

Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste. O uso de Laplace tem cotação nula.

Nome COMPLETO: _____

GRUPO I - Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista:** **1.0** valores por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta **0.5** valor na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4	5

1. Se o valor do integral impróprio $\int_{\ln(\pi)}^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{\pi}$, o valor do integral impróprio $\int_{\ln(\pi)}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ será:

- (a) *divergente* (b) $> \frac{1}{\pi}$ (c) $< \frac{1}{\pi}$ (d) $\frac{2}{\pi}$

2. Qual das seguintes expressões é solução da equação diferencial ordinária $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$?

- (a) $y(x) = x^4$ (b) $y(x) = x^3$ (c) $y(x) = x^2$ (d) $y(x) = x^{-2}$

3. Qual o valor do integral definido $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$?

- (a) $\ln \frac{4}{9}$ (b) $\ln \frac{4}{3}$ (c) *diverge* (d) $2 \ln \frac{4}{9}$

4. Qual o valor do integral definido $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$?

- (a) -2 (b) *diverge* (c) 2 (d) 0

5. Seja $a^2 \lambda^2 - 4a\lambda + 4 = 0$, para $a > 0 \in \mathbb{R}$, a equação característica de uma determinada equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem de coeficientes constantes homogénea. Qual das seguintes expressões é solução geral dessa EDO?

- (a) $y(x) = C_1 e^{-\frac{2}{a}x} \cos(2x) + C_2 e^{-\frac{2}{a}x} \sin(2x)$ (b) $y(x) = C_1 e^{\frac{2}{a}x} + C_2 e^{-\frac{2}{a}x}$
 (c) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ (d) $y(x) = C_1 e^{\frac{2}{a}x-1} + C_2 x e^{\frac{2}{a}x-1}$

GRUPO II

6. [2] Calcule o seguinte integral usando técnicas apropriadas:

$$\int \frac{2x^2}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

7. [3] Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$xy' = \frac{y \ln x}{1 + 2y^2}$$

Calcule ainda a solução para $y(1) = 1$.

8. [2.5] Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$xy' - y = -(\ln x) y^2$$

GRUPO III

9. [2.5] Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$e^x y' + e^x y = \sec^2 x$$

10. [3] Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

- (a) Calcule a solução homogênea da equação diferencial ordinária;
- (b) Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária.

11. [2] Classifique quanto à sua espécie o seguinte integral impróprio:

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x - 1)^p} dx$$

Determine para quais valores de p o integral impróprio converge ou diverge e, no caso de convergência, calcule o seu valor. Justifique de forma conveniente todos os cálculos efectuados.