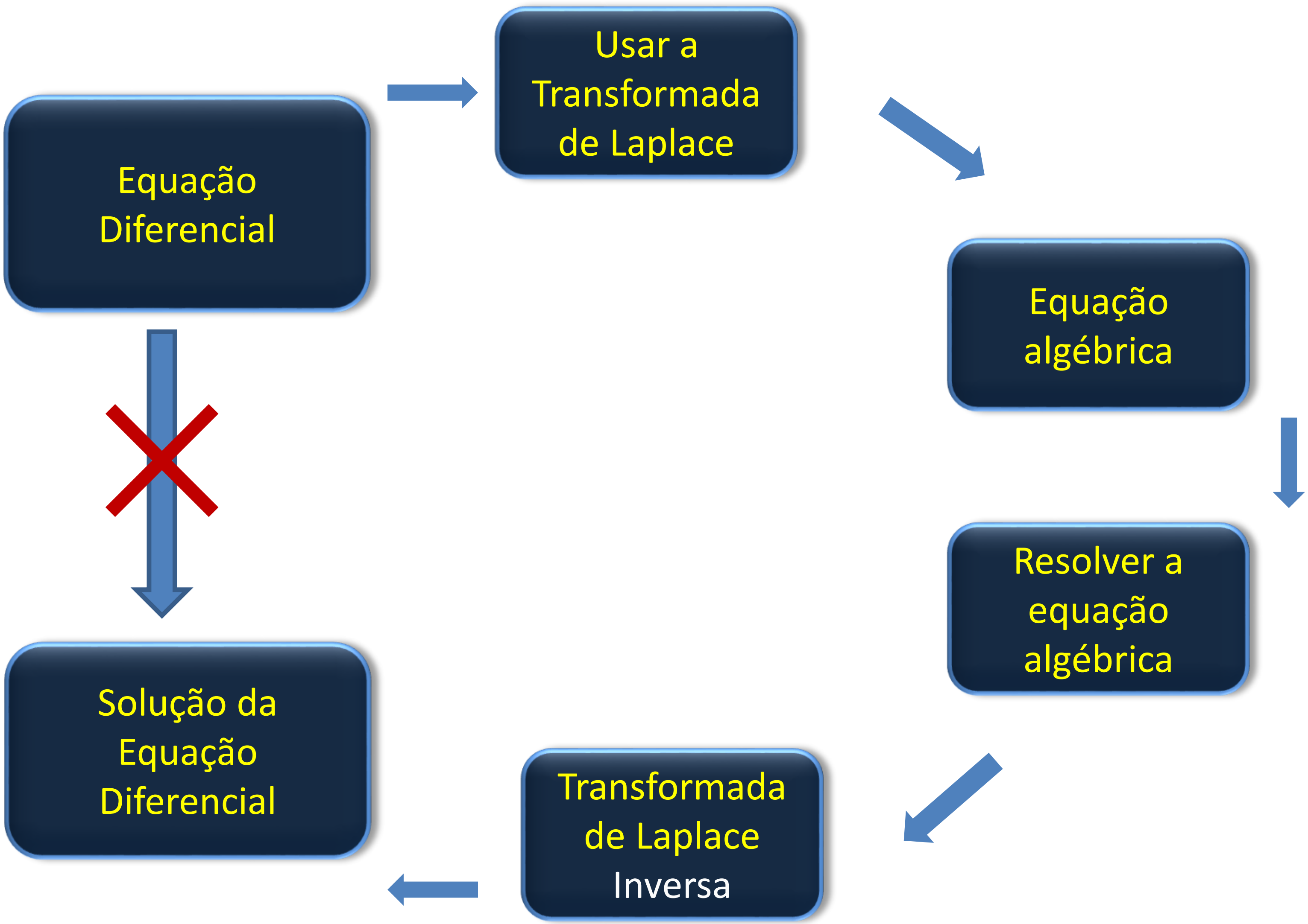
TRANSFORMADA DE LAPLACE I

- INTRODUÇÃO E CONCEITO
- CALCULO DE ALGUMAS TRANSFORMADAS
- TRANSFORMADA DA FUNÇÃO DERIVADA
- TABELA DE TRANSFORMADAS
- PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE
- DESLOCAMENTOS EM s E EM t
- APLICAÇÃO À RESOLUÇÃO DE EQ. DIFERENCIAIS
- TRANSFORMADA INVERSA
- FUNÇÃO IMPULSO
- FUNÇÃO δ-DIRAC


Equação Diferencial
Usar a Transformada de Laplace
Equação algébrica
Resolver a equação algébrica
Transformada de Laplace Inversa
Solução da Equação Diferencial

Definição

Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$,
a sua **TRANSFORMADA DE LAPLACE**, $\mathrm{F}(s)$, é dada por

$$\boxed{\boldsymbol{F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(t) = L^{-1}\{F(s)\}}}$$

Nota: convenciona-se que a transformada de Laplace de uma função se designa pela letra maiúscula: $Y(s) \; = \; L\{y(t)\}$ por exemplo.

Integral impróprio

$$\int_0^\infty f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_0^r f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty} F(r) - F(0)$$

Exemplos: $f(t) = 1$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} * 1 \ dt \qquad = \lim_{c \to \infty} \int_0^{c} e^{-st}\, dt =$$

$$= \lim_{c \to \infty} \left(\frac{1}{-s} \int_0^{c} -s * e^{-st}\, dt\right) =$$

$$= \lim_{c \to \infty} \left[\frac{1}{-s} \left| e^{-st} \right|_0^c \right] =$$

$$= \frac{1}{-s} * \lim_{c \to \infty} (e^{-ct} - 1) =$$

$$= \frac{1}{s}$$

$$F(1) = \frac{1}{s}$$

Exemplos: $f(t) = t$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Vamos primitivar por partes: $\int uv' = uv - \int u'v$

