INTEGRAÇÃO I

- Introdução e definição
- Anti derivadas, Primitivas e Integral Indefinido
- Fórmulas de primitivação imediata
- Propriedades do Integral Indefinido
- Técnicas de integração
  - Integração por decomposição
  - Integração por partes
  - Integração de frações racionais
  - Integração por substituição

Sumário aula 5

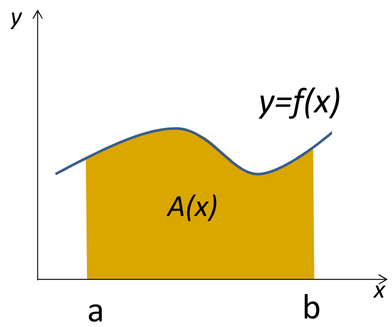
INTEGRAÇÃO

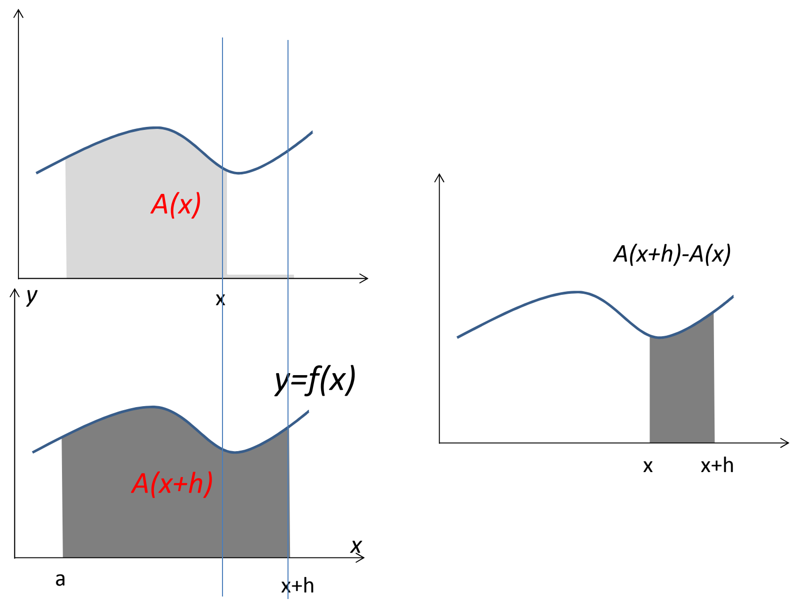
Introdução e definição

1) Anti derivadas, Primitivas e Integral Indefinido
2) Fórmulas de primitivação imediata
3) Propriedades do Integral Indefinido

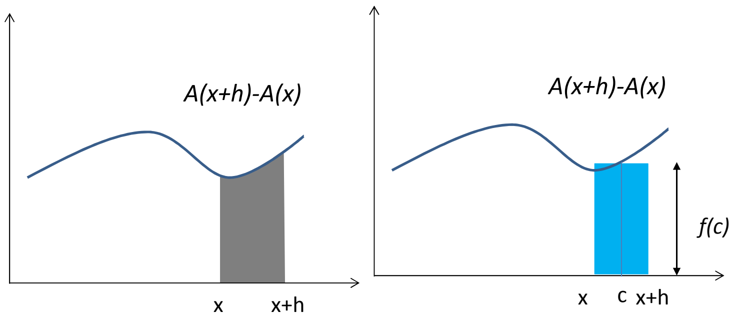
Integração: Introdução e definição

Problema: Dada uma função f(x), calcular a área definida pela função e eixo dos xx no intervalo [a,b]





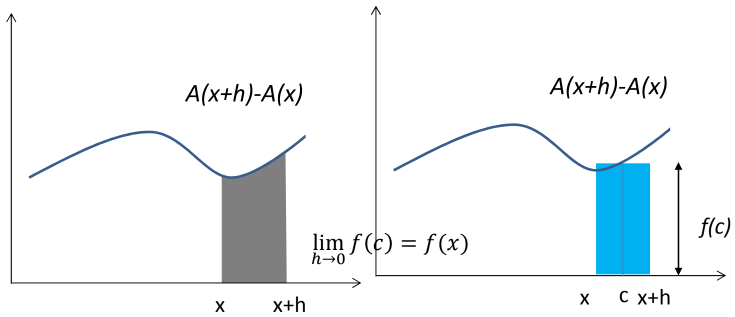
Definição de derivada $A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$



$f(c).h \sim A(x+h) - A(x)$

$$\frac{f(c).h}{h} \sim \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Definição de derivada $A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$



$\lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$

$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \sim f(c)$

quando $h \to 0, \quad c \to x$

$\lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

$$A'(x) = f(x)$$

O que quer dizer ?

