EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I

Introdução e exemplos

Classificação das ED

EDO de 1ª ordem

Variáveis separáveis

EDO lineares – fator integrante

Problema

Conhecida a função que representa a variação de uma função, queremos saber a expressão da função inicial.

Por exemplo: $\frac{dy}{dx} = 30x^2 - 5$, qual a função $y = F(x)$?

$$\int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int (30x^2 - 5)\, dx$$

INTEGRAR AMBOS OS LADOS EM ORDEM À VARIÁVEL X

$$\int dy = \int (30x^2 - 5)\, dx$$

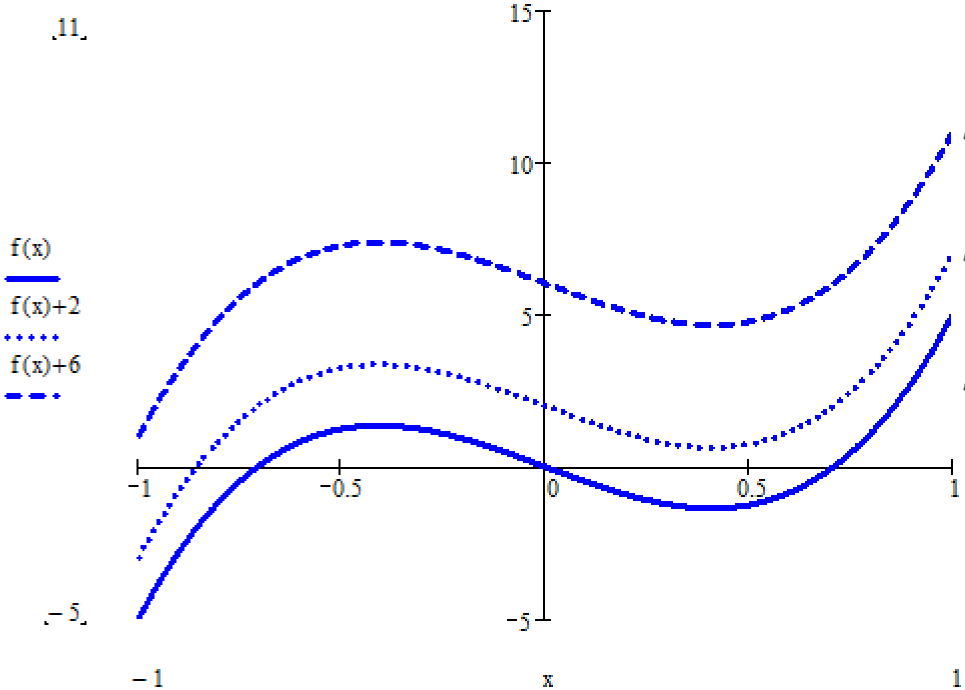
CALCULAR OS INTEGRAL DE CADA LADO DA IGUALDADE UM EM DY OUTRO EM DX

$$y + C_1 = 10x^3 - 5x + C_2$$

$$y = 10x^3 - 5x + C$$

De facto a solução representa a família de curvas:

$$y(x) = 10x^3 - 5x + C$$



$$y(x) = 10x^3 - 5x + 6$$

$$y(x) = 10x^3 - 5x + 2$$

$$y(x) = 10x^3 - 5x$$

Para a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 30x^2 - 5$

Para a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 30x^2 - 5$

A expressão $y(x) = 10x^3 - 5x + C$

é a SOLUÇÃO GERAL da equação

Para a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 30x^2 - 5$

A expressão $y(x) = 10x^3 - 5x + C$

é a SOLUÇÃO GERAL da equação

A solução que satisfaz à condição: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 30x^2 - 5 \\ y(0) = 6 \end{cases}$

é $y(x) = 10x^3 - 5x + 6$

É a SOLUÇÃO PARTICULAR

que satisfaz à *condição inicial*: $y(0) = 6$

Para a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 30x^2 - 5$

A expressão $y(x) = 10x^3 - 5x + C$

é a SOLUÇÃO GERAL da equação

A solução que satisfaz à condição: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 30x^2 - 5 \\ y(0) = 6 \end{cases}$

é $y(x) = 10x^3 - 5x + 6$

É a SOLUÇÃO PARTICULAR

Que satisfaz à *condição inicial*: $y(0) = 6$

A população de peixes (P) cresce a uma taxa proporcional ao inverso da população. Qual a população em função de t.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{k}{P^2}$$

Variáveis: P em função de t.

$$P^2 \cdot dP = k \cdot dt$$

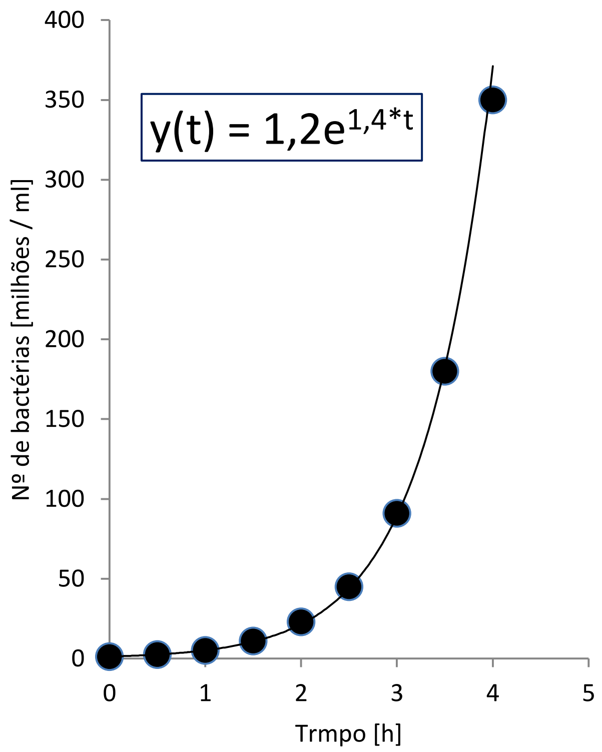
separar P e dP para um lado e t e dt para o outro .

$$\int P^2 \cdot dP = \int k \cdot dt$$

$$\frac{1}{3} P^3 = k \cdot t + C$$

$$\boxed{P(t) = \sqrt[3]{3(kt+C)}}$$

Exemplo: Problemas de Crescimento e Decaimento



Num laboratório mede-se a densidade de uma determinada bactéria em intervalos regulares de meia hora.

O resultado obtido está representado na figura. E é razoavelmente aproximado por um crescimento exponencial.

Se *y(t)* representar o número de bactérias na cultura no instante *t*. Então *y´(t)* representa a taxa de variação da população em função do tempo.

Supondo *y(0)>0* temos:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}y(t) = k \cdot y(t)$$

(k = constante de crescimento)

Qual o número bactérias em qualquer instante de tempo ?

Resolução da equação diferencial

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k$$ Integrando ambos os lados da igualdade em ordem ao tempo

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int k\, dt$$

Como $y'(t) = \frac{dy}{dt}$, substituindo no integral da esquerda, obtemos:

$$\boxed{\int \frac{1}{y(t)} dy = \int k\, dt}$$

Integrando em ordem a ***y*** o integral da esquerda e em ordem ao tempo o integral da direita

$$\ln|y| + C_1 = kt + C_2 \quad \leftrightarrow \quad \ln|y| = kt + (C_2 - C_1) = kt + C \quad \leftrightarrow \quad \ln y = kt + C$$

$$y(t) = e^{\ln y(t)} = e^{(kt+C)} = e^{kt} e^{C}$$

Fazendo $A = e^C$ vem $\boxed{y(t) = Ae^{kt}}$

Lei do crescimento exponencial (k>0) Lei do decaimento exponencial (k<0)

Datação por carbono 14

O carbono 14 é formado na atmosfera por bombardeamento do azoto por neutrões cósmicos

$$^{14}_{7}N + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{14}_{6}C + ^{1}_{1}H$$

Por reação com o oxigénio forma o $C^{14}O_2$ que juntamente com o $C^{12}O_2$ é absorvido por todos os organismos vivos. Enquanto o organismo está vivo, a concentração relativa de C^{14}/C^{12} mantém-se constante. Depois de morto, o isótopo de C^{14} decai com um tempo de meia vida de 5730 anos.

$$^{14}_{7}C \rightarrow ^{14}_{7}N + {}_{-}\beta$$

Isto é a concentração de C^{14} passa para metade ao fim de 5730 anos, o que corresponde a uma constante de decaimento de $k = -(\ln 1/2)/5730 \approx -1.20968 * 10^{-4}$ (anos^{-1}).

