SÉRIES NUMÉRICAS

1) Introdução
2) Sucessões
    a) Definição
    b) Convergência
3) Séries Infinitas
    1) Definição
    2) Séries telescópicas
    3) Séries Geométricas
4) Critérios de convergência
5) Séries de Potências
6) Aproximação de funções
    a) Polinómios e Séries de Taylor
    b) Séries de Fourier

Sucessões

Uma Sucessão/*sequência* é uma *lista* infinita de números, $s_1, s_2, s_3, \ldots. s_n$.

s_1 é o primeiro termo, s_2 o segundo. s_n é o termo geral da sucessão

$1,8, 27, \ldots. n^3$ representa a sucessão dos "cubos". Cujo termo geral é $s_n = n^3$

É uma função com os inteiros positivos (n) como domínio.
Podia representar-se por $s(n)$ mas usa-se s_n

Calcular os 4 primeiros termos das sucessões

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$s_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$$

Calcular os 4 primeiros termos das sucessões

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n = 1 \rightarrow \; s_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$n = 2 \rightarrow \; s_2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

$$n = 3 \rightarrow \; s_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$

$$n = 4 \rightarrow \; s_4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

$$s_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$$

Calcular os 4 primeiros termos das sucessões

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n = 1 \rightarrow \; s_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$n = 2 \rightarrow \; s_2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

$$n = 3 \rightarrow \; s_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$

$$n = 4 \rightarrow \; s_4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

$$s_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$$

$$n = 1 \rightarrow \; s_1 = \frac{1 + (-1)^1}{2} = 0$$

$$n = 2 \rightarrow \; s_2 = \frac{2 + (-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n = 3 \rightarrow \; s_3 = \frac{3 + (-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$n = 4 \rightarrow \; s_4 = \frac{4 + (-1)^4}{4} = \frac{5}{4}$$

Exemplo: Determine o termo geral da sucessão :

$$\frac{5}{3}, 1, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11},$$

Exemplo: Determine o termo geral da sucessão :

$$\frac{5}{3}, 1, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11},$$

Todos os termos têm numerador igual a 5

n= *1, 2, 3, 4, 5…* s_n= $\frac{5}{3}, \frac{5}{5}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11}$

Exemplo: Determine o termo geral da sucessão :

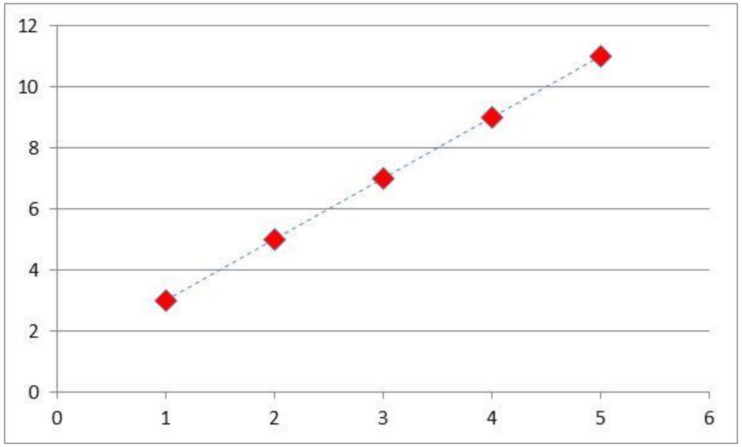
$$\frac{5}{3}, 1, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11},$$

Todos os termos têm numerador igual a 5

n= 1, 2, 3, 4, 5… s_n= $\frac{5}{3}, \frac{5}{5}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11}$

O denominador é uma reta

$$y = ax + b$$



Exemplo: Determine o termo geral da sucessão :

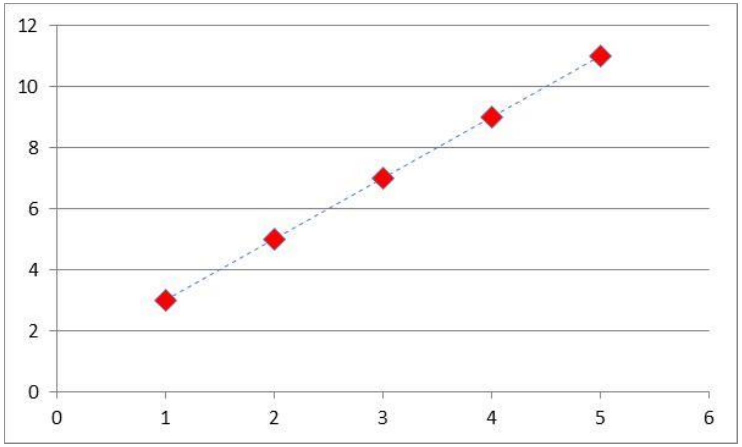
$$\frac{5}{3}, 1, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11},$$

Todos os termos têm numerador igual a 5

n= 1, 2, 3, 4, 5… s_n= $\frac{5}{3}, \frac{5}{5}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11}$

O denominador é uma reta

$$y = ax + b$$



$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{7-5}{3-2} = 2$$

Para *n=3* obtemos:

$$7 = 2 * 3 + \mathrm{b} \quad \rightarrow \quad b = 1$$

$$\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + 1$$

Exemplo: Determine o termo geral da sucessão :

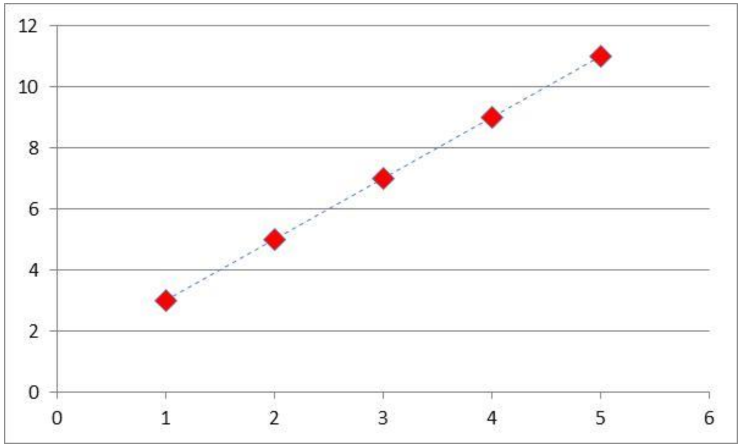
$$\frac{5}{3}, 1, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11},$$

Todos os termos têm numerador igual a 5

n= 1, 2, 3, 4, 5… $s_n = \frac{5}{3}, \frac{5}{5}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11}$

O denominador é uma reta

$$y = ax + b$$



$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{7-5}{3-2} = 2$$

Para *n=3* obtemos:

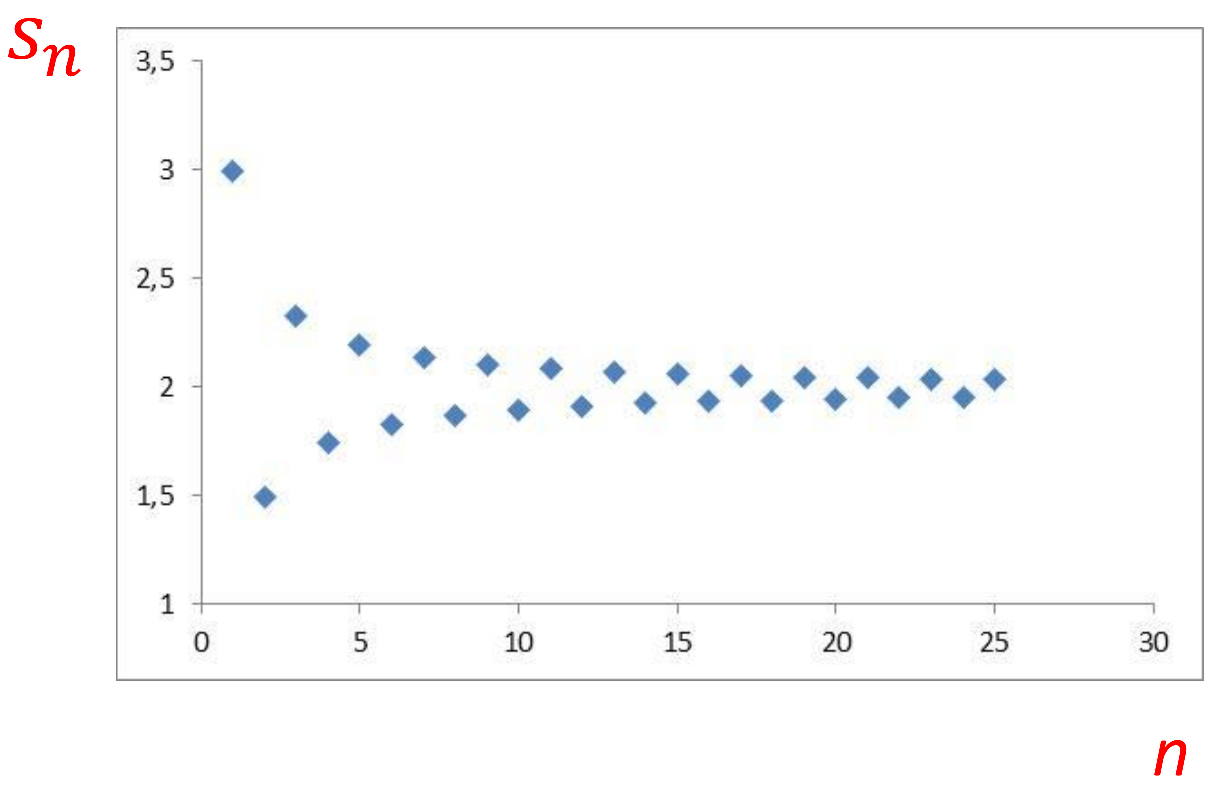
$$7 = 2 * 3 + \mathrm{b} \quad \rightarrow \quad b = 1$$

$$\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + 1$$

$$s_n = \frac{5}{2n+1}$$

Representação gráfica

$$s_n = 2 - \frac{(-1)^n}{2n}$$



Forma recursiva (exemplo)

$$s_n = n * s_{n-1}$$

Para $n > 1$, e $s_1 = 1$

$$n = 1,2,3,4 \ldots$$
$$s_n = 1,2,6,24 \ldots$$

Forma recursiva - calcular:

$$s_n = \frac{1}{3}(s_{n-1} + s_{n-2})$$

Para $n > 2$, e $s_1 = 0, s_2 = 1$

Convergência de uma sucessão

O limite de uma sucessão ($s_n, n \to \infty$) define-se do mesmo modo que o limite de uma função ($f(x), \quad x \to \infty$)

Definições

A sucessão $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ tem um limite L, se s_n está cada vez mais perto de L quanto n é cada vez maior.

Se existe um limite L, diz-se que a sucessão **converge** par esse limite.

