Unidade Curricular: EIC0004 Análise Matemática - MIEIC 2017/2018

➢ Transformada de Laplace

➢ Aplicação à resolução de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

Bibliografia auxiliar :

Problemas de equações diferenciais ordinárias e transformadas de Laplace, Capítulo 4 - Luísa Madureira – FEUP edições

Novembro de 2017 - Prof. Catarina Castro (M304)

CC

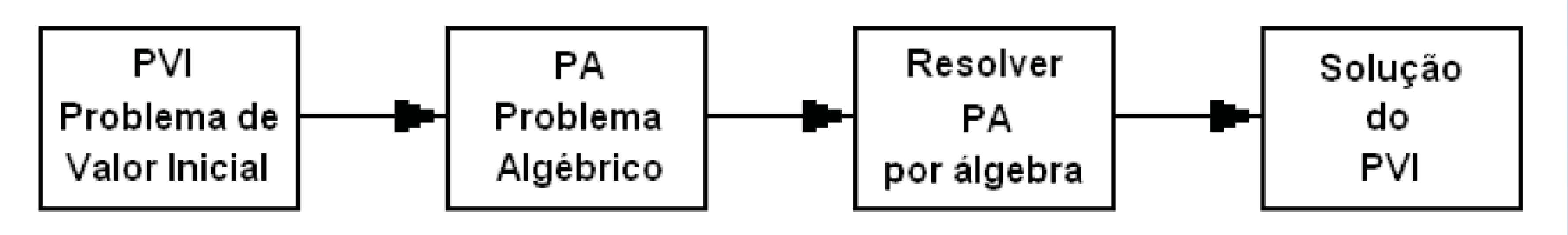
Transformada de Laplace

Introdução

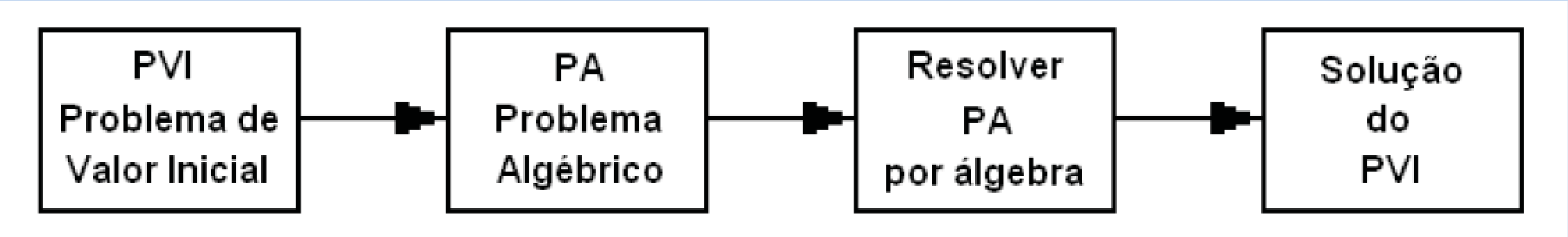
O método da Transformada de Laplace é uma ferramenta importante usada na resolução de equações diferenciais, em particular das EDO's lineares com coeficientes constantes e dos correspondentes problemas de valor inicial (PVI's).

A obtenção da solução de um problema consiste em:

- 1) A EDO dada é transformada numa equação algébrica (equação subsidiária) com o objetivo de diminuir o grau de dificuldade do problema e simplificá-lo ;
- 2) A equação subsidiária é resolvida através de manipulação algébrica;
- 3) A solução obtida, através de manipulação, é transformada novamente, via operador inverso, para se obter a solução do problema.



A primeira e terceira etapas são facilitadas usando tabelas específicas de Transformadas de Laplace e a segunda etapa requer alguma capacidade de manipulação algébrica.



<u>Exemplo-</u> Considere a EDO linear homogénea de ordem 1

$$y'(t) + 5y(t) = 0 \text{ com a condição inicial } y(0) = 10.$$

A obtenção da solução de um problema consiste em:

1) A EDO é transformada numa equação algébrica aplicando o <u>operador de Laplace</u> a ambos os membros da equação

$$\mathcal{L}[y'(t) + 5y(t)] = \mathcal{L}[0]$$

considerando $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ e usando as propriedades do operador

$$[sY(s) - y(0)] + 5Y(s) = 0$$

2) A equação é resolvida: $Y(s) = \frac{10}{s+5} = 10\ \frac{1}{s-(-5)}$

3) A solução obtida é transformada novamente, via <u>operador inverso</u>, para se obter a solução do problema:

$$y(t) = 10\ e^{-5\,t}$$

Transformada de Laplace

$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$

Transformada de Laplace da função $f(t)$:

$$\boxed{F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt}$$

s, parâmetro
t, variável de integração

$\mathcal{L}(f) = F(s)$

transformada de Laplace da função f

domínio de F: *conjunto de valores s para os quais o integral impróprio é convergente*

- *Unicidade: se a transformada de Laplace de uma dada função existe, é única*

Nomenclatura:

- *funções originais, **minúsculas**. Transformadas, **maiúsculas**.*
- *argumento da função original, **t**. Argumento da transformada, **s***

Exemplo: $\boxed{f(t) = 1, \quad t \in [0, \infty[}$

$$s \neq 0$$

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \lim_{M \to \infty} \int_0^{M} e^{-st}\, dt \overset{\downarrow}{=} \lim_{M \to \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sM} + \frac{1}{s} \right)$$

$s \leq 0 \Rightarrow$ integral divergente

Conclusão: $\boxed{F(s) = \frac{1}{s}, \ \ s > 0}$

Outro exemplo: $$L\left[e^{at}\right](s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^{x} e^{-(s-a)t} dt$$

$$\lim_{x \to \infty} \left. \frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a} \right|_0^x = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - e^{-(s-a)x}}{s-a} = \frac{1}{s-a} \quad s > a$$

Tabela 1 - Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
3	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s > 0$
4	$t^n,\ n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
5	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	$s > \gamma + a$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$

Construção do Formulário das Transformadas de Laplace

Tabela 1 (cont.) - Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
7	$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s > 0$
8	$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s > 0$
9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
11	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
12	$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$
13	$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$

Tabela 1 (cont.) - Transformadas de Laplace

$$\mathfrak{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

Construção do Formulário das Transformadas de Laplace

Cálculo da Transformada de Laplace de uma função

Transformada de Laplace da função $f(t)$:

$$\boxed{F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt}$$

Exemplos:

1. Como se observou logo a seguir à definição de transformação de Laplace, a transformada de Laplace da função $f(t)=1$ é $F(s)=1/s$ para $\operatorname{Re} s > 0$.

