Unidade Curricular:
Análise Matemática - EIC0004
MIEIC 2016/2017

INTEGRAÇÃO:

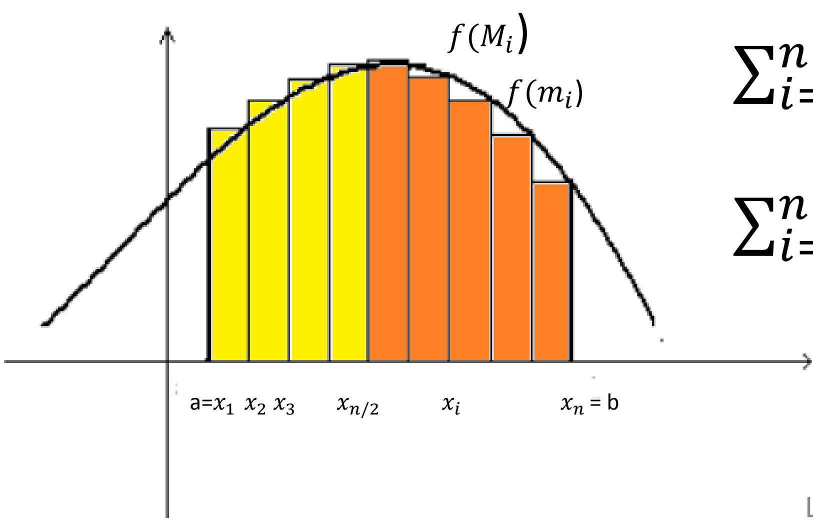
- O Conceito de Integral definido
- Propriedades do Integral definido
- Cálculo de áreas
- Teoremas fundamentais do cálculo
- Método de integração por substituição
- Método de integração por partes
- Integração de frações racionais
- Cálculo de volumes
- Funções em coordenadas polares e cálculo de áreas

Somas de Rieman

Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e Δx_i a amplitude do subintervalo *i*; sendo c_i qualquer ponto do subintervalo *i* a soma de Riemann associada à partição Δ é

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \quad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

$Se\ \ f(m_i)\ \ e\ \ f(M_i)\ são\ os\ valores\ mínimo\ e\ máximo\ de\ f\ no\ intervalo\ i$



$\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x_i$ Soma de Riemann inferior

$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x_i$ Soma de Riemann superior

Integral definido

- Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e o limite da soma de Riemann existe então diz-se que f é integrável em$[a, b]$*:*

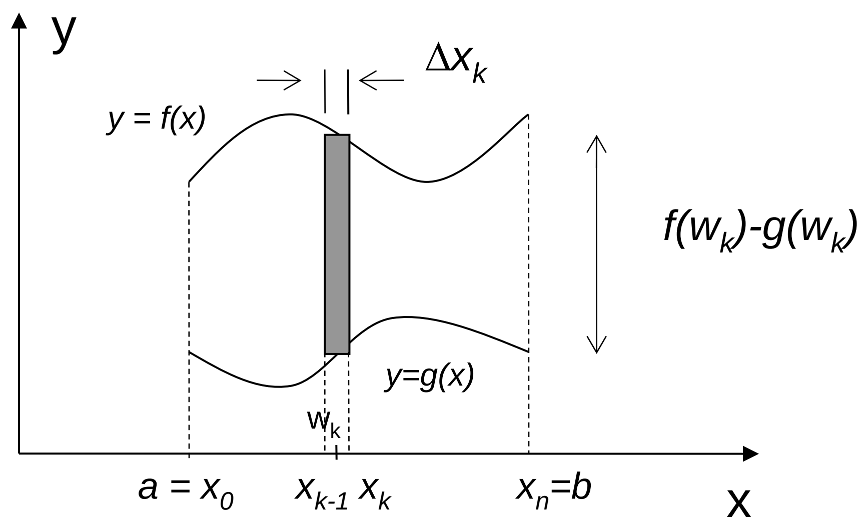
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

- O valor do limite é o **integral definido** de $f(x)$ entre a e b ; $f(x)$ é a **função integrante** e a e b são os **limites inferior e superior** de integração

Cálculo de áreas

NOTA: Se $f(x)$ e $g(x)$ forem funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x) \ \ \forall x \in [a, b]$, então a área da região plana fechada, limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, é dada por

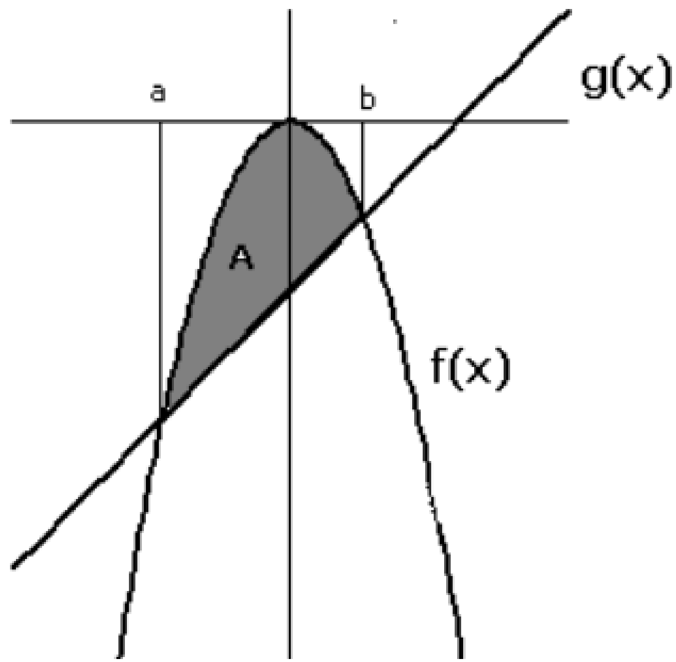
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$



