Unidade Curricular: EIC0004 Análise Matemática - MIEIC 2017/2018

- **Polinómio de Taylor e fórmula de Taylor com resto de Lagrange**
- **Série de Taylor**
- **Séries numéricas e Critérios de convergência**

Bibliografia:

Carlos A. Conceição António; Análise Matemática 1 - Conteúdo teórico e aplicações, AEFEUP, 2017. ISBN: 978-989-98632-3-1 - pág 26 - 60

- **Séries de Trigonométricas e Séries de Fourier**
- **(Apoio das aulas : slides disponibilizados pela professora)**

Novembro / Dezembro 2017 - Prof. Catarina Castro (M304)

Polinómio de Taylor e fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Bibliografia:

Carlos A. Conceição António; Análise Matemática 1 - Conteúdo teórico e aplicações, AEFEUP, 2017. ISBN: 978-989-98632-3-1 - pág 26 - 38

4. APROXIMAÇÃO POLINOMIAL E FÓRMULA DE TAYLOR

4.1 INTRODUÇÃO

Numa abordagem elementar da Aproximação Polinomial pode-se formular a questão central nestes termos: dada uma função real f de variável real x, como se pode calcular um valor aproximado da função no ponto $x=a$ usando uma função polinomial $P(x)$?

$$\underset{valor\ real}{f(a)=?} \quad \leftarrow \quad \underset{valor\ aproximado}{P(a)}$$

Por outras palavras,

(i) Como encontrar P(x) ?

(ii) Qual a precisão da aproximação ?

<u>Teorema:</u> Polinómio de Taylor de grau n

Suponha-se que existem as derivadas até à ordem n da função $f(x)$ no ponto $x = a$. Seja $P_{n,a}(x)$ o polinómio de grau n

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Então os valores de $P_{n,a}(x)$ e das suas derivadas até à ordem n, em $x = a$, coincidem com os respectivos valores de f e das suas n derivadas nesse ponto. Este facto é representado pelas equações (4.3).

(4.7)

Teorema : Fórmula de Taylor com Resto (de Lagrange)

Suponha-se que existem as derivadas até à ordem $n + 1$ da função $f(x)$ num intervalo I contendo a. Então para cada x em I existe um z entre x e a tal que

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)\,(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}\,(x-a)^2$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)\,!}\,(x-a)^{n+1}$$

(4.12)

Série de Taylor

Bibliografia:

Carlos A. Conceição António; Análise Matemática 1 - Conteúdo teórico e aplicações, AEFEUP, 2017. ISBN: 978-989-98632-3-1 - pág 39 - 45

5. SÉRIE DE TAYLOR COMO LIMITE DOS POLINÓMIOS DE TAYLOR

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \qquad (5.6)$$

A série de Taylor faz parte da família das **séries de potências** (potência em *(x-a)*).

ii) **Séries de Taylor:**

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad (5.8)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \qquad (5.9)$$

$$sen\, x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \qquad (5.10)$$

Séries numéricas e Critérios de convergência

Bibliografia:

Carlos A. Conceição António; Análise Matemática 1 - Conteúdo teórico e aplicações, AEFEUP, 2017. ISBN: 978-989-98632-3-1 - pág 45 - 60

6. SÉRIES NUMÉRICAS

A partir duma sucessão de números reais pode-se formar uma *nova* sucessão através da adição sucessiva dos seus termos. Considerando a sucessão de termos

$$a_1 \, , \, a_2 \, , \, \ldots \, , \, a_n \, , \ldots \, ,$$

pode-se formar a sucessão das somas parciais

$$s_1 = a_1 \, , \qquad s_2 = a_1 + a_2 \, , \qquad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \, , \ldots \, ,$$

vindo para a soma s_n a expressão

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{6.1}$$

A sucessão das somas parciais $\{ s_n \}$ é designada como uma *série infinita* ou simplesmente uma série e representa-se por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad , \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{6.2}$$

Séries Numéricas e Análise de Convergência

À série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ temos associadas *duas sucessões*:

- (a_n), a partir da qual definimos a série;
- (S_n), a sucessão das suas somas parciais.

A natureza da série é determinada pela convergência ou não da sucessão das suas somas parciais.

O facto de (a_n) ser convergente *não garante* que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seja convergente.

séries telescópicas

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\mathrm{b}_n - \mathrm{b}_{n+1}) \qquad \text{e} \qquad S_n = \mathrm{b}_n - \mathrm{b}_{n+1}\,.$$

- se b_n é convergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(\mathrm{b}_n - \mathrm{b}_{n+1})$ é convergente e a sua soma é $S = \mathrm{b}_n - \lim \mathrm{b}_n$;
- se b_n é divergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(\mathrm{b}_n - \mathrm{b}_{n+1})$ é divergente.

Exemplo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$

Chama-se **série geométrica de razão** r à série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + \cdots ,$$

em que r é um número real.

- se $|r| < 1$, a série geométrica é convergente e a sua soma é $S = \frac{1}{1-r}$;
- se $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

Para a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

pelo que a série é convergente e a sua soma é 2

A série harmónica de ordem p

Para todo o $p \in \mathbb{R}$ existe uma **série harmónica** com a forma, cuja **natureza** depende do valor de p.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}}$$

Para $p \leq 0$, a **sucessão dos termos** $(1 / n^p) \to +\infty$, pelo que a série harmónica é **divergente**.

