Sumário aula 1

1. Apresentação da UC

2. Limites e continuidade
   a) Limites enquadrados (Pinching)
   b) Limites notáveis
   c) Teoremas sobre continuidade

Apresentação da UC

Organização da matéria

- A UC está dividida em três blocos de matéria:
    - Diferenciação e Integração
    - Equações Diferenciais e Tranformadas de Laplace
    - Séries e aproximação de funções
- No final de cada bloco será efetuado um mini-teste com a matéria correspondente.

Apresentação da UC

Datas para a avaliação

- Minitestes (datas provisórias)

    1. 12.11.2015
    2. 17.12.2015
    3. 25.01.2016

- Recurso: 10.02.2016

Apresentação da UC

Avaliação contínua sem exame final

A classificação é obtida pela média ponderada dos três mini-testes obtida da seguinte forma:

$$CL = \frac{40T_1 + 30T_2 + 30T_3}{100}$$

- $T_1, T_2\ e\ T_3$ são as classificações dos três mini-testes.
- NOTA MÍNIMA em cada miniteste 5 Valores

A aprovação é obtida quando **CL ≥ 9.5**

Apresentação da UC

Os alunos que **NÃO** obtiveram aprovação podem aceder ao recurso onde podem encolher entre:

I. Ser avaliados sobre a totalidade da matéria
II. Ser avaliados sobre um dos mini-testes à sua escolha

No caso I: a classificação final é a obtida nesta avaliação.

No caso II: o resultado obtido substitui o do mini-teste correspondente na formula de CL.

Informações

- A informação da UC encontra-se nos CONTEÚDOS da página da disciplina

https://sigarra.up.pt/feup/pt/conteudos_geral.ver?pct_pag_id=249640&pct_parametros=pv_ocorrencia_id=368688

- Aí se encontram os enunciados dos problemas das aulas práticas, os pdf das aulas teóricas e TODA a informação.

- Devem consultar esta página com regularidade

- Horário de dúvidas (marcação via email com antecedencia):

  – 4ª feira: 1000h-1130h e 1500h-1800h
  – 5ª feira: 1500h-1630h

  – **Permanente: via email rui.ribeiro@fe.up.pt**

Apresentação da UC

BIBLIOGRAFIA

- Aulas teóricas disponibilizadas semanalmente
- SALLAS-HILLE-ETGEN, *CALCULUS ONE AND SEVERAL VARIABLES*, WILEY, ISBN: 978-0471-69804-3 (ou edição anterior)
- Apostol, Tom M.; Calculus. ISBN: 84-291-5001-3
- L. Madureira, *Problemas de equações diferenciais ordinárias e transformadas de Laplace 4ª Ed.*, FEUP Ed. 2013, ISBN 978-972-752-158-6

Sumário aula 1

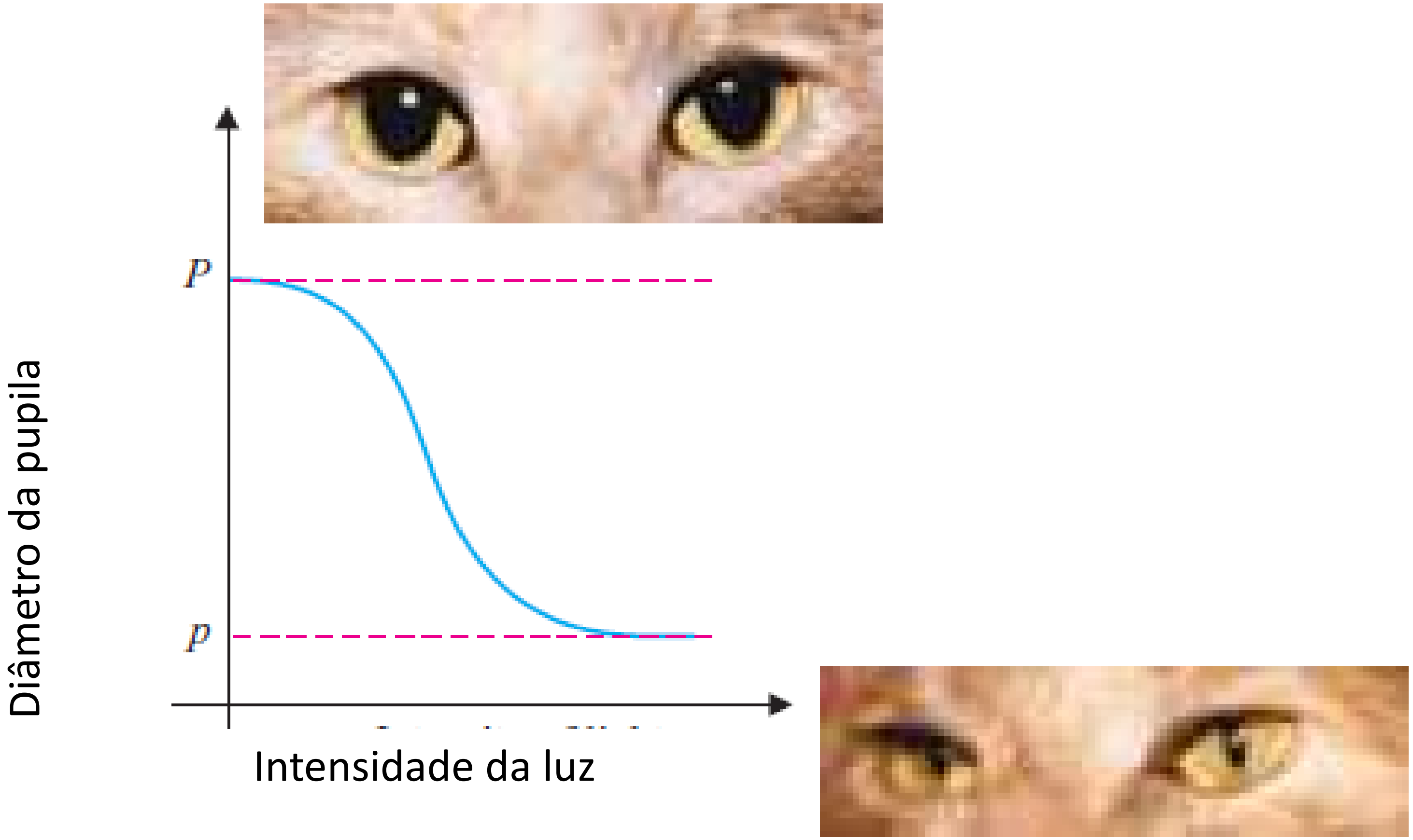
1. Apresentação da UC

2. Limites e continuidade
   a) Limites enquadrados (Pinching)
   b) Limites “notáveis”
   c) Teoremas sobre continuidade

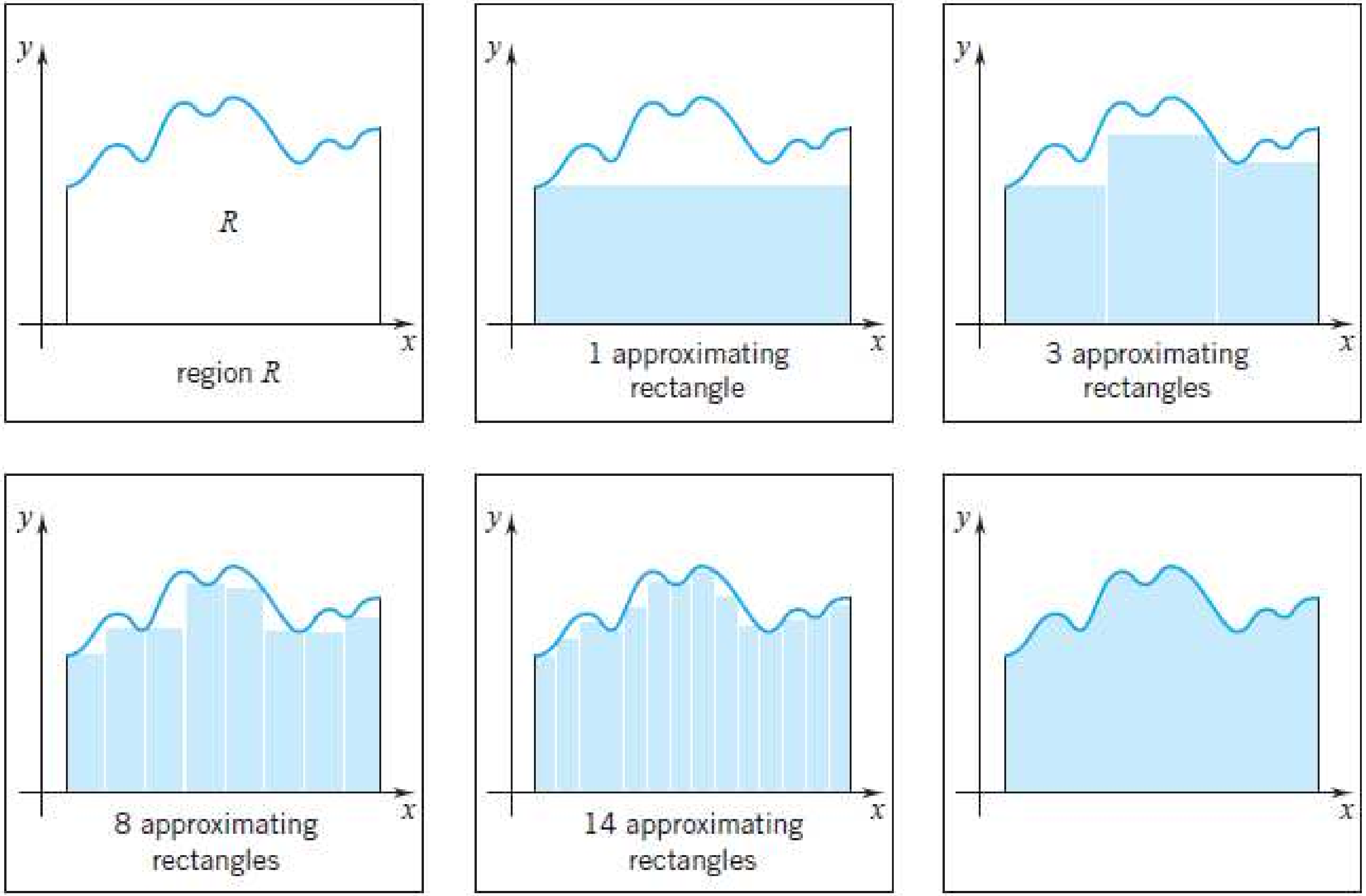
Noção intuitiva de limite

Se estivermos numa sala escura e subitamente se acender a luz, o diâmetro das nossas pupilas diminui

Noção intuitiva de limite



Noção intuitiva de limite

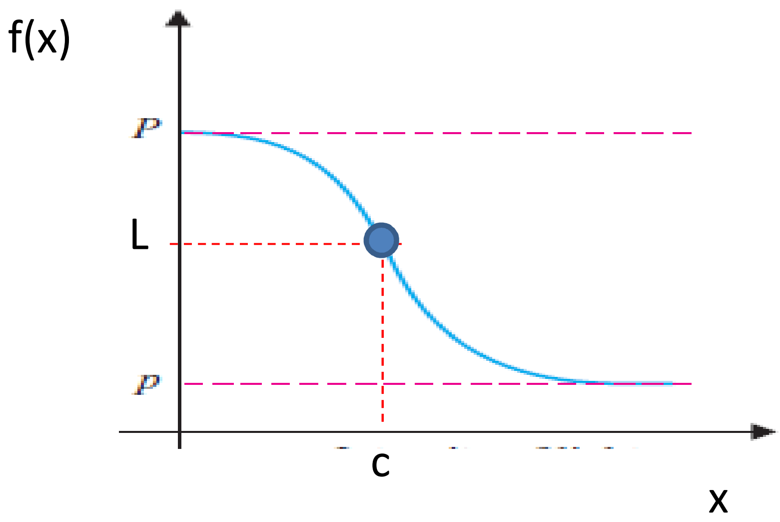


Salas 10ª Ed.

