ldots,z_N)$，使得

$$
\begin{gathered}
\text{当} y_i=+1 \text{时，} z_i=0 \\
\text{当} y_i=-1 \text{时，} z_i=2
\end{gathered}
$$

现在取

$$
\begin{gathered}
\alpha=0.z_1z_2\ldots z_N \\
x=(x_1,\ldots,x_N), x_n=10^n
\end{gathered}
$$

那么

$$
\begin{gathered}
x_1\times\alpha=z_1.\ z_2\ldots z_N \\
x_i\times\alpha=z_1z_2\ldots z_{i-1}z_i\ .\ z_{i+1}\ldots z_N(i\geq 2)
\end{gathered}
$$

首先有一个很显然的结论

$$
z_1z_2\ldots z_{i-1}z_i \bmod 4=z_{i-1}z_i \bmod 4
$$

这是因为100的倍数模4为0，但这里因为$z_i\in\{0,2\}$，事实上有以下更强的结论

$$
z_1z_2\ldots z_{i-1}z_i \bmod 4=z_{i-1}z_i \bmod 4=z_i \bmod 4
$$

这是因为

$$
z_{i-1}z_i \bmod 4=\begin{cases} z_i \bmod 4 & z_{i-1}=0 \\ (20+z_i) \bmod 4=z_i \bmod 4 & z_{i-1}=2 \end{cases}
$$

因此

$$
\begin{gathered}
（x_1\times\alpha） \bmod 4=z_1.\ z_2\ldots z_N \bmod 4 \\
(x_i\times\alpha) \bmod 4=z_1z_2\ldots z_{i-1}z_i.z_{i+1}\ldots z_N \bmod 4=z_i.z_{i+1}\ldots z_N \bmod 4,(i\geq 2)
\end{gathered}
$$

这两式可以统一为

$$(x_i \times \alpha) \bmod 4 = z_i.z_{i+1}\ldots z_N \bmod 4$$

进一步，我们有

$$z_i \le (x_i \times \alpha) \bmod 4 < z_i + 1$$

当$z_i = 0$时，

$$0 \le (x_i \times \alpha) \bmod 4 < 1$$

当$z_i = 2$时，

$$2 \le (x_i \times \alpha) \bmod 4 < 3$$

回忆我们之前的结论以及假设

$$\text{当}\,(\alpha x) \bmod 4\text{处于}1\text{到}3\text{时，}\ h_\alpha(x) = -1\text{，否则}\ h_\alpha(x) = 1$$

所以当$y_i = +1$时，$z_i = 0$，

$$h_\alpha(x_i) = +1 = y_i$$

当$y_i = -1$时，$z_i = 2$，

$$h_\alpha(x_i) = -1 = y_i$$

因此总有

$$h_\alpha(x_i) = y_i$$

从而存在N个点可以被shatter，由N的任意性可知，

$$d_{vc} = +\infty$$

Problem 12

分两步考虑，第一步先考虑前i个点，这i个点最多可以区分出2^i种，对于剩下的$N-i$个点，最多可以被区分出$m_{\mathcal{H}}(N-i)$种。那么

$$m_{\mathcal{H}}(N) \le 2^i m_{\mathcal{H}}(N-i)(i = 1, 2, \ldots N-1)$$

因此

$$m_{\mathcal{H}}(N) \le \min_{1\le i\le N-1} 2^i m_{\mathcal{H}}(N-i)$$

因此结论成立。

Problem 13

这题乍一看挺复杂的，其实想的简单一点就行。我们知道$m_{\mathcal{H}}(N)$要么等于2^N，要么有一个多项式的上界，根据这两点，除了$2^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}$不可能成为$m_{\mathcal{H}}(N)$

Problem 14

这一题以及下一题均可以参考learning from data的Problem 2.13

首先有

$$\text{如果 } A \subseteq B, \text{那么} \, d_{vc}(A) \le d_{vc}(B)$$

反证法，如果$d_{vc}(A) \ge d_{vc}(B)+1$，那么$A$可以shatter $d_{vc}(B)+1$个点，由$A \subseteq B$。那么B也可以shatter $d_{vc}(B)+1$个点，矛盾，因此该结论成立。