Cálculo de áreas

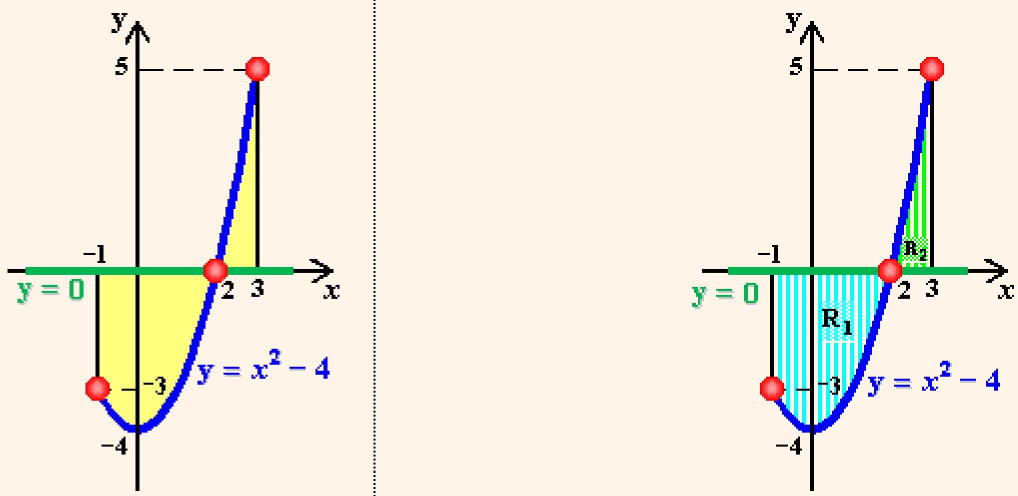
a

Exemplo: A área da figura A no gráfico seguinte, em que $f(x) = -x^2$ e $g(x) = x - 2$ é dada por $A = \int_{-2}^{1} -x^2 - (x-2)\,dx$

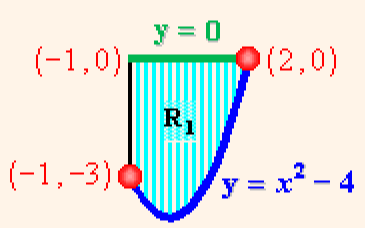


Cálculo de áreas

♦ Gráfico da Região :



♦ Área da região R_1 :



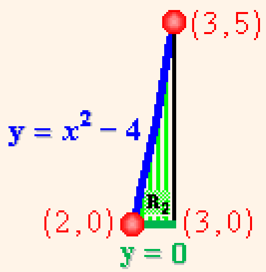
$$A_1 = \int_{-1}^{2} \left(0 - \left(x^2 - 4\right)\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + 4\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=2} = \left(-\frac{2^3}{3} + 4\cdot 2\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 4\cdot(-1)\right) =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 4\right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{1}{3} + 4 = -\frac{9}{3} + 12 = \mathbf{9}$$

Cálculo de áreas

♦ Área da região R_2 :



$$A_2 = \int_2^3 \left(\left(x^2-4\right) - 0 \right) dx = \int_2^3 \left(x^2-4\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Bigg|_{x=2}^{x=3} = \left(\frac{3^3}{3} - 4\cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4\cdot 2 \right) =$$

$$= (9-12) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = -3 - \frac{8}{3} + 8 = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

Área total A=A_1+ A_2 = 9 + $\frac{7}{3} = \frac{34}{3}\ ua$

Cálculo de áreas

$$y=-x^2+4 \quad \text{e} \quad y=|4x-6|-2.$$

Vamos procurar os pontos de interseção :

$$|4x-6| = \begin{cases} -(4x-6) & \text{se } 4x-6<0 \\ 4x-6 & \text{se } 4x-6\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -4x+6 & \text{se } x<\frac{3}{2} \\ 4x-6 & \text{se } x\geq\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow |4x-6|-2 = \begin{cases} -4x+4 & \text{se } x<\frac{3}{2} \\ 4x-8 & \text{se } x\geq\frac{3}{2} \end{cases}$$

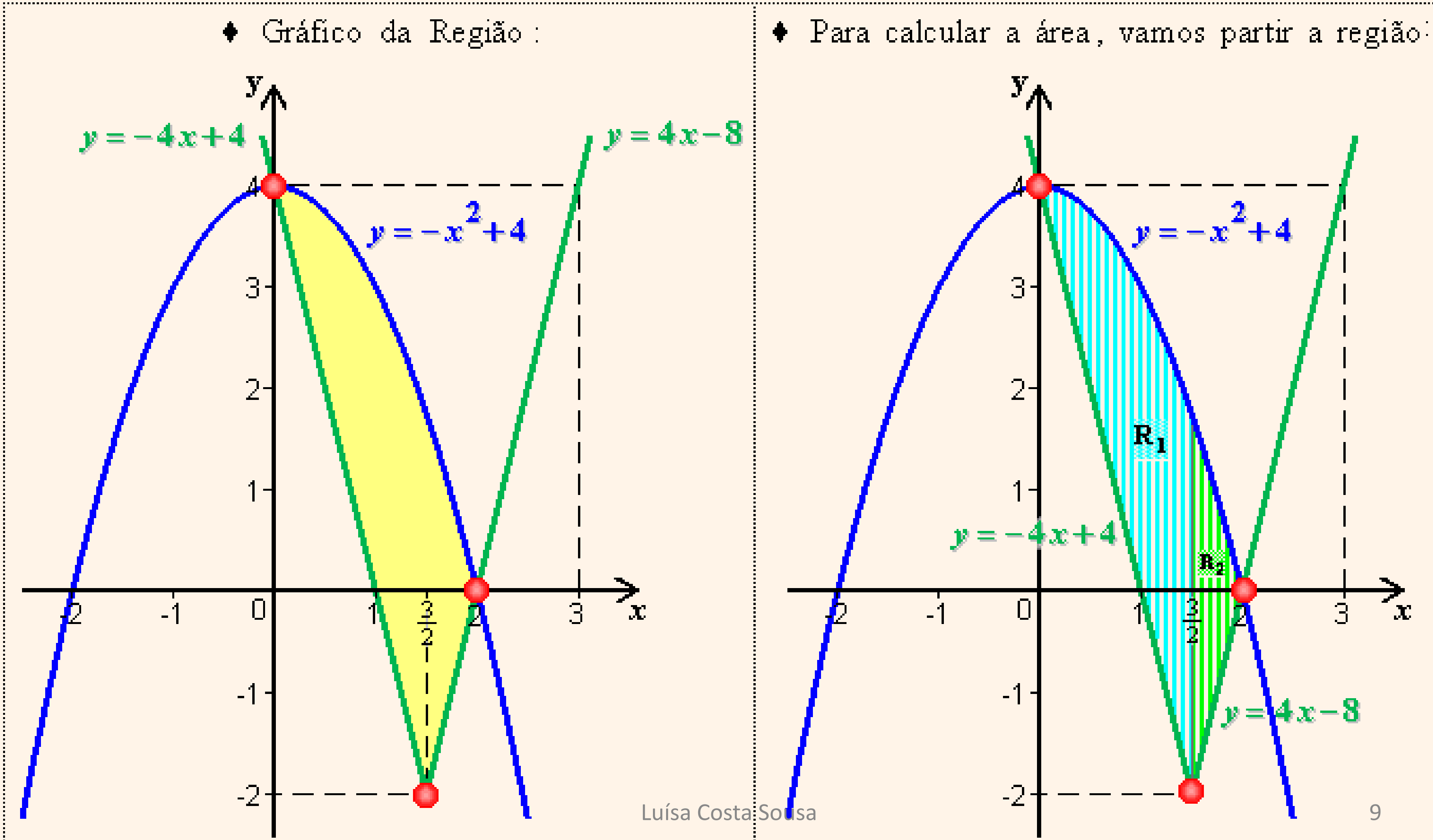
$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+4 \\ y=-4x+4,\ x<\frac{3}{2} \end{array}\right\rangle \rightarrow -x^2+4=-4x+4,\ x<\frac{3}{2} \rightarrow 0=-4x+4+x^2-4,\ x<\frac{3}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2-4x=0,\ x<\frac{3}{2} \rightarrow x(x-4)=0,\ x<\frac{3}{2} \rightarrow x=0 \xrightarrow{y=-4x+4} \text{Ptos de Interseção: } (0,4)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+4 \\ y=4x-8,\ x\geq\frac{3}{2} \end{array}\right\rangle \rightarrow -x^2+4=4x-8,\ x\geq\frac{3}{2} \rightarrow 0=4x-8+x^2-4,\ x\geq\frac{3}{2} \rightarrow$$