Para $p = 1$, trata-se da **série harmónica básica**. Como a função $f(x) = 1/x$ definida em $[1, +\infty[$ é sempre decrescente, pelo **critério do integral**, esta série tem a mesma natureza do integral impróprio,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

que sabemos ser divergente.

Pelo critério do integral, a série harmónica de ordem p tem a natureza do integral impróprio, a **série harmónica de ordem** p,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \textbf{converge} & \text{se } p > 1 \\ \textbf{diverge} & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$$

Séries de Termos Não Negativos

Definição: Uma **série** $\sum a_n$ diz-se **de termos não negativos** se $a_n \geqslant 0$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$.

Nota: Neste caso, a sucessão (S_n) é crescente.

Séries de Termos sem Sinal Fixo

Definição: Uma **série** diz-se de **termos sem sinal fixo** se possui infinitos termos positivos e infinitos termos negativos.

Sendo $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, a série (de termos sem sinal fixo)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

diz-se uma **série alternada**

TESTE	SÉRIE	CONVERG. / DIVERG.	COMENTÁRIOS
nºº termo	$\sum a_n$	Diverge se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Inconclusivo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Série geométrica	$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$	(i) Converge com $S = \frac{a}{1-r}$ se $\lvert r\rvert < 1$ (ii) Diverge se $\lvert r\rvert \geq 1$	Útil para testes de comparação se o termo a_n é *análogo* a ar^{n-1}.
Série-p	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	(i) Converge se $p > 1$. (ii) Diverge se $p \leq 1$	Útil para testes de comparação se o termo a_n é *análogo* a $1/n^p$.
Comparação	$\sum a_n, \sum b_n$ $a_n > 0, b_n > 0$	(i) Se $\sum b_n$ converge e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ converge. (ii) Se $\sum b_n$ diverge e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ diverge. (iii) Se $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = c > 0$, ambas as séries convergem ou ambas divergem.	A série de comparação $\sum b_n$ é em geral uma série geométrica ou uma série-p. Para achar b_n em (iii), considere apenas os termos de a_n que têm maior efeito sobre a magnitude.
Razão	$\sum a_n$	Se $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = L$ (ou ∞) a série (i) converge (absolutamente) se $L < 1$ (ii) diverge se $L > 1$ (ou ∞)	Inconclusivo se $L = 1$ Útil se a_n envolve fatoriais ou potências de grau n. Se $a_n > 0$ para todo n, pode-se desprezar o sinal de valor absoluto.
Raiz	$\sum a_n$	Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = L$ (ou ∞) a série (i) converge (absolutamente) se $L < 1$ (ii) diverge se $L > 1$ (ou ∞)	Inconclusivo se $L = 1$ Útil se a_n envolve potências de grau n. Se $a_n > 0$ para todo n, pode-se desprezar o sinal de valor absoluto.
Séries alternadas	$\sum (-1)^n a_n$ $a_n > 0$	Converge se $a_k \geq a_{k+1}$, para todo k e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	Aplicável somente a séries alternadas.
$\sum \lvert a_n\rvert$	$\sum a_n$	Se $\sum \lvert a_n\rvert$ converge, então $\sum a_n$ converge	Útil para séries que contenham termos positivos e termos negativos.

Tabela 6.1 Resumo dos testes de convergência e divergência de séries.

Séries Numéricas e Análise de Convergência

Condição necessária de convergência

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente então $a_n \to 0$.

Ou seja,

se (a_n) não tende para zero, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

A afirmação recíproca é falsa:

$a_n \to 0$ não implica que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Exemplo. *Analise-se a convergência da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Tem-se $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

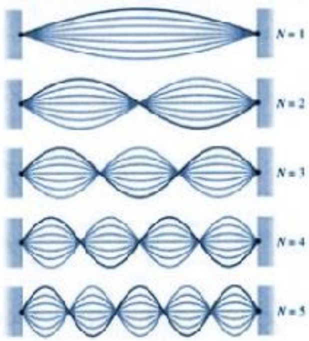
$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{e} \quad s_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$$

a sucessão s_n é divergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Este exemplo mostra que a condição $a_n \longrightarrow 0$ é uma condição necessária de convergência mas não é condição suficiente, pois $a_n \longrightarrow 0$ e a série é divergente.

A **série harmónica** mais simples tem a forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$



O nome tem origem na **música**, onde representa obtidas pela vibração de uma corda, pressionada em diferentes pontos.

A série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente*

divergência da série harmónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \to \infty$$

foi utilizado o **critério de comparação**.

Critério do Integral *para séries de termos não negativos*

Seja (a_n) *uma sucessão de termos não negativos e* f *uma função definida no intervalo* $[1, +\infty[$ *e tal que, para todo o* $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{f(n) = a_n}$.