A derivada da ÁREA debaixo da

função *f(x)* é igual à função *f(x)*

$$A'(x) = f(x)$$

Anti derivada ou integral indefinido

Significado de *F´(x) = f(x)*

- *f (x)* é a derivada de *F(x)*
- *F(x)* é **UMA** anti derivada (*primitiva*) de *f(x)*

F(x) +C são TODAS as anti derivadas de *f(x)*

Definições

Diferenciação (ou operador *derivada*): $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$

f(x) é a derivada de *F(x)*

Anti diferenciação (ou operador *anti derivada*): $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

F(x)+C são as **anti derivadas** de *f(x)*

$\int f(x)\,dx$ *=P[f(x)] é o* ***integral indefinido*** *de f(x)*

$F(x) = P[f(x)]$ *é a* ***primitiva*** *de f(x)*

Qual a função que tem x^2 como derivada ?

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = x^2$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3 + \pi\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)'$$

$$\boxed{\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C}$$

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = \frac{(r+1)x^{(r+1)-1}}{r+1} = x^r$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

$r \neq -1$

Tabela de primitivas

Regras de Primitivação Imediata

k constante, $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, u e v funções, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

1. $Pk = kx$
2. $Px^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
3. $Pu'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
4. $P\frac{1}{x} = \ln|x|$
5. $P\frac{u'}{u} = \ln|u|$
6. $Pe^u u' = e^u$

Algumas primitivas quase imediatas

- $Pu' \tan u = -\ln|\cos u|$
- $Pu' \text{cotan } u = \ln|\sin u|$
- $Pu' \sec u = \ln|\sec u + \tan u|$
- $Pu' \text{cosec } u = -\ln|\text{cosec } u + \text{cotan } u|$

Propriedades:

Exemplo: Calcule $\int x^3 dx$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad , r = 3$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C$$

Verificar fazendo a derivada

Exemplo: Calcule $\int \frac{1}{x^6} dx$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad , r = -6$$

$$\int \frac{1}{x^6} dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^6} dx = \frac{-1}{5} x^{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$$

Verificar fazendo a derivada

Exemplo: Calcule $\int \sqrt[3]{x} dx$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad , r = -6$$

$$\int x^{1/3} dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C \qquad = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$$

Verificar fazendo a derivada

Propriedades do integral indefinido

Propriedades:

- $P(u+v) = Pu + Pv$
- $Pku = kPu$

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Exemplo: Calcule $\int \left[\frac{1}{2\sqrt[2]{x}} - 3\sin x\right] dx$

$$\int \left[\frac{1}{2\sqrt[2]{x}} - 3\sin x\right] dx = \int \frac{1}{2\sqrt[2]{x}} dx - 3\int \sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x^{-\left(\frac{1}{2}\right)} dx - 3\int \sin x\, dx$$

$$= \frac{\frac{1}{2} x^{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}}{-\frac{1}{2}+1} + 3\cos x + C$$

$$= \sqrt{x} + 3\cos x + C$$

Tabela de primitivas imediatas (em “Conteúdos”)

Comparar com a tabela de derivadas.

INTEGRAL INDEFINIDO

$\int dx = x + C$	$\int \sec x\, dx = \ln\|\sec x + \tan x\| + C$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int \csc x\, dx = \ln\|\csc x - \cot x\| + C$	$\int a^u u'\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	$\int u' u^n\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + C$
$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$
$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\|u\| + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} u + C$

Tabela de primitivas imediatas (em “Conteúdos”)

Comparar com a tabela de derivadas.