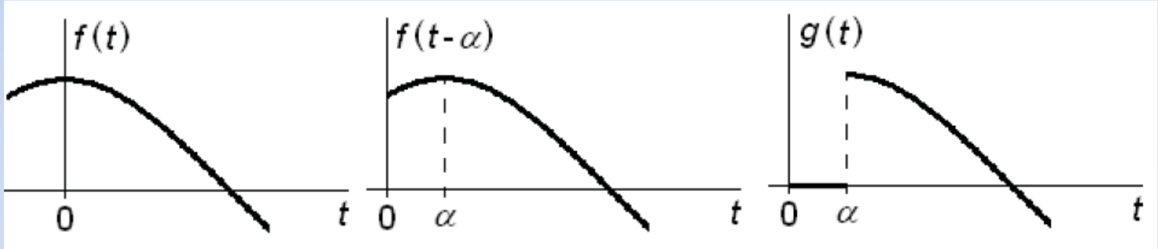
2. A transformada de Laplace de $f(t)=e^{zt}$, com $z \in \mathbb{C}$, pode ser calculada obtendo-se $F(s)=1/(s-z)$ para $\operatorname{Re}\, s > \operatorname{Re} z$.

Propriedade da Translação na frequência (deslocamento em s)

$$L[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$$

Propriedade da Translação no tempo (deslocamento em t)

$$\text{Se } \mathfrak{L}\left[f(t)\right] = F(s) \text{ e } g(t) = \begin{cases} f(t-\alpha) & t > \alpha \\ 0 & t < \alpha \end{cases}, \text{ então } \mathfrak{L}\left[g(t)\right] = e^{-\alpha s} F(s)$$



Propriedade da Linearidade

$$\boxed{\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}}$$

Cálculo de transformadas de Laplace usando as 1ªas Propriedades e a Tabela

Identidade de Euler: $e^{-i\pi} + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad e^{-ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

3. A função $f(t) = \sin at$ com $a \in \mathbb{R}$ satisfaz $f(t) = (e^{iat} - e^{-iat})/(2i)$. Da linearidade da transformação de Laplace e do exemplo anterior conclui-se que a transformada de Laplace de f é

$$F(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0 .$$

4. A função $f(t) = \cos at$ com $a \in \mathbb{R}$ satisfaz $f(t) = (e^{iat} + e^{-iat})/2$. Como no último exemplo, obtém-se que a transformada de Laplace de f é

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0 .$$

Transformada de Laplace – Exemplo usando as propriedades e o formulário

Exemplo : $f(t) = \cosh(at)$

$$\cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \qquad F(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \qquad F(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}$$

$$TL[\cosh(at)] = \frac{1}{2}\{TL[e^{at}] + TL[e^{-at}]\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Função Inversa da Transformada de Laplace

Se $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$, então,

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$$

transformada inversa da função F

- *Unicidade: se a transformada de Laplace de uma dada função existe, é única*

A inversa de uma transformação linear também é linear:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

A Tabela de transformadas de Laplace é também Tabela de transformadas da inversa de Laplace

1 Tabela de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio		$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	1	$\frac{1}{s}$	$s>0$	**7**	$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s>0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$s>0$	**8**	$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s>0$
3	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s>0$	**9**	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
4	$t^n,\ n\in\mathbf{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$	**10**	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
5	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$s>\gamma+a$	**11**	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$	**12**	$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s>a$
				13	$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s>a$

$$\mathcal{L}(f')=s\mathcal{L}(f)-f(0),\quad \mathcal{L}(f'')=s^2\mathcal{L}(f)-sf(0)-f'(0).$$

Verifique que se $f(t)=e^t$, então $\mathcal{L}(f)=\dfrac{1}{s-1}$, $s>\mathbf{1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^t$$

Exemplos de aplicação das propriedades de linearidade:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{2t}+e^{-3t}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\right\}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+3}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right\}=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=-1+e^t$$

Exemplo de cálculo da Função Inversa da Transformada de Laplace

Seja $$X(s) = \frac{(s+2)}{s\,(s+1)(s+4)}$$

Vamos decompor em frações simples

$$X(s) = \frac{(s+2)}{s\,(s+1)(s+4)} \quad = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4}$$

calcular A, B e C

$$A(s+1)(s+4)\Big|_{s=0} = s+2 \Rightarrow A = 0.5$$

$$B(s)(s+4)\Big|_{s=-1} = s+2 \Rightarrow B = -1/3$$

$$C(s)(s+1)\Big|_{s=-4} = s+2 \Rightarrow C = -1/6$$

Resposta: $$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

Transformada de Laplace da derivada de uma função

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

Transformada de Laplace do integral de uma função

$$L\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

A transformada de Laplace transforma
derivadas em multiplicações por s e **integrais em divisões por s**

Transformada de Laplace da derivada de uma função

A transformada de Laplace transforma derivadas em multiplicações por s

$$L\{f'(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)\, dt$$

Vamos primitivar por partes: $\int uv' = uv - \int u'v$ $\quad u = e^{-st} \quad u' = -s\, e^{-st}$

$$v' = f'(t) \qquad v = f(t)$$

$$\int e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st}\, f(t) - \int (-s\, e^{-st}\, f(t))\, dt$$

$$= e^{-st}\, f(t) + s \underbrace{\int e^{-st}\, f(t)\, dt}_{= F(s)}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \underbrace{\left(e^{-st}\, f(t) \Big|_0^{\infty} \right)}_{= -f(0)} + s\, F(s)$$

$$L\{f'(x)\} = s\, F(s) - f(0)$$

$$L\{f'(x)\} = s\,F(s) - f(0)$$

Transformada de Laplace da derivada de ordem n:

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'''\} = s^3\mathcal{L}\{f\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Transformada de Laplace do integral de uma função

$$L\left[\int_0^t f(\theta)d\theta\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Seja $g(t) = \int_0^t f(\theta)d\theta \xrightarrow[\text{então}]{} g'(t) = f(t)$

$$L\{g'(t)\} = s \cdot L\{g(t)\} - g(0) \qquad L\{f(t)\} = s \cdot L\left\{\int_0^t f(\theta)d\theta\right\} - \underbrace{\cancel{g(0)}}_{=0}$$

$$L\left\{\int_0^t f(\theta)d\theta\right\} = \frac{L\{f(t)\}}{s} \qquad L\left\{\int_0^t f(\theta)d\theta\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

A transformada de Laplace transforma integrais em divisões por s

Consequência da Transformada de Laplace do integral é a Transformada de Laplace da função Potência:

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n\epsilon\mathbb{N}}$$

Derivada da Transformada de Laplace (multiplicação por t^n)

Se $\mathfrak{L}\left[f(t)\right]=F(s)$, então $\mathfrak{L}\left[-t f(t)\right]=F'(s)$.

Deve-se assumir que é possível derivar sob o sinal de integração:

$$F'(s)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}f(t)\right]dt=\int_0^\infty (-t)e^{-st}f(t)dt=\mathfrak{L}\left[-t f(t)\right].$$

Repetindo-se a operação, obtém-se $\mathfrak{L}\left[t^2 f(t)\right]=F''(s)$,

e de maneira mais geral

$$\mathfrak{L}\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n F^{(n)}(s)=(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial s^n}\mathfrak{L}\left[f(t)\right].$$

Transformada de Laplace – Transformada do integral de convolução

Define-se Convolução de f com g

$$f * g \equiv \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

A Transformada da Convolução é:

$$L\{f * g\} = L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(s)G(s)$$

Nota: $L\{f(t) \cdot g(t)\} \neq F(s) \cdot G(s)$

Exemplo $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

$$L\{f*g\} = L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(s)G(s)$$

$$F(s)G(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s^2+1)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1 \qquad G(s) = \frac{1}{(s^2+1)} \Rightarrow g(t) = \sin(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = f*g = \int_0^t f(\tau-t)g(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t sin(\tau)d\tau = 1-\cos(t)$$

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathbf{1} - \boldsymbol{cos(t)}}$$

Exercício 2- e) das práticas das Transformadas de Laplace:

$$\text{Calcular } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)$$

Resolução possível:

Se a Transformada da convolução de f e g, $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s)G(s)$

$$\text{então } \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = (f * g)(t).$$

Seja $F(s) = G(s) = \frac{1}{(s^2+1)}$.

Pelas Tabelas da Transformada de Laplace temos que $f(t) = g(t) = sen(t)$

A definição de convolução de 2 funções é definida como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(x-t)dx = \int_0^t sen(x)\ sen(t-x)dx$$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(x-t)dx = \int_0^t sen(x)\ sen(t-x)dx$$

$$= \int_0^t sen(x)[sen(t)\cos(x) - \cos(t)\, sen(x)]dx$$

$$= \int_0^t sen(t)sen(x)\cos(x) - cos(t)\ sen^2(x)dx$$

Primitivando

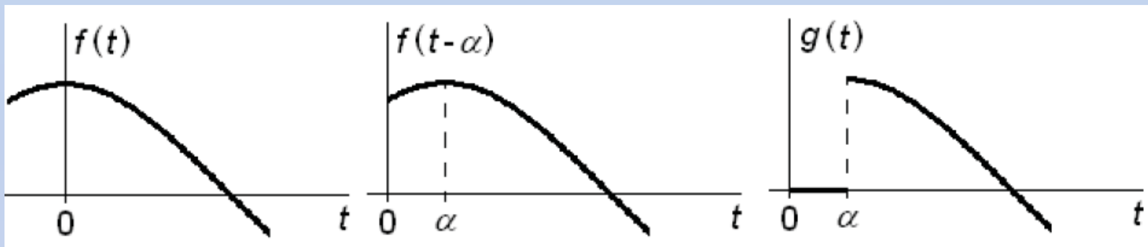
$$(f * g)(t) = \left(sen(t)\frac{sen^2(x)}{2} - \cos(t)\frac{x - sen(x)\cos(x)}{2} \right)\Bigg|_0^t$$

$$= \frac{sen(t)}{2} - \frac{t\ cos(t)}{2}$$

Resultado: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{sen(t)}{2} - \frac{t\ cos(t)}{2}$

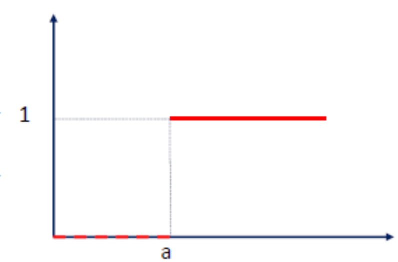
Propriedade da Translação no tempo (deslocamento em t)

$$\text{Se } \mathfrak{L}\left[f(t)\right] = F(s) \ \text{ e } \ g(t) = \begin{cases} f(t-\alpha) & t > \alpha \\ 0 & t < \alpha \end{cases}, \quad \text{então } \ \mathfrak{L}\left[g(t)\right] = e^{-\alpha s}F(s)$$