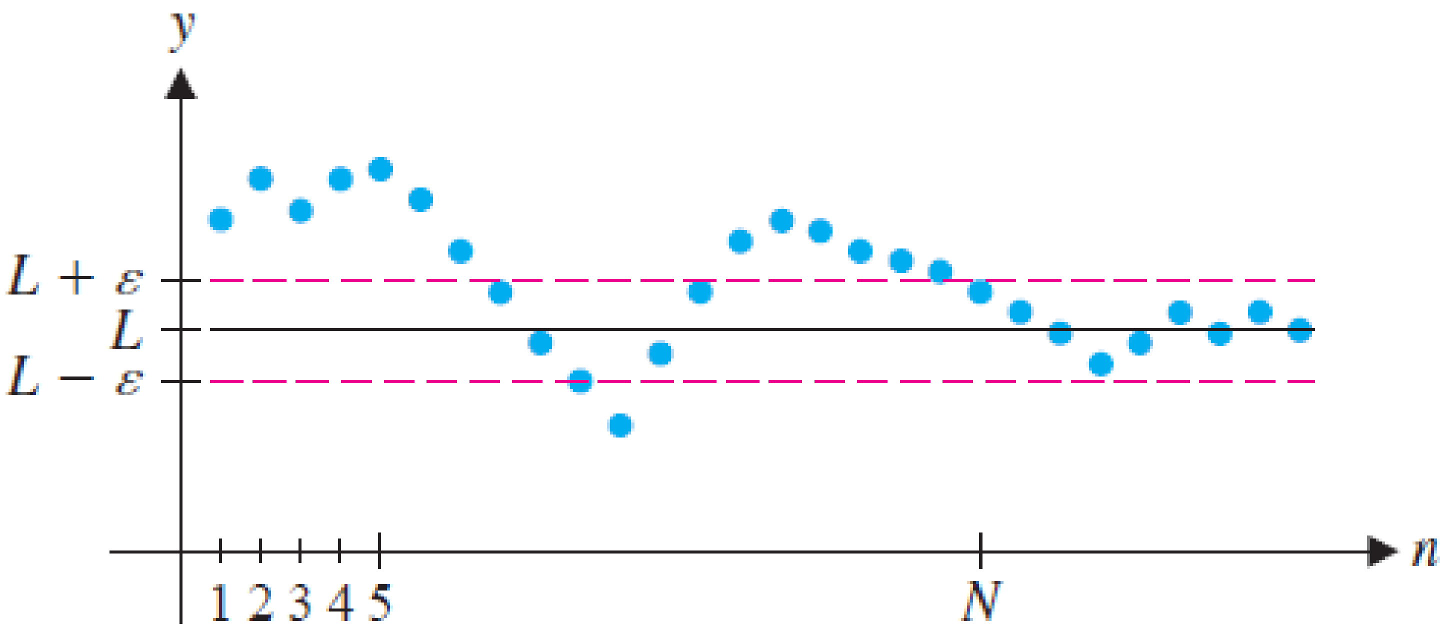
Se NÃO existe um limite, diz-se que a sucessão **diverge**

Uma sucessão (sequência) diz-se convergente para *L*, **se e só se**, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe um inteiro *N* para o qual

$$\boxed{|a_n - L| < \varepsilon, \qquad \forall \ n > N}$$

Se esse número *L* não existir, a sucessão diz-se divergente

Example



Definições

A sucessão $s_1, s_2, s_3,..., s_n$ tem limite inferior se existe um N tal que

$$N \leq s_n$$

para qualquer n

A sucessão $s_1, s_2, s_3,..., s_n$ tem limite superior se existe um M tal que

$$s_n \leq M$$

para qualquer n

A sucessão $s_1, s_2, s_3,..., s_n$ é limitada se existe um N e um M tal que

$$N \leq s_n \leq M$$

para qualquer n

Definições

Se existe um limite L, então

$$\boldsymbol{L - 1 \leq s_n \leq L + 1}$$

e podemos afirmar que:

Qualquer sucessão convergente é limitada

Teorema

Qualquer sucessão monótona e limitada é convergente

Propriedades dos limites das sucessões

Sejam L e K os limites de a_n e b_n respetivamente

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cL,$ com c um número real

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = LK$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{K},$ com $b_n \neq 0, K \neq 0$

No cálculo dos limites usam-se as técnicas conhecidas para as funções com domínio positivo $(x > 0)$

Exemplo: Calcular o valor limite de $s_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$

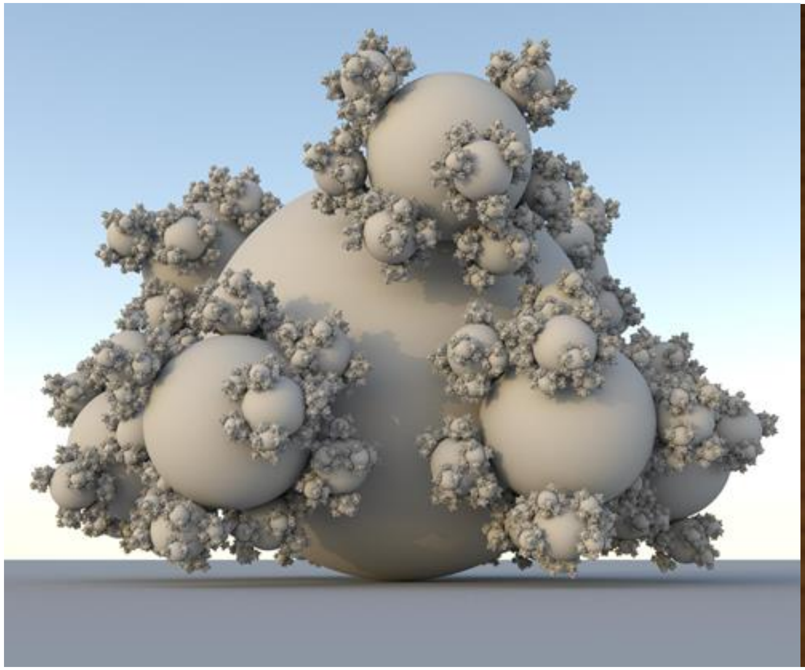
$$f(x) = \frac{x^2}{2^x - 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$ ⇨ Regra de l´Hôpital

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2^x - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{\ln(2)2^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln(2)^2\, 2^x} = 0$$

$s_n = \dfrac{n^2}{2^n-1}$ Converge para 0

Séries infinitas



Raio 1 ---- 9 esferas de raio 1/3 ----- 9 de raio 1/9 ……

A superfície é infinita ?

Séries infinitas

Seja a_n o termo geral da sucessão.

À soma de todos os seus termos chama-se **série**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Onde $a_1, a_2, a_3, \cdots$ são os termos da série

Por vezes as séries começam no índice 0 ou em qualquer outro valor

Normalmente representa-se a série simplesmente por $\sum a_n$

Séries infinitas

Para calcular a soma da série infinita considera-se a sucessão de somas parciais

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$S_i = \sum_{n=1}^{i} a_n$$

Séries infinitas

Para calcular a soma da série infinita considera-se a sucessão de somas parciais

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$S_i = \sum_{n=1}^{i} a_n$$

Se a sucessão de somas parciais converge para *L* então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

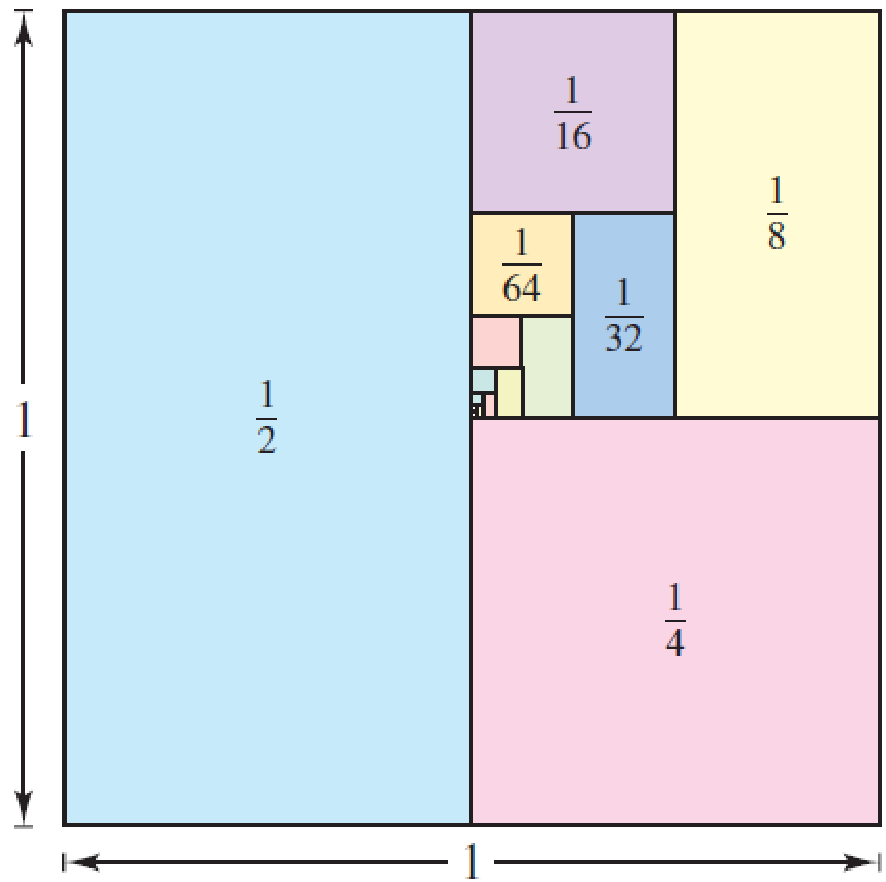
Converge

E

L é a soma da série

Se a sucessão diverge, a série é divergente

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$



$$s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

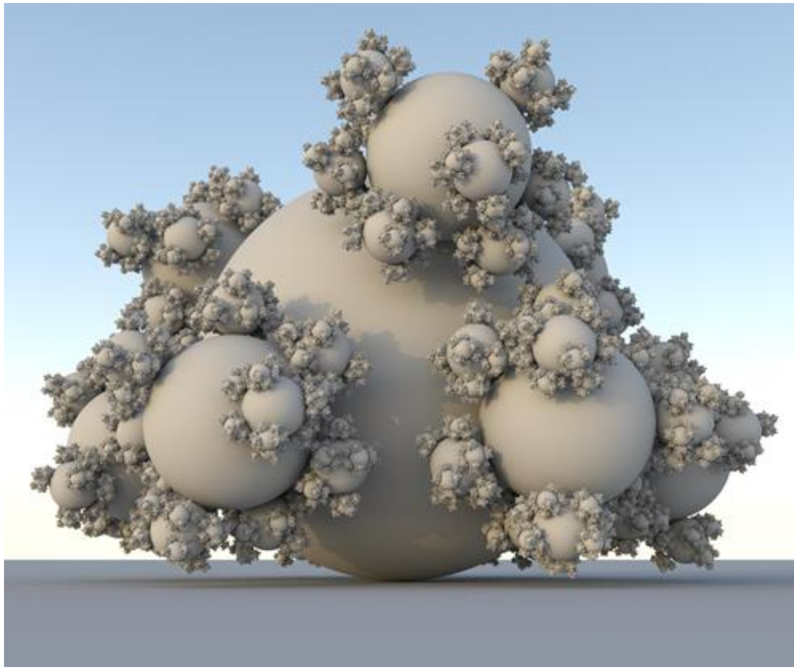
$$\vdots$$

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Séries Numéricas II

1) Introdução
2) Sucessões
    a) Definição
    b) Convergência
3) Séries Infinitas
    1) Definição
    2) Séries telescópicas
    3) Séries Geométricas
4) Critérios de convergência
5) Séries de Potências
6) Aproximação de funções
    a) Polinómios e Séries de Taylor
    b) Séries de Fourier

Séries infinitas



Raio 1 ---- 9 esferas de raio 1/3 ----- 9 de raio 1/9 ......

A superfície é infinita ?

Séries infinitas

Seja a_n o termo geral da sucessão.

À soma de todos os seus termos chama-se **série**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Onde $a_1, a_2, a_3, \cdots$ são os termos da série

Por vezes as séries começam no índice 0 ou em qualquer outro valor

Normalmente representa-se a série simplesmente por $\sum a_n$

Séries infinitas

Para calcular a soma da série infinita considera-se a sucessão de somas parciais

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$S_i = \sum_{n=1}^{i} a_n$$

Séries infinitas

Para calcular a soma da série infinita considera-se a sucessão de somas parciais

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$S_i = \sum_{n=1}^{i} a_n$$

Se a sucessão de somas parciais converge para *L* então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

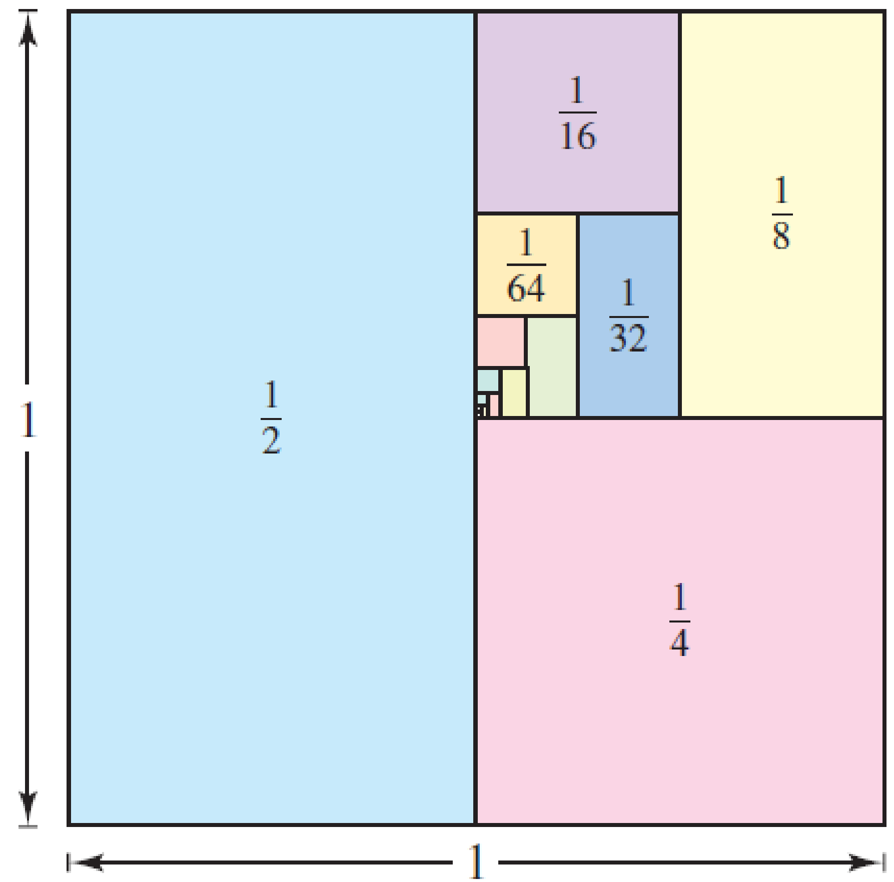
Converge

E

L é a soma da série

Se a sucessão diverge, a série é divergente

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$



$$s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\vdots$$

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n} \right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$S_1 = \left(1-\frac{1}{2}\right)$$

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$S_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$S_4=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$S_5=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

Exemplo: $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Exemplo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\qquad \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1}$$

As séries deste tipo, designam-se por séries telescópicas

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n)$$

$$S_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$S = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

Série telescópica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$s_0 = 1 - 1/2; \quad s1 = s_0 + 1/2 - 1/3 = 1 - 1/3$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{k+2} \quad \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+2}\right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)+(k+2)}\right) = 1$$

Série geométrica

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots}$$

$$\text{é } \mathit{uma\ série\ geométrica\ de\ raio\ } r$$

Qual a soma da série ?