$u = t \qquad u' = 1$

$v' = e^{-st} \qquad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$

$$F(s) = \lim_{c\to\infty} \int_0^c t * e^{-st}\, dt$$

$$\int t * e^{-st}\, dt = -\frac{t}{s} e^{-st} + \int \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt = -\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st}$$

$$F(s) = \lim_{c\to\infty} \int_0^c t * e^{-st}\, dt = \lim_{c\to\infty} \left|-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st}\right|_0^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \left(-\frac{c}{s} e^{-sc} - \frac{1}{s^2} e^{-sc}\right) - \left(-\frac{0}{s} e^{-s0} - \frac{1}{s^2} e^{-s0}\right) =$$

$$= (-0 - 0) - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{F(t) = \frac{1}{s^2}}$$

Exemplos: $f(t) = t^2$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Vamos primitivar por partes: $\int uv' = uv - \int u'v$

$$u = t^2 \qquad u' = 2t$$

$$v' = e^{-st} \qquad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$F(s) = \lim_{c \to \infty} \int_0^{c} t^2 * e^{-st}\, dt$$

$$\int t^2 * e^{-st}\, dt = -\frac{t^2}{s} e^{-st} + \int \left(-\frac{2}{s} t * e^{-st} \right) dt = -\frac{t^2}{s} e^{-st} + \frac{2}{s} \int (t * e^{-st}) dt$$

$$\lim_{c \to \infty} \int_0^{c} t^2 * e^{-st}\, dt = \lim_{c \to \infty} \left| \underbrace{-\frac{t^2}{s} e^{-st}}_{=0} + \frac{2}{s} \underbrace{\int (t * e^{-st}) dt}_{=\frac{1}{s^2}} \right|_0^c$$

$$\boxed{F(t^2) = \frac{2}{s^3}}$$

Exemplos: $f(t) = e^{at}$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$F(s) = \lim_{c\to\infty} \int_0^{c} e^{-st} * e^{at}\, dt$$

$$= \lim_{c\to\infty} \int_0^{c} e^{-(s-a)t} dt \quad = \lim_{c\to\infty} \frac{-1}{(s-a)} \int_0^{c} -(s-a) * e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \lim_{c\to\infty} \left| \frac{-1}{(s-a)} e^{-(s-a)c} \right| - \frac{-1}{(s-a)} =$$

$$= \frac{1}{(s-a)}$$

$$\boxed{F(e^{at}) = \frac{1}{s-a}}$$

Exemplos: $e^{at} f(t)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$F(s) = \lim_{c \to \infty} \int_0^{c} e^{-st} * e^{at}\, f(t)\, dt$$

$$F(s) = \lim_{c \to \infty} \int_0^{c} e^{-(s-a)t} * f(t)\, dt........$$

$$F(e^{at} f(t)) = F(s-a)$$

Exemplos: $f(t) = \cos(wt)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$F(s) = \lim_{c\to\infty} \int_0^{c} e^{-st} * \cos(wt)\, dt =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \left(- \frac{e^{-st}(s * \cos(wt) - w * \sin(wt))}{s^2 + w^2} \right)_0^c =$$

$$= \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$\boxed{F(\, cos(wt)) = \frac{w}{s^2 + w^2}}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (linearidade)

$$L\{a * f(t) + b * g(t)\} =$$

$$= a * F(s) + b * G(s)$$

Mostrar

Propriedades da Transformada de Laplace (translação)

Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$, então a transformada de $e^{at}f(t)$ será $F(s-a)$

$$F(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

$$f(t) = e^{-at}L^{-1}\{F(s-a)\}$$

A translação no espaço s é o resultado de uma multiplicação por e^{at} no espaço t

Exemplos: $f(t) = \cosh(at)$

$$\cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$TL[\cosh(at)] = \frac{1}{2}\{TL[e^{at}] + TL[e^{-at}]\} =$$

$$TL[\cosh(at)] = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$F(\,cosh(at)) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Exemplos: $f(t) = sinh(at)$

$$\sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

$$TL[\sinh(at)] = \frac{1}{2}\{TL[e^{at}] - TL[e^{-at}]\} =$$

$$TL[\sinh(at)] = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$F(\,cosh(at)) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

TRANSFORMADA DA FUNÇÃO DERIVADA $L\{f'(x)\}$

$$L\{f'(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)\, dt$$

Vamos primitivar por partes: $\int uv' = uv - \int u'v$ $\quad u = e^{-st} \quad u' = -s * e^{-st}$

$$v' = f'(t) \quad v = f(t)$$

$$\int e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} * f(t) - \int (-s * e^{-st} * f(t))\, dt$$

$$= e^{-st} * f(t) + s \int e^{-st} * f(t)\, dt$$

$$\boxed{= F(s)}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left| e^{-st} * f(t) \right|_0^{\infty} + s\, F(s)$$

$$\boxed{= f(0)}$$

$$L\{f'(x)\} = s\, F(s) - f(0)$$

Transformada da função derivada

$$L\{f'(x)\} = s\,F(s) - f(0)$$

$$L\{f''(x)\} = s\,L\{f'(x)\} - f'(0)$$

$$= s\,[s\,F(s) - f(0)\,] - f'(0)$$

$$L\{f''(x)\} = s^2\,F(s) - sf(0) - f'(0)$$

A transformada de Laplace transforma derivadas em multiplicações por **s**
e integrais em divisões por **s**

TRANSFORMADA DA FUNÇÃO DERIVADA

$$L\{f'(x)\} = s\,F(s) - f(0)$$

$$L\{f''(x)\} = s^2\,F(s) - sf(0) - f'(0)$$

A transformada de Laplace transforma derivadas em multiplicações por **s** e integrais em divisões por **s**

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s>0$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s>0$
$t^n,\ n\in\mathbf{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$s>\gamma+a$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s>0$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s>0$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$
$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s>a$
$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s>a$

Exemplos: $e^{-5t} sin(2t)$

Pela tabela temos: $$L\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

$$L\{e^{-5t}\sin(2t)\} = \frac{2}{(s+5)^2 + 2^2}$$

Derivada da Transformada de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\frac{d}{ds}[F(s)] = \frac{d}{ds}\left[\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt\right]$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds}[\, e^{-st} f(t)]\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}[-t * f(t)]\, dt = L[-t * f(t)]$$

$$F'(\, t) = L[-t * f(t)]$$

$$F''(\, t) = L[t^2 * f(t)]$$

Propriedades da Transformada de Laplace

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$L[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$$

$$L[f'(x)] = sF(s) - f(0)$$

$$L[f''(x)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$L[-xf(x)] = F'(s)$$

$$L[(-1)^n x^n f(x)] = F^{(n)}(s)$$

$$L\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(s)ds$$

$$L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(s)G(s)$$

Transformada inversa de Laplace

Conhecer as propriedades e ir à tabela !