INTEGRAL INDEFINIDO

$\int dx = x + C$	$\int \sec x\, dx = \ln\|\sec x + \tan x\| + C$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int \csc x\, dx = \ln\|\csc x - \cot x\| + C$	$\int a^u u'\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\boxed{\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	$\boxed{\int u' u^n\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)}$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + C$
$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$
$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\|u\| + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} u + C$

Nota:

$$[u^n]' = u'\, u^{n-1} \Rightarrow \int u' u^n\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Exemplo: Calcule $\int [2x(x^2+2)^3]dx$

O termo $(x^2+2)^3$ contém a potência mais alta de x dada por x^2

O termo $(x^2+2)^3$ é um bom candidato para ser u^n na expressão $\int u'u^n \ dx$

Falta verificar se u' está presente no integrando.

$$\int 2x(x^2+2)^3 dx \quad \text{é do tipo} \int u'u^n \ dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$u = x^2 + 2$
$n = 3$
$u' = 2x$

$$\int 2x(x^2+2)^3 dx = \frac{(x^2+2)^{3+1}}{3+1} + C = \frac{(x^2+2)^4}{4} + C$$

Exemplo: Calcule $\int [(x^3+2)^4 * x^2]dx$

$$\int u'u^n \ dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Primitiva imediata $u'u^n$

$(x^3+2)' = 3x^2$

$$\frac{1}{3}\int [(x^3+2)^4 * 3x^2]dx$$

$$\frac{1}{3}\int [(x^3+2)^4 * 3x^2]dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+2)^{4+1}}{4+1}$$

$$= \frac{(x^3+2)^5}{15} + C$$

Sumário aula 6

INTEGRAÇÃO

Introdução e definição

1) Anti derivadas, Primitivas e Integral Indefinido
2) Fórmulas de primitivação imediata
3) Propriedades do Integral Indefinido
4) Técnicas de integração
   a) Integração por decomposição
   b) Integração por partes
   c) Integração por substituição

Técnicas de primitivação

1. PRIMITIVAS IMEDIATAS (quando a função resulta de uma derivada conhecida --- tabelada!)
2. Não imediata
   1. Primitivação por Decomposição
   2. Primitivação por partes
   3. Primitivação de frações racionais
   4. Primitivação por substituição

- Primitivação por Decomposição

  Quando a função a primitivar resulta da derivada da soma

- Primitivação por partes

  Quando a função a primitivar resulta da derivada do produto

- Primitivação por substituição

  Baseia-se na derivada da função composta. Usa-se quando é necessária uma mudança de variável na função (irracionais e transcendentes)

- Primitivação de frações racionais

  Quando a função a primitivar é um quociente de polinómios. Decompõe-se em frações simples que se primitivam separadamente (decomposição)

Decomposição

Propriedades:

- $P(u+v) = Pu + Pv$
- $Pku = kPu$

A primitiva da soma é igual à soma das primitivas

$$\int (x^2+2x)dx = \int x^2dx + \int 2xdx$$

$$= \int x^2dx + 2\int xdx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \quad = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

Logaritmo

INTEGRAL INDEFINIDO

$\int dx = x + C$	$\int \sec x\,dx = \ln\|\sec x + \tan x\| + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \csc x\,dx = \ln\|\csc x - \cot x\| + C$	$\int a^u u'dx = \frac{a^u}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctan\, x + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -cos\, x + C$	$\int u'\,u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int \frac{u'}{1+u^2}dx = arctan\, u + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen\, x + C$
$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	$\int \frac{u'}{u}dx = \ln\|u\| + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = arcsen\, u + C$

Domínio $x > 0 \quad ou \quad u(x) > 0$

Exemplo: Calcule $\int \left[\frac{2x}{x^2-1}\right] dx$

D=$R\backslash\{-1{,}1\}$

A derivada de $(x^2 - 1)$ é $(x^2 - 1)' = 2x$

Estamos na forma $\int \frac{u'}{u} dx$

$$\int \left[\frac{2x}{x^2 - 1}\right] dx = \ln|x^2 - 1| + C$$

Domínio D=$R\backslash\{-1{,}1\}$

Exemplo: Calcule $\int \left[\cot x + \sqrt[3]{x + 2}\right] dx$

Exemplo: Calcule $\int \left[\cot x + \sqrt[3]{x + 2}\right] dx$

Vamos decompor numa soma de duas parcelas:

$$\int \left[\cot g\, x + \sqrt[3]{x+2}\right] dx = \int \cot g\, x\, dx + \int \sqrt[3]{x+2}\, dx$$

e calculamos separadamente cada um dos integrais.

