Unidade Curricular:
Análise Matemática - EIC0004
MIEIC 2016/2017

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS:

Equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem:

- **Equações diferenciais de variáveis separáveis**
- **Equações diferenciais lineares**
- **Equações diferenciais de Bernoulli**
- **Equações diferenciais homogêneas**
- **Equações diferenciais exatas**

Equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem:

Considere-se a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

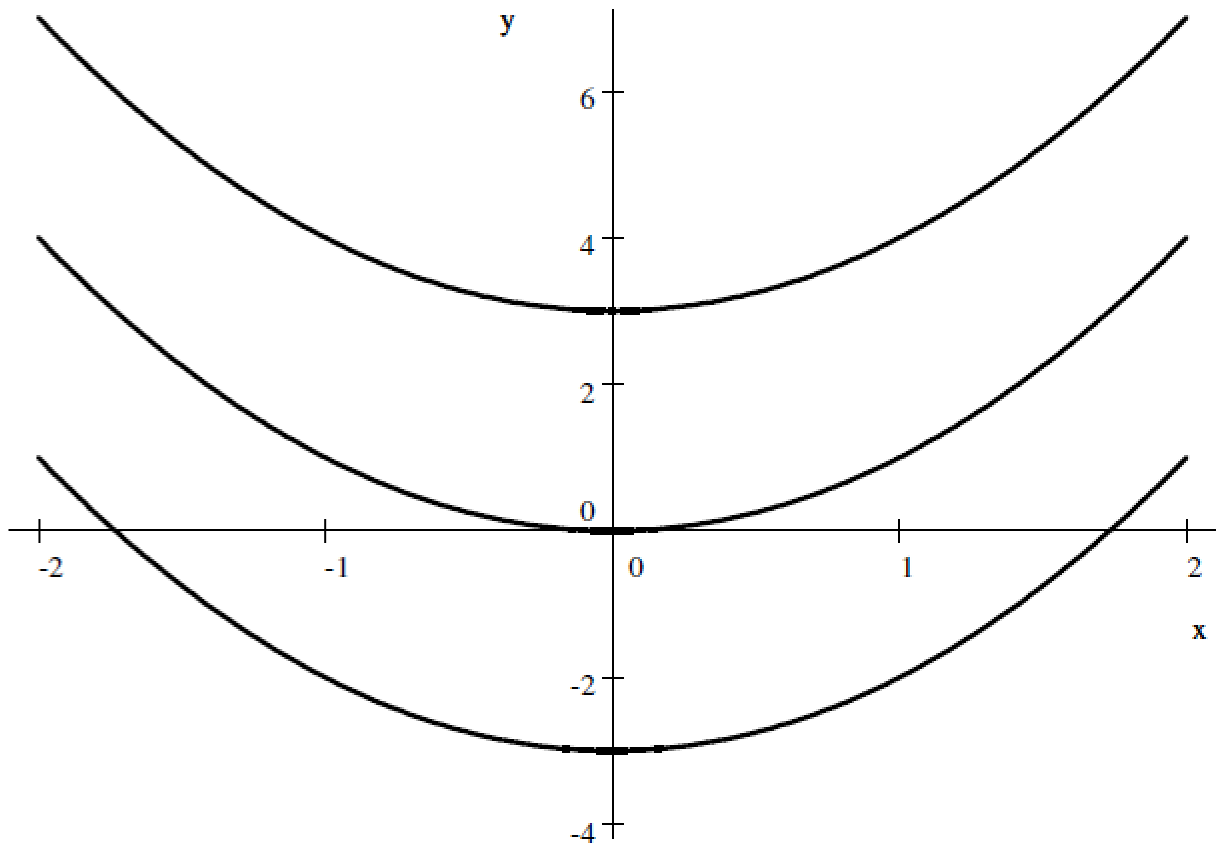
$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = x^2 + 2, \quad f_3(x) = x^2 + 3, \quad f_{\sqrt{7}}(x) = x^2 + \sqrt{7}$$

$$f\ (x) = x^2 + c$$

A constante c designa-se **constante arbitrária**

A família de soluções assim definida escreve-se

$$y = x^2 + c.$$



Representação gráfica da família de parábolas $y = x^2 + c$,
cada parábola é uma curva integral da equação diferencial

A maior parte dos fenômenos físicos é descrita matematicamente através de equações, ou sistemas de equações, que envolvem derivadas parciais das funções incógnitas

- O movimento uniformemente acelerado é o movimento com aceleração tangencial constante: $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}$ **= C**

- a velocidade em qualquer instante t é dada por:

$$v = \int a\, dt = at + c \quad para\ t = t_0\ \ temos\ v = v_0$$

substituindo obtém-se $v = \boldsymbol{at + v_0}$

- $v = \frac{ds}{dt}$ O espaço *s* percorrido no instante t é dada por:

$$s = \int v\, dt = \int (at + v_0) dt = \frac{at^2}{2} + v_0 t + c$$

$para\ t = t_0\ \ temos\ s = s_0$ obtendo

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{at^2}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{v_0 t} + \boldsymbol{s_0}$$

Em situações controladas a fissão nuclear tem um decaimento proporcional à massa *y*

$\frac{dy}{dt} = -ky$ separando as imcógnitas obtém-se: $\frac{dy}{y} = -k\,dt$

Integrando ambos os membros da igualdade

$\int \frac{dy}{y} = \int -k\,dt \Rightarrow ln|y| + C_1 = -kt + C_2 \Rightarrow ln|y| = -kt + C_2 - C_1 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{ln|y| = -kt + C \Rightarrow y = e^{-kt+C} = e^{kt}e^{C} \Rightarrow y = A\,e^{-kt} \quad (A = e^{c})}$$

Lei do descaimento exponencial

O número de bactérias P em uma cultura cresce a uma razão proporcional ao número de bactérias presente:

$\frac{dP}{dt} = kP$ separando as imcógnitas obtém-se: $\frac{dP}{P} = k\,dt$

integrando ambos os membros da igualdade obtém-se

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt \Rightarrow ln|P| + C_1 = kt + C_2 \Rightarrow ln|P| = kt + C_2 - C_1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{ln|P| = kt + C \Rightarrow P = e^{kt+c} = e^{kt}e^{C} \Rightarrow P = A\,e^{kt}, \quad A = e^{c}}$$

K > 0 Lei do crescimento exponencial

CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Tipo

Ordem

Linearidade

CLASSIFICAÇÃO QUANTO AO TIPO

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

- A função desconhecida depende de uma única variável independente:

$$\frac{du}{dx} + xu = 0, \qquad u = u(x)$$

Equações Diferenciais Parciais (EDP)

- A função desconhecida depende de várias variáveis independentes:

$$\frac{du}{dt} + v(t)\frac{du}{dx} = 0$$

CLASSIFICAÇÃO QUANTO À ORDEM

- A ORDEM da Equação Diferencial é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação

