EX1

1 求下列集合的幂集：$C=\{\varnothing, a, \{b\}\}$

解： $P(C)=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{a\}, \{\{b\}\}, \{\varnothing, a\}, \{\varnothing, \{b\}\}, \{a, \{b\}\}, \{\varnothing, a, \{b\}\}\}$

2 $A=(A-B)\cup(A-C)\Leftrightarrow A\cap B\cap C=\varnothing$

$\Rightarrow$ $A\cap B\cap C=(A-B)\cup(A-C)\cap B\cap C=(A\cap B')\cup(A\cap C')\cap B\cap C=\cdots=\varnothing$

$\Leftarrow$ $\forall x\in A$ $\because A\cap B\cap C=\varnothing$ $x\notin B\cap C$ 即 $x\notin B$ 且 $x\notin C$

$\therefore x\in A-B$ 且 $x\in A-C$ $\therefore x\in(A-B)\cup(A-C)$ $\therefore A\subseteq(A-B)\cup(A-C)$

$\forall x\in(A-B)\cup(A-C)$ $\cdots x\in A$ $\therefore(A-B)\cup(A-C)\subseteq A$

$\therefore A=(A-B)\cup(A-C)$

3 $r(R)=R\cup I_A$ 是偏序关系

（1）$r(R)$是自反的 （2）$r(R)$反对称的 $\forall x,y\in A$ 若$\langle x,y\rangle\in r(R)$且$\langle y,x\rangle\in r(R)$

则或者$\langle x,y\rangle\in R$或者$\langle x,y\rangle\in I_A$且$\langle y,x\rangle\in R$或者$\langle y,x\rangle\in I_A$

若$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle y,x\rangle\in R$因为R是反自反的 $\therefore x=y$

若$\langle x,y\rangle\in I_A$且$\langle y,x\rangle\in I_A$，则 $x=y$ 所以$r(R)$是反对称的

（3）$r(R)$传递的

4 $\bigcup_{X\in A}[x]_R=A\Leftrightarrow\bigcup_{X\in A}[x]_R\subseteq A$ 且 $A\subseteq\bigcup_{X\in A}[x]_R$

对$\forall y\in\bigcup_{X\in A}[x]_R$， $y\in A$ $\therefore y\in[x]_R$ 又$[x]_R\subseteq A$ $\therefore\bigcup_{X\in A}[x]_R\subseteq A$

对$\forall y\in A$，则 $y\in[y]_R$ 又$[y]_R\subseteq A$ $\therefore y\in\bigcup_{X\in A}[x]_R$ ， $A\subseteq\bigcup_{X\in A}[x]_R$

5 $\forall b1,b2\in B$ 且 $b1\neq b2$ 则有 $g(b1)\neq g(b2)$

$\because$ f 是满射，

$\therefore$对于$\forall b1,b2\in B$都有 $a1,a2\in A$，使得 $f(a1)=b1, f(a2)=b2$

$\because$若 $b1\neq b2$ ，即 $f(a1)\neq f(a2)$而 f 是函数 $\therefore a1\neq a2$

又 $g(b1)=\{x|x\in A$ 且 $f(x)=b1\}$，$g(b2)=\{x|x\in A$ 且 $f(x)=b2\}$

$\therefore a1\in g(b1), a2\in g(b2)$ 同时 $a2\notin g(b1), a1\notin g(b2)$

$\therefore$ $g(b1)\neq g(b2)$ g 是单射

6 (1) $\because g\circ f$ 是 X 上的恒等函数，$\therefore\forall x_1,x_2\in X$，$g\circ f(x_1)=x_1$, $g\circ f(x_2)=x_2$, 故必存在 c，使得 $f(x_1)=c$, $g(c)=x_1$，同样也存在 d，使得