Limite - Definição

O limite da função ***f(x)*** quando ***x*** tende para ***c*** é igual a ***L***

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



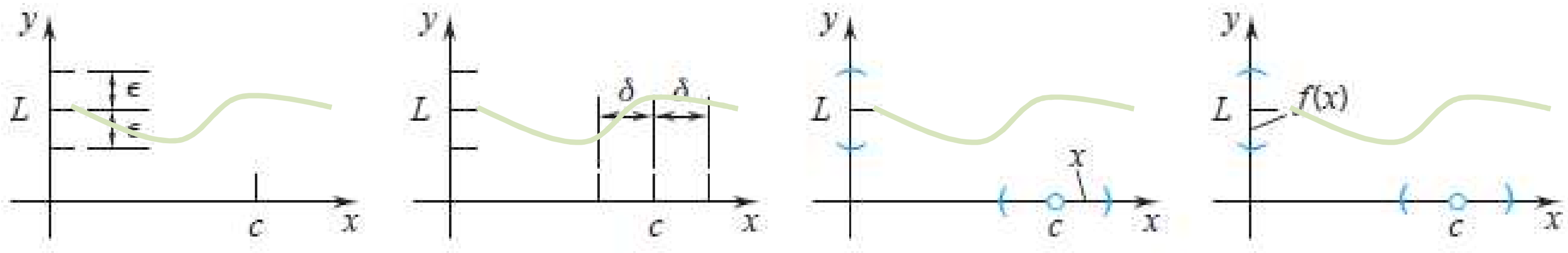
Limite - Definição

Seja ***f*** uma função definida num intervalo aberto ***]x-c, x+c[,*** exceto, eventualmente, em ***x=c***.

Diz-se que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

Se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que:

Se $0 < |x - c| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$



Salas 10ª Ed.

Propriedades

Se f e g são duas funções, k uma constante, A e B números reais

e $\lim f(x) = A$ e $\lim g(x) = B$, então:

- $\lim(f \pm g)(x) = [\lim f(x)] \pm [\lim g(x)] = A \pm B$
- $\lim(f \cdot g)(x) = [\lim f(x)] \cdot [\lim g(x)] = A \cdot B$
- $\lim(k \cdot f)(x) = k \cdot \lim f(x) = k \cdot A$
- $\lim(f^n(x)) = (\lim f(x))^n = A^n$
- $\lim(f \div g)(x) = [\lim f(x)] \div [\lim g(x)] = A \div B$, se B é não nulo.
- $\lim \exp[f(x)] = \exp[\lim f(x)] = \exp(A)$

Sumário aula 1

1. Apresentação da UC

2. Limites e continuidade
   a) Limites enquadrados (Pinching)
   b) Limites notáveis
   c) Teoremas sobre continuidade

Limite enquadrado (Pinching Theorem)

pretendemos obter o $\lim_{x \to a} f(x)$

Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

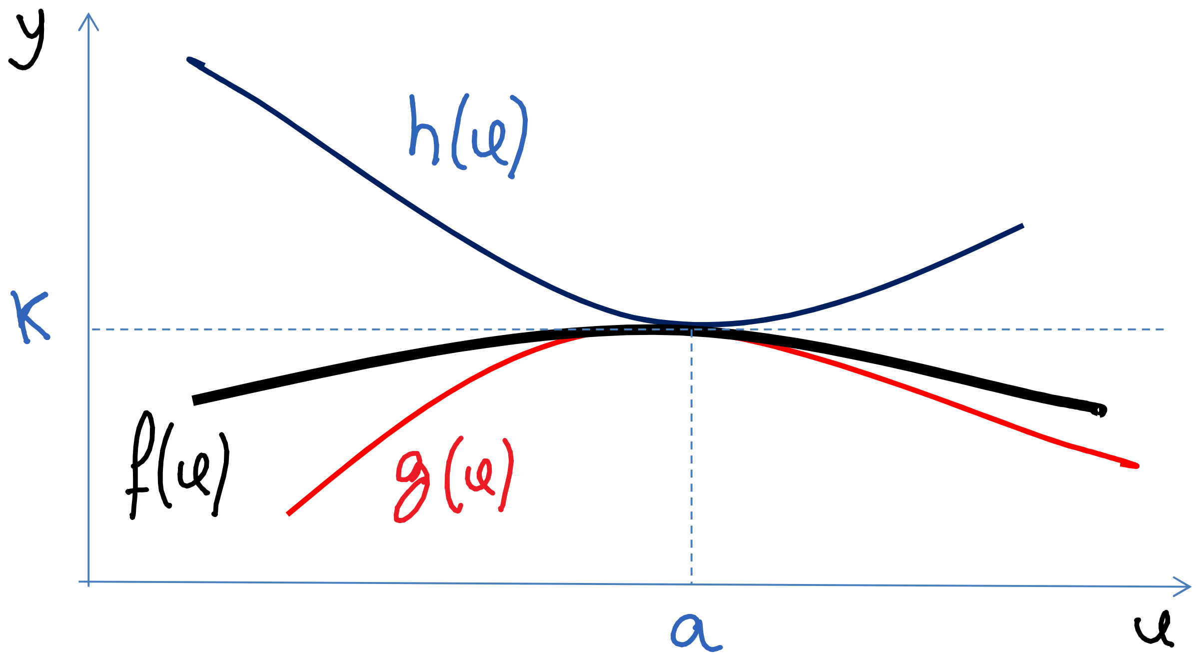
para todo **x** pertencente a um intervalo aberto contendo **a**, exceto, eventualmente em **x=a,** e se

$$\lim g(x) = K = \lim h(x)$$

Então

$$\boxed{\lim f(x) = K}$$

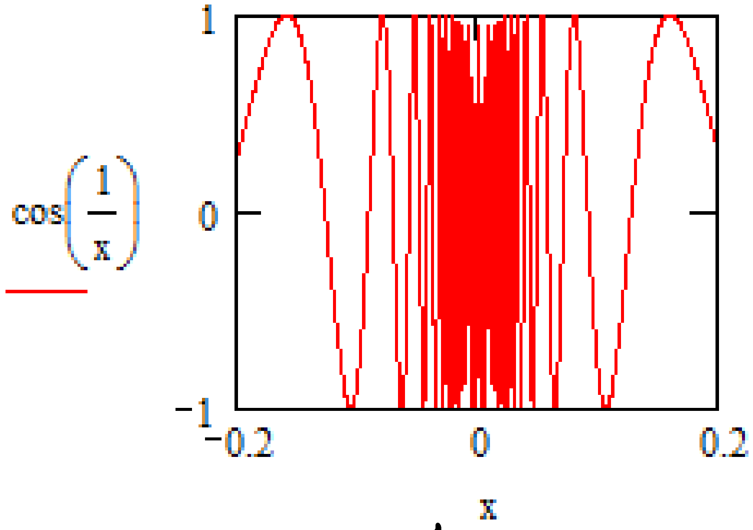
Ilustração gráfica



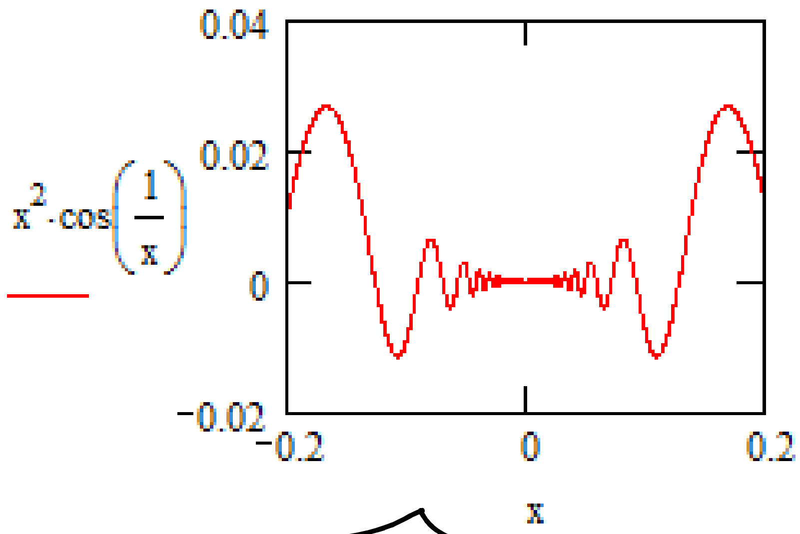
f(x) encontra-se “apertada” entre ***g(x)*** e ***h(x)***.
Portanto, quando ***g(x)*** for igual a ***h(x)*** e tiver o valor ***k***, o valor de ***f(x) tem que ser k.***

Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 . \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$



Oscila entre -1 e 1



Parece tender para ZERO

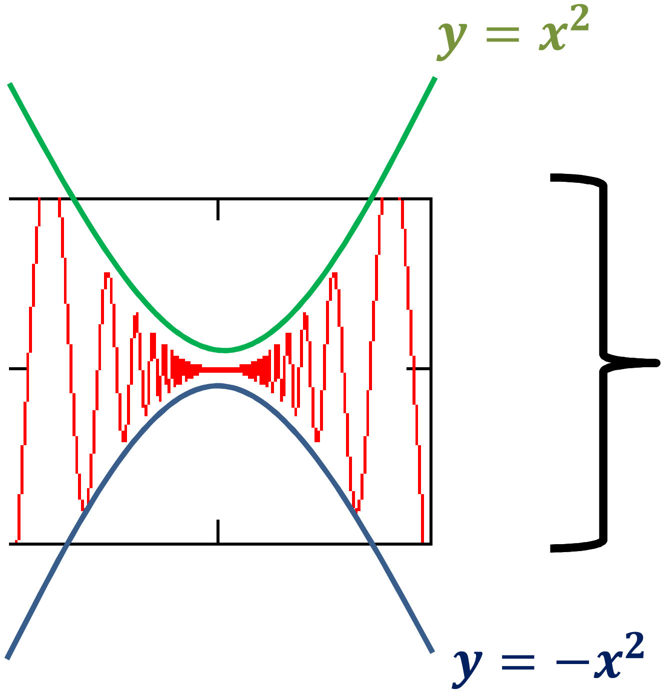
Quais podem ser as funções *g(x)* e *h(x)* tais que:

$$g(x) \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq h(x)$$

Quais podem ser as funções *g(x)* e *h(x)* tais que:

$$g(x) \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq h(x)$$

$$\boxed{-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2}$$



$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

$NOTA: -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right] = ?$$

$$0 \leq sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$x^2 * 0 \leq x^2 sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 * x^2$$

