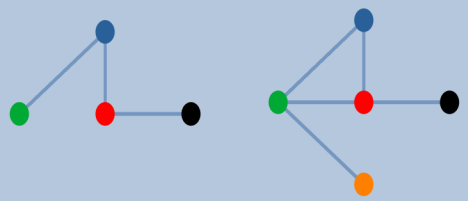
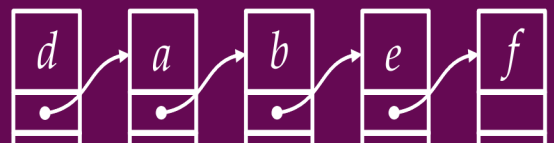
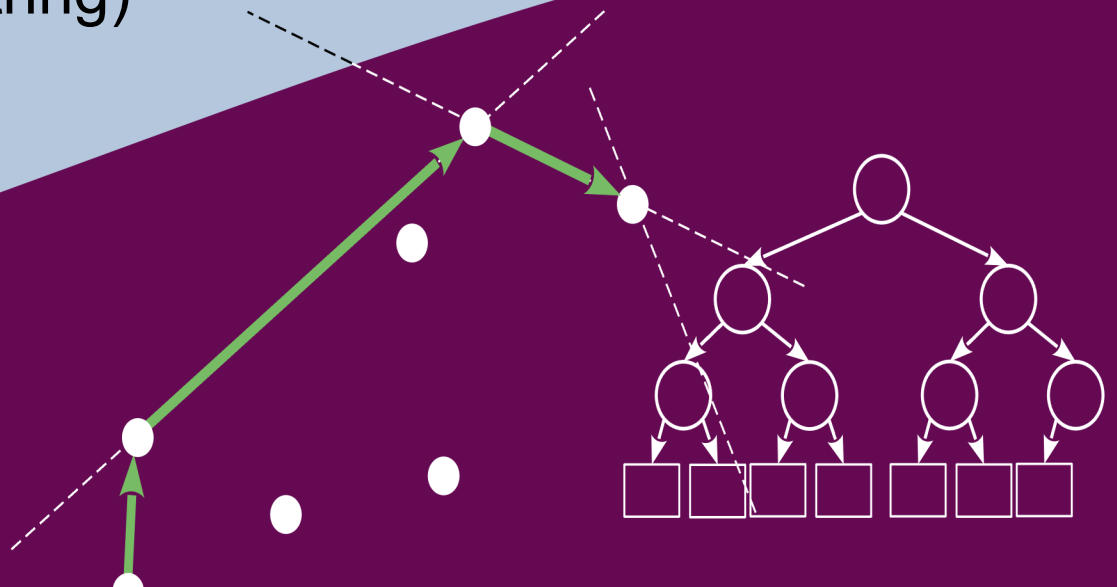
Napredni algoritmi i strukture podataka

Tjedan 3: Strukture podataka za znakovne nizove (string)







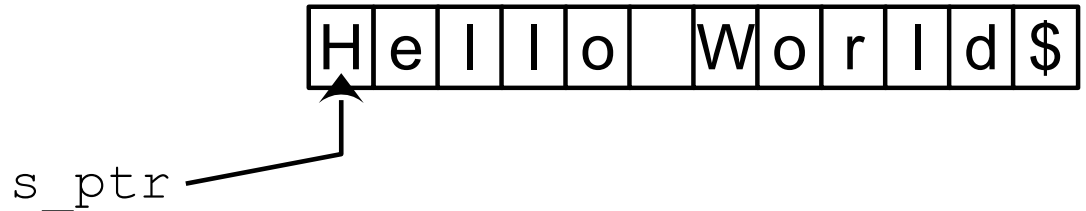
Creative Commons

- slobodno smijete:
  - dijeliti — umnožavati, distribuirati i javnosti priopćavati djelo
  - prerađivati djelo
- pod sljedećim uvjetima:
  - imenovanje: morate priznati i označiti autorstvo djela na način kako je specificirao autor ili davatelj licence (ali ne način koji bi sugerirao da Vi ili Vaše korištenje njegova djela imate njegovu izravnu podršku).
  - nekomercijalno: ovo djelo ne smijete koristiti u komercijalne svrhe.
  - dijeli pod istim uvjetima: ako ovo djelo izmijenite, preoblikujete ili stvarate koristeći ga, preradu možete distribuirati samo pod licencom koja je ista ili slična ovoj.

U slučaju daljnjeg korištenja ili distribuiranja morate drugima jasno dati do znanja licencne uvjete ovog djela.
Od svakog od gornjih uvjeta moguće je odstupiti, ako dobijete dopuštenje nositelja autorskog prava.
Ništa u ovoj licenci ne narušava ili ograničava autorova moralna prava. *Tekst licence preuzet je s http://creativecommons.org/*

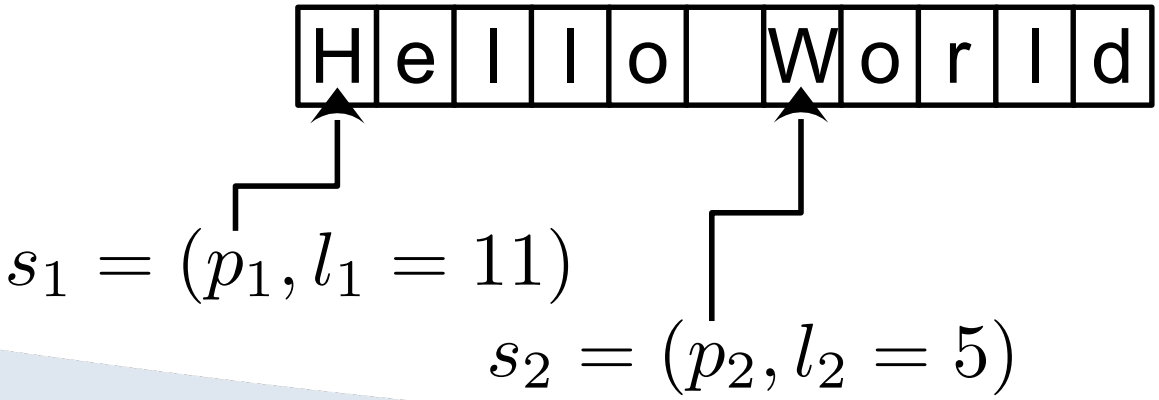
Reprezentacija znakovnog niza (1)

- Znakovni niz je okarakteriziran svojim alfabetom Σ – definira sve znakove koji se u nizu mogu naći
  - Imamo mapiranje $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, kojim se znakovima alfabeta pridodaje cijeli broj
  - Tako definiramo znakovne tablice, poput ASCII (1 bajt – 8 bitova) ili Unicode (2 bajta – 16 bitova)
- Osnovna reprezentacija – korištenjem ASCII tablice znakovni niz definiramo kao slijed bajtova koji je završen s NULL terminatorom (vrijednost 0) – a koji u predavanju označavamo kao $



Reprezentacija znakovnog niza (2)

- Reprezentacija uređenim parom (p, l), gdje je
  - p – pokazivač na prvi znak znakovnog niza
  - l – duljina niza
- Ovakva reprezentacija je zanimljiva kada na jednostavan način trebamo izolirati znakovni podniz bez stvaranja nove instance
  - Dobro rješenje kada imamo veći tekst u memoriji, pa u njemu treba mapirati pojedine dijelove
  - Za ovakvu reprezentaciju nije nužno korištenje NULL terminatora



Prefiksno stablo (Trie) (1)

- Zamislimo veći tekst u memoriji računala, te skup ključnih riječi (ili izraza) od interesa u tom tekstu
- Skup ključnih znakovnih nizova (riječi, izrazi, dijelovi teksta) definiramo kao

$$S = \{s_i : 0 < i \leq N\}$$

  - gdje je N broj znakovnih nizova
- Želimo znati da li je znakovni niz q sadržan u tekstu
  - To možemo provjeriti tako da testiramo hipotezu $q \in S$
  - Naivna implementacija bi prolazila kroz sve znakove znakovnih nizova u skupu S, što rezultira s

$$O(\sum_{s_i \in S} |s_i|)$$

Prefiksno stablo (Trie) (2)

- Trie je uređena trojka $T = (N, E, \mu)$ koja predstavlja m-stablo
  - Funkcija mapiranja $\mu: E \rightarrow \Sigma$ mapira bridove stabla na alfabet
  - Korijenski čvor predstavlja prazni znakovni niz
  - Svaki čvor Trie-a može imati najviše $|\Sigma|$ djece
    - Svaki izlazni brid čvora mora se mapirati na drugi znak alfabeta – dva različita izlazna brida jednog čvora ne mogu biti mapirani na isti znak alfabeta
  - Listovi su terminirajući čvorovi čiji su ulazni bridovi mapirani na $ (NULL terminator)
  - Trie je zapravo konačni deterministički automat koji omogućava parsiranje znakovnog niza

Prefiksno stablo (Trie) (3)

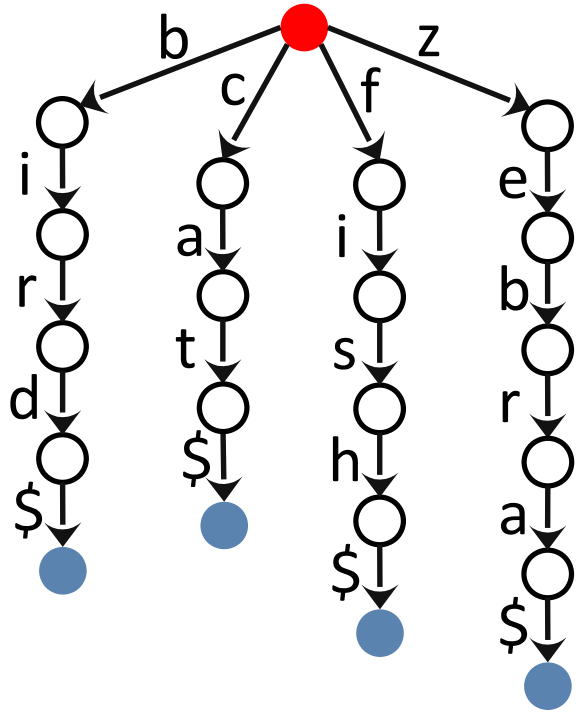
- Primjer

$$S_1 = \{"bird\$", "cat\$", "fish\$", "zebra\$"\}$$
$$\Sigma = \{\$, a, b, c, d, e, f, h, i, r, s, t, z\}$$

- Problem u ovakvom stablu je pretraživanje izlaznih bridova
  - Kako ustanoviti da li imamo izlazni brid koji je istovjetan našem sljedećem znaku u nizu q
  - Naivna implementacija bi podrazumijevala iteraciju po svim izlaznim bridovima

