大家好，这篇是有关台大机器学习课程作业二的详解，题目同Coursera。

我的github地址:
https://github.com/Doraemonzzz

个人主页:
http://doraemonzzz.com/

作业地址:
https://www.csie.ntu.edu.tw/~htlin/course/ml15fall/

参考资料:
https://blog.csdn.net/a1015553840/article/details/51085129
http://www.vynguyen.net/category/study/machine-learning/page/6/
http://book.caltech.edu/bookforum/index.php
http://beader.me/mlnotebook/

Problem 1

这一题和下一题就是learning from data第一章的Exercise 1.13

错误有两种，一种是“去真”:$\lambda\mu$，另一种是“取伪”：$(1-\lambda)(1-\mu)$，所以犯错的概率一共$\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)$

Problem 2

$$P=\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)=\lambda\mu+1-\mu-\lambda+\lambda\mu=1-\lambda+(2\lambda-1)\mu$$

所以当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$P=1-\lambda$，此时和μ独立

Problem 3

这题就是learning from data第二章的Problem 2.12

在此回顾下公式

$$E_{out}(g)\le E_{in}(g)+\sqrt{\frac{8}{N}ln(\frac{4((2N)^{d_{vc}}+1)}{\delta})}\text{的概率大于等于}1-\delta$$

回到这题，题目中$\delta=0.05$, $\sqrt{\frac{8}{N}ln(\frac{4((2N)^{d_{vc}}+1)}{\delta})}=0.05$ 这个方程直接解的话不好解，可以作图看一下

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt

delta=0.05
dvc=10

def f(N):
    return (8/N*math.log(4*((2*N)**dvc+1)/delta))**0.5-0.05
```

```
n=1
while(True):
    if(f(n)<=0):
        break
    else:
        n+=1

print(n)
```

```
452957
```

Problem 4

这题和下面一题就是learning from data第二章的Problem 2.20，注意这里多了Variant VC bound

我们注意到(d),(e)左右两边都有ϵ，所以这里要处理一下。

先看(d)，令$a=\frac{1}{N},b=ln\frac{6m_H(2N)}{\delta}$，那么不等式可以化为

$$\epsilon \le \sqrt{2a\epsilon+ab}$$
$$\text{两边平方可得}$$
$$\epsilon^2 \le 2a\epsilon+ab$$
$$(\epsilon-a)^2 \le ab+a^2$$
$$-\sqrt{ab+a^2} \le \epsilon-a \le \sqrt{ab+a^2}$$
$$a-\sqrt{ab+a^2} \le \epsilon \le a+\sqrt{ab+a^2}$$
$$\text{这里只要考虑上界}$$
$$\epsilon \le a+\sqrt{ab+a^2}$$
$$\text{将 }a=\frac{1}{N},b=ln\frac{6m_H(2N)}{\delta}\text{带入可得}$$
$$\epsilon \le \frac{1}{N}+\sqrt{\frac{1}{N^2}+\frac{1}{N}ln\frac{6m_H(2N)}{\delta}}$$

对于(e)，令$a=\frac{1}{2N},b=ln\frac{4m_H(N^2)}{\delta}$，那么不等式可以化为

$$\epsilon \leq \sqrt{a(4\epsilon(1+\epsilon)+b)}$$

两边平方可得

$$\epsilon^2 \leq 4a\epsilon(1+\epsilon)+ab$$

$$(1-4a)\epsilon^2-4a\epsilon \leq ab$$

注意这里我们只要考虑N很大的情形，所以$1-4a=1-\frac{2}{N}>0$

$$(1-4a)(\epsilon-\frac{2a}{1-4a})^2 \leq ab+\frac{4a^2}{1-4a}$$

$$(\epsilon-\frac{2a}{1-4a})^2 \leq \frac{ab+\frac{4a^2}{1-4a}}{1-4a}$$

$$-\sqrt{\frac{ab+\frac{4a^2}{1-4a}}{1-4a}} \leq \epsilon-\frac{2a}{1-4a} \leq \sqrt{\frac{ab+\frac{4a^2}{1-4a}}{1-4a}}$$

这里只要考虑上界，因此

$$\epsilon \leq \sqrt{\frac{ab+\frac{4a^2}{1-4a}}{1-4a}}+\frac{2a}{1-4a}=\sqrt{\frac{ab}{1-4a}+\frac{4a^2}{(1-4a)^2}}+\frac{2a}{1-4a}$$

将$a=\frac{1}{2N},b=ln\frac{4m_H(N^2)}{\delta}$带入可得

$$\epsilon \leq \sqrt{\frac{ln\frac{4m_H(N^2)}{\delta}}{2(N-2)}+\frac{1}{(N-2)^2}}+\frac{1}{(N-2)^2}$$

这里还有一个要注意的点，这里老师希望我们使用$m_{\mathcal{H}}(N)$的上界为$N^{d_{vc}}$，因此

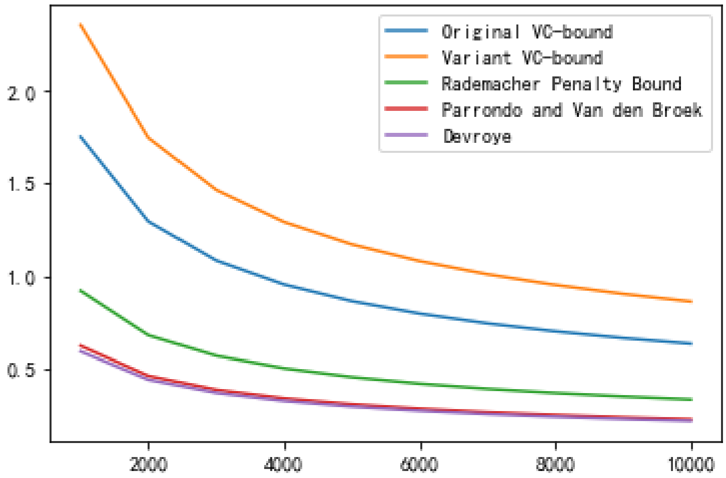
$$ln(m_{\mathcal{H}}(N)) \leq d_{vc}ln(N)$$

后面我们作图处理下