接下来利用上述结论证明题目中的结论。首先$0 \le d_{vc}(\bigcap_{k=1}^K H_k)$是显然的，另一边注意到

$$\bigcap_{k=1}^K \mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_k, k=1,\ldots,K$$

所以

$$d_{vc}(\bigcap_{k=1}^K H_k) \le d_{vc}(\mathcal{H}_k), k=1,\ldots,K$$

$$d_{vc}(\bigcap_{k=1}^K H_k) \le \min\{(d_{vc}(\mathcal{H}_k))\}_{k=1}^K$$

Problem 15

(c)这题参考了别人的笔记，笔记地址

左边比较简单，由之前的结论即可。

因为

$$H_k \subseteq \bigcup_{k=1}^K H_k$$

所以

$$d_{vc}(\mathcal{H}_k) \le d_{vc}(\bigcup_{k=1}^K \mathcal{H}_k)(k=1\ldots K)$$

$$\max\{d_{vc}(\mathcal{H}_k)\}_{k=1}^K \le d_{vc}(\bigcup_{k=1}^K \mathcal{H}_k)$$

观察下右边的形式，其实只要证明$K=2$的情形然后使用数学归纳法即可，$K=2$时的结论为

$$d_{vc}(\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2) \le 1 + d_{vc}(\mathcal{H}_1) + d_{vc}(\mathcal{H}_2)$$

下面记$d_1 = d_{vc}(\mathcal{H}_1), d_2 = d_{vc}(\mathcal{H}_2)$，考虑成长函数$m_{\mathcal{H}}(N)$，首先

$$m_{\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2}(N) \le m_{\mathcal{H}_1}(N) + m_{\mathcal{H}_2}(N)$$

对于N个元素，$\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2$最多可以表示出$m_{\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2}(N)$种分类，对于每种分类，或者由$\mathcal{H}_1$表示，或者由$\mathcal{H}_2$表示，所以$m_{\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2}(N)$应该小于$\mathcal{H}_1$和$\mathcal{H}_2$表示出来的分类之和。而$\mathcal{H}_1$最多可以表示出$m_{\mathcal{H}_1}(N)$种分类，$\mathcal{H}_2$最多可以表示出$m_{\mathcal{H}_2}(N)$种分类，因此上述不等式成立。

回到原题，使用上述结论以及VC不等式，我们可得

$$m_{\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2}(N) \le m_{\mathcal{H}_1}(N) + m_{\mathcal{H}_2}(N) \le \sum_{i=0}^{d_1} \binom{N}{i} + \sum_{i=0}^{d_2} \binom{N}{i}$$

接着我们使用反证法证明

$$d_{vc}(\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2) \le 1 + d_{vc}(\mathcal{H}_1) + d_{vc}(\mathcal{H}_2)$$

如果

$$d_{vc}(\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2) \ge 2 + d_{vc}(\mathcal{H}_1) + d_{vc}(\mathcal{H}_2) = d_1 + d_2 + 2$$

那么

$$m_{\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2}(d_1 + d_2 + 2) \ge 2^{d_1 + d_2 + 2}$$

把$N = d_1 + d_2 + 2$带入$\sum_{i=0}^{d_1} \binom{N}{i} + \sum_{i=0}^{d_2} \binom{N}{i}$得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{d_1} \binom{N}{i} + \sum_{i=0}^{d_2} \binom{N}{i} &= \sum_{i=0}^{d_1} \binom{d_1 + d_2 + 2}{i} + \sum_{i=0}^{d_2} \binom{d_1 + d_2 + 2}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{d_1} \binom{d_1 + d_2 + 2}{i} + \sum_{i=0}^{d_2} \binom{d_1 + d_2 + 2}{d_1 + d_2 + 2 - i} \\
&\text{令 } j = d_1 + d_2 + 2 - i\text{，那么}j\text{的范围从 } d_1 + 2 \text{到} d_1 + d_2 + 2 \\
&= \sum_{i=0}^{d_1} \binom{d_1 + d_2 + 2}{i} + \sum_{j=d_1+2}^{d_1+d_2+2} \binom{d_1 + d_2 + 2}{j} \\
&= 2^{d_1 + d_2 + 2} - \binom{d_1 + d_2 + 2}{d_1 + 1} \\
&< 2^{d_1 + d_2 + 2}
\end{aligned}$$