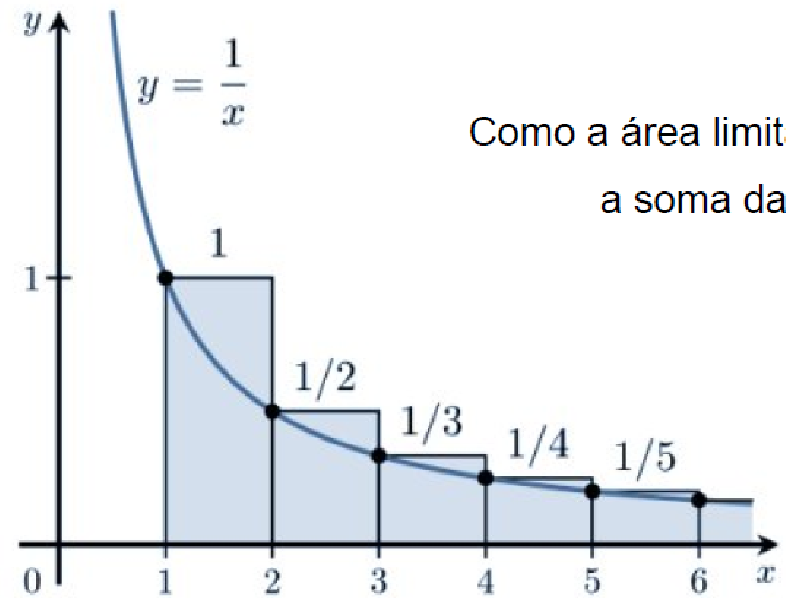
Se f *é decrescente no intervalo* $[1, +\infty[$, *então*

a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e o integral impróprio* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *têm a mesma natureza.*

relação entre a série harmónica básica e o integral impróprio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$



Como a área limitada pela curva é **infinita**, a soma das áreas dos rectângulos também é **infinita**.

Exemplo: A série harmónica alternada, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, é convergente.

Considere-se por exemplo a série

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad (6.25)$$

que é convergente para $-1 < x \leq 1$ e em particular para x positivo é uma série alternada.

Fazendo x=1 obtém-se uma série harmónica alternada,

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \quad (6.26)$$

Séries de Termos sem Sinal Fixo

Definição: Uma **série** diz-se de **termos sem sinal fixo** se possui infinitos termos positivos e infinitos termos negativos.

Sendo $a_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}$, a série (de termos sem sinal fixo)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$

diz-se uma **série alternada**

Passemos ao caso geral da **série harmónica alternada de ordem *p***. Para todo o $p \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^p}$$

Trata-se de uma **série alternada**, pois $\frac{1}{n^p} > 0$ para $n \geq 1$.

Para $p < 0$ como **não existe o limite**, $\lim_{n \to +\infty}(-1)^n \frac{1}{n^p}$ a série harmónica é **divergente**.

para ***p* > *1*** a série *p* é **absolutamente convergente**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$ é **convergente** se ***p* > *1*** e **divergente** se ***p* ≤ *1***.

para ***0* < *p* ≤ *1***

a **sucessão** $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ é **monótona decrescente** e **limite igual a zero**.

condições para a aplicação do **critério de Leibniz**, podemos concluir que a **série dada é convergente**. E como sabemos que a série dos módulos é divergente, acrescentar que é **simplesmente convergente**.

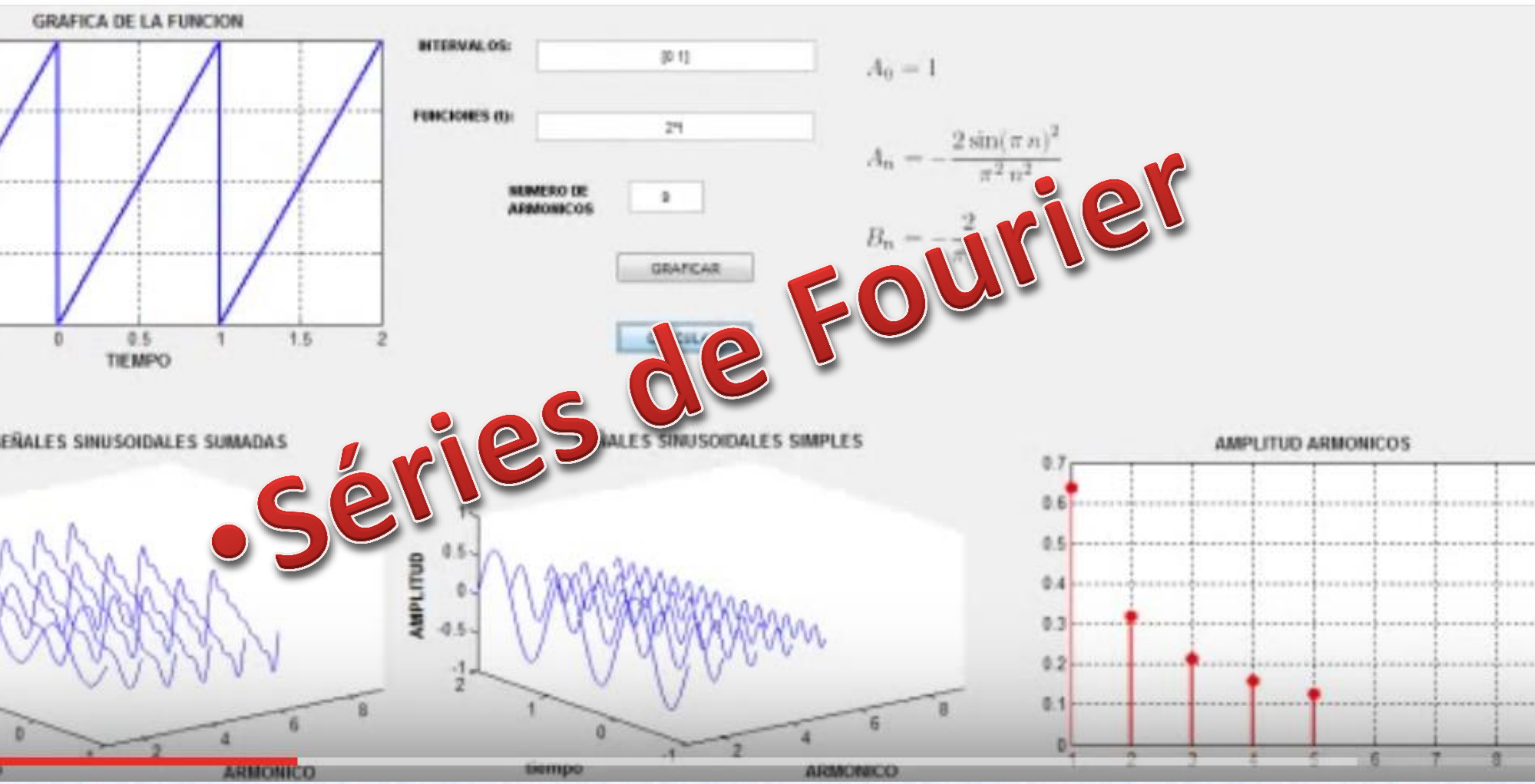
para **$p > 1$** a série p é **absolutamente convergente**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$ é **convergente** se **$p > 1$** e **divergente** se **$p \leq 1$**.