```
from scipy.special import comb
from math import log
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei'] #用来正常显示中文标签
plt.rcParams['axes.unicode_minus']=False #用来正常显示负号

dvc=50
delta=0.05

#计算lnm(N)
def lnm(n):
    s=dvc*log(n)
    return s

#Original VC-bound
def f1(n):
    result=(8/n)*(log(4/delta)+lnm(2*n))
    result=result**0.5
    return result

#Variant VC bound
def f2(n):
```

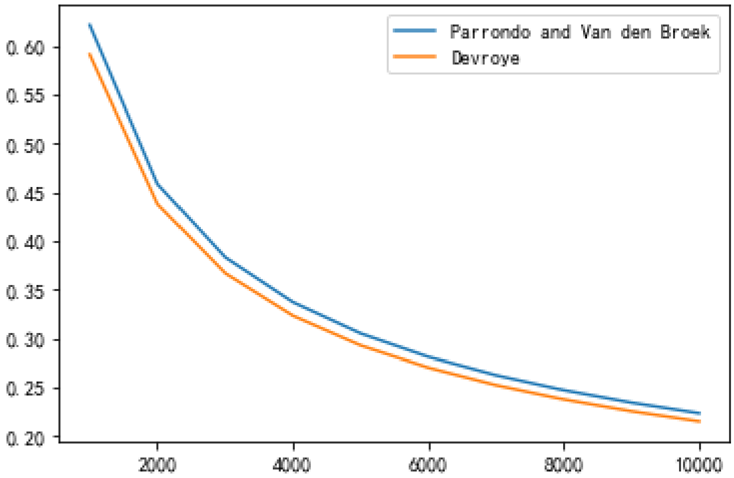
```python
    result=(16/n)*(log(2/(delta**0.5))+lnm(n))
    result=result**0.5
    return result

#Rademacher Penalty Bound
def f3(n):
    k1=(2/n)*(log(2*n)+lnm(n))
    k2=(2/n)*log(1/delta)
    k3=1/n
    result=k1**0.5+k2**0.5+k3
    return result

#Parrondo and Van den Broek
def f4(n):
    k1=1/n
    k2=1/(n**2)+(1/n)*(log(6/delta)+lnm(2*n))
    k2=k2**0.5
    result=k1+k2
    return result

#Devroye
def f5(n):
    k1=1/((n-2)**2)
    k2=(log(4/delta)+lnm(n**2))/(2*(n-2))+1/(n-2)
    k2=k2**0.5
    result=k1+k2
    return result
```

```python
#产生点集
import numpy as np
x=np.arange(1000,10001,1000)

y1=[f1(i) for i in x]
y2=[f2(i) for i in x]
y3=[f3(i) for i in x]
y4=[f4(i) for i in x]
y5=[f5(i) for i in x]

#作图
plt.plot(x,y1,label="Original VC-bound")
plt.plot(x,y2,label="Variant VC-bound")
plt.plot(x,y3,label="Rademacher Penalty Bound")
plt.plot(x,y4,label="Parrondo and Van den Broek")
plt.plot(x,y5,label="Devroye")
plt.legend()
plt.show()
```



可以看到Parrondo and Van den Broek以及Devroye非常接近，我们再仔细看一下