所以

$$m_{\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2}(d_1 + d_2 + 2) \le \sum_{i=0}^{d_1} \binom{d_1 + d_2 + 2}{i} + \sum_{i=0}^{d_2} \binom{d_1 + d_2 + 2}{i} < 2^{d_1 + d_2 + 2}$$

与之前所述矛盾。因此

$$d_{vc}(\mathcal{H}_1 \bigcup \mathcal{H}_2) \le 1 + d_{vc}(\mathcal{H}_1) + d_{vc}(\mathcal{H}_2) = d_1 + d_2 + 1$$

因此当$K = 2$时，结论成立。

假设$K=n$时不等式成立，$K=n+1$时

$$
\begin{aligned}
d_{vc}(\bigcup_{k=1}^{n+1}\mathcal{H}_k) &= d_{vc}((\bigcup_{k=1}^{n}\mathcal{H}_k)\bigcup\mathcal{H}_{n+1})\\
&\le 1+d_{vc}(\bigcup_{k=1}^{n}\mathcal{H}_k)+d_{vc}(\mathcal{H}_{n+1})\\
&\le 1+n-1+\sum_{k=1}^{n}d_{vc}(\mathcal{H}_k)+d_{vc}(\mathcal{H}_{n+1})\\
&= n+\sum_{k=1}^{n+1}d_{vc}(\mathcal{H}_k)
\end{aligned}
$$

因此$K=n+1$时不等式也成立。

Problem 16

这题可以参考第一题，就是计算数据中带有偏差的$E_{\text{out}}(h_s;\theta)$，我们取和第一题一致的符号，那么

$$
E_{\text{out}}(h_s;\theta)=\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)
$$

此题中有20%的数据为噪声，因此$\lambda=0.8$，我们再来计算μ，即错误率。先回顾题目

$$
\begin{gathered}
h_{s;\theta}(x)=s\cdot\text{sign}(x-\theta)\\
\text{当}\,s=1\text{时，若}\,x<\theta,h_{s;\theta}(x)=-1;x\ge\theta,h_{s;\theta}(x)=1\\
\text{当}\,s=-1\text{时，若}\,x<\theta,h_{s;\theta}(x)=1;x\ge\theta,h_{s;\theta}(x)=-1
\end{gathered}
$$

我们知道原始数据服从$[-1,1]$上的均匀分布，$\tilde{s}(x)=\text{sign}(x)$。

$$
\text{因此}\,x<0\text{时},\tilde{s}(x)=-1;x\ge 0,\tilde{s}(x)=1
$$

接下来计算μ，当$s=1$时，

$$
\begin{aligned}
\mu &= \mathbb{P}(\tilde{s}(x)>0,h_{s;\theta}(x)<0)+\mathbb{P}(\tilde{s}(x)<0,h_{s;\theta}(x)>0)\\
&= \mathbb{P}(\tilde{s}(x)>0)\mathbb{P}(\text{sign}(x-\theta)<0)+\mathbb{P}(\tilde{s}(x)<0)\mathbb{P}(\text{sign}(x-\theta)>0)\\
&= \frac{1}{2}\times\theta\times 1\{\theta\ge 0\}+\frac{1}{2}\times(-\theta)\times 1\{\theta<0\}\\
&= \frac{|\theta|}{2}
\end{aligned}
$$

此时

$$
\begin{aligned}
E_{\text{out}}(h_s;\theta) &= \lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)\\
&= 0.8\times\frac{|\theta|}{2}+0.2\times\frac{2-|\theta|}{2}\\
&= 0.2+0.3|\theta|
\end{aligned}
$$