Se tiver uma quantidade inicial de 100g de C^{14}, ao fim de 1000 anos tenho

$$\boxed{y(t) = Ae^{kt} = 100e^{-1.20968t} \approx 88.6g}$$

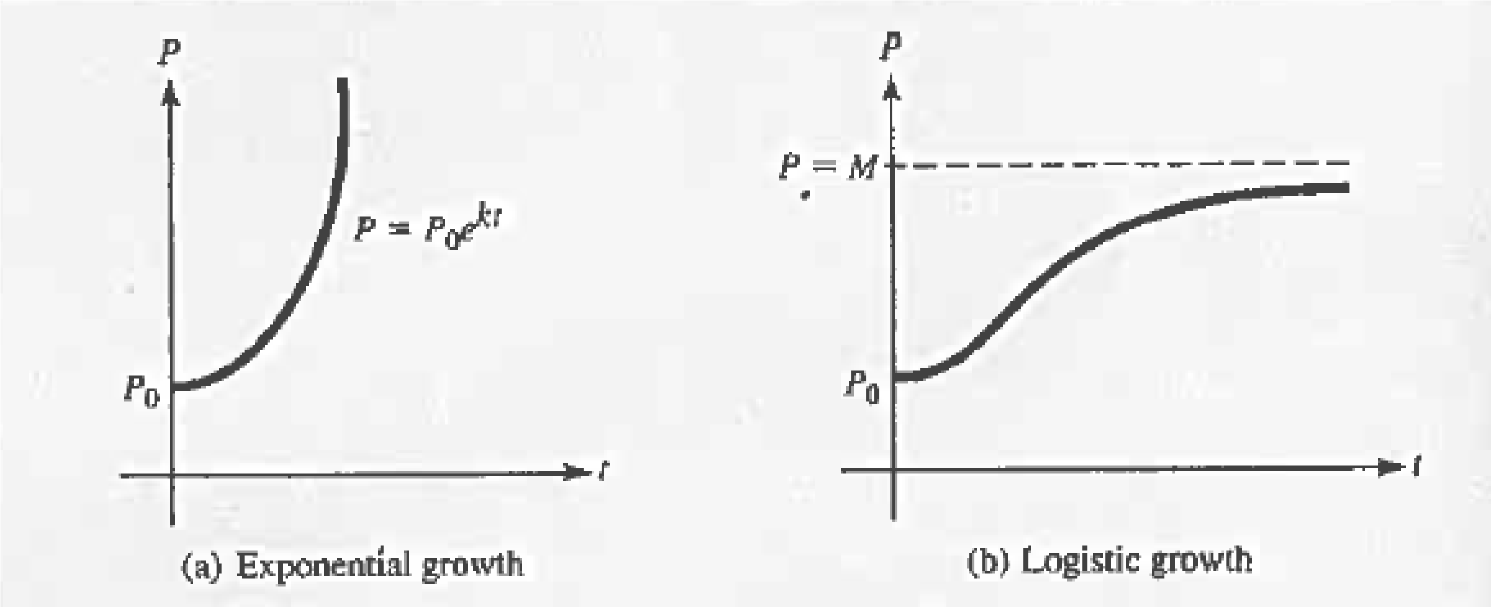
Crescimento Populacional

Exponential

$$\frac{dP}{dt} = k.P$$

Logistic

$$\frac{dP}{dt} = k.P(M - P)$$



Classificação das Equações Diferenciais

- **Tipo**
- **Ordem**
- **Linearidade**

Classificação: Quanto ao TIPO

- **Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)**

  A função desconhecida depende de uma única variavel independente.

- **Equações Diferenciais Parciais (EDP)**

  A função desconhecida depende de várias variáveis independentes.

.

Classificação : Quanto à ORDEM

A ORDEM da Equação Diferencial é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação.

Exemplo:

$y' = f(x, y) = 30x^2 - 5$ é uma EDO de primeira ordem

$y'''' + 3e^t y'' + yy' - t^4 = 0$ é uma EDO de quarta ordem

Classificação : Quanto à LINEARIDADE

$$F(t,,y,y^{\prime},y^{\prime\prime},y^{\prime\prime\prime},\cdots,y^{(n)}) = 0$$

- Uma Equação Diferencial diz-se LINEAR quando *F* é uma função linear das variáveis *y, y´, y´´*, ..

Exemplo: $\boldsymbol{a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots . + a_n(t)y = g(t)}$

- Uma Equação Diferencial diz-se NÃO-LINEAR quando *F* não é uma função linar das variáveis *y, y´, y´´*, ..

$\boldsymbol{y^{\prime\prime\prime\prime} + 3e^t y^{\prime\prime} + yy^{\prime} - t^4 = 0}$ é uma EDO NÃO LINEAR de quarta ordem

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

- ✓ Equações de variáveis separáveis
- ✓ Equações lineares
- ✓ Equações exatas

ED COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Seja a EDO de primeira ordem dada por $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$

No caso em que ***x*** e ***y*** podem ser separadas, podemos escrever

$$\boxed{h(y) * y' = g(x)} \qquad \boxed{h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}}$$

Onde todos os termos em ***x*** se encontram de um lado da igualdade, e todos os termos em ***y*** e ***y´*** estão do outro lado.

Este tipo de ED designam-se por EDO de variáveis separáveis

Método

$$\boxed{h(y) * y' = g(x)}$$

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$\boxed{H(y) = G(x) + C}$$

Exemplo: Calcular a solução geral de $\frac{dy}{dx} = -4\,x\,y^2$

Exemplo: Calcular a solução geral de $\frac{dy}{dx} = -4\,x\,y^2$

1) Rescrever a equação de modo a ter os termos em y e y´ de um lado e os termos em x do outro

2) Integrar ambos os membros e resolver a equação

Exemplo: Calcular a solução geral de $\frac{dy}{dx} = -4\,x\,y^2$

$$\frac{dy}{dx} = -4\,x\,y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\,\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -4x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int (-4x)\,dx$$

Exemplo: Calcular a solução geral de $\frac{dy}{dx} = -4\,x\,y^2$

$$\frac{dy}{dx} = -4x\,y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\,\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -4x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int (-4x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -4\int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2x^2 - C}}$$

Exemplo: Calcular a solução de $\frac{dy}{dx} = -4\,x\,y^2$ sujeita à condição inicial $y(0) = 1$

Exemplo: Calcular a solução de $\frac{dy}{dx} = -4\,x\,y^2$ sujeita à condição inicial $y(0) = 1$

$$y = \frac{1}{2x^2 - C} \qquad y(0) = 1$$

$$1 = \frac{1}{0 + c} \Rightarrow C = -1$$

$$y = \frac{1}{2x^2 + 1} \quad //$$

Exemplo: $$\left(4\mathrm{y} - \cos(y)\right)\frac{dy}{dx} - 3\,x^2 = 0, \quad y(0) = 0$$

Exemplo: $(4\text{y} - \cos(y))\frac{dy}{dx} - 3\,x^2 = 0,\quad y(0) = 0$

1) Calcular a solução geral

   a) Rescrever a equação de modo a ter os termos em ***y*** e ***y´*** de um lado e os termos em ***x*** do outro

   b) Integrar ambos os membros e resolver a equação

2) Calcular a solução particular que satisfaz à condição *y(0)=0*

Exemplo: $(4y - \cos(y))\frac{dy}{dx} - 3\,x^2 = 0, \quad y(0) = 0$

$$(4y - \cos y)\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$(4y - \cos y)\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\int (4y - \cos y)\,dy = \int 3x^2\,dx$$

$$\boxed{2y^2 - \sin y = x^3 + C}$$

Soloção geral

Exemplo: $\left(4y - \cos(y)\right)\frac{dy}{dx} - 3\,x^2 = 0, \quad y(0) = 0$

$$(4y - \cos y)\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$(4y - \cos y)\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\int (4y - \cos y)\,dy = \int 3x^2\,dx$$

$$\boxed{2y^2 - \sin y = x^3 + C}$$

Solução geral

Solução particular

$$y(0) = 0$$

$$2\times 0^2 - \sin 0 = 0^3 + C$$

$$0 = C$$

* $2y^2 - \sin y = x^3$ ou

* $x = \sqrt[3]{2y^2 - \sin y}$

Exemplo: Resolva o problema de valores iniciais

$$y' = \frac{x^2+7x+3}{y^2}, \quad y(0) = 3$$

Exemplo: Resolva o problema de valores iniciais

$$y' = \frac{x^2+7x+3}{y^2}, \quad y(0) = 3$$

$$y^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + 7x + 3$$

$$y^2\, dy = (x^2 + 7x + 3)\, dx$$

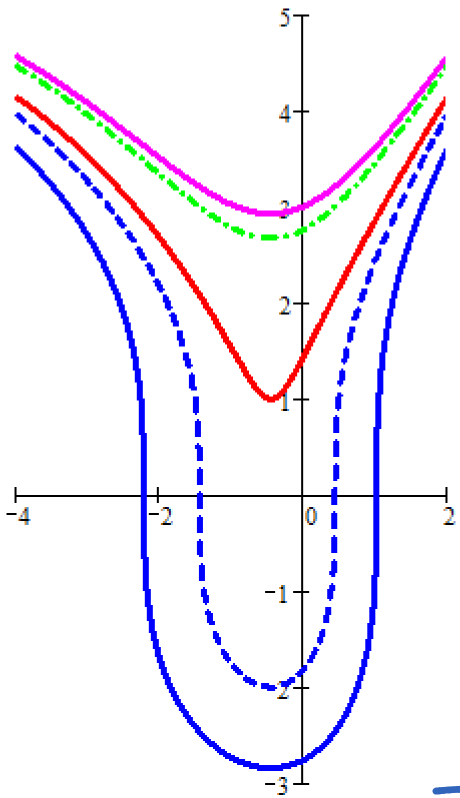
$$\int y^2\, dy = \int (x^2 + 7x + 3)\, dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{3} x^3 + \frac{7}{2} x^2 + 3x + C$$

$$\boxed{\text{Sol. G.}} \quad y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2} x^2 + 9x + 3C}$$