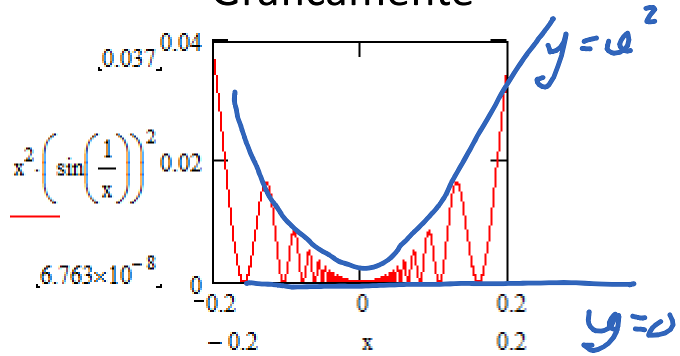
Multiplicando por x^2

$$\boxed{0 \leq x^2 sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2}$$

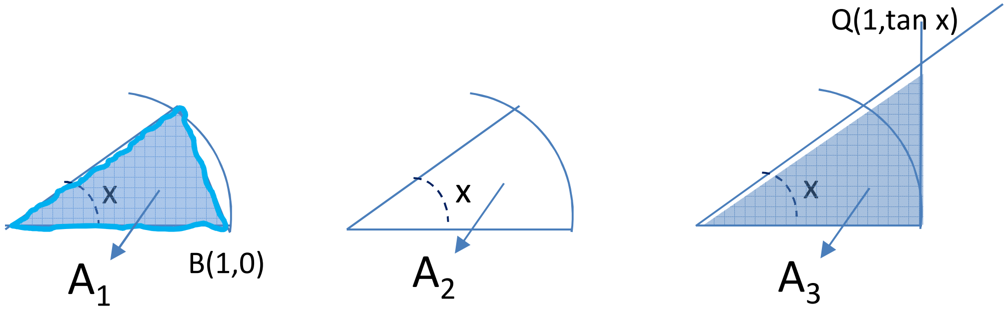
Como $\lim_{x \to 0} [x^2] = 0$

Obtemos $\boxed{\lim_{x \to 0} \left[x^2 sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0}$

Graficamente



$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



1 $0 < A_1 < A_2 < A_3$

2

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{base * altura}{2} = \dfrac{1}{2} * 1 * \sin x = \dfrac{1}{2}\sin x \\ A_2 = \dfrac{1}{2} r^2 x = \dfrac{1}{2}(1)^2 x = \dfrac{1}{2} x \\ A_3 = \dfrac{base * altura}{2} = \dfrac{1}{2} * 1 * \tan x = \dfrac{1}{2}\tan x \end{cases}$$

1 + 2 → 3

$$\boxed{0 < \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x}$$

$$0 < \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

multiplicando por $\frac{2}{\sin x}$ $\Rightarrow$ $0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$\Downarrow$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

como: $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$1 < \frac{\sin x}{x} < 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Sumário aula 1

1. Apresentação da UC

2. Limites e continuidade
   a) Limites enquadrados (Pinching)
   b) Limites "notáveis"
   c) Teoremas sobre continuidade

Limites "*notáveis*"

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{1/x}=e$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=1$$

Sumário aula 1

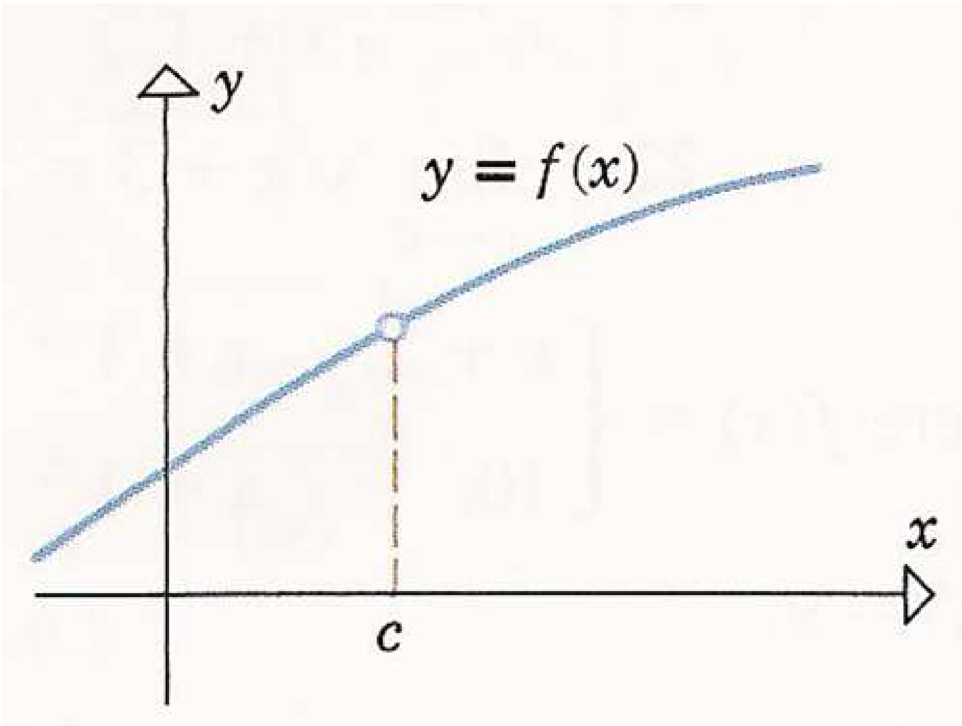
1. Apresentação da UC

2. Limites e continuidade
   a) Limites enquadrados (Pinching)
   b) Limites notáveis
   c) Teoremas sobre continuidade

Noção básica de continuidade

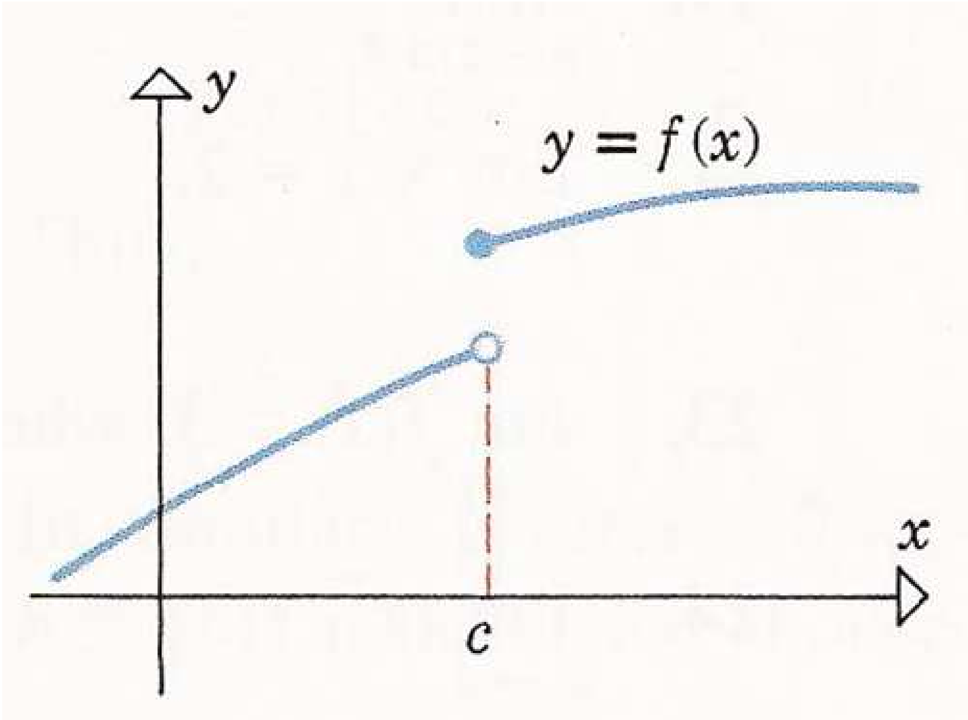
"poder ir de um extremo ao outro do intervalo do gráfico sem *levantar* o lápis"

Exemplos de curvas “não Contínuas”



A curva tem um buraco em x=c
porque não está definida nesse ponto

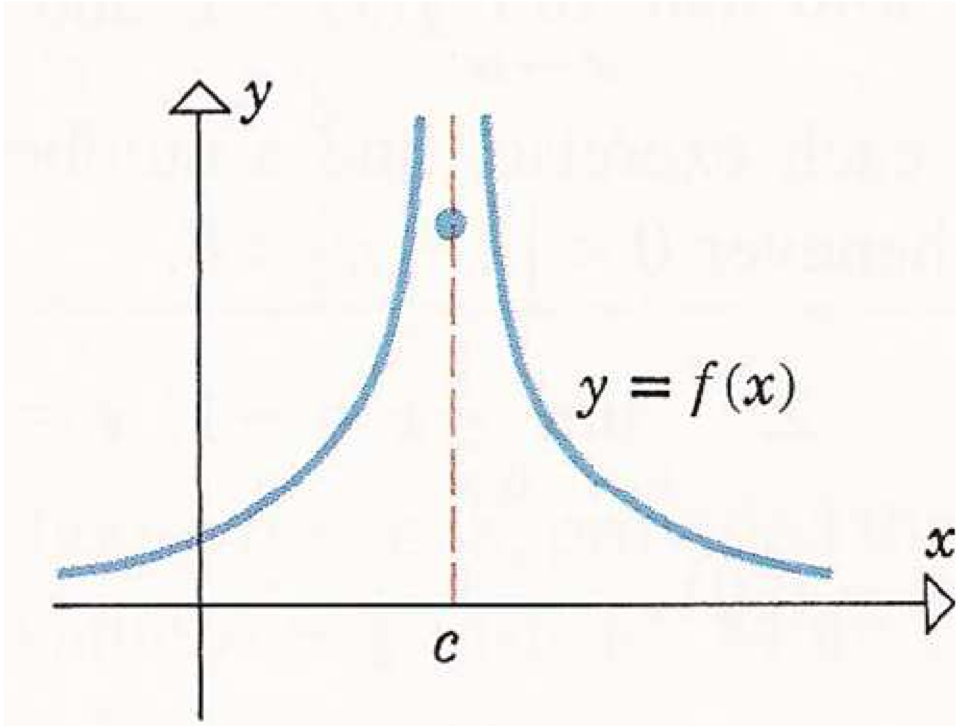
Exemplos de curvas “não Contínuas”



A curva está definida em x=c mas

$\lim_{x \to c} f(x)$ NÃO existe

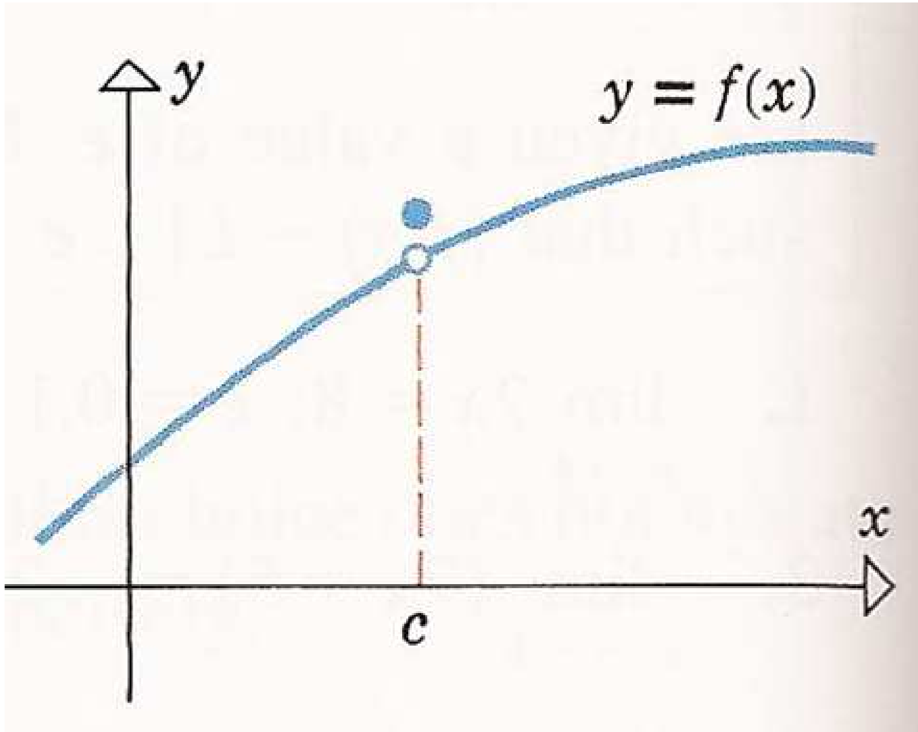
Exemplos de curvas “não Contínuas”



A curva está definida em x=c mas

$\lim_{x \to c} f(x)$ NÃO existe (=∞)

Exemplos de curvas “não Contínuas”



A curva está definida em x=c.