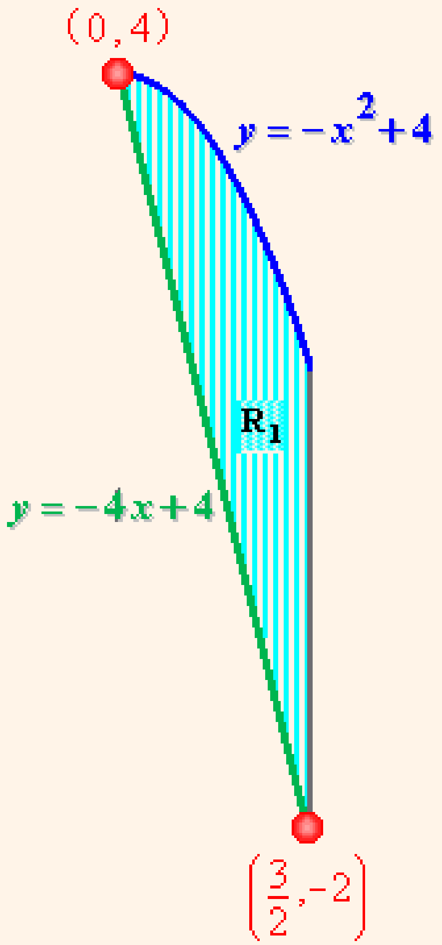
$$\rightarrow x^2+4x-12=0,\ x\geq\frac{3}{2} \rightarrow (x+6)(x-2)=0,\ x\geq\frac{3}{2} \rightarrow x=2 \xrightarrow{y=4x-8} \text{Ptos de Interseção: } (2,0)$$

Cálculo de áreas



Cálculo de áreas

♦ Área da região R_1 :



$$A_1 = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\left(-x^2+4\right)-\left(-4x+4\right)\right) dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2+4x\right) dx =$$

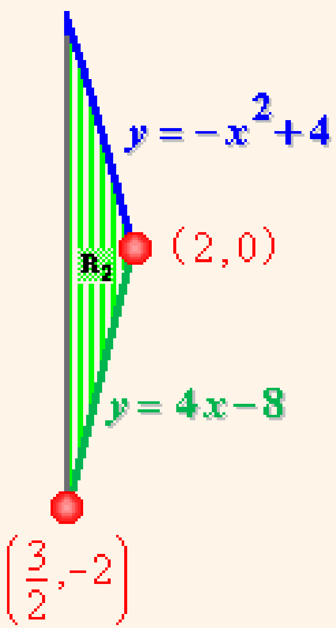
$$= \left(-\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{3}{2}} = \left(-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3}+4\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+4\frac{0^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+4\cdot\frac{3^2}{2\cdot 2^2} = -\frac{3^2}{2^3}+4\cdot\frac{3^2}{2^3} = \frac{3^2}{2^3}(-1+4) = \frac{3^2}{2^3}\cdot 3 = \frac{3^3}{2^3} =$$

$$= \mathbf{\frac{27}{8}}$$

Cálculo de áreas

♦ Área da região R_2 :



$$A_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(\left(-x^2+4\right)-\left(4x-8\right)\right) dx = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(-x^2-4x+12\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+12x\right)\Bigg|_{x=\frac{3}{2}}^{x=2} = \left(-\frac{2^3}{3}-4\cdot\frac{2^2}{2}+12\cdot 2\right)-\left(-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3}-4\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}+12\cdot\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{8}{3}-8+24\right)-\left(-\frac{3^3}{3\cdot 2^3}-4\cdot\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+18\right) = \left(-\frac{8}{3}+16\right)-\left(-\frac{3^2}{2^3}-4\cdot\frac{3^2}{2^3}+18\right) =$$

$$= \left(-\frac{8}{3}+16\right)-\left(-5\cdot\frac{3^2}{2^3}+18\right) = \left(-\frac{8}{3}+16\right)-\left(-\frac{45}{8}+18\right) = -\frac{8}{3}+\frac{45}{8}-2 = \mathbf{\frac{23}{24}}$$

Logo ,

Área da região : $$A = A_1 + A_2 = \frac{27}{8}+\frac{23}{24} = \frac{81+23}{24} = \frac{104}{24} = \mathbf{\frac{13}{3}}$$

- ***Integrais***

1. $\int du = u + c.$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \; n \neq -1.$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c.$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, \; a > 0, \; a \neq 1.$
5. $\int e^u du = e^u + c.$
6. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + c.$
7. $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + c.$
8. $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln |\sec u| + c.$
9. $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln |\operatorname{sen} u| + c.$
10. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + c.$
11. $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln |\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + c.$
12. $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + c.$
13. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + c.$
14. $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + c.$
15. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + c.$

15. $\int \text{cosec}^2 u\, du = -\text{cotg}\, u + c.$

16. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arc\, \text{tg} \frac{u}{a} + c.$

17. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c,\ u^2 > a^2.$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + c.$

19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c.$

20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\, \text{sen} \frac{u}{a} + c,\ u^2 < a^2.$

21. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\ \sec\left|\frac{u}{a}\right| + c.$

• *Identidades Trigonométricas*

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$
2. $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x.$
3. $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x.$
4. $\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$
5. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$
6. $\text{sen}\, 2x = 2\, \text{sen}\, x\ \cos\ x.$
7. $2\ \text{sen}\ x\ \cos\ y = \text{sen}\,(x-y) + sen\,(x+y).$
8. $2\ \text{sen}\ x\, \text{sen}\ y = \cos\,(x-y) - \cos\,(x+y).$
9. $2\ \cos\ x\ \cos\ y = \cos\,(x-y) + \cos\,(x+y).$
10. $1 \pm \text{sen}\, x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