```
plt.plot(x,y4,label="Parrondo and Van den Broek")
plt.plot(x,y5,label="Devroye")
plt.legend()
plt.show()
```



因此n=10000时，Devroye给出的上界最小

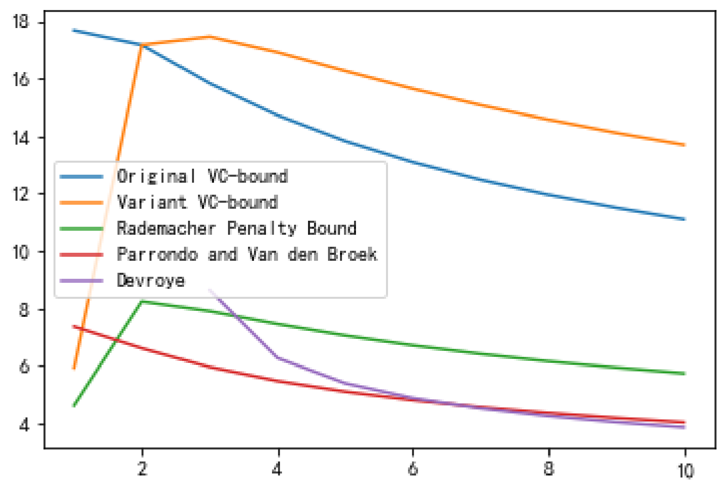
Problem 5

和上题一致，我们依旧作图看一下

```
#产生点集
import numpy as np
x=np.arange(1,11)

y1=[f1(i) for i in x]
y2=[f2(i) for i in x]
y3=[f3(i) for i in x]
y4=[f4(i) for i in x]
y5=[f5(i) for i in x]
```

```
#作图
plt.plot(x,y1,label="Original VC-bound")
plt.plot(x,y2,label="Variant VC-bound")
plt.plot(x,y3,label="Rademacher Penalty Bound")
plt.plot(x,y4,label="Parrondo and Van den Broek")
plt.plot(x,y5,label="Devroye")
plt.legend()
plt.show()
```