$f(x_2)=d$, $g(d)=x_2$

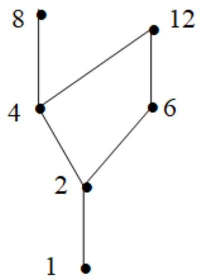
若 $x_1 \neq x_2$,但 $f(x_1)=f(x_2)$,则 c=d,但 g 是函数,若 c=d,则 g(c)=g(d),则 $x_1=x_2$,产生矛盾，故 f 为入射

（2）若 g 不是满射，则必有某个 x∈X,对所有 y∈Y，g(y)≠x。但 g∘f（x）=x，故必有某个 c∈Y，使得 f(x)=c 并且 g(c)=x,产生矛盾。

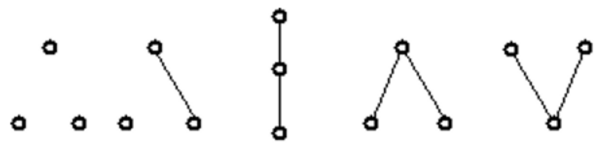
7 解:（1）哈斯图（如下图）

（2）子集 B 没有最大元，极大元是 4，6，上界是 12，最小上界是 12

（3）集合 A 上整除关系“|”是偏序关系，偏序关系满足传递性，所以 t(|)=|={⟨1,1⟩,⟨1,2⟩,⟨1,4⟩,⟨1,6⟩,⟨1,8⟩,⟨1,12⟩,⟨2,2⟩,⟨2,4⟩,⟨2,6⟩,⟨2,8⟩,,⟨2,12⟩,⟨4,4⟩,⟨4,8⟩,⟨4,12⟩,⟨6,6⟩,⟨6,12⟩,⟨8,8⟩,⟨12,12⟩}



8 所有不同的偏序集的哈斯图共 5 个，如图所示：



(1) (2) (3) (4) (5)

9 解 :（1）$\leq$满足自反性：设$(s,t)\in S\times T$，因为$s\in S$，且$\leq_1$是自反的，所以，$s\leq_1 s$。同理，可得$t\leq_2 t$。根据$\leq$的定义，可得$(s,t)\leq(s,t)$，即$\leq$满足自反性。

（2）$\leq$满足反对称性：设$(s,t)\in S\times T$，$(u,v)\in S\times T$，$(s,t)\leq(u,v)$，且$(u,v)\leq(s,t)$。根据$\leq$的定义，由$(s,t)\leq(u,v)$可得$s\leq_1 u$且$t\leq_2 v$，由$(u,v)\leq(s,t)$可得$u\leq_1 s$，$v\leq_2 t$。因为$\leq_1$满足反对称性，所以，由$s\leq_1 u$，$u\leq_1 s$可得$s=u$。同理，可得$t=v$。所以，$(s,t)=(u,v)$。从而，$\leq$满足反对称性。

（3）$\leq$满足传递性：设$(s,t)\in S\times T$，$(u,v)\in S\times T$，$(x,y)\in S\times T$，且$(s,t)\leq(u,v)$，

$(u,v)\le(x,y)$。由 $(u,v)\le(s,t)$ 可得 $s\le_1 u$ 且 $t\le_2 v$。由 $(u,v)\le(x,y)$ 可得 $u\le_1 x$ 且 $v\le_2 y$。因为 $\le_1$ 满足传递性，所以由 $s\le_1 u$，$u\le_1 x$ 可得 $s\le_1 x$。同理，可得 $t\le_2 y$。根据 $\le$ 的定义，可得 $(s,t)\le(x,y)$，从而 $\le$ 满足传递性。

EX2

1 解:（1）$\forall a\in A$，记 $b=a*a$。因为*是可结合的，故有 $b*a=(a*a)*a=a*(a*a)=a*b$。由已知条件可得 $a=a*a$。