当$s=-1$时，

$$
\begin{aligned}
\mu &= \mathbb{P}(\tilde{s}(x)>0, h_{s;\theta}(x)<0)+\mathbb{P}(\tilde{s}(x)<0, h_{s;\theta}(x)>0) \\
&= \mathbb{P}(\tilde{s}(x)>0)\mathbb{P}(\operatorname{sign}(x-\theta)>0)+\mathbb{P}(\tilde{s}(x)<0)\mathbb{P}(\operatorname{sign}(x-\theta)<0) \\
&= \frac{1}{2}\times(1-\theta)\times 1\{\theta\geq 0\}+\frac{1}{2}\times(1+\theta)\times 1\{\theta<0\} \\
&= \frac{2-|\theta|}{2}
\end{aligned}
$$

此时

$$
\begin{aligned}
E_{\text{out}}(h_s;\theta) &= \lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu) \\
&= 0.8\times\frac{2-|\theta|}{2}+0.2\times\frac{|\theta|}{2} \\
&= 0.8-0.3|\theta|
\end{aligned}
$$

我们将s和上述两种情况统一在一起可得

$$
E_{\text{out}}(h_s;\theta)=0.5+0.3s(|\theta|-1)
$$

（上述两种情形可以结合画图理解。）

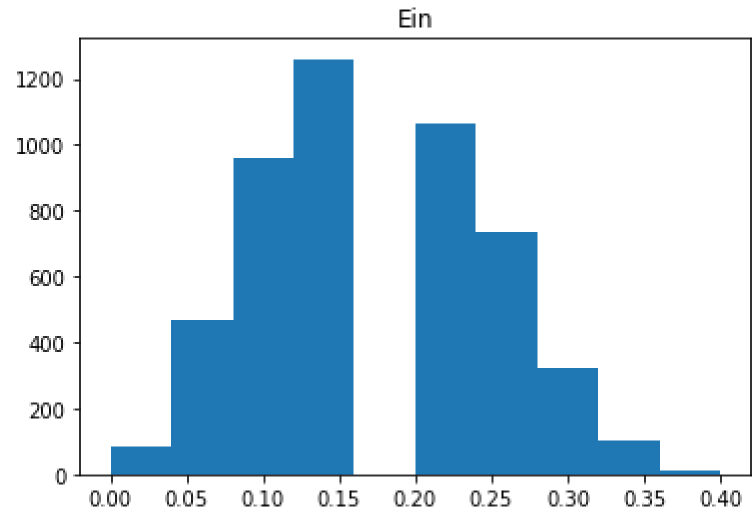
Problem 17

这题以及下一题就是编程模拟上面题目中的情况并计算$E_{\text{in}}, E_{\text{out}}$

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed Feb 20 21:51:57 2019

@author: qinzhen
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def data(n, p=0.2):
    #产生20个随机数
    X = np.random.uniform(-1, 1, size=(n))
    #产生(X, y)，注意有p的误差
    y = np.sign(X)
    prob = np.random.uniform(0, 1, n)
    y[prob < p] *= -1
    return X, y

#产生theta，注意这里只要取n个点相邻两点间的点n-1个点以及两侧的两个点即可
def Theta(X):
    theta = (X[1:] + X[:-1]) / 2
    theta = np.r_[[X[0] - 1], theta]
    theta = np.r_[theta, [X[-1] + 1]]

    #修改维度后范围
```

```python
    return theta.reshape(-1, 1)

def decision_stump(X, y):
    #排序
    X1 = np.sort(X)
    #计算theta
    theta = Theta(X1)
    #向量化执行计算
    n = theta.shape[0]
    m = X.shape[0]
    #将X复制按横轴n份
    X = np.tile(X, (n, 1))
    #s=1
    y1 = np.sign(X - theta)
    #s=-1
    y2 = np.sign(X - theta) * (-1)
    #统计错误
    error1 = np.sum(y1!=y, axis = 1)
    error2 = np.sum(y2!=y, axis = 1)
    #计算最小错误对应的下标
    i1 = np.argmin(error1)
    i2 = np.argmin(error2)
    #判断哪个误差更小
    if error1[i1] < error2[i2]:
        s = 1
        t = theta[i1][0]
        error = error1[i1] / m
    else:
        s = -1
        t = theta[i2][0]
        error = error2[i2] / m
    return s, t, error