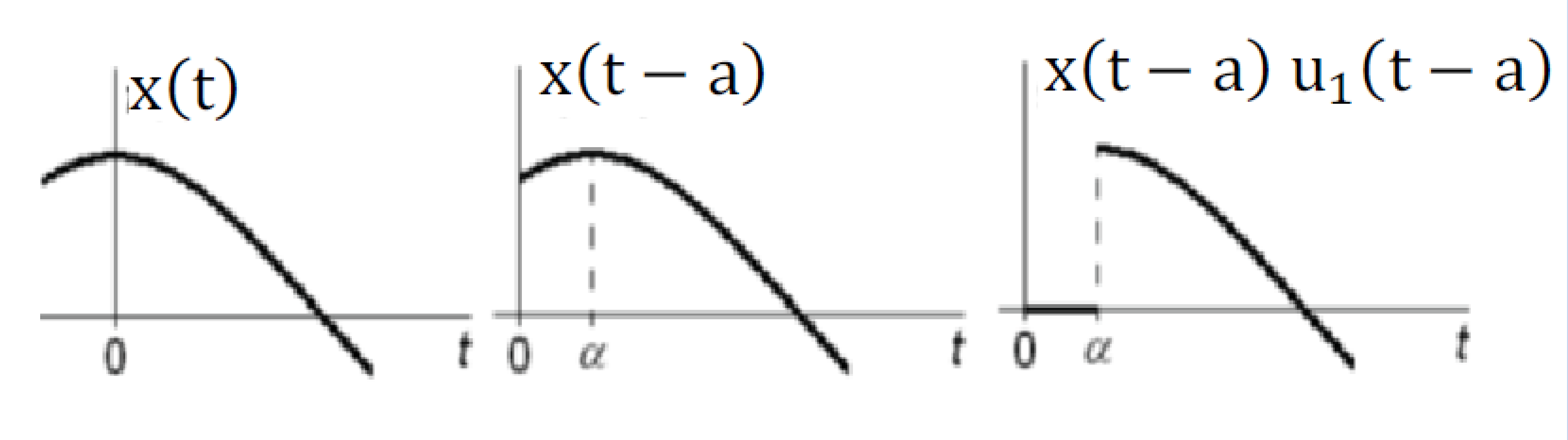


Considerando a função de Heaviside (ou degrau):

$$u_a(x) = u(x-a) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ 1 & , x > a \end{cases}$$



$$L[u(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$



$$\mathscr{L}\,[\ x(t-a)\,u_1(t-a)\ ] = e^{-as}\,\mathscr{L}\,[x(t)] = e^{-as}\cdot X(s)$$

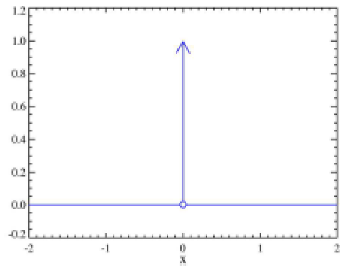
$$\mathscr{L}\,[\ e^{-at}x(t)\ ] = X(s+a)$$

Estas duas propriedades são duais uma da outra :

a transformada do *sinal transladado* fica multiplicada por uma *exponencial*,

a transformada de um sinal multiplicado por uma *exponencial*

Função Impulso



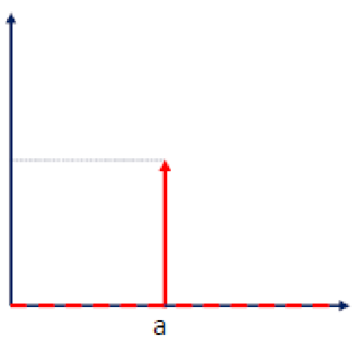
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & ,t \neq 0 \\ \infty & ,t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_a^b \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0) \qquad \forall t_0 \in [a, b] \; e \; f(t) \text{ contínua em } x_0$$

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

Função δ-Dirac

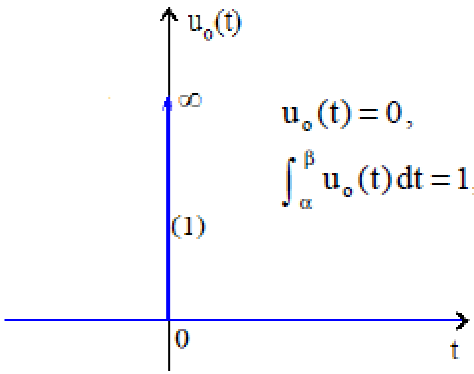


$$\delta(t - a) = \begin{cases} 0 & ,t \neq a \\ \infty & ,t = a \end{cases}$$

$$L\{\delta(t - a)\} = e^{-as}$$

O sinal impulso unitário ("*unit impulse*"):

O sinal impulso unitário contínuo também é chamado de *função delta* ou *delta de Dirac*, em alusão ao físico e matemático britânico Paul Adrien Maurice Dirac (1902- 1982). O impulso unitário tem a seguinte notação: $u_o(t)$ ou $\delta(t)$

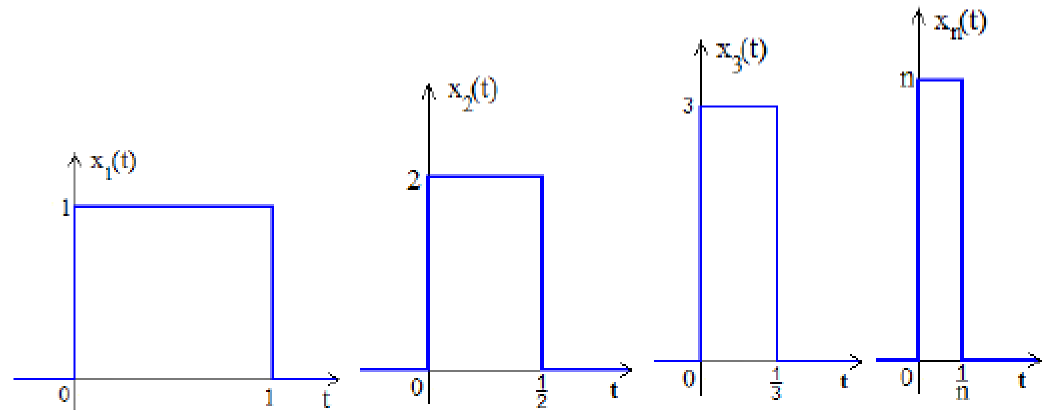


$$u_o(t) = 0, \qquad t \neq 0$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} u_o(t)\,dt = 1, \qquad \alpha < 0 < \beta$$

O sinal impulso unitário contínuo $u_o(t)$

O impulso unitário $u_o(t)$ pode ser interpretado como o limite de uma sequência de pulsos de área 1.