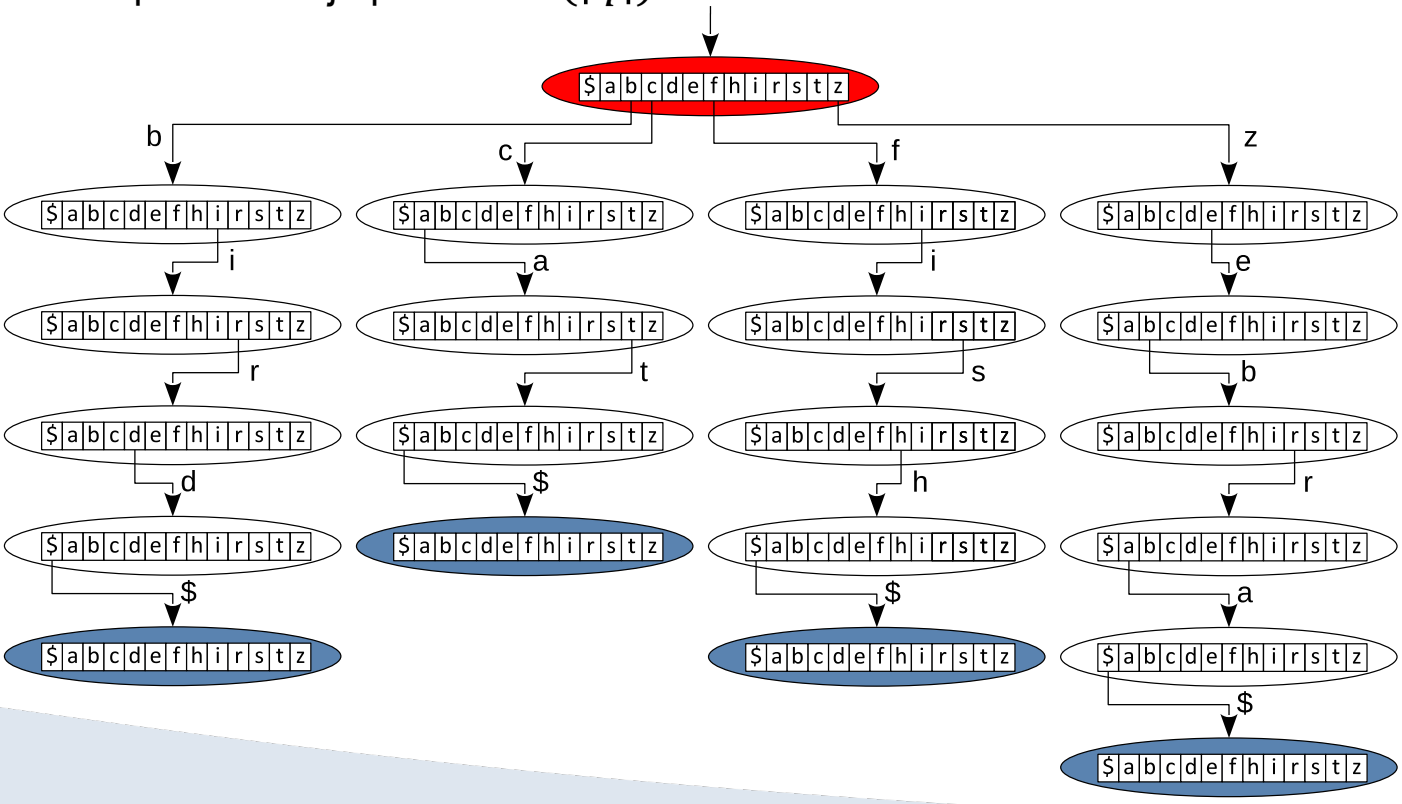
$$O(|q| * |\Sigma|)$$

  - Postoji li bolji način od toga?



Prefiksno stablo (Trie) (4)

- U svaki čvor stavimo mapirajuće polje alfabeta s pokazivačima na djecu
  - Iz mapiranja $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ znamo koji element polja gledamo
  - Ako u tom elementu ima pokazivač, tada ta tranzicija postoji
  - Prostorna kompleksnost se povećava na $O(\sum_{s_i \in S} |s_i| * |\Sigma|)$,
  - No složenost pretraživanja pada na $O(|q|)$



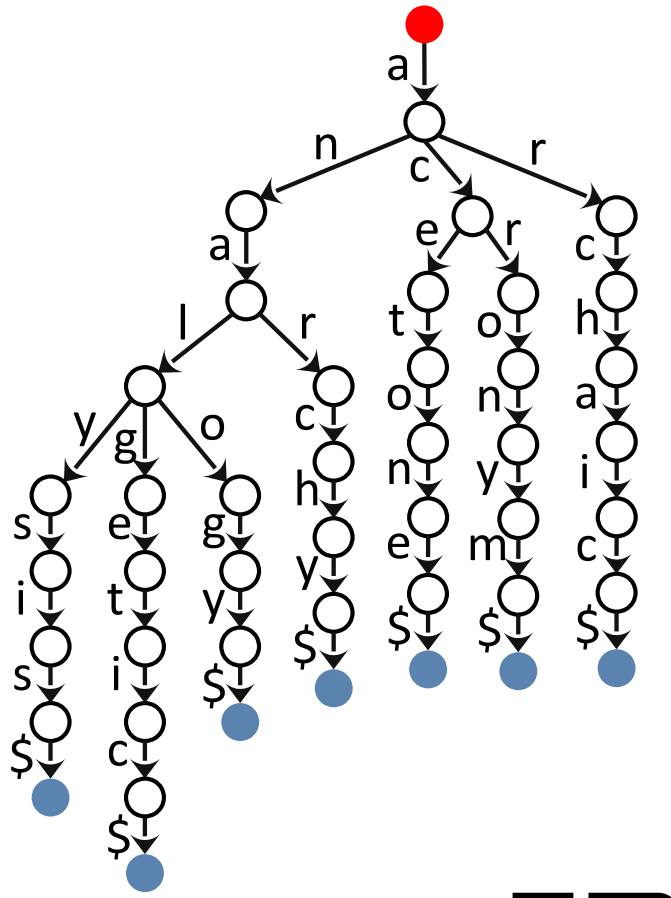
Prefiksno stablo (Trie) (5)

- Mnogo znakovnih nizova u S može dijeliti zajednički prefiks

$S_2 = \{"analysis\$", "analgetic\$", "analogy\$", "anarchy\$", "acetone\$", "acronim\$", "archaic\$"\}$

a	n	a	l	y	s	i	s	
a	n	a	l	g	e	t	i	c
a	n	a	l	o	g	y		
a	n	a	r	c	h	y		
a	c	e	t	o	n	e		
a	c	r	o	n	y	m		
a	r	c	h	a	i	c		

- Sama definicija Trie-a, koja ograničava da više se izlaznih bridova jednog čvora mapira na isti znak alfabeta, nas prisiljava da zajednički prefiksi znakovnih nizova dijele strukturu stabla



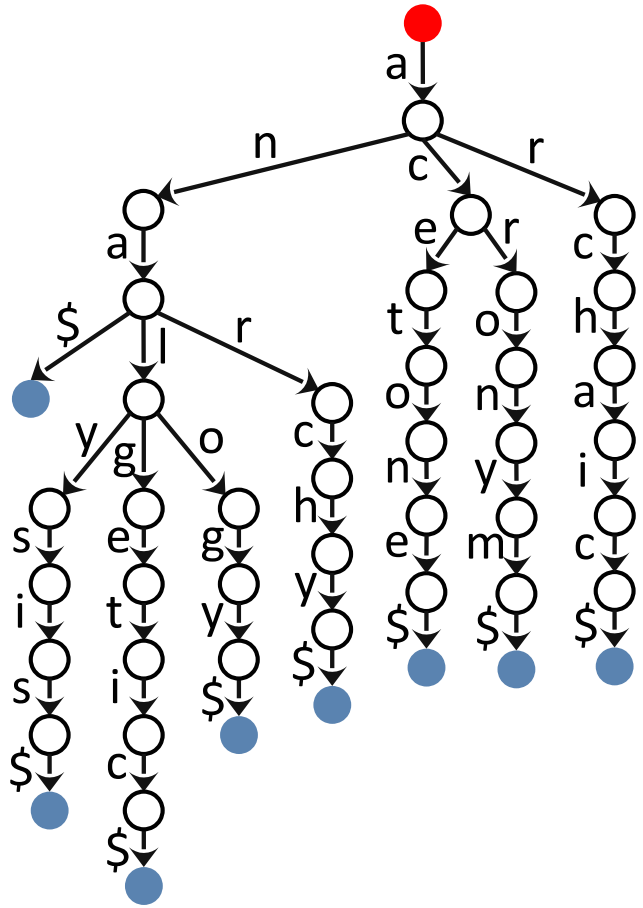
Prefiksno stablo (Trie) (6)

- Pretraživanje
  - Uzimamo znak po znak iz znakovnog niza q i slijedimo tranzicije u Trie-u T
  - Ako smo nakon \$ u q došli do lista, tada S (i Trie T) sadrži q
    - Iskoristili smo sve znakove u q, što nas je dovelo do lista Trie-a T
  - U svakom drugom slučaju q nije pronađen u S
    - Što se desi kada tražimo $q = "ana\$"$ u prethodnom Trie-u ?

```
function SearchTrie(T, q)
    cn ← root(T)
    for ch ∈ q do
        if there is transition from cn for character ch to cn_child then
                                                ▷ array[ch] ≠ NULL in cn
            cn ← cn_child
        else
            return (false, cn)
    if cn is a leaf then
        return (true, cn)
    return (false, cn)
```

Prefiksno stablo (Trie) (7)

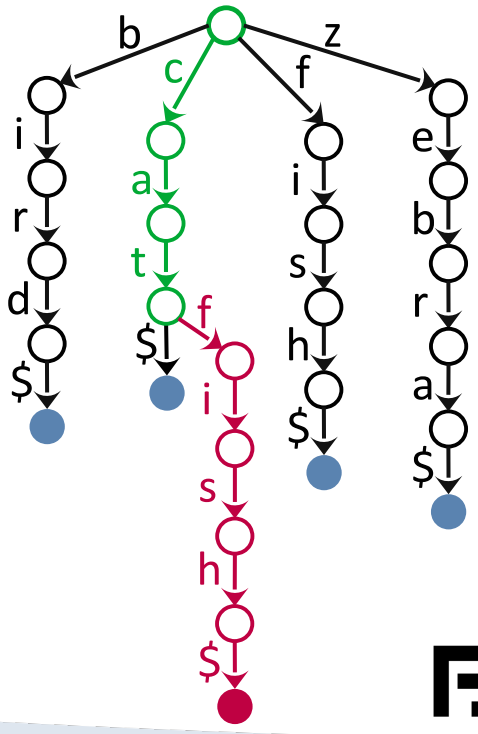
- Primjer $S_3 = S_2 \cup \{"ana\$"\}$



Prefiksno stablo (Trie) (8)

- Upis novog znakovnog niza s (*insert*)
  - Krenemo s pretraživanjem $q = s$
    - Ako pronađemo cijeli q u Trie-u T, tada je $s \in S$ i upis nije potreban
    - Inače stanemo na prvom znaku za kojeg nemamo tranziciju u Trie-u – to može biti i $
  - Stvorimo slijednu strukturu Trie-a za ostatak znakovnog niza s
- Primjer: u S_1 dodamo $s =$ „$catfish\$$”

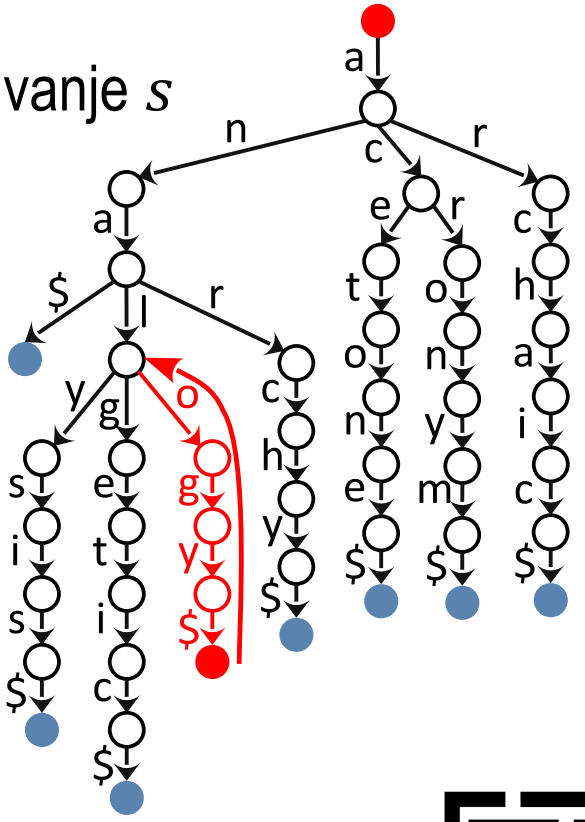
```
procedure InsertTrie(T, s)
    cn ← root(T)
    for ch ∈ s do
        if there is transition from cn for character ch to cn_child then
                                                ▷ array[ch] ≠ NULL in cn
            cn ← cn_child
        else
            create new node cn_new
            add transition for character ch from cn to cn_new
            cn ← cn_new
```



