山东大学力学课程试卷（A）答案

2010 年

一、判断下列叙述是否正确，正确的在括号内打“ √ ”，错误的在括号内打“**X**”：（共 10 小题，每题 1 分，共 10 分）

1） **[X]** 质点对某参考点的角动量的方向与对同一点的力矩的方向总是一致。

2） **[√]** 如果质点作匀速直线运动，则质点对任一点的角动量守恒。

3） **[√]** 如果质点系的总动量为零，则此质点系对任何参考点的角动量均相等。

4） **[√]** 在地球上一河流的河水的流向为自南向北，若河在北半球，则河的东岸受到的冲刷严重；若河在南半球，则河的西岸受到的冲刷严重。

5） **[X]** 物体加速度的值很大，而物体速度的值可以不变，这是不可能的。

6） **[√]** 质点在力心固定的有心力场中运动，受到指向力心的引力的作用，如果质点的运动速度方向与力的方向不一致，则质点永远不会到达力心。

7） **[X]** 质点作匀速圆周运动，由于其动量方向在不断地改变，所以它对圆心的角动量的方向也随之不断地改变。

8） **[√]** 保守力沿闭合路径所作的功为零。

9） **[X]** 质点系的总动量为零，则其对某一点的总角动量一定为零。

10） **[X]** 动量与速度的方向相同，因此，角动量也与角速度的方向相同。

二 、填空题

答题要求：请在试卷纸上粗略写明解题的步骤，最后把结果写在下面的空格内。共 10 个空，每空 3 分，共 30 分）

1、一质点沿 **X** 轴运动，其位置与时间的关系为 **x=** $6t^2-2t^3$ ，**x** 和 t 的单位分别是米和秒。则质点在

1）第三秒末的速度为___**-18m/s**_________；

2）在第三秒末的加速度为____**-24m/s^2**___。

2、 质量为 **m** 的质点作平面运动，若用平面极坐标系描述其运动，

1）质点的速度矢量可表示为：

$$\vec{v}=\tfrac{dr}{dt}\hat{e}_r+r\tfrac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta=\dot{r}\hat{e}_r+r\omega\hat{e}_\theta$$

$$\omega=\tfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$$

2) 质点相对于极点 **O** 的角动量 $\vec{L}_O$ 的大小为

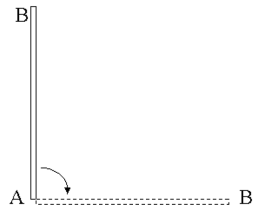
$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=mr\hat{e}_r\times(\dot{r}\hat{e}_r+r\omega\hat{e}_\theta)=mr^2\omega(\hat{e}_r\times\hat{e}_\theta)$$

$$L_o=\left|\vec{L}_O\right|=mr^2\omega=mr^2\tfrac{d\theta}{dt}$$

3) 质点的动能与角动量的大小 $\boldsymbol{L}_{\mathbf{O}}$ 的关系为

$$E_k=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\omega^2)=\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2+L_O^2\big/2mr^2$$

3、长为 L,质量为 m 的均质细杆铅直地放置在地面上，杆自静止倾倒，设杆与地面接触的点 A 在倾倒过程中没有相对地面的运动，杆全部着地的瞬间，其另一端 B 的线速度为_____ $\sqrt{3gL}$ ________



4． 质量为 **m** 的卫星在地球引力的作用下沿半径为 **r** 的圆轨道绕地球运动，设其对地球中心的角动量为 **L,** 取无穷远处为引力势能的零点。请用 **m**、**r** 和 **L** 给出以下各物理量：

1)卫星的动能： $E_k = \dfrac{L^2}{2mr^2}$

2)卫星与地球间的引力势能：$E_p = -\dfrac{L^2}{mr^2}$

3)卫星的总机械能： $E = E_k + E_p = -\dfrac{L^2}{2mr^2}$

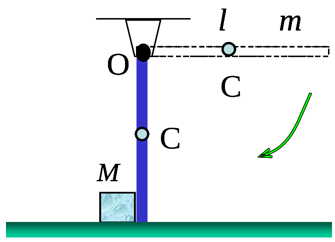
5. 小球从高度为 **H** 处自由下落，与水平放置在地面上的平板碰撞后垂直向上弹跳。设小球与平板间的恢复系数为 **e**，则经过 **n** 次碰撞后，小球向上弹跳的高度为