INTEGRAÇÃO EXEMPLO

$$\int \frac{x^3 - 6x + 5}{x}\,dx$$

$$\int \frac{x^3 - 6x + 5}{x}\,dx = \int \left(\frac{x^3}{x} - \frac{6x}{x} + \frac{5}{x} \right) dx = \int \left(x^2 - 6 + \frac{5}{x} \right) dx =$$

$$\int x^2\,dx - 6\int dx + 5\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3} - 6x + 5\ln\left| x \right| + c$$

Método de integração por substituição

$$\int_c^x f(t)dt \qquad u = g(t) \;\Rightarrow\; du = g'(t)dt$$

$$\int_c^x f(t)dt = \int_c^x f[g(t)]g'(t)dt = \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du$$

Método de integração por substituição

Calcule $\int_{-2}^{2} \sqrt{3x+10}\, dx$.

$$\boxed{\begin{array}{c} u = 3x+10 \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = 3 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{3}du = dx \\ x = -2 \;\Leftrightarrow\; u = 3\cdot -2+10 = 4 \\ x = 2 \;\Leftrightarrow\; u = 3\cdot 2+10 = 16 \end{array}}$$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{3x+10}\, dx = \int_{4}^{16} \sqrt{u}\, \frac{1}{3}\, du = \frac{1}{3}\int_{4}^{16} u^{\frac{1}{2}}\, du =$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}16^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}4^{3} - \frac{2}{3}2^{3}\right] = \mathbf{\frac{112}{9}}$$

Método de integração por substituição

$$\int \sec^2 5x dx$$

$$u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{5}du$$

Logo:

$$\int \sec^2 5x dx = \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int \sec^2 u \, du = \frac{1}{5}tg\, u + c$$

$$\int \sec^2 5x dx = \frac{1}{5}tg\,(5x) + c$$

Método de integração por substituição

$$\int ctg\, x\, dx$$

Observe que $ctg\, x = \dfrac{\cos x}{sen\, x}$, assim temos que:

$$\int ctg\, x\, dx = \int \frac{\cos x}{sen\, x} dx = \int \frac{1}{sen\, x} \cos x\, dx$$

$$u = sen\, x \Rightarrow du = \cos x\, dx$$

E finalmente:

$$\int ctg\, x\, dx = \int \frac{\cos x}{sen\, x} dx = \int \frac{1}{sen\, x} \cos x\, dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|senx| + c$$

Método de integração por substituição

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$u = 1 + x^2 \;\Rightarrow\; du = 2x\,dx \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}du = x\,dx$$

Logo:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c}$$

Método de integração por substituição

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

Observe que $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{1+x^4}\,xdx = \int \frac{1}{1+(x^2)^2}\,xdx$

$$u = x^2 \Rightarrow \quad du = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}du = xdx$$

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{1+(x^2)^2}\,xdx = \int \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}arc\ tg\ u + c = \frac{1}{2}arc\ tg\ (x^2) + c$$

Método de integração por substituição

$$\int a^x dx = \int e^{lna^x} dx = \int e^{xlna} dx$$

$$u = x\, lna \Rightarrow \quad du = lna\, dx$$

$$\int e^{xlna} dx = \int e^u \frac{1}{lna} du = \frac{e^u}{lna} + C = \frac{e^{xlna}}{lna} + C$$

Finalmente: $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{lna} + C$

Método de integração por substituição

$$\int a^{5x}dx$$

$$u = 5x \Rightarrow \quad du = 5dx \Rightarrow \quad \frac{1}{5}du = dx$$

$$\int a^{5x}dx = \int a^{u} \cdot \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int a^{u}du = \frac{1}{5} \cdot \frac{a^{u}}{\ln a} + c = \frac{1}{5} \cdot \frac{a^{5x}}{\ln a} + c$$

$$\int a^{x} \cdot e^{x}dx$$

$$\int a^{x} \cdot e^{x}dx = \int (a \cdot e)^{x}dx$$

$$\int a^{x} \cdot e^{x}dx = \int (a \cdot e)^{x}dx = \frac{(ae)}{\ln(ae)} + c$$

Método de integração por substituição

$$\int \cos\left(\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$u=\frac{3}{x} \Rightarrow \quad du=-\frac{3}{x^2}\,dx \Rightarrow -\frac{1}{3}du=\frac{1}{x^2}\,dx$$

E finalmente $\int \cos\left(\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx=\int \cos u\cdot\left(-\frac{1}{3}du\right)=$

$$=-\frac{1}{3}\int \cos u\; du=-\frac{1}{3}sen\; u+c=-\frac{1}{3}sen\left(\frac{3}{x}\right)+c$$

Método de integração por substituição

$$\int \frac{sen\ x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$$

$$u = 1-\cos x \quad \Rightarrow \quad du = sen\ x\ dx$$

$$\int \frac{sen\ x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du = \int u^{-\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\cdot\sqrt{u} + c = 2\sqrt{1-\cos x} + c$$

Método de integração por substituição

$\boldsymbol{x > 0}$

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln \left| u \right| + c = \ln \left| \ln x \right| + c$$

Método de integração por substituição

$$\int \frac{3}{(1+\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}}\,dx$$

Note que $\displaystyle\int \frac{3}{(1+\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}}\,dx = 3\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$1+\sqrt{x} = u \quad\Rightarrow\quad du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad\Rightarrow\quad 2du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Logo $\displaystyle\int \frac{3}{(1+\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}}\,dx = 3\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 3\int \frac{1}{u}\cdot 2du = 6\int \frac{1}{u}\,du =$

$$= 6\ln|u| + c = 6\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + c$$

Método de integração por substituição

Artifício

$$\int \sec x \, dx$$

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \cdot \left(\frac{\sec x + tg\ x}{\sec x + tg\ x} \right) dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot tg\ x}{\sec x + tg\ x} \, dx$$

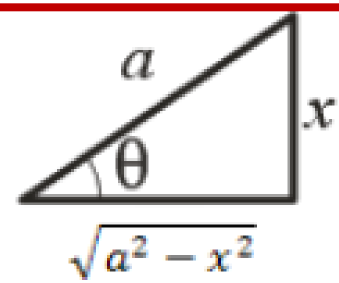
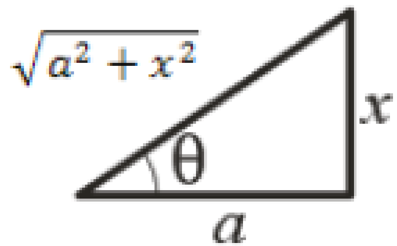
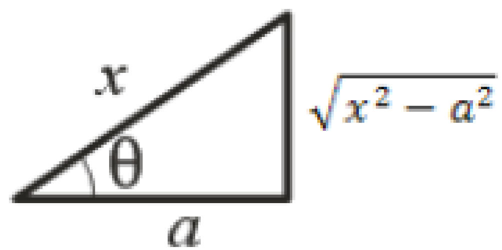
$$\sec x + tg\ x = u \quad \Rightarrow \quad du = (\sec x \cdot tg\ x + \sec^2 x)\, dx$$