Transformada inversa de Laplace

Exemplo:Qual a transformada inversa de $\mathrm{F(s)} = \frac{s-2}{(s-2)^2+9}$

$$f(t) = e^{2t}\cos(3t)$$

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s > 0$
$t^n,\ n \in \mathbf{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	$s > \gamma + a$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s > 0$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s > 0$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$
$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$

TRANSFORMADA DE LAPLACE II

- INTRODUÇÃO E CONCEITO
- CALCULO DE ALGUMAS TRANSFORMADAS
- TRANSFORMADA DA FUNÇÃO DERIVADA
- TABELA DE TRANSFORMADAS
- PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE
- DESLOCAMENTOS EM s E EM t
- APLICAÇÃO À RESOLUÇÃO DE EQ. DIFERENCIAIS
- TRANSFORMADA INVERSA
- FUNÇÃO IMPULSO
- FUNÇÃO δ-DIRAC

Definição

Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$,
a sua **TRANSFORMADA DE LAPLACE**, $\mathrm{F}(s)$, é dada por

$$\boxed{F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt}$$

$$\boxed{f(t) = L^{-1}\{F(s)\}}$$

Nota: convenciona-se que a transformada de Laplace de uma função se designa pela letra maiúscula: $Y(s) = L\{y(t)\}$ por exemplo.

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s>0$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s>0$
$t^n,\ n\in\mathbf{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$s>\gamma+a$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s>0$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s>0$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$
$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s>a$
$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s>a$

Propriedades da Transformada de Laplace

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$L[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$$

$$L[f'(x)] = sF(s) - f(0)$$

$$L[f''(x)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$L[-xf(x)] = F'(s)$$

$$L[(-1)^n x^n f(x)] = F^{(n)}(s)$$

$$L\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(s)ds$$

$$L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(s)G(s)$$

Rasolução de ED com Transformada de Laplace

Relembrar

$$L[f'(x)] = sF(s) - f(0)$$

$$L[f''(x)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Exemplo: Resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \qquad y \quad (0) =, y'(0) = 1$$

$$L[y''(x)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \qquad L[y''(x)] = s^2Y - s - 1$$

$$L[y'(x)] = sY(s) - y(0) \qquad L[y'(x)] = sY - 1$$

Aplicando a tranformada em ambos os lados

$$L\{y'' + 2y' + y\} = L\{e^{-t}\}$$

$$L\{y''\} + 2L\{y'\} + L\{y\} = L\{e^{-t}\}$$

$$(s^2Y - s - 1) + 2(sY - 1) + Y = \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+2s+1)Y = \frac{1}{s+1} + (s+3)$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{s+3}{(s+1)^2}$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

Aplicar a Transformada inversa

Exemplo: Resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \qquad y \ \ (0) =, y'(0) = 1$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$ Aplicar a Transformada inversa

Está tudo em termos de $(s+1) \rightarrow e^{-t}$ $$y(t) = \boldsymbol{e^{-t}} * L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \quad \frac{t^2}{2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \quad 1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} = \quad 2t$$

$$\boxed{y(t) = e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)}$$

Exemplo: Resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + y' = 2t \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

Vamos centrar a função em ZERO em vez de $t = x + \frac{\pi}{4}$.

$$g'' + g' = 2(x + \frac{\pi}{4})$$

$$g(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad g'(0) = 2 - \sqrt{2}$$

$$L[g''] = s^2G - sg(0) - g'(0)$$

$$L[g'] = sG - g(0)$$

Aplicando a tranformada em ambos os lados

$$s^2G - sg(0) - g'(0) + sG - g(0) = \frac{2}{s^2} + \frac{\pi}{2s}$$

$$G = \frac{2}{(s^2+1)s} + \frac{\pi}{2(s^2+1)s} + g(0)\frac{s}{(s^2+1)} + g'(0)\frac{1}{(s^2+1)}$$

Exemplo: Resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + y' = 2t \qquad \mathrm{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

$$G = \frac{2}{(s^2+1)s} + \frac{\pi}{2(s^2+1)s} + g(0)\frac{s}{(s^2+1)} + g'(0)\frac{1}{(s^2+1)}$$

$$y = 2L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)s^2}\right) + \frac{\pi}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)s}\right) + g(0)L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)}\right) + g'(0)L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)}\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)}\right) = \cos(x) \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)}\right) = \sin(x)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)s^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)}\right) = x - \sin(x)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)s}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)}\right) = 1 - \cos(x)$$

Exemplo: Resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + y' = 2t \qquad \mathrm{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

$$G = \frac{2}{(s^2+1)s} + \frac{\pi}{2(s^2+1)s} + g(0)\frac{s}{(s^2+1)} + g'(0)\frac{1}{(s^2+1)}$$

$$y = 2L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)s^2}\right) + \frac{\pi}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)s}\right) + g(0)L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)}\right) + g'(0)L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)}\right)$$

$$y = 2(x - \sin(x)) + \frac{\pi}{2}(1 - \cos(x)) + \frac{\pi}{2}\cos(\mathrm{x}) + \left(2 - \sqrt{2}\right)\sin(x)$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{t} + \frac{\pi}{4}$$

$$y(t) = 2t - \sin(t) + \cos(t)$$

Exemplo: Resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + 9y = \cos(2t) \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3$$

Aplicando a tranformada em ambos os lados

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 9Y = \frac{s}{s^2+4}$$

$$Y(s^2+9) = \frac{s}{s^2+4} + s + 3$$

$$Y = \frac{1}{5} * \frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+9} + \frac{4}{5} * \frac{s}{s^2+9}$$

$$y(t) = \frac{1}{5} * \cos(2t) + \sin(3t) + \frac{4}{5} * \cos(3t)$$

Fim da matéria para o miniteste III

Definição

Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$,
a sua **TRANSFORMADA DE LAPLACE**, $\mathrm{F}(s)$, é dada por

$$\boxed{F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt}$$

$$\boxed{f(t) = L^{-1}\{F(s)\}}$$

Nota: convenciona-se que a transformada de Laplace de uma função se designa pela letra maiúscula: $Y(s) = L\{y(t)\}$ por exemplo.

