Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação
EIC0004 ANÁLISE MATEMÁTICA – 2017/2018 – 1º Semestre
3º Mini-Teste – 9 Janeiro 2018
Duração da prova : 1h30m

Teste sem consulta. Faça cada GRUPO em folhas separadas.
Não é permitida a utilização de máquina de calcular com capacidade gráfica.
Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar.
Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala.
A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste.

GRUPO I

1. Seja $f(t)$ uma função contínua com transformada de Laplace dada por $F(s)$.
Aplicando a definição de transformada de Laplace, mostre que a transformada de Laplace da função

$$f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0 & ,0 < t < a \\ f(t-a) & ,\ t > a \end{cases}$$

é dada por $\mathcal{L}\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}\,F(s)$.

2. Utilizando as técnicas das transformadas de Laplace, resolva os seguintes problemas de valores iniciais:

a) $y'' - 2y' - 8y = 8, \quad y(0) = 3$ e $y'(0) = -6$.

b) $y'' + y = \begin{cases} 0 & ,\ 0 < t < 1 \\ e^t & ,\ t > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

GRUPO II

3. a) Determine o polinómio de Taylor de grau n que aproxima a função

$f(x) = \ln(x+1)$ na vizinhança do ponto *a=0.*

b) Usando o resultado da alínea anterior, determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x) = x\ln(x+1)$ na vizinhança do ponto *a=0.* Analise a convergência absoluta da série e indique o intervalo de valores de x para o qual a série se diz absolutamente convergente. Enuncie o critério de convergência considerado.

4. Analise a convergência ou divergência das seguintes séries, justificando de forma conveniente:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}[e^n(1-e)]$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n^2+n} + sen\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

(v.s.f.f.)

GRUPO III

5. Considere a função $f(x)$ de período π,

$$f(x) = |x|\,, \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$$

a) Esboce o gráfico da função no intervalo $-\frac{3\pi}{2} < x < +\frac{3\pi}{2}$.

b) Determine os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$: a_0, a_n e b_n.

c) Escreva a fórmula geral da série de Fourier de $f(x)$.

Tabela de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
3	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s > 0$
4	$t^n,\ n \in \mathbf{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
5	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	$s > \gamma + a$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
7	$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s > 0$
8	$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s > 0$
9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
11	$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
12	$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$
13	$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n [F(s)]^{(n)}$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \qquad \mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$