$$\int \cot g\, x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

está na forma $\int \frac{u'}{u}\, dx$ pois $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

então: $\int \cot g\, x\, dx = \ln(\sin x) + C$ 1

$$\int \sqrt[3]{x+2}\, dx = \int (x+2)^{1/3}\, dx = \frac{(x+2)^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+2)^4} + C$$

$$\int \left(\cot g\, x + \sqrt[3]{x+2}\right) dx = \ln[\sin x] + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+2)^4} + C$$

Funções trigonométricas

INTEGRAL INDEFINIDO

$\int dx = x + C$	$\int \sec x\, dx = \ln\|\sec x + \tan x\| + C$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0, a \neq 1)$
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int \csc x\, dx = \ln\|\csc x - \cot x\| + C$	$\int a^u u'\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C\ (a > 0, a \neq 1)$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	$\int u' u^n\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + C$
$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\|u\| + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin u + C$

Exemplo: Calcule $\int \cos(2x)dx$

Exemplo: Calcule $\int \cos(2x)dx$

$(\sin u)' = u' \cos u \longrightarrow \int u' \cos u \, dx = \sin u + C$

$(\cos u)' = -u' \sin u \longrightarrow \int u' \sin u \, dx = -\cos u + C$

Exemplo: Calcule $\int \cos(2x)dx$

$(\sin u)' = u' \cos u \longrightarrow \int u' \cos u \, dx = \sin u + C$

$(\cos u)' = -u' \sin u \longrightarrow \int u' \sin u \, dx = -\cos u + C$

$\frac{d}{du}(2u) = 2$ então:

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2 \cdot \cos(2x)\,du}_{\text{Imediata } u'\cos u} = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

Exemplo: Calcule $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$

$P[\cos(u).u'] = \sin u + C$

Exemplo: Calcule $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$

$P[\cos(u).u'] = \sin u + C$

Vamos ver se a derivada do argumento do coseno ($\ln u$) está a multiplicar a função

$(\ln u)' = \frac{1}{u} \Rightarrow$ Estamos na forma $\int \cos(u).u' du$

Exemplo: Calcule $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx$

$P[\cos(u).u'] = \sin u + C$

Vamos ver se a derivada do argumento do coseno ($\ln x$) está a multiplicar a função

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow$ Estamos na forma $\int \cos(u).u'\,du$

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx = \int \frac{1}{x} \cdot \cos[\ln(x)]\,dx$$

$$= \sin[\ln(x)] + C$$

Exemplo: Calcule $\int \frac{\sin(artg(x))}{1+x^2}dx$

$P[\sin(u).u'] = -\cos u + C$

$[\text{artg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$

Exemplo: Calcule $\int \frac{\sin(artg(x))}{1+x^2}dx$

$P[\sin(u).u'] = -\cos u + C$

$[\text{artg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$

$\int \frac{\sin[\text{artg}(x)]}{1+x^2}dx$ está na forma $\int \sin u . u'\,du$

$$\int \frac{\sin[\text{artg}(x)]}{1+x^2}dx = \int \sin[\text{artg}(x)] * \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\cos[\text{artg}(x)] + C$$

Exemplo: Calcule $\int [\cos x]^3 dx$

Sugestão ---decomposição

Exemplo: Calcule $\int [\cos x]^3 dx$

$$[\cos x]^3 = \cos x \cdot [\cos x]^2$$
$$= \cos x\,[1 - \sin^2 x] =$$
$$= \cos x - \cos x \cdot \sin^2 x$$

Exemplo: Calcule $\int [\cos x]^3 dx$

$$[\cos x]^3 = \cos x \cdot [\cos x]^2$$
$$= \cos x\,[1 - \sin^2 x] =$$
$$= \cos x - \underbrace{\cos x \cdot \sin^2 x}_{u' \cdot u^n}$$