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s > 0$
$t^n,\ n \in \mathbf{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	$s > \gamma + a$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s > 0$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s > 0$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$
$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$

Propriedades da Transformada de Laplace

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$L[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$$

$$L[f'(x)] = sF(s) - f(0)$$

$$L[f''(x)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$L[xf(x)] = -F'(s)$$

$$L[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$L\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(s)ds$$

$$L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(s)G(s)$$

Propriedades da Transformada de Laplace

$$\boldsymbol{L\left[\int_0^t f(\theta)d\theta\right] = \frac{F(s)}{s}}$$

Seja $g(t) = \int_0^t f(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}$ $\xrightarrow[\text{então}]{}$ $g'(t) = f(t)$

$$L\{g'(t)\} = s * L\{g(t)\} - g(0)$$

$$L\{f(t)\} = s * L\left\{\int_0^t f(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}\right\} - \underbrace{\cancel{g}(0)}_{=0}$$

$$L\left\{\int_0^t f(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}\right\} = \frac{L\{f(t)\}}{s}$$

$$L\left\{\int_0^t f(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Transformada inversa de $\frac{F(s)}{s}$

$$L\left[\int_0^t f(\theta)d\theta\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad \leftrightarrow \qquad L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\theta)d\theta$$

Exemplo $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-2)}\right\}$

$$\boldsymbol{L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\theta)d\theta}$$

Sendo $\dfrac{1}{s(s-2)} = \dfrac{F(s)}{s}$ então $F(s) = \dfrac{1}{s-2}$ e

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-2)}\right\} = \int_0^t \boldsymbol{f(\theta)d\theta} = \int_0^t \boldsymbol{e^{2\theta}d\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2\theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=t} = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)$$

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-2)}\right\} = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)}$$

Exemplo $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}$

$$\boldsymbol{L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\theta)d\theta}$$

Sendo $\frac{1}{s^2(s-2)} = \frac{F(s)}{s}$ então $F(s) = \frac{1}{s(s-2)}$ e

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-2)}\right\} = \text{problema anterior}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\} = \int_0^t \left[\int_0^{\theta} f(\delta)d\delta\right] d\theta = \int_0^t \frac{1}{2}(e^{2\theta}-1)d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2\theta} - 2\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=t} = \frac{1}{4}(e^{2t} - 2t - 1)$$

(de um modo pouco correto) podemos escrever:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^n}\right\} = \underbrace{\int_0^t \iiint_0^t}_{\text{n vezes}} f(\theta)\,d\theta$$

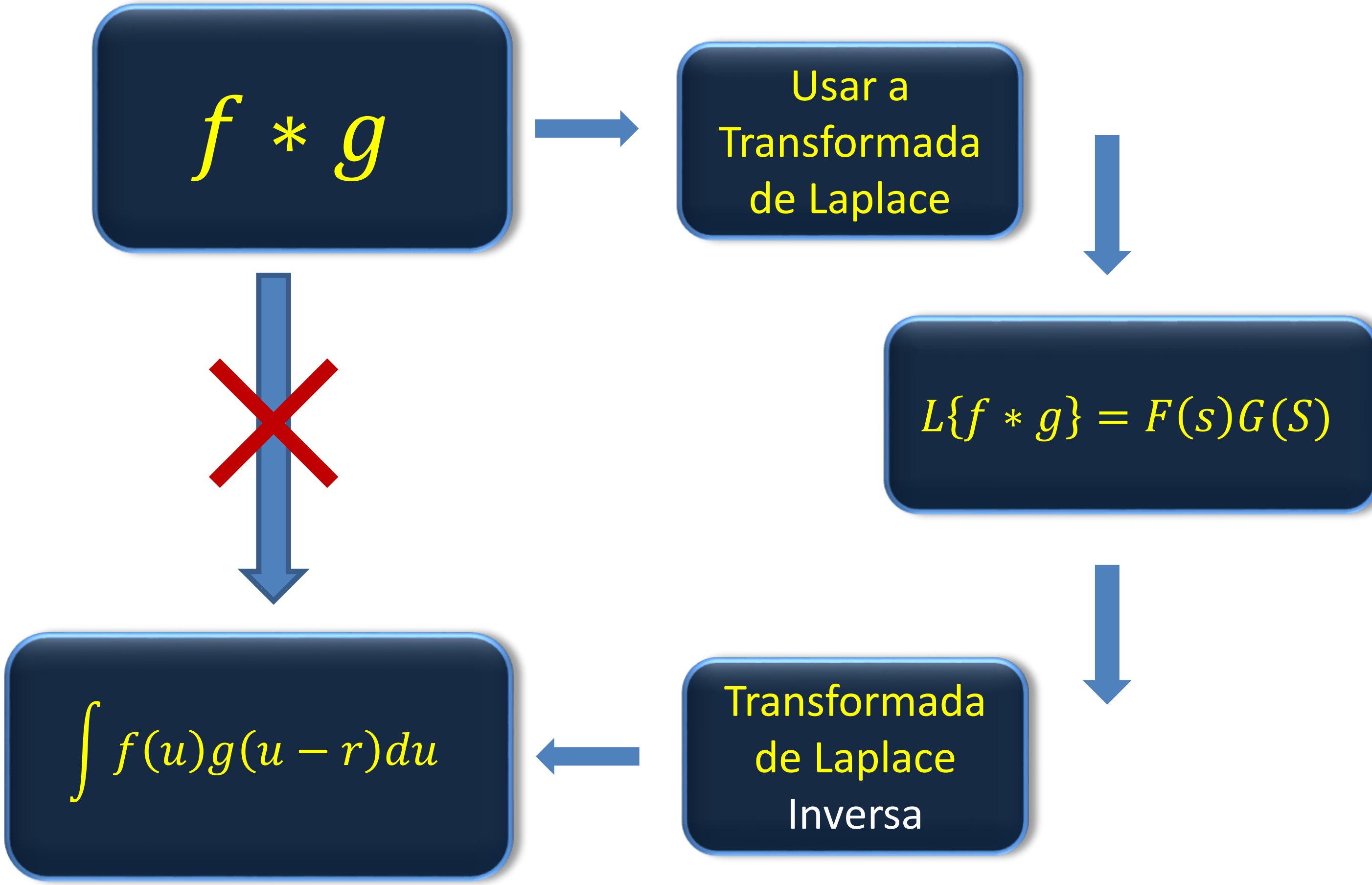
Propriedades da Transformada de Laplace (integral de convolução)