$y' = f(x, y) = 2x + 3$

$y' = 2x + 3$ eq. Diferencial de 1ª ordem

$y''' + 3xy + y = 0$ eq. Diferencial de 3ª ordem

CLASSIFICAÇÃO QUANTO À LINEARIDADE

F(t, y, y´, y´´, y´´´, ⋯, y^n) = 0

Uma Equação Diferencial diz-se LINEAR quando *F* é uma função linear das variáveis *y, y´, y´´*, .. y^n

$$a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \ldots + a_n(t)y = g(t)$$

Uma Equação Diferencial diz-se **NÃO-LINEAR** quando *F* não é uma função linear das variáveis *y, y´, y´´*, .. y^n

$$y'' + e^y y' - y = 0$$

EXEMPLOS
Equações diferenciais lineares

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + (\cos x)\, y = 0$$

$$-x\frac{d^3y}{dx^3} + xe^x\frac{dy}{dx} + x^3y = \cos x$$

EXEMPLOS

São equações diferenciais ordinárias não lineares

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \boxed{y^2} = 0$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \boxed{xy}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \boxed{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \boxed{3e^{2y}} = 0$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

- Equações diferenciais de variáveis separáveis
- Equações diferenciais lineares
- Equações diferenciais de Bernoulli
- Equações diferenciais homogêneas
- Equações diferenciais exatas

EQUACÕES DIFERENCIAIS DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Uma equação diferencial é de **variáveis separáveis** se pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{h(y)}{v(x)}$$

Seja a EDO de 1ª ordem Podemos obter a solução geral para esta EDO por separação de variáveis:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$g(y)dy = f(x)dx$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G(y) = F(x) + C}$$

Chama-se solução geral ou integral geral de uma equação diferencial ordinária a toda a solução que envolva uma ou mais constantes arbitrárias

Chama-se solução particular ou integral particular de uma equação diferencial ordinária a toda a solução obtida atribuindo valores às constantes arbitrárias da solução geral

CALCULAR A SOLUÇÃO GERAL DE EQUACÃO DIFERENCIAL COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

1. Calcular a solução geral:

   a) Rescrever a equação de modo a ter os termos em $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{dy}$ de um lado e os termos em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{dx}$ do outro

   b) Integrar ambos os membros e resolver a equação

2. Calcular a solução particular que satisfaça a condição inicial ou de fronteira

EXEMPLO: Calcular a solução geral de $y' = \frac{y}{x}$, $y(1)=2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln|y| = ln|x| + ln|a|$$

$$y = e^{ln(x)+ln(a)} \quad \Rightarrow \quad y = e^{ln(x)}e^{ln(a)}$$

Solução geral: $\boldsymbol{y = ax}$

Solução particular: $y(1) = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \boldsymbol{y = 2x}$

Resolva a Equação diferencial: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}$$

$$(x+1)dy = ydx$$

$$x+1 \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow x \neq -1$$

$$\Rightarrow \ln|y| + c_1 = \ln|x+1| + c_2$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + (c_2 - c_1)$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + c$$

Solução geral

Resolva a Equação diferencial: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}$$

$$e^{ln|y|} = e^{\ln|x+1|+c}$$

$$x + 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq -1$$

$$\Rightarrow e^{ln|y|} = e^{\ln|x+1|} . e^{c}$$

Solução geral

$$\boxed{y = e^{c}(x+1)}$$

Determinar uma família de soluções da equação diferencial

$$y\,dx + 2x\,dy = 0.$$

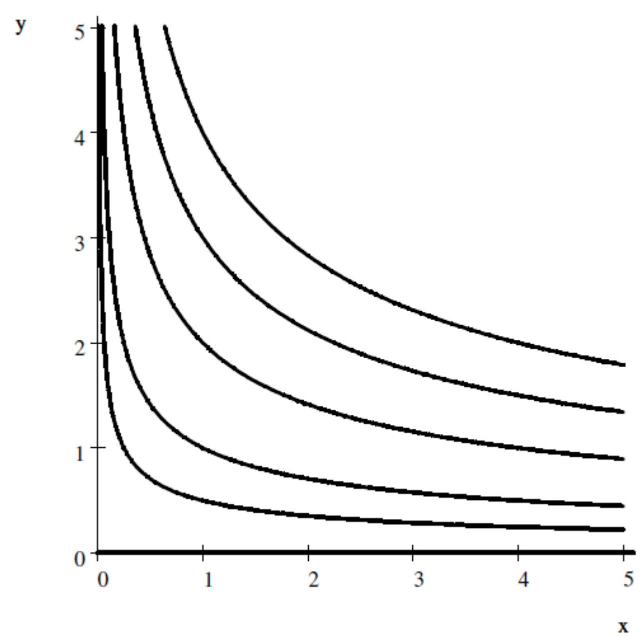
$$\frac{2}{y}\,dy = -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{2}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\ln|y| = -\ln|x| + c$$

$$xy^2 = k\ ,\ \ k \neq 0 \quad e \quad y = 0,\ \ (\text{se } k = 0)$$

Solução da Equação diferencial: $y\,dx + 2x\,dy = 0.$

$$xy^2 = k\ ,\ \ k \neq 0 \quad e \quad y = 0, \qquad (\text{ se } k = 0)$$



Representação gráfica da família de curvas no primeiro quadrante

Determinar uma família de soluções da equação diferencial

$$x \operatorname{sen} y\, dx + \left(x^2 + 1\right) \cos y\, dy = 0, \quad y(1) = \pi/4$$

$$\frac{x}{(x^2+1)}\, dx = - \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)}\, dx = - \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) = - \ln\left|\operatorname{sen} y\right| + c_0$$

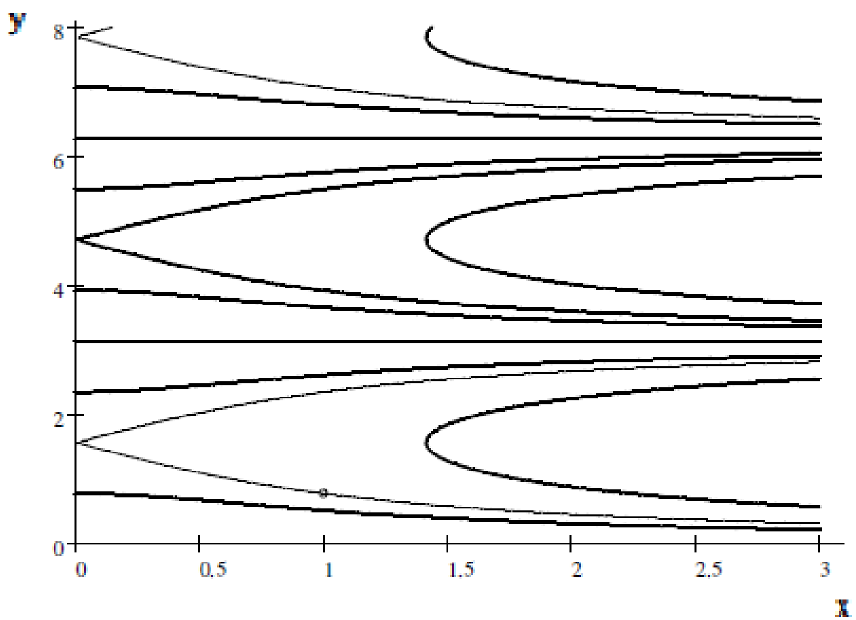
ou, tomando $c_1 = e^{c_0} > 0$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|\operatorname{sen} y| = \ln c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\sqrt{(x^2+1)} + \ln|\operatorname{sen} y| = \ln c_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\sqrt{(x^2+1)}\,|\operatorname{sen} y|\right) = \ln c_1.$$

$$\boxed{\sqrt{(x^2+1)}\operatorname{sen} y = c, \quad c \neq 0,}$$

$$c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 > \\ sen\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = n\pi$$