```
D:\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:47: RuntimeWarning: invalid value
encountered in double_scalars
D:\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:45: RuntimeWarning: divide by zero
encountered in long_scalars
D:\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:46: RuntimeWarning: divide by zero
encountered in true_divide
D:\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:46: RuntimeWarning: divide by zero
encountered in long_scalars
```



可以看到n=5时，Parrando and Van den Broek给出的上界最小。
这题以及上一题可以直接计算，不过我比较喜欢作图比较，感觉更清晰一些。

Problem 6

这题和learning from data第二章的Problem 2.3(a)类似

第一种情形为$-1,1-1$或者$1,-1,1$，即区间$[l,r]$内部有元素，且区间$[l,r]$两侧均有元素。这种情形只要在N个点之间的$N-1$个间隔中挑选出两个即可，所以这种情形共有$2C_{N-1}^2=(N-1)(N-2)$，乘以2是因为$[l,r]$内部可以为-1，也可以为1。

第二种情形为$-1,1$或者$1,-1$的，即区间$[l,r]$内部有元素，一侧没有元素。这种情形只要在N个点之间的$N-1$个间隔中挑选出一个即可，所以这种情形共有$2(N-1)=2N-2$，乘以2依旧是因为±1的关系。

第三种情形为1或者-1，因此有2种情形。

因此

$$m_{\mathcal{H}}(N)=(N-1)(N-2)+2N-2+2=N^2-N+2$$

Problem 7

接着上题，注意

$$m_{\mathcal{H}}(3)=3^2-3+2=8=2^3$$
$$m_{\mathcal{H}}(4)=4^2-4+2=14<2^4$$

因此$d_{vc}=3$

Problem 8

做映射$y=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$，所以这个问题可以化为类似Problem 6的问题，但用我之前的思路考虑比较麻烦，这里用另一种思路。注意这里两圆之间的部分为$+1$，因此问题为N个点之间以及两侧$N+1$个间隔中挑选2个，最后要需要考虑全-1的情形，因此

$$m_H(N)=C_{N+1}^2+1$$

Problem 9

这题就是learning from data第二章的Problem 2.16，结论为$d_{vc}=D+1$

这里分两步证明:

(a)存在$D+1$个点可以被shatter

(b)任意$D+2$个点无法被shatter

(a)记$y_j=\sum_{i=0}^{D}c_ix_j^i$，现在取$D+1$个点，$x_1,x_2\ldots x_{D+1},x_j=j$

那么

$$\left(\begin{array}{c}y_1\\y_2\\\ldots\\y_{D+1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\sum_{i=0}^{D}c_ix_1^i\\\sum_{i=0}^{D}c_ix_2^i\\\ldots\\\sum_{i=0}^{D}c_ix_{D+1}^i\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccccc}1&1&1&\ldots&1\\1&2&2^2&\ldots&2^D\\1&3&3^2&\ldots&3^D\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\1&(D+1)&(D+1)^2&\ldots&(D+1)^D\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c}c_0\\c_1\\\ldots\\c_D\end{array}\right)$$

我们知道

$$\left(\begin{array}{ccccc}1&1&1&\ldots&1\\1&2&2^2&\ldots&2^D\\1&3&3^2&\ldots&3^D\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\1&(D+1)&(D+1)^2&\ldots&(D+1)^D\end{array}\right)\text{对应的行列式为范德蒙行列式，不为}0$$

那么对任意的$y=(y_1,y_2,\ldots,y_{D+1})^T$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^D \\
1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^D \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & (D+1) & (D+1)^2 & \dots & (D+1)^D
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{D+1} \end{pmatrix}
$$

关于$c = (c_0, c_1, \dots c_D)^T$有解，因此存在$D+1$个点可以被shatter

(b)记$z_j = (1, x_j, x_j^2 \dots x_j^D) \in R^{D+1}$，那么现在任取$D+2$个点$x_1, x_2 \dots x_{D+2}$，对应可以得到$z_1, z_2 \dots z_{D+2}$。$R^{D+1}$空间任意$D+2$个点必然线性相关，所以不妨设$z_{D+2}$可以被线性表出，注意$c = (c_0, c_1, \dots c_D)^T$

$$
z_{D+2} = \sum_{i=1}^{D+1} k_i z_i
$$
$$
c^T z_{D+2} = \sum_{i=1}^{D+1} c^T k_i z_i
$$
$$
sign(c^T z_{D+2}) = sign(\sum_{i=1}^{D+1} k_i c^T z_i)
$$

也就是说z_{D+2}的分类被$z_1, z_2 \dots z_{D+1}$确定，那么$(sign(z_1), sign(z_2) \dots sign(z_{D+1}), -sign(z_{D+2}))$这种情形必然无法被划分出来，因此$d_{vc} \le D+1$

结合(a),(b)我们可得

$$
d_{vc} = D+1
$$

Problem 10

对于d维决策树，我们可以理解为将区域划分为2^d个互相独立的区域，每个区域可以表示$+1$或者-1，所以一共可以表示出2^{2^d}种，因此

$$
d_{vc} = 2^d
$$

Problem 11

这题的答案是$+\infty$，题目挺有意思的，有一题类似的题目可以参考learning from data的Problem 2.18。