Converge ? Diverge ?

Série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots$$

A série diverge se $|r| \geq 1$

Se $0 < |r| < 1$, a série converge para

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad , \qquad 0 < |r| < 1$$

(exercício TP)

Propriedades das séries

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$$

$$\sum_{k=0}^{n} r = (n+1)r$$

$$m \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (m.\, a_k)$$

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Critérios de convergência: último termo

TEOREMA

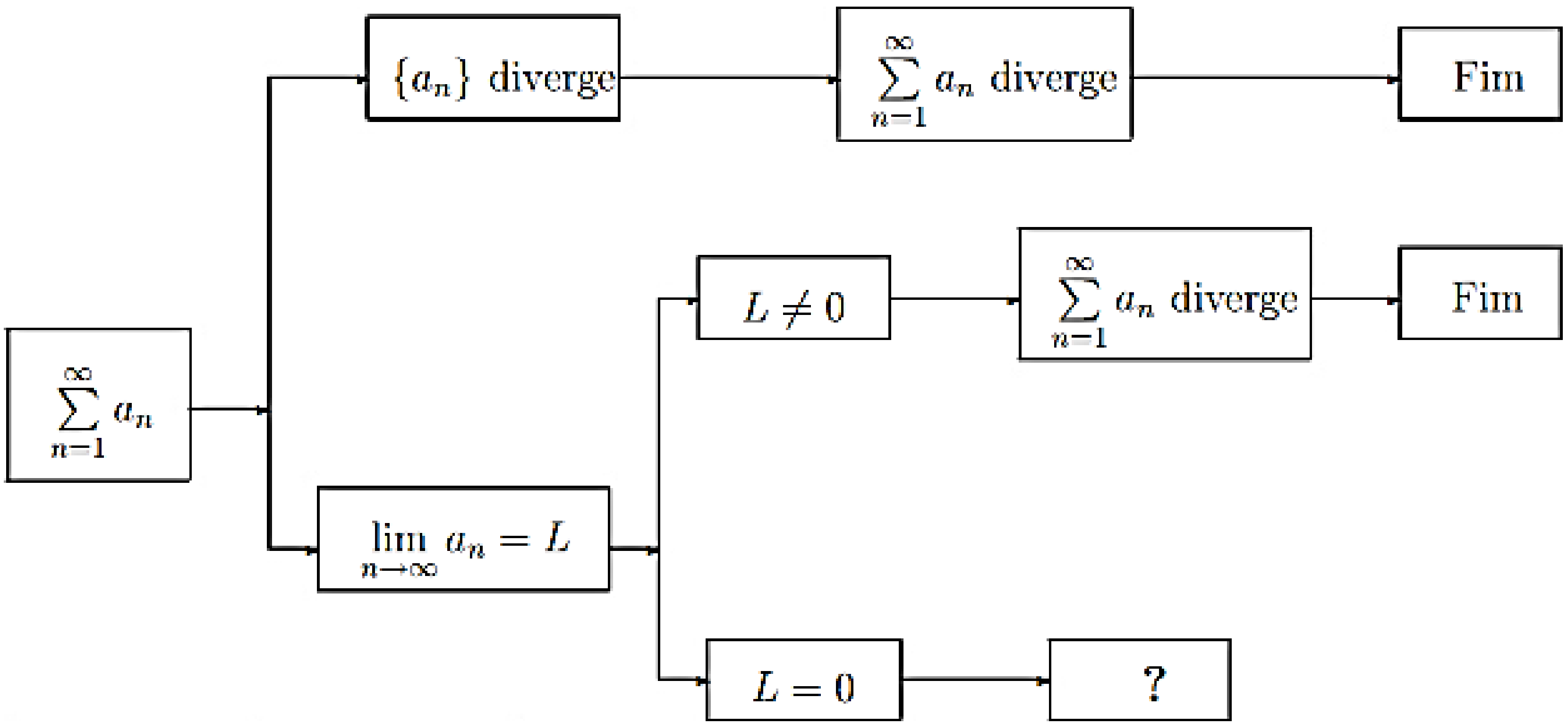
Se uma série é convergente, então o seu último termo tem que ser nulo

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge,

então

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Critérios de convergência



Critérios de convergência: Exemplos

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim_{n \to \infty} a_n$	situação

Critérios de convergência: Exemplos

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n$	situação
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n^2}$	$+\infty$	divergente

Critérios de convergência: Exemplos

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n$	situação
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n^2}$	$+\infty$	divergente
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3n+5}$	$\frac{1}{3}$	divergente

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$	$L = \lim_{n\to\infty} a_n$	$L \in \mathbb{R} \implies$ série convergente.

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$	$L = \lim_{n \to \infty} a_n$	$L \in \mathbb{R} \implies$ série convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$		$\begin{cases} \lvert r \rvert < 1 & \implies \text{série conv.} \\ \lvert r \rvert \geq 1 & \implies \text{série div.} \end{cases}$

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$	$L = \lim_{n\to\infty} a_n$	$L \in \mathbb{R} \implies$ série convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$		$\begin{cases} \lvert r \rvert < 1 & \implies \text{série conv.} \\ \lvert r \rvert \geq 1 & \implies \text{série div.} \end{cases}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n = a$	Se $a \neq 0$, série divergente.

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$	$L = \lim_{n\to\infty} a_n$	$L \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ série convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$		$\begin{cases} \lvert r \rvert < 1 & \Longrightarrow \text{série conv.} \\ \lvert r \rvert \geq 1 & \Longrightarrow \text{série div.} \end{cases}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n = a$	Se $a \neq 0$, série divergente.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall\, n \geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$	$L=\lim_{n\to\infty} a_n$	$L\in\mathbb{R} \Longrightarrow$ série convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$		$\begin{cases} \lvert r\rvert<1 & \Longrightarrow \text{série conv.} \\ \lvert r\rvert\geq 1 & \Longrightarrow \text{série div.} \end{cases}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n = a$	Se $a\neq 0$, série divergente.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n\geq 0$	$0\leq a_n\leq b_n \quad \forall\, n\geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n\geq 0$	$0\leq c_n\leq a_n \quad \forall\, n\geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ div.

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall\, n \geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$0 \leq c_n \leq a_n \quad \forall\, n \geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ div.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$\begin{cases} b_n > 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} L \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ mesma natureza} \\ L = 0 \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ div.} \\ L = 0 \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ conv.} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.} \end{cases}$

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$	$\begin{cases} L < 1 & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ série conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$	$\begin{cases} L < 1 & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ série conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n > 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$	$\begin{cases} L < 1 & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ e $a_n > 0$	$\begin{cases} (a_n) \downarrow 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$	$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergente.

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ e $a_n > 0$	$\begin{cases} (a_n) \downarrow 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$	$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ conv. $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv.

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ e $a_n > 0$	$\begin{cases} (a_n) \downarrow 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$	$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ conv. $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = L$	$\begin{cases} L < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ abs. conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ e $a_n > 0$	$\begin{cases} (a_n) \downarrow 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$	$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ conv. $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = L$	$\begin{cases} L < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ abs. conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\begin{cases} a_n = f(n) \\ f(x) > 0 \; \forall \; x \geq 1 \\ f \text{ cont. e decresc.} \end{cases}$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv. $\Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ conv.

Séries Numéricas II

1) Introdução
2) Sucessões
   a) Definição
   b) Convergência
3) Séries Infinitas
   1) Definição
   2) Séries telescópicas
   3) Séries Geométricas
4) Critérios de convergência
5) Séries de Potências
6) Aproximação de funções
   a) Polinómios e Séries de Taylor
   b) Séries de Fourier

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$	$L=\lim_{n\to\infty} a_n$	$L \in \mathbb{R} \implies$ série convergente.

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$	$L = \lim_{n\to\infty} a_n$	$L \in \mathbb{R} \implies$ série convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$		$\begin{cases} \lvert r \rvert < 1 & \implies \text{série conv.} \\ \lvert r \rvert \geq 1 & \implies \text{série div.} \end{cases}$

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$	$L=\lim_{n\to\infty} a_n$	$L\in\mathbb{R} \implies$ série convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$		$\begin{cases} \lvert r\rvert<1 & \implies \text{série conv.} \\ \lvert r\rvert\geq 1 & \implies \text{série div.} \end{cases}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n = a$	Se $a\neq 0$, série divergente.

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$	$L=\lim_{n\to\infty} a_n$	$L\in\mathbb{R} \Longrightarrow$ série convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$		$\begin{cases} \lvert r \rvert < 1 & \Longrightarrow \text{série conv.} \\ \lvert r \rvert \geq 1 & \Longrightarrow \text{série div.} \end{cases}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n = a$	Se $a\neq 0$, série divergente.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$0\leq a_n \leq b_n \quad \forall\, n\geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.

Critérios de convergência

Série	Teste	Conclusão
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$	$L=\lim_{n\to\infty} a_n$	$L\in\mathbb{R} \Longrightarrow$ série convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$		$\begin{cases} \lvert r\rvert<1 & \Longrightarrow \text{série conv.} \\ \lvert r\rvert\geq 1 & \Longrightarrow \text{série div.} \end{cases}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n = a$	Se $a\neq 0$, série divergente.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n\geq 0$	$0\leq a_n\leq b_n \quad \forall\, n\geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n\geq 0$	$0\leq c_n\leq a_n \quad \forall\, n\geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ div.

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall\, n \geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$0 \leq c_n \leq a_n \quad \forall\, n \geq N$	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ div.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$\begin{cases} b_n > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} L \neq 0 \quad \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ mesma natureza} \\ L = 0 \quad \text{e } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ div.} \\ L = 0 \quad \text{e } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ conv.} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.} \end{cases}$

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$	$\begin{cases} L < 1 & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ série conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n \geq 0$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$	$\begin{cases} L < 1 & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ série conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $a_n > 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$	$\begin{cases} L < 1 & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$

Critérios de convergência

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ e $a_n > 0$	$\begin{cases} (a_n) \downarrow 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$	$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergente.

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ e $a_n > 0$	$\begin{cases} (a_n) \downarrow 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$	$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ conv. $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv.

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ e $a_n > 0$	$\begin{cases} (a_n) \downarrow 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$	$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ conv. $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = L$	$\begin{cases} L < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ abs. conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$

Critérios de convergência

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ e $a_n > 0$	$\begin{cases} (a_n) \downarrow 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$	$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ conv. $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv.
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = L$	$\begin{cases} L < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ abs. conv.} \\ L > 1 \text{ ou } L = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{cases}$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\begin{cases} a_n = f(n) \\ f(x) > 0 \; \forall \; x \geq 1 \\ f \text{ cont. e decresc.} \end{cases}$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv. $\Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ conv.