Representação gráfica das famílias de curvas e $y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, *no primeiro quadrante*

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Definição : Chama-se **equação diferencial linear de 1ª ordem** a uma equação da forma $y'+P(x)y=Q(x)$ onde P e Q são funções contínuas de x num certo domínio $D \subset IR$

$$\boxed{y'+2y=e^{2x}}$$

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

É usual designar por equação completa aquela em que $Q(x) \neq 0$ enquanto que a equação se chama homogénea, se $Q(x) = 0$

Se $Q(x) = 0$, a equação é de variáveis separáveis

Se $Q(x) \neq 0$ a equação admite um factor integrante função só de x

$$\boxed{I(x,y) = e^{\int P(x)dx}}$$

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Teorema: *a equação diferencial* ***linear de 1ª ordem***

$y' + P(x)y = Q(x)$

pode ser transformada numa equação diferencial de variáveis separáveis através da multiplicação de ambos os membros pelo ***fator integrante*** $\boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}$

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Demonstração: multiplicando ambos os membros da equação diferencial **linear de 1ª ordem** $y' + p(x)y = q(x)$ **pelo fator integrante** $\boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}$ obtém-se:

$$(y' + p(x)y) \quad e^{\int P(x)dx} = q(x) \quad e^{\int P(x)dx}$$

ou $\quad y'e^{\int P(x)dx} + yp(x) \quad e^{\int P(x)dx} = q(x) \quad e^{\int P(x)dx}$

o 1ª membro é igual a:

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int P(x)dx}\right) = q(x) \quad e^{\int P(x)dx}$$

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Demonstração: Continuação

donde $$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int P(x)dx}\right) = q(x)\ \ e^{\int P(x)dx}$$

Equivalente a: $$\mathrm{d}\left(y\, e^{\int P(x)dx}\right) = q(x)\ \ e^{\int P(x)dx} dx$$

Integrando ambos os membros obtém-se a solução da equação diferencial de 1ª ordem,

$$y\, e^{\int P(x)dx} = \int q(x)\ \ e^{\int P(x)dx}\, \mathrm{dx} + \mathrm{C}$$

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

1º - Determinar o factor integrante $I(x,y) = e^{\int P(x)dx}$

2º - Multiplicar a equação diferencial por este factor integrante,

isto é

$$e^{\int P(x)dx}\left(y' + P(x)y\right) = e^{\int P(x)dx} Q(x)$$

3º - Notar que o 1º membro da equação é igual $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right)$

4º - Integrar ambos os membros em ordem a x, ou seja

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx \ + C$$

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Considere a equação diferencial

$$y' + 2y = e^{2x}.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de primeira c

$P(x) = 2$ e $Q(x) = e^{2x}$.

$$\int P(x)dx = \int 2dx = 2x + C.$$

$$\boxed{e^{2x} y' + 2\, e^{2x} y = e^{2x}\, e^{2x}}$$

$$\mathbf{d}\left(y\, e^{2x}\right) = e^{2x} e^{2x} dx$$

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

$$\mathbf{d}\left(y\, e^{2x}\right) = e^{2x} e^{2x} dx$$

$$e^{2x} y = \int e^{2x} e^{2x}\, dx + C$$

$$e^{2x} y = \int e^{4x}\, dx + C$$

$$e^{2x} y = \frac{e^{4x}}{4} + C$$

A solução geral

$$\boxed{y = \frac{e^{2x}}{4} + Ce^{-2x}.}$$

Considere a equação:

$$y' = x + 5y$$

$$y' - 5y = x$$

$$\int P(x)\,dx = \int -5\,dx = -5x$$

$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-5x}$$

$$(y' + (-5)y)e^{-5x} = xe^{-5x}$$

$$(y' - 5y)e^{-5x} = xe^{-5x}$$

$$y'e^{-5x} - 5ye^{-5x} = xe^{-5x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{-5x}\right] = xe^{-5x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{-5x}\right] = xe^{-5x}$$

$$\int d\left[ye^{-5x}\right] dx = \int xe^{-5x}\ dx$$

$$ye^{-5x} = \int xe^{-5x}\ dx$$

$$ye^{-5x} = -\frac{1}{5}xe^{-5x} - \frac{e^{-5x}}{25} + C$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + Ce^{5x}}$$

Resolva a equação diferencial $y' + \frac{y}{x} = \cos x + \frac{\sin x}{x}$

$$f = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{ln|x|} = x$$

$$y'x + y = xcosx + sinx$$

$$\frac{d}{dx}(yx) = xcosx + sinx$$

$$d(yx) = (xcosx + sinx\ )dx$$

$$yx = \int (xcosx + sinx\ )dx + C$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1º ORDEM (não lineares)

- **Equações diferenciais de Bernoulli**
- **Equações diferenciais homogêneas de 1º ordem**
- **Equações diferenciais exatas**

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

$$\boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x)y^n}$$

A equação de Bernoulli é uma equação diferencial **ordinária não linear** (para $n \neq 0 \; e \; n \neq 1$) **de 1ª ordem** onde n é um número real

Para $n = 1$ ED de variáveis separáveis

Para $n = 0$ ED linear

Teorema: Considerando uma equação de Bernoulli com a forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

Ao efetuar a mudança de variável $u = y^{1-n}$ a equação transforma-se numa equação linear de 1ª ordem

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Demonstração:

Considere-se a mudança de variável $u = y^{1-n}$ e derivando tem-se

$$u' = (1-n)y^{-n}\mathrm{y}'$$

Multiplicando a eq. $y' + P(x) = Q(x)y^n$ por $(1-n)y^{-n}$ vem

$$(1-n)y^n\, y' + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)\, Q(x)$$

equivalente a uma equação diferencial linear de 1ª ordem:

$$u' + P(x)(1-n)u = (1-n)Q(x)$$

RESUMO

ED de variáveis separáveis

ED Lineares de 1ª ordem

ED COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{h(y)}{v(x)}$$

$$g(y)dy = f(x)dx$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

RESUMO

ED lineares de 1ª ordem

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)}$$

MÉTODO DO FATOR INTEGRANTE

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)$$

$$\boxed{I(x,y) = e^{\int P(x)dx}}$$

RESUMO

Equações de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) * y^n$$

Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ fazemos a substituição $v = y^{1-n}$

Equações Homogéneas de 1ª ordem

São equações que podem ser escritas como:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$ Substituição: $v = \frac{y}{x}$

Considerando a equação de Bernoulli $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$