Exemplo: Resolva o problema de valores iniciais

$$y' = \frac{x^2+7x+3}{y^2}, \quad y(0) = 3$$



$$y^2 \frac{dy}{dx} = x^2+7x+3$$

$$y^2\,dy = (x^2+7x+3)\,dx$$

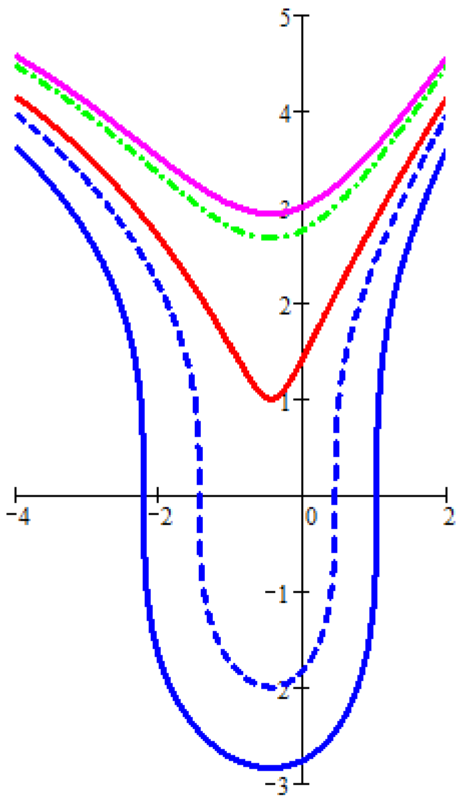
$$\int y^2\,dy = \int (x^2+7x+3)\,dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x + C$$

$\boxed{\text{Sol. G.}}$ $\quad y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3C}$

Exemplo: Resolva o problema de valores iniciais

$$y' = \frac{x^2+7x+3}{y^2}, \quad y(0) = 3$$



$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3C}$$

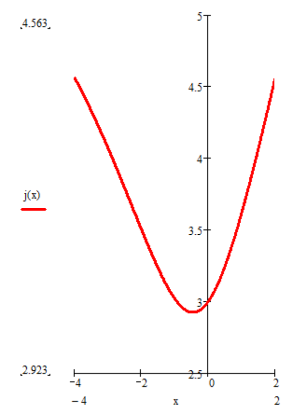
$$y(0) = 3$$

$$3 = \sqrt[3]{3C}$$

$$3^3 = 3C$$

$$C = \frac{3^3}{3}\ ; \ C = 9$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 27}$$



ED LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)}$$

Onde ***p(x)*** e ***q(x)*** são funções conhecidas

da variável independente

Resolução: MÉTODO DO FATOR INTEGRANTE

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

Fator integrante:

$$\boldsymbol{r(x) = e^{\int p(x)dx}}$$

Multiplicar ambos os membros por ***r*** e resolver a ED assim obtida

Exemplo: $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{2x}$

É uma ED linear que está na forma $\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)$

com $p(x) = -1$ e $q(x) = e^{2x}$

---

1) Calcular o fator integrante: $r(x) = e^{\int p(x) dx}$

2) Multiplicar ambos os membros pelo fator integrante

3) Resolver a ED resultante

Exemplo: $$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$$

É uma ED linear que está na forma $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$

com $p(x) = -1$ e $q(x) = e^{2x}$

Fator integrante: $$r(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$$

Exemplo: $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{2x}$

É uma ED linear que está na forma $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$

com $p(x) = -1$ e $q(x) = e^{2x}$

Fator integrante: $r(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$

Multiplicar ambos os membros por ***r(x)*** $\longrightarrow$

Exemplo: $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$

$$e^{-x} * \frac{dy}{dx} - e^{-x} * y = e^{-x} * e^{2x}$$

$$e^{-x} * \frac{dy}{dx} - e^{-x} * y = e^{x}$$

$$\frac{d}{dx}[ye^{-x}] = e^{x}$$

Integrando ambos os membros em ordem a x:

$$e^{-x} \cdot y = e^{x} + K$$

$$\boxed{y = e^{2x} + Ke^{x}}$$

Forma alternativa para equações lineares

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)$$

Solução:

$$y(x) = \frac{C + \int q(x) r(x) dx}{r(x)}$$

Com $r(x) = e^{\int p(x) dx}$

1) Calcular $r(x) = e^{\int p(x) dx}$
2) Calcular $\int q(x) r(x) dx$
3) Substituir na expressão e calcular *y(x)*

Exemplo: $x\dfrac{dy}{dx} - y = x$

É uma ED linear que pode ficar na forma $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$

1. Escrever a ED na forma $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$ e determinar p(x) e q(x)

2. Calcular $r(x) = e^{\int p(x)dx}$

3. Calcular $\int q(x)r(x)dx$

4. Substituir na expressão $y(x) = \dfrac{C + \int q(x)r(x)dx}{r(x)}$ e calcular *y(x)*

Exemplo: $x\dfrac{dy}{dx} - y = x$

$$x\frac{dy}{dx} - y = x \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 1$$

$$y(x) = \frac{C + \int q(x)r(x)dx}{r(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) \quad \text{com} \quad p(x) = -\frac{1}{x},\ q(x) = 1$$

$$r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -1/x\,dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = 1/x$$

$$\int q(x)\,r(x)\,dx = \int 1 \times \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$y(x) = \frac{K + \ln x}{1/x} = Kx + x\ln x$$

Exemplo: $y' + \frac{y}{x} = \cos x + \frac{\sin x}{x}$

É uma ED linear que está na forma $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$

1. Escrever a ED na forma $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$ determinar p(x) e q(x)

2. Calcular $r(x) = e^{\int p(x)dx}$

3. Calcular $\int q(x)r(x)dx$

4. Substituir na expressão $y(x) = \frac{C + \int q(x)r(x)dx}{r(x)}$ e calcular *y(x)*

Exemplo: $y' + \frac{y}{x} = \cos x + \frac{\sin x}{x}$

$$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow r(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 1/x \, dx} = e^{\ln x} = x$$

$$q(x) = \cos x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \int q(x)\, r(x)\, dx =$$

$$= \int x\cos x \, dx + \int \sin x \, dx =$$

$$= x\sin x - \cancel{\int \sin x\, dx} + \cancel{\int \sin x \, dx}$$

CA: $\int x\cos x \, dx$

$u = x \rightarrow u' = 1$

$v' = \cos x \rightarrow v = \sin x$

$\int \ldots = x \sin x - \int \sin x \, dx$

$$y(x) = \frac{K + x\sin x}{x} =$$

$$y(x) = \frac{K}{x} + \sin x$$

//

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

- Substituições em ED de 1ª Ordem
  - *Equações homogéneas de 1ª ordem*
  - *ED de Bernoulli*
- ED exatas

Reavivar a memória

- ED de variáveis separáveis
- ED Lineares de 1ªa ordem

ED COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Seja a EDO de primeira ordem dada por $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$

No caso em que ***x*** e ***y*** podem ser separadas, podemos escrever

$$\boxed{h(y) * y' = g(x)} \qquad \boxed{h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}}$$

Onde todos os termos em ***x*** se encontram de um lado da igualdade, e todos os termos em ***y*** e ***y´*** estão do outro lado.

Este tipo de ED designam-se por EDO de variáveis separáveis

Método

$$\boxed{h(y) * y' = g(x)}$$

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$\boxed{H(y) = G(x) + C}$$

Exemplo: Calcular a solução geral de $\frac{dy}{dx} = -4\,x\,y^2$

Exemplo: Calcular a solução geral de $\frac{dy}{dx} = -4\, x\, y^2$

1) Rescrever a equação de modo a ter os termos em y e y´ de um lado e os termos em x do outro

2) Integrar ambos os membros e resolver a equação

Exemplo: Calcular a solução geral de $\frac{dy}{dx} = -4\,x\,y^2$

$$\frac{dy}{dx} = -4x\,y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\,\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -4x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int (-4x)\,dx$$

Exemplo: Calcular a solução geral de $\frac{dy}{dx} = -4\, x\, y^2$

$$\frac{dy}{dx} = -4x\,y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\,\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -4x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int (-4x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -4\int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2x^2 - C}}$$

ED LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)}$$

Onde ***p(x)*** e ***q(x)*** são funções conhecidas

da variável independente

Resolução: Método do fator integrante

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)$$

Fator integrante:

$$\boldsymbol{r(x) = e^{\int p(x)dx}}$$

Multiplicar ambos os membros por ***r*** e resolver a ED assim obtida

Forma alternativa para equações lineares

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

Solução:

$$y(x) = \frac{C + \int q(x) r(x) dx}{r(x)}$$

Com $r(x) = e^{\int p(x) dx}$

1) Calcular $r(x) = e^{\int p(x) dx}$
2) Calcular $\int q(x) r(x) dx$
3) Substituir na expressão e calcular *y(x)*