$\lim_{x \to c} f(x)$ existe mas $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

Uma função *f(x)* diz-se contínua num ponto, c, se:

- *f(c) está definida*
- Existe $\lim_{x \to c} f(x)$
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Se uma ou mais destas condições não se verifica, a função diz-se descontínua no ponto c

Alguns teoremas sobre continuidade

Se f e g são duas funções contínuas em c , então:

- $f(x) + g(x)$ é contínua em c;
- $f(x) - g(x)$ é contínua em c:
- $f(x) * g(x)$ é contínua em c
- $f(x) / g(x)$ é contínua em c (se $g(x) \neq 0$)

Mais alguns teoremas sobre continuidade

- **As seguintes funções são contínuas em qualquer intervalo finito**
  - **Todos os polinómios, sin(x), cos(x), a^x, com x>0**

- **Uma função contínua de uma função contínua é continua (continuidade da função composta)**

- **Una função contínua num intervalo é limitada nesse intervalo**

- **Se uma função é contínua num intervalo e estritamente crescente ou decrescente, então a sua inversa, contínua, será estritamente crescente ou decrescente nesse intervalo**

Exemplos

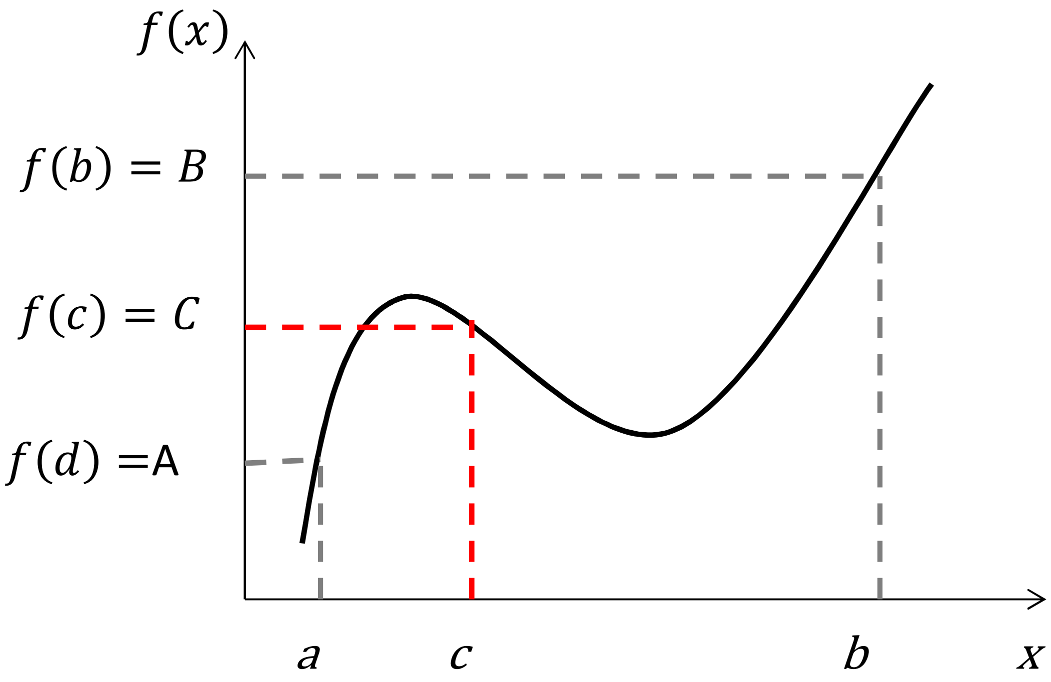
Mostre que a função não é contínua em $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x * sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,x \neq 0 \\ 10 & ,x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0}\left[x * \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 \quad \neq \quad f(0) = 10 \quad c.q.m.$$

Teorema

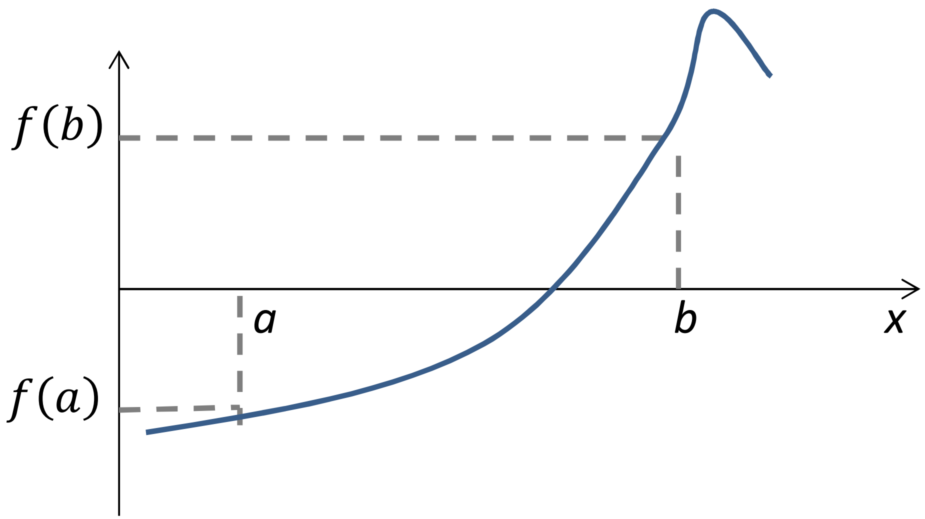
Se *f(x)* é contínua no intervalo *[a,b]* e *f(a) = A* e *f(b) = B*, então para um valor *C* entre *A* e *B* existe pelo menos um valor *c* em *[a,b]* para o qual *f(c) = C*



Corolário

Se *f(x)* é contínua no intervalo *[a,b]* e *f(a) tem sinal contrário a f(b)*, então existe pelo menos um valor *c* em *[a,b]* para o qual *f(c) = 0*

Isto é: uma função contínua que muda de sinal num intervalo tem, pelo menos, um zero nesse intervalo



Corolário

Se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b]$ então $f(x)$ tem, para valores de x nesse intervalo, pelo menos um valor máximo M e tem um valor mínimo m.

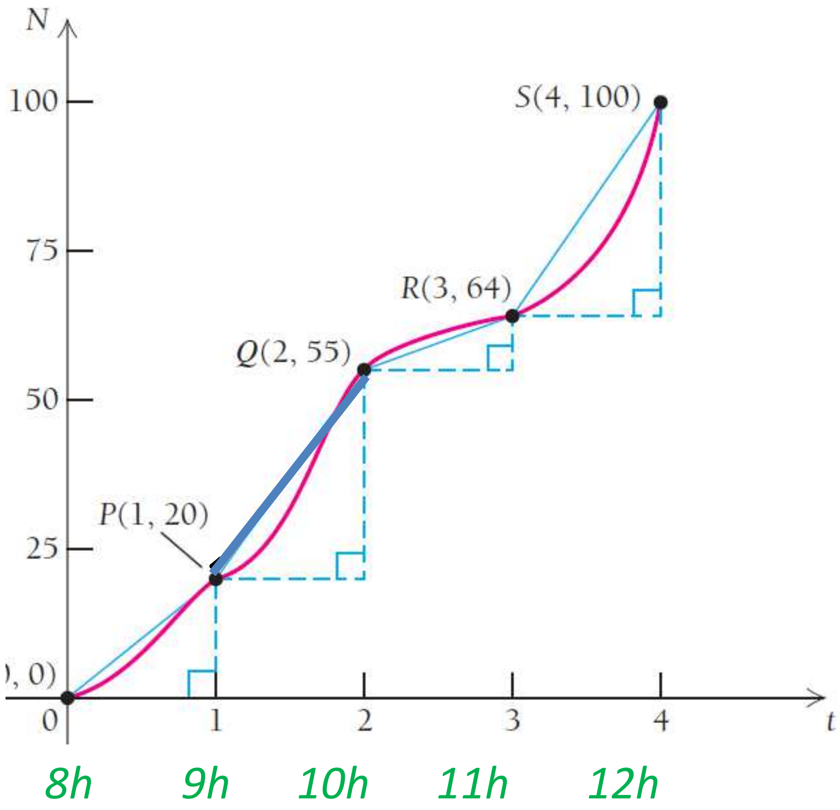
Além disso, $f(x)$ assume todos os valores entre m e M nesse intervalo para um ou mais valores de x.

Aula 2015-01.pdf

Sumário aula 2

1. Derivadas
   a) Taxa de variação de uma função
   b) Definição de derivada
   c) Derivadas mais comuns
   d) Derivada em cadeia
   e) Derivada da função implícita
   f) Derivada logarítmica e de funções trigonométricas

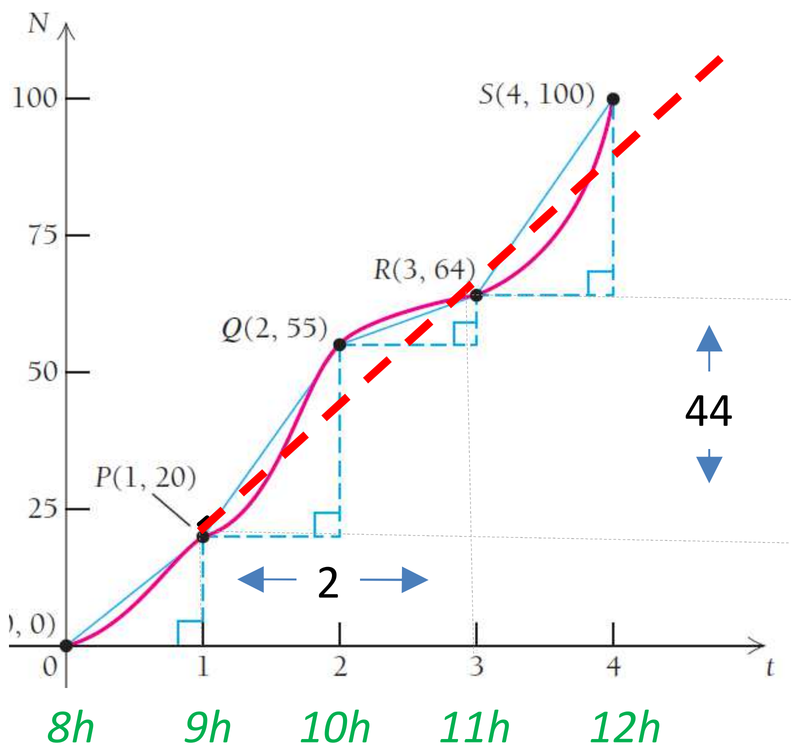
Taxa de variação de uma função



N representa a produção de uma fábrica ao longo da manhã (***t***)

A produção entre as 9h e as 10h corresponde à variação entre os pontos *P* e *Q* que é de 35 unidades

-> é igual à inclinação da reta *PQ*.