Prefiksno stablo (Trie) (9)

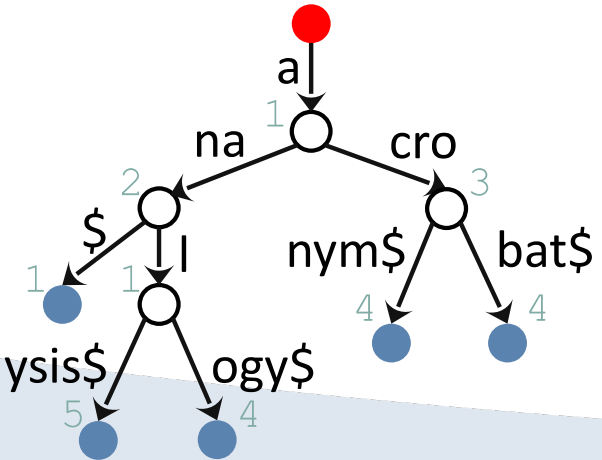
- Brisanje znakovnog niza s (*remove*)
  - Krenemo s pretraživanjem $q = s$
    - Ako pronađemo cijeli q u Trie-u T, tada je $s \in S$ i brisanje je moguće
    - Inače stanemo s brisanjem
  - Vraćamo se od lista do kojeg nas je dovelo pretraživanje s
    - Tako dugo do dok roditeljski čvor ima samo jedno dijete
- Primjer: u S_3 brišemo $s =$ „$analogy\$$”

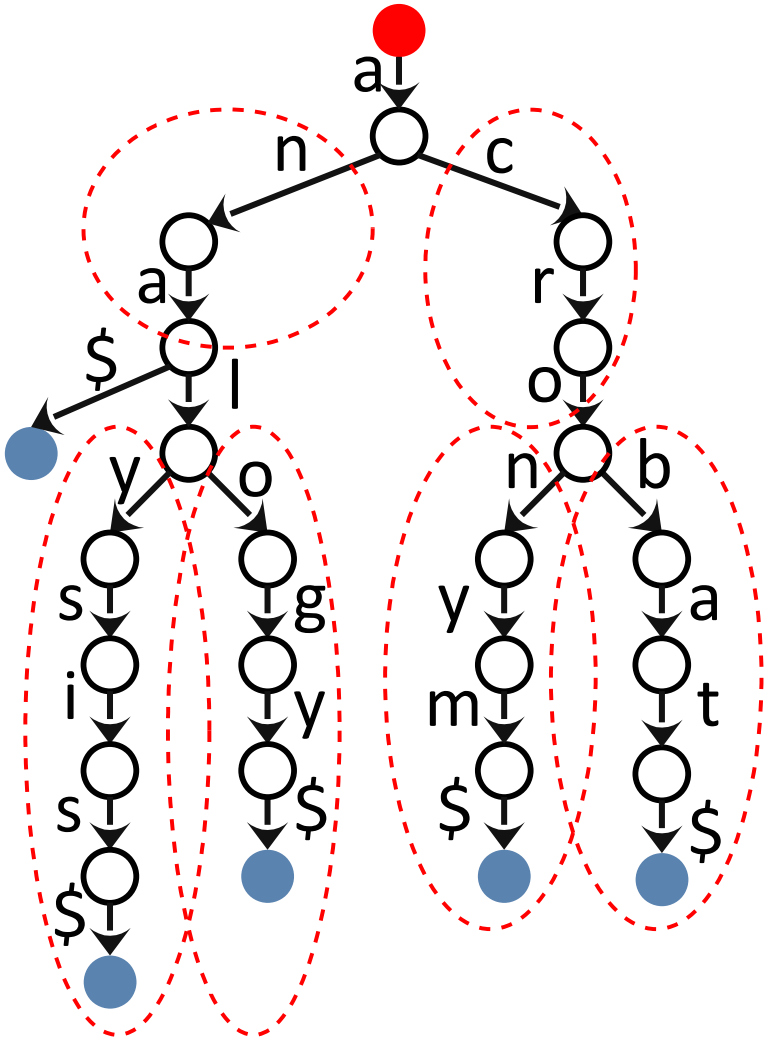
```
procedure RemoveTrie(T, s)
    (succ, cn) ← SearchTrie(T, s)
    if not succ then
        return                                  ▷ s not found in Trie
    s ← 'reversed(s)
    cn ← parent(cn)
    for ch ∈ s do
        remove transition from cn for character ch
        if cn has no children and there is a parent of cn then
            cn ← parent(cn)
        else
            return
```



Patricia stablo (1)

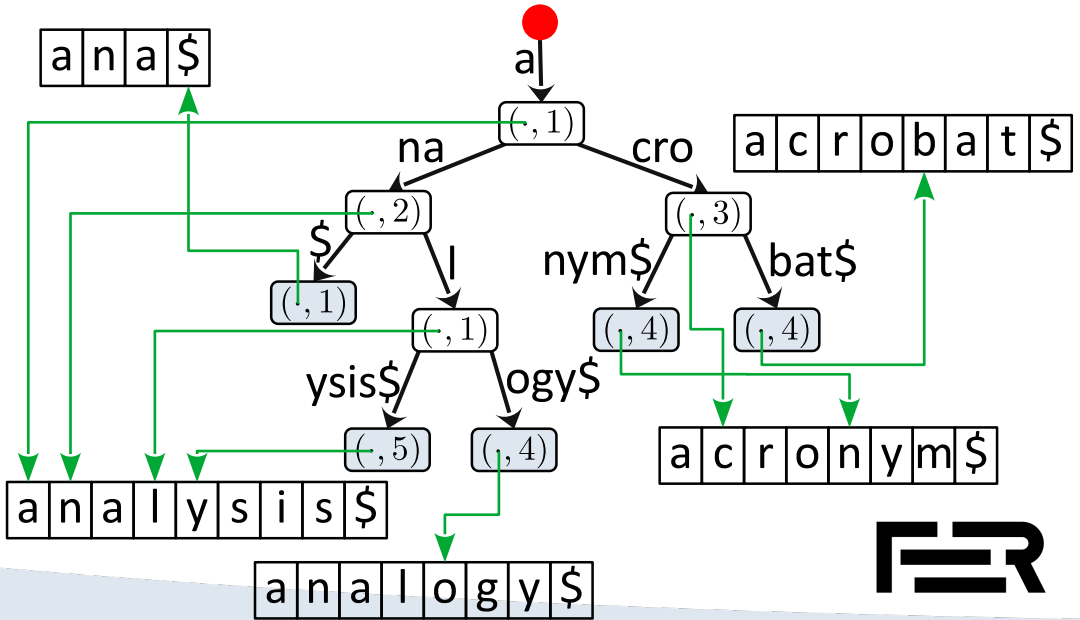
- Struktura Trie-a nije kompaktna
  - Sjetite se svih polja u čvorovima u kojima imamo samo jedan jedini pokazivač
  - Prostorna kompleksnost Trie-a se može smanjiti tako da slijed čvorova koji imaju samo jednu tranziciju pretvorimo u jednu tranziciju
  - Dobivamo kompresirani Trie ili Patricia stablo (Practical Algorithm To Retrieve Information Coded In Alphanumeric)





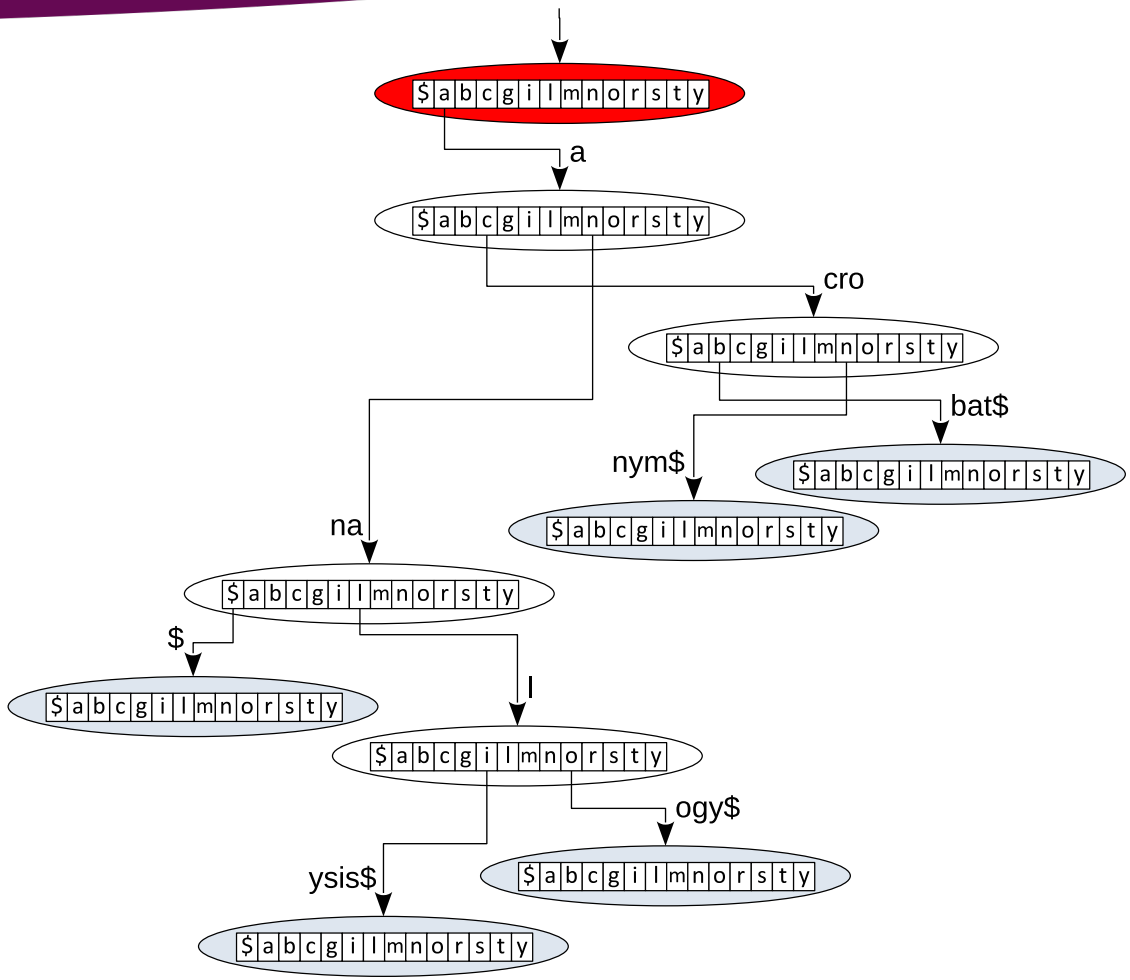
Patricia stablo (2)

- Neke bitne stavke Patricia stabla
  - Svi unutarnji čvorovi Patricia stabla imaju barem dva djeteta – inače se vraćamo na Trie strukturu
  - Reprezentacija znakovnog niza temeljena na uređenom paru (p, l) pokazuje se boljom u Patricia stablima – manja potrošnja memorije
    - U memoriji imamo skup znakovnih nizova S
    - Čvorovi pokazuju samo na određene znakovne podnizove u skup S
- Sjetimo se da u svaki čvor Patricia stabla imamo samo jedan ulazni brid
  - U čvoru možemo čuvati uređeni par za tu ulaznu tranziciju