Séries Absolutamente Convergentes

Definição: Uma série $\sum a_n$ diz-se **absolutamente convergente** se a série dos módulos $\sum |a_n|$ é convergente.

•Séries de Fourier



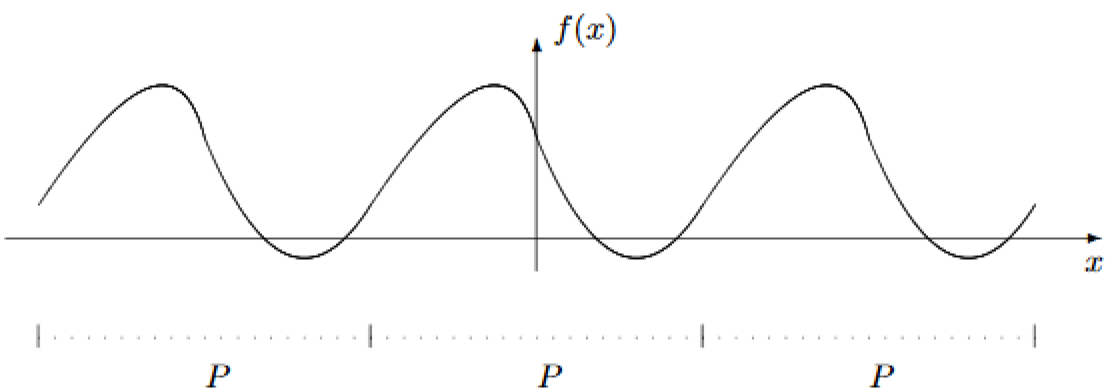
Funções Periódicas e Séries de Fourier

Funções Periódicas

Uma função f é periódica se existe um número real positivo P, período de f, tal que

$$f(x) = f(x + P),$$

para todo x no domínio de f. O gráfico de uma função periódica é obtido pela repetição de qualquer intervalo de comprimento P



- O período P é o comprimento do intervalo em x necessário para a imagem da função se repetir.

- a frequência F de uma função periódica é definida como o inverso de seu período

$$F = \frac{1}{P}$$

e dá o número de repetições (ciclos) em cada intervalo unitário em x. Se x é medido em segundos então a frequência F é o número de ciclos por segundo (Hertz).

- Um outro tipo de frequência, a utilizar no estudo das Séries de Fourier, frequência angular, ω, e definida como

