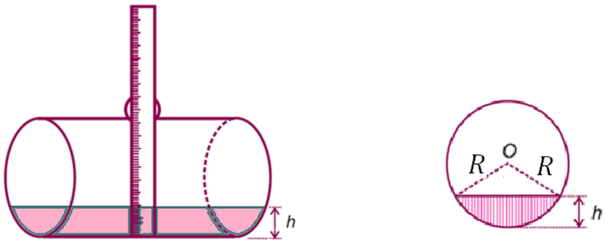
Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação
EIC0004 ANÁLISE MATEMÁTICA – 2016/2017
1º Semestre – RECURSO GLOBAL – 26 Janeiro 2017
Duração da prova : 2h

Teste sem consulta. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste.

GRUPO I

1. Considere a figura seguinte que representa um depósito cilíndrico de combustível (como os que se encontram enterrados nos postos de venda ao público) em que o raio da secção transversal do depósito é uma constante R.



Para um nível de combustível h inferior a R, a área da secção transversal de líquido é dada por:

$$A = R^2\left[\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)-\left(\frac{R-h}{R^2}\right)\ \sqrt{R^2-(R-h)^2}\right].$$

Considere o depósito cilíndrico com 4 metros de comprimento e raio R=1 metro. Enche-se o depósito à razão de 1 m^3/hora. <u>Usando a regra de derivação em cadeia</u>, calcule a taxa de variação do nível de combustível $\frac{dh}{dt}$ quando o nível h atinge metade do raio R.

2. <u>Esboce a região Q</u> do plano limitada horizontalmente pelos gráficos das funções $y = 0$ e $y = |\cos(x)|$ e verticamente pelas retas $x = 0$ e $x = \pi$. <u>Determine a área da região Q</u>.

GRUPO II

3. Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:

a) $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}dx$ b) $\int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-1)}dx$ c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

4. Considere a curva C de equação polar $r = 2+sen\theta$

a) Determine o domínio, eixos de simetria e esboce o gráfico da referida curva usando coordenadas polares.

b) Identifique e calcule a área da região do plano interior à curva C.

GRUPO III

5. Calcule a solução geral da equação diferencial:

$$2y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \quad , \qquad x > 0$$

6. Utilizando as técnicas das transformadas de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y'' - y = \begin{cases} 4e^t \ , & 0 < t < \pi \\ 0 \ , & t > \pi \end{cases} , \qquad y(0) = \ y'(0) = 0$$

GRUPO IV

7. Investigue a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+n}{2^n}\right)$ justificando de forma conveniente.

8. Considere a função $f(x)$ de período 2π,

$$f(x) = x^2 \ , \qquad -\pi < x < \pi$$

a) Esboce o gráfico da função no intervalo $-3\pi < x < 3\pi$.

b) Calcule os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$: a_0, a_n e b_n; escreva a fórmula geral da série de Fourier de $f(x)$.

Tabela de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
3	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s > 0$
4	t^n, $n \in \mathbf{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
5	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	$s > \gamma + a$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
7	$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s > 0$
8	$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s > 0$
9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
11	$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
12	$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$
13	$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n [F(s)]^{(n)}$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \qquad \mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$