Ein = []
Eout = []
n = 20
m = 5000
for i in range(m):
    X, y = data(n)
    s, t, ein = decision_stump(X, y)
    #计算eout
    eout = 0.5 + 0.3 * s * (np.abs(t) - 1)
    Ein.append(ein)
    Eout.append(eout)
```

```python
#Problem 17
plt.hist(Ein)
plt.title('Ein')
plt.show()

print(np.mean(Ein))
```

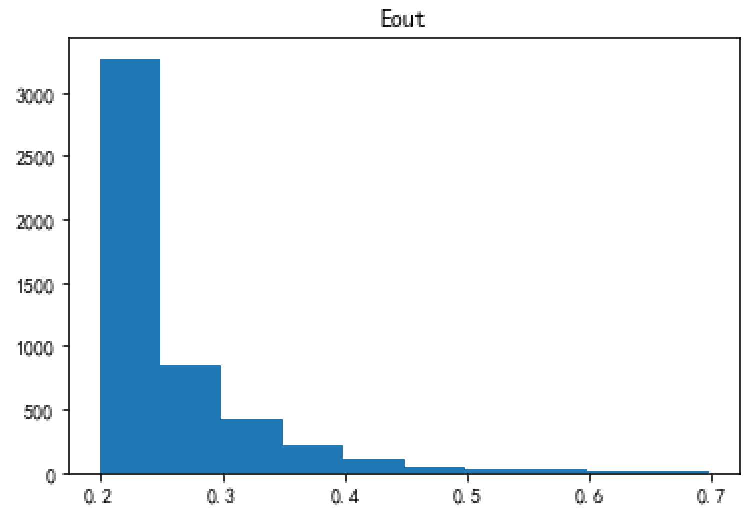



```
0.16827999999999999
```

Problem 18

直接看刚刚计算的E_{out}即可

```
#Problem 18
plt.hist(Eout)
plt.title('Eout')
plt.show()

print(np.mean(Eout))
```




```
0.25585693682953115
```

Problem 19

这题就是上题多维度的情形，我们要对每个维度分别按上一题的方法计算出最佳的s, θ，然后对每个维度的最佳解进行比较，求出全局最佳的s, θ以及维度dim，然后按照这个dim以及s, θ来预测我们的测试结果。

```
def multi_decision_stump(X, y):
    """
    对每个维度使用decision_stump
    """
    n, m = X.shape
    #初始化s, theta, d, 最小错误为error
    s = 1
    t = 0
    d = 0
    error = 1
    for i in range(m):
        X1 = X[:, i]
        s0, t0, error0 = decision_stump(X1, y)
        if error0 < error:
            error = error0
            d = i
            t = t0
            s = s0
    return s, t, d, error

def preprocess(data):
    X = data[:, :-1]
    y = data[:, -1]

    return X, y
```

```
#读取数据
data_train = np.genfromtxt("hw2_train.dat")
data_test = np.genfromtxt("hw2_test.dat")

#预处理数据
X_train, y_train = preprocess(data_train)
X_test, y_test = preprocess(data_test)

#Problem 19
s, theta, d, Ein = multi_decision_stump(X_train, y_train)
print(s, theta, d, Ein)
```

```
-1 1.6175000000000002 3 0.24752475247524752
```

$E_{\text{in}} = 0.25$，维度为第四个维度，$h_{s;i;\theta}(x) = s \cdot \mathrm{sign}(x_i - \theta) = -\mathrm{sign}(x_i - 1.6175)$

Problem 20

根据之前计算的s, θ, dim来预测结果并计算误差

```
#Problem 20
n = X_test.shape[0]
Eout = np.sum(s * np.sign(X_test[:, d] - theta) != y_test) / n
print(Eout)
```

```
0.355
```

Problem 21

考虑N个元素的点集，点集中最多有$k-1$个-1，那么这样的点集有$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{N}{i}$种。考虑$k$个元素的子集，然么$(-1,-1...-1)$(全为$-1$的情形)必然无法被表出，这是因为最多有$k-1$个点为$-1$。那么由$B(N,k)$的定义知

$$B(N,k) \geq \sum_{i=0}^{k-1}\binom{N}{i}$$