$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{P}.$$

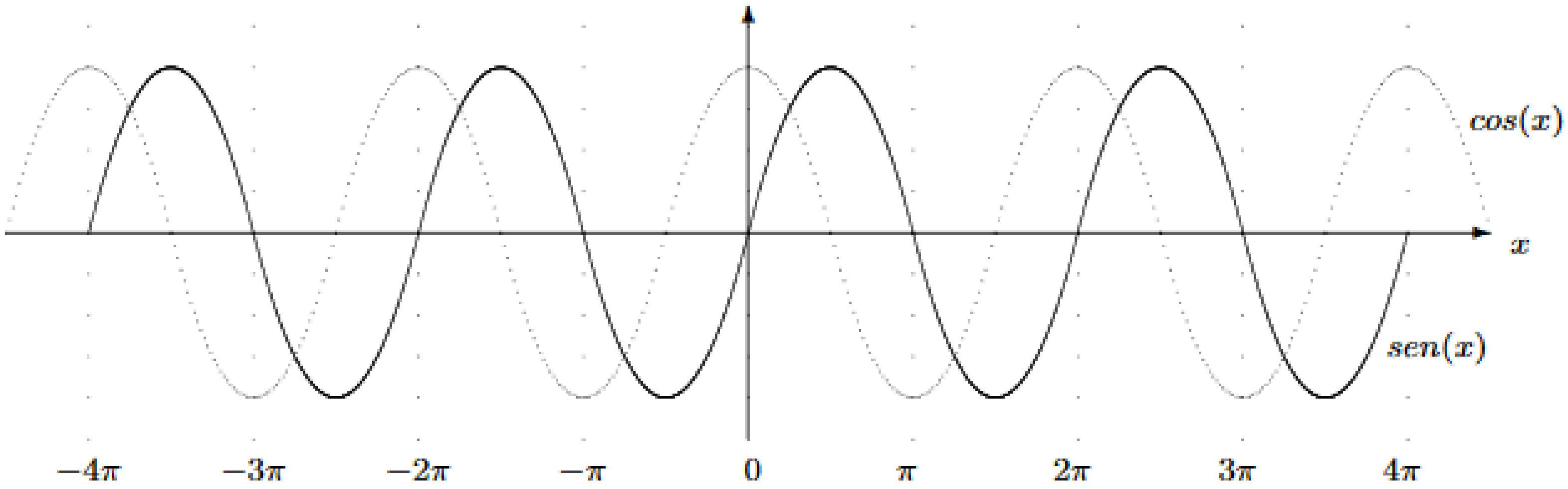
- Se T é o periodo fundamental de f, então sua frequência (angular) fundamental, ω_0, é dada por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Exemplo *A função $f(x) = sen(x)$ é periódica com período fundamental $T = 2\pi$ e frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$*

A função $f(x) = cos(x)$ *é periódica com período fundamental* $T = 2\pi$ *e frequência fundamental* $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

A função $f(x) = sen(x)$ *é periódica com período fundamental* $T = 2\pi$ *e frequência fundamental* $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$



Exemplo *as funções* $sen(x)$ *e* $cos(x)$ *possuem ambas período* 2π, *observamos que:*

(i) $sen(2x)$ *e* $cos(2x)$ *possuem período* $\frac{2\pi}{2} = \pi$;

(ii) $sen(\frac{x}{2})$ *e* $cos(\frac{x}{2})$ *possuem período* $2 \times 2\pi = 4\pi$.

(iii) $sen(2\pi x)$ *e* $cos(2\pi x)$ *possuem período* $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$;

(iv) $sen(\frac{2\pi x}{T})$ *e* $cos(\frac{2\pi x}{T})$ *possuem período* $\frac{2\pi}{2\pi} T = T$.

Além disto, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, *as funções*

$$sen(\frac{2n\pi x}{T}) \text{ e } cos(\frac{2n\pi x}{T})$$

possuem período

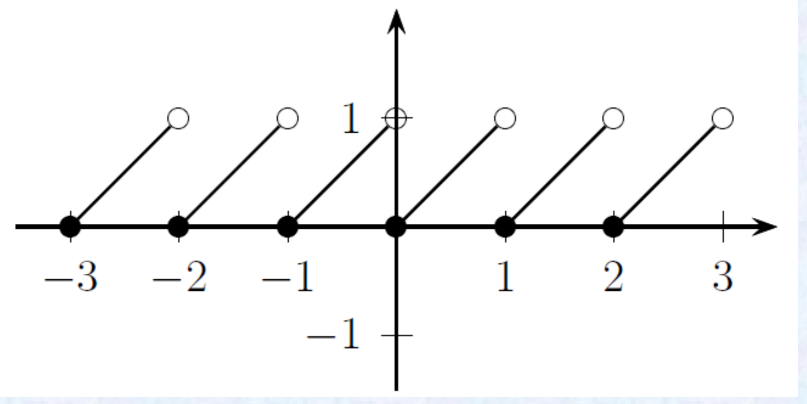
$$\frac{2\pi}{2n\pi} T = \frac{T}{n}.$$

Mas como qualquer múltiplo inteiro do período também é período, a função

$$h(x) = \alpha_1 sen\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + \alpha_2 cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

também é periódica de período T.

Exemplo 2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa o maior inteiro que não excede x é periódica com período 1.



Séries de Fourier

decompor funções arbitrárias em termos de funções trigonométricas simples

Definição

Uma série trigonométrica é uma série da forma

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right]$$

Seja f uma função periódica de período $2L$, ou seja $f(t+2L) = f(t)$ para todo t,

satisfaz às seguintes condições, conhecidas como as **condições de Dirichlet:**

- A função é unívoca e contínua exceto em um número finito de descontinuidade ordinárias dentro do período 2L;
- A função tem um número finito de máximos e mínimos dentro do período 2L;
- A função é absolutamente integrável, ou seja, a integral $\int_0^{2L} |f(t)|\, dt$ converge;

Uma série trigonométrica é uma série da forma

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right]$$

Série de Fourier da função periódica de período $2L$

Seja f uma função periódica de período $2L$, ou seja $f(t+2L) = f(t)$ para todo t,

define-se a Série de Fourier da função f como a série trigonométrica dada pelos coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(t)\, dt,\ a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt,\ n \geq 1 \text{ e } b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt\ ,\ n \geq 1$$

como f periódica de período $2L$, o intervalo de integração pode ser qualquer intervalo de comprimento $2L$, sendo que geralmente são utilizados $[0, 2L]$ ou $[-L, L]$.