Teste do limite

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos

$$\boxed{L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}}$$

Se L é finito e positivo (>0), as duas séries têm o *MESMO COMPORTAMENTO*

Séries - p

$$\sum \frac{1}{n^p}, \qquad \text{com } p > 0$$

Converge se $\quad p > 1$

Diverge se $\quad 0 < p \leq 1$

Exemplo: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente pois *p=2* (>1)

Sendo $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergente e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+k} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ conclui-se que :

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+k}$ é convergente

Exemplo: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Diverge pois p=1/2 (<1)

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

Exemplo: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

Usamos a comparação entre as séries de termo geral

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1} \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

? Divergente

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)=$$

$$=1\;(>0)$$

Ambas divergem

Critério da Razão (d´Alembert)

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos

E seja $\mathrm{L} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

$L < 1$ a série converge

$L > 1, +\infty$ a série diverge

$L = 1$ inconclusivo – usar outro teste

Exemplo: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k!}{(k+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k!}{(k+1)k!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(k+1)}\right) = 0$$

Conclui-se que a série converge

Critério da Raiz

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos

E seja $\mathrm{L} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$

$L < 1$ a série converge

$L > 1, +\infty$ a série diverge

$L = 1$ inconclusivo – usar outro teste

Exemplo: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(k+1)]^n}$$

$$\mathrm{L} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{[\ln(k+1)]^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{[\ln(k+1)]^n}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right) = 0$$

Conclui-se que a série converge

Séries Alternadas

Considere-se a série de termos alternados dada por

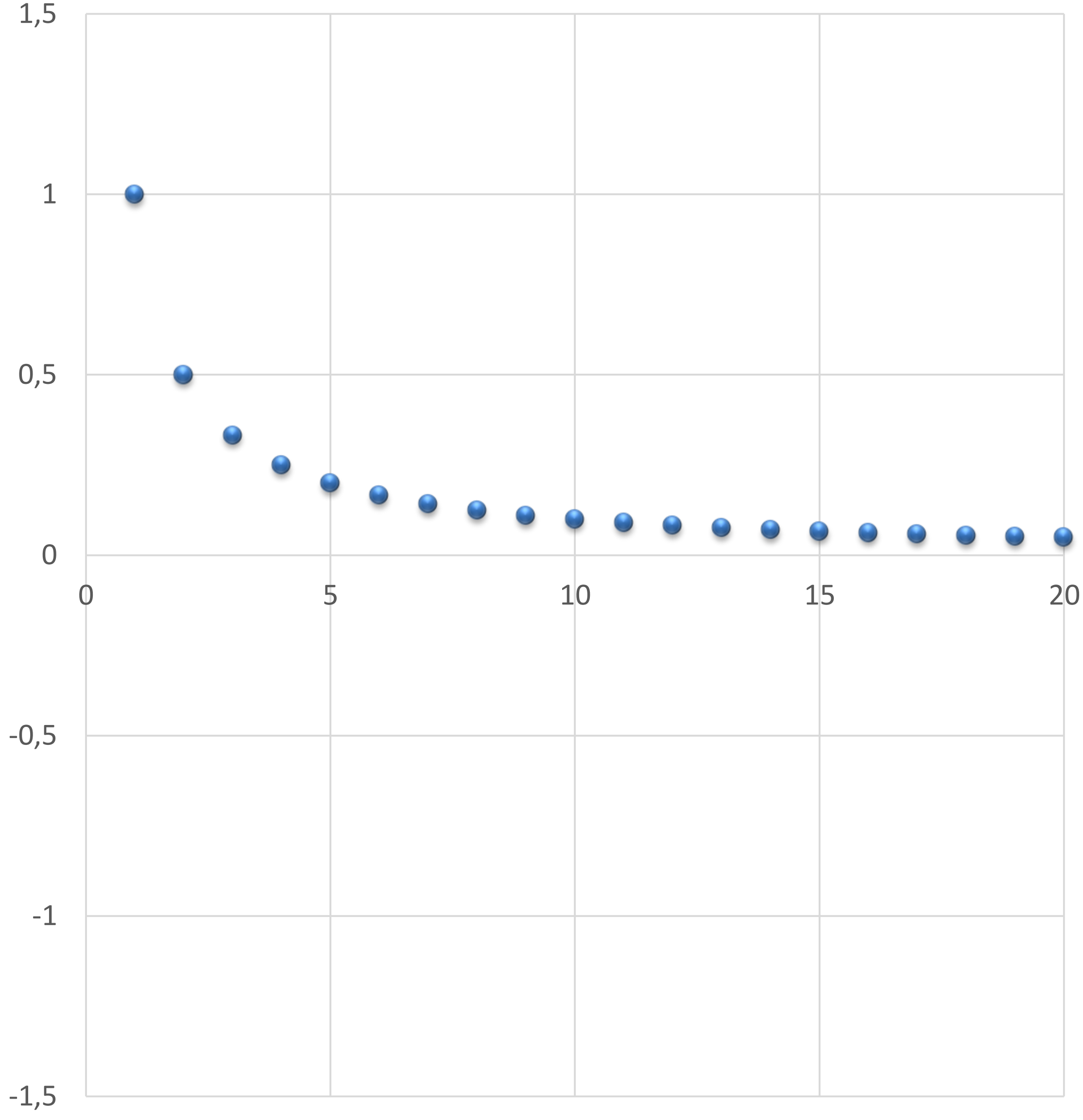
$$\sum_{n} (-1)^n a_n$$

Onde $\boldsymbol{a_n}$ é uma sucessão de termos positivos

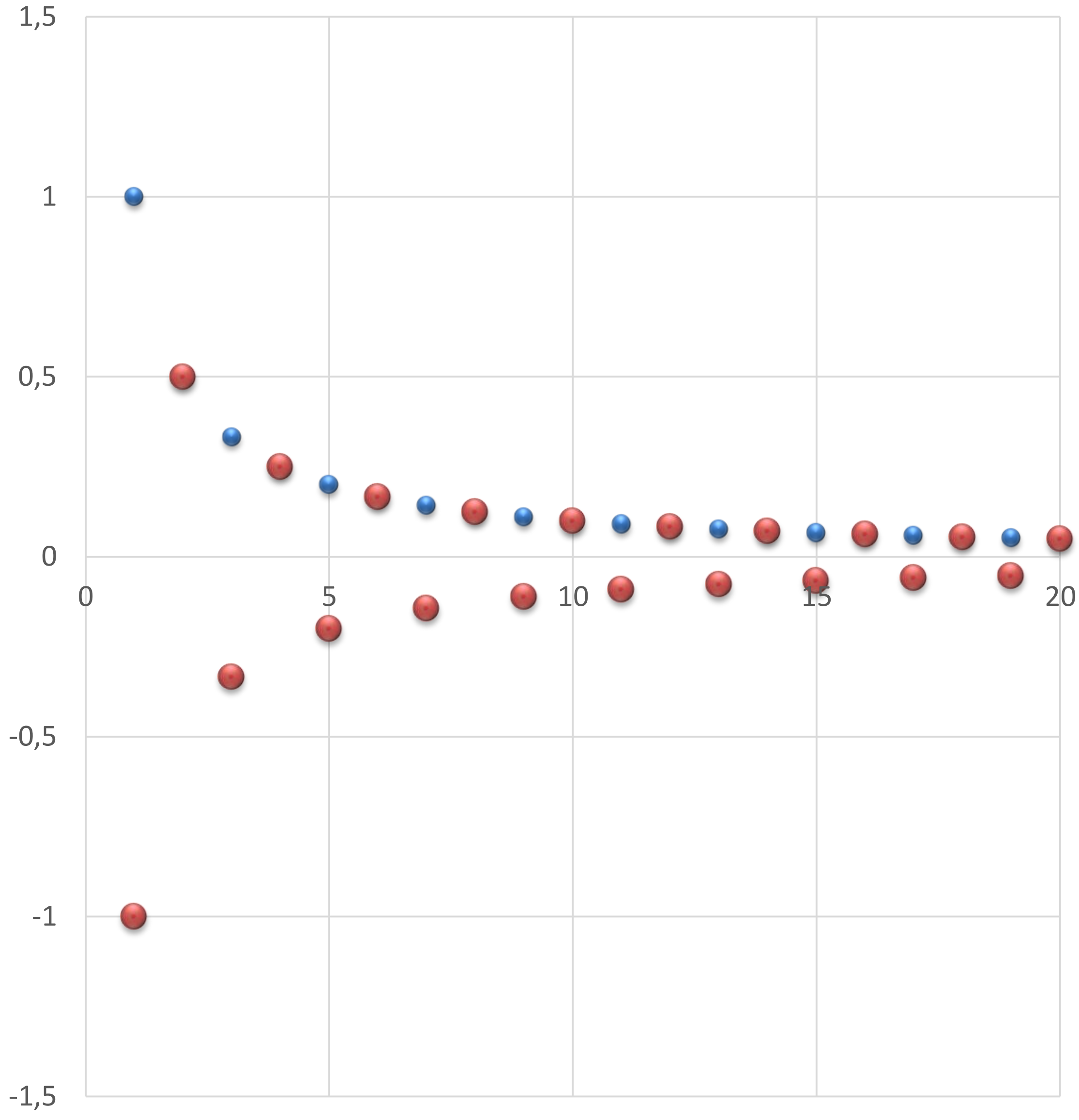
Se $\boldsymbol{a_n}$ é decrescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\boldsymbol{a_n}$

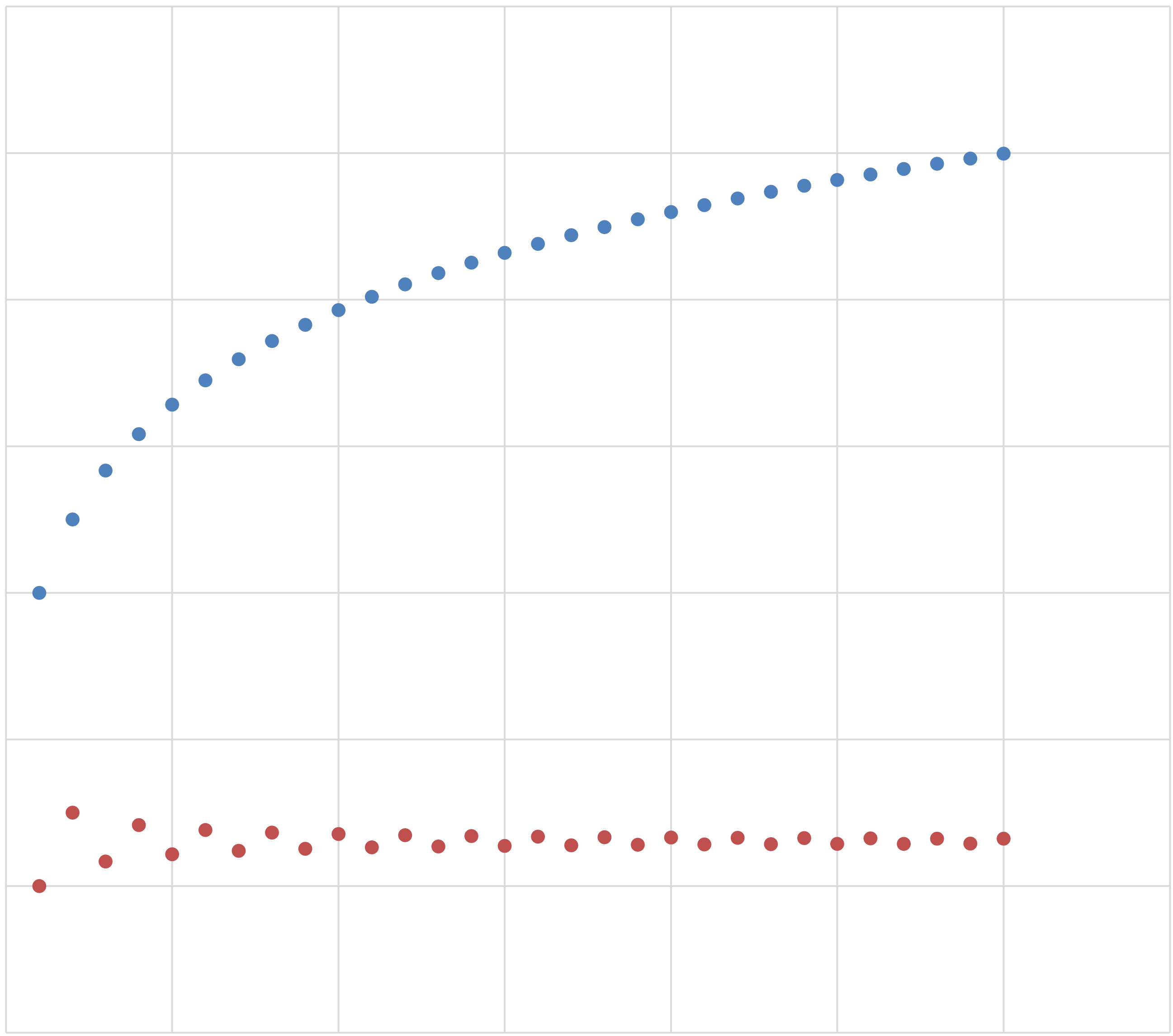
$\sum_n (-1)^n a_n$ é convergente

$$a_n = \frac{1}{n}$$



$$a_n = (-1)^n \, \frac{1}{n}$$





Séries de Potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Onde a_n é uma sucessão numéricae $a \in R$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n =$$

$$= a_0 + a_1(x-a) \; + a_2(x-a)^2 + \; \dots . + a_n(x-a)^n$$

Séries de Potências

Série de potências centrada em a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n =$$

$$= a_0+a_1(x-a) \ \ +a_2(x-a)^2+ \ \ldots.+a_n(x-a)^n$$

Quando a=0, diz-se uma série de potências centrada na origem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots.+a_nx^n+\cdots$$