Multiplicando os 2 membros por $(1-n)y^{-n}$ obtém-se

$$-y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -x$$

Considerando $u = y^{1-n} = y^{-1}$ obtém-se uma equação linear de 1º ordem

$$\boldsymbol{u' - \frac{1}{x}u = -x}$$

Factor integrante:

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int -1/x dx} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}u' - \frac{1}{x^2}u = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}u\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}u = \int -dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}\,\mathrm{u} = -x + \mathrm{C} \;\Rightarrow\; u = -x^2 + Cx \quad \Rightarrow \quad y^{-1} = -x^2 + Cx$$

$$\boxed{\boldsymbol{Y = \frac{1}{-x^2+Cx}}}$$

Considerando a equação de Bernoulli

$$y' - 3y = y^2$$

Multiplicando ambos os membros por $(1-n)y^{-n}$ vem

$$-y^{-2}y' + 3y^{-1} = -1$$

Considerando $u = y^{1-n} = y^{-1}$ obtém-se uma equação linear de 1º ordem:

$$u' + 3u = -1$$

Factor integrante: $e^{\int p(x)dx} = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

Considerando a equação de Bernoulli $y' - 3y = y^2$

$$e^{3x} u' + 3e^{3x}u = -e^{3x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(e^{3x}u) = -e^{3x} \quad \Rightarrow \quad e^{3x}u = \int e^{3x}dx$$

$$\Rightarrow \; e^{3x}u = \frac{-e^{3x}}{3} + C \; \Rightarrow \; u = \frac{-1}{3} + Ce^{-3x} \; \Rightarrow \quad y^{-1} = \frac{-1}{3} + Ce^{-3x}$$

$$\boxed{Y = \frac{1}{\frac{-1}{3} + Ce^{-3x}}}$$

EQUAÇÕES HOMOGÉNEAS

Uma equação diz-se homogénea degrau n se para qualquer λ satisfaz a condição:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \qquad \lambda \neq 0$$

Por exemplo $$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

Sendo $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ equação homogénea?

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{x-y}{x+y} = f\left(x, y\right)$$

EQUAÇÕES HOMOGÉNEAS

Sabendo que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ e tomando para $\lambda = \frac{1}{x}$ vem:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y) = f(1, \frac{y}{x}) = f(\frac{y}{x})$$

Por exemplo: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$

EQUAÇÕES HOMOGÉNEAS

Teorema: Se uma equação diferencial $y' = F(x, y)$ é homogénea então a mudança de variável $y = zx$ transforma essa equação numa equação diferencial em z de variáveis separáveis.

Demonstração:
Se uma equação diferencial é homogénea então pode ser escrita $\mathrm{y}' = F(\frac{y}{x})$
Considerando a mudança de variável, $y = zx$, pela Regra da Cadeia vem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + \mathrm{z}$$

EQUAÇÕES HOMOGÉNEAS

Logo:

$$\frac{dz}{dx}x + z = F(z) \quad \text{ou} \quad xdz = (F(z) - z)dx$$

Separando as variáveis otém-se

$$\frac{dz}{F(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

Que é uma equação diferencial de variáveis separáveis

EQUAÇÕES HOMOGÉNEAS

Entre os principais tipos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem encontramos as **equações diferenciais homogêneas**

- Uma substituição de variável conveniente permite reescrever a equação diferencial como sendo uma equação de variáveis separáveis
- Resolve-se a equação obtida
- Por fim, substitui-se $z = \frac{y}{x}$, de forma a obter a solução em termos da variável primitiva

Exemplo 1: $$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}\qquad f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$$

É homogénea? $$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}{\lambda^2xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}=f\left(x,y\right)$$

Considerando a mudança de variáve $y=zx$ obtém-se: $$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}x+z$$

$$\frac{dz}{dx}x+z=\frac{x^2+x^2z^2}{xxz}=\frac{1+z^2}{z}$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1+z^2}{z} - z = \frac{1}{z}$$

$$zdz = \frac{dx}{x}$$

Integrando

$$\int zdz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + c_1$$

$$z^2 = 2\ln|x| + 2c_1$$

$$z^2 = \ln x^2 + c$$

Substituindo $z = \frac{y}{x}$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + c \\ \\ y^2 - x^2 \ln x^2 = x^2 c\end{gathered}}$$

Exemplo 2: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + cos^2\frac{y}{x}$$

É homogénea? $$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + cos^2\frac{\lambda y}{\lambda x} = F(x, y)$$

Considerando a mudança de $y = zx$ obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z$$

Exemplo 2: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + cos^2\frac{y}{x}$$

$$\frac{dz}{dx}x + z = z + cos^2 z \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx}x = cos^2 z \;\Rightarrow\; \frac{dz}{cos^2 z} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{cos^2 z} = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow tgz = ln|x| + k$$

Substituindo: $$\boldsymbol{tg\frac{y}{x} = ln|x| + k}$$

RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA

(1) $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ Verificar se é homogénea

Considerando $y = zx$, pela Regra da Cadeia vem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + \mathrm{z}$

Substituindo $\mathrm{z} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx$ em (1) obtém-se

$$\frac{dz}{dx}x + z = F(z) \quad \text{ou} \quad xdz = (F(z) - z)dx$$

Separando as variáveis vem $\frac{dz}{F(z)-z} = \frac{dx}{x}$

Que é uma ED de variáveis separáveis $\begin{cases} resolve - se\ em\ z \\ na\ soluç\tilde{a}oz = \frac{y}{x} \end{cases}$

RESUMO

ED de variáveis separáveis

ED Lineares de 1ª ordem

ED COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{h(y)}{v(x)}$$

$$g(y)dy = f(x)dx$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

RESUMO

ED lineares de 1ª ordem

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)}$$

MÉTODO DO FATOR INTEGRANTE

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

$$\boxed{I(x,y) = e^{\int P(x)dx}}$$

RESUMO

Equações de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) * y^n$$

Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ fazemos a substituição $v = y^{1-n}$

Equações Homogéneas de 1ª ordem

São equações que podem ser escritas como:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$ Substituição: $v = \frac{y}{x}$

TRAJETÓRIAS ORTOGONAIS

Consideremos uma família de curvas no plano a um parâmetro e a sua equação diferencial:

$f(x, y, C) = 0$ e a sua equação diferencial $\bar{f}(x, y, y') = 0$

As trajetórias ortogonais são uma outra família de curvas em que cada curva da família dada é intersetada perpendicularmente por todas as curvas da família designada por família das trajetórias ortogonais - significa que as tangentes às curvas no ponto de interseção são perpendiculares

Para encontrar a família de trajetórias ortogonais às curvas $f\,(\,x\,,y\,)\;=\;c$, começamos por encontrar uma equação diferencial cuja solução geral seja $f\,(\,x\,,y\,)\;=\;c$ derivando implicitamente a equação anterior

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

A derivada dy/dx representa em cada ponto o declive da curva que passa por esse ponto. O declive da **curva ortogonal** será o inverso, com sinal trocado

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}$$

E a solução geral desta equação é a família de trajetórias ortogonais

FAMÍLIA DE CÍRCULOS COM CENTRO NA ORIGEM E TRAJETÓRIAS ORTOGONAIS

A equação dos círculos com centro na origem é $x^2+y^2=c^2$ onde o parâmetro c pode ter qualquer valor positivo