Os coeficientes a_n, $n \geq 0$ e b_n, $n \geq 1$ são conhecidos como coeficientes de Fourier.

Série de Fourier da função periódica de período $2L$

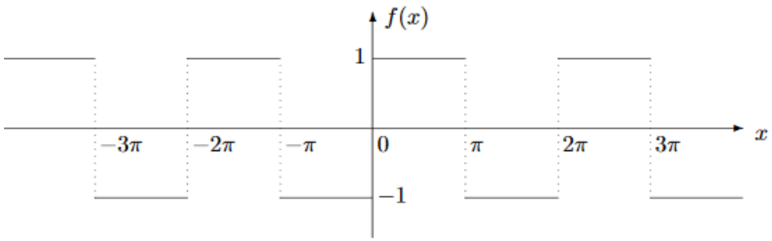
$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]$$

Exemplo

2π-periódica

$$g(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0 \\ +1, & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Onda Quadrada - Período 2π.



encontramos os seguintes coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0\,,$$

Componente DC

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right)dt = 0$$

Componente PAR

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right)dt = \frac{-2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}$$

Componente ÍMPAR

Logo, a série de Fourier de g é dada por

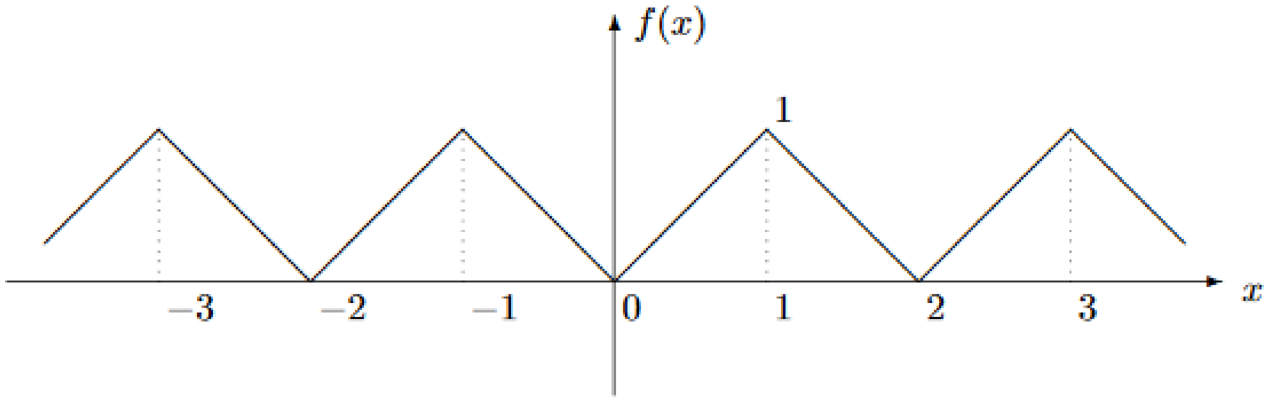
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}\cdot \text{sen}(nt)$$

Exemplo 2:

Série de Fourier da função periódica de período $2L$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Onda Triangular - Período 2.



$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad -1 \leq x < 0 \\ x & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad , \quad f(x+2) = f(x).$$

- *Cálculo de a_0:*

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} -x dx + \int_{0}^{1} x dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\left[0 - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

- *Cálculo de a_n:*

$$
\begin{aligned}
a_n = &\int_{-1}^{1} f(x)cos(n\pi x)dx \\
= &\int_{-1}^{0} -x\,cos(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} x\,cos(n\pi x)dx
\end{aligned}
$$

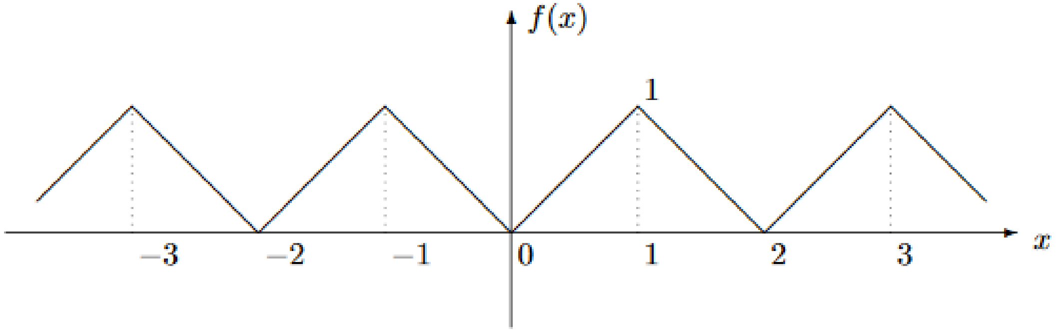
$$
\begin{aligned}
a_n &= -\left[\frac{x}{n\pi}\,sen(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}\,cos(n\pi x)\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x}{n\pi}\,sen(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2}\,cos(n\pi x)\right]_{0}^{1} \\
&= -\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\,cos(0) + \frac{1}{n\pi}\,sen(-n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2}\,cos(-n\pi)\right] + \left[\frac{1}{n\pi}\,sen(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2}\,cos(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2}\,cos(0)\right] \\
&= -\left[\frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}\,cos(n\pi)\right] + \left[\frac{1}{n^2\pi^2}\,cos(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2}\right] = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[cos(n\pi) - 1\right]
\end{aligned}
$$