Exemplo: $x\dfrac{dy}{dx} - y = x$

É uma ED linear que pode ficar na forma $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$

1. Escrever a ED na forma $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$ e determinar p(x) e q(x)
2. Calcular $r(x) = e^{\int p(x)dx}$
3. Calcular $\int q(x)r(x)dx$
4. Substituir na expressão $y(x) = \dfrac{C + \int q(x)r(x)dx}{r(x)}$ e calcular *y(x)*

Exemplo: $x\frac{dy}{dx} - y = x$

$$x\frac{dy}{dx} - y = x \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 1 \qquad\qquad y(x) = \frac{C + \int q(x)r(x)dx}{r(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) \quad \text{com} \quad p(x) = -\frac{1}{x},\; q(x) = 1$$

$$r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -1/x\,dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = 1/x$$

$$\int q(x)\,r(x)\,dx = \int 1 \times \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$y(x) = \frac{K + \ln x}{1/x} = Kx + x\ln x$$

Exemplo: Encontrar curva que passa em $(0,2)$ e tem a tangente dada por $y - 2e^{-x}$

$$\frac{dy}{dx} = y - 2e^{-x} \qquad\qquad y(0) = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = y - 2e^{-x} \qquad y(0) = 2$$

$$y' - y = -2e^{-x} \quad , \qquad y(0) = 2$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) \quad \text{com} \quad p(x) = -1,\; q(x) = -2e^{-x}$$

$$SOLUÇÃO: \quad y(x) = \frac{C + \int q(x)r(x)dx}{r(x)} \qquad \text{Com} \qquad r(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$y' - y = -2e^{-x} \quad , \qquad y(0) = 2$$

$$p(x) = -1, \qquad q(x) = -2e^{-x}$$

$$SOLUÇÃO: \quad y(x) = \frac{C + \int q(x)r(x)dx}{r(x)}$$ Com $$r(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\left.\begin{aligned} r(x) &= e^{\int(-1)dx} = e^{-x} \\ \int q(x)r(x)dx &= \int(-2e^{-x})(e^{-x})dx = e^{-2x} \end{aligned}\right\}$$

$$y(x) = \frac{C + \int q(x)r(x)dx}{r(x)}$$

$$y(x) = \frac{C + e^{-2x}}{e^{-x}}$$

$$\boxed{y(x) = Ce^{x} + e^{-x}}$$

Solução geral

$$(0,2) \quad \rightarrow \qquad 2 = Ce^{0} + e^{-0} = C + 1$$

$$C = 1$$

$$\boxed{y(x) = e^{x} + e^{-x}}$$

Solução Particular

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

- Substituições em ED de 1ª Ordem
  - *Equações homogéneas de 1ª ordem*
  - *ED de Bernoulli*
- ED exatas

Substituições em ED de 1ª ordem

Vamos estudar algumas substituições que aplicadas a ED de primeira ordem as transformam em equações já conhecidas

Equações Homogéneas de 1ª Ordem

São equações que podem ser escritas como:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Mesmo dependendo de $\boldsymbol{y}$ e de $\boldsymbol{x}$, a equação apenas depende do quociente $\boldsymbol{\frac{y}{x}}$

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Fazendo $v = \frac{y}{x} \longrightarrow y = v * x \longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

Substituindo $v = \frac{y}{x}$ $\quad e \quad$ $\frac{dy}{dx}$ em (1) obtemos

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v) \quad \leftrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

$$\boxed{\frac{1}{F(v)-v} * \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}}$$

Equação separável:

* Resolve-se em ***v***
* Depois na solução substitui-se $v = \frac{y}{x}$

Exemplo: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x} \xrightarrow{\text{(dividindo e multiplicando por } x\text{)}} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

Fazendo $t = \frac{y}{x} \longrightarrow y = t * x \longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t$

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{t-1}{t+1} \longrightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{t-1}{t+1} - t \longrightarrow x\frac{dt}{dx} = -\frac{t^2+1}{t+1}$$

$$\frac{t+1}{t^2+1} * \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x} \longrightarrow \int \frac{t+1}{t^2+1} dt = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$ln\left|(t^2+1)^{1/2} * x\right| + \arctan(t) = C \qquad \boxed{ln\left|\sqrt{y^2+x^2}\right| + \arctan(y/x) = C}$$

Substituições em ED de 1ª ordem

Equações de Bernuilli

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)}_{\text{Eq. Linear de 1ª ordem}} * y^n$$

Substituições em ED de 1ª ordem

Equações de Bernuilli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x) * y^n$$

$$\begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases} \Longrightarrow \text{Equações conhecidas}$$

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)$$ Linear

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + [p(x) - q(x)]\, y = 0$$ Separável

Substituições em ED de 1ª ordem

Equações de Bernuilli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x) * y^n$$

Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ fazemos a substituição $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$

Equações de Bernuilli $\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x) * y^n$

Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ fazemos a substituição $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$

1) Multiplicando por $\boldsymbol{y^{-n}}$ ambos os lados da equação, obtemos:

$$y^{-n} * \frac{dy}{dx} + p(x) * y^{1-n} = q(x)$$

2) Fazendo $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$, temos $\frac{dv}{dx} = (1-n) * y^{-n} \frac{dy}{dx}$

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)} * \frac{dv}{dx}$$

Equações de Bernuilli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x) * y^n$$

Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ fazemos a substituição $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$

1) Multiplicando por $\boldsymbol{y^{-n}}$ ambos os lados da equação, obtemos:

$$y^{-n} * \frac{dy}{dx} + p(x) * y^{1-n} = q(x)$$

2) Fazendo $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$, temos $\frac{dv}{dx} = (1-n) * y^{-n}\frac{dy}{dx}$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)} * \frac{dv}{dx}$$

Equações de Bernuilli $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) * y^n$

Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ fazemos a substituição $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$

1) Multiplicando por $\boldsymbol{y^{-n}}$ ambos os lados da equação, obtemos:

2) Fazendo $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$

$$\frac{1}{1-n} * \frac{dv}{dx} + p(x) * v = q(x)$$

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dx} + (1-n)p(x) * v = q(x)(1-n)}$$

Equação linear de 1ª ordem

* Resolve-se em $\boldsymbol{v}$
* Depois na solução substitui-se $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$

Exemplo: $y' + \frac{1}{x}y = x * y^2$

Exemplo: $y' + \frac{1}{x}y = x * y^2$

Equação de Bernoulli com *n=2*

1) Multiplicar por $\boldsymbol{y^{-2}}$ ambos os lados da equação

2) Fazer $\boldsymbol{v = y^{-1}}$

Exemplo: $y' + \frac{1}{x} y = x * y^2$

Equação de Bernoulli com *n=2*

1) Multiplicar por $\boldsymbol{y^{-2}}$ ambos os lados da equação

$$y^{-2} * \frac{dy}{dx} + 1/x * y^{-1} = x$$

2) Fazer $\boldsymbol{v = y^{-1}}$ $\Longrightarrow$ $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$

Exemplo: $y' + \frac{1}{x} y = x * y^2$

Equação de Bernoulli com *n=2*

1) Multiplicar por $\boldsymbol{y^{-2}}$ ambos os lados da equação

$$y^{-2} * \frac{dy}{dx} + 1/x * y^{-1} = x$$

2) Fazer $\boldsymbol{v = y^{-1}}$ $\Rightarrow$ $\frac{dv}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$

Exemplo: $y' + \frac{1}{x} y = x * y^2$

Equação de Bernoulli com *n=2*

1) Multiplicar por $\boldsymbol{y^{-2}}$ ambos os lados da equação

$$y^{-2} * \frac{dy}{dx} + 1/x * y^{-1} = x$$

2) Fazer $\boldsymbol{v = y^{-1}}$ $\Longrightarrow$ $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$

Exemplo: $y' + \frac{1}{x}y = x * y^2$

Equação de Bernoulli com *n=2*

1) Multiplicar por $\boldsymbol{y^{-2}}$ ambos os lados da equação

$$y^{-2} * \frac{dy}{dx} + 1/x * y^{-1} = x$$

2) Fazer $\boldsymbol{v = y^{-1}}$ $\Longrightarrow$ $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$

$$y' + \frac{1}{x}y = x * y^2 \Longrightarrow -\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x$$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -x}$$

Exemplo: $y' + \frac{1}{x}y = x * y^2$

Equação de Bernoulli com *n=2*

1) Multiplicar por $\boldsymbol{y^{-2}}$ ambos os lados da equação

$$y^{-2} * \frac{dy}{dx} + 1/x * y^{-1} = x$$

2) Fazer $\boldsymbol{v = y^{-1}}$ $\Longrightarrow$ $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -x \Longrightarrow v(x) = -x^2 + Cx$$

(substituir)

(exercício)

$$y(x) = \frac{1}{-x^2 + Cx}$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS III

- Substituições em ED de 1ª Ordem
  - *Equações homogéneas de 1ª ordem*
  - *ED de Bernoulli*
- ED exatas

Reavivar a memória

- ED de variáveis separáveis
- ED Lineares de 1ªa ordem

ED COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Seja a EDO de primeira ordem dada por $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

No caso em que ***x*** e ***y*** podem ser separadas, podemos escrever

$$\boxed{h(y) * y' = g(x)} \qquad \boxed{h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}}$$

Onde todos os termos em ***x*** se encontram de um lado da igualdade, e todos os termos em ***y*** e ***y´*** estão do outro lado.