Convolção de *f* com *g*

$$f * g \equiv \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

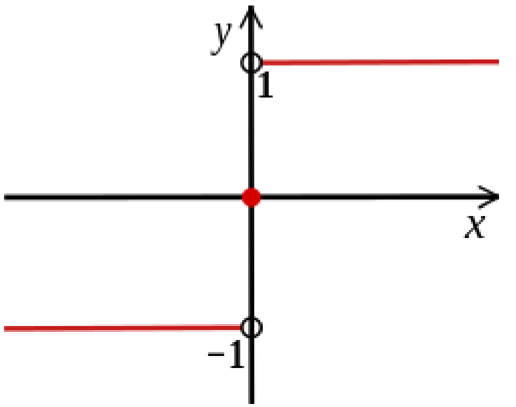
$$L\{f * g\} = L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(s)G(s)$$

Nota: $L\{f(t) \cdot g(t)\} \neq F(s) \cdot G(s)$


$f * g$
Usar a Transformada de Laplace
$L\{f * g\} = F(s)G(S)$
Transformada de Laplace Inversa
$\int f(u)g(u-r)du$

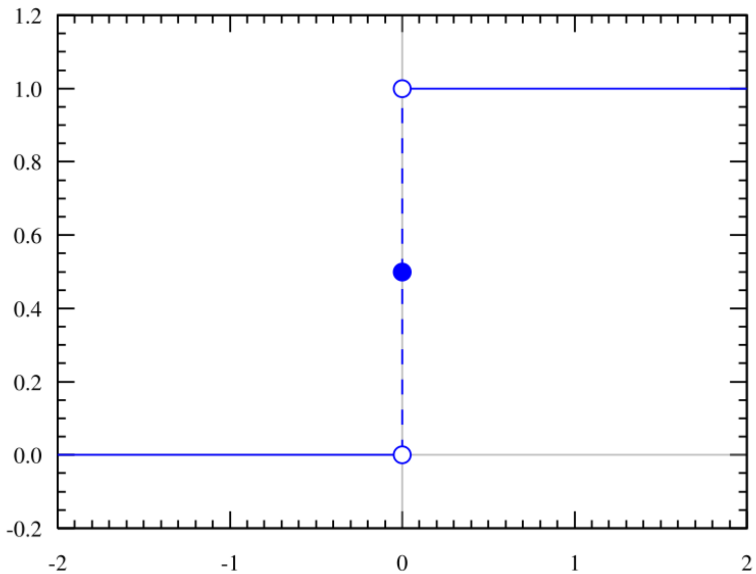
Algumas funções “novas”

Função "Sinal"- "*Sign*"



$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Função de Heaviside (ou degrau)



$$u(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1/2 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

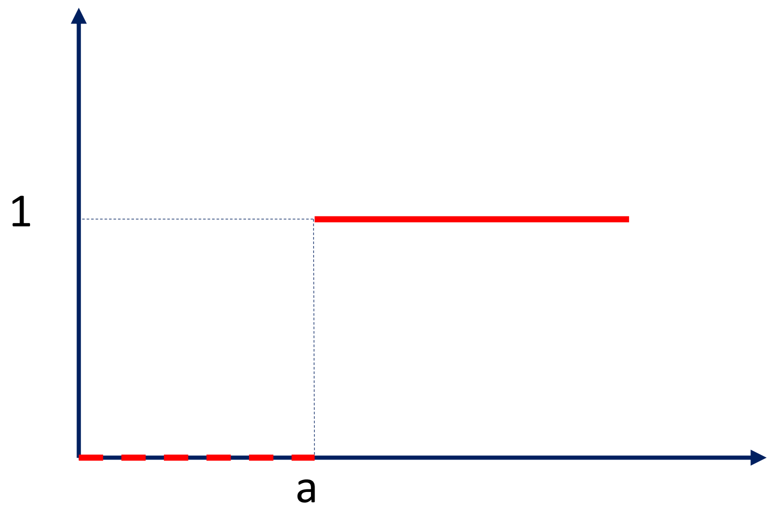
$$u(x) = \frac{1}{2}(1 + sgn(x))$$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Função de Heaviside (geral)

$\mathrm{u}(x-a)$ $\qquad$ $\mathrm{u}_a(x)$

$$\mathrm{u}_a(x) = u(x-a) = \begin{cases} 0 & ,x \le a \\ 1 & ,x > a \end{cases}$$