- *Cálculo de b_n:*

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x) sen(n\pi x) dx$$
$$= \int_{-1}^{0} -x\, sen(n\pi x) dx + \int_{0}^{1} x\, sen(n\pi x) dx$$

$$b_n = -\left[-\frac{x}{n\pi} cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} sen(n\pi x)\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x}{n\pi} cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} sen(n\pi x)\right]_{0}^{1}$$
$$= -\left[\frac{1}{n^2\pi^2} sen(0) - \frac{1}{n\pi} cos(-n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2} sen(-n\pi)\right] + \left[-\frac{1}{n\pi} cos(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2} sen(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2} sen(0)\right]$$
$$= \frac{1}{n\pi} cos(n\pi) - \frac{1}{n\pi} cos(n\pi) = 0$$

Onda Triangular - Período 2.



$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad -1 \leq x < 0 \\ x & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad , \quad f(x+2) = f(x).$$

Série de Fourier desta onda triangular tem a forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\pi x) \quad = \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[cos(n\pi) - 1\Big] cos(n\pi x)$$

isto é, temos apenas termos para valores ímpares de n. Assim,

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} cos(\pi x) - \frac{4}{9\pi^2} cos(3\pi x) - \frac{4}{25\pi^2} cos(5\pi x) - \frac{4}{49\pi^2} cos(7\pi x) + \ldots$$

ou, reescrevendo-a na forma de somatório

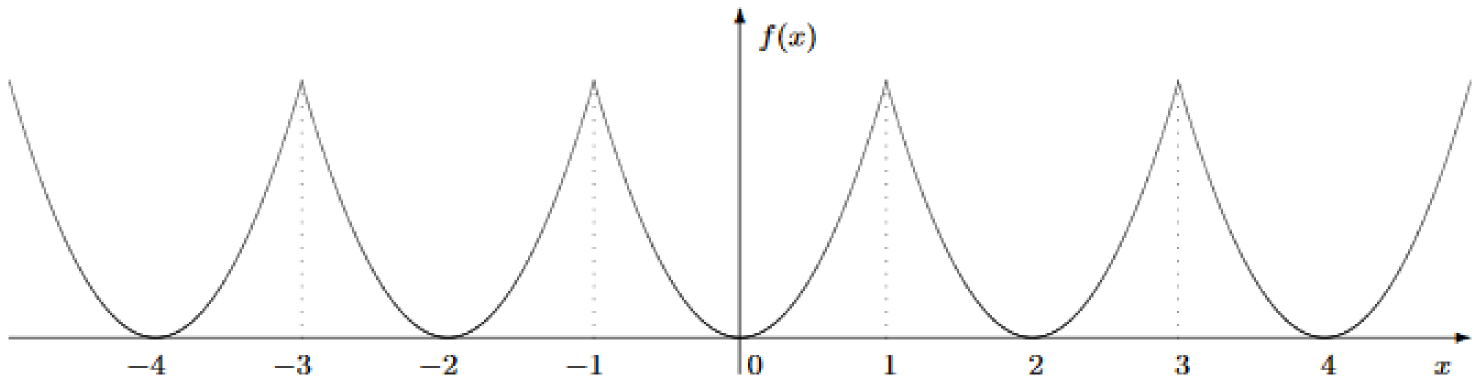
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} cos\left[(2k-1)\pi x\right].$$

Exemplo 3:

Série de Fourier da função periódica de período $2L$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

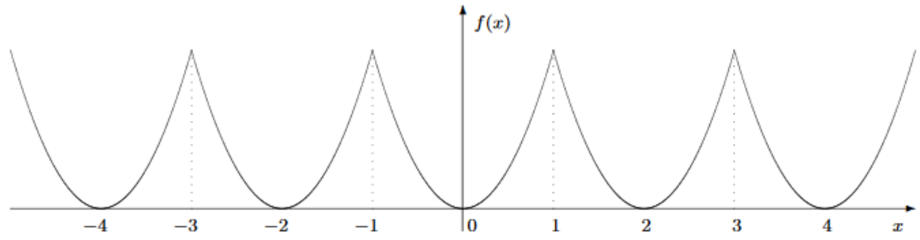
Função periódica $f(x) = x^2, \quad -1 \leq x < 1$, Período 2.



- *Cálculo de a_0: substituindo $T = 2$, $L = 1$*

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x)dx \qquad a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Função periódica $f(x) = x^2, \quad -1 \le x < 1$, Período 2.