我们先看题目，乍一看挺复杂的，我们先考虑简单一点的情况，即αx为整数的情形：

$$
\text{要使得} h_\alpha(x) \text{为} 1\text{，那么} |(\alpha x) mod\ 4 - 2| - 1 > 0 \\
\text{因此} (\alpha x) mod\ 4 = 0 \\
\text{要使得} h_\alpha(x) \text{为} -1\text{，那么} |(\alpha x) mod\ 4 - 2| - 1 < 0 \\
\text{因此} (\alpha x) mod\ 4 = 2
$$

接着考虑一般情形:

$$
\text{要使得} h_\alpha(x) \text{为} 1\text{，那么} |(\alpha x) mod\ 4 - 2| - 1 > 0 \\
\text{因此} (\alpha x) mod\ 4 > 3 \\
\text{或} 0 \le (\alpha x) mod\ 4 < 1 \\
\text{要使得} h_\alpha(x) \text{为} -1\text{，那么} |(\alpha x) mod\ 4 - 2| - 1 < 0 \\
\text{因此} 1 < (\alpha x) mod\ 4 < 3
$$

简单来说，当$(\alpha x)\ mod4$处于1到3时$h_\alpha(x)$为-1，否则为$+1$。

接下来，结合0,2这两个临界点以及上述结论，我们这样构造α以及x:

任取$(y_1,\ldots,y_N)\in\{-1,+1\}^N$，我们构造这样一个$z=(z_1,\ldots,z_N)$，使得

$$
\begin{gathered}
\text{当}\, y_i=+1\text{时，}\ z_i=0 \\
\text{当}\, y_i=-1\text{时，}\ z_i=2 \\
\text{这一步可以结合我们之前所说的}\, 0,2\, \text{两个特殊情形理解}
\end{gathered}
$$

现在取

$$
\begin{gathered}
\alpha=0.z_1z_2\ldots z_N \\
x=(x_1,\ldots,x_N),x_n=10^n
\end{gathered}
$$

那么

$$
\begin{gathered}
x_1\times\alpha=z_1.\ z_2\ldots z_N \\
x_i\times\alpha=z_1z_2\ldots z_{i-1}z_i\ .\ z_{i+1}\ldots z_N(i\geq 2)
\end{gathered}
$$

首先有一个很显然的结论

$$
z_1z_2\ldots z_{i-1}z_i\ mod\ 4=z_{i-1}z_i\ mod\ 4
$$

这是因为100的倍数模4为0，但这里因为$z_i\in\{0,2\}$，事实上有以下更强的结论

$$
z_1z_2\ldots z_{i-1}z_i\ mod\ 4=z_{i-1}z_i\ mod\ 4=z_i\ mod\ 4
$$

这是因为

$$
z_{i-1}z_i\ mod\ 4=\begin{cases} z_i\ mod\ 4(z_{i-1}=0) \\ (20+z_i)\ mod\ 4=z_i\ mod\ 4(z_{i-1}=2) \end{cases}
$$

因此

$$
\begin{gathered}
\text{（}x_1\times\alpha\text{）}\ mod\ 4=z_1.\ z_2\ldots z_N\ mod\ 4 \\
(x_i\times\alpha)\ mod\ 4=z_1z_2\ldots z_{i-1}z_i\ .\ z_{i+1}\ldots z_N\ mod\ 4=z_i\ .\ z_{i+1}\ldots z_N\ mod\ 4(i\geq 2) \\
\text{这两式可以统一为} \\
(x_i\times\alpha)\ mod\ 4=z_i\ .\ z_{i+1}\ldots z_N\ mod\ 4 \\
\text{进一步，我们有} \\
z_i\leq(x_i\times\alpha)\ mod\ 4<z_i+1 \\
\text{当}\, z_i=0\text{时，}\ 0\leq(x_i\times\alpha)\ mod\ 4<1 \\
\text{当}\, z_i=2\text{时，}\ 2\leq(x_i\times\alpha)\ mod\ 4<3
\end{gathered}
$$

回忆我们之前的结论以及假设

$$
\begin{gathered}
\text{当}\,(\alpha x)\ mod4\text{处于}\,1\text{到}\,3\text{时，}\ h_\alpha(x)=-1\text{，否则}\, h_\alpha(x)=1 \\
\text{当}\, y_i=+1\text{时，}\ z_i=0 \\
\text{当}\, y_i=-1\text{时，}\ z_i=2
\end{gathered}
$$

所以

$$h_\alpha(x_i) = 1 = y_i(z_i = 0)$$
$$h_\alpha(x_i) = -1 = y_i(z_i = 2)$$

所以任意$x = (x_1, \ldots, x_N)$均可以被shatter，因此

$$d_{vc} = +\infty$$

Problem 12

分两步考虑，第一步先考虑前i个点，这i个点最多可以区分出2^i种，对于剩下的$N-i$个点，最多可以被区分出$m_{\mathcal{H}}(N-i)$种。那么

$$m_{\mathcal{H}}(N) \le 2^i m_{\mathcal{H}}(N-i)(i = 1, 2, \ldots N-1)$$

因此

$$m_{\mathcal{H}}(N) \le min_{1\le i\le N-1} 2^i m_{\mathcal{H}}(N-i)(i = 1, 2, \ldots N-1)$$

因此结论成立

Problem 13

这题乍一看挺复杂的，其实想的简单一点就行。

我们知道$m_H(N)$要么等于2^N，要么有一个多项式的上界，根据这两点，除了$2^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}$不可能成为$m_H(N)$

Problem 14

这一题以及下一题均可以参考learning from data的Problem 2.13

(b)首先有直觉反应：

$$\text{如果 } A \subseteq B, \text{那么 } d_{vc}(A) \le d_{vc}(B)$$

所以猜测

$$0 \le dvc(\cap_{k=1}^K H_k) \le min\{(d_{vc}(H_k))\}_{k=1}^K$$

$0 \le d_{vc}(\cap_{k=1}^K H_k)$是显然的，另一边使用反证法，记$d_1 = d_{vc}(\cap_{k=1}^K H_k), d_2 = min\{(d_{vc}(H_k))\}_{k=1}^K$

若$d_1 \ge d_2 + 1$，那么$\cap_{k=1}^K H_k$可以shatter $d_2 + 1$个点，那么至少存在一个$H_i(i = 1 \ldots k)$，使得H_i也可以shatter $d_2 + 1$个点，这就与$d_2 = min\{(d_{(vc)}(H_k))\}_{k=1}^K$相矛盾了，所以

$$dvc(\cap_{k=1}^K H_k) \le min\{(d_{vc}(H_k))\}_{k=1}^K$$