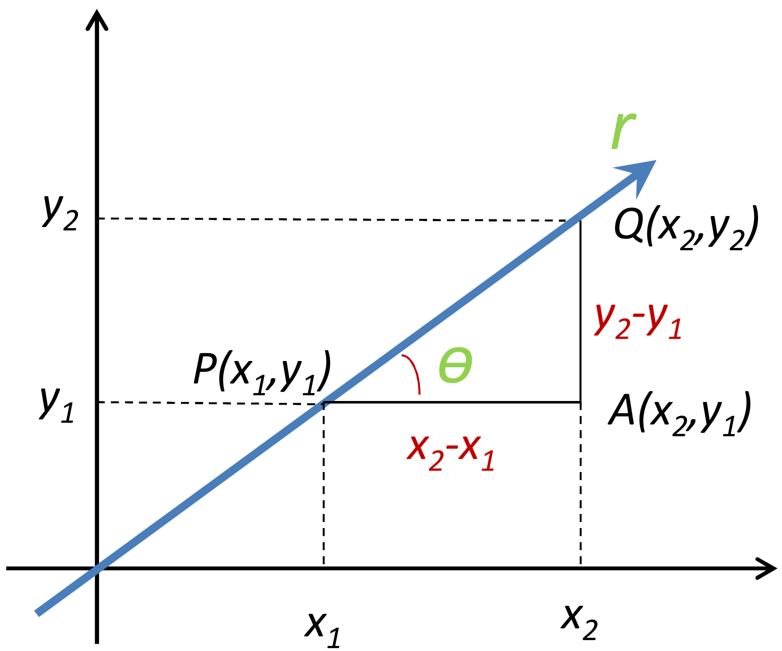


A produção média entre as 9h e as 11h é dada por :

$$\frac{64\ unidades - 20\ \ unidades}{11\ horas\ \ - 9\ horas} = \frac{44}{2} = 22$$

Igual ao declive da reta a tracejado

Declive de uma reta



$$declive = d$$

$$d = \frac{variação\ em\ yy}{variação\ em\ xx}$$

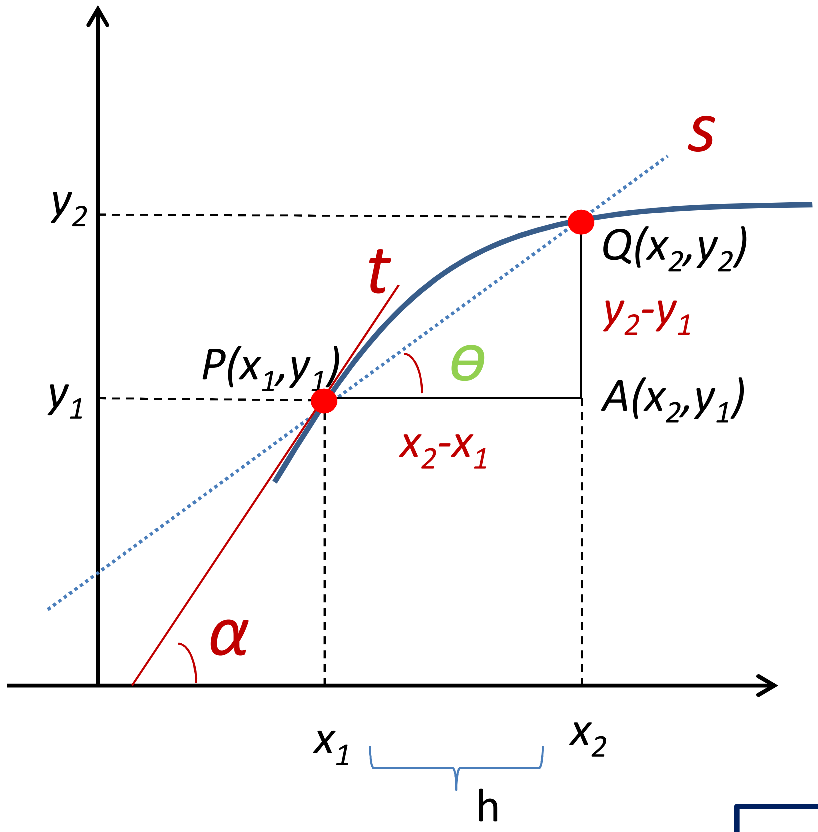
$$\boxed{d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta}$$

$$y = mx + b$$

$$m = d = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Declive de uma curva num ponto



Declive da secante $\overline{PQ}$

$$d = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

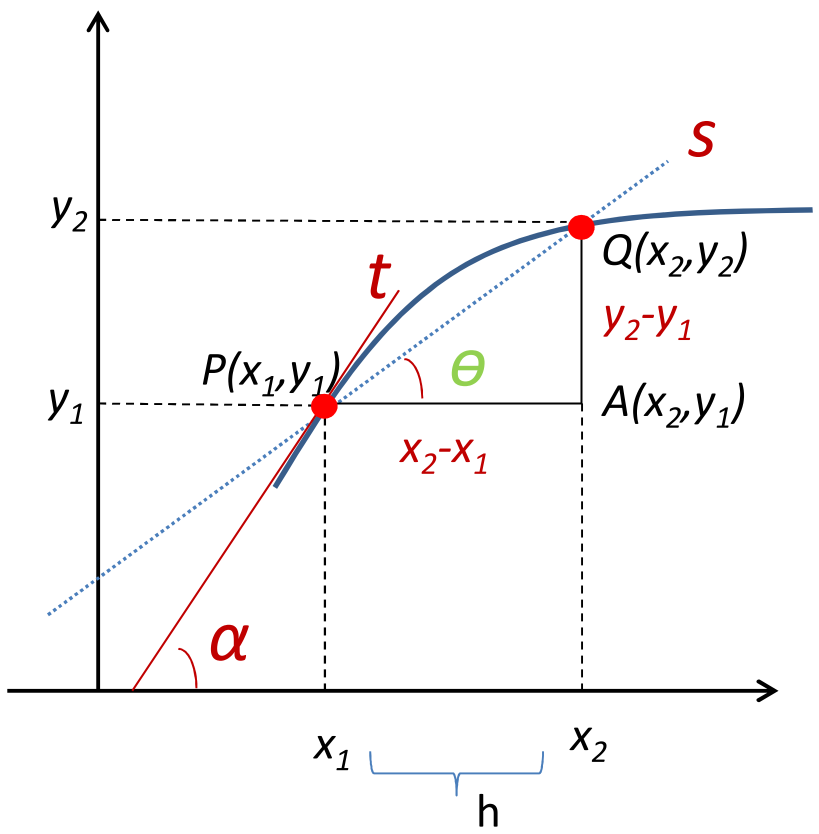
Fazendo $x_2 - x_1 = h$ podemos escrever:

$$x_2 = x_1 + h$$

$$\mathrm{f}(x_2) - f(x_1) = \mathrm{f}(x_1 + h) - f(x_1)$$

$$\boxed{d = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \tan\theta}$$

Declive de uma curva num ponto



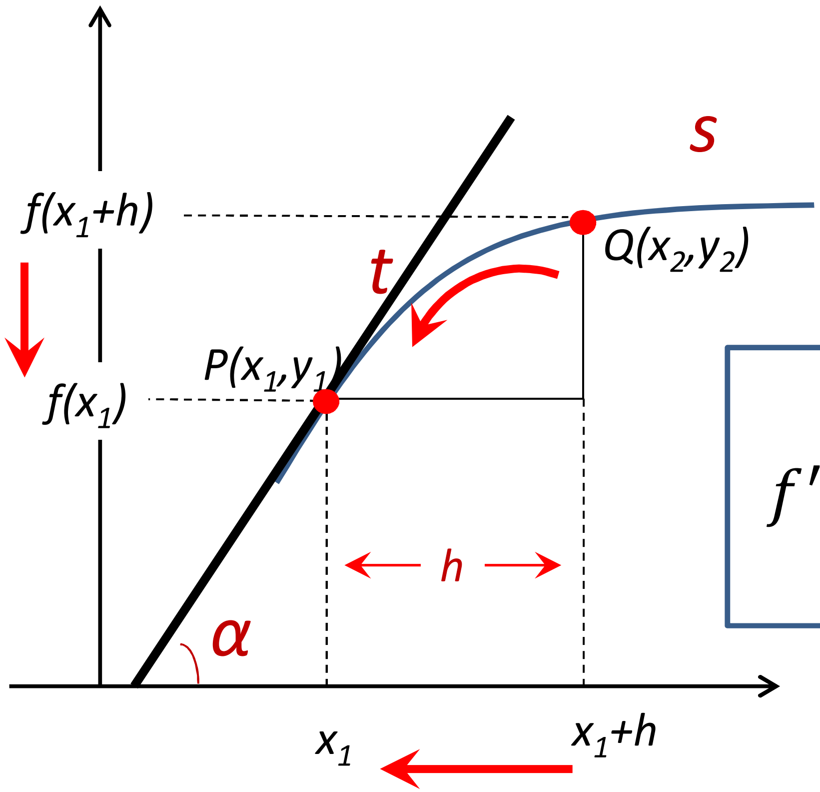
Fazendo tender o ponto ***Q*** para o ponto ***P***, vemos que $\mathbf{x_2}$ tende para $\boldsymbol{x_1}$, ou seja: ***h*** tende para ***ZERO***

A curva secante ***S*** que passa em ***PQ***, tende para a reta ***t*** tangente à curva no ponto ***P***,

- ***h*** tende para ***ZERO***
- ***θ*** tende para **α**

$$x_2 \to x_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

DERIVADA de uma curva num ponto



$$\boxed{f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} = \tan \alpha}$$

$$f'(x_1) = y'(x_1) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$$

Teorema

Para uma função ***y = f(x)*** , a sua derivada no ponto ***x*** é a função ***f´*** definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que exista o limite neste ponto ***x***.

Se ***f´(x)*** existe diz-se que a função é **diferenciável** em ***x***.
Chama-se a ***f´*** a função derivada de ***y = f(x)***

Exemplo: A partir da definição, calcule a derivada da função *f(x)* no ponto ***x=0***

$$f(x) = \frac{x-3}{5-x} \quad em \quad x = 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemplo: A partir da definição, calcule a derivada da função *f(x)* no ponto ***x=0***

$$f(x) = \frac{x-3}{5-x} \quad em \quad x = 0$$

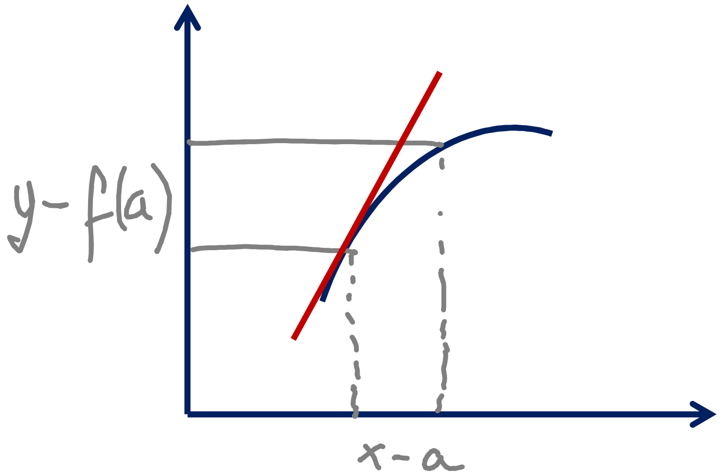
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h-3}{5-h} - \left(\frac{-3}{5}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(h-3) + 3(5-h)}{h * 5 * (5-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{5h - 3h - 15 + 15}{h(25-5h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h * (25-5h)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{25-5h} = \frac{2}{25}$$

Equação da curva tangente

A tangente é dada por:



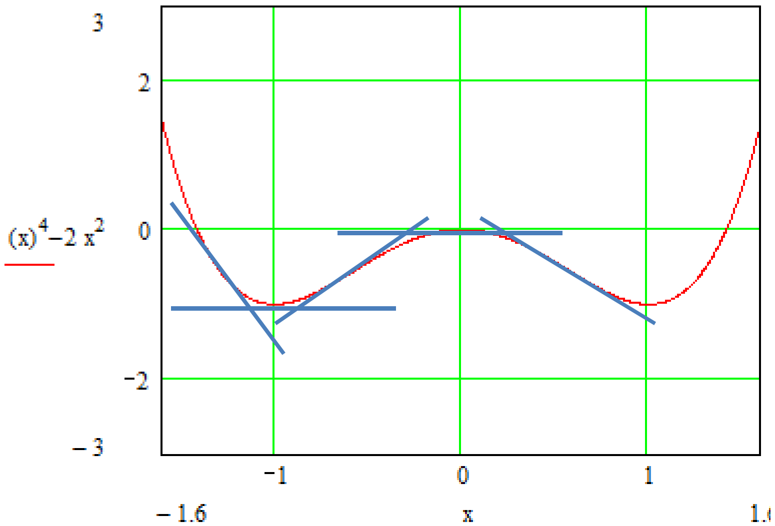
$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$$

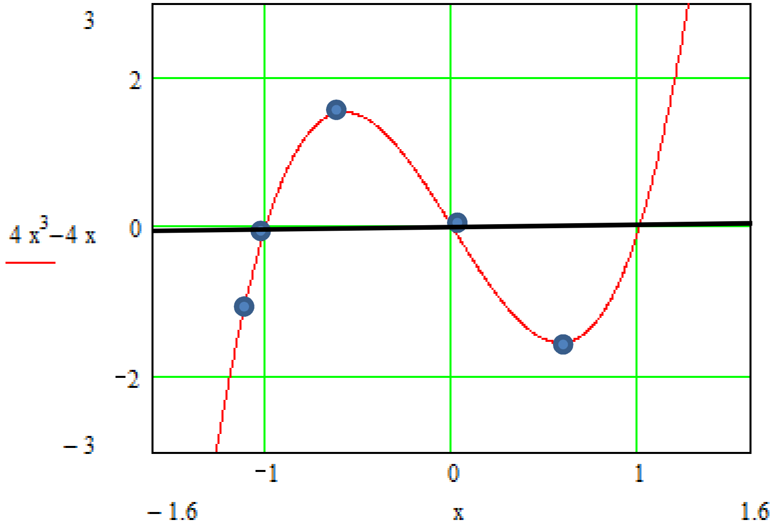
$$y \equiv f(x)$$

Isto é :

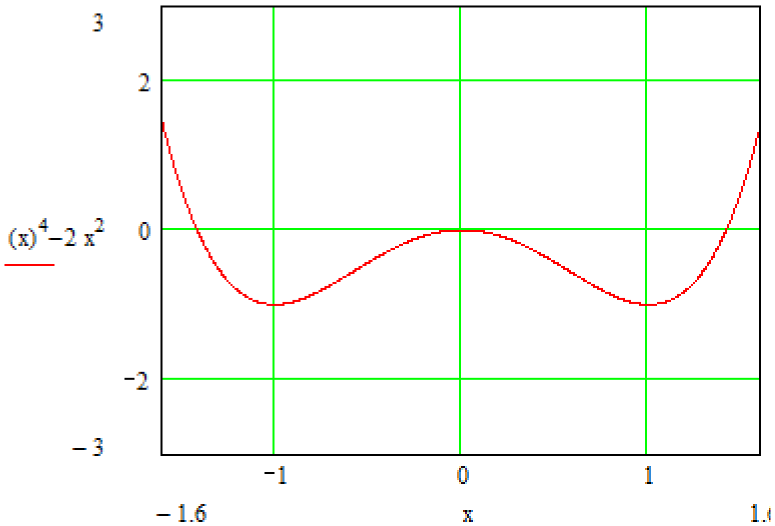
$$\boxed{\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}}$$

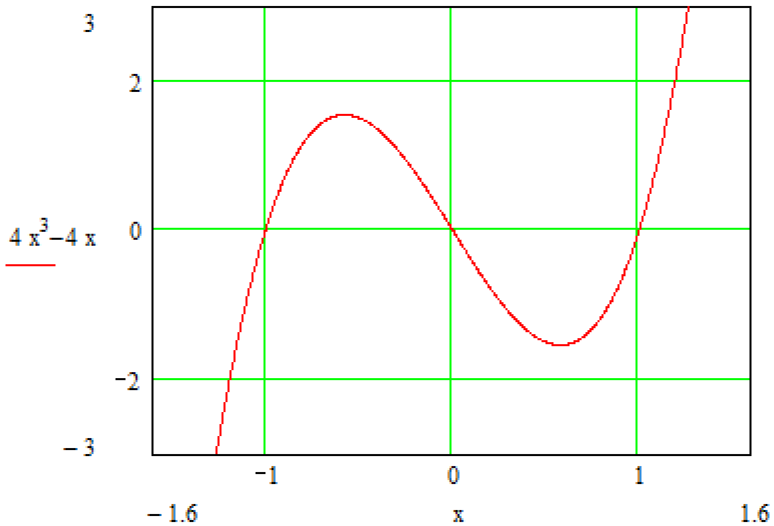
$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

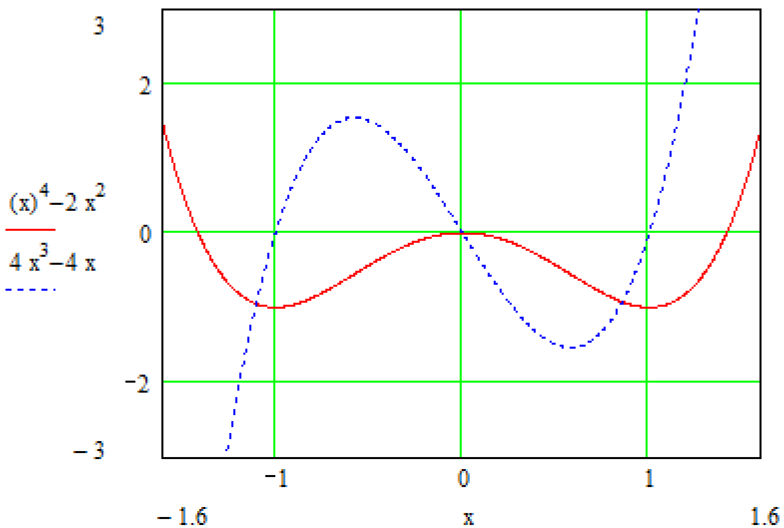




$f(x) = x^4 - 2x^2$


3
2
0
−2
− 3
(x)⁴−2 x²
−1
0
1
− 1.6
x


3
2
0
−2
− 3
4 x³−4 x
−1
0
1
− 1.6
x
1.6


3
2
0
−2
− 3
(x)⁴−2 x²
4 x³−4 x
−1
0
1
− 1.6
x
1.6

Teorema

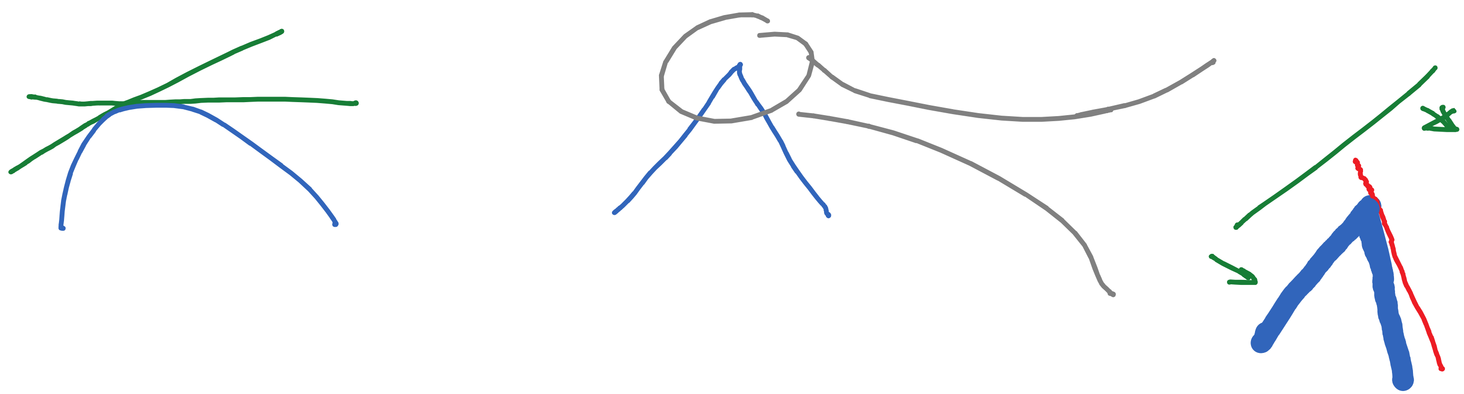
Se uma função tem derivada finita num ponto, então é contínua nesse ponto

lembrar

- *f(c) está definida*
- Existe $\lim_{x \to c} f(x)$
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Derivadas laterais

Intuitivamente podemos dizer que, à semelhança do que fizemos com os limites laterais,



concluímos que, *se as derivadas (tangentes) laterais tiverem o mesmo valor então a função tem derivada continua nesse ponto*.

Notação (de Leibniz)

seg. metade
do séc XVII

$$\boldsymbol{f'(x) \equiv y' \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx}[f(x)]}$$

Derivada em ordem a *x*

Técnicas de derivação (definição)

$$\boldsymbol{f(x) = x^2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{f(x) = x^2} \\ \boldsymbol{f'(x) = 2x}\end{gathered}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} [h + 2x] = 2\mathrm{x}$$

Técnicas de derivação (definição)

$$\boldsymbol{f(x) = x^3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{f(x) = x^3} \\ \boldsymbol{f'(x) = 3x^2} \end{array}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{x^3 + 3h^2x + 3hx^3 - x^3}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{3h^2x + 3hx^3}{h} \right] = \lim_{h \to 0} [3hx + 3x^2] = 3\mathrm{x}^2$$

K constante, $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, u e v funções diferenciaveis

1. $K' = 0$
2. $(Ku)' = Ku'$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
5. $(u+v)' = u' + v'$
6. $(u.v)' = u'v + uv'$
7. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
8. $(\sin u)' = u' \cos u$
9. $(\cos u)' = -u' \sin u$
10. $(\tan u)' = u' \sec^2 u$
11. $(\text{cotg } u)' = -u' \text{cosec}^2 u$
12. $(\sec u)' = u' \sec u \tan u$
13. $(\text{cosec } u)' = -u' \text{cosec } u \text{ cotg } u$
14. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16. $(\text{arctg } u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
17. $(\text{arccotg } u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
18. $(\text{arcsec } u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
19. $(\text{arccosec } u)' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
20. $(e^x)' = e^x$
21. $(e^u)' = u'e^u$
22. $(a^u)' = u'a^u \ln a$
23. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
24. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
25. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
26. $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$
27. $(\text{sh } u)' = u' \text{ch } u$
28. $(\text{ch } u)' = u' \text{sh } u$
29. $(\text{tgh })' = u' \text{sech}^2 u$
30. $(\text{argsh } u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
31. $(\text{argch } u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
32. $(\text{argtgh } u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

Derivação da potência

K constante, $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, u e v funções diferenciaveis

1. $K' = 0$

2. $(Ku)' = Ku'$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

5. $(u+v)' = u' + v'$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Exemplo: Calcule a derivada da função *f(x)* no ponto ***x***

$$f(x) = 2x^5 - \sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x^2} + 10$$

$$= 5 * 2x^4 - \frac{1}{2} * x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} + \frac{2}{3} * x^{\left(\frac{2}{3}-1\right)} + 0$$

$$= 10x^4 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= 10x^4 - \frac{1}{2\sqrt[2]{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Exemplo: Para que valores ***x^4-2x^2*** é decrescente ?