Patricia stablo (3)

- Pokazivači u čvorovima i dalje funkcioniraju kao i kod Trie-a uz malu nadopunu
  - Tranzicije u Patricia stablu predstavljaju znakovni podniz
  - Pokazivač u čvoru odgovara prvom znaku znakovnog podniza tranzicije
  - Nije moguće da dvije tranzicije, dva izlazna brida iz čvora, imaju znakovni podniz koji počinje s istim znakom
    - Ne mogu dijeliti isti prefiks jer bi to značilo da je taj prefiks dio prethodne tranzicije



Patricia stablo (4)

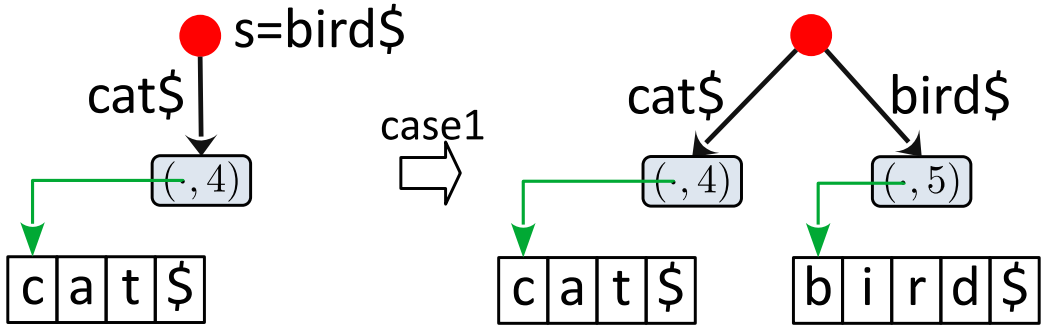
- Pretraživanje zahtijeva usporedbu znakovnog podniza sadržanog u tranziciji sa adekvatnim znakovnim podnizom od q
  - Tijekom pretraživanja trebamo pamtiti na kojem smo mjestu u znakovnom nizu q (varijabla sc)

```
function SearchPatricia(P, q = (q_p, q_l))
    sc ← 0
    cn ← root(P)
    while cn not leaf do
        if there is transition from cn for character q_p[sc] to cn_c then
                                                ▷ array[q_p[sc]] ≠ NULL in cn
            (t_p, t_l) ← string representation in cn_c
            if q_p[sc : sc + t_l] = t_p[0 : t_l] then
                                        ▷ substring matching (Python notation)
                sc ← sc + t_l
                cn ← cn_c
            else
                return false
        else
            return false
    return sc = q_l
```

Patricia stablo (5)

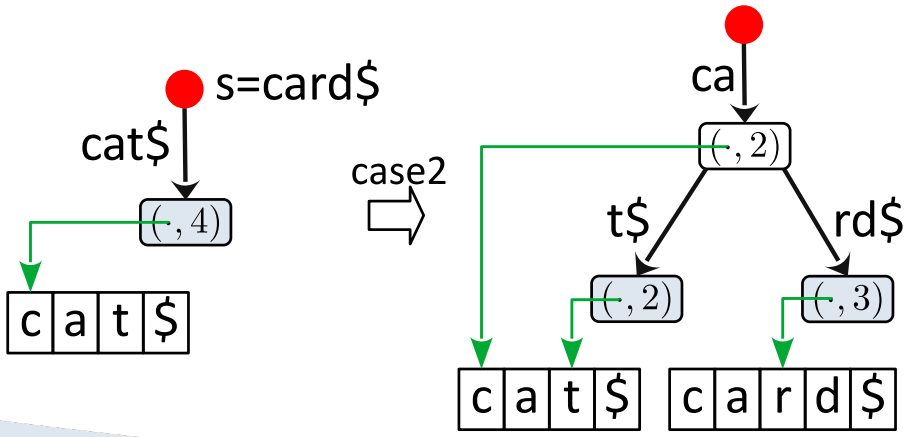
- Upis novog znakovnog niza s je nešto kompliciraniji nego u Trie-u
  - Započinjemo s pretraživanjem
  - Gledamo s aspekta trenutnog čvora – počinjemo iz korijenskog čvora

1. Nije moguće naći izlaznu tranziciju iz čvora koja bi barem djelomično podudarala ostatku znakovnog niza s
   - Dodamo novi list u strukturu i tranziciju koja je identična ostatku znakovnog niza s



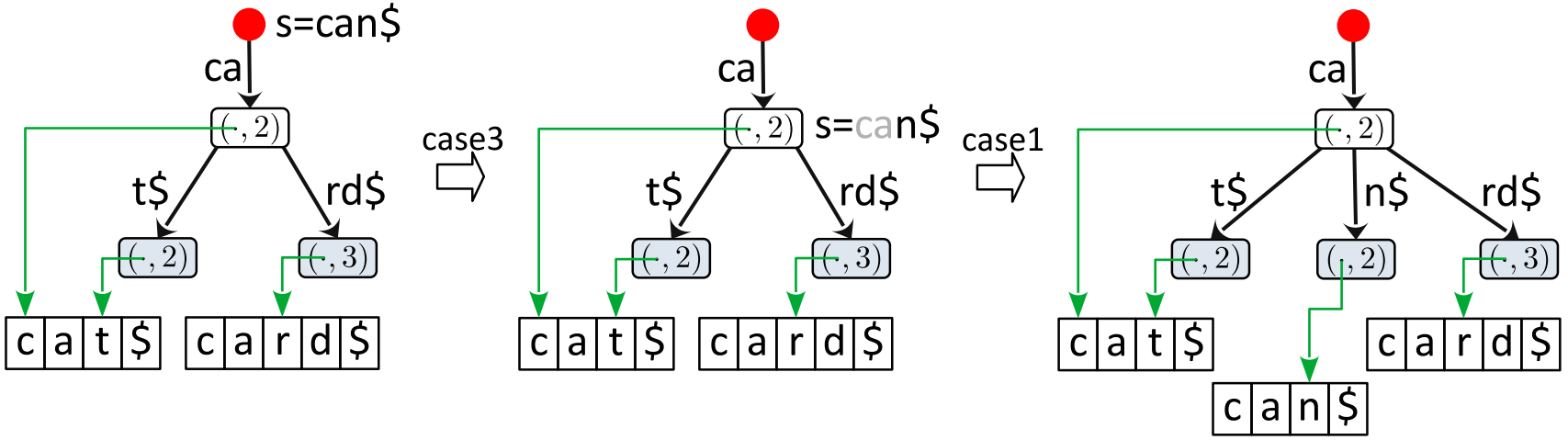
Patricia stablo (6)

2. Moguće je naći izlaznu tranziciju iz čvora koja djelomično podudara dijelu ostatka znakovnog niza s
   - Dodamo novi čvor cn_{ins} kojim razdvajamo staru tranziciju na dva dijela, prvi dio koji se podudara s ostatkom znakovnog niza s i drugog dijela koji se ne podudara
   - Dodamo novi list cn_{leaf} i tranziciju između cn_{ins} i cn_{leaf} koja odgovara ostatku znakovnog niza s, a koji se nije podudarao s prvim dijelom razdvojene tranzicije u prethodnom koraku



Patricia stablo (7)

3. Moguće je naći izlaznu tranziciju iz čvora koja potpuno podudara dijelu ostatka znakovnog niza s
   - Prolazimo tranziciju i pozicioniramo se u novom čvoru
   - Pazimo na ostatak znakovnog niza s



- Evolucija Patricia stabla – slijed upisa i brisanja znakovnih nizova u S : svaki korak se može vizualizirati

Patricia stablo (8)

- Kompleksnost dodavanja znakovnog niza je $O(|s| + |\Sigma|)$

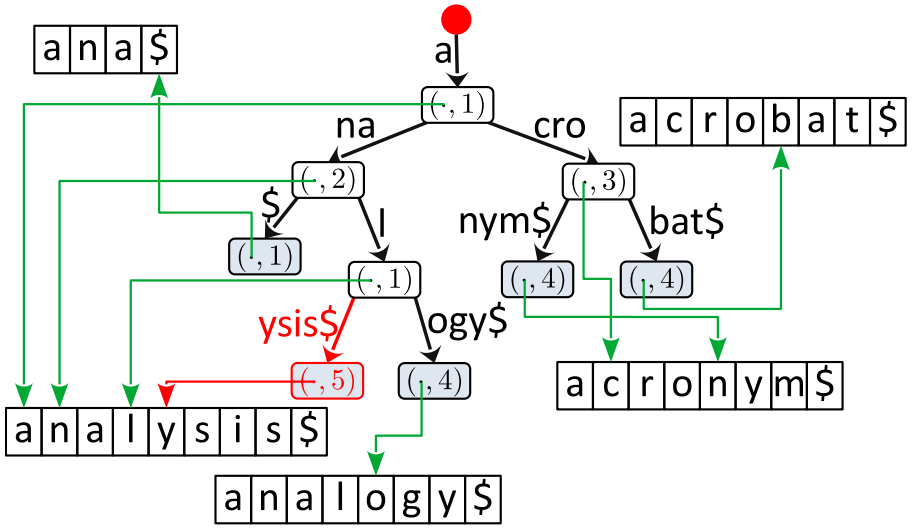
procedure InsertPatricia($P, s = (s_p, s_l)$)
  $sc \leftarrow 0$
  $cn \leftarrow root(P)$
  while cn is root or not leaf **do** ▷ $O(|s|)$
    if there is transition from cn for character $s_p[sc]$ to cn_c **then**
      ▷ $array[s_p[sc]] \neq NULL$ in cn
      $(t_p, t_l) \leftarrow$ string representation in cn_c
      if $s_p[sc : sc + t_l] \subset t_p[0 : t_l]$ **then** ▷ case 2
        ▷ we know for sure that the first character is matched
        $i \leftarrow$ first unmatched character from t_p ▷ $i > 0$
        remove transition between cn and cn_c
        add node cn_{ins} with (t_p, i) ▷ $O(|\Sigma|)$
        update node cn_c with $(t_p + i, t_l - i)$
        add transition between cn and cn_{ins}
        add transition between cn_{ins} and cn_c
        add leaf node cn_{leaf} with $(s_p + (sc + i), s_l - (sc + i))$
        ▷ $O(|\Sigma|)$
        add transition between cn_{ins} and cn_{leaf}
        return
      else if $s_p[sc : sc + t_l] = t_p[0 : t_l]$ **then** ▷ case 3
        $sc \leftarrow sc + t_l$
        $cn \leftarrow cn_c$
    else ▷ case 1
      add leaf node cn_{leaf} with $(s_p + sc, s_l - sc)$ ▷ $O(|\Sigma|)$
      add transition between cn and cn_{leaf}
      return