Séries de Potências (convergência)

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-a|.$$

Se x é tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-a|<1$, então a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ é **convergente.**

Se x é tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-a|>1$, então a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ é **divergente.**

Se x é tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-a|=1$, **então nada se pode concluir**

Séries de Potências de Taylor e MacLaurin

(Polinómios) Taylor $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a)^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

(Polinómios) MacLaurin $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(0)^{(n)}}{n!}(x)^n$$

$f(a)^{(n)}$ é a derivada de ordem n da função $f(x)$ calculada no pondo *x=a*

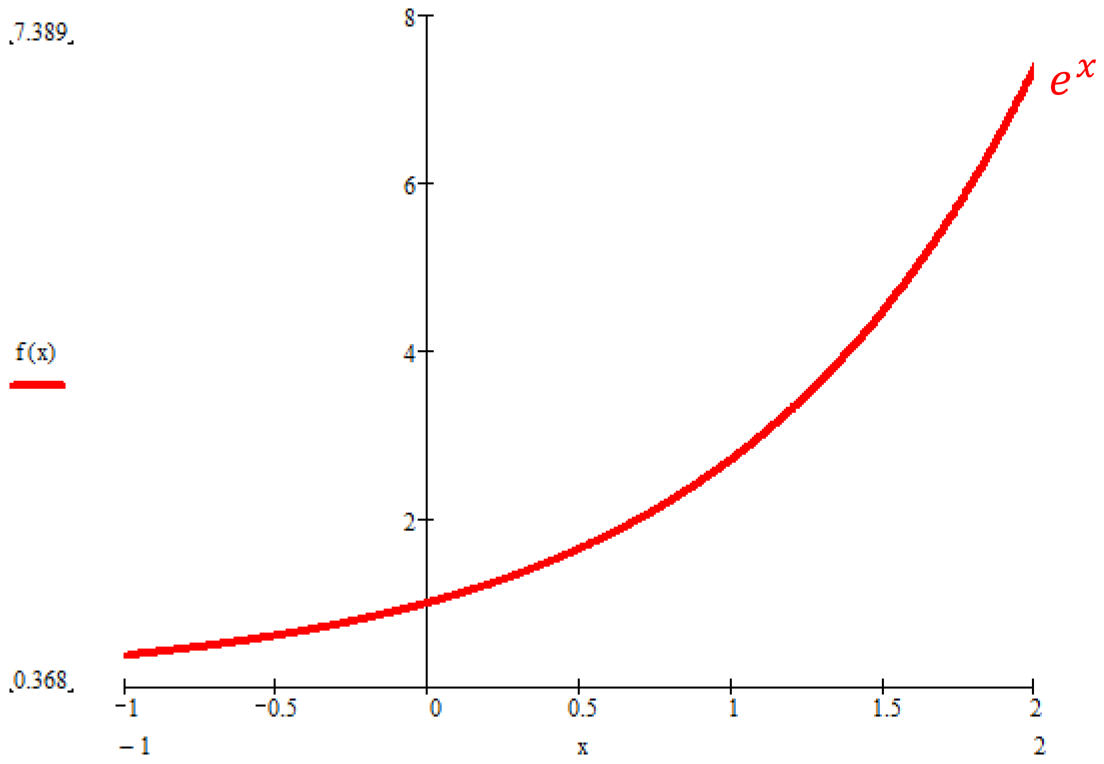
Vamos Calcular os primeiros 3 termos da Série de Taylor em $a = 0$ (ou série de MacLaurin) da função $f(x) = e^x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a)^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

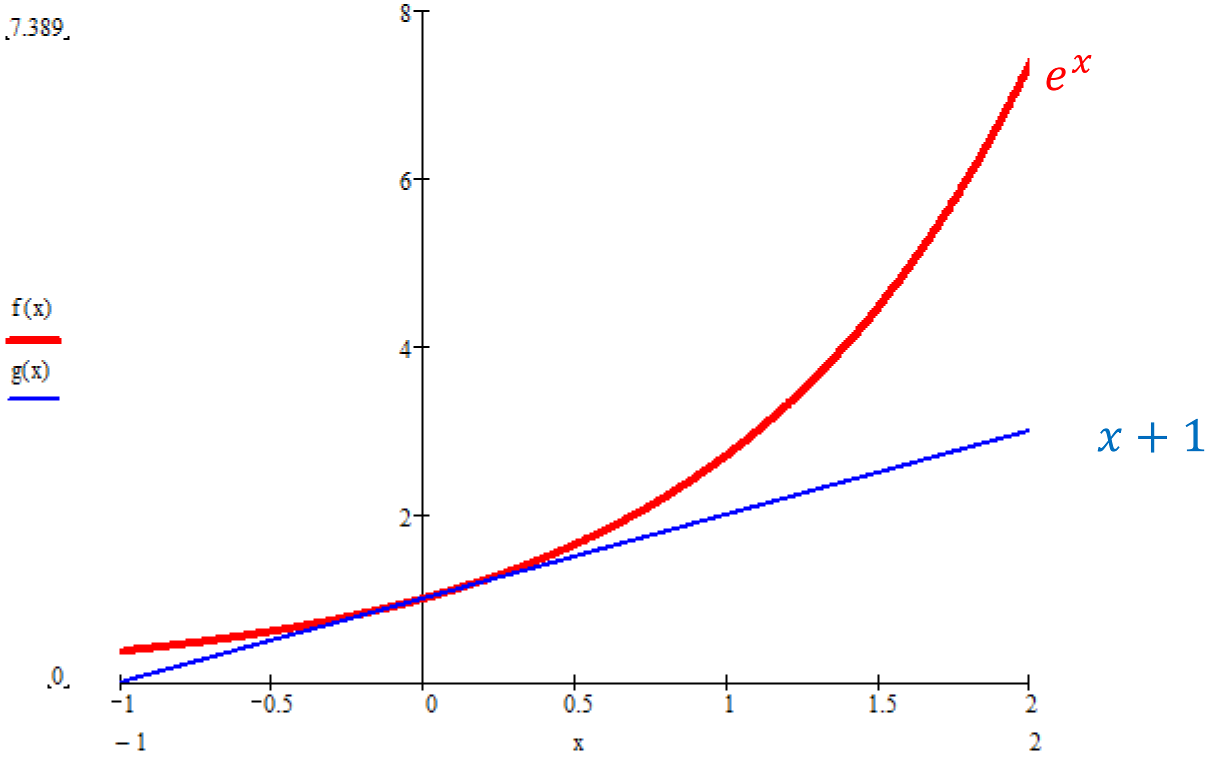
$$f(x) = \ e^x \ \ e \ \ a = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(0)^{(n)}}{n!}(x)^n$$