Imediata

Exemplo: Calcule $\int [\cos x]^3 dx$

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x\, dx - \int \sin^2 x \cdot \cos x\, dx$$
$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C \;//$$

$$P\left[\frac{u'}{1+u^2}\right] = artg\,(u) + C$$

- é uma fração ou transformável numa fração
- O denominador é um binómio (ADITIVO)
- Um dos termos é “1” (ou pode transformar-se em “1”)
- O outro é um quadrado ou pode transformar-se num quadrado
- O numerador é a derivada da base do quadrado

Exemplo: Calcule $\int \frac{x}{9+x^4}\,dx$

$$P\left[\frac{u'}{1+u^2}\right] = artg\,(u) + C$$

Exemplo: Calcule $\int \frac{x}{9+x^4}\,dx$

$$P\left[\frac{u'}{1+u^2}\right] = artg\,(u) + C$$

→ Podia ser um logaritmo mas o numerador NÃO é a derivada do denominador.

→ Denominador é binomio

dividir ambos os termos por 9 para obter "1" no denominador

Exemplo: Calcule $\int \frac{x}{9+x^4}\,dx$

$$P\left[\frac{u'}{1+u^2}\right] = artg\,(u) + C$$

$$\int \frac{u}{9+u^4}\,du = \int \frac{\frac{u}{9}}{\frac{9+u^4}{9}}\,du = \frac{1}{9}\int \frac{u}{1+\left(\frac{u^2}{3}\right)^2}\,dx$$

Para ser primitiva direta temos que ter no Numerador $\left(\frac{u^2}{3}\right)'$. $\frac{d}{du}\left(\frac{u^2}{3}\right) = \frac{2}{3}u$ → multiplicar e dividir por $2/3$

$$\frac{1}{9}\int \dots du = \frac{1}{9}\,\frac{3}{2}\int \frac{2/3\,u}{1+\left(\frac{u^2}{3}\right)^2}\,du = \frac{3}{18}\,arctg\left[\frac{u^2}{3}\right] + C$$

INTEGRAL INDEFINIDO

$\int dx = x + C$	$\int \sec x\,dx = \ln\,\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln\,a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \csc x\,dx = \ln\,\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$	$\int a^u\,u'dx = \frac{a^u}{\ln\,a} + C(a > 0, a \neq 1)$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$ $\int u'\,u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctan\,x + C$ $\int \frac{u'}{1+u^2}dx = arctan\,u + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$ $\int \frac{u'}{u}dx = \ln\lvert u\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsen\,x + C$ $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = arcsen\,u + C$

$$\int \frac{1}{1-u^2}\,du = \operatorname{arcth} u + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \operatorname{arcsh} u + C$$

Técnicas de primitivação:
PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

Derivada do produto: $(u\,v)' = u'v + uv'$

$$u\,v' = (u\,v)' - u'\,v$$

Técnicas de primitivação:
PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

Derivada do produto: $(u\,v)' = u'v + uv'$

$$u\,v' = (u\,v)' - u'\,v$$

$$\int \left(u\,dv = d(u\,v) - v\,du \right)$$

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

Técnicas de primitivação:
PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

Baseia-se na derivação do produto: ***(u v)´= u´v + u v´***

P*[uv´]= uv-****P****[u´v]*

$$\boxed{\int u * v'\,dx = u * v - \int u' * v\;dx}$$

$$\boxed{\int u * v'\,dx = u * v - \int u' * v\;dx}$$

- Usa-se quando queremos decompor o produto de dois fatores
- Conhecemos a derivada de um dos fatores
  (conhecemos a derivada de ***u*** que é ***u´***)
- Sabemos primitivar a outa função
  (Sabemos calcular ***P(v´) = v)***

Técnicas de primitivação:

PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

$$\boxed{\int u * v'\,dx = u * v - \int u' * v\,\,dx}$$

Exemplo: Calcule $\int x^3\, e^{x^2} dx$

Solução: Primitivação por partes $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

$$\int x^2\, x e^{x^2} dx = \int u\,dv$$

$$u = x^2 \longrightarrow du = 2x\,dx$$

$$dv = x\,e^{x^2} dx \longrightarrow v = \int x\,e^{x^2}\,dx$$

$$v = \frac{1}{2}\int 2\,x\,e^{x^2}\,dx$$

$$v = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$$

$$dv = x\,e^{x^2} dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\int x^3\, e^{x^2} dx = x^2 * \frac{1}{2} e^{x^2} - \int \frac{1}{2} e^{x^2} 2x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\boxed{\int \boldsymbol{x^3\, e^{x^2} dx = = \frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1) + C}}$$