（2）$\forall a,b\in A$，因为由（1），$a*(a*b*a)=(a*a)*(b*a)=a*(b*a)$，

$(a*b*a)*a=(a*b)*(a*a)=(a*b)*a=a*(b*a)$。

故 $a*(a*b*a)=(a*b*a)*a$，从而 $a*b*a=a$。

2：对 $\forall a, b, c\in R$

$a*(b\Diamond c)= a*(bc)=a^{bc}$

$(a*b)\Diamond(a*c)= a^b\Diamond a^c= a^b\Diamond a^c= a^{b+c}$

一般来说，对 $\forall a, b, c\in R$，$a^{bc}\ne a^{b+c}$

3 证明：

(1)设 $a^n=e$，则 $(a^{-1})^n= a^{-n}=(a^n)^{-1}=e^{-1}=e$。

反之若 $(a^{-1})^n=e$，$a^n=a^n e= a^n(a^{-1})^n=e$。

由上得 $|a|=|a^{-1}|$。

(2)设 $(a)^n=e$，则 $(b^{-1}ab)^n= (b^{-1}ab)(b^{-1}ab)\ldots(b^{-1}ab)= b^{-1}a^nb= b^{-1}eb=e$。

反之，若 $(b^{-1}ab)^n=e$，即 $(b^{-1}ab)(b^{-1}ab)\ldots(b^{-1}ab)= b^{-1}a^nb=e$。等式两边左乘以 b 右乘以 b^{-1}，得 $a^n=e$。

由上得 $|a|=|b^{-1}ab|$。

4．证明：$(ab)^{[m,n]}= a^{[m,n]}b^{[m,n]}=e$。则 ab 的周期整除 $[m,n]$。

5 证明：（1）对任意 a、b、$c\in S$，

则 $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus b+c+1=a+b+c+1+1$，

$a\oplus(b\oplus c)=a+b\oplus c+1=a+b+c+1+1$，

于是 $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$，即 $\oplus$ 满足结合律。

$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$，所以$\oplus$是可交换的。

$a \oplus (-1) = a + (-1) + 1 = a = (-1) \oplus a$，

所以-1是 $\oplus$ 单位元。

$a \oplus (-1-1-a) = a + (-1-1-a) + 1 = -1 = (-1-1-a) \oplus a$，

所以$-1-1-a$是 a 的逆元。

综上可知，$\langle S, \oplus \rangle$是一个交换群。

（2）$(a \odot b) \odot c = a \odot b + c + (a \odot b) \cdot c = a + b + a \cdot b + c + (a + b + a \cdot b) \cdot c = a + b + a \cdot b + c + a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b \cdot c$

$a \odot (b \odot c) = a + b \odot c + a \cdot (b \odot c)$

$= a + b + c + b \cdot c + a \cdot (b + c + b \cdot c)$

$= a + b + c + b \cdot c + a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b \cdot c$

所以$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$，即$\odot$满足结合律。

又 $a \odot 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$，

$0 \odot a = 0 + a + 0 \cdot a = a$，

0 是 $\odot$ 单位元

因而$\langle S, \odot \rangle$是有幺元的半群。

$a \odot (b \oplus c) = a + b \oplus c + a \cdot (b \oplus c)$

$= a + b + c + 1 + a \cdot (b + c + 1) = 2a + b + c + a \cdot b + a \cdot c + 1$

$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = a \odot b + a \odot c + 1 = a + b + a \cdot b + a + c + a \cdot c + 1$