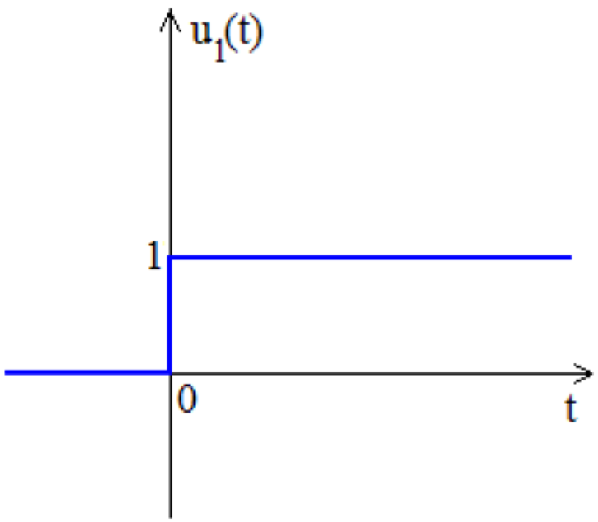
Sequência de pulsos de *área* igual a 1 que convergem para o sinal impulso unitário contínuo $u_o(t)$.

Transformada de Laplace do impulso unitário $u_o(t)$ é dada por:

$$\mathscr{L}[u_o(t)] = 1$$

O sinal degrau unitário ("*unit step*"):

A notação do degrau unitário contínuo é: $u_1(t)$ ou $u(t)$

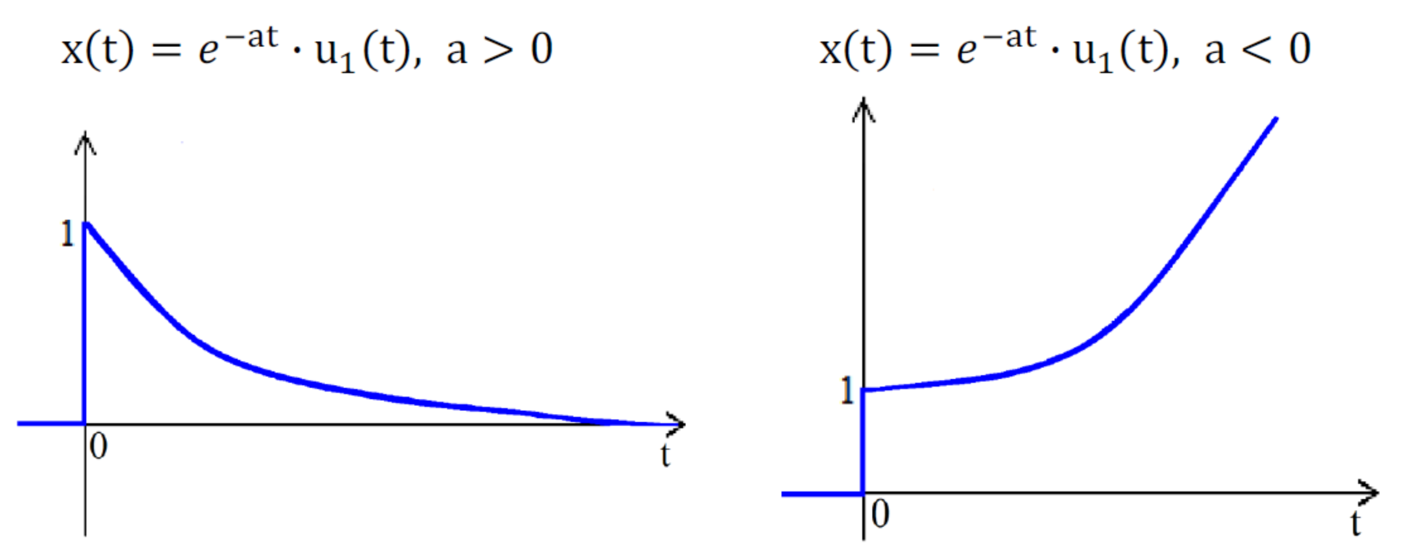


$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Novamente, pela definição da Transformada de Laplace

$$\mathscr{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot u_1(t)\, dt \;\; = \left. \frac{-1}{s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Os sinais $x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t)$, para $a > 0$, exponencial decrescente (à esquerda), e para $a < 0$, exponencial crescente (à direita).

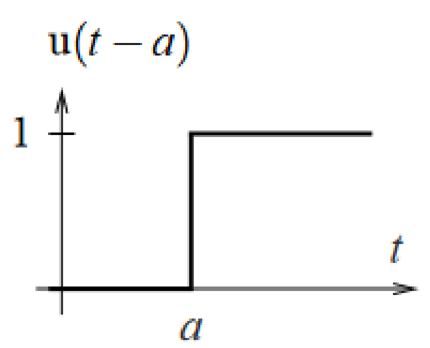


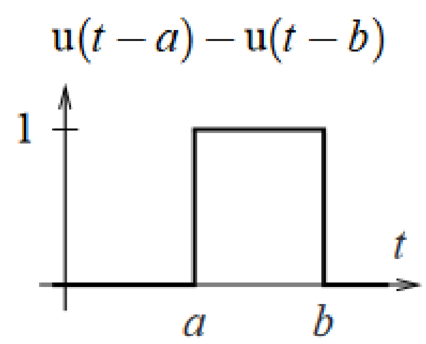
Calculando a Transformada de Laplace de um sinal exponencial $x(t)$, pela definição

$$\mathscr{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-at}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t(s+a)} \cdot\, dt = \left. \frac{-1}{(s+a)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

interessante observar que se pode criar outras funções





baseando-se na função degrau unitário.