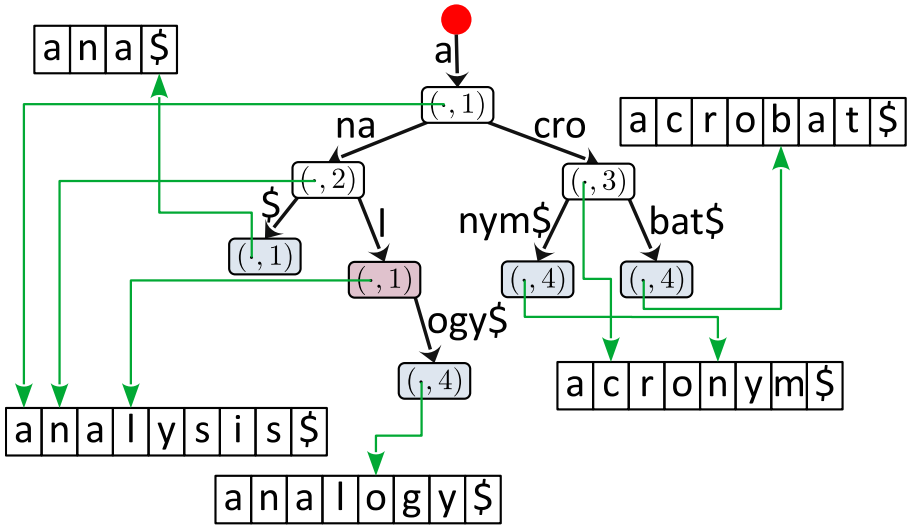
Patricia stablo (9)

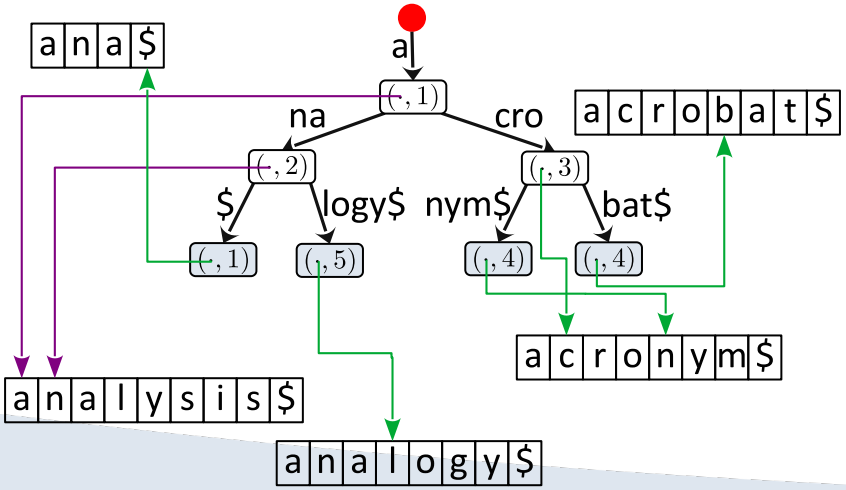
- Brisanje znakovnog niza s iz skupa S
  - Započinje pretraživanjem – s mora postojati u Patricia stablu
  - Krećemo od lista koji predstavlja s, kao i u Trie-u
  - Uklanjamo list i njegovu ulaznu tranziciju
  - Ako roditelj uklonjenog lista ostane s jednim djetetom, tada se taj roditelj treba ukloniti i njegove tranzicije spojiti – nekompresirani slučaj
  - Spajanje tranzicija za znakovne nizove (p, l) je jednostavno
    - Pokazivač p na početak prebacimo za nekoliko znakova prema početku znakovnog niza
    - Duljinu l povećamo za taj broj znakova

Patricia stablo (10)

- Primjer: uklanjamo $s = „analysis\$”$

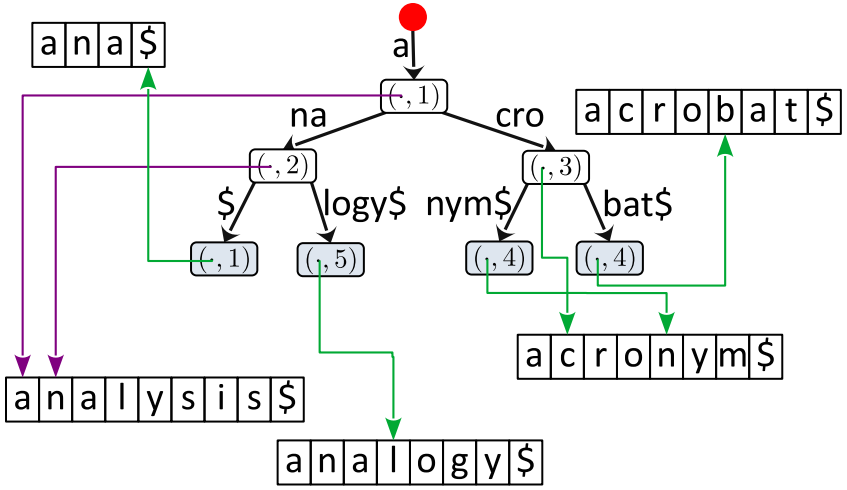


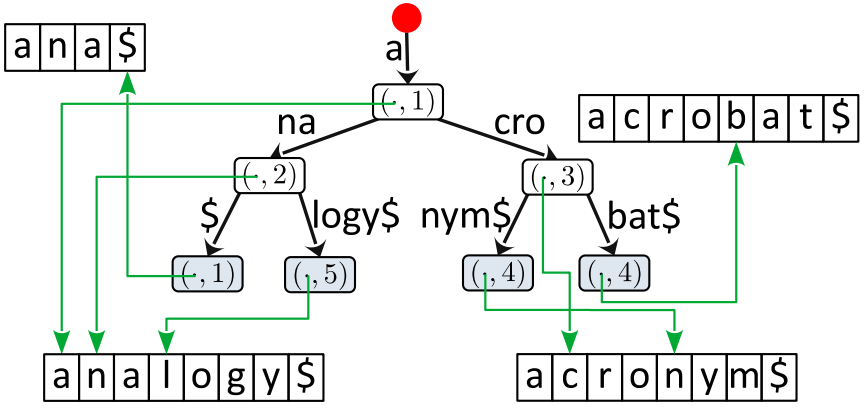




Patricia stablo (11)

- Znakovni niz ”$analysis$$” trebamo ukloniti iz memorije (destruktor u C-u)
  - No, imamo još dva pokazivača na tu instancu
  - Pokazivače prebacimo na znakovni niz jedno od preostale djece

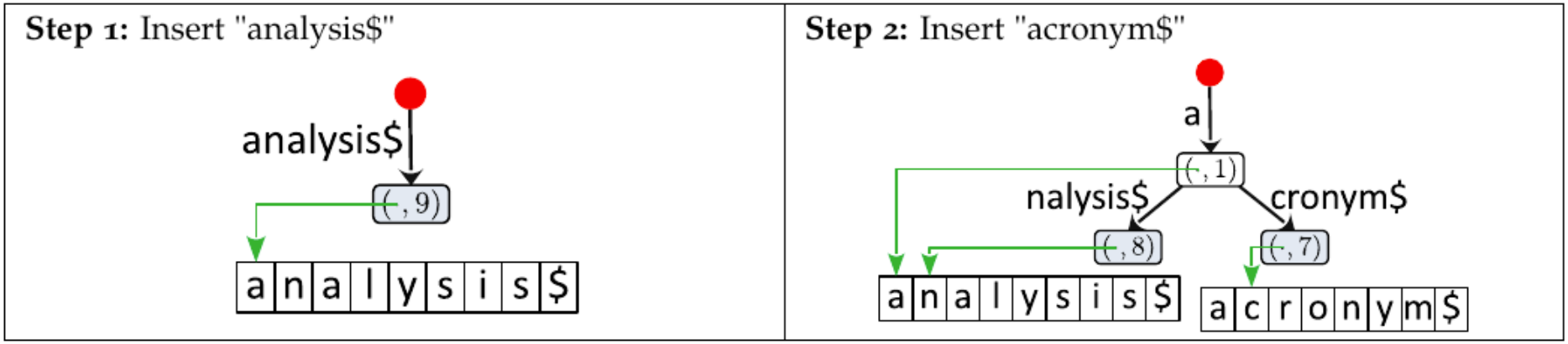




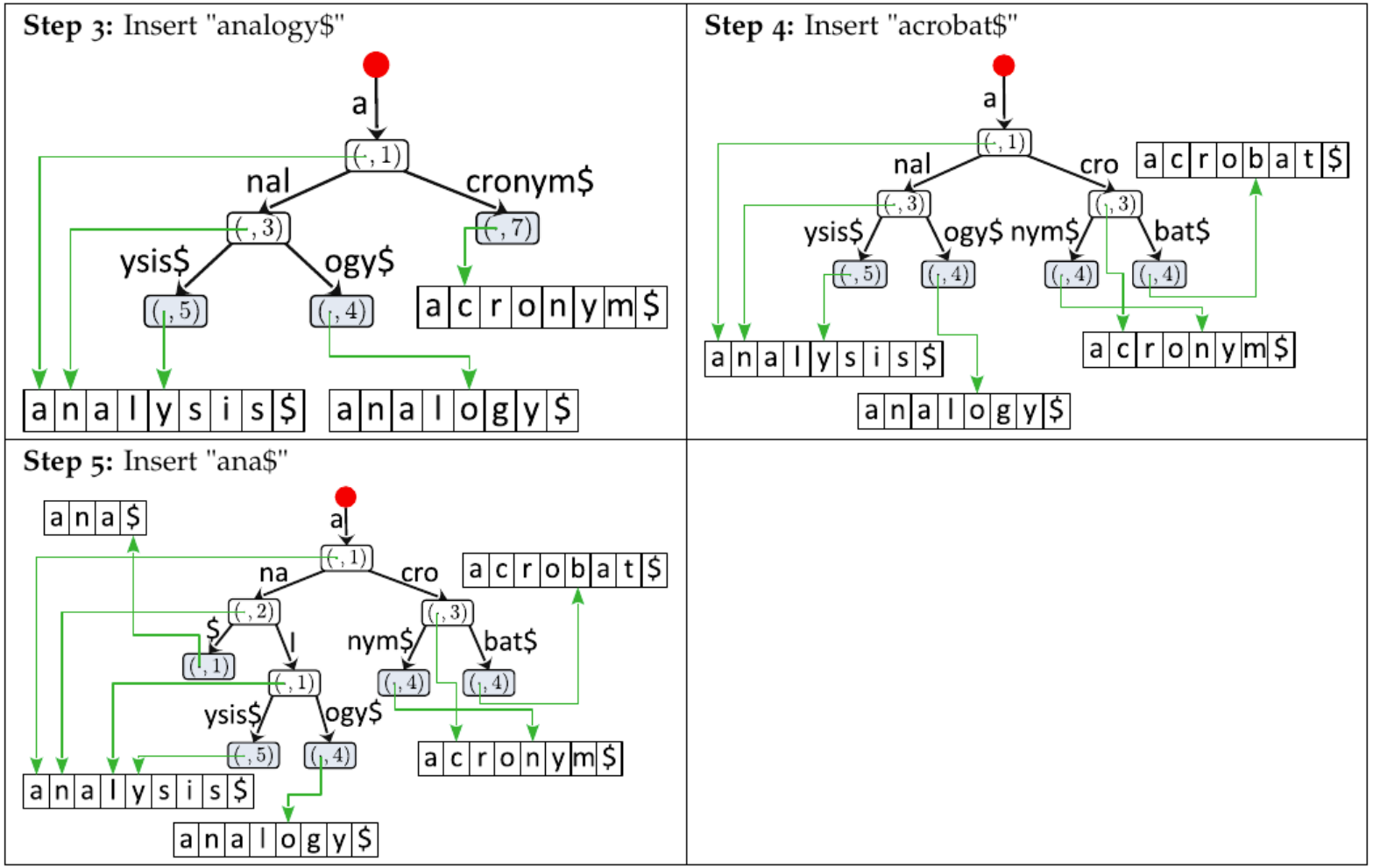
Patricia stablo (12)

- Primjer
  - Nacrtajte evoluciju Patricia stabla za upis sljedećeg slijeda znakovnih nizova

$\langle "analysis\$", "acronym\$", "analogy\$", "acrobat\$", "ana\$" \rangle$



Patricia stablo (13)



Patricia stablo (14)