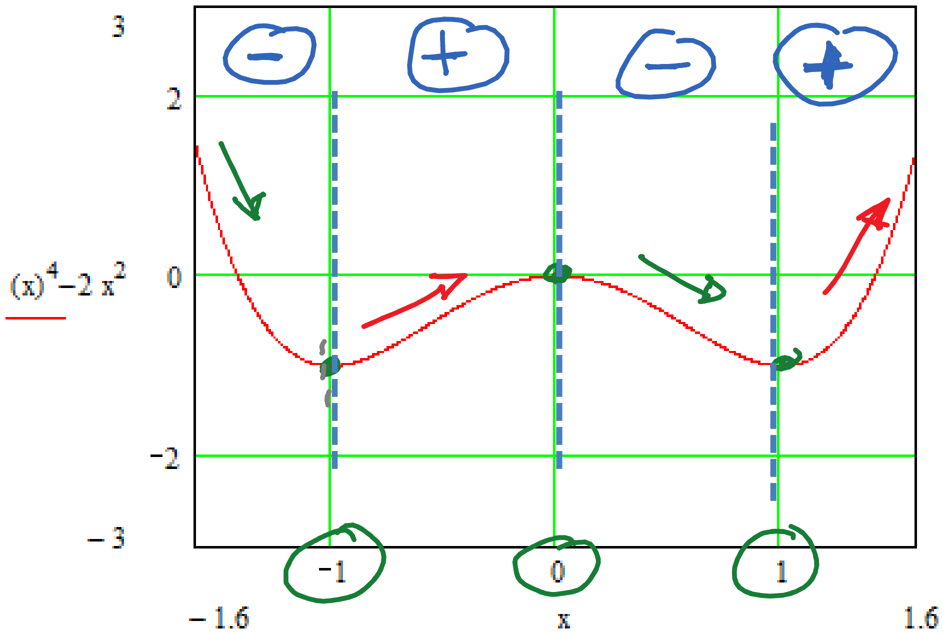
$$y = x^4 - 2x^2 \qquad y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$y' = 4x(x+1)(x-1)$$

	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$

X	-	-	+	+
X-1	-	-	-	+
X+1	-	+	+	+
Y`	-	+	-	+
	Decrescente	**Crescente**	**Decrescente**	**Crescente**

Sinal da derivada



Derivação do produto e do quociente

6. $(u.v)' = u'v + uv'$

7. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemplo: Calcule a função derivada de ***f(x)***

$$x^5 * x^2$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$u = x^5 \quad e \quad v = x^2$$

$$(x^5x^2)' = (x^5)' * x^2 + x^5 * (x^2)'$$

$$= 5x^4 * x^2 + x^5 * (2x)$$

$$= 5x^6 + 2x^6$$

$$= 7x^6$$

$$x^5 * x^2 = x^7$$

$$\frac{d}{dx}(x^7) = 7x^6$$

Exemplo: Calcule a função derivada de

$$\boldsymbol{f(x) = \left(x^2 + 4x - 11\right) * \left(7x^3 + \sqrt{x} \right)}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 4x - 11) * (7x^3 + \sqrt{x}) + (x^2 + 4x - 11) * \frac{d}{dx}(7x^3 + \sqrt{x})$$

$$f'(x) = (x^2 + 4x - 11)' * (7x^3 + \sqrt{x}) + (x^2 + 4x - 11) * (7x^3 + \sqrt{x})'$$

$$f'(x) = (2x + 4) * (7x^3 + \sqrt{x}) + (x^2 + 4x - 11) * \left(21x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$f'^{(x)} = \dots\dots.$$

Derivação do produto e do quociente

6. $(u.v)' = u'v + uv'$

7. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow F'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{[Q(x)]^2}$$

Exemplo: Calcule a função derivada de $g(x) = \dfrac{e^2 x^3}{(x-1)^2}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v \quad - uv'}{v^2}$$

$$\begin{cases} u = e^2 x^3 \\ v = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = 3e^2 x^2 \\ v' = 2(x-1) \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{(e^2 x^3)'(x-1)^2 - e^2\, x^3\, [(x-1)^2]'}{(x-1)^4}$$

$$g'(x) = \frac{3e^2 x^2 (x-1)^2 - e^2\, x^3\, 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$g'(x) = \frac{3e^2 x^2 (x-1) - e^2\, x^3\, 2}{(x-1)^3}$$

$$g'(x) = \frac{e^2 x^2 (x-3)}{(x-1)^3}$$

Derivada em cadeia (função composta)

Definição: A função composta $f \circ g$, é definida como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Exemplo: Calcule ***(f∘g) (x)*** e ***(g∘f) (x)***

$$\boldsymbol{f(x) = x^3} \;, \qquad \boldsymbol{g(x) = x^2 + 2}$$

$$fog(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 2) = (x^2 + 2)^3$$

$$gof(x) = g[f(x)] = g(x^3) = x^{3*2} + 2 = x^6 + 2$$

Definição

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[(f \circ g)(x)] = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) * g'(x)}$$

f e ***g*** são diferenciáveis e a imagem de ***g(x)*** está contida no domínio de ***f***

Definição

$$\boxed{\frac{d}{dx}[(f \circ g)(x)] = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) * g'(x)}$$

Se fizermos ***y=f(u)*** e ***u=g(x)*** então:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} * \frac{\cancel{du}}{\cancel{dv}} * \frac{\cancel{dv}}{\cancel{dw}} * \frac{\cancel{dw}}{dx}}$$

Definição

$$\boxed{\frac{d}{dx}[(f \circ g)(x)] = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) * g'(x)}$$

Se fizermos ***y=f(u)*** e ***u=g(x)*** então:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}} \longleftrightarrow$$

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$

4. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Exemplo: $y = 2 + \sqrt{u}$ e $u = x^3 + 1$ calcular $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}[2 + \sqrt{u}] = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}[x^3 + 1] = 3x^2$$

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{du}} * \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} * 3x^2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 1}} * 3x^2$$

Exemplo: Calcule a derivada de $y = (2x^2 - 2)^3$

$$y(u) = u^3 \quad , \qquad u(x) = 2x^2 - 2$$

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{du}} * \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} = \quad 3u^2 * (4x) =$$

$$= 12x * (2x^2 - 2)^2$$

Exemplo: Calcule a derivada de $y = \left(\frac{2x}{x-1}\right)^4$

$$y = f(u(x)), \qquad com \quad f(u) = u^4 \quad e \;\; u(x) = \frac{2x}{x-1}$$

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x}{x-1}\right)^4\right] = 4\left(\frac{2x}{x-1}\right)^3 * \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$= 4\left(\frac{2x}{x-1}\right)^3 * \left(\frac{(2x)'(x-1) - 2x(x-1)'}{(x-1)^2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{2x}{x-1}\right)^3 * \left(\frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{2x}{x-1}\right)^3 * \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right) \ldots\ldots\ldots$$

Função implícita

Uma função diz-se na forma ***explicita*** quando se representa **y** em função de **x** de uma forma “direta”.

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

Uma função diz-se na forma ***implícita*** quando ***y*** não está diretamente escrito em função de **x**

$$y^2 + x^2 = 4$$

Nem sempre é possível escrever a expressão explícita a partir da função implícita:

$$y^3 + x^2y^5 - x^4 = 27$$

Derivação implícita: Regra

1) Derivar ambos os membros da equação implícita em relação a $\boldsymbol{x}$, isto é: aplicar o operador $\boldsymbol{\frac{d}{dx}}$ aos dois membros da equação termo a termo.

Não esquecer que y é y(x)

2) Isolar $\boldsymbol{y'}$

Exemplo: $\boldsymbol{y^3 + x^2y^5 - x^4 \ = 27}$

$$y(x)^3 + x^2y(x)^5 - x^4 \ = 27$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)^3 + x^2y(x)^5 - x^4) \ = \frac{d}{dx}(27)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^5 + x^2 5y^4\frac{dy}{dx} - 4x^3 \ = 0$$

$$\frac{dy}{dx} \ = \frac{(4x^3 - 2xy^5)}{(3y^2 + x^2\ 5y^4)}$$

Exemplo: $\boldsymbol{y^3 + x^2 y^5 - x^4 \ = 27}$

$$y(x)^3 + x^2 y(x)^5 - x^4 \ = 27$$

$$(y^3 + x^2 y^5 - x^4)' \quad = \ (27)'$$

$$3y^2 y' + 2xy^5 + x^2 5y^4 y' - 4x^3 \quad = 0$$

$$y' \ = \frac{(4x^3 - 2xy^5)}{(3y^2 + x^2 \ 5y^4)}$$

Exemplo: $\boldsymbol{xy^2 + x^2y^3 - y = xy}$

$$\frac{d}{dx}(xy^2 + x^2y^3 - y) = \frac{d}{dx}(xy)$$

$$y^2 + 2xy * y' + 2xy^3 + 3x^2y^2 * y' - y' = y + x * y'$$

$$y' = \frac{2xy + 3x^2y^2 - x - 1}{y - y^2 - 2xy^3}$$

Derivada do logarítmo

23. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

24. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

25. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

Derivada de funções trigonométricas

8. $(\sin u)' = u' \cos u$

9. $(\cos u)' = -u' \sin u$

10. $(\tan u)' = u' \sec^2 u$

11. $(\text{cotg } u)' = -u' \text{cosec}^2 u$

12. $(\sec\ u)' = u' \sec\ u \tan u$

13. $(\text{cosec } u)' = -u' \text{cosec } u \text{ cotg } u$

Derivada de funções trigonométricas inversas

14. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

15. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

16. $(\text{arctg } u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

17. $(\text{arccotg } u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

18. $(\text{arcsec } u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

19. $(\text{arccosec } u)' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Sumário aula 3

1. Derivadas e cálculo diferencial (cont.)

   a) Derivada usando logaritmos

   a) Teoremas fundamentais do Calculo Diferencial
      a) Teorema de Rolle
      b) Teorema de Lagrange (Valor Médio)
      c) Teorema de Cauchy
      d) Regra de L´Hopital

   b) Levantamento de indeterminações

Derivada usando logaritmos

Útil em polinómios: ***f(x) = P(x)***

- Aplicar logaritmos em ambos membros
  log[f(x)] = log[P(x)]
- Derivar ambos os membros: $\frac{f(x)'}{f(x)} = \frac{d}{dx}\{\log[P(x)]\}$
- Obter $f(x)' = f(x) * \frac{d}{dx}\{\log[P(x)]\}$

Exemplo: Calcular a derivada de $\sqrt[5]{\frac{(x+1)^3}{x^2(x+2)^2}}$

$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^3}{x^2(x+2)^2}} \qquad \log[f(x)] = \log\left[\sqrt[5]{\frac{(x+1)^3}{x^2(x+2)^2}}\right]$$

$$\log[f(x)] = \frac{1}{5} * [\,3 * \log(x+1) - 2 * \log[x] - 2 * \log(x+2)]$$

$$\frac{d}{dx}\{\log[f(x)]\} = \frac{1}{5} * \frac{d}{dx}[\,3 * \log(x+1) - 2 * \log[x] - 2 * \log(x+2)] =$$

$$= \frac{1}{5} * \left[\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right] = -\frac{1}{5} * \frac{x^2+2x+4}{x(x+1)(x+2)}$$

$$\boxed{f'(x) = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^3}{x^2(x+2)^2}} * \left[-\frac{1}{5} * \frac{x^2+2x+4}{x(x+1)(x+2)}\right]}$$

Teoremas fundamentais do cálculo diferencial

- Teorema de Rolle
- Teorema de Lagrange (Valor Médio)
- Teorema de Cauchy
- Regra de L´Hôpital