$= 2a + b + c + a \cdot b + a \cdot c + 1$

$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$，

所以 $\odot$ 对 $\oplus$ 满足分配律。

从而$\langle S, \oplus, \odot \rangle$是一个环。

EX3

1 见课件

2 ∵G 是连通无向图，所以 G 中一定存在最长通路 P, $P = V_1V_2 \cdots V_n$

再通路中删除两个端点 V1 和 Vn，则剩余部分仍然是连通的。

3

证明. $\sum_{i=1}^{n}[deg^+(v_i)]^2 - \sum_{i=1}^{n}[deg^-(v_i)]^2$

$= \sum_{i=1}^{n}([deg^+(v_i)]^2 - [deg^-(v_i)]^2)$

$= \sum_{i=1}^{n}[deg^+(v_i) + deg^-(v_i)][deg^+(v_i) - deg^-(v_i)]$

$= \sum_{i=1}^{n} deg(v_i)[deg^+(v_i) - deg^-(v_i)]$

$= \sum_{i=1}^{n} deg(v_i) \sum_{i=1}^{n}[deg^+(v_i) - deg^-(v_i)]$

$= 2 \cdot \frac{n}{2}(n-1)(\sum deg^+(v_i) - \sum deg^-(v_i)) = 0$

∴ 成立

分析: $\sum deg^+(v_i) + \sum deg^-(v_i) = 2 \cdot \frac{n}{2}(n-1)$

$\sum deg^+(v_i) = \sum deg^-(v_i)$

$deg^+(v_i) + deg^-(v_i) = v-1$

4 见课件

5 设 T 有 n 个叶节点，m 个中间节点，2 个度数最大的节点且度数为 k
则 $2e \geq 2k+n+2m$ (1) 又 $e=n+m+2-1$ (2)
所以 $2n+2m+2 \geq 2k+n+2m$ $n \geq 2k-2$ 所以 T 中至少有 2k-2 片树叶

6 设 G 和 $\bar{G}$ 都是平面图，G 的节点数为 n，边数为 m

$\bar{G}$ 的节点数为 n'，边数为 m'

则 $n=n', m+m'=n(n+1)/2$
因为平面图中 $m \leq 3n-6$，$m' \leq 3n'-6=3n-6$，$m+m' \leq 6n-12$
$n(n+1)/2 \leq 6n-12$ 解得 $n<11$(矛盾)

EX4

1 方法 1 真值表验证 方法 2 公式推导

2 解：公式 $\equiv((P\wedge Q(1))\rightarrow R(5))\vee((P\wedge Q(2))\rightarrow R(5))\vee((P\wedge Q(3))\rightarrow R(5))$

$\equiv(T\rightarrow F)\vee(T\rightarrow F)\vee(F\rightarrow F)\equiv T$

3 P→q 为永真，分析若p为真，则q也为真

$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ 为真 则或者 $\forall xA(x)$ 或者 $\forall xB(x)$

若 $\forall xA(x)$ 为真，则 $\forall x(A(x)\vee B(x))$ 为真

若 $\forall xB(x)$ 为真，则 $\forall x(A(x)\vee B(x))$ 为真

所以 $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$ 为永真式

4

(1) $\neg(\neg P\wedge S)$	P
(2) $P\vee\neg S$	I,(1)
(3) $(\neg Q\vee R)\wedge\neg R$	P
(4) $\neg Q\vee R$	I,(3)
(5) $\neg R$	I,(3)
(6) $\neg Q$	I,(4,5)
(7) $P\rightarrow Q$	P
(8) $\neg P$	I,(6),(7)
(9) $\neg S$	I,(2),(8)

5 前提：$\neg(\exists x(\neg P(x)\wedge Q(x)))$ $\exists x(Q(x)\wedge S(x))$ 结论：$\exists x(S(x)\wedge P(x))$

(1) $\exists x(Q(x)\wedge S(x))$	P
(2) $Q(c)\wedge S(c)$	ES （1）
(3) $Q(c)$	I（2）
(4) $S(c)$	I（2）
(5) $\neg(\exists x(\neg P(x)\wedge Q(x)))$	P
(6) $\forall x(P(x)\vee\neg Q(x))$	E（5）
(7) $P(c)\vee\neg Q(c)$	US (6)
(8) $P(c)$	I（3）（7）
(9) $P(c)\wedge S(c)$	I（4）（8）
(10) $\exists x(S(x)\wedge P(x))$	EG（9）