- *Cálculo de a_n: substituindo $T = 2,\ L = 1$ obtemos*

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 cos(n\pi x)dx.$$

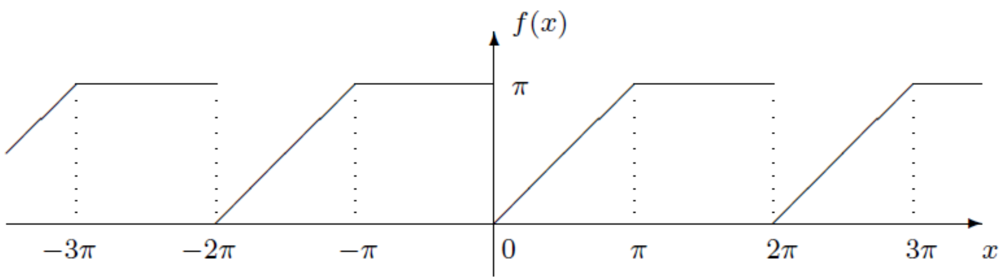
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2}\left[\frac{x^2}{n\pi}\, sen(n\pi x) + \frac{2x}{n^2\pi^2}\, cos(n\pi x) - \frac{2}{n^3\pi^3}\, sen(n\pi x)\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{2}\left[\frac{1}{n\pi}\, sen(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2}\, cos(n\pi) - \frac{2}{n^3\pi^3}\, sen(n\pi) - 0 - 0 - \frac{2}{n^3\pi^3}\, sen(0)\right] \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}\, cos(n\pi) \end{aligned}$$

Assim, a representação em Série de Fourier da função fica

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(n\pi)}{n^2}\, cos(n\pi x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\, cos(n\pi x).$$

Exemplo 4:

Determine a forma analítica e a representação em Série de Fourier da função periódica.



$$f(x) = \begin{cases} \pi & , x \in [-\pi, 0] \\ x & , x \in [0, \pi] \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Período $T = 2\pi$ e $L = \pi$

<u>Série de Fourier</u>

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

E para este caso particular $L = \pi$ temos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Vamos calcular os coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi dx + \int_{0}^{\pi} x dx\right] = \frac{3}{2}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\pi\frac{sen(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x}{n}sen(nx) + \frac{cos(nx)}{n^2}\right]_{0}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\,cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\,(-1)^n - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{, para n ímpar} \\ 0 & \text{, para n par} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi sen(x)dx + \int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\ \left[-\pi\frac{cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{sen(nx)}{n^2}\right]_{0}^{\pi}\ \right) =$$

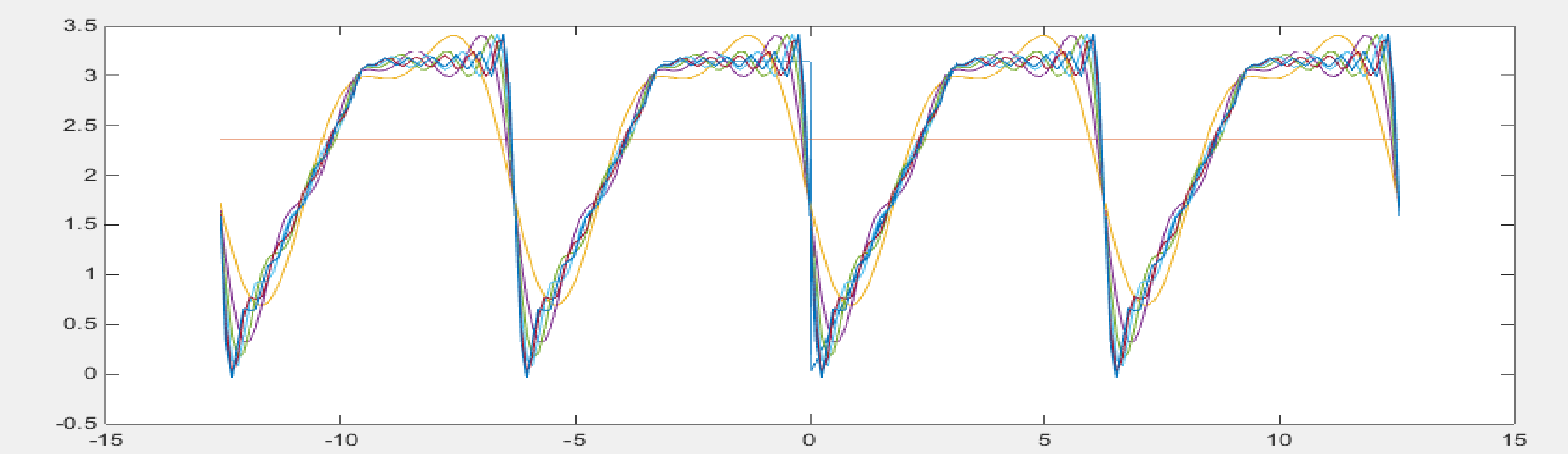
$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n}\cos(n\pi) + 0 = -\frac{1}{n}$$

<u>Série de Fourier</u>

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi n^2}\ ((-1)^n - 1)\cos(nx) - \frac{1}{n}\mathrm{sen}(nx)\right]$$

Série de Fourier

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi n^2}\ ((-1)^n - 1)\cos(nx) - \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\right]$$



Exercícios: Para cada uma destas funções, determine a representação em Série de Fourier e esquematize o gráfico utilizando 3 períodos.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}, \quad f(x) = f(x+2).$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ x & , \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x).$

(c) $f(x) = \begin{cases} -3 - x & , \quad -3 \leq x < 0 \\ 3 - x & , \quad 0 \leq x < 3 \end{cases}, \quad f(x) = f(x+6).$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ sen(x) & , \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad f(x) = f(x+2\pi).$

(e) $f(x) = sen(x), \quad 0 \leq x < \pi, \quad f(x) = f(x+\pi).$