1. Determine a transformada de Laplace das seguintes funções

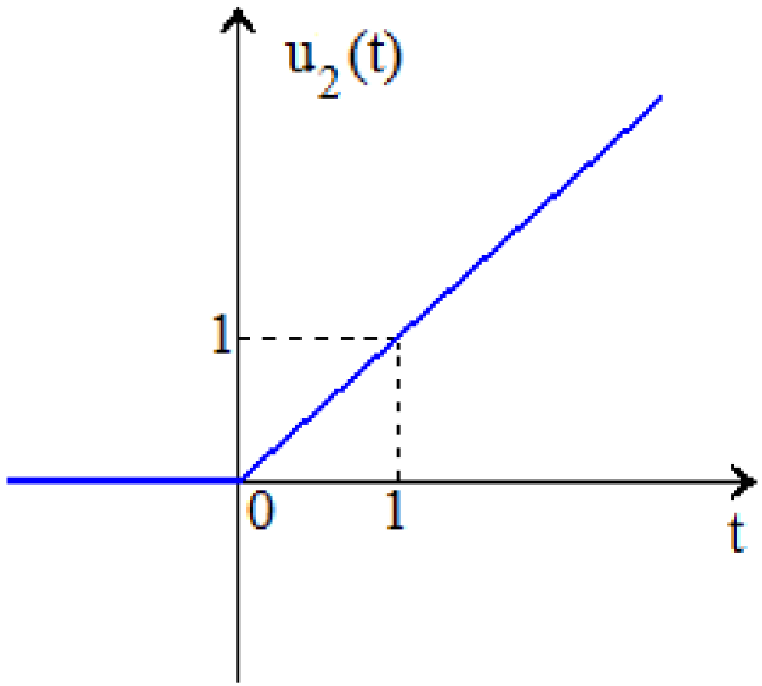
(a) $f(t) = t^2 u(t-2)$ R: $F(s) = \frac{4s^2+4s+2}{s^3} e^{-2s}$

(b) $f(t) = e^{2t}(t-5)u(t-5)$ R: $F(s) = \frac{e^{-5(s-2)}}{(s-2)^2}$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathscr{L}\left[\, x(t-a)\, u_1(t-a) \,\right] = e^{-as}\, \mathscr{L}\left[x(t)\right] = e^{-as} \cdot X(s) \\ \mathscr{L}\left[\, e^{-at} x(t) \,\right] = X(s+a)\end{gathered}}$$

O sinal rampa unitária ("*unit ramp*"):

A notação da rampa unitária contínua é: $u_2(t)$



$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

a Transformada de Laplace

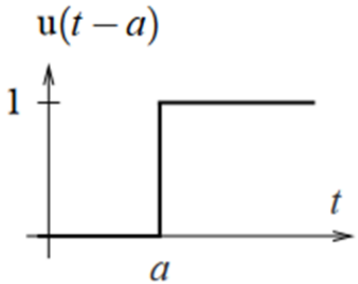
$$\mathscr{L}[u_2(t)] = \frac{1}{s^2}$$

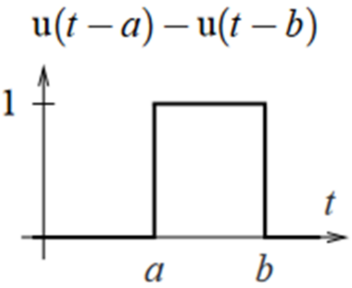
Portanto, um o impulso, ou função delta de Dirac, fica bem determinado pela sua *área*, o degrau pela sua *amplitude* e a rampa pelo seu *declive* (ou *inclinação*).

Se multiplicarmos a rampa unitária $u_2(t)$ por uma constante $C \neq 0$ obtemos uma rampa, mas neste caso <u>não unitária</u>, uma rampa de *declive* (ou *inclinação*) C, onde C pode ser até mesmo negativo.

Exemplo

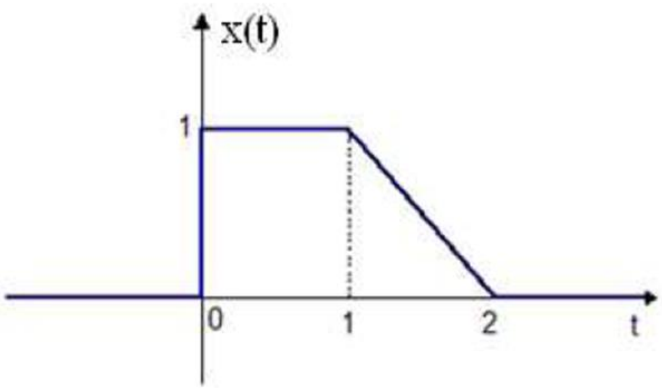
interessante observar que se pode criar outras funções

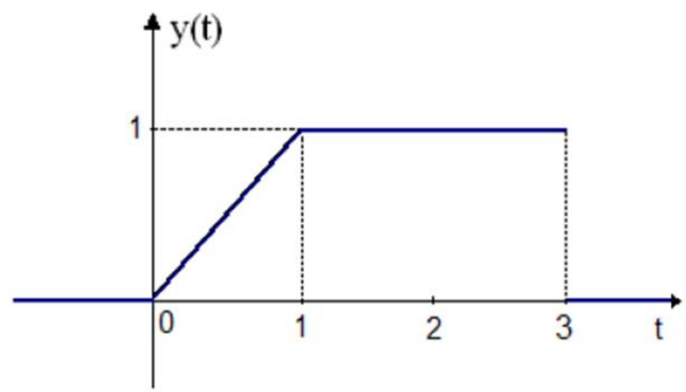




baseando-se na função degrau unitário.