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \cdot \left(\frac{\sec x + tg\ x}{\sec x + tg\ x} \right) dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot tg\ x}{\sec x + tg\ x} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + c = \ln |\sec x + tg\ x| + c$$

Integração por substituição trignométrica

Substituição

Caso I $\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\text{sen}(\theta)$	
Caso II $\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\,\text{tg}(\theta)$	
Caso III $\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(\theta)$	

Integração por substituição trignométrica

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$$

Caso 1

$$x = 4\ \mathrm{sen}(\theta)$$

$$dx = 4\cos(\theta)\ d\theta$$

$$\sqrt{16-x^2} = 4\cos\ (\theta)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{4\cos(\theta)\ d\theta}{\left(4\ \mathrm{sen}(\theta)\right)^2 4\cos\ (\theta)} = \frac{1}{16}\int \frac{d\theta}{\mathrm{sen}^2(\theta)}$$

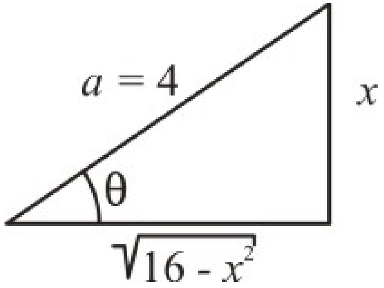
Integração por substituição trignométrica

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = \frac{1}{16}\int \operatorname{cosec}^2(\theta)d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = -\frac{1}{16}\operatorname{cotg}(\theta) + C$$

Agora, reescrevemos o resultado em termos da variável original x. Observando o triângulo retângulo, encontramos a relação:

$$\operatorname{cotg}(\theta) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$$



Assim:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + C$$

Integração por substituição trignométrica

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$ Caso 2

$$x = 2\ \mathrm{tg}(\theta)$$

$$dx = 2\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$\sqrt{4+x^2} = 2\sec(\theta)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2(\theta)\,d\theta}{\left(2\ \mathrm{tg}(\theta)\right)^2 2\sec(\theta)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec(\theta)}{\mathrm{tg}^2(\theta)}\,d\theta$$

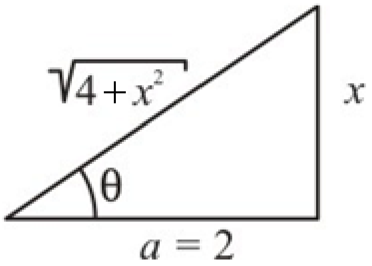
Integração por substituição trignométrica

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{4}\int cotg(x)cosec(x)dx =$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{4}\operatorname{cosec}(\theta) + C$$

Reescrevendo o resultado em termos da variável x e utilizando as relações observadas no triângulo retângulo, fazemos:

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$$



Assim:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4+x^2}}{x} + C = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

Integração por substituição trignométrica

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$$ Caso 3

$$x = a \sec(\theta)$$

$$dx = a \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg}(\theta)$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \int \frac{a \operatorname{tg}(\theta)}{a \sec(\theta)} a \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta)\, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \int a \operatorname{tg}^2(\theta)\, d\theta$$

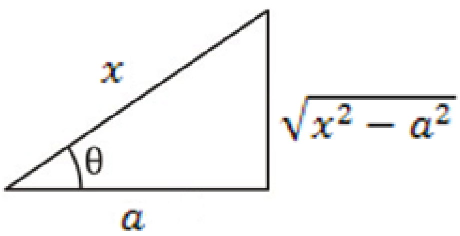
Integração por substituição trignométrica

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = a \int (\sec^2(\theta) - 1)\ d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = a\ \mathrm{tg}(\theta) - a(\theta) + C$$

Vamos reescrever o resultado em termos da variável original x. Observando o triângulo encontramos as relações:

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \quad \text{e} \quad \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$$



Assim:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = a\ \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} - a\ \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\ \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C$$

Método de integração por partes

A fórmula de integração por partes é obtida a partir da regra da derivação do produto de duas funções f e g; considerando $h(x) = f(x)\, g(x)$ temos:

$$h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

Pelo segundo Teorema Fundamental do Cálculo obtém-se

$$\int \big(f(x)g(x)\big)' + C \int f(x)g'(x)\, dx + \int f'(x)g(x)\, dx =$$

ou

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx + C$$

ou numa forma compacta

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du + C$$

Método de integração por partes

$$\int x e^{3x}\, dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{3x}\, dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$uv - \int v\, du = \frac{x e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\, dx + C$$

$$= \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

Método de integração por partes

$$\int x^2 \ln\ x\, dx$$

$$u = \ln\ x \qquad dv = x^2\, dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$uv - \int v\, du \;=\; \frac{x^3 \ln\ x}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx + C$$

$$= \frac{x^3 \ln\ x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Método de integração por partes

$$\int x \sin(5x)\, dx$$

$$u = x \qquad dv = \sin(5x)\, dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{1}{5}\cos(5x)$$

$$\begin{aligned} uv - \int v\, du &= -\frac{x}{5}\cos(5x) - \int -\frac{1}{5}\cos(5x)\, dx + C \\ &= -\frac{x}{5}\cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x)\, dx \; + C \end{aligned}$$

Método de integração por partes

$$\int \arctan(x)\, dx$$

$$u = \arctan(x) \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{1 + x^2}\, dx \quad v = x$$

$$uv - \int v\, du = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1 + x^2}\, dx + C$$

Já feito atrás

Método de integração por partes

$$\int e^{9x}\cos(2x)\,dx$$

$$u = \cos(2x) \qquad dv = e^{9x}\,dx$$

$$du = -2\sin(2x)\,dx \qquad v = \frac{1}{9}e^{9x}$$

$$uv - \int v\,du = \frac{1}{9}e^{9x}\cos(2x) + \int \frac{2}{9}e^{9x}\sin(2x)\,dx + C$$