A equação diferencial cuja solução geral é essa família de círculos obtém-se por derivação implícita

$$2x+2yy' = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

e a equação diferencial das trajetórias ortogonais é $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

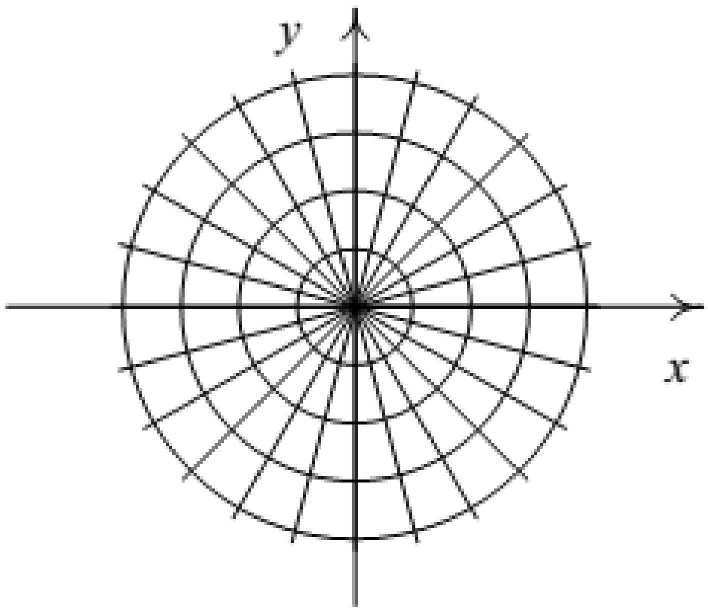
Resolução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \qquad \ln(y) = \ln(x) + \ln(a)$$

$$y = e^{ln(x)+ln(a)} \qquad y = e^{ln(x)}e^{ln(a)} \qquad y = ax$$

A solução desta equação de variáveis separáveis é $y = ax$ que corresponde a uma família de retas que passam pela origem; a constante de integração é o declive das retas

Família de círculos com centro na origem e trajetórias ortogonais



Família de círculos com centro no eixo Ox e tangentes ao eixo Oy e curvas ortogonais

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

Derivando ambos os membros da equação obtemos a equação diferencial: $2x + 2yy' = 2a$

Substituindo o valor de a pelo dado na equação inicial, $a = \frac{x^2+y^2}{2x}$ e resolvendo em ordem a y':

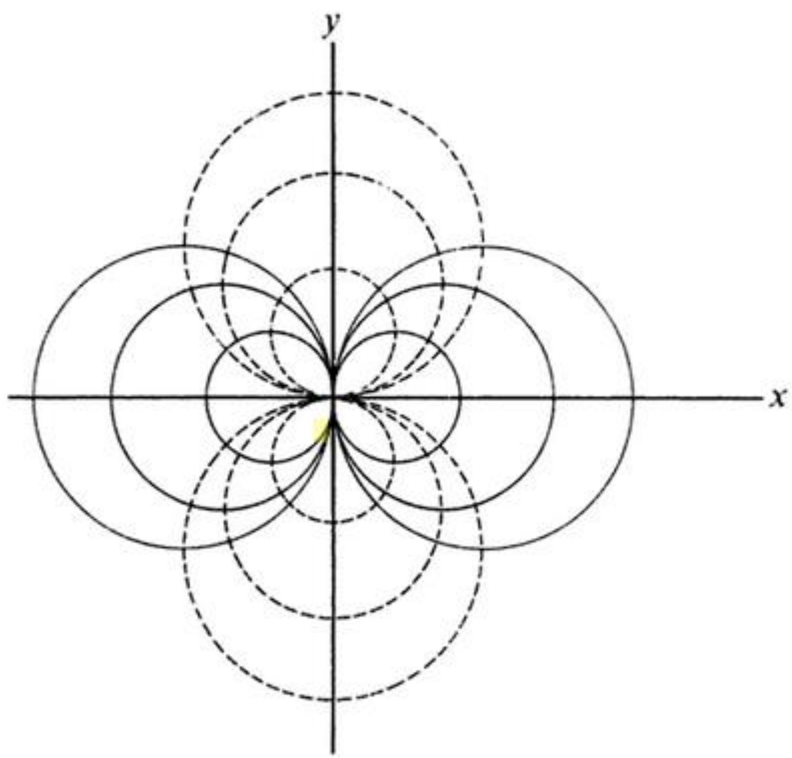
$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

A ED das trajetórias ortogonais é tal que: $\boxed{y' = -\frac{1}{y'} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}}$

Família de círculos com centro no eixo Ox e tangentes ao eixo Oy e curvas ortogonais

A ED $y' = -\frac{1}{y'} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$ é homogénea e tem a solução:

$$y^2 + x^2 = Cy$$



Equações diferenciais de 2ª ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$y(x_0)$=y_0e $y'(x_0)$=y'_0 condições iniciais

onde $p(x), q(x) \;\; e \;\; f(x)$ são funções contínuas no domínio de validade de $y(x)$

Equações diferenciais de 2ª ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$y(x_0)$=y_0e $y'(x_0)$=y'_0 condições iniciais

onde $p(x), q(x)\ \ e\ \ \ f(x)$ são funções contínuas no domínio de validade de $y(x)$

Exemplo Resolva a equação diferencial: $y'' - 2 = 0$ e indique a solução da equação que satisfaz as condições $y(1) = 0$ e $y'(0) = 2$

$$y'' - 2 = 0 \Leftrightarrow y'' = 2 \Leftrightarrow y' = 2x + C_1 \Leftrightarrow y = x^2 + C_1 x + C_2$$

$y(x) = x^2 + C_1 x + C_2$ é a solução geral da equação diferencial

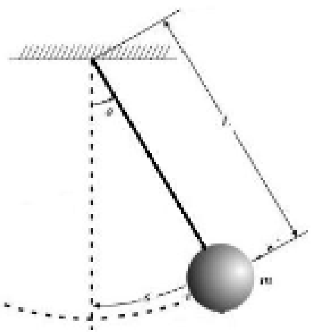
$y(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + C_1 + C_2 = 0$ Como $y'(x) = 2x + C_1$

$y'(0) = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2$

Logo $y(x) = x^2 + 2x - 3$ é a solução particular desejada

Equações diferenciais de 2ª ordem

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$



$$mx'' + bx' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Movimento oscilatório periódico em que temos um corpo de massa ***m*** preso a uma mola de massa desprezível. A mola exerce uma força restauradora proporcional e oposta ao deslocamento $x(t),\ F = -kx$

Considerando uma força exterior, $f(t)$, dependente do tempo, o movimento oscilatório é dado pela equação:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Equações diferenciais de 2ª ordem

Uma equação diferencial de 2ª ordem é homogénea quando pode ser escrita

$$y''+p(x)y' + q(x)y = 0$$

Princípio de Sobreposição ou Linearidade:

- Podemos obter sempre novas soluções por combinação linear de soluções conhecidas

Equações diferenciais de 2ª ordem

Teorema: Para uma equação diferencial linear homogénea $y''+p(x)y' + q(x)y = 0$ qualquer combinação linear de duas soluções $y_1 e\ y_2$ é uma solução da equação.