Exemplo

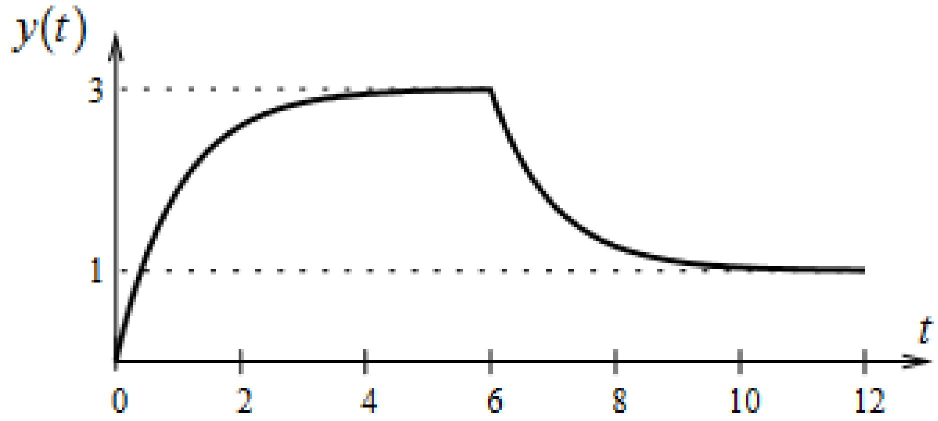




Os sinais x(t) e y(t) podem ser expressos por degraus e rampas.

$$x(t) = u_1(t) - u_2(t-1) + u_2(t-2) \qquad y(t) = u_2(t) - u_2(t-1) - u_1(t-3)$$

Exemplo $y(t) = 3\left(1 - e^{-t}\right) - 2\left(1 - e^{-t+6}\right)\mathrm{u}(t-6).$



$$Y(s) = \frac{3}{s(s+1)} - e^{-6s}\frac{2}{s(s+1)} = \frac{3}{s^2+s} - e^{-6s}\frac{2}{s^2+s}$$

$$Y(s) = \frac{3 - 2e^{-6s}}{s^2+s}$$

Resolução de um problema de valor inicial associado a uma equação diferencial linear (EDL) de coeficientes constantes usando a Transformada de Laplace

Solução de equações diferenciais usando Transformada de Laplace

espaço t

espaço s

Problema dado

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = 1$$

$\mathscr{L}$

Equação subsidiária

$$s^2Y + 4sY + 3Y = 3s + 13$$

Solução da equação subsidiária

$$Y = \frac{-2}{s+3} + \frac{5}{s+1}$$

$\mathscr{L}^{-1}$

Solução do problema dado

$$y(t) = -2e^{-3t} + 5e^{-t}$$

Aplicação:

Resolução de um problema de valor inicial associado a uma equação diferencial linear (EDL) de coeficientes constantes usando a Transformada de Laplace

Exemplo:

$$y'' + 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^t\} \quad \Leftrightarrow$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy_0 - y_0' + 3\left[s\mathcal{L}\{y\} - y_0\right] + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^t\}$$

Resolvendo em ordem à Transformada:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy_0 - y_0' + 3\left[s\mathcal{L}\{y\} - y_0\right] + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^t\}$$

Resolvendo em ordem à Transformada:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\mathcal{L}\{e^t\} + (s+3)y_0 + y_0'}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+2}$$

Aplicando a Transformada Inversa:

$$y(t) = \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Obtem-se a solução:

$$y(t) = \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t}$$

Exemplo: Resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1$$

$$L[y''(x)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \qquad L[y''(x)] = s^2Y - s - 1$$

$$L[y'(x)] = sY(s) - y(0) \qquad L[y'(x)] = sY - 1$$

Aplicando a tranformada em ambos os lados

$$L\{y'' + 2y' + y\} = L\{e^{-t}\}$$

$$L\{y''\} + 2L\{y'\} + L\{y\} = L\{e^{-t}\}$$

$$(s^2Y - s - 1) + 2(sY - 1) + Y = \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+2s + 1)Y = \frac{1}{s+1} + (s + 3)$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{s+3}{(s+1)^2}$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

Exemplo: Resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \qquad y\ \ (0) =, y'(0) = 1$$

$$Y = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$ Aplicar a Transformada inversa

Está tudo em termos de $(s+1) \to e^{-t}$ $\qquad y(t) = \boldsymbol{e^{-t}} * L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right\}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} = 2t$$

$$\boxed{y(t) = e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)}$$

2. Utilizando transformadas de Laplace, determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais:

(a) $y'' + 4y' + 13y = u(t-3)$, sabendo que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

(b) $y'' + 9y = 4u(t-\pi)$, sabendo que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

(c) $y'' - 2y' - 3y = u(t-4)$, sabendo que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathscr{L}\,[\, x(t-a)\, u_1(t-a) \,] = e^{-as}\, \mathscr{L}\,[x(t)] = e^{-as} \cdot X(s) \\ \qquad \mathscr{L}\,[\, e^{-at} x(t) \,] = X(s+a) \end{array}}$$

Exercícios:

Exemplo Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s-2}{2s^2+2s+2}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. Completando quadrados podemos reescrever $F(s)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s-2}{2s^2+2s+2} = \frac{s-2}{2[s^2+s+1]} = \frac{s-2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\ &= \frac{s+1/2-5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} = \frac{s+1/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} - \frac{5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\ &= \frac{1}{2}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{4}\frac{1}{(s+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4} \end{aligned}$$

Observando a Tabela , usando o 1º Teorema do deslocamento e o Teorema da Linearidade vemos que a função cuja transformada de Laplace é $F(s)$ é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t/2}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Aplicação:

Resolução de um problema de valor inicial associado a uma equação diferencial linear (EDL) de coeficientes constantes usando a Transformada de Laplace