Método de integração por partes

$$\int e^{9x} sen\,(2x)dx$$

$$u = sen(2x) \qquad dv = e^{9x}dx$$

$$\mathrm{du} = 2cos(2x)dx \qquad v = \frac{1}{9}e^{9x}$$

$$\int e^{9x} cos\,(2x)dx = \frac{1}{9}e^{9x} cos\,(2x) + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{9}e^{9x} sen\,(2x) - \frac{2}{9}\int e^{9x} cos\,(2x)dx\right) + \mathrm{C}$$

$$\boxed{\frac{85}{81}\int e^{9x} cos\,(2x)dx = \frac{1}{9}e^{9x}\left(cos\,(2x) + \frac{2}{9}sen(2x)\right) + \mathrm{C}}$$

$$\boldsymbol{F(x) = \int_0^{x^2} tsent\,dt \;\Rightarrow\; F'(x) = x^2 senx^2 2x}$$

Cálculo já efetuado aplicando os Teoremas Fundamentais do Cálculo

$$u = t \qquad\qquad dv = sent\,dt$$

$$du = dt \qquad\qquad v = -cost$$

$$F(x) = \int_0^{x^2} tsent\,dt = \left[-tcost\right]_0^{x^2} - \int_0^{x^2} -cost\,dt =$$

$$= -x^2\,cosx^2 + \left[sent\right]_0^{x^2} =$$

$$= -x^2\,cosx^2 + senx^2$$

$$F'^{(x)} = -2xcosx^2 + x^2senx^2\,2x + cos\,x^2\,2x$$

$$\boldsymbol{F'^{(x)} = x^2 senx^2\,2x}$$

Primitivação de Expressões Racionais Trignométricas

- Potências de $sen\ x$ e $cos\ x$: $\int sen^n x\, dx$ e $\int cos^n x\, dx$

  com n ímpar ⇒ n-1 é par

$\int sen^n x\, dx = \int sen^{n-1} x\, senx\, dx \qquad sen^2 x = 1 - cos^2 x$

Utiliza-se a substituição $u = cosx$

$\int cos^n x\, dx = \int cos^{n-1} x\, cosx\, dx \qquad cos^2 x = 1 - sen^2 x$

E utiliza-se a substituição $u = senx$

Primitivação de Exp. Racionais Trignométricas

- Exemplo:

$$\int sen^5\, x\, dx = \int sen^4\, x\, senx\, dx =$$

$$= \int (1 - cos^2 x)^2\ \ senx\, dx =$$

$$= \int (1 - 2cos^2 x + cos^4 x)\ \ senx\, dx = (1)$$

$$\boldsymbol{u = cosx \qquad du = -senx\, dx}$$

$$(1) = \int -(1 - 2u^2 + u^4)du = -u + \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

$$= -cosx + \frac{2cos^3 x}{3} - \frac{cos^5 x}{5} + C$$

Primitivação de Expressões Racionais Trignométricas

- **Potências pares de** $senx$ e $cosx$

  Cálculo de $\int sen^n x\, dx$ e de $\int cos^n x\, dx$ com n par

  Utilizam-se as fórmulas da bissecção:

$$sen^2 x = \frac{1 - cos2x}{2}$$

$$cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2}$$

para simplificar a primitiva

Primitivação de Expressões Racionais Trignométricas

- Potências de $sen\ x$ e $cos\ x$: $\int sen^m x\, cos^n\, x\, dx$

  se n é ímpar:

$$\int sen^m x\, cos^n\, x\, dx = \int sen^m x\, \left(cos^2 x\right)^k cosx\, dx$$

Usar a identidade $cos^2 x$=1-$sen^2 x$ e a substituição $\mathbf{u} = senx$

$$\int sen^m x\, cos^n\, x\, dx = \int sen^m x\, \left(cos^2 x\right)^k cosx\, dx$$

$$= \int u^m \left(1 - u^2\right)^k du$$

Primitivação de Exp. Racionais Trignométricas

- Potências de $sen\, x$ e $cos\, x$: $\int sen^m x\, cos^n\, x\, dx$

  se m é ímpar:

$$\int sen^m x\, cos^n\, x\, dx = \int \left(sen^2 x\right)^k cos^n\, x\, senx\, dx$$

Usar a identidade $sen^2 x$=1-$cos^2 x$ e a substituição $\mathbf{u} = cosx$

$$\int sen^m x\, cos^n\, x\, dx = \int \left(sen^2 x\right)^k cos^n\, x\, senx\, d$$

$$= \int u^n \left(1 - u^2\right)^k du$$

- Potências pares: $sen^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$ $\quad e \quad$ $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$

Primitivação de Exp. Racionais Trignométricas

- Exemplo:

$$\int sen^4x\, cos^3x\; dx = \int sen^4x\,(1 - sen^2x)\; cosx\; dx =$$

$$= \int (sen^4x - sen^6x)\; cosx\; dx = (1)$$

$$\mathbf{u = senx \qquad du = cosx\; dx}$$

$$(1) = \int (u^4 - u^6)\; du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{sen^5x}{5} - \frac{sen^7x}{7} + C$$

$$\int e^x senx\, dx = e^x senx - \int e^x cosx\ dx + C = \text{(a)}$$

$u = senx \qquad dv = e^x dx$

$du = cosx\, dx \quad v = e^x dx$

$u = cosx \qquad dv = e^x dx$

$du = -senx\, dx \quad v = e^x dx$

$$\text{(a)} \int e^x senx\, dx = e^x senx - \left(e^x cosx - \int -\mathbf{e^x senx\, dx}\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int e^x senx\, dx = e^x senx - e^x cosx + C$$

$$\Rightarrow \int e^x senx\, dx = \frac{e^x}{2}(senx - cosx) + C$$

$$\int e^x senx\, dx = e^x senx - \int e^x cosx\ dx + C = \text{(a)}$$

$u = senx \qquad dv = e^x dx \qquad u = e^x \qquad dv = cosx\, dx$

$du = cosx\, dx \quad v = e^x dx \qquad du = e^x dx \quad v = senx\, dx$

$$\text{(a)} \Rightarrow \int e^x senx\, dx = e^x senx - \left(e^x senx - \int e^x senx\, dx\right) + C \Rightarrow$$

0=0 ???