Teorema de Rolle

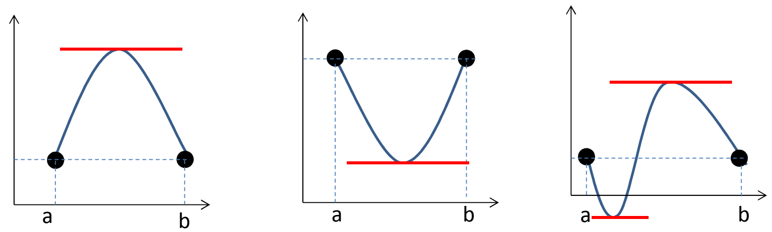
Seja ***f(x)*** uma função regular no intervalo fechado **[a,b]** e diferenciável em **]a,b[**, e que nos extremos do intervalo toma o mesmo valor, isto é: ***f(a)=f(b).*** Então

existe pelo menos um ponto ***c*** $\in$ ***]a,b[***, tal que ***f´(c) = 0***

Teorema de Rolle

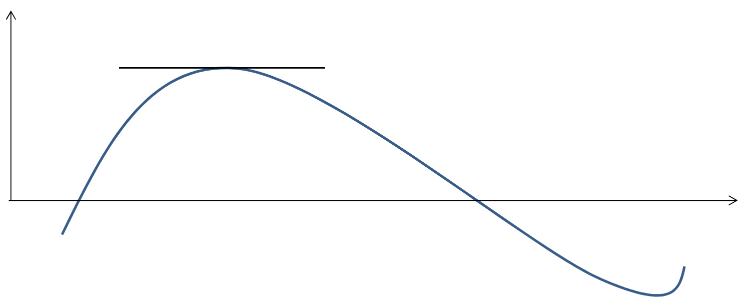
Seja ***f(x)*** uma função regular no intervalo fechado **[a,b]** e diferenciável em **]a,b[**, e que nos extremos do intervalo toma o mesmo valor, isto é: ***f(a)=f(b).*** Então

existe pelo menos um ponto ***c*** $\in$ ***]a,b[***, tal que ***f´(c) = 0***



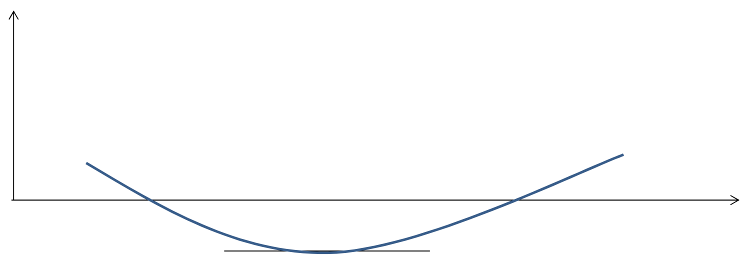
Corolário I

Entre dois zeros consecutivos da função existe pelo menos um *zero da derivada*



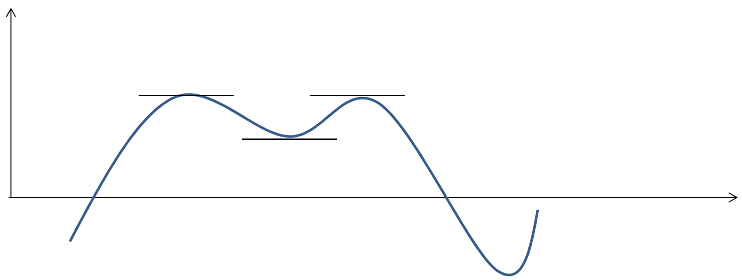
Corolário I

Entre dois zeros consecutivos da função existe pelo menos um *zero da derivada*



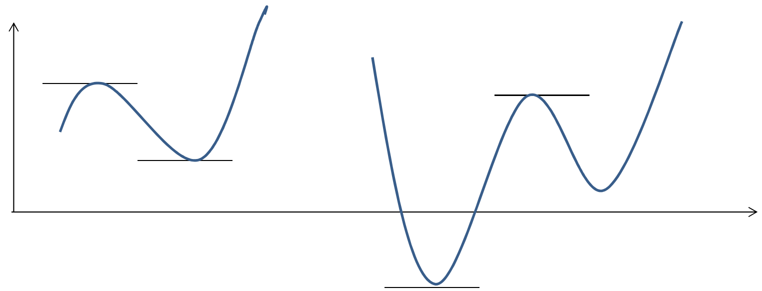
Corolário I

Entre dois zeros consecutivos da função existe pelo menos um *zero da derivada*



Corolário II

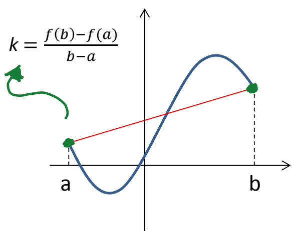
Entre dois zeros consecutivos da derivada existe no máximo um *zero da função*

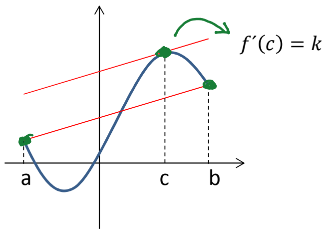


Teorema de Lagrange (Valor Médio)

Seja ***f(x)*** uma função regular no intervalo fechado **[a,b]** e diferenciável em **]a,b[**, então existe um ponto ***c*** ∈ ***]a,b[***, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$





Teorema de Lagrange (Valor Médio)

Seja ***f(x)*** uma função regular no intervalo fechado **[a,b]** e diferenciável em **]a,b[**, então existe um ponto ***c*** ∈ ***]a,b[***, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Relaciona uma diferença de valores da função com a diferença dos valores correspondentes da variável independente *(x)*

$$f(b) - f(a) = f'(c) * (b - a)$$

TEOREMA DE LAGRANGE (VALOR MÉDIO)

Seja ***f(x)*** uma função regular no intervalo fechado **[a,b]** e diferenciável em **]a,b[,** então existe um ponto ***c*** ∈ ***]a,b[***, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Está na base do cálculo integral especialmente da anti diferenciação ou primitivação

COROLÁRIO I:

Se ***f´(x) = 0*** para todo o ***x*** pertencente a um intervalo aberto *]a,b[*, então:

f(x) é constante, *para todo o x ∈]a,b[*

COROLÁRIO I:

Se ***f´(x) = 0*** para todo o ***x*** pertencente a um intervalo aberto *]a,b[*, então:

f(x) é constante, *para todo o x ∈]a,b[*

$$f'(x) = 0 = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \rightarrow f(d) - f(c) = 0$$

$$\rightarrow f(d) = f(c) \ , \forall c, d \in]a, b[$$

COROLÁRIO II:

Se ***g´(x) = f´(x)*** para todo o ***x*** pertencente a um intervalo aberto *]a,b[*, então:

g(x) = f(x) + c, *para todo o x ∈]a,b[*

Corolário II:

Se ***g´(x) = f´(x)*** para todo o ***x*** pertencente a um intervalo aberto *]a,b[*, então:

g(x) = f(x) + c, *para todo o x ∈]a,b[*

Seja $h(x) = g(x) - h(x)$, então $h'(x) = g'(x) - f'(x)$

como $g'(x) = f'(x)$ temos que $h'(x) = 0$

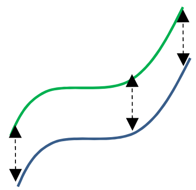
e portanto $h(x) = c$, ou seja:

$g(x) - f(x) = c$, c.q.m.

Corolário II:

Se ***g´(x) = f´(x)*** para todo o ***x*** pertencente a um intervalo aberto *]a,b[*, então:

g(x) = f(x) + c, *para todo o x ∈]a,b[*



Se dois gráficos têm a mesma derivada em todos os pontos num intervalo então diferem só por um *shift* vertical

Exemplo: qual a forma geral de todas as funções que têm derivada dada por ***$4x^3$-3***

Exemplo: qual a forma geral de todas as funções que têm derivada dada por ***$4x^3$-3***

Sabemos que $(x^4 - 3x)' = 4x^3 - 3$

Como $\mathrm{f(x) = g(x) + c}$

$f(x) = (x^4 - 3x) + c$

Corolário III:

Se ***f´(x) ≥ 0*** para todo o ***x*** pertencente a um intervalo aberto *]a,b[*, então:

f(x) é crescente, *para todo o x ∈]a,b[*

Corolário III:

Se ***f´(x) ≥ 0*** para todo o ***x*** pertencente a um intervalo aberto *]a,b[*, então:

f(x) é crescente, *para todo o x ∈]a,b[*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \rightarrow \quad f(b) - f(a) = (b - a) * f'(c)$$

Se $a - b < 0 \;\Rightarrow\; b - a > 0 \Rightarrow\; f(b) - f(a) > 0$

Se $f'(c) > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{f(b) > f(a)}$

Corolário III:

Se ***f´(x) ≥ 0*** para todo o ***x*** pertencente a um intervalo aberto *]a,b[*, então:

f(x) é crescente, *para todo o x ∈]a,b[*

Se ***f´(x) ≤ 0*** para todo o ***x*** pertencente a um intervalo aberto *]a,b[*, então:

f(x) é decrescente, *para todo o x ∈]a,b[*

Teorema de Cauchy

Sejam ***f(x)*** e ***g(x)*** duas funções regulares no intervalo fechado **[a,b]** e diferenciáveis em **]a,b[.** Se ***g´(c)*** é finita e ***g´(c)≠0***, então existe pelo menos um ponto ***c*** ∈ ***]a,b[***, tal que

$$\frac{\boldsymbol{f'(c)}}{\boldsymbol{g'(c)}} = \frac{\boldsymbol{f(b) - f(a)}}{\boldsymbol{g(b) - g(a)}}$$

Regra de L´Hopital

Sejam ***f(x)*** e ***g(x)*** duas funções diferenciáveis em ***x=a*** e ***g(a)=f(a)=0*** obtemos a partir do Teorema de Cauchy

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^n(x)}{g^n(x)}$$

Levantamento de indeterminações $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

Regra de L´Hopital

Sejam ***f(x)*** e ***g(x)*** duas funções diferenciáveis em ***x=a*** e ***g(a)=f(a)=0*** obtemos a partir do Teorema de Cauchy

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Usa-se quando $\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}\end{array}\right.$

Levantar indeterminações:

passar para 0/0 ou ∞/∞ e aplicar a o teorema de Cauchy ou regra de L´Hopital

$f(x)*g(x)=\infty*0$ ⇨	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{0}{0}$
$f(x)-g(x)=\infty-\infty$ ⇨	$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}*\frac{1}{f(x)}}=\frac{0}{0}$
$f(x)^{g(x)}=1^\infty,0^\infty,\infty^0$ ⇨	$u^b=e^{b\ln(u)}$ $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=$ $=e^{\lim_{x\to a}[g(x).\ln(f(x))]}$

Exemplo: $\lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(sin\,x)'}{(x)'}$$ Regra de L´Hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(x)$ $= 0 * \infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}[\ln(x)]}{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x) = \mathbf{0}$$

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right]$ $= \infty - \infty$

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x - x}{x \sin x}\right] = \frac{0}{0}$$

Derivar (l ´Hôpital) $= \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\cos x - 1}{sinx + x\cos x}\right] = \frac{0}{0}$

Derivar (l ´Hôpital) $= \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x}\right] = \frac{0}{2}$

$= 0$

Exemplo: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^{\left(1/x\right)}\right]$ $= \infty^{\mathbf{0}}$

$$= \lim_{x\to \infty} \left[x^{1/x}\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)} \quad 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\ln x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Substituindo em 1

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \left[x^{1/x}\right] = e^0 = 1}$$