Problem 15

(c)这题参考了别人的笔记，[笔记地址]

左边比较简单，由之前的结论即可。

$$\text{因为}H_k \subseteq \cup_{k=1}^{K} H_k$$
$$\text{所以}\, d_{vc}(H_k) \le d_{vc}(\cup_{k=1}^{K} H_k)(k=1...K)$$
$$max\{d_{vc}(H_k)\}_{k=1}^{K} \le d_{vc}(\cup_{k=1}^{K} H_k)$$

观察下右边的形式，其实只要证明$K=2$的情形然后使用数学归纳法即可，下面记$d_1=d_{vc}(H_1), d_2=d_{vc}(H_2)$，考虑成长函数$m_H(N)$，首先

$$m_{H_1\cup H_2}(N) \le m_{H_1}(N) + m_{H_2}(N)$$

对于N个元素，$H_1\cup H_2$最多可以表示出$m_{H_1\cup H_2}(N)$种分类，对于每种分类，或者由H_1表示，或者由H_2表示，所以$m_{H_1\cup H_2}(N)$应该小于H_1和H_2表示出来的分类之和。而H_1最多可以表示出$m_{H_1}(N)$种分类，H_2最多可以表示出$m_{H_2}(N)$种分类，因此上述不等式成立。

回到原题，使用上述结论以及VC不等式，我们可得

$$m_{H_1\cup H_2}(N) \le m_{H_1}(N) + m_{H_2}(N) \le \sum_{i=0}^{d_1}\binom{N}{i} + \sum_{i=0}^{d_2}\binom{N}{i}$$

接着我们使用反证法，如果

$$d_{vc}(H_1\cup H_2) \ge 2 + d_{vc}(H_1) + d_{vc}(H_2) = d_1 + d_2 + 2$$

那么

$$m_{H_1\cup H_2}(d_1+d_2+2) = 2^{d_1+d_2+2}$$

把$N=d_1+d_2+2$带入$\sum_{i=0}^{d_1}\binom{N}{i} + \sum_{i=0}^{d_2}\binom{N}{i}$得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{d_1}\binom{N}{i} + \sum_{i=0}^{d_2}\binom{N}{i} &= \sum_{i=0}^{d_1}\binom{d_1+d_2+2}{i} + \sum_{i=0}^{d_2}\binom{d_1+d_2+2}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{d_1}\binom{d_1+d_2+2}{i} + \sum_{i=0}^{d_2}\binom{d_1+d_2+2}{d_1+d_2+2-i} \\
&\text{令}\, j = d_1+d_2+2-i\text{，那么}\,j\text{的范围从}\,d_1+2\text{到}\,d_1+d_2+2 \\
&= \sum_{i=0}^{d_1}\binom{d_1+d_2+2}{i} + \sum_{j=d_1+2}^{d_1+d_2+2}\binom{d_1+d_2+2}{j} \\
&= 2^{d_1+d_2+2} - \binom{d_1+d_2+2}{d_1+1} \\
&< 2^{d_1+d_2+2}
\end{aligned}$$

所以

$$m_{H_1\cup H_2}(d_1+d_2+2) \le \sum_{i=0}^{d_1}\binom{d_1+d_2+2}{i} + \sum_{i=0}^{d_2}\binom{d_1+d_2+2}{i} < 2^{d_1+d_2+2}$$

与之前所述矛盾。因此

$$d_{vc}(H_1\cup H_2) \le 1 + d_{vc}(H_1) + d_{vc}(H_2) = d_1 + d_2 + 1$$
$$\text{当}\,K=2\text{时，}\,d_{vc}(\cup_{k=1}^{K} H_k) \le K - 1 + \sum_{k=1}^{K} d_{vc}(H_k)\text{成立}$$

假设$K=n$时不等式成立，$K=n+1$时

$$
\begin{aligned}
d_{vc}(\cup_{k=1}^{n+1}H_k) &= d_{vc}((\cup_{k=1}^{n}H_k)\cup H_{n+1}) \\
&\le 1+d_{vc}(\cup_{k=1}^{n}H_k)+d_{vc}(H_{n+1}) \\
&\le 1+n-1+\sum_{k=1}^{n}d_{vc}(H_k)+d_{vc}(H_{n+1}) \\
&= n+\sum_{k=1}^{n+1}d_{vc}(H_k)
\end{aligned}
$$

因此$K=n+1$时不等式也成立

Problem 16

这题可以参考第一题，就是计算数据中带有偏差的$E_{out}(h_s;\theta)$，我们取和第一题一致的符号，那么

$$
E_{out}(h_s;\theta)=\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)
$$

此题中有20%的数据为噪声，因此$\lambda=0.8$，我们再来计算μ，即错误率。先回顾题目

$$
\begin{gathered}
h_{s;\theta}(x)=s\cdot sign(x-\theta)\\
\text{当}s=1\text{时，若}x<\theta,h_{s;\theta}(x)=-1;x>\theta,h_{s;\theta}(x)=1\\
\text{当}s=-1\text{时，若}x<\theta,h_{s;\theta}(x)=1;x>\theta,h_{s;\theta}(x)=-1
\end{gathered}
$$

我们知道原始数据服从$[-1,1]$上的均匀分布，$\tilde s(x)=sign(x)$。

$$
\text{因此}x<0\text{时},\tilde s(x)=-1;x>0,\tilde s(x)=1
$$

作图我们可知当$s=1$时，$\mu=\frac{|\theta|}{2}$，那么

$$
\begin{aligned}
E_{out}(h_s;\theta)&=\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)\\
&=0.8\times\frac{|\theta|}{2}+0.2\times\frac{2-|\theta|}{2}\\
&=0.2+0.3|\theta|
\end{aligned}
$$

当$s=-1$时，$\mu=\frac{2-|\theta|}{2}$，那么

$$
\begin{aligned}
E_{out}(h_s;\theta)&=\lambda\mu+(1-\lambda)(1-\mu)\\
&=0.8\times\frac{2-|\theta|}{2}+0.2\times\frac{|\theta|}{2}\\
&=0.8-0.3|\theta|
\end{aligned}
$$

我们将s和上述两种情况统一在一起可得

$$
E_{out}(h_s;\theta)=0.5+0.3s(|\theta|-1)
$$

Problem 17

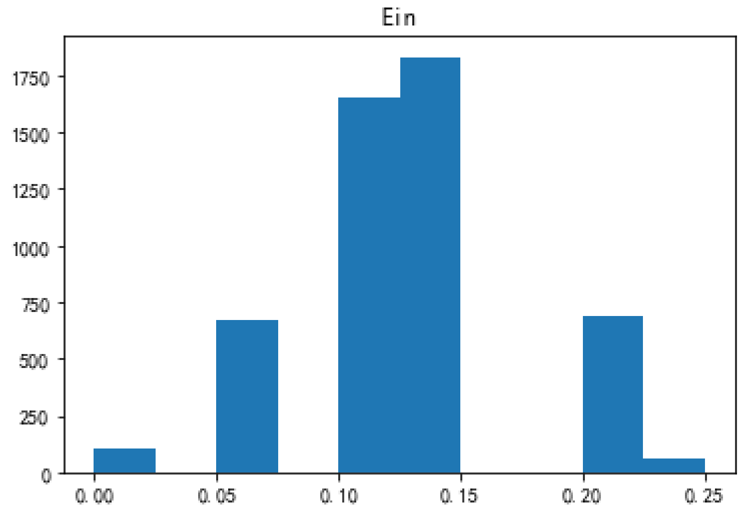
这题以及下一题就是编程模拟上面题目中的情况并计算E_{in},E_{out}