- Neke značajne primjene: IP routing (u routerima), IP filtering, firewall, IP lookup, ...
- Ako za alfabet uzmemo $\Sigma = \{0,1\}$
- IPv4 adrese možemo transformirati u znakovni niz kao

192.168.11.45/32

1100 0000 . 1010 1000 . 0000 1011 . 0010 1101

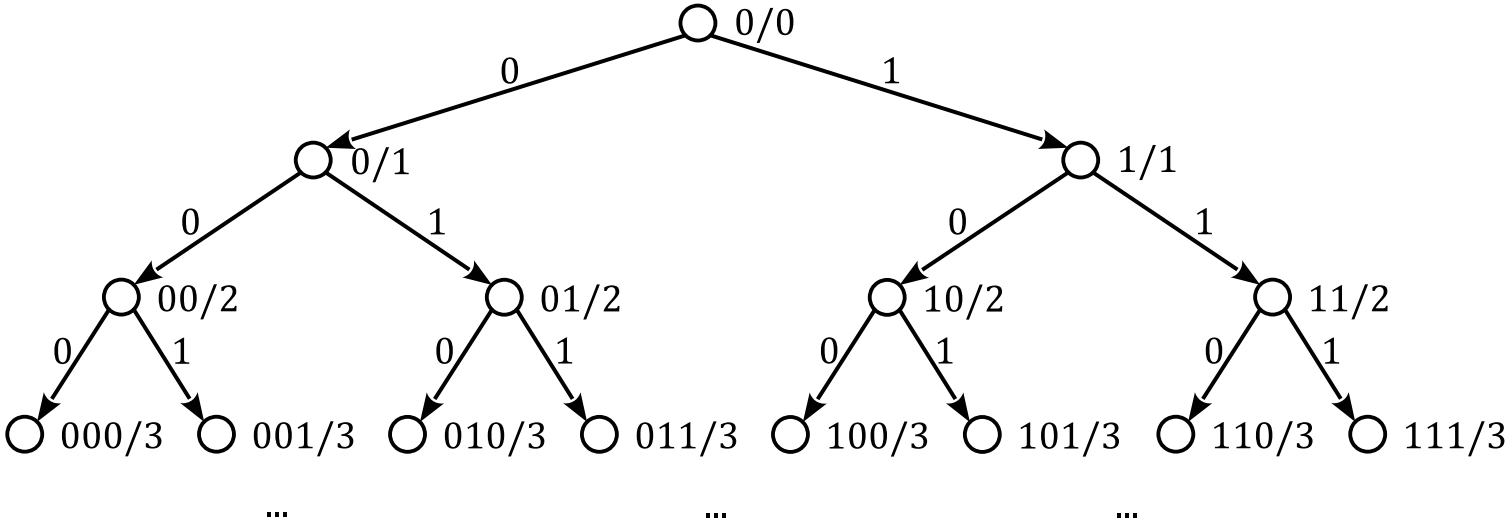
- Ili masku kao

192.168.0.0/16

1100 0000 . 1010 1000 . * . *

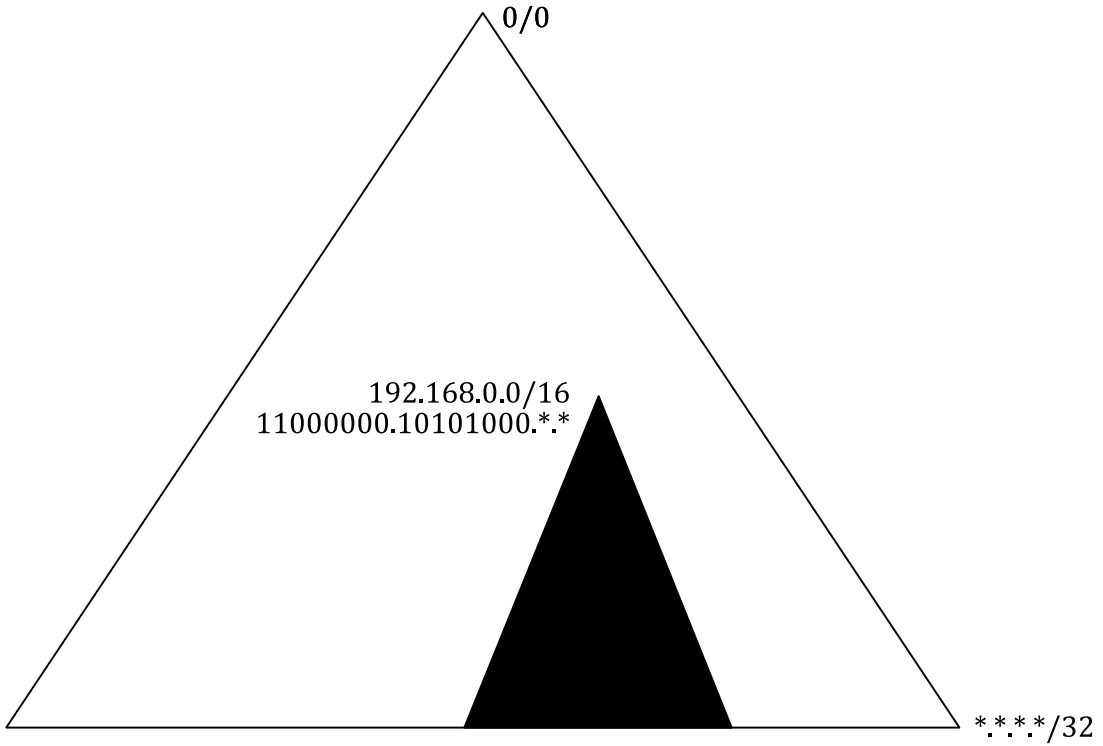
Radix stabla (1)

- Radix stablo za IP routing gradimo na sljedeći način – binarno stablo



Radix stabla (2)

- U takvom Radix stablu, podmreža se detektira kroz svoju masku
- Svi čvorovi podstabla predstavljaju članove podmreže 192.168.0.0/16

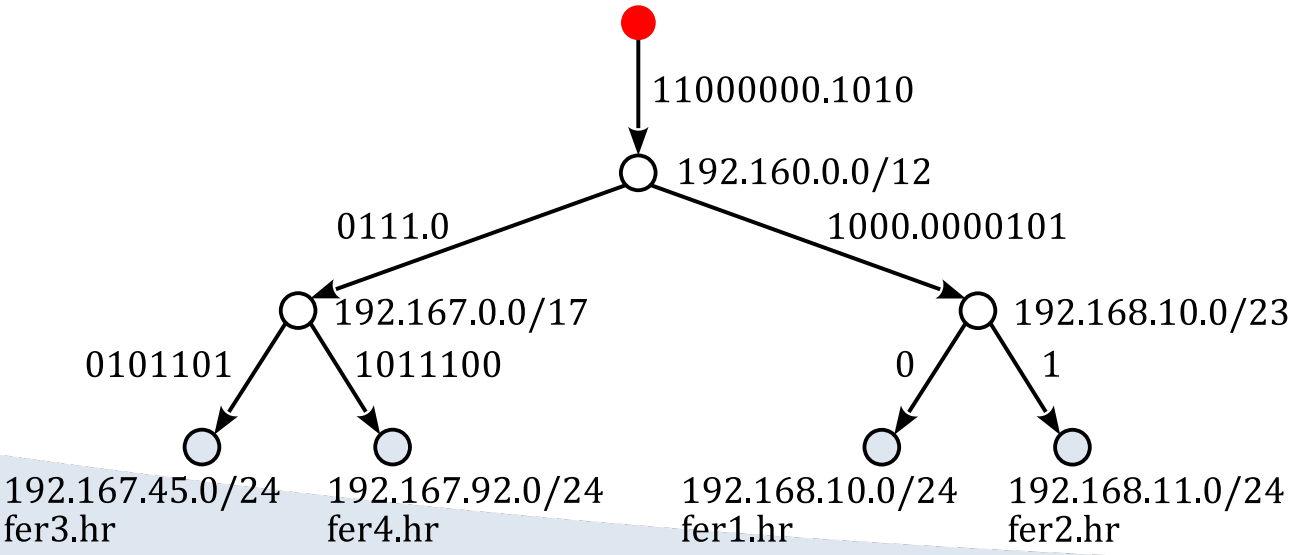


IP routing

- Kompresiramo Radix stablo – dobivamo binarno Patricia stablo
- Sljedeća IP routing tablica

192.168.10.0/24	11000000.10101000.00001010	fer1.hr
192.168.11.0/24	11000000.10101000.00001011	fer2.hr
192.167.45.0/24	11000000.10100111.00101101	fer3.hr
192.167.92.0/24	11000000.10100111.01011100	fer4.hr

  - pretvara se u Patricia stablo
  - listovi mogu imati pokazivače na definiciju sučelja (ili na nešto drugo)



Sufiksna polja
Sufiksna stabla

Sufiks znakovnog niza

- Zamislimo znakovni niz $t =$ „$program\$$”
  - gdje je $t = t[1], t[2], \ldots, t[j], \ldots, t[n]$, a $t[j]$ je j-ti znak znakovnog niza
- Iz znakovnog niza možemo izvesti skup svih njegovih sufiksa, gdje je i-ti sufiks znakovnog niza t, definiran kao

$$t_i = t[i], t[i+1], \ldots, t[n]$$

1	2	3	4	5	6	7	8
p	r	o	g	r	a	m	$

1	p	r	o	g	r	a	m	$
2	r	o	g	r	a	m	$	
3	o	g	r	a	m	$		
4	g	r	a	m	$			
5	r	a	m	$				
6	a	m	$					
7	m	$						
8	$							

Svi sufiksi znakovnog niza

- Reprezentacija znakovnog niza s uređenim parom daje nam prednost kod stvaranja liste svih sufiksa znakovnog niza
- Naivno: kada bismo htjeli stvoriti novu instancu znakovnog niza za i-ti sufiks $t[i]$, trebali bismo kopirati znakove od i do n u tu novu instancu.
  - Za sve sufikse znakovnog niza to znači sljedeći broj kopiranja

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}-n$$

- Kada koristimo uređeni par (p, l) kao reprezentaciju znakovnog niza, u n iteracija radimo
  - Pomičemo pokazivač p za jedno mjesto unaprijed
  - Smanjimo l za jedan

Sufiksno polje (1)

- Prethodnu listu sufiksa sortiramo alfabetski (abecedno) i dobivamo sljedeću sortiranu listu sufiksa (sjetimo se $=0)

i	A_i	t_{A_i}							
1	8	$							
2	6	a	m	$					
3	4	g	r	a	m	$			
4	7	m	$						
5	3	o	g	r	a	m	$		
6	1	p	r	o	g	r	a	m	$
7	5	r	a	m	$				
8	2	r	o	g	r	a	m	$	

  - gdje je $A = \langle A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n \rangle$ sortirani niz sufiksa koji definira sufiksno polje

$SA = \langle \$, am\$, gram\$, m\$, ogram\$, program\$, ram\$, rogram\$ \rangle$

Sufiksno polje (2)

- Kompleksnost stvaranja sufiksnog polja je dosta visoka
- Koristimo algoritam za sortiranje što je $O(n \log n)$, pa kad tome dodamo usporedbu znakovnih nizova, to se može aproksimirati kao $O(n^2 \log n)$
- Ideja sufiksnog polja je provjeriti da li se znakovni niz q nalazi u znakovnom nizu t
  - Naivno pretraživanje bi bilo $O(|q| * n)$
  - Pretraživanje sufiksnog polja sa binarnim algoritmom za pretraživanje je $O(|q| \log n)$
  - Binarni algoritam za pretraživanje je sličan pretraživanju binarnog stabla
    - Pronađemo sredinu, pa provjerimo da li je q manji ili veći od te sredine
    - S obzirom na rezultat, pretraživanje svodimo na pola sufiksnog polja
    - Nastavljamo rekurzivno do konačnog rezultata: $false$ ili $true$

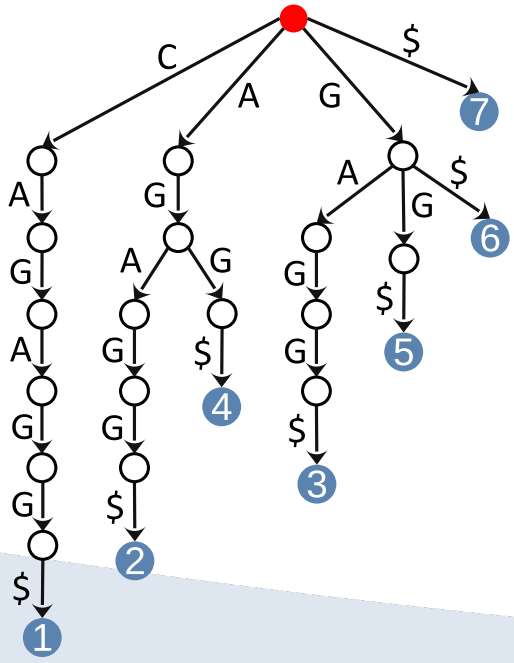
Sufiksno polje (3) (info)

- Stvaranje sufiksnog polja može biti linearno korištenjem posebnih algoritama, kao *skew* algoritam
- Korištenjem koncepata LCP-a i ℓ-matrice, pretraživanje se može ubrzati na $O(|q| + \log n)$
- Ti su algoritmi i načini stvaranja kompleksni. Studenti koji žele znati više o ovome mogu pronaći te teme u skripti NASP-a.

