Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste. O uso de Laplace tem cotação nula.

Nome COMPLETO: ______________________________

GRUPO I - Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista**: **1.0** valores por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta **1/3** valor na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4	5

1. Calcule, se existir, o valor de $\lim_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$

   (a) $\frac{\pi^2}{2}$ (b) $-\infty$ (c) 0 (d) $-\frac{1}{2}$

2. Calcule, se existir, o valor de $\lim_{x\to 0} x^{\sin\left(\frac{1}{\ln x}\right)}$

   (a) ∞ (b) e (c) 1 (d) 0

3. Qual o valor do integral definido $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^a \sin x \, \mathrm{d}x$ (com $a \in R_0^+$)?

   (a) $\frac{\pi^{a+1}}{a+1}$ (b) $2\frac{(-1)^{a+1}}{a+1}$ (c) 0 (d) π^{a+1}

4. Qual a expressão de $\dfrac{d}{dx}\left[8^{4x^2}\sqrt{x^8}\right]$?

   (a) $8^{4x^2}\left(\ln 8 + \dfrac{x^5}{2}\right)$ (b) $x8^{4x^2+1}\left(\ln 8 + \dfrac{x^2}{2}\right)$ (c) $x8^{4x^2}\left(1 + \dfrac{x^4}{2}\right)$ (d) $8^{4x^2+1}\left(x\ln 8 + \dfrac{x^4}{2}\right)$

5. Considere a função $f(x) = 1/x$ no intervalo $x \in [1,5]$. Qual dos seguintes símbolos descreve a relação entre o integral definido de $f(x)$ no intervalo e o valor da aproximação obtida pela soma de Riemann superior para N partições, $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \;\boxed{?}\; \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\Delta x_n$?

   (a) $>$ (b) $\geq$ (c) $\leq$ (d) $<$

GRUPO II

6. **[3]** Um míssil, inicialmente à cota zero, é lançado verticalmente de um ponto que está a 1 km de uma estação de rastreamento. A estação encontra-se à mesma cota zero. A razão de variação do ângulo de elevação, medido em relação à estação de rastreamento, é constante e igual a $\frac{\pi}{80}$ radianos por segundo.

   (a) Determine a velocidade vertical do míssil quando o ângulo de elevação for igual a $\frac{\pi}{4}$ radianos.

   (b) Se o tempo de resposta da estação de rastreamento for de 5 segundos, qual a velocidade a que deveria ser lançado um segundo míssil que intercepte o primeiro míssil na posição das condições da alíena (a). Assuma que trajectória do míssil de intercepção é rectilínea e a velocidade constante.

7. **[2.5]** Usando os conceitos de <u>derivada da função composta</u> e de <u>derivada da função inversa</u>, calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$ para $y = \arctan\left(\sqrt{x}\ln x\right)$.

GRUPO III

8. **[2.5]** Esboce a região Q do plano limitada pelos gráficos das funções:

$$f_1(x) = x^2 - 4x + 3 \quad e \quad f_2(x) = -x^2 + 2x + 3$$

   Determine a área da região Q.

9. **[5]** Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\pi - \tan^2 x}}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \sin x\,\frac{\ln(\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

10. **[2]** Usando o <u>Teorema Fundamental do Cálculo</u>, determine a derivada da função $F(x)$, contínua e derivável:

$$F(x) = \int_{-\sin^2 x}^{\cos^2 x} \left(1 - t^2\right)\,\mathrm{d}t$$

   Justifique todos os cálculos efectuados.