Demonstração: A combinação linear das duas soluções é dada por:

$$z = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Derivando: $z' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$ e $z'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$

Substituindo na equação diferencial:

$$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \mathrm{p(x)}(c_1 y_1' + c_2 y_2') + \mathrm{q(x)}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$$

Equações diferenciais de 2ª ordem

Substituindo na equação diferencial:

$$\boldsymbol{c_1 y_1''} + c_2 y_2'' + \mathrm{p(x)}(\boldsymbol{c_1 y_1'} + c_2 y_2') + \mathrm{q(x)}(\boldsymbol{c_1 y_1} + c_2 y_2) = 0$$

Que é equivalente a

$$\boldsymbol{c_1}(\boldsymbol{y_1''} + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y_1'} + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y_1}) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)\, y_2) = 0$$

Dado que $\boldsymbol{y_1}$ e $\boldsymbol{y_2}$ são soluções da equação esta soma anula-se e z(x) a combinação linear das duas soluções é uma solução da equação diferencial

Solução da equação homogénea

Teorema: O espaço de soluções da equação homogénea de grau *n* é um espaço de dimensão *n* onde há *n* soluções linearmente independentes e qualquer solução particular da equação pode ser expressa como combinação linear dessas *n* soluções. Para verificar a independência linear de n funções, o determinante designado por Wronskiano tem de ser diferente de zero. Para $n = 2$ têm-se:

O Wronskiano W=$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

Equações diferenciais homogéneas de 2ª ordem com coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = 0$$

$y(x_0)$=y_0 e $y'(x_0)$=y'_0 condições iniciais

onde $a\ e\ b\ são\ constantes$

Solução da equação homogénea com coeficientes constantes

- O teorema anterior também se verifica - princípio da sobreposição:

Se $y_1(\mathrm{x})$ e $y_2(\mathrm{x})$ são soluções da equação homogénea

$$y'' + ay' + by = 0$$

então $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$

também o é

Solução da equação homogénea

- As soluções têm que ter segunda derivada não nula $y(\mathrm{x}) = e^{rx}$
- Qualquer que seja a ordem a derivada depende da função e^{x}!!!
- Vamos procurar soluções do tipo: $\boldsymbol{y(x) = e^{rx}}$

Solução da equação homogénea

O espaço de soluções da equação homogénea é um espaço de dimensão 2

$$y_1(\mathrm{x}) = e^{r_1 x} \text{ e } y_2(\mathrm{x}) = e^{r_2 x}$$

O Wronskiano W= $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

W= $\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1+r_2)x} - r_1 e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$

Solução da equação homogénea

$y'' + ay' + by = 0 \; y(\mathrm{x}) = e^{rx}, \qquad \mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \mathrm{r}e^{rx}, \mathrm{y}'' = r^2 e^{rx}$

Substituindo na equação homogénea:

$$r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$$

$\boldsymbol{r^2 + ar + b = 0}$ **é a equação característica**

Exemplo: Considere a equação homogénea: $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$r^2 e^{rx} - 5re^{rx} + 4e^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 - 5r + 4) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow r = 4 \;\; \vee \; r = 1$$

Solução da equação homogénea

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

Se $y_1(\mathrm{x})$ e $y_2(\mathrm{x})$ são soluções da equação homogénea:

$$y_1(x) = e^{4x},$$

$$y_1'(x) = 4e^{4x},$$

$$y_1''(x) = 16e^{4x}$$

$$16e^{4x} - 20e^{4x} + 4e^{4x} = 0$$

$$e^{4x}(16 - 20 + 4) = 0$$

A solução $y_2(\mathrm{x}) = e^{x}$ também verifica a equação homogénea

Solução da equação homogénea

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

A função $y(x) = C_1\, e^{4x} + C_2 e^{x}$ também é solução da equação:

$$\mathrm{y}(x) = C_1\, e^{4x} + C_2 e^{x}$$

$$\mathrm{y}'(x) = C_1\, 4e^{4x} + C_2\, e^{x}$$

$$\mathrm{y}''(x) = C_1\, 16e^{4x} + C_2\, e^{x}$$

$$C_1\, 16e^{4x} + C_2\, e^{x} - 5(C_1\, 4e^{4x} + C_2\, e^{x}) + 4(C_1\, e^{4x} + C_2 e^{x}) = 0$$

$$C_1\ e^{4x}(16 - 20 + 4) + C_2\, e^{x}(1 - 5 + 4) = 0$$

A solução $\mathbf{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C_1\, e^{4x} + C_2 e^{x}}$ também verifica a equação homogénea

Solução da equação homogénea

A equação homogénea $\boxed{y'' + ay' + by = 0}$

Tem a equação característica $r^2 + ar + b = 0$

De raízes reais $r = r_1 \ e \ r = r_2$

Tem como solução $\boxed{y(x) = C_1\, e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}$

Solução da equação homogénea

- A equação homogénea $y'' + ay' + by = 0$

- Tem a equação característica $r^2 + ar + b = 0$
- de raízes duplas $r_1 = r_2$

- Tem como solução $\boxed{y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}}$

Solução da equação homogénea

- Calcular a solução da equação diferencial:

$$y'' - 6y' + 9 = 0$$

$$r^2 + ar + b = 0 \Leftrightarrow r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.9}}{2} \Leftrightarrow r = 3$$

$$\ldots$$

Solução da equação homogénea

- $y'' + 4y' + 13y = 0$

Considere-se $y(\mathrm{x}) = e^{rx}$, $\quad \mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \mathrm{r}e^{rx}$, $\quad \mathrm{y}'' = r^2 e^{rx}$

Polinómio característico $r^2 + ar + b = 0$

$$r^2 + 4r + 13 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.13}}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{r} = \frac{-4 \pm 6i}{2}$$

Solução da equação homogénea

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Raízes complexas conjugadas do polinómio característico:

$$r_1 = -2 + 3i \quad \rightarrow \quad \alpha + \beta i$$
$$r_2 = -2 - 3i \quad \rightarrow \quad \alpha - \beta i$$

As soluções são combinação linear de $y(x) = e^{(\alpha+\beta i)x}$ e $e^{(\alpha-\beta i)x}$

$$y(x) = Ae^{(\alpha+\beta i)x} + Be^{(\alpha-\beta i)x}$$

Fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i sen\theta$

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta\theta + i sen\beta\theta\,)$$

e $\quad e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta\theta - i sen\beta\theta\,)$

Solução da equação homogénea

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i sen\beta x)$$

e $$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i sen\beta x)$$

As **seguintes** combinações lineares são também soluções:

$$\frac{e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

e

$$\frac{e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x}}{2i} = e^{\alpha x}\mathrm{sen}\beta x$$

E são soluções linearmente independentes então:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\mathrm{sen}(\beta x))$$

Solução da equação homogénea

- $y'' + 4y' + 13y = 0$
- Raízes complexas conjugadas do polinómio característico: $r_1 = -2 + 3i$
  $r_2 = -2 - 3i$