Sufiksni Trie (1)

- Listu svih sufiksa određenog znakovnog niza možemo transformirati u Trie
- Za alfabet $\Sigma = \{C, A, G, T, \$\}$ (DNA baze) i $t = CAGAGG\$$ imamo sljedeću listu svih sufiksa
- Pretvoreno u sufiksni Trie

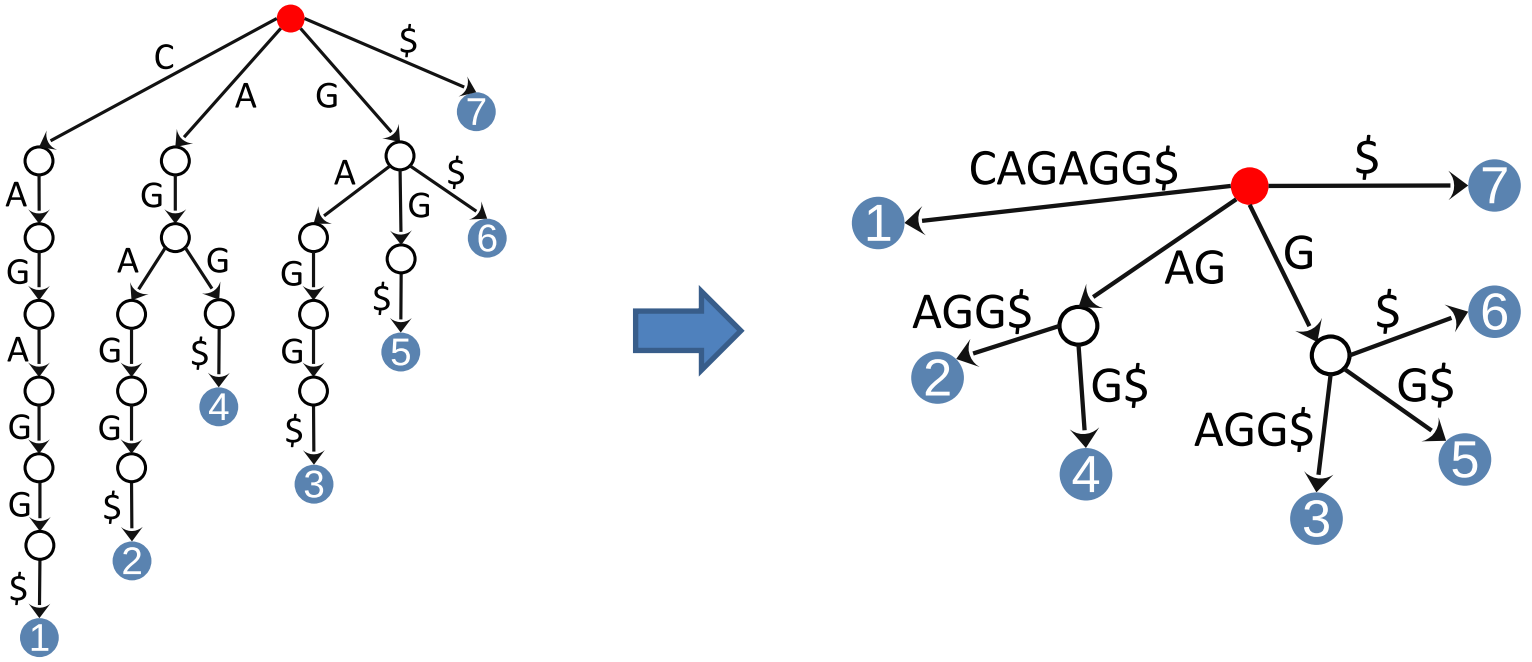
C	A	G	A	G	G	$
A	G	A	G	G	$	
G	A	G	G	$		
A	G	G	$			
G	G	$				
G	$					
$						



- Svaki list sufiksnog Trie-a sadrži redni broj tog sufiksa ili A_i

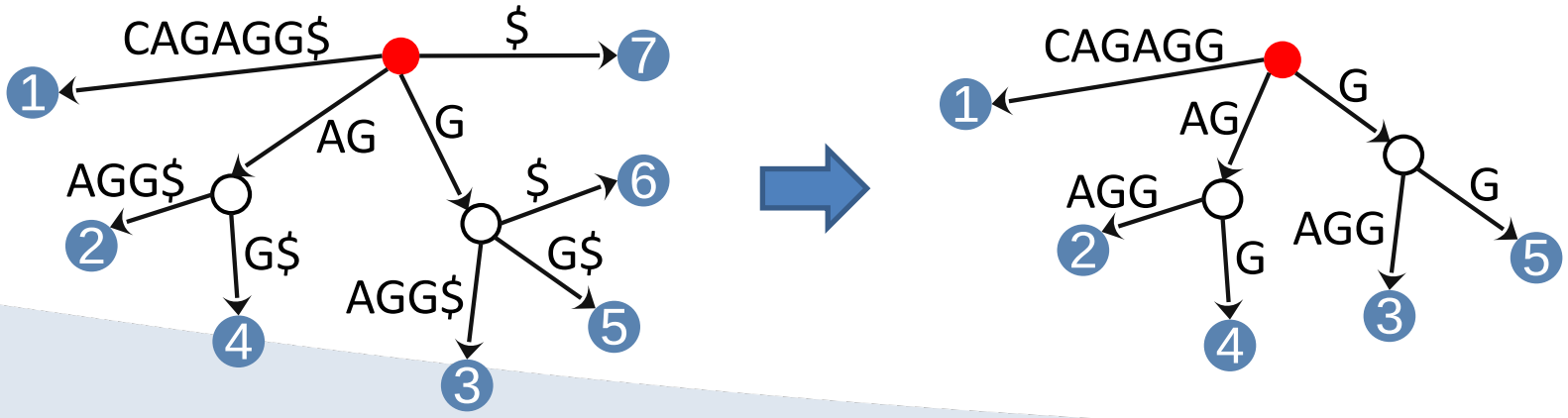
Sufiksno stablo (1)

- Sufiksno stablo je kompresirani sufiksni Trie ili Patricia stablo svih sufiksa određenog znakovnog niza
- Ovo se još i naziva **eksplicitno sufiksno stablo**



Sufiksno stablo (2)

- **Implicitno sufiksno stablo** dobiva se iz eksplicitnog sljedećom transformacijom:
  1. Uklonimo sve NULL terminatore ($) za bridova eksplicitnog sufiksnog stabla
  2. Uklonimo sve bridove koji su ostali s praznim znakovnim nizovima ϵ, uključujući i njihova podstabla
  3. Ponovno kompresiramo sufiksno stablo: svi čvorovi osim korijenskog, koji imaju manje od dvoje djece se uklanjaju, a njihove tranzicije konkateniraju



Ukkonenov algoritam (1)

- Naivni pokušaj stvaranja sufiksnog stabla je $O(n^2)$
  - Ovo je nekoliko puta bilo poboljšano raznim algoritmima: McCreigh i Weiner
  - Ukkonen gradi svoj algoritam na Weinerovom algoritmu
  - Ukkonenov algoritam je *online* algoritam koji gradi sufiksno stablo znak po znak iz t
- Imamo implicitno sufiksno stablo nakon i koraka koje označimo S_i
  - Uzimamo znak $t[i+1]$ i izvršavamo $i+1$ fazu nadogradnje stabla
  - $i+1$ faza se izvodi u $i+1$ koraka
    - U svakom koraku dodajemo $t[i+1]$ na sve sufikse prefiksa $t[1, i]$
    - U $i+1$ koraku dodajemo $t[i+1]$ na korijenski čvor stabla
  - Rezultat je implicitno sufiksno stablo S_{i+1}

Ukkonenov algoritam (2)

- Za $t = ABABABC\$$ imamo sljedeće faze i korake
  - Varijablom j definiramo sufiks prefiksa t[1,i], ili t[j,i]
- Prolazimo stablo za svaki $t[j,i]$ i dodajemo $t[i+1]$, a imamo tri slučaja:
  1. Kod prolaska $t[j,i]$ dolazimo do lista. Cijela vertikalna putanja predstavlja $t[j,i]$. U zadnjoj tranziciji prije lista samo dodajemo $t[i+1]$ na kraj tranzicije.

Phase 1, $i+1=1, t[i+1]=A$							
Step 1	A						
Phase 2, $i+1=2, t[i+1]=B$							
Step 1, $j=1$	A	B					
Step 2	B						
Phase 3, $i+1=3, t[i+1]=A$							
Step 1, $j=1$	A	B	A				
Step 2, $j=2$	B	A					
Step 3	A						
Phase 4, $i+1=4, t[i+1]=B$							
Step 1, $j=1$	A	B	A	B			
Step 2, $j=2$	B	A	B				
Step 3, $j=3$	A	B					
Step 4,	B						
...							
Phase 7, $i+1=7, t[i+1]=C$							
Step 1, $j=1$	A	B	A	B	A	B	C
Step 2, $j=2$	B	A	B	A	B	C	
...							
Step 6, $j=6$	B	C					
Step 7	C						

Ukkonenov algoritam (3)

2. Prošli smo sve znakove $t[j,i]$ i stali na sredini tranzicije. Sljedeći znak u tranziciji **nije** $t[i+1]$. Dodajemo unutarnji čvor na stablo i razdvajamo tranziciju. Dodajemo list i tranziciju $t[i+1]$ od novo dodanog unutarnjeg čvora do novo dodanog lista. Ista operacija kao i kod Patricia stabla.
3. Prošli smo sve znakove $t[j,i]$ i stali na sredini tranzicije. Sljedeći znak u tranziciji **je** $t[i+1]$. Ne radimo ništa jer $t[j,i]t[i+1]$ je već sadržan u stablu.

Nakon što smo završili gradnju implicitnog sufiksnog stabla, pretvaramo ga u eksplicitno dodavanjem $ u sve tranzicije koje vode u listove stabla.

