

Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste. O uso de Laplace tem cotação nula.

Nome **COMPLETO**: _____

GRUPO I - Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista:** 1.0 valores por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta 1/3 valor na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | | |

1. Classifique quanto à sua espécie o seguinte integral impróprio: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$:

- (a) 3^a e $p \geq 0$ (b) 2^a e $p \leq 0$ (c) 3^a (d) 1^a e $p \geq 0$

2. Qual das seguintes expressões é solução da equação diferencial ordinária $y'' + \frac{2x^2 - 1}{x}y' = 0$?

- (a) $y(x) = Ae^{-x^3} + B$ (b) $y(x) = Ae^{-x^2} + B$ (c) $y(x) = Ae^x + B$ (d) $y(x) = Ae^{x^2} + B$

3. Qual o valor do integral definido $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{(x+1)(x-1)} dx$?

- (a) $\ln \frac{1}{2}$ (b) *diverge* (c) $\frac{1}{2} \ln 2$ (d) $\ln 2$

4. Qual o valor do integral definido $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sec^2 x dx$?

- (a) -2 (b) *diverge* (c) 1 (d) 0

5. Indique uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem de coeficientes constantes homogénea que tenha soluções $y_1(x) = 3e^{2x}$ e $y_2(x) = \pi x e^{2x}$

- (a) $y'' - 4y = 0$ (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (c) $y'' + 4y = 0$ (d) $y'' + 4y' + 4y = 0$

GRUPO II

6. [3] Calcule o seguinte integral usando técnicas apropriadas:

(a) $\int x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$

(b) $\int \frac{2x^2}{(x-1)(x^2+1)} dx$

7. [2.5] Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$e^{\cos x} y' = 2 \sin x e^{\cos x} y + \frac{1}{e^{\cos x}}$$

Calcule ainda a solução para $y(0) = 1$.

8. [2] Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$(2y - x)y' = y - x$$

GRUPO III

9. [2.5] Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{1}{x(y^3 + y^2)} y' = \frac{1}{y x^4}$$

10. [3] Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' - 2y' + y = 6e^{-x}$$

- (a) Calcule a solução homogénea da equação diferencial ordinária;
- (b) Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária.

11. [2] Classifique quanto à sua espécie o seguinte integral impróprio:

$$\int_0^{+\infty} \ln(x^p) dx$$

Determine para quais valores de p o integral impróprio converge ou diverge e, no caso de convergência, calcule o seu valor. Justifique de forma conveniente todos os cálculos efectuados.