Exemplo Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação acima obtemos

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 5Y(s) = 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 5Y(s) = 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\left(s^2 + 2s + 5\right)Y(s) &= 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + s + 2 \\ &= \frac{4s + 4 + (s+2)(s^2+2s+5)}{s^2+2s+5} \\ &= \frac{s^3 + 4s^2 + 13s + 14}{s^2+2s+5}\end{aligned}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 13s + 14}{(s^2+2s+5)^2}$$

Como o denominador tem somente raízes complexas, para decompor $Y(s)$ em frações parciais vamos encontrar A, B, C e D tais que

$$Y(s) = \frac{As + B}{s^2 + 2s + 5} + \frac{Cs + D}{(s^2+2s+5)^2}$$

ou seja

$$\begin{aligned} s^3+4s^2+13s+14 &= (As+B)(s^2+2s+5)+(Cs+D) \\ &= As^3+(B+2A)s^2+(2B+5A+C)s+(5B+D) \end{aligned}$$

Comparando-se os termos de mesmo grau obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} A & & & & & & & = & 1 \\ 2A & + & B & & & & & = & 4 \\ 5A & + & 2B & + & C & & & = & 13 \\ & & 5B & & & + & D & = & 14 \end{array} \right.$$

que tem solução $A = 1$, $B = 2$, $C = 4$ e $D = 4$. Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+2}{s^2+2s+5} + \frac{4s+4}{(s^2+2s+5)^2} = \frac{s+1+1}{(s+1)^2+4} + 4\frac{s+1}{[(s+1)^2+4]^2} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4} + \frac{2\cdot 2(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2} \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$y(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t + te^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t$$

Aplicação:

EDO linear não homogênea de ordem 1

No circuito *RL*, representado pela figura, um indutor de *H* henrys está disposto em série com um resistor de *R* ohm e com uma fonte de alimentação cuja forma de onda é descrita pela equação $e(t) = V\text{sen}(\alpha t)$. Considere-se o problema de obter a corrente para qualquer instante de tempo, $i(t)$, sabendo que a mesma é nula no instante inicial.

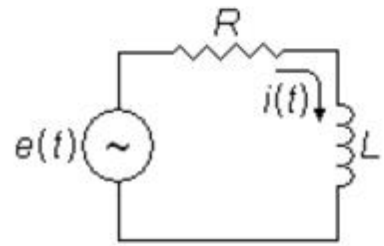


Figura – Circuito *RL*.

Pela segunda Lei de Kirchhoff (Lei das Tensões), a soma algébrica da diferença de potencial elétrico (d.d.p.) em um circuito fechado é nula, logo,

$$e(t) = v_R(t) + v_L(t),$$

onde $v_R(t)$ é a queda de tensão no resistor *R* e $v_L(t)$ é a queda de tensão no indutor *L*.

A queda de tensão no resistor *R* é diretamente proporcional a corrente que circula pelo mesmo, então

$v_R(t) = Ri(t)$. Por outro lado, para qualquer instante de tempo, a queda de tensão num indutor é proporcional à razão da variação da corrente com relação ao tempo,

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}.$$

$Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} = e(t) = V\text{sen}(\alpha t)$, que pode ser reescrita ainda como

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = \alpha V\left(\frac{\text{sen}(\alpha t)}{\alpha}\right).$$

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\alpha V\left(\frac{sen(\alpha t)}{\alpha}\right).$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace obtém-se

$$RI(s)+L\left[sI(s)+i(0)\right]=\alpha V\frac{1}{s^2+\alpha^2}.$$

Como $i(0) = 0$ e $L \neq 0$,

$$\frac{R}{L}I(s)+sI(s)=\frac{\alpha V}{L}\frac{1}{s^2+\alpha^2}.$$ Consequentemente, $$I(s)=\frac{\alpha V}{L}\frac{1}{\left(s^2+\alpha^2\right)}\frac{1}{\left(s+\frac{R}{L}\right)},$$

que, decompondo em frações pode ser reescrita como

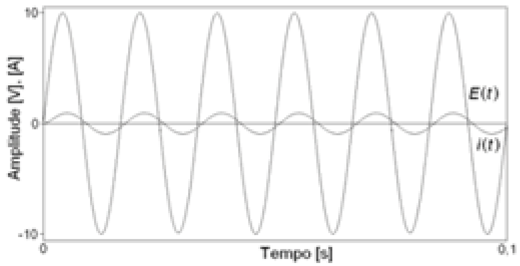
$$I(s)=\frac{\alpha V}{L}\left(\frac{A}{s^2+\alpha^2}+\frac{Bs}{s^2+\alpha^2}+\frac{C}{s+\frac{R}{L}}\right),$$

onde $A=\frac{RL}{R^2+\alpha^2L^2}$, $B=-\frac{L^2}{R^2+\alpha^2L^2}$ e $C=\frac{L^2}{R^2+\alpha^2L^2}$.

$$I(s)=\frac{\alpha V}{R^2+\alpha^2L^2}\left(R\frac{1}{s^2+\alpha^2}-L\frac{s}{s^2+\alpha^2}+L\frac{1}{s-\left(-\frac{R}{L}\right)}\right).$$

Aplicando a transformada inversa obtém-se a função $i(t)$, que representa a corrente do circuito para um instante de tempo qualquer,

$$i(t)=\frac{\alpha V}{R^2+\alpha^2L^2}\left\{\frac{R}{\alpha}\text{sen}(\alpha t)+L\left[e^{-\frac{R}{L}t}-\cos(\alpha t)\right]\right\}.$$



Formas de onda da fonte de alimentação $e(t)$ e da corrente $i(t)$ do circuito RL,

para $\alpha = 120\pi$, $V = 10$ V, $R = 10\ \Omega$ e $L = 10$ mH.

Tabela de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
3	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$s > 0$
4	$t^n,\ n \in \mathbf{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
5	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	$s > \gamma + a$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	Domínio
7	$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$s > 0$
8	$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$s > 0$
9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
11	$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
12	$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$
13	$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$s > a$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n [F(s)]^{(n)}$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \qquad \mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$