$h = e^{2n} H$

从下面 **5** 题中任选 **4** 题

每题 15 分，共 60 分。

三 、如图所示，长度为 *l* 质量为 *m* 的细杆可绕过端点 O 的水平轴转动，将细杆从水平位置自由释放，在竖直位置与位于水平面上的物体 *M* 相碰，物体与水平面间的滑动摩擦系数为 *μ*，碰撞后，物体沿水平面滑行了 *s* 距离后停止。求：碰撞后细杆的质心 C 离水平面的最大高度，并说明杆向左右摆的条件。（假定 O 点在水平面上 *l* 处，在竖直位置处细杆与水平面无接触，细杆与物体的碰撞时间极短，且碰后两者不再接触。）



解：

1） 杆自由下落过程中，能量守恒（取水平面为重力势能零点），设与 M 碰撞前杆的转动角速度为ω_0

$$mgl=\frac{1}{2}mgl+\frac{1}{2}I\omega_0^2\,,\quad I=\frac{1}{3}ml^2\,,$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{3g}{l}}\qquad(1)$$

2）杆物相碰，杆和物所组成的系统对 o 点的角动量守恒。设碰撞后物体的速度为 v, 杆的角速度为ω，则有

$$\frac{1}{3}ml^2\omega_0=M\upsilon l+\frac{1}{3}ml^2\omega\qquad(2)$$

3）碰后物体平面作减速的滑动，摩擦力做负功。由动能定理

$$\mu Mgs=0-\frac{1}{2}M\upsilon^2$$

$$\upsilon=\sqrt{2\mu gs}\qquad(3)$$

$$\omega=\frac{m\sqrt{3gl}-3M\sqrt{2\mu gs}}{ml}\qquad(4)$$

4）碰后杆摆动，机械能能守恒。设杆的质心上升的高度为 h,则有

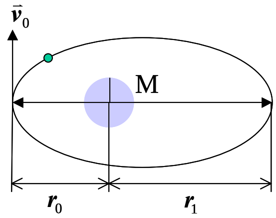
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2+\frac{1}{2}mgl=mg(h+\frac{l}{2})$$

$$h = \frac{l^2\omega^2}{6g}$$

杆的质心离水平面的最大高度：$h_{\max} = \frac{1}{2}l + h$

5）杆的左右摆动问题：由（4）式可见，碰后杆的角速度可能为正也可能为负，取决于物体 M 与地面间的滑动摩擦系数的取值，如果ω > 0，杆向左摆；如果ω < 0，杆向右摆。

四、卫星沿椭圆轨道围绕质量为 M 的行星运行，假定卫星只受到行星的万有引力的作用。设卫星距行星中心的最短距离为 r_0，最远距离为 r_1，证明：



$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

其中 h 为单位质量的卫星对行星中心的角动量，G 为万有引力常数。

证明：角动量守恒：$\boldsymbol{mr_0v_0 = mr_1v_1}$

$$r_0v_0 = r_1v_1 = h$$

$$\therefore v_0 = \frac{h}{r_0} \quad v_1 = \frac{h}{r_1} \quad (1)$$

机械能守恒: $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1}$

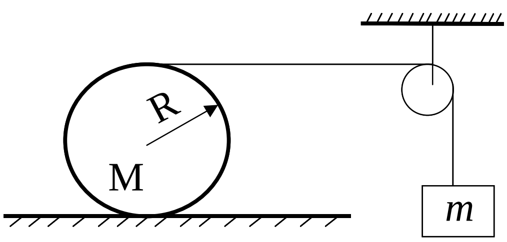
$$GM(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}) = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}v_1^2 \quad (2)$$

将(1)式代入(2)得:

$$GM(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}) = \frac{1}{2}h^2(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}) = \frac{1}{2}h^2(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1})(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1})$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