Primitivação de Expressões Racionais Trignométricas

- Cálculo de $\int \boldsymbol{tg^m x\, sec^n\, x\, dx}$ **ou** $\int \boldsymbol{cotg^m x\, cosec^n\, x\, dx}$
- **(i) Se m é ímpar**, escrevemos

$$\int \boldsymbol{tg^m x\, sec^n\, x\, dx = \int tg^{m-1} x\, sec^{n-1}\, x\, tgx\, secx\, dx}$$ ou

$$\int \boldsymbol{cotg^m x\, cosec^n\, x\, dx = \int cotg^{m-1} x\, cosec^{n-1}\, x\, cotgx\, cosecxdx}$$

Substitui-se $\boldsymbol{u = secx}$ **ou** $\boldsymbol{u = cosecx}$ e exprime-se $\boldsymbol{tg^{m-1} x}$ ou $\boldsymbol{cotg^{m-1} x}$ em termos de $\boldsymbol{secx}$ **ou** $\boldsymbol{cosecx}$, utilizando a fórmula:

$\boldsymbol{tg^2 x = sec^2\, x}$ -1 ou $\boldsymbol{cotg^2 x = cosec^2\, x}$ -1

Primitivação de Exp. Racionais Trignométricas

- Cálculo de $\int \boldsymbol{tg^m x\, sec^n\, x\, dx}$ **ou** $\int \boldsymbol{cotg^m x\, cosec^n\, x\, dx}$

- **(ii) Se n é par**, escrevemos

$$\int \boldsymbol{tg^m x\, sec^n\, x\, dx} = \int \boldsymbol{tg^m x\, sec^{n-2} x\;\; sec^2 x\, dx} \quad \text{ou}$$

$$\int \boldsymbol{cotg^m x\, cosec^n\, x\, dx} = \int \boldsymbol{cotg^m x\, cosec^{n-2} x\;\; sec^2 x\, dx}$$

Substitui-se $\boldsymbol{u = tgx}$ ou $\boldsymbol{u = cotgx}$ e exprime-se $\boldsymbol{sec^{n-2}\, x}$ ou $\boldsymbol{cosec^{n-2} x}$ em termos de $\boldsymbol{tgx}$ ou $\boldsymbol{cotgx}$, utilizando a fórmula

$$\boldsymbol{sec^2 = 1 + tg^2 x} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{cosec^2 = 1 + cotgx\,^2 x}$$

- **(iii) Se m é par e n é ímpar**, poder-se-á utilizar o método da primitivação por partes.

EXEMPLO

$$\int tg^5x\, sec^3x \;\; dx = \int tg^4x\, sec^2x\, tg\, x\, \sec x\, dx$$

$$= \int (sec^2x \; - 1)^2\, sec^2x\, tg\, x\, sec\, x\, dx$$

$$= \int \left(sec^4x \; - 2sec^2x + 1\right) sec^2x\, tgx\, sec\, x\, dx$$

$$u = \sec x \quad du = \sec x\, tgx\, dx$$

$$\int tg^5x\, sec^3x \;\; dx = \int \left(u^6 \; - 2u^4 \; + u^2\right) du$$

$$\int tg^5x\, sec^3x \;\; dx = \frac{u^7}{7} - 2\,\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C$$

$$\int tg^5x\, sec^3x \;\; dx = \frac{sec^7\, x}{7} - 2\,\frac{sec^5\, x}{5} + \frac{sec^3\, x}{3} + C$$

(iii) Se m é par e n é ímpar, poder-se-á utilizar o método da primitivação por partes

$$\int tg^2x\, secx\ \ dx = \int tgx\, tgx\, secx\ \ dx$$

$$u = \text{tg}\, x \qquad\qquad dv = \sec x\, tgx\, dx$$

$$du = \sec^2 x \qquad\qquad v = \sec x$$

$$\int tg^2x\, secx\ \ dx = secx\, tgx\ - \int sec^3x\, dx + C =$$

$$= secx\, tgx\ - \int (\ tg^2x + 1) secx\, dx + C =$$

$$secx\, tgx\ - \int tg^2x\, secx\ \ dx - ln(tgx + sec) + C$$

$$\Rightarrow \int tg^2x\, secx\ \ dx = \frac{1}{2}\big(secx\, tgx - ln(tgx + sec)\big) + C$$

$$\int tg^2x\, secx\ \ dx = \int(\,sec^2x - 1)sec\, dx = \int(sec^3x - secx)\, dx$$

$$\int secx^3\ \ dx = \int sec^2x\, secx\ \ dx$$

$$u = \sec x \qquad dv = sec^2x$$

$$du = secx\, tgx \qquad v = tg\, x$$

$$\int sec^3x\ \ dx = secx\, tgx\ - \int secx\, tg^2x\, dx + C =$$

$$= secx\, tgx\ - \int secx\, (sec^2x - 1)\, dx + C =$$

$$secx\, tgx\ - \int (sec^3x\, dx + ln(tgx + sec) + C$$

$$\Rightarrow \int sec^3x\ \ dx = \frac{1}{2}(secx\, tgx + ln(tgx + sec)) + C$$

$$\int tg^2x\, secx\ \ dx = \frac{1}{2}\left(secx\, tgx + ln(tgx + sec)\right) -$$

$$ln(tgx + sec) + \mathrm{C}$$

$$\int tg^2x\, secx\ \ dx = \frac{1}{2}\left(secx\, tgx - ln(tgx + sec)\right)$$

Primitivação de Frações Racionais

Uma função racional é representável por um cociente $\frac{a(x)}{b(x)}$ em que $a(x)$ e $b(x)$ são polinómios. Se o grau de $a(x)$ é maior que o grau de b(x) a função racional deve ser simplificada:

$$\frac{a(x)}{b(x)}=\mathrm{q}(\mathrm{x})+\frac{r(x)}{b(x)}$$

Onde o grau de r(x) é menor que o grau de b(x)

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}dx = \int q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{b(x)}dx$$

Primitivação de Frações Racionais

Considere a função $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$, o grau do numerador (=2) é maior que o grau do denominador (=1); dividindo o numerador pelo denominador obtém-se

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+1 & \underline{x-1} \\
\underline{-x^2+x} & x+1 \\
x+1 & \\
\underline{-x+1} & \\
2 &
\end{array}
\qquad
f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}
$$

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx=\int x\ dx+\int 1\ dx+\int \frac{2}{x-1}\ dx=\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$$

Primitivação de Frações Racionais

Consideremos a expressão racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ em que o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$:

Caso 1: $q(x)$ decompõe $-$ se num produto de fatores de grau 1:

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

(i) $a_1, a_2, \ \ldots, a_n$ são todos diferentes. Então

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Primitivação de Frações Racionais

(ii) Existem fatores da forma $(x - a_t)^k$; na decomposição de $\frac{p(x)}{q(x)}$, para além das parcelas correspondentes ás raízes simples, a cada um desses fatores correspondem k parcelas com a forma:

$$\frac{p(x)}{(x-a_t)^k} = \frac{A_{1t}}{(x-a_t)} + \frac{A_{2t}}{(x-a_t)^2} + \ldots + \frac{A_{kt}}{(x-a_t)^k}$$

Exemplo: $\int \frac{1}{x\,(x-1)^2}\, dx$

Primitivação de Frações Racionais

$$\int \frac{1}{x\,(x-1)^2}\,dx$$

$$\frac{1}{x\,(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{\boldsymbol{B}}{x-1} + \frac{\boldsymbol{C}}{(x-1)^{\mathbf{2}}} \Rightarrow$$