Este tipo de ED designam-se por EDO de variáveis separáveis

ED LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)}$$

Onde ***p(x)*** e ***q(x)*** são funções conhecidas

da variável independente

Resolução: Método do fator integrante

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

Fator integrante:

$$\boldsymbol{r(x) = e^{\int p(x)dx}}$$

Multiplicar ambos os membros por ***r*** e resolver a ED assim obtida

Forma alternativa para equações lineares

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)$$

Solução:

$$y(x) = \frac{C + \int q(x) r(x) dx}{r(x)}$$

Com $r(x) = e^{\int p(x)dx}$

1) Calcular $r(x) = e^{\int p(x)dx}$
2) Calcular $\int q(x) r(x) dx$
3) Substituir na expressão e calcular *y(x)*

Equações Homogéneas de 1ª Ordem

São equações que podem ser escritas como:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Substituição: $v = \frac{y}{x}$

Equações de Bernuilli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x) * y^n$$

Para $n \neq 0 \; e \; n \neq 1$ fazemos a substituição $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$

ED LINEARES EXATAS

São equações do tipo:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Com: $$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{dN(x,y)}{dx}$$

ED lineares Exatas

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

É ED exata se existir uma unção S(x,y) no domínio de validade da equação diferêncial, tal que:

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

$$S(x,y) = C$$ É a solução da Eq Dif

ED LINEARES EXATAS $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

1) Verificar se $$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{dN(x,y)}{dx}$$

2) Calcular $$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

3) Calcular *S(x,y)* a partir de 2) $$S(x,y) = \int M(x,y)dx \ + g(y)$$

4) Derivar *S(x,y)* a partir de 3) $$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx \ + g(y)\right] = N(x,y)$$

ED LINEARES EXATAS $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$

5) Obtém-se $\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + g'(y) = N(x,y)$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]$$

6) Calcular $g(y)$ por integração de $g'(y)$ *em ordem a y*

$$\boxed{S(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = C}$$

Solução implicita

Exemplo: $2x + 2yy' = 0$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$ Com $M(x,y) = 2x$ e $N(x,y) = 2y$

Verificação $$\frac{dM(x,y)}{dy} = 0 = \frac{dN(x,y)}{dx}$$ $\Rightarrow$ Exata

Exemplo: $2x + 2yy' = 0$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{Com} \quad M(x,y) = 2x \;\; e \;\; N(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2x \quad \Longrightarrow \quad S(x,y) = x^2 + g(y)$$

Exemplo: $2x + 2yy' = 0$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$ Com $M(x,y) = 2x$ e $N(x,y) = 2y$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2x \Longrightarrow S(x,y) = x^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = \frac{d}{dy}[x^2 + g(y)] = g'(y) \quad e \quad \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2y$$

Exemplo: $2x + 2yy' = 0$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$ Com $M(x,y) = 2x$ e $N(x,y) = 2y$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2x \Longrightarrow S(x,y) = x^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = \frac{d}{dy}[x^2 + g(y)] = g'(y) \quad e \quad \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2y$$

$$g'(y) = 2y \Longrightarrow g(y) = y^2$$

Exemplo: $2x + 2yy' = 0$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$ Com $M(x,y) = 2x$ e $N(x,y) = 2y$

Exemplo: $2x + 2yy' = 0$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$ Com $M(x,y) = 2x \;\; e \;\; N(x,y) = 2y$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2x \quad \Longrightarrow \quad S(x,y) = x^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = \frac{d}{dy}[x^2 + g(y)\,] = g'(y) \;\; e \;\; \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2y$$

$$g'(y) = 2y \quad \Longrightarrow \quad g(y) = y^2$$

Exemplo: $2x + 2yy' = 0$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{Com} \quad M(x,y) = 2x \;\; e \;\; N(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2x \Longrightarrow S(x,y) = x^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = \frac{d}{dy}[x^2 + g(y)] = g'(y) \;\; e \;\; \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2y$$

$$g'(y) = 2y \Longrightarrow g(y) = y^2$$

Exemplo: $2x + 2yy' = 0$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$ Com $M(x,y) = 2x$ e $N(x,y) = 2y$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2x \Longrightarrow S(x,y) = x^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = \frac{d}{dy}[x^2 + g(y)] = g'(y) \quad e \quad \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2y$$

$$g'(y) = 2y \Longrightarrow g(y) = y^2 \qquad S(x,y) = x^2 + y^2 = C$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = C}$$

ED lineares Exatas $M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

1) Verificar se $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

2) Verificar se $$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

3) Calcular *S(x,y)* a partir de 2) $$S(x,y) = \int M(x,y)dx \; + g(y)$$

4) Derivar *S(x,y)* a partir de 3) $$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx \; + g(y)\right] = N(x,y)$$

ED LINEARES EXATAS $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$

5) Obtém-se $\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + g'(y) = N(x,y)$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]$$

6) Calcular $g(y)$ por integração de $g'(y) \text{ em ordem a } y$

$$\boxed{S(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = C}$$

Solução implicita

Exemplo: $\frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}y' - \frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} = 1$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Com $\begin{cases} M(x,y) = -\dfrac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \\ N(x,y) = \dfrac{2y(1+x^2)}{1+2x^2} \end{cases}$

A ED é exata ?

Exemplo: $\frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}y' - \frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} = 1$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{Com} \quad \begin{cases} M(x,y) = -\dfrac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \\ N(x,y) = \dfrac{2y(1+x^2)}{1+2x^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\frac{4xy}{(1+2x^2)^2}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{4xy(1+2x^2) - 2y(1+x^2)(4x)}{(1+2x^2)^2} = -\frac{4xy}{(1+2x^2)^2}$$

$$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{dN(x,y)}{dx} = -\frac{4xy}{(1+2x^2)^2}$$

A ED é exata !

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = -\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1$$

$$S(x,y) = \int M(x,y)dx \ + g(y) = \int \left(-\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \right) dx \ + g(y)$$

$$S(x,y) = \frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + g(y) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}$$

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + g(y)\right] = \frac{y}{1+2x^2} + \frac{dg(y)}{dy}$$

$$\frac{dg(y)}{dy} = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2} - \frac{y}{1+2x^2} = y$$

$$g(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$$

Substituindo em (1), vem

$$S(x,y) = \frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + g(y)$$

$$S(x,y) = \frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + \frac{y^2}{2} = C$$

$$\frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + \frac{y^2}{2} = C$$

Equação de Bernoulli

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = g(x)\,y^n}$$

RESOLUÇÃO:

① MUDANÇA DE VARIÁVEL

$$\begin{cases} z = y^{1-n} \\ z' = (1-n)\,y^{-n}\,y' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = y^{-1} \\ z' = -y^{-2}\,y' \end{cases}$$

② Resolver a EDO em z

③ Fazer a mudança de variável "inversa"

$z \rightarrow y$

EXEMPLO:

$$y' + \frac{1}{x} y = x y^2$$

Na forma $y' + p(x)y = q(x)y^n$

Equação de Bernoulli com $n = 2$

$p = +1/x \ , \ q = x \ , \ n = 2$

$$\begin{cases} z = y^{1-n} \\ z' = (1-n) y^{-n} y' \end{cases} \to \begin{cases} z = y^{-1} \\ z' = -y^{-2} y' \end{cases}$$

1) Multiplicar ambos os membros por y^{-2}

$$y' + \frac{1}{x} y = x y^2$$

$$y^{-2} y' + \frac{1}{x} y y^{-2} = x y^2 \cdot y^{-2}$$

$$y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = x$$

1c)

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}\, y^{-1} = x$$

$$-\underbrace{(-y^{-2}y')}_{z'} + \frac{1}{x}\underbrace{y^{-1}}_{z} = x$$

$$z = y^{-1}$$

$$z' = -y^{-2}y'$$

$$-z' + \frac{1}{x}z = x$$

$$\boxed{z' - \frac{1}{x}z = -x}$$

Resolver em ordem a z e depois passar para y

11

$$z' - \frac{1}{u} z = -u$$

Equação do tipo

$$z' + p(u) z = q(u)$$

Solução : $\begin{cases} z = \dfrac{K + \int q(u)\, r(u)\, du}{r(u)} \\ r(u) = e^{\int p(u)\, du} \end{cases}$