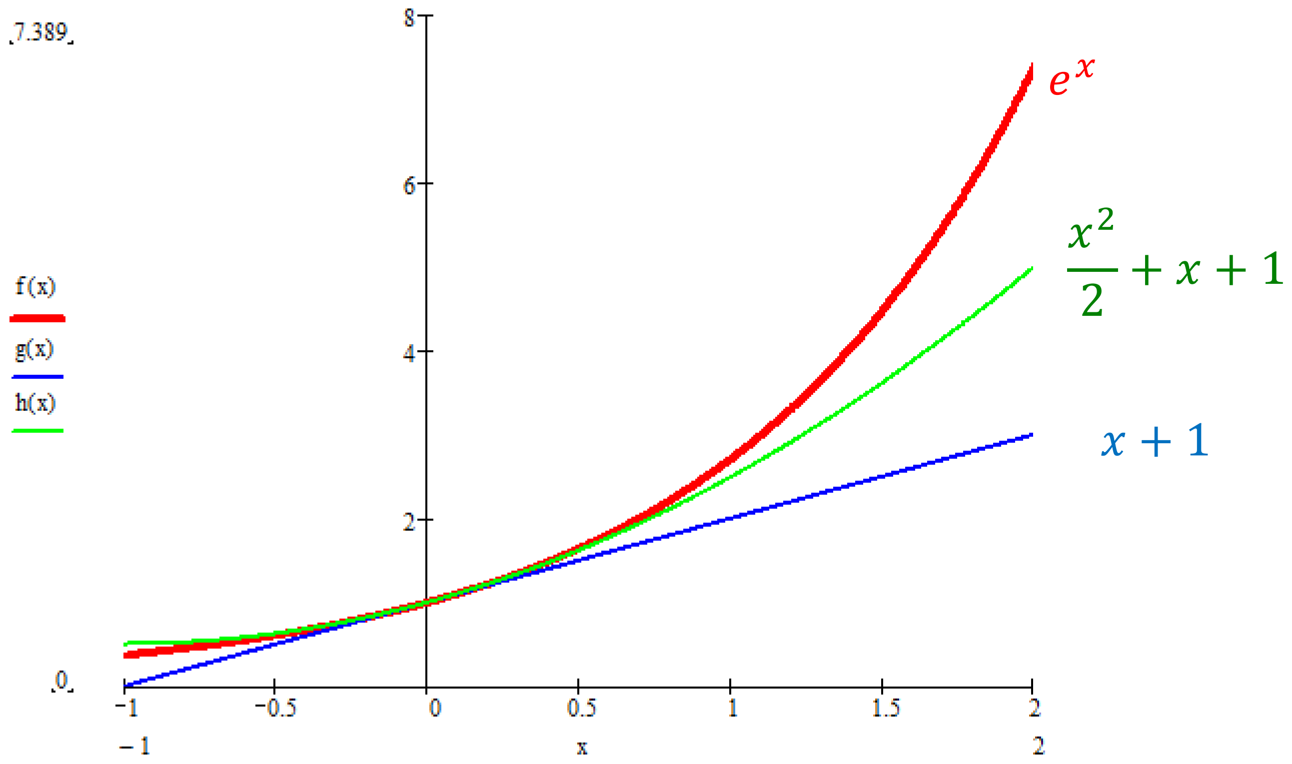
Aproximação em torno de x=0 de e^x



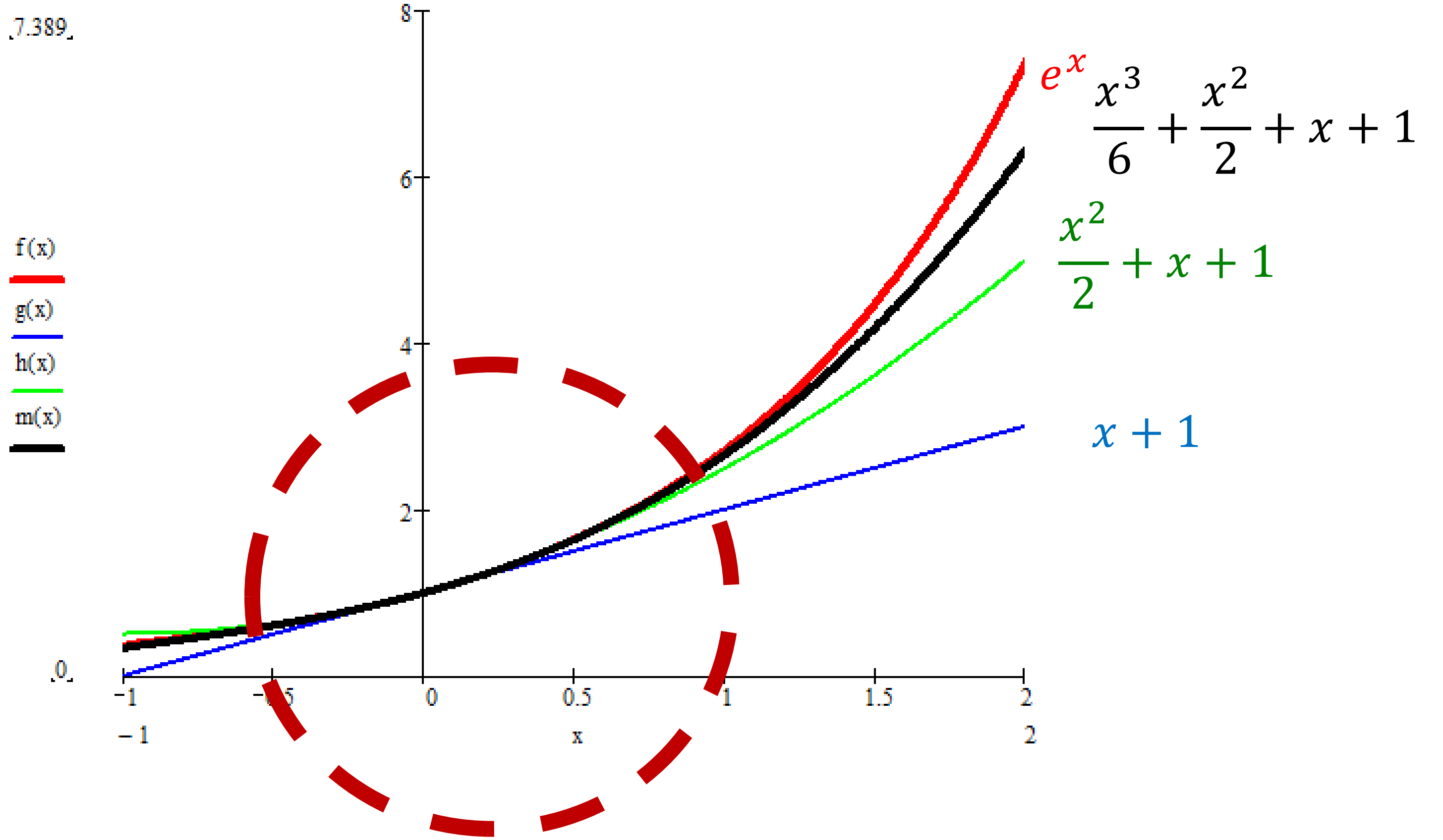
Linear $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$

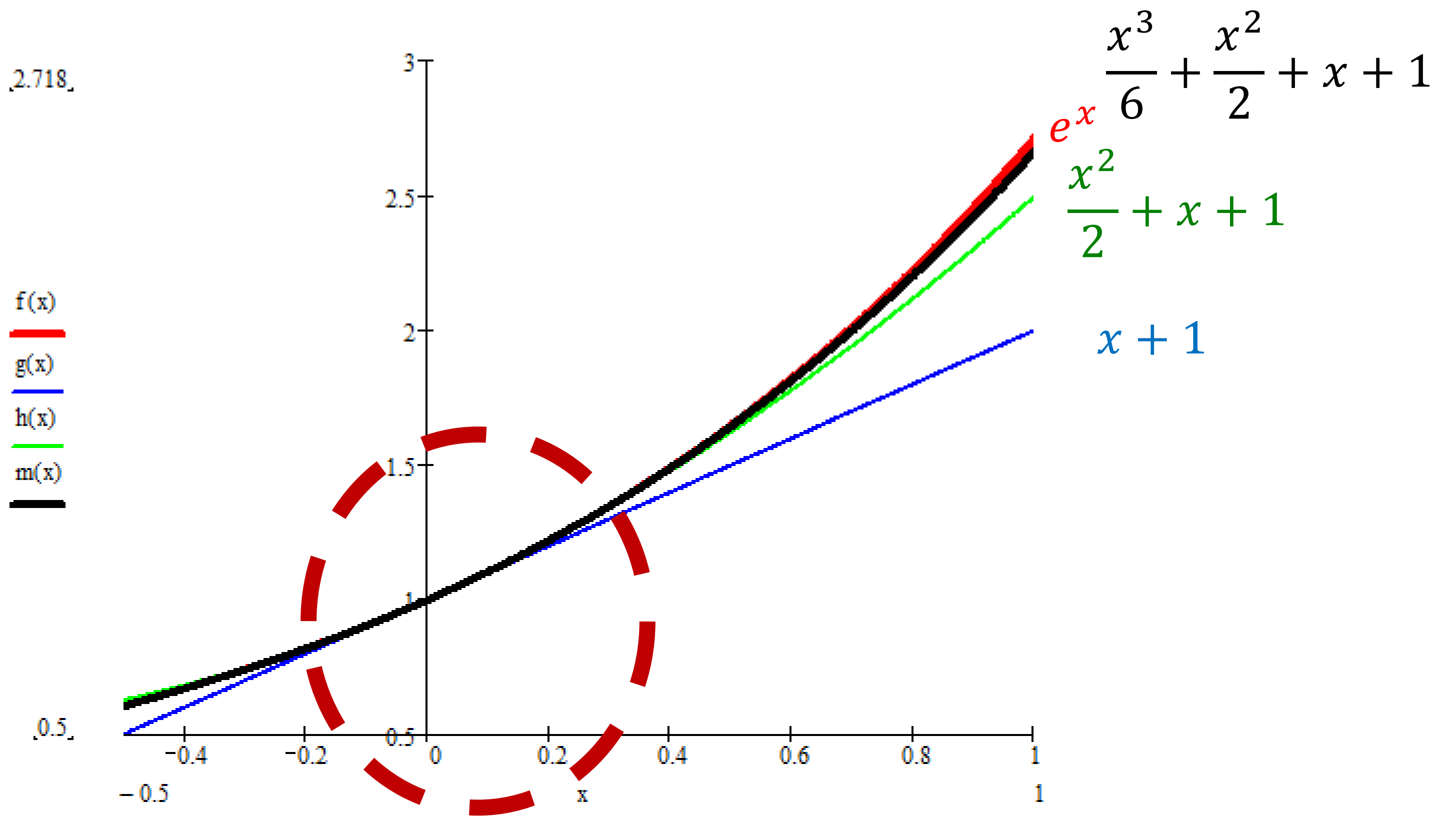


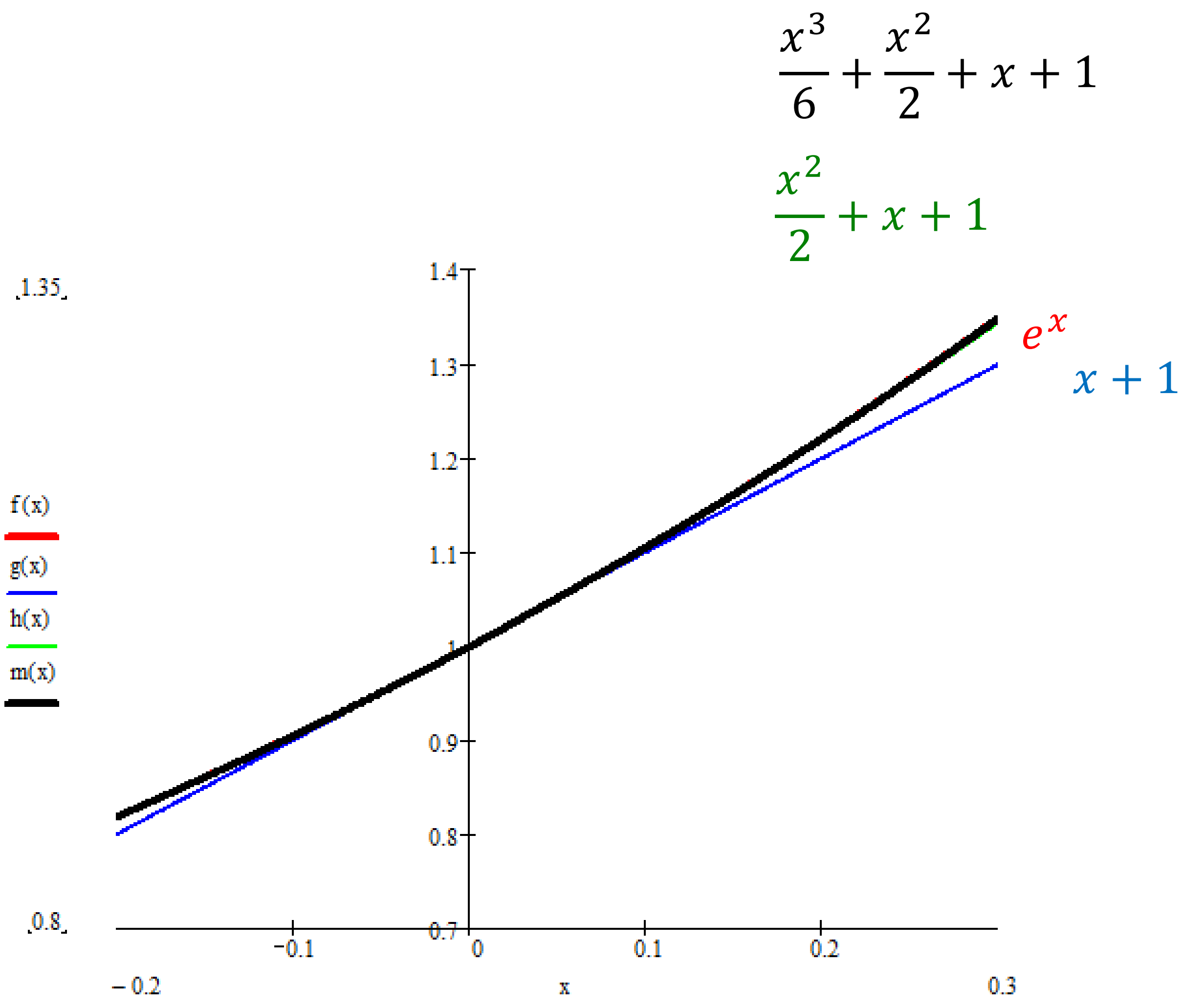
Quadrática $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} x^2$



Cúbica $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$




2.718
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0.5
f(x)
g(x)
h(x)
m(x)
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
− 0.5
x
1
$\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$
e^x
$\frac{x^2}{2}+x+1$
$x+1$



$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$
$\frac{x^2}{2} + x + 1$
e^x
$x + 1$
1.35
0.8
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
f(x)
g(x)
h(x)
m(x)
−0.1
0
0.1
0.2
− 0.2
x
0.3

Polinómios de MacLaurin

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+ \cdots + \frac{\boldsymbol{f^{(n)}(0)}}{\boldsymbol{n!}}\boldsymbol{x^n}$$

Aproximação em torno de ***x = 0***

Polinómio de MacLaurin de e^x

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Série de MacLaurin de e^x

Polinómios de Taylor

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots +$$

$$\cdots + \frac{\boldsymbol{f^{(n)}(x_0)}}{\boldsymbol{n!}}\boldsymbol{(x - x_0)^n}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{f^{(n)}(x_0)}}{\boldsymbol{n!}}\boldsymbol{(x - x_0)^n}}$$ Série de Taylor

Aproximação em torno de $\boldsymbol{x = x_0}$

Polinómio de Taylor de e^x em torno de a

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = e^a$$

$$P_n(x) = e^a\left(1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\right)$$

$$\boxed{e^x = P_n(x) = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}}$$

SÉRIES NUMÉRICAS IV

1) Introdução
2) Sucessões
    a) Definição
    b) Convergência
3) Séries Infinitas
    1) Definição
    2) Séries telescópicas
    3) Séries Geométricas
4) Critérios de convergência
5) Séries de Potências
6) Aproximação de funções
    a) Polinómios e Séries de Taylor

Séries de Potências de Taylor e MacLaurin

(Polinómios) Taylor $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a)^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

(Polinómios) MacLaurin $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(0)^{(n)}}{n!}(x)^n$$