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = C$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A \Rightarrow A = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 1 = A + 2B + 2C \Rightarrow 1 = 1 + 2B + 2 \Rightarrow \mathrm{B} = -1$$

$$\frac{1}{x\,(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{\mathbf{-1}}{x-1} + \frac{\mathbf{1}}{(x-1)^{\mathbf{2}}}$$

Primitivação de Frações Racionais

(ii) Existem fatores da forma $(x-a_t)^k$;

$$\frac{p(x)}{(x-a_t)^k}=\frac{A_{1t}}{(x-a_t)}+\frac{A_{2t}}{(x-a_t)^2}+\ldots+\frac{A_{kt}}{(x-a_t)^k}$$

$$\int \frac{1}{x\,(x-1)^2}\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx-\int \frac{1}{x-1}+\int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{dx}=$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

Primitivação de Frações Racionais

$$\int \frac{2x\,(x+1)}{\left(x^2-1\right)^2}\,dx = 2\int \frac{x}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)}\,dx$$

$$\frac{2x(x+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x+1)}{(x^2-1)(x^2-1)} =$$

$$= \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)\ (x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}$$

Primitivação de Frações Racionais

Cálculo da primitiva: $$\int \frac{2x\,(x+1)}{\left(x^2-1\right)^2}\,dx = 2\int \frac{x}{(x-1)^2\,(x+1)}\,dx$$

Decomposição em frações simples:

$$\frac{x}{(x-1)^2\,(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = A\left(x^2-1\right) + B\,(x+1) + C\,(x-1)^2$$

$$x=-1 \Rightarrow 4C=-1 \Rightarrow C=-\frac{1}{4}$$

$$x=1 \Rightarrow 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$x=0 \Rightarrow -A+B+C=0 \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

Primitivação de Frações Racionais

Cálculo da primitiva: $$\int \frac{2x\,(x+1)}{\left(x^2-1\right)^2}\,dx = 2\int \frac{x}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)}\,dx$$

Decomposição em frações simples:

$$\int \frac{2x(x+1)}{(x^2-1)^2}\,dx =$$

$$= 2\left(\int \frac{1/4}{x-1}\,dx + \int \frac{1/2}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1/4}{(x+1)}\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x-1| - \left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

Primitivação de Frações Racionais

Caso 2: tem fatores de grau 2 sem raízes

(i) Cada fator quadrático é simples. Neste caso a cada factor de grau dois, sem raízes reais, ax^2+bx+c corresponde uma parcela da forma: $\dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$

Exemplo: $$\frac{x^2-2x+5}{x^3-1}=\frac{x^2-2x+5}{(x-1)\left(x+x^2+1\right)}=\frac{\frac{4}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}}{x+x^2+1}$$

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(1+x)}{(1+x)(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow A(x^2-x+1)+(Bx+C)(1+x)=1$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)=0x^2+0x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{1+x} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}}$$

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{1+x} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{6}(2x-1)-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}tg\theta \qquad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}sec^2\theta d\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}sec^2\theta}{\frac{3}{4}tg^2\theta+\frac{3}{4}}\,d\theta$$

Primitivação de Frações Racionais

$$\boxed{\frac{1}{(1+x)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{1+x}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}}$$

Continuando $\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}sec^2\theta}{\frac{3}{4}sec^2\theta}d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\theta + C_1$

e $\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = \boxed{-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)} + \boxed{\frac{2\sqrt{3}arctg\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{6}} + C$

$$\int \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}dx = \frac{1}{3}ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{2\sqrt{3}arctg\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{6} + C$$

Primitivação de Frações Racionais

Existem fatores quadráticos múltiplos, isto é, da forma , $(ax^2+bx+c)^k$. A cada um desses fatores correspondem k parcelas da forma:

$$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)^k} = \frac{B_1x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Exemplo: $$\frac{x+2}{x\left(x^2+1\right)^3} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{-2x+1}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Primitivação de Frações Racionais

Fatores quadráticos múltiplos -- $(ax^2+bx+c)^k$
A cada um desses fatores correspondem k parcelas da forma:

$$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)^k} = \frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ ... + \frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Exemplo: $\frac{x+2}{x(x^{2+1})} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^{2+1})^2} + \frac{Ex+G}{(x^{2+1})^3}$

$$\frac{x+2}{x\left(x^2+1\right)^3} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{-2x+1}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Primitivação de Frações Racionais

$$\int \frac{x+2}{x(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{-2x}{(x^2+1)^3} + \frac{1}{(x^2+1)^3}\right)dx$$

$$\int \frac{x+2}{x(x^2+1)}dx = 2lnx - \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2(x^2+1)^2} + \boxed{\int \frac{1}{(x^2+1)^3}}$$

$$x = tg\theta \quad dx = sec^2\theta d\theta \quad \Rightarrow \int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \int \frac{sec^2\theta}{(tg^2\theta+1)^3}d\theta =$$

$$\int \frac{sec^2\theta}{sec^6\theta}d\theta = \int \frac{1}{sec^4\theta}d\theta = \int cos^4\theta\, d\theta$$

$$cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2} \Rightarrow cos^4\theta = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}\frac{cos2\theta}{2} + \frac{cos^2 2\theta}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{cos2\theta}{2} + \frac{1+cos4\theta}{8} = \frac{3}{8} + \frac{cos2\theta}{2} + \frac{cos4\theta}{8}$$

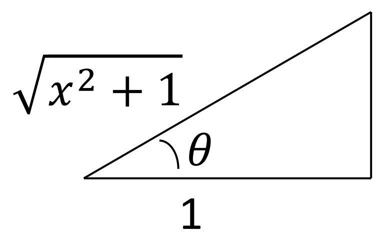
$$\int \frac{x+2}{x(x^2+1)}dx = \mathbf{2lnx} - \ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2(x^2+1)^2} + \int \frac{1}{(x^2+1)^3}$$

$$\int cos^4\theta\, d\theta = \int \frac{3}{8} + \frac{cos2\theta}{2} + \frac{cos4\theta}{8} d\theta = \frac{3}{8}\theta + \frac{sen2\theta}{4} + \frac{sen4\theta}{32} + C_1$$

θ=arctg x $\quad$ sen$\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad e \;\; cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad \boldsymbol{sen2\theta = 2sen\theta cos\theta}$

$$\boldsymbol{sen4\theta} = 2sen2\theta cos2\theta = \boldsymbol{4\, sen\theta cos\theta\left(2cos^2\theta - 1\right)}$$

Finalmente obtém-se:



$x = tg\theta$

$$\int \frac{x+2}{x(x^2+1)}dx = \mathbf{2lnx} - \boldsymbol{ln\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}arctgx + \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{x(1-x^2)}{8(x^2+1)^2} + C$$