Solução da equação homogénea:

$$\boldsymbol{y(x) = e^{-2x}(C_1\cos(3x) + C_2\operatorname{sen}(3x))}$$

Solução da equação homogénea

- $\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0}$

Determinar a equação característica $r^2 + ar + b = 0$

- Duas raízes reais distintas $r_1 \ e \ r_2$

$$\boldsymbol{y(x) = C_1\, e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}$$

- Raíz real dupla $r_1 = r_2$

$$\boldsymbol{y(x) = C_1\, e^{rx} + C_2 x e^{rx}}$$

- Raízes complexas conjugadas

$$\boldsymbol{y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x))}$$

Equações diferenciais lineares não homogéneas de coeficientes constantes (2ª ordem)

Encontrar a função que verifica a equação

$$\boldsymbol{y'' + a y' + b y = f(x)}$$

com as condições iniciais $y(x_0)=y_0$ e $y'(x_0)=y'_0$

onde $a\ e\ b\ são\ constantes\ e\ f(x)$ é uma função contínua no domínio de validade de $y(x)$

Equações diferenciais de 2ª ordem **de coeficientes constantes**

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

A solução geral da equação, $y(x)$, é igual à soma da solução, da equação homogénea, $y_h(x)$, mais a solução particular da equação, $y_p(x)$:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Solução geral

$$\boldsymbol{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

Onde $y_h(x)$ é a solução geral da equação homogénea

$$\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0}$$ e

$\boldsymbol{y_p\,(x)}$ é uma solução particular da equação não homogénea

(Solução sem constantes - **obtém-se atribuindo valores específicos às constantes de $\boldsymbol{y_h(x)}$**)

Equações diferenciais lineares não homogéneas de coeficientes constantes (2ª ordem)

$$y''+ay'+by=f(x)$$

Método da variação das constantes – Considere-se a solução geral da equação não homogénea:

$$y(x)=C_1(x)u_1(x)+C_2(x)u_2(x)$$

Onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são duas soluções da equação homogénea e $C_1(x)$ e $C_2(x)$ funções a determinar

Método da variação dos parâmetros

$$y(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$$

Escrevendo a equação anterior como um produto escalar

$y = (C, u) \quad \text{com} \quad C = (C_1,\ C_2)$ e $u = (u_1,\ u_2)$

O vetor $\boldsymbol{C}$ vai ser escolhido de forma que satisfaça a equação não homogénea

$y' = (C, u') + (C', u)$ e impõe-se $(C', u) = 0$

Obtendo $y' = (C, u')$

$y'' = (C, u'') + (C', u')$ e impõe-se $(C', u') = f(x)$

Obtendo $y'' = (C, u'') + f(x)$

Método da variação dos parâmetros

Substituindo na equação $\boldsymbol{y''+ay'+by=f(x)}$ obtém-se:

$$(C,u'')+f(x)+a(C,u')+b(C,u)=f(x)$$

ou

$$\boldsymbol{C_1(x)u''_1(x)+C_2(x)u''_2(x)}+f(x)+a\left(\boldsymbol{C_1(x)u'_1(x)+C_2(x)u'_2(x)}\right)$$

$$\boldsymbol{+b\ (C_1(x)u_1(x)+C_2(x)u_2(x))=}$$

$$\boldsymbol{+C_1(x)(u''_1(x)+au'_1(x)+bu_1(x))+}$$

$$\boldsymbol{+C_2(x)(u''_2(x)+au'_2(x)+bu_2(x))+f(x)=f(x)}$$

Uma vez que $u_1(x)$ e $u_2(x)$duas soluções da equação homogénea a equação anterior é satisfeita

Método da variação dos parâmetros

As condições impostas para encontrar o vetor $\boldsymbol{C}$ conduzem à resolução do sistema de $\boldsymbol{n}$ equações em $\boldsymbol{C'_1}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{C'_2}$

$$\begin{cases} C'_1(x)u_1(x) + C'_2(x)u_2(x) = 0 \\ C'_1(x)u'_1(x) + C'_2(x)u'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

Pode ser escrito na forma matricial $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}\mathrm{AX} = A^{-1}\mathrm{B} \Rightarrow X = A^{-1}\mathrm{B}}$$

Método da variação dos parâmetros

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C'_1} \\ \boldsymbol{C'_2} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\mathrm{AX} = A^{-1}\mathrm{B} \Rightarrow X = A^{-1}\mathrm{B}$$

$$\Rightarrow \mathbf{X} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{detA}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u'_2} & \boldsymbol{-u_2} \\ \boldsymbol{-u'_1} & \boldsymbol{u_1} \end{bmatrix} \mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \mathrm{X} = \begin{bmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{W(x)} \begin{bmatrix} u'_2 & -u_2 \\ -u'_1 & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$\text{Sendo } W(x) = det \begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u'_1(x) & u'_2(x) \end{bmatrix} \neq 0$$

Solução particular $y_p(x)$

- Considerando $u_1 \; e \; u_2$ soluções da equação homogénea calculadas pelos métodos descritos e

A solução particular $y_p(x)$, combinação linear de $u_1 \; e \; u_2$ igual a:

$$\boxed{y_p(x) = \boldsymbol{u_1(x)} \int C'_1 \, \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{u_2(x)} \int C'_1 \, \boldsymbol{dx}}$$

Solução particular $y_p(x)$

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{W(x)} \begin{bmatrix} u'_2 & -u_2 \\ -u'_1 & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

- Resolução do sistema pelo método de Cramer

$$C'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ f(x) & u'_2 \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-u_2 f(x)}{W(x)} \qquad C'_2 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u'_1 & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{u_1 f(x)}{W(x)}$$

$$\boldsymbol{y_p(x) = u_1(x) \int \frac{-u_2(x) f(x)}{W(x)} dx + u_2(x) \int \frac{u_1(x) f(x)}{W(x)} dx}$$

Eq. Diferencial $\begin{cases} \boldsymbol{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)} \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)={y'}_0 \end{cases}$

Solução geral:

$$\boldsymbol{y(x)=y_h(x)+y_p(x)= C_1\,u_1(x)+C_2u_2(x)+y_p(x)}$$

onde $\boldsymbol{y_p(x)}$ é **uma** solução particular da equação diferencial de 2ª ordem dada

O método é válido para equações em que p(x) e q(x) não são constantes

Solução da ED $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

- Equação homogénea associada

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Polinómio característico: $r^2 + ar + b = 0$

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4.1.1}}{2} \Leftrightarrow r = -1$$

(raíz dupla)

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

$u_1(x) = e^{-x}$ e $u_2(x) = xe^{-x}$

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x}$$

$$u_1(x)= e^{-x} \quad \text{e} \quad u_2(x)= xe^{-x}$$

$$u'_1(x)=-e^{-x} \quad \text{e} \quad u'_2(x)=e^{-x}(1-x) \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$C'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ f(x) & u'_2 \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}/x & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-xe^{-2x}}{xW(x)}$$

$$C'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u'_1 & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}/x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{e^{-2x}}{xW(x)}$$