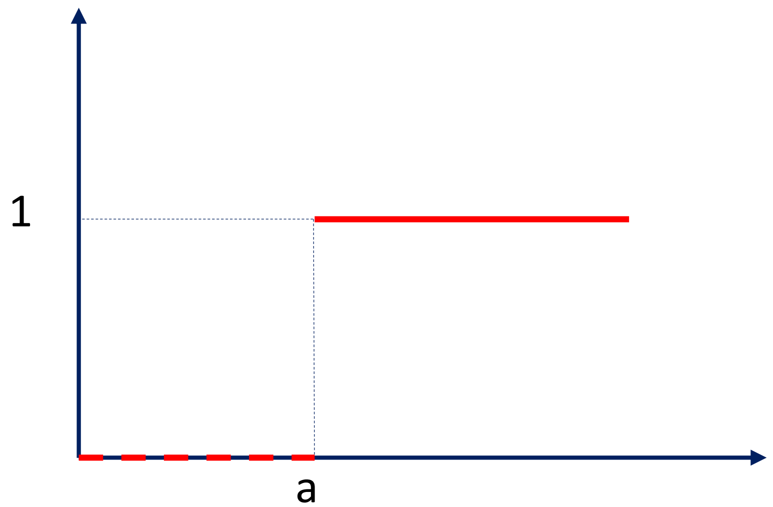
$$L\{u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} * u(t-a)dt = \int_0^a e^{-st} * (0)dt + \int_a^\infty e^{-st} * (1)dt =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \int_a^c e^{-st} dt = \lim_{c\to\infty} \left| \frac{-1}{s} e^{-st} \right|_a^c =$$

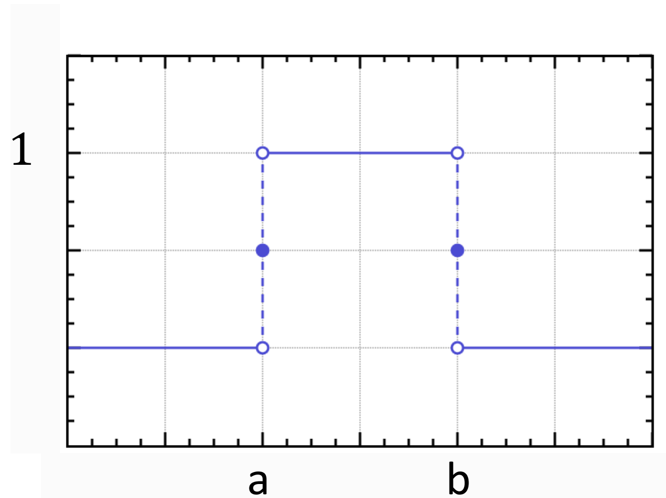
$$= \lim_{c\to\infty} \left(\frac{-1}{s} e^{-sc} \right) - \left(\frac{-1}{s} e^{-sa} \right) = \frac{e^{-sa}}{s}$$

Função de Heaviside (geral)

$u(t-a)$



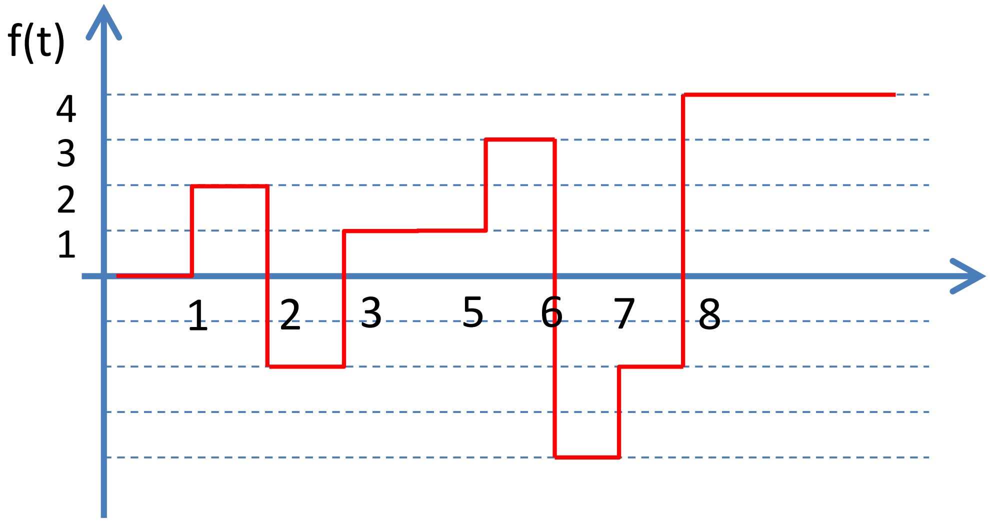
$$L\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$



$$f = \begin{cases} 1 & , a \leq x \leq b \\ 0 & , \quad fora \end{cases}$$

$$f = \ [u(t-a) - u(t-b)]$$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$



$$f(t) = 2u(t-1)$$

$$f(t) = 2u(t-1) - 4u(t-2)$$

$$f(t) = 2u(t-1) - 4u(t-2) + 3u(t-3)$$

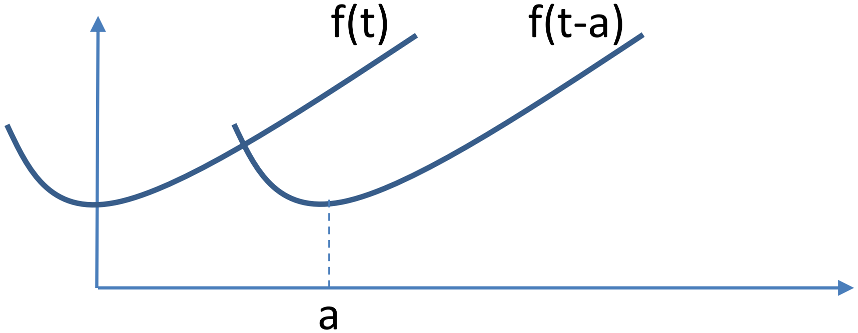
$$f(t) = 2u(t-1) - 4u(t-2) + 3u(t-3) + 2u(t-5)$$