```
import random
```

```python
import math

#sign(x)
def sign(x):
    if x>0:
        return 1
    else:
        return -1

#产生20个随机数
def random20():
    a=[]
    for i in range(20):
        a.append(random.uniform(-1,1))
    return a

#产生(x,sign(x))
def dat(a):
    b=[]
    for i in range(len(a)):
        b.append(sign(a[i]))
    return b

#预测函数
def h(x,a,b):
    return a*sign(x-b)

#产生(x,h(x))预测数据,注意有20%的误差
def dat1(x,a,b):
    y=[]
    for i in range(len(x)):
        d=random.random()
        if d<0.2:
            y.append(-h(x[i],a,b))
        else:
            y.append(h(x[i],a,b))
    return y

#产生theta，注意这里只要取20个点相邻两点间的点19个点以及两侧的两个点即可，两侧的点我取了-2以及+2
def Theta(x):
    a=[-2]
    for i in range(len(x)-1):
        a.append((x[i]+x[i+1])/2.0)
    a.append(2)
    return a

#计算列表a,b中不同元素个数
def cal(a,b):
    x=0
    for i in range(len(a)):
        if a[i]!=b[i]:
            x+=1
    return x
```

```python
Ein=[]
Eout=[]
for iteration in range(5000):
    ein=0
    eout=0
    #产生数据
    data=random20()
    #排序，方便后续处理
    data.sort()
    #产生(x,sign(x))
    y=dat(data)
    #产生theta
    theta=Theta(data)
    #记录最少错误次数，最好的theta以及s
    error1=20
    theta1=0
    s1=1
    #注意要考虑s=1以及s=-1
    for i in [-1,1]:
        for theta2 in theta:
            time=0
            #产生(x,h(x))预测数据
            z=dat1(data,i,theta2)
            #计算错误次数
            error2=cal(y,z)
            if error2<error1:
                error1=error2
                theta1=theta2
                s1=i
    #带入之前的公式计算
    eout+=0.5+0.3*s1*(abs(theta1)-1)
    ein+=error1/(20.0)
    Eout.append(eout)
    Ein.append(ein)
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei'] #用来正常显示中文标签
plt.rcParams['axes.unicode_minus']=False #用来正常显示负号

plt.hist(Ein)
plt.title('Ein')
plt.show()

print(sum(Ein)/len(Ein))
```

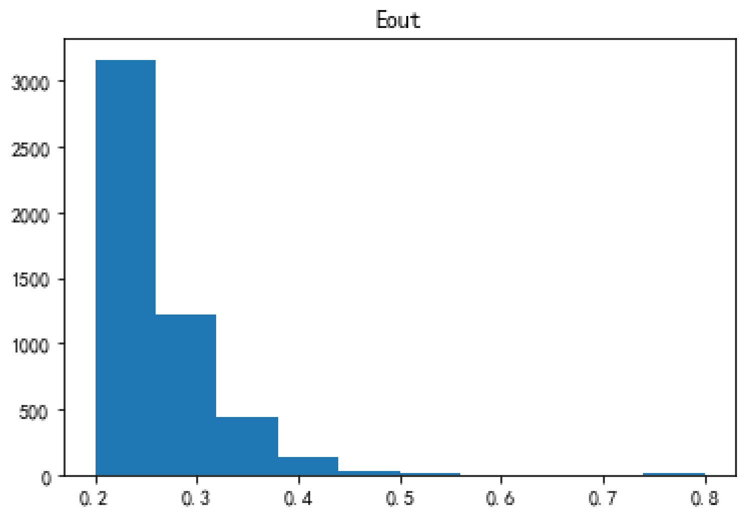



```
0.12504999999999972
```

Problem 18

直接看刚刚计算的E_{out}即可

```
plt.hist(Eout)
plt.title('Eout')
plt.show()