Solução da ED $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

$$y_p(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$$

$$u_1(x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad u_2(x) = xe^{-x}$$

$$C_1(x) = \int \frac{\frac{-xe^{-2x}}{x}}{e^{-2x}}\,dx = \int -dx = -x + C$$

$$C_2(x) = \int \frac{-\frac{e^{-2x}}{x}}{e^{-2x}}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$y_p(x) = -x\,e^{-x} + \ln(x)\,xe^{-x}$$

Solução da ED $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

Solução geral: $\boldsymbol{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$

1º - Calcular a solução da equação homogénea associada

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2\, x e^{-x}$$

2º - Calcular uma solução particular

$$y_p(x) = -x\, e^{-x} + x \ln(x)\, e^{-x}$$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2\, x e^{-x} - x\, e^{-x} + x \ln(x)\, e^{-x}}$$

Solução da ED $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

Solução geral: $\boldsymbol{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$

$$\boxed{y(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, xe^{-x} - x\, e^{-x} + x\ln(x)\, e^{-x}}$$

$$xe^{-x}\,(C_2 - 1) = C_2\; xe^{-x}$$

$$\boxed{y(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, xe^{-x} + x\ln(x)\, e^{-x}}$$

Solução da ED $y'' + y = tg\,(x)$

- Equação homogénea associada

$$y'' + y = 0$$

Polinómio característico: $r^2 + ar + b = 0$

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow r = \pm \mathrm{i} \text{ (raízes imaginárias)}$$

$$y_h(x) = C_1\, e^0 cos(x) + C_2 e^0 sen(x)$$

$$y_h(x) = C_1\, cos(x) + C_2 sen(x)$$

$$u_1(x) = cos(x) \quad \text{e} \quad u_2(x) = sen(x)$$

Solução da ED $y'' + y = tg\,(x)$

Solução particular: $y_p(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$

$u_1(x) = cos(x)$ e $u_2(x) = sen(x)$

$u'_1(x) = -\,sen(x)$, $u'_2(x) = cos(x)$ e $f(x) = g(x)$

$$\begin{cases} C'_1 cosx + C'_2 senx = 0 \\ -C'_1 senx + C'_2 cosx = tgx \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{vmatrix} = cos^2 x + sen^2 x = 1$$

Solução da ED $y'' + y = tg\,(x)$

$$u_1(x) = cos(x) \quad \text{e} \quad u_2(x) = sen(x)$$

$$u'_1(x) = -sen(x), \quad u'_2(x) = cos(x) \quad e \quad f(x) = g(x)$$

$$C'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ f(x) & u'_2 \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{senx} \\ \boldsymbol{tgx} & \boldsymbol{cosx} \end{vmatrix}}{1} = -senx\,.\,tgx$$

$$C_1(x) = \int -senx\frac{senx}{cosx}dx = \int -\frac{sen^2x}{cosx}dx \int -\frac{1-cos^2x}{cosx}dx$$

$$= \int (cos - secx)dx = senx - \ln|secx + tgx| + C$$

Solução da ED$y'' + y = tg\,(x)$

$$C'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u'_1 & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{cosx} & 0 \\ \boldsymbol{-senx} & \boldsymbol{tgx} \end{vmatrix}}{1} = cosx\,.\,tgx$$

$$C_2(x) = \int cosx\; tgx dx = \int cosx \frac{senx}{cosx} dx = \int senx\, dx$$

$$= -cosx + C$$

$$\boldsymbol{y_p(x) = [senx - ln|secx + tgx|]cosx + (-cosx)\,senx}$$

$$\boldsymbol{y_p(x) = -\,ln|secx + tgx|\,cosx}$$

Solução da ED $y'' + y = tg\,(x)$

Solução geral: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

1º - Calcular a solução da equação homogénea associada

$$y_h(x) = C_1\cos(x) + C_2 sen(x)$$

2º - Calcular uma solução particular

$$y_p(x) = -ln|secx + tgx|\,cosx$$

$$\boxed{y(x) = C_1\cos(x) + C_2 sen(x) - ln|secx + tgx|\,cosx}$$

INTEGRAL IMPRÓPRIO

Seja $\boldsymbol{a, b \in R\ e\ a < b.\ Se\ f(x)}$é $\boldsymbol{integr}$á$\boldsymbol{vel\ em\ [a, x]\ com}$

$\boldsymbol{x\ [a, b].\ Se\ f(x)}$é $\boldsymbol{limitada\ em[a, b\ ]\ verifica - se}$:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

consequência da continuidade do integral indefinido

INTEGRAL IMPRÓPRIO

Se o intervalo de integração não é limitado ou seja é da forma

$$[\boldsymbol{a}, +\infty[\quad \boldsymbol{ou} \quad]-\infty, \boldsymbol{b}] \quad \boldsymbol{ou} \quad (-\infty, +\infty)$$

Ou quando a função integranda tem descontinuidade infinita num ponto *c* do domínio de integração, ou seja

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Os integrais são designados integrais impróprios

INTEGRAL IMPRÓPRIO

INTEGRAIS IMPRÓPRIOS DE 1ª ESPÉCIE

Seja $\boldsymbol{f}$ ***uma função definida no intervalo*** $\boldsymbol{I = [a, +\infty[}$**. Se** $\boldsymbol{f}$ **é uma *função integrável num intervalo*** $\boldsymbol{[a, x[}$ **com** $\boldsymbol{x > a}$**, e:**

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

INTEGRAL IMPRÓPRIO (1ª espécie)

Se $\varphi(x)$ tem limite finito quando $x \to +\infty$ diz-se que f é integrável (em sentido impróprio) no intervalo I, ou que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt$$

existe ou é convergente:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

INTEGRAL IMPRÓPRIO

INTEGRAIS IMPRÓPRIOS DE 2ª ESPÉCIE

Seja $I =]a, b[$ ***um intervalo limitado e*** f **é uma** ***função cujo domínio contem o intervalo I. Adita-se que*** f ***é integrável em qualquer intervalo da forma*** $[x, b]$ **com** $a < x < b$ **, mas não é limitada em** I**. Diz-se que o integral de** f **existe ou é convergente sse a função** $\int_x^b f(t)dt$ **tiver limite quando** $x \to a^+$**:**

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$$

INTEGRAL IMPRÓPRIO - APLICAÇÃO

Verifique se o integral impróprio existe:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}}\,\boldsymbol{dx} = \lim_{t\to-\infty} \int_{\boldsymbol{t}}^{0} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}}\,\boldsymbol{dx} =$$

$$\lim_{t\to-\infty} \left[-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}\right]_{\boldsymbol{t}}^{\mathbf{0}} = \lim_{t\to-\infty} \left(-\mathbf{2} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{t}}\right) = +\infty$$

O integral impróprio diverge

INTEGRAL IMPRÓPRIO - APLICAÇÃO

Verifique se o integral impróprio existe:

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t \frac{1}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$\lim_{t\to 2^-}\left[-\frac{1}{x-2}\right]_1^t = \lim_{t\to 2^-}\left(-\frac{1}{t-2}-1\right) = +\infty$$

O integral impróprio diverge