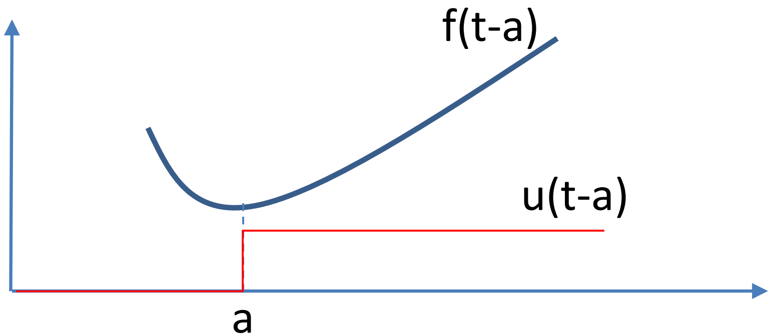
$$f(t) = 2u(t-1) - 4u(t-2) + 3u(t-3) + 2u(t-5) - 7u(t-6)$$

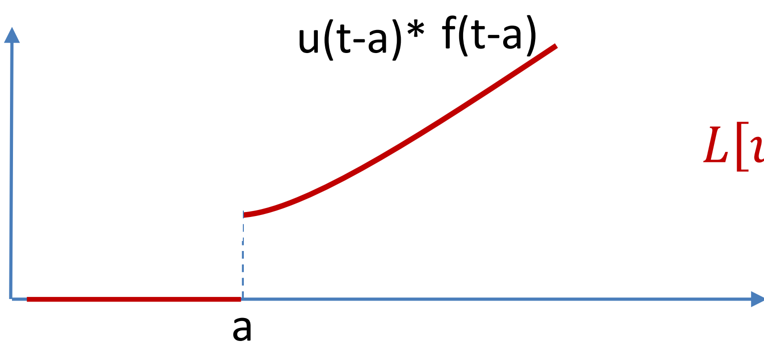
$$f(t) = 2u(t-1) - 4u(t-2) + 3u(t-3) + 2u(t-5) - 7u(t-6) + 2u(t-7)$$

$$f(t) = 2u(t-1) - 4u(t-2) + 3u(t-3) + 2u(t-5) - 7u(t-6) + 2u(t-7) + 6u(t-8)$$

$$F(s) = \frac{1}{s}\left(2e^{-s} - 4e^{-2s} + 3e^{-3s} + 2e^{-5s} - 7e^{-6s} + 2e^{-7s} + 6e^{-8s}\right)$$







$$L[u(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

$$L[u(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-as}e^{-st} * f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(a+t)} * f(t)dt =$$

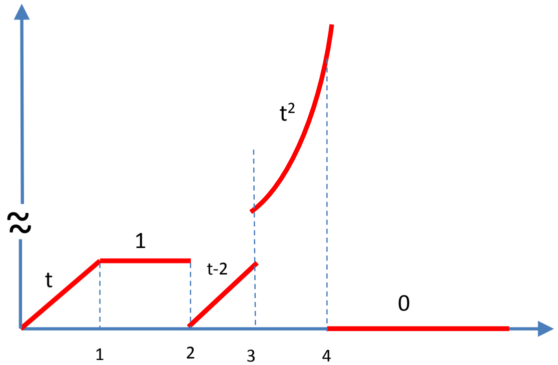
Substituição de variável
$T = a + t, \quad dT = dt$

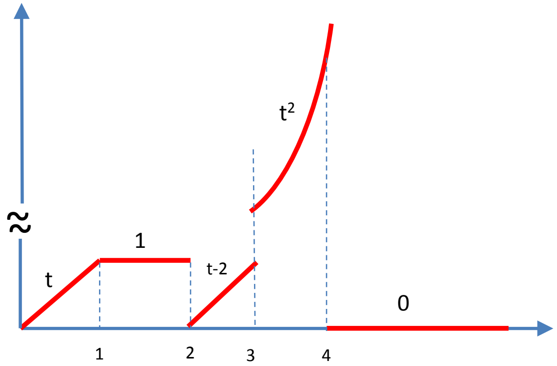
$T(t=0) = a$

$$\int_{T(t=0)}^{T(t=\infty)} e^{-sT} * f(T-a)dT = \int_{a}^{\infty} e^{-sT} * f(T-a)dT =$$

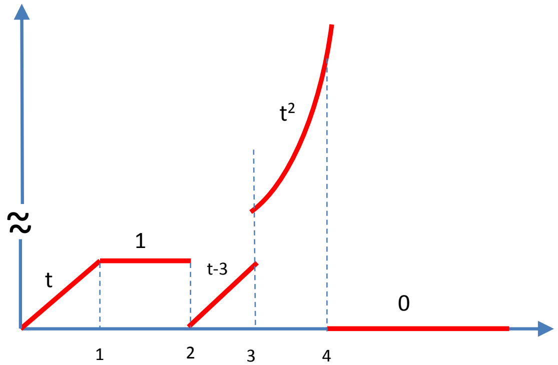
Mas a Transformada de Laplace é definida para t>0,
integrando entre ZERO e infinito. Para estender este integral, sem o modificar, posso multiplicar o integrando por *u(t-a)*

$$= \int_0^\infty e^{-sT} * u(T-a)f(T-a)dT \equiv L\{u(T-a)f(T-a)\}$$





$$f(t) = t[1 - u(t-1)]$$
$$+u(t-1)$$
$$-u(t-2)$$
$$+(t-2)u(t-2)$$
$$-u(t-3)$$
$$+t^2 u(t-3)$$
$$-t^2 u(t-4)$$



$$f(t) = t[1 - u(t-1)] + u(t-1) - u(t-2) + (t-2)u(t-2) - u(t-3) + t^2u(t-3) - t^2u(t-4)$$

Qual a transformada de Laplace ?

Vamos ver primeiro uns exemplos !

$$L\{t * u(t-1)\} = ?$$

A expressão está em termos de $f(t-a)$ $\quad$ $L[u(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$

$$L\{t * u(t-1)\} = L\{f(t-1) * u(t-1)\}$$

Com $f(t-1) = t$ $\quad$ Se $f(t-1) = t$ qual será $f(t)$?