Exemplo: Calcule $\int x^3\, e^{x^2} dx$

Solução: Primitivação por partes $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

$$\int x^3\, e^{x^2} dx = \int u\,dv$$

$$u = x^3 \longrightarrow du = 3x^2$$

$$dv = e^{x^2} dx \longrightarrow v = \int e^{x^2}\,dx$$

Não é primitiva imediata.
Não é a melhor escolha !

Exemplo: Calcule $\int \ln(x)\,dx$

$$\boxed{\int \boldsymbol{u * v'\,dx = u * v - \int u' * v\,\,dx}}$$

Exemplo: Calcule $\int \ln(x)\, dx$

$$\boxed{\int u * v'\, dx = u * v - \int u' * v\, dx}$$

Escolha:

$\ln x = \ln x \times 1$

Exemplo: Calcule $\int \ln(x)\, dx$

$$\boxed{\int u * v'\, dx = u * v - \int u' * v\, dx}$$

Escolha:

$\ln x = \ln x \times 1$ ← $\boxed{\text{TÉCNICA MUITO COMUM}}$

$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \qquad v = \int dx = x$

Exemplo: Calcule $\int \ln(x)\, dx$

$$\boxed{\int u * v'\, dx = u * v - \int u' * v\, dx}$$

Escolha: $u = \ln x \;,\; u' = \frac{1}{x}$ → Substituindo:

$v' = 1 \;,\; v = x$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \times x\, dx = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$$= \ln\left(\frac{x}{e}\right)^{x} + C$$

Exemplo: Calcule $\int x^2 \sin x\, dx$

Solução: Primitivação por partes $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

$$\int x^2 \sin x\, dx = \int u\, dv$$

$u = x^2 \longrightarrow du = 2x\, dx$

$dv = \sin x\, dx \longrightarrow v = \int \sin x\, dx$

$v = -\cos x$

$u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$

$dv = \sin x\, dx \qquad v = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2\, x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \underbrace{\int \boldsymbol{x \cos x\, dx}}_{\text{Primitivação por partes}}$$

$\int x \cos x \, dx = ?$

Solução: Primitivação por partes $\int u \, dv = u\,v - \int v \, du$

$\int x \cos x \, dx = \int u \, dv$

$u = x \longrightarrow du \, dx$

$dv = \cos x \, dx \longrightarrow v = \int \cos x \, dx$

$v = \sin x$

$\int x\cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$

$= x \sin x - \cos x$

Então obtemos:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \boldsymbol{x^2 \sin x \, dx} = \\ &= -\boldsymbol{x^2 \cos x} + \mathbf{2}(\boldsymbol{x \sin x} - \boldsymbol{\cos x}) + \mathbf{C}\end{aligned}}$$

Técnicas de primitivação:

PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Exemplo: Calcule $\int [4x^3 (x^4 + 10)^{20}] \, dx$

Já sabemos que está na forma $\int u' \, u^n dx$, mas reanalisemos a expressão de um modo diferente.

Vamos encontrar uma função, u(x), de substituição, tal que:

O integral se escreva na forma:

$$\int f(u(x)) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) \, du$$

Exemplo: Calcule $\int [4x^3 (x^4 + 10)^{20}] \, dx$

Substituição:

$u = x^4 + 10$

$\frac{du}{dx} = 4x^3$

$du = 4x^3 dx$

$$\int [4x^3 (x^4 + 10)^{20}] \, dx =$$

$$= \int \underbrace{(x^4 + 10)^{20}}_{u} \; \underbrace{4x^3 dx}_{du}$$

$$= \int u^{20} \, du$$

$\int u^{20} \, du = \frac{u^{21}}{21} + C$

Substituindo, $u = x^4 + 10$, obtemos:

$$\frac{(x^2 + 10)^{21}}{21} + C$$