INTEGRAL IMPRÓPRIO

Seja $\boldsymbol{a, b \in R \; e \; a < b}$. $\boldsymbol{Se\ f(x)}$é $\boldsymbol{integr}$á$\boldsymbol{vel\ em\ [a, x]\ com}$

$\boldsymbol{x\ [a, b]}$. $\boldsymbol{Se\ f(x)}$é $\boldsymbol{limitada\ em[a, b\ ]\ verifica - se}$:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

consequência da continuidade do integral indefinido

INTEGRAL IMPRÓPRIO

Se o intervalo de integração não é limitado ou seja é da forma

$$[\boldsymbol{a}, +\infty[\quad \boldsymbol{ou} \quad]-\infty, \boldsymbol{b}] \quad \boldsymbol{ou} \quad (-\infty, +\infty)$$

Ou quando a função integranda tem descontinuidade infinita

num ponto *c* do domínio de integração, ou seja

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Os integrais são designados integrais impróprios

INTEGRAL IMPRÓPRIO

INTEGRAIS IMPRÓPRIOS DE 1ª ESPÉCIE

Seja f uma função definida no intervalo $I = [a, +\infty[$. **Se f é uma *função integrável num intervalo* $[a, x[$ com $x > a$, e:**

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

INTEGRAL IMPRÓPRIO (1ª espécie)

Se $\varphi(x)$ tem limite finito quando $x \to +\infty$ diz-se que f é integrável (em sentido impróprio) no intervalo I, ou que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

existe ou é convergente:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

INTEGRAL IMPRÓPRIO

INTEGRAIS IMPRÓPRIOS DE 2ª ESPÉCIE

Seja $I =]a,b[$ ***um intervalo limitado e*** f **é uma *função cujo domínio contem o intervalo I. Adita-se que f é integrável em qualquer intervalo da forma*** $[x,b]$ **com** $a < x < b$ **, mas não é limitada em** I**. Diz-se que o integral de** f **existe ou é convergente sse a função** $\int_x^b f(t)dt$ **tiver limite quando** $x \to a^+$**:**

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$$

INTEGRAL IMPRÓPRIO - APLICAÇÃO

Verifique se o integral impróprio existe:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx =$$

$$\lim_{t \to -\infty} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{t}^{0} = \lim_{t \to -\infty} \left(-2 + 2\sqrt{1-t}\right) = +\infty$$

O integral impróprio diverge

INTEGRAL IMPRÓPRIO - APLICAÇÃO

Verifique se o integral impróprio existe:

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{t\to 2^-} \int_1^t \frac{1}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$\lim_{t\to 2^-} \left[-\frac{1}{x-2}\right]_1^t = \lim_{t\to 2^-} \left(-\frac{1}{t-2} - 1\right) = +\infty$$

O integral impróprio diverge