$p(u) = -1/u \quad , \quad q(u) = -u$

$$\int p(u)\, du = \int -1/u \, du = -\ln u = \ln(1/u)$$

$$r(u) = e^{\int p(u)\, du} = e^{\ln(1/u)} = 1/u$$

$$\int q(u)\, r(u)\, du = \int (-u) \cdot 1/u \, du$$

$$= -\int du = -u$$

$$r(u) = 1/u \quad \wedge \quad \int q(u)\, r(u)\, du = -u$$

$$z = \frac{k + \int g(\varphi)\,\lambda(\varphi)\,d\varphi}{\lambda(\varphi)}$$

$$= \frac{k + (-\varphi)}{1/\varphi}$$

$$\boxed{z = -\varphi^2 + k\varphi}$$

$z = y^{-1}$ (substituir)

$$\boxed{y = \frac{1}{-\varphi^2 + k\varphi}}$$

Sumário

* E.D.O. de variáveis separáveis

* $y' + p(x)y = q(x)$

$$y = \frac{K + \int q(x)\, r(x)\, dx}{r(x)}$$

$$r(x) = e^{\int p(x)\, dx}$$

* EXATAS

* Bernoulli

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^n}$$

$$\begin{cases} z = y^{1-n} \\ z' = (1-n)\, y^{-n}\, y' \end{cases}$$

Determine a solução geral

$$y + x y' = 0$$

Equação separável:

$$y + x \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(dividindo por } x\text{)}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(dividindo por } y$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{y}\, dy = -\frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln y = -\ln x + C$$

$$\ln y + \ln x = \ln(k) \rightarrow \ln(xy) = \ln k$$

$$y = k/x \;//$$

Encontrar a solução geral

$$\frac{x(y^2+1)}{x+1}\,dx = (xy-y)\,dy$$

Equação separável.

$$\frac{x(y^2+1)}{x+1}\,dx = (xy-y)\,dy$$

$$(y^2+1)\,\frac{x}{x+1}\,dx = y(x-1)\,dy$$

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)}\,dx = \frac{y}{y^2+1}\,dy$$

$$\int \frac{x}{(x^2-1)}\,dx = \int \frac{y}{y^2+1}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-1) = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \ln k$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{u^2-1}{y^2+1} \right) = \ln k$$

$$\ln \left[\left(\frac{u^2-1}{y^2+1} \right)^{1/2} \right] = \ln k$$

$$\sqrt{\frac{u^2-1}{y^2+1}} = k$$

//

Calcular a solução geral

$$y' + y = e^{-x} \sec^2 x$$

---

linear de 1ª ordem

$$y' + p(x) y = q(x)$$

$$y' + y = e^{-x} \sec^2 x$$

$$p(x) = 1 \quad , \quad q(x) = e^{-x} \sec^2 x$$

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{k + \int q(x)\, r(x)\, dx}{r(x)} \\ \text{com } r(x) = e^{\int p(x)\, dx} \end{cases}$$

(1) $\underline{r(x)} = e^{\int p(x)\, dx} = e^{\int 1\, dx} = \underline{e^{x}}$

(2) $\underline{\int q(x)\, r(x)\, dx} = \int (e^{-x} \sec^2 x) \cdot e^{x}\, dx$

$$= \int \sec^2 x \, dx$$

$$= \underline{\operatorname{tg} x}$$

$$y(\varphi) = \frac{K + \int q(\varphi)\, r(\varphi)\, d\varphi}{r(\varphi)}$$

$$= \frac{K + \operatorname{tg}\varphi}{e^{\varphi}}$$

$$= e^{-\varphi} K + e^{-\varphi} \operatorname{tg}\varphi$$

$$\boxed{y = e^{-\varphi}(\operatorname{tg}\varphi + K)}$$

Fazer resolvendo com o fator integrante $r(\varphi) = e^{\int p(\varphi) d\varphi} = e^{\varphi}$

(1) $\rightarrow$ Multiplicar ambos os lados por $r(\varphi) = e^{\varphi}$.

(2) $\rightarrow$ resolver

Determinar a solução geral

$$y' + (\operatorname{tg} x)\, y = (\sin x)\, y^2$$

Bernoully, $n = 2$

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$$

com $p(x) = \operatorname{tg} x$

$q(x) = \sin x$

transformação $\left|\begin{array}{l} z = y^{1-n} \Leftrightarrow z = y^{-1} \\ z' = -y^{-2} y' \end{array}\right.$

$$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \sin x \cdot y^2$$

multiplicar por y^{-2} $\rightarrow$ $y^{-2} y' + \operatorname{tg} x \cdot y^{-1} = \sin x$

$$\underbrace{-y^{-2} y'}_{z'} - \operatorname{tg} x \cdot y^{-1} = -\sin x$$

Obtemos:

$$z' - tg\varphi . z = -\sin\varphi$$

linear de 1ª ordem $[y' + p(\varphi) y = q(\varphi)]$

com $\begin{cases} p(\varphi) = -tg\varphi \\ q(\varphi) = -\sin\varphi \end{cases}$

$$y = \frac{k + \int q(\varphi) r(\varphi) d\varphi}{r(\varphi)}$$

$$r(\varphi) = ? \quad = e^{\int p(\varphi) d\varphi}$$

$$\int p(\varphi) d\varphi = -\int tg(\varphi) . d\varphi =$$

$$= -\int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = \ln(\cos\varphi)$$

$$r(\varphi) = e^{\ln\cos\varphi} = \cos\varphi$$

$$r(\varphi) = \cos\varphi$$

$$\int q(\varphi)\, r(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \int (-\sin\varphi)\cos\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\cos^2\varphi}{2}$$

$$z = \frac{K + \int q(\varphi)\, r(\varphi)\, d\varphi}{r(\varphi)} =$$

$$= \frac{K + \frac{\cos^2\varphi}{2}}{\cos\varphi}$$

$$z = \frac{\cos^2\varphi + 2K}{2\cos\varphi} = 1/y$$

$$y = \frac{2\cos\varphi}{\cos^2\varphi + 2K}$$

//

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IV

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 2ª ORDEM

- Introdução
- Equação homogénea
- Equação particular

Problema Geral

Qual a função $y(x)$ que verifica a equação:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

(condições iniciais)

onde $p(x), q(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas no domínio de validade de $y(x)$

Exemplo

Oscilações $$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(x)x = r(x)$$

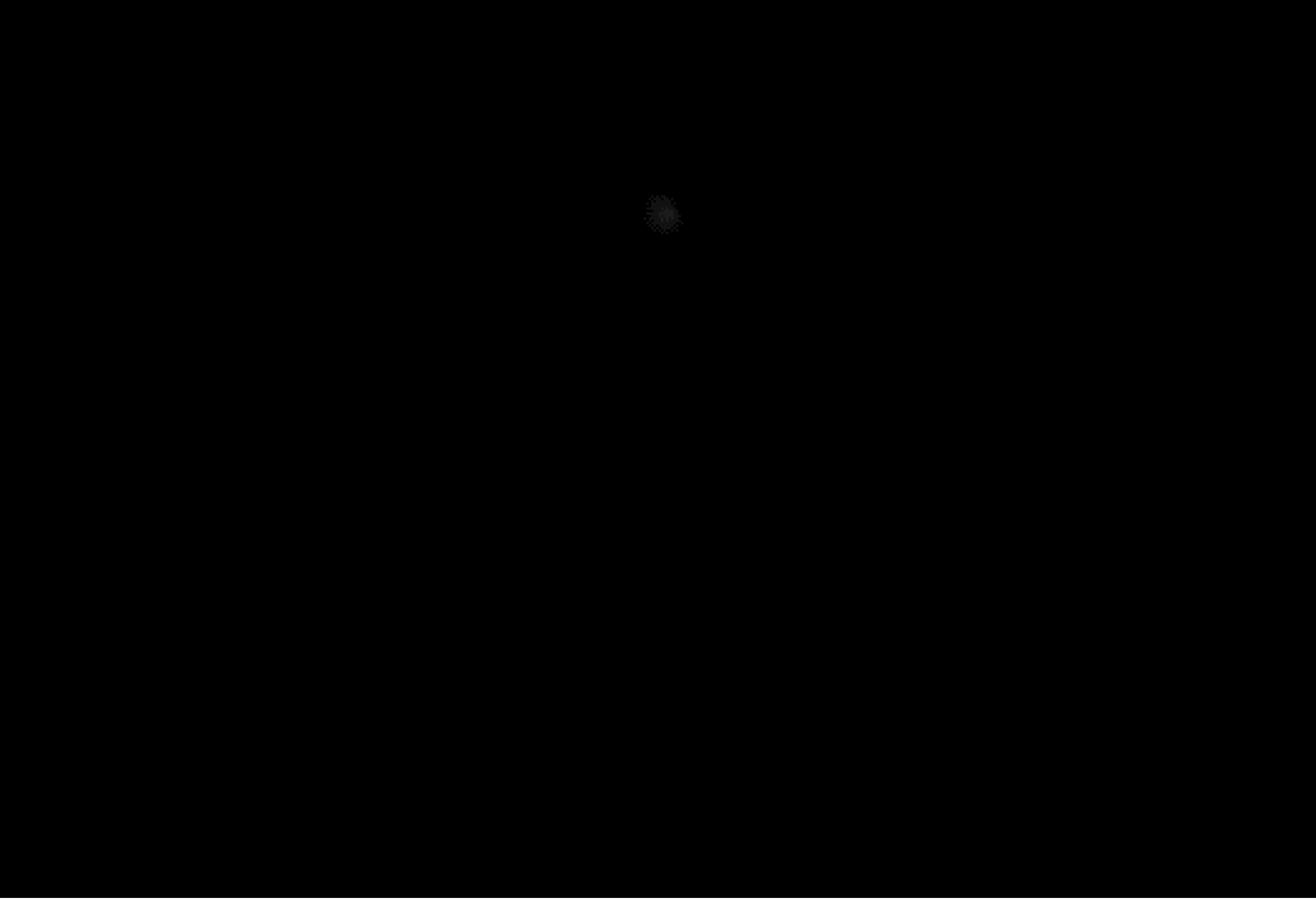
$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_o cos(\omega t)$$

$$x(t) = e^{-bt}(A\cos(\alpha t) + B\, sin(\alpha t) + \frac{F_o}{\sqrt{(k-\omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}\cos(\omega t - \emptyset)$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \sim \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}$$