$f(a)^{(n)}$ é a derivada de ordem n da função $f(x)$ calculada no pondo $x=a$

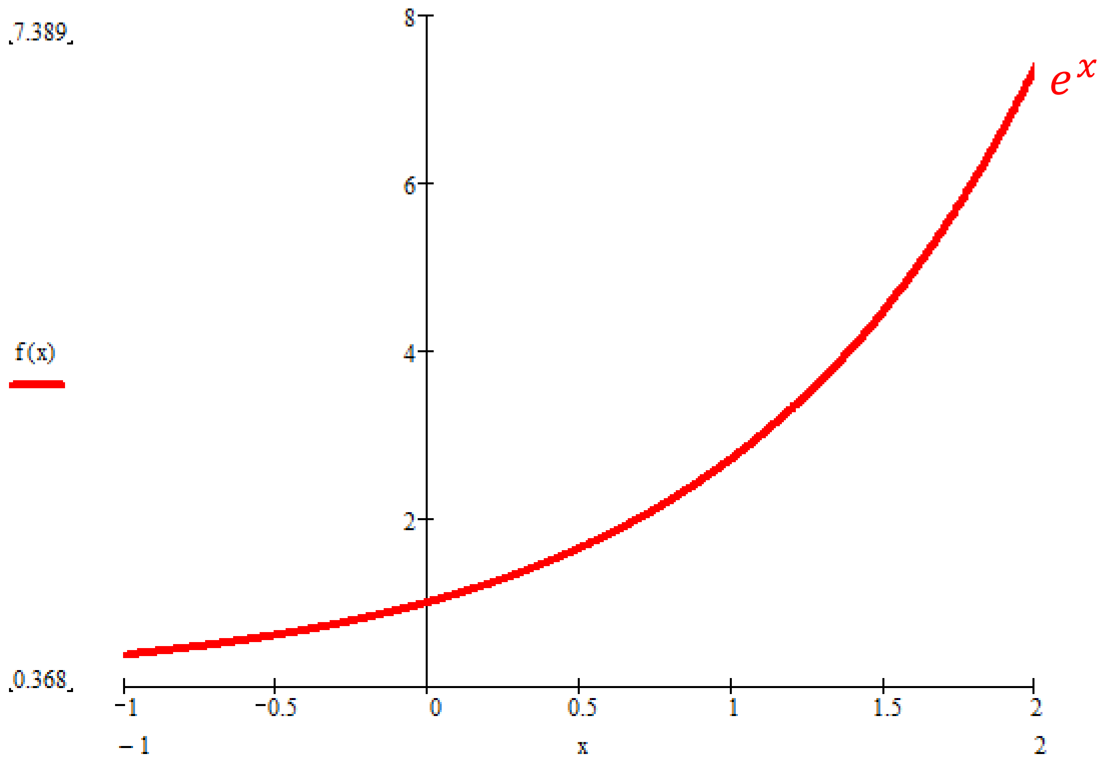
Vamos Calcular os primeiros 3 termos da Série de Taylor em $a = 0$ (ou série de MacLaurin) da função $f(x) = e^x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a)^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

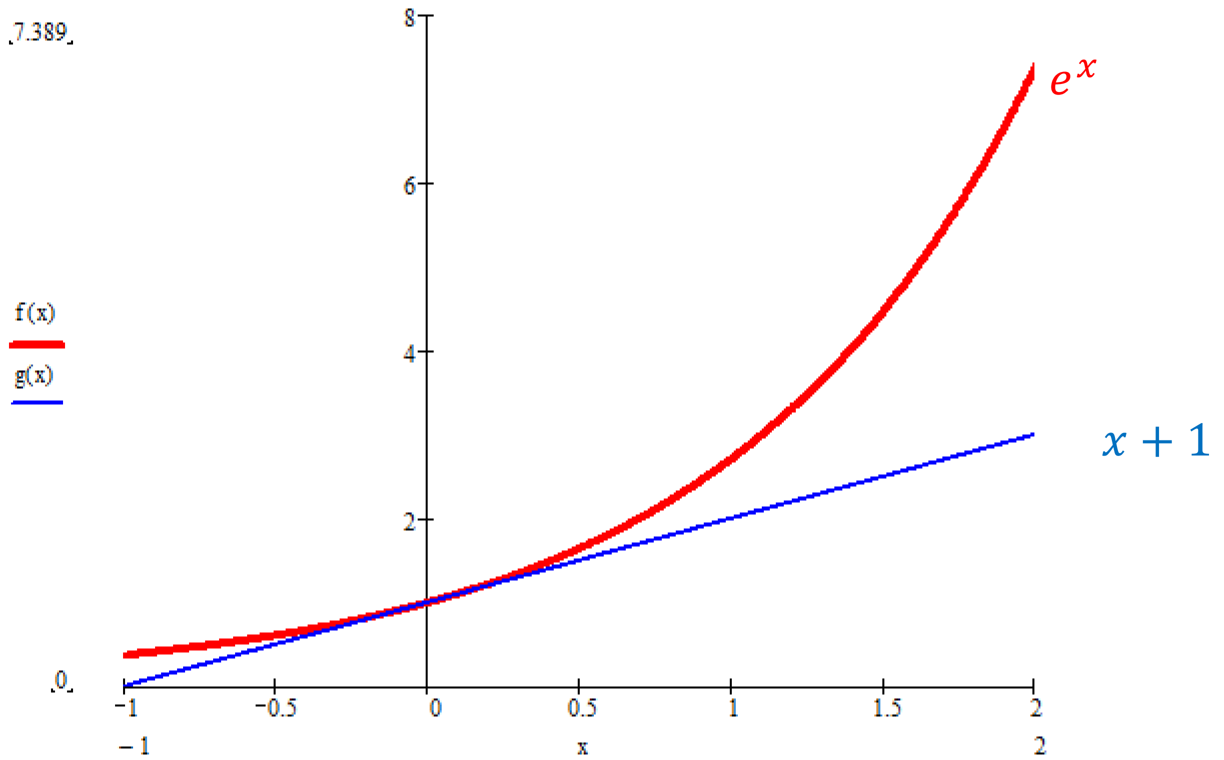
$$f(x) = e^x \;\; e \;\; a = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(0)^{(n)}}{n!}(x)^n$$

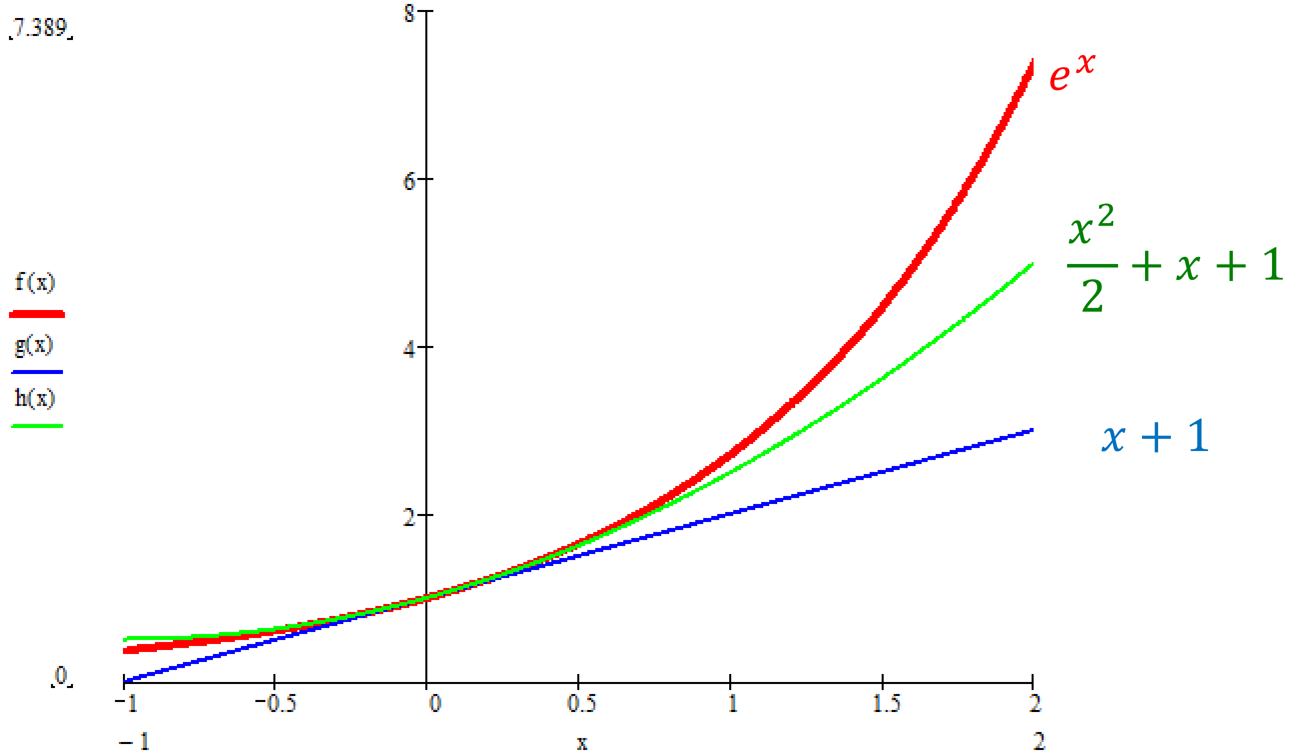
Aproximação em torno de x=0 de e^x



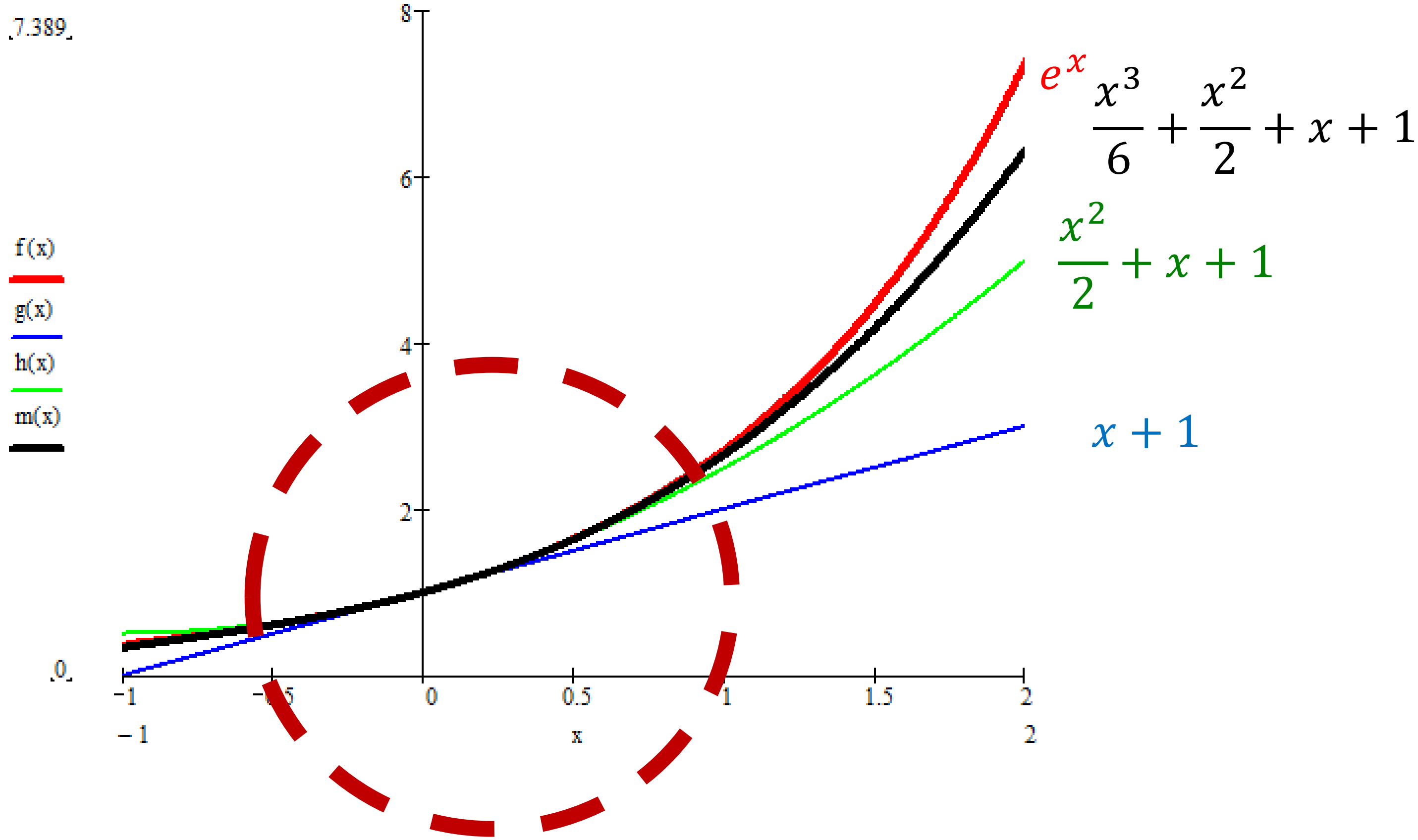
Linear $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$