print(sum(Eout)/len(Eout))
```




```
0.2573352820985764
```

Problem 19

这题就是上题多维度的情形，我们要对每个维度分别按上一题的方法计算出最佳的s, θ，然后对每个维度的最佳解进行比较，求出全局最佳的s, θ以及维度dim，然后按照这个dim以及s, θ来预测我们的测试结果。

```python
#预处理函数，返回数据以及维度，注意转换的时候不要转换为int
def g(file):
    y=[]
    with open(file) as x:
        for i in x.readlines():
            j=i.strip().split(' ')
            y.append(list(map(float,j)))
        n=len(y[0])-1
    return y,n

#sign(x)
def sign(x):
    if x>0:
        return 1
    else:
        return -1

#产生(x,sign(x))
def dat(a):
    b=[]
    for i in range(len(a)):
        b.append(sign(a[i]))
    return b

#预测函数
def h(x,a,b):
    return a*sign(x-b)

#产生(x,h(x))预测数据
def dat1(x,a,b):
    y=[]
    for i in range(len(x)):
        y.append(h(x[i],a,b))
    return y

#产生theta
def Theta(x):
    a=[]
    for i in range(len(x)-1):
        a.append((x[i]+x[i+1])/2.0)
    x=a[0]-1.0
    y=a[-1]+1.0
    a.insert(0,x)
    a.append(y)
    return a

#计算列表a,b中不同元素个数
def cal(a,b):
    x=0
    for i in range(len(a)):
        if a[i]!=b[i]:
            x+=1
    return x
```

```
#行转列，方便后续处理
def trans(x):
    a=len(x)
    b=len(x[0])-1
    c=[]
    for i in range(b):
        d=[]
        for j in range(a):
            d.append(x[j][i])
        c.append(d)
    return c

def func(x):
    #数据，维度
    a,b=g(x)
    #记录实际值
    c=[]
    for i in range(len(a)):
        c.append(a[i][-1])
    #转置
    d=trans(a)
    #记录最低错误数
    error3=len(a)
    #记录theta
    theta3=0
    #记录维度
    dim=0
    #记录s
    s3=1
    for i in range(b):
        #记录每个维度的最低错误以及theta
        error1=len(a)
        theta1=0
        #记录s
        s1=1
        #第i个维度
        e=d[i]
        #排序
        data=e[:]
        data.sort()
        #产生theta
        theta=Theta(data)
        for j in [-1,1]:
            for theta2 in theta:
                z=dat1(e,j,theta2)
                error2=cal(c,z)
                if error2<error1:
                    error1=error2
                    theta1=theta2
                    s1=j
        #将第i个维度的最优解error1,theta1,s1和全局最优解比较
        if error1<error3:
```

```
            error3=error1
            theta3=theta1
            dim=i
            s3=s1
    #注意维度要加1
    return error3/len(a),theta3,dim+1,s3
```

```
train='hw2_train.dat'

error3,theta3,dim,s3=func(train)

print(error3,theta3,dim,s3)
```

```
0.25 1.6175000000000002 4 -1
```

$E_{in}=0.25$，维度为第四个维度，$h_{s;i;\theta}(x)=s\cdot sign(x_i-\theta)=-sign(x_i-1.6175)$

Problem 20

根据之前计算的s,θ,dim来预测结果并计算误差

```
test='hw2_test.dat'

#读取数据
test,n=g(test)
#数据数量
m=len(test)
#读取目标值
result=[]
for i in range(m):
    result.append(test[i][-1])
#行转列
test1=trans(test)
#计算预测结果，注意这里选择我们之前的维度
predict=dat1(test1[dim-1],s3,theta3)
#计算误差
error=cal(result,predict)
print(error*1.0/m)
```

```
0.355
```

Problem 21

考虑N个元素的点集，点集中最多有$k-1$个-1，那么这样的点集有$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{N}{i}$种。考虑$k$个元素的子集，然么$(-1,-1...-1)$(全为$-1$的情形)必然无法被表出，因为最多有$k-1$个点为$-1$。那么由$B(N,k)$的定义知

$$B(N,k)\geq\sum_{i=0}^{k-1}\binom{N}{i}$$

总结

这部分编程题做的比较早，其实解的有点啰嗦，理论题部分有些当时不怎么会，这次又做了一遍算是基本理清楚了。