Ressonância --- Amplitude tende para infinito

GALE CAUSES
BRIDGE
TO SWAY



Problema Geral

Qual a função $y(x)$ que verifica a equação:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$ (condições iniciais)

onde $p(x), q(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas no domínio de validade de $y(x)$

Só iremos estudar
EDL 2ª Ordem com coeficientes constantes

Qual a função $y(x)$ que verifica a equação:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad \text{(condições iniciais)}$$

onde a e b são constantes e $f(x)$ é uma função contínua no domínio de validade de $y(x)$

Solução Geral

Iremos ver que a solução geral desta equação é dada por:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

Em que $y_h(x)$ é a solução da equação homogénea

$$y''+ay' + by = 0$$

e $y_p(x)$ é uma solução particular da equação dada.

Definições e Teoremas

Teorema 1: Existência e Unicidade

O problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

para $p(x), q(x)$ e $f(x)$ funções contínuas num intervalo aberto]a,b[contendo x_0, tem uma única solução neste intervalo

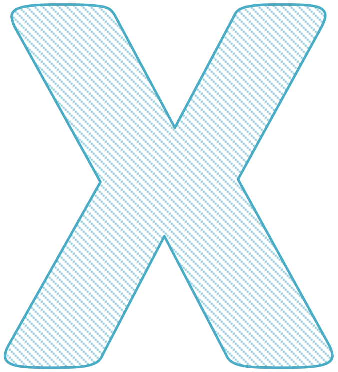
Definição: Equação homogénea

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é homogénea quando pode ser escrita na forma

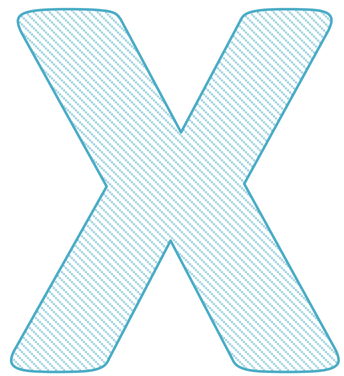
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Para as equações homogéneas é válido o princípio da sobreposição

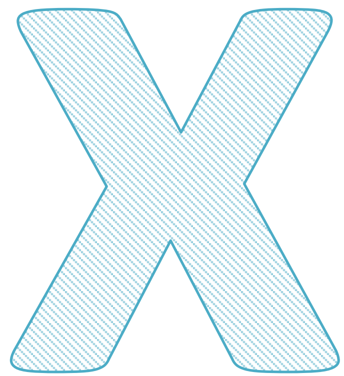
Teorema 2: Princípio da Sobreposição



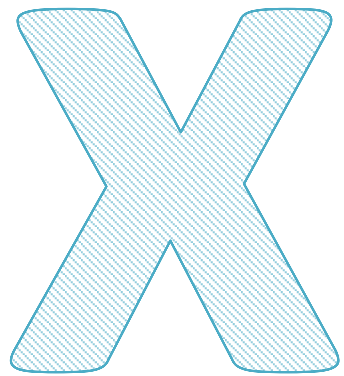
Teorema 3



Teorema 4



Teorema 5



Solução da equação homogénea

Seja dada a equação $y'' - 5y' + 4y = 0$

Vamos por tentativas de funções que tenham segunda derivada não nula....

Vamos tentar uma função especial.

Qualquer que seja a ordem, a sua derivada depende linearmente da própria função

$$y = e^{rx}$$

Solução da equação homogénea (I)

Seja dada a equação $y'' - 5y' + 4y = 0$

$y(x) = e^{rx}$ $\quad$ $y'(x) = re^{rx}$ $\quad$ $y''(x) = r^2e^{rx}$

Substituindo obtemos

$$r^2e^{rx} - 5re^{rx} + 4e^{rx} = 0$$

$e^{rx}(r^2 - 5r + 4) = 0$ $\quad$ Que tem solução quando $r^2 - 5r + 4 = 0$

Equação característica

Solução da equação homogénea (I)

Seja dada a equação $y'' - 5y' + 4y = 0$

$y(x) = e^{rx}$ $\quad y'(x) = re^{rx}$ $\quad y''(x) = r^2e^{rx}$

Substituindo obtemos

$$r^2e^{rx} - 5re^{rx} + 4e^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 - 5r + 4) = 0$$

Que tem solução quando

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

$$(r-4)(r-1) = 0$$

$$r_1 = 4, \quad r_2 = 1$$

Teriamos duas soluções: $y_1 = e^{4x}$ e $y_2 = e^x$

Verificar: $y_1 = e^{4x}$

$y_2 = e^x$

$y_1 = Ce^{4x}$

$$y(x) = C_1\ e^{4x} + C_2\ e^{4x}$$

Solução da equação homogénea (I)

Seja dada a equação $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$y(x) = e^{4x}$$

$$y'(x) = 4e^{4x}$$

$$y''(x) = 16e^{4x}$$

Substituindo obtemos

$$16e^{4x} - 20e^{4x} + 4e^{4x} = 0$$

$$e^{4x}(16 - 20 + 4) = e^{4x} * 0 = 0$$

cqm

$$y(x) = e^{x}$$

$$y'(x) = e^{x}$$

$$y''(x) = e^{x}$$

Substituindo obtemos

$$e^{x} - 5e^{x} + 4e^{x} = 0$$

$$e^{x}(1 - 5 + 4) = e^{x} * 0 = 0$$

cqm

Solução da equação homogénea (I)

Seja dada a equação $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$y(x) = Ce^{4x}$$

$$y'(x) = C * 4e^{4x}$$

$$y''(x) = C * 16e^{4x}$$

Substituindo obtemos

$$16 * Ce^{4x} - 20 * Ce^{4x} + 4 * Ce^{4x} = 0$$

$$Ce^{4x}(16 - 20 + 4) = e^{4x} * 0 = 0$$

cqm

$$y(x) = C_1\ e^{4x} + C_2\ e^{x}$$

$$y'(x) = C_1\ 4e^{4x} + C_2\ e^{x}$$

$$y''(x) = C_1\ 16e^{4x} + C_2\ e^{x}$$

Substituindo obtemos

$$C_1\ e^{4x}(16 - 20 + 4) + C_2\ e^{x}(1 - 5 + 4) =$$

$= 0 * 0 = 0$ cqm

Como seria de esperar pois as soluções são linearmente independentes

A equação homogénea

$$y'' + ay' + by = 0$$

Com equação característica $r^2 + ar + b = 0$

de raízes **reais e distintas** r_1 e r_2

Tem como solução

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Solução da equação homogénea (II)

Seja dada a equação $y'' - 2y' + 5y = 0$

Tem equação característica: $r^2 - 2r + 5 = 0$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Raízes complexas conjugadas: $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$ $\Rightarrow$ $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$

Se substituirmos em $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ Obtemos:

$$y(x) = Ae^{(\alpha+\beta i)x} + Be^{(\alpha-\beta i)x}$$

$$y(x) = Ae^{\alpha x}e^{i\beta x} + Be^{\alpha x}e^{-i\beta x}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x})$$

Euler: $e^{i\theta} = cos\theta + i\, sin\theta$

$$y(x) = e^{\alpha x}[C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x)]$$

Solução da equação homogénea (II)

Seja dada a equação $y'' - 2y' + 5y = 0$

Tem equação característica: $r^2 - 2r + 5 = 0$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Raízes complexas conjugadas: $r_1 = 1 + 2i$

$r_2 = 1 - 2i$

$$y(x) = e^x[C_1 cos(2x) + C_2 sin(2x)]$$

Verificar

A equação homogénea

$$y'' + ay' + by = 0$$

Com equação característica $\quad r^2 + ar + b = 0$

de raízes **complexas conjugadas** $\quad r = \alpha \pm \beta i$

Tem como solução

$$y(x) = e^{\alpha x}[C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x)]$$

Solução da equação homogénea (III)

Seja dada a equação $y'' - 6y' + 9y = 0$

Tem equação característica: $r^2 - 6r + 9 = 0$

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 * 1 * 9}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = 3$$