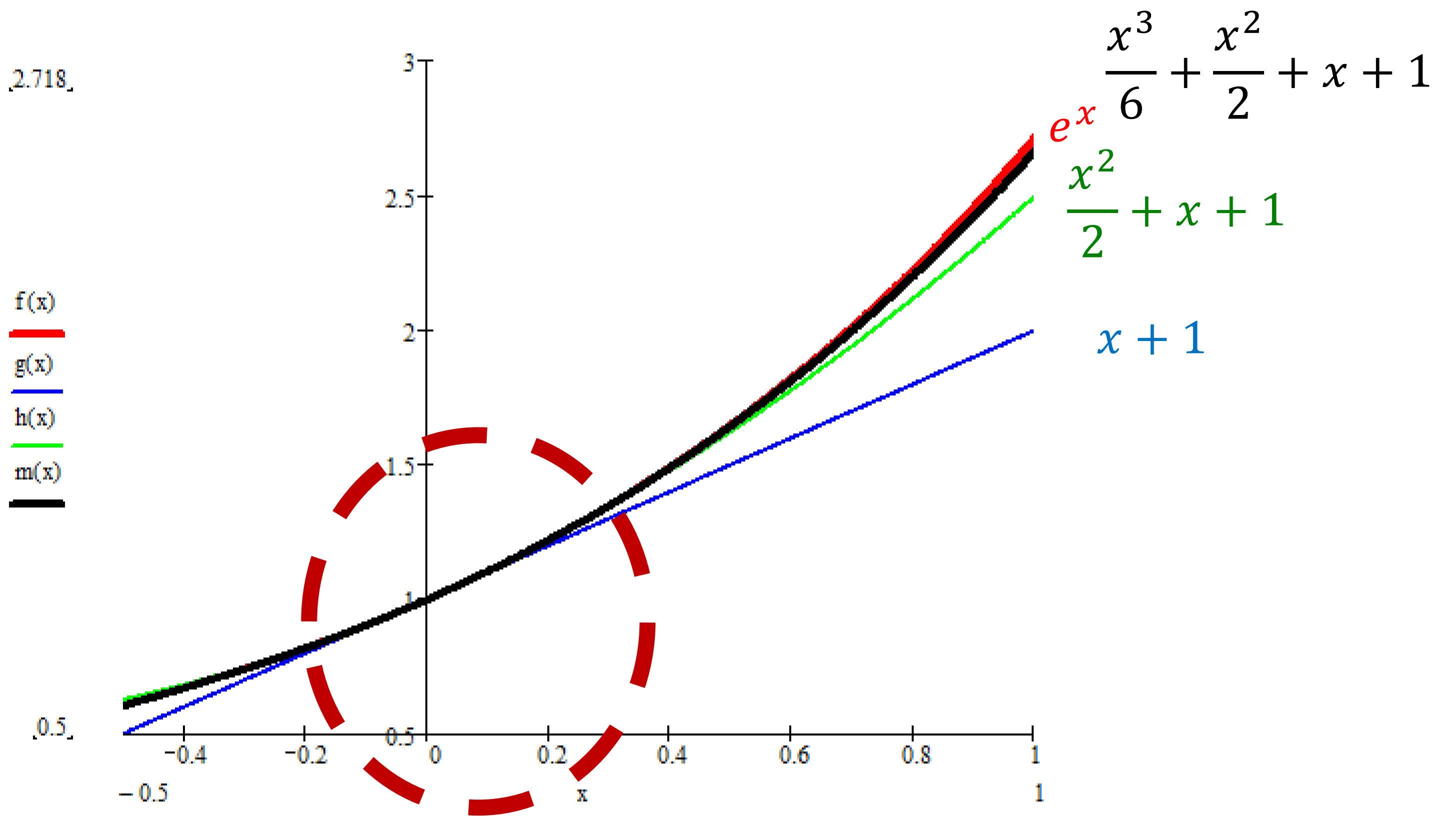


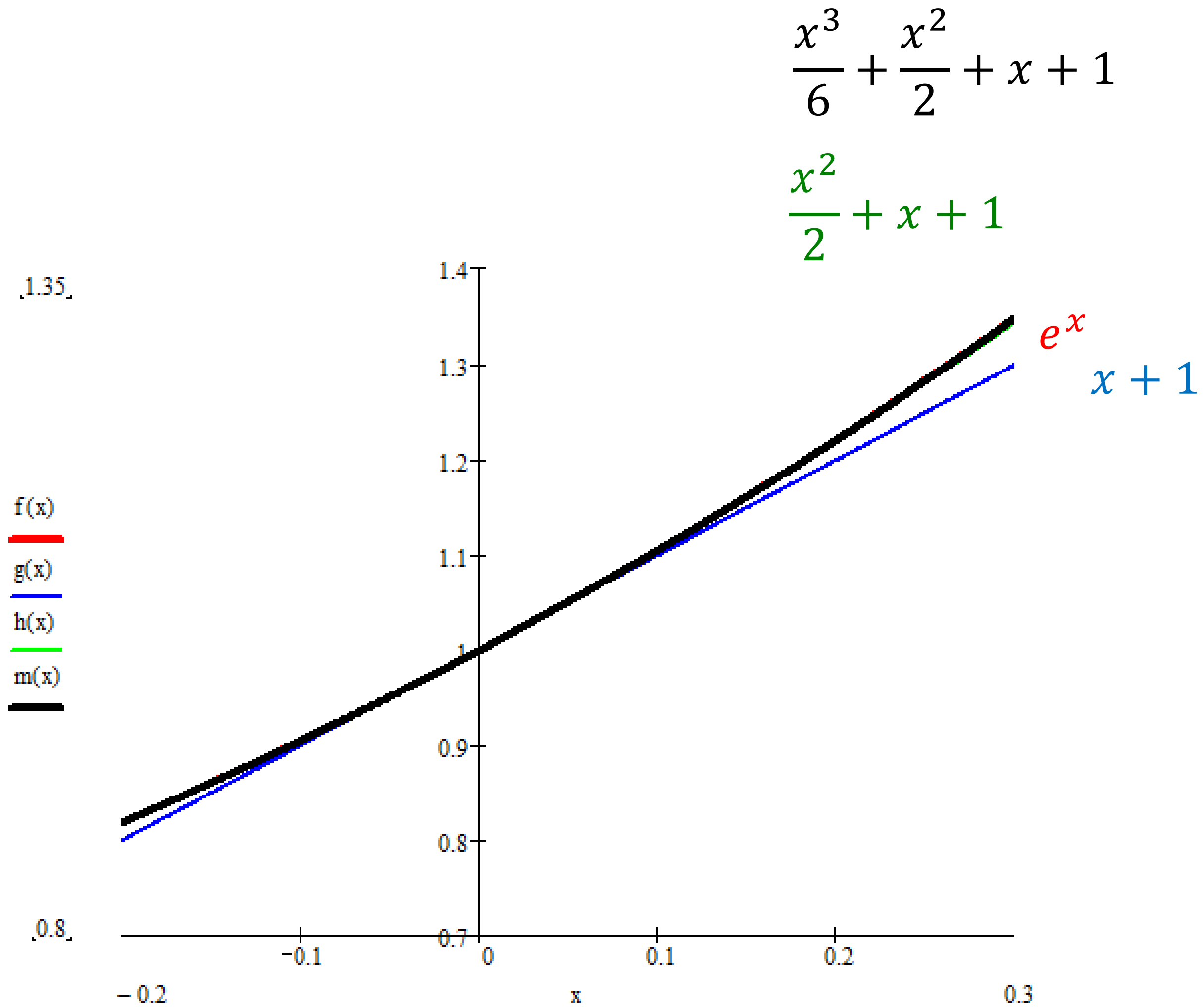
Quadrática $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} x^2$



Cúbica $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$




$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$
e^x
$\frac{x^2}{2} + x + 1$
$x + 1$
2.718
0.5
f(x)
g(x)
h(x)
m(x)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
− 0.5
x
1


$\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$
$\frac{x^2}{2}+x+1$
e^x
$x+1$
1.35
f(x)
g(x)
h(x)
m(x)
0.8
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
−0.1
0
0.1
0.2
− 0.2
x
0.3

Polinómios de MacLaurin

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+ \cdots + \frac{\boldsymbol{f^{(n)}(0)}}{\boldsymbol{n}!}\boldsymbol{x^n}$$

Aproximação em torno de ***x = 0***

Polinómio de MacLaurin de e^x

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Série de MacLaurin de e^x

Polinómios de Taylor

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots +$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

Série de Taylor

Aproximação em torno de $x = x_0$

Polinómio de Taylor de e^x em torno de a

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = e^a$$

$$P_n(x) = e^a\left(1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\right)$$

$$\boxed{e^x = P_n(x) = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}}$$

Exemplo: Série de Taylor de $\sin(x)$ em torno de $x_0 = 0$

$$\boldsymbol{f(x) = sin(x)} \qquad \boldsymbol{f(0) = 0}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = cos(x)} \qquad \boldsymbol{f'(0) = 1}$$

$$\boldsymbol{f''^{(x)} = -sin(x)} \qquad \boldsymbol{f''(0) = 0}$$

$$\boldsymbol{f'''^{(x)} = -cos(x)} \qquad \boldsymbol{f'''^{(0)} = -1}$$

$$\boldsymbol{f^{(4)}(x) = sin(x)} \qquad \boldsymbol{f^{(4)}(0) = 0}$$

$$\boldsymbol{f^{(5)}(x) = cos(x)} \qquad \boldsymbol{f^{(5)}(0) = 1}$$

Exemplo: Série de Taylor de $\sin(x)$ em torno de $x_0 = 0$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Exemplo: Série de Taylor de $cos(x)$ em torno de $x_0 = 0$

$$f(x) = cos(x) \qquad f(0) = 1$$

$$f'^{(x)} = -sin(x) \qquad f'(0) = 0$$

$$f''^{(x)} = -cos(x) \qquad f''^{(0)} = -1$$

$$f^{(3)}(x) = sin(x) \qquad f^{(3)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = cos(x) \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

Exemplo: Série de Taylor de $cos(x)$ em torno de $x_0 = 0$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Precisão

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =}$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-a)^{k+1}$$

Precisão

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}}$$

Exemplo para e^x em torno de ZERO

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(k+1)!} * x^{k+1}}$$

Formula de Taylor com Resto de Lagrange

Teorema (Formula de Taylor de ordem n, com resto de Lagrange).

Seja $f: [a, b] \rightarrow \boldsymbol{R}$ uma função com $\boldsymbol{n}$ derivadas contínuas e $f^{(n+1)}$ definida em todo $]a, b[$. Seja $x_0 \in [a, b]$, então existe um $\mathrm{c} \in]a, b[$ tal que

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R^{(n)}(x)$$

$$\boxed{R^{(n)}(x)\le\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}}$$

$$\boxed{|f^{(n+1)}(x)|\le M}$$ (Majorante)

Exemplo: calcular *e* até à quinta casa décimal

$$e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1)^k}{k!} + \frac{e}{(n+1)!} * (1)^{n+1} \qquad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}$$

Maj $\left|\frac{e}{(n+1)!}\right| \leq 0.000005$ e<3

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 0.000005$$

$$(n+1)! \geq 600\,000 \qquad n = 9$$

$$e \approx 2.71828182846$$

Exemplo: calcular *sin(1)* até à quarta casa décimal

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sin(1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(1)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{sin^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}(1)^{2n+2}$$

$$\text{Maj } \left|\frac{sin^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}\right| \leq 5^{-5}$$

$$\frac{1}{(2n+2)!} \leq 5^{-5}$$

$$(2n+2)! \geq 20000$$

$$n = 3$$

7!=5040

8!=40320

$$\sin(1) = 0{,}8414709848$$

$$\sin(1) \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} =$$

$$= 0{,}8414\,6$$

Derivação e integração da Série de Taylor

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(x)] \approx \frac{d}{dx}[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots]$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2|} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos(x)$$

Ver anexo

DERIVAÇÃO SÉRIES POTÊNCIAS

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right]$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x$$

Integração Séries Potências

$$\int \cos x \, dx =$$

$$\int \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right] dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + C$$

$$= \operatorname{sen} x + C$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln\left(1+[x-1]\right) = \ln(x)$$

$$= [x-1] - \frac{[x-1]^2}{2} + \frac{[x-1]^3}{3} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x)$$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$+ C$$

Derivação e Integração de séries de potências

$$\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = \frac{d}{dx}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right]$$

$$= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right]$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \int \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \right] dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3(2!)} + \frac{x^5}{5(4!)} - \frac{x^7}{7(6!)} + \cdots \right] + c$$

$$= \operatorname{sen} x + C$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \ln(1+x)$$

$(-1 < x \leq 1)$

$$\ln\left(1 + [x-1]\right) = \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

$$\downarrow$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} = 1 - \frac{2(x-1)}{2} + \frac{3(x-1)^2}{3} + \cdots$$

Série de Maclaurin para arctg x

$$\int \frac{1\,dx}{1+x^2} = \text{arctg}\, x + c$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\text{arctg}\, x + c = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

$$x = 0 \longrightarrow c = 0$$

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$