五、如图所示，质量为 M 半径为 R 的均质圆柱体放在粗糙的水平面上，柱的外周绕有轻绳，轻绳的另一端跨过质量忽略不计、轴承光



滑的定滑轮后，悬挂一质量为 **m** 的物体，若圆柱体只滚不滑，求物体 **m** 的加速度。

解：设物体 m 的加速度为 a，绳中的张力为 T，则

物体 m 的动力学方程为 $mg - T = ma$

设圆柱体与水平面间的摩擦力为 f，对圆柱体应用质心运动定理得

$$T - f = Ma_c$$

由转动定理： $(T + f)R = I\alpha$ ， $I = \frac{1}{2}MR^2$

由无滑滚动条件： $a_c = R\alpha$

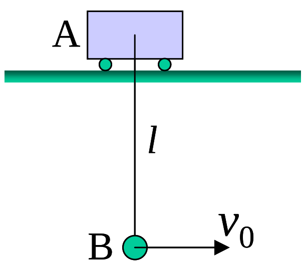
物体下落的加速度 a 应与圆柱体边缘上与绳子接触点的切向加速度相等：

$$a = R\alpha + a_c = 2a_c$$

由以上各式联立解得

$$a = \frac{8mg}{8m + 3M}$$

六 、质量为 m_A 的小车可以在一条光滑的水平轨道上自由地运动，质量为 m_B 的小球被用一根长度为 l 且不可伸长的细线悬挂在小车上。在初始时刻，小车静止而小球获得了水平方向的初始速度 v_0。求：（1）小球在达到最高点时的速度；（2）小球上升的最大高度 h（假定：$v_0^2 < 2gl$）



解：考虑小球和小车组成的系统。

（1）由于系统在水平方向不受外力的作用，谷在水平方向动量守恒。当小球到达最高点时，小球相对于小车的速度为零，即小球与小车以相同的速度 v 沿水平方向运动。

$$m_B v_0 = (m_A + m_B)v$$

$$v = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0$$

（2）外力做功：小球的重力作负功。由质点系动能定理：

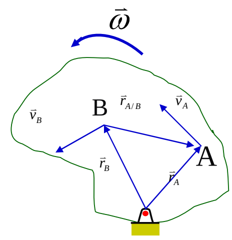
$$-m_B g h=\tfrac{1}{2}(m_A+m_B)v^2-\tfrac{1}{2}m_B v_0^2$$

$$h=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{m_B}{m_A+m_B}\cdot\frac{v_0^2}{2g}=\frac{m_A}{m_A+m_B}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$$

$$\because v_0^2<2gl \qquad \therefore h<l$$

七 、证明：刚体绕定轴转动时，在垂直于转轴的平面上的任意两点 A 和 B，它们的速度 $\vec{v}_A$ 和 $\vec{v}_B$ 在 A、B 两点连线方向的分量相等。

证明：设 A 和 B 两点的速度分别为 $\vec{v}_A$ 和 $\vec{v}_B$，相对于转轴的位矢分别为 $\vec{r}_A$ 和 $\vec{r}_B$，刚体的角速度为 $\vec{\omega}$，则有：



$$\begin{aligned}\vec{v}_A&=\vec{\omega}\times\vec{r}_A\\ \vec{v}_B&=\vec{\omega}\times\vec{r}_B\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_A-\vec{v}_B=\vec{\omega}\times(\vec{r}_A-\vec{r}_B)=\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B} \qquad (1)$$

$\vec{r}_{A/B}$：A 相对于 B 的位置矢量，与线段 AB 平行。线段 BA 方向的单位矢量：

$$B\hat{A}=\frac{\vec{r}_{A/B}}{\left|\vec{r}_{A/B}\right|}$$

（1）式两边点乘 $B\hat{A}$：

$$\vec{v}_A\cdot B\hat{A}-\vec{v}_B\cdot B\hat{A}=0$$

即 $\vec{v}_A$ 和 $\vec{v}_B$ 沿 BA 方向的分量相等