Raiz dupla: $r = 3$

Uma solução será $y(x) = C_1 e^{rx}$

A outra $y(x) = C_2 x e^{rx}$ verificar

$$y(x) = C_1\, e^{rx} + C_2\, x e^{rx}$$

$$y(x) = C_1\, e^{3x} + C_2\, x e^{3x}$$

A equação homogénea

$$y'' + ay' + by = 0$$

Com equação característica $r^2 + ar + b = 0$

de raízes **duplas** r

Tem como solução

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

EQUAÇÃO HOMOGÉNEA - RESUMO

$$y'' + ay' + by = 0$$

Construir a equação característica $r^2 + ar + b = 0$ e encontrar as raízes

a) Raízes reais e distintas r_1 e r_2

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

b) Raiz real dupla r_1

$$y_h = (C_1 + C_2 x)\, e^{r_1 x}$$

c) Raízes complexas conjugadas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$

$$y_h = (C_1 cos\,(\beta x) + C_2 sin(\beta x))\, e^{\alpha x}$$

Exemplo: Encontrar a solução geral de

$y''+y'-6y=0$ com $y(0)=0$ e $y'(0)=5$

Equação característica $r^2+r-6=0$

Raízes reais distintas : $r_1=2$, $r_2=-3$

Solução geral: $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$

$y(0)=0 \longrightarrow 0=C_1e^{2*0}+C_2e^{-3*0} \longrightarrow C_1+C_2=0$

$y'(0)=5 \longrightarrow 5=2C_1-3C_2 \longrightarrow 2C_1-3C_2=5$

$C_1=1 \quad C_2=-1$

$$y(x)=e^{2x}-e^{-3x}$$

Exemplo: Encontrar a solução geral de

$y''-6y'+5y=0$ com $y(0)=0$ e $y'(0)=11$

Equação característica $\quad r^2-6r+5=0$

Raízes reais distintas : $r_1=5\,,r_2=1$

Solução geral: $\quad y(x)=C_1e^{5x}+C_2e^{x}$

$y(0)=0 \longrightarrow \quad 0=C_1e^{5*0}+C_2e^{1*0} \longrightarrow \quad C_1+C_2=0$

$y'(0)=11 \longrightarrow \quad 11=5C_1+C_2 \longrightarrow \quad 5C_1+C_2=11$

$C_1=11/4 \quad C_2=-11/4$

$$y(x)=\frac{11}{4}e^{5x}-\frac{11}{4}e^{x}$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IV

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 2ª ORDEM

- Introdução
- Equação homogénea
- Equação particular

Problema Geral

Qual a função $y(x)$ que verifica a equação:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$ (condições iniciais)

onde $p(x), q(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas no domínio de validade de $y(x)$

Só iremos estudar
EDL 2ª Ordem com coeficientes constantes

Qual a função $y(x)$ que verifica a equação:

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$ (condições iniciais)

onde a e b são constantes e $f(x)$ é uma função contínua no domínio de validade de $y(x)$

Solução Geral

Iremos ver que a solução geral desta equação é dada por:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

Em que $y_h(x)$ é a solução da equação homogénea

$$y'' + ay' + by = 0$$

e $y_p(x)$ é uma solução particular da equação dada.

Definições e Teoremas

Teorema 1: Existência e Unicidade

O problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

para $p(x), q(x)$ e $f(x)$ funções contínuas num intervalo aberto]a,b[contendo x_0, tem uma única solução neste intervalo

Definição: Equação homogénea

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é homogénea quando pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Para as equações homogéneas é válido o princípio da sobreposição

Teorema 2: Princípio da Sobreposição

Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

então $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

também o é

Exercício: Mostrar

Teorema 3

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da equação diferencial linear homogénea de segunda ordem num intervalo aberto]a,b[onde $p(x)$ e q(x) são funções contínuas, t ais que num ponto $x_0 \in]a, b[$ temos

$$W(x) = det\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

então para todo o par de condições iniciais (y_0, y'_0) existem duas constantes C_1 e C_2 tais que o problemas de valores inicial

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Tem como única solução no intervalo]a,b[

$$y(x) = y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Definição: wonskiano

O determinante

$$W(x) = det\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}$$

É chamado o wonskiano das funções y_1 e y_2 no ponto x_0

EQUAÇÃO HOMOGÉNEA - RESUMO

$$y'' + ay' + by = 0$$

Construir a equação característica $r^2 + ar + b = 0$ e encontrar as raízes

a) Raízes reais e distintas r_1 e r_2

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

b) Raiz real dupla r

$$y_h = (C_1 + C_2 x)\, e^{r\ x}$$

c) Raízes complexas conjugadas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$

$$y_h = (C_1 cos\,(\beta x) + C_2 sin(\beta x))\, e^{\alpha x}$$

SOLUÇÃO PARTICULAR $y_p(x)$

Método da variação dos parametros

$\boldsymbol{y'' + ay' + by = f(x)}$ **ou** $\boldsymbol{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)}$

Funciona para qualquer equação linear de 2ª ordem para a qual se conheçam duas soluções da equação homogénea

Método da variação dos parametros

$$\boldsymbol{y'' + ay' + by = f(x)}$$

Funciona para qualquer equação linear de 2ª ordem para a qual se conheçam duas Soluções, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação homogénea

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Solução particular $y_p(x)$

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Método da variação dos parametros

Vamos procurar soluções que tenham uma forma da solução geral da equação homogénea, mas cjos coeficientes sejam funções de *x*

$$y(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$$

Condições
$$\begin{cases} y'(x) = u_1(x)\, y'_1(x) + u_2(x)\, y'_2(x) \\ 0 = u'_1(x)\, y_1(x) + u'_2(x)\, y_2(x) \end{cases}$$

SOLUÇÃO PARTICULAR $y_p(x)$

$$\boldsymbol{y'' + ay' + by = f(x)}$$

Método da variação dos parametros

Vamos procurar soluções que tenham uma forma da solução geral da equação homogénea, mas cjos coeficientes sejam funções de *x*

$$y(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$$

$$y'(x) = u_1(x)\, y'_1(x) + u_2(x)\, y'_2(x)$$

$$y''(x) = u'_1(x)\, y'_1(x) + u_1(x)\, y''_1(x) + u'_2(x)\, y'_2(x) + u_2(x)\, y''_2(x)$$

Substituindo $y(x), y'(x)$ e $y''(x)$ na equação obtemos, após alguma manipulação:

$$\begin{cases} y_1(x)\, u'_1(x) + y_2(x)\, u'_2(x) = 0 \\ y'_1(x)\, u'_1(x) + y'_2(x)\, u'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x)\, u'_1(x) + y_2(x)\, u'_2(x) = 0 \\ y'_1(x)\, u'_1(x) + y'_2(x)\, u'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

Que se pode escrever na forma matricial $A\,X = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} y'_2 & -y_2 \\ -y'_1 & y_1 \end{bmatrix} B$$

$$X = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{W(x)}} \begin{bmatrix} y'_2 & -y_2 \\ -y'_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

wronskiano

$$W(x) = det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} u'_1(x) = -\dfrac{y_2(x)f(x)}{W(x)} \\ \\ u'_2(x) = \dfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(x) = -\displaystyle\int \dfrac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx \\ \\ u_2(x) = \displaystyle\int \dfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx \end{cases}$$

wronskiano não nulo

$$W(x) = det\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\boxed{y_p(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)}$$

Solução particular $y_p(x)$

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

$$y_p(x) = -\,y_1(x)\int \frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)}\,dx$$

$$W(x) = det\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

$y_1(x)$ e $y_2(x)$

Soluções da equação homogénea
calculadas pelos métodos descritos

SOLUÇÃO PARTICULAR $y_p(x)$

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

$$y_p(x) = y_1(x) \int \frac{f(x)W_1(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{f(x)W_2(x)}{W(x)} dx$$

$$W(x) = det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

$$W_1(x) = det \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y'_2 \end{vmatrix} = -y_2$$

$$W_2(x) = det \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & 1 \end{vmatrix} = y_1$$

$y_1(x)$ e $y_2(x)$

Soluções da equação homogénea calculadas pelos métodos descritos

Solução da equação

Seja a equação diferencial de segunda ordem $\boldsymbol{y'' + ay' + by = f(x)}$

Com equação homogénea $y'' + ay' + by = 0$ que a solução geral

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

A sua solução geral é dada por

$$\boxed{\boldsymbol{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)}}$$

Onde **UMA** solução particular $\boldsymbol{y_p(x)}$ sepode escrever

$$\boxed{\boldsymbol{y_p(x) = y_1(x) \int \frac{f(x)W_1(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{f(x)W_2(x)}{W(x)} dx}}$$

com

$$W(x) = det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \qquad W_1(x) = det \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y'_2 \end{vmatrix} \qquad W_2(x) = det \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Problema

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Resolução

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

$y_h(x)$ é a solução geral da equação homogénea $y''+ay' + by = 0$

$$\boxed{y_h(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)}$$

$y_p(x)$ é uma solução particular da equação dada

$$\boxed{y_p(x) = y_1(x)\int \frac{f(x)W_1(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{f(x)W_2(x)}{W(x)}dx}$$

Exemplo: Calcule a solução de $y'' - 2y' + y = 2x$