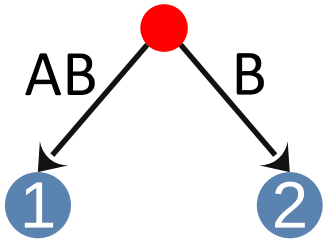
Ukkonenov algoritam (4)

- **Sufiksne veze** dodatak su implicitnom sufiksnom stablu koji omogućavaju brže prolaženje stabla za $t[j, i]$
  - Imamo čvor n_1 u koji smo stigli prolaskom $t[j, i]$
  - Ako imamo neki drugi čvor n_2 do kojeg se stigne prolaskom $at[j, i]$, tada je n_2 spojen na n_1 sufiksnom vezom
  - Ovo samo znači da za sve faze $\geq i$ trebamo početi od od oba čvora n_1 i n_2, čime zapravo preskačemo sve korake koji uključuju podniz a
    - To znači da ne moramo startati s j=1, već odmah nakon podniza a
  - n_2 može biti i korijenski čvor kada je $a = \epsilon$ i $j = i$

Primjer Ukkonen (1)

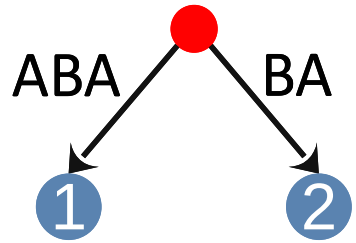
- Stvaramo implicitno sufiksno stablo korištenjem Ukkonenovog algoritma za $t = ABABABC\$$
- **Faza 1** : $i + 1 = 1, t[i + 1] = A$
  - Korak 1 : Imamo samo korijenski čvor. Dodajemo novu tranziciju i list.

- **Faza 2** : $i + 1 = 2, t[i + 1] = B$
  - Korak 1 : $j = 1, t[j, i] = A$. Prolazak nas dovodi do lista 1, što je slučaj 1. Dodajemo B na posljednju tranziciju.
  - Korak 2 : $t[j, i] = \epsilon$. Dodajemo novu tranziciju na korijenski čvor i pripadni list.



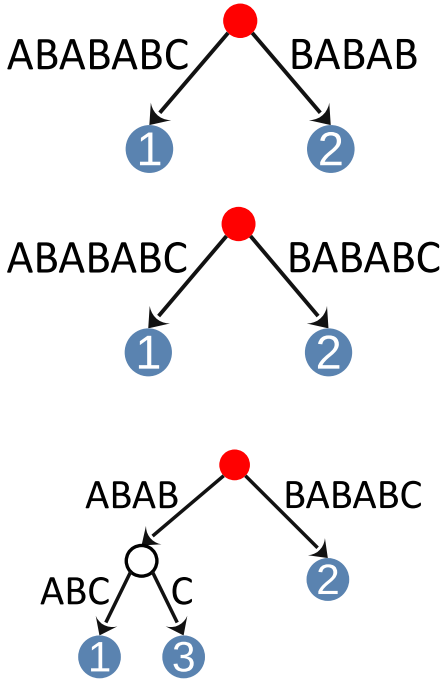
Primjer Ukkonen (2)

- **Faza 3** : $i + 1 = 3, t[i + 1] = A$
  - Korak 1 : $j = 1, t[j, i] = AB$. Prolazak nas dovodi do lista 1, što je slučaj 1. Dodajemo A na posljednju tranziciju.
  - Korak 2 : $j = 2, t[j, i] = B$. Prolazak nas dovodi do lista 2, što je slučaj 1. Dodajemo A na posljednju tranziciju.
  - Korak 3: $t[j, i] = \epsilon$. S obzirom na ϵ, ostajemo u korijenskom čvoru, no prolazak $t[i + 1]$ nas vodi u tranziciju, što je slučaj 3. Ne radimo ništa.



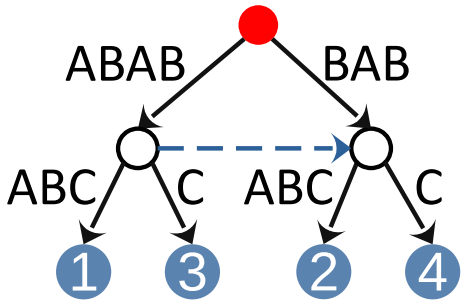
Primjer Ukkonen (3)

- Preskačemo niz istih faza
- **Faza 7** : $i + 1 = 7, t[i + 1] = C$
  - Korak 1 : $j = 1, t[j, i] = ABABAB$. Prolazak nas dovodi do lista 1, što je slučaj 1. Dodajemo C na posljednju tranziciju.
  - Korak 2 : $j = 2, t[j, i] = BABAB$. Prolazak nas dovodi do lista 2, što je slučaj 1. Dodajemo C na posljednju tranziciju.
  - Korak 3 : $j = 3, t[j, i] = ABAB$. Prelazak nas vodi na sredinu tranzicije, a sljedeći znak nije C, što je slučaj 2. Razdvajamo puteve za $ABABABC$ i $ABABC$.

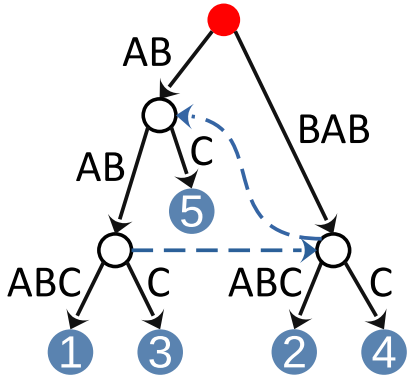


Primjer Ukkonen (4)

- Korak 4 : $j = 4, t[j,i] = BAB$. Prelazak nas vodi na sredinu tranzicije, a sljedeći znak nije C, što je slučaj 2. Razdvajamo puteve za $BABABC$ i $BABC$. U ovom koraku imamo dva unutarnja čvora $n_1 = BAB$ i $n_2 = ABAB$. Spajamo sufiksnom vezom.

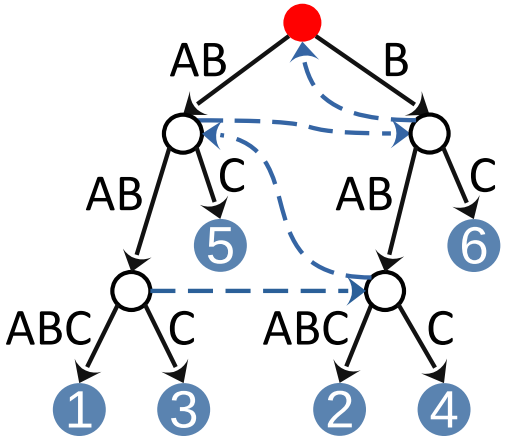


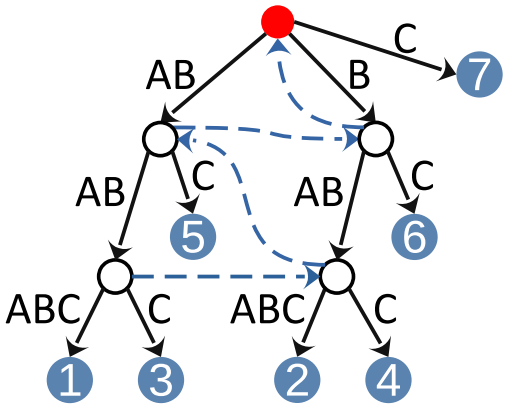
- Korak 5 : $j = 5, t[j,i] = AB$. Prelazak nas vodi na sredinu tranzicije, a sljedeći znak nije C, što je slučaj 2. Razdvajamo puteve za $\{ABABABC, ABABC\}$ i ABC. U ovom koraku imamo dva unutarnja čvora $n_1 = AB$ i $n_2 = BAB$. Spajamo sufiksnom vezom.



Primjer Ukkonen (5)

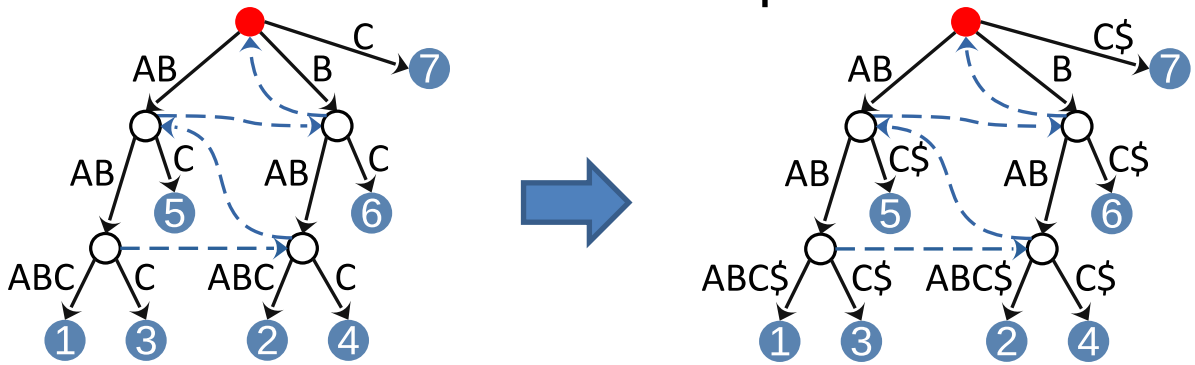
- Korak 6 : $j = 6, t[j,i] = B$. Prelazak nas vodi na sredinu tranzicije, a sljedeći znak nije C, što je slučaj 2. Razdvajamo puteve za $\{BABABC, BABC\}$ i BC. U ovom koraku imamo dva unutarnja čvora $n_1 = B$ i $n_2 = AB$. Spajamo sufiksnom vezom. Dodajemo i sufiksnu vezu između čvora $n_2 = B$ i korijenskog čvora.
- Korak 7 : $t[j,i] = \epsilon$. S obzirom da niti jedna tranzicija ne počinje C, dodajemo novi list i novu tranziciju.





Ukkonenov algoritam (5)

- Sada možemo transformirati implicitno sufiksno stablo u eksplicitno

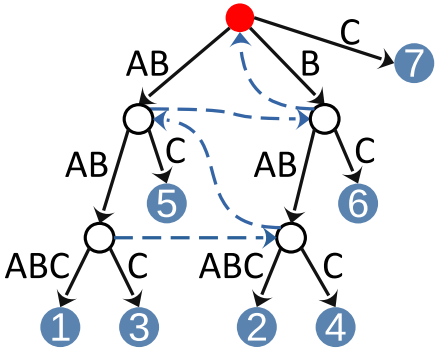


- Recimo da na ovo sufiksno stablo sada dodajemo osmi znak D ($i + 1 = 8$)
- U trenutku kada prolazimo prefiks $t[1,7] = ABABABC$, nailazimo na sufiksne veze
  - Kod $ABAB$ imamo sufiksne veze na 4 dodatna čvora
  - Kod prelaska imamo 5 čvorova od kojih krećemo sa tranzicijama
  - Znamo da možemo preskočiti na $t[6,7]$ jer smo sufikse $BAB, AB, B\ i\ \epsilon$ imali u prolasku $ABAB$

Ukkonenov algoritam (6)

- Na t[6,7] krećemo ispočetka jer u našem skupu čvorova nemamo korijenski čvor

$t[1,7]$	A	B	A	B	A	B	C
$t[2,7]$		B	A	B	A	B	C
$t[3,7]$			A	B	A	B	C
$t[4,7]$				B	A	B	C
$t[5,7]$					A	B	C
$t[6,7]$						B	C
$t[7,7]$							C



- Time smanjujemo i broj koraka, a i broj prijeđenih znakova u koraku
  - Smanjivanje broja koraka - zapravo paraleliziramo izvođenje
  - Pravi dobitak je u smanjenju broja prijeđenih znakova u određenom koraku
  - U prethodnom primjeru smo izostavili prelazak 6 znakova

Pitanja ?