A função que necessito na expressão para calcular $F(s)$

$$f(t) = t + 1 \qquad F(s) = L\{t+1\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

$$L\{t * u(t-1)\} = e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

$$L\{t^2 * u(t-4)\} = ?$$

A expressão está em termos de $f(t-a)$ $\quad L[u(t-4)f(t-4)] = e^{-4s}F(s)$

$$L\{t^2 * u(t-4)\} = L\{f(t-4) * u(t-4)\}$$

Com $f(t-4) = t^2$ Ou seja $f(t) = (t+4)^2$

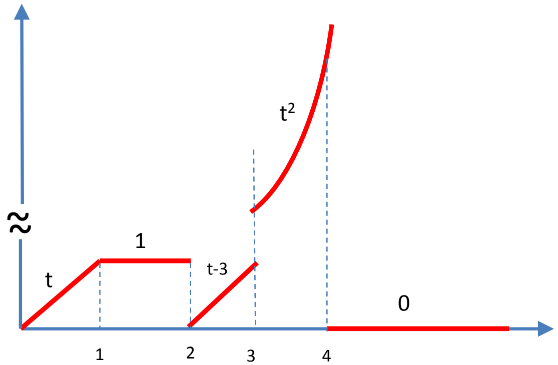
$$f(t) = t^2 + 8t + 16$$

$$F(s) = L\{t^2 + 8t + 16\} = \frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s}$$

$$L\{t^2 * u(t-4)\} = e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s}\right)$$

$$\mathrm{L}\{(t-2)u(t-2)\} = ?$$

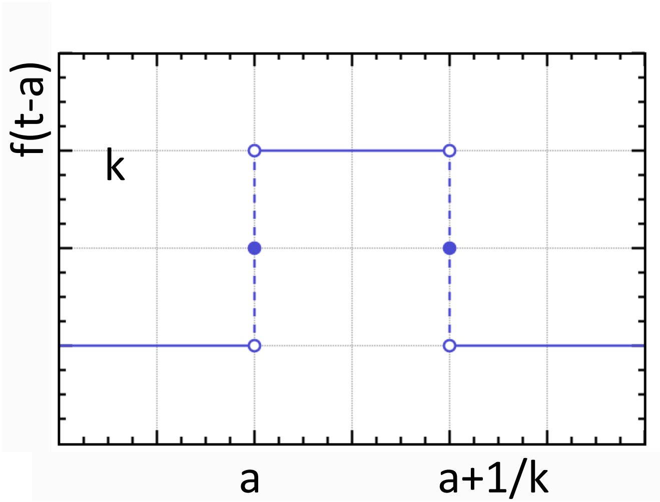
$$\mathrm{L}\{(t-2)u(t-2)\} = e^{-2s}L\{t\} = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$



$$f(t) = t[1 - u(t-1)] + u(t-1) - u(t-2) + (t-2)u(t-2) - u(t-3) + t^2 u(t-3) - t^2 u(t-4)$$

Qual a transformada de Laplace ?

Exercício



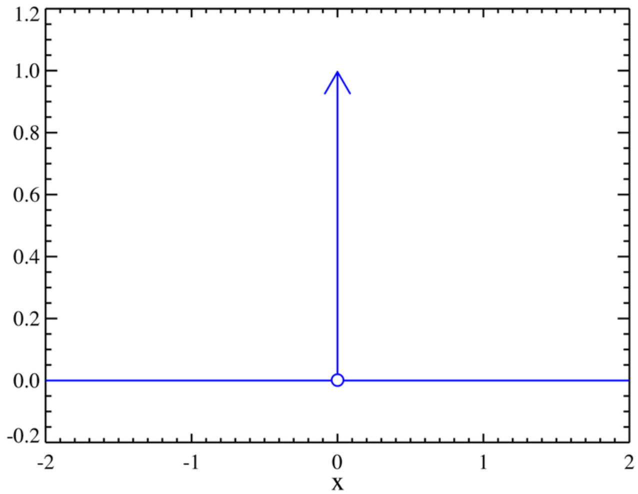
$$f(t) = k\left[u(t-a) - u\left(t - \left(a + \frac{1}{k}\right)\right)\right]$$

$$\int_0^\infty f(t)dt = \left[\left(a + \frac{1}{k}\right) - a\right] * k = 1$$

Vamos ver no limite em que k tende para infinito

O tamanho do intervalo aproxima-se de *zero*,
a função é infinito em *x=a* e *zero* fora
e o integral continua a ser *1*

Função Impulso e δ-Dirac



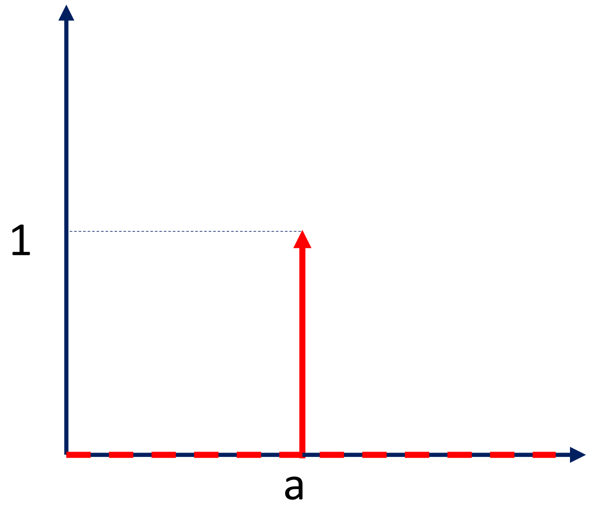
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 0 \\ \infty & , t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_a^b \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

$\forall t_0 \in [a, b]$ e $f(t)$ contínua em x_0

Função Impulso e δ-Dirac



$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & , t \neq a \\ \infty & , t = a \end{cases}$$

$$L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

$$L\{\delta(t)\} = 1$$