Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste.

Nome COMPLETO: ______________________________

GRUPO I - Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista**: **1.0** valor por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta 1/2 valores na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4

1. Uma bola, inicialmente a altura zero, é lançada até a altura máxima de 4 metros e começa a pular. A altura de cada salto é 3/4 da altura do salto anterior. A distância vertical total percorrida pela bola é de:

   (a) $12m$ (b) $16m$ (c) ∞ (d) $32m$

2. O valor da soma da série infínita $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots$ é

   (a) 2 (b) 1 (c) *divergente* (d) $\frac{e}{\pi}$

3. Qual a função $f(t)$, com domínio $t>0$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s(s-2)}$?

   (a) $f(t)=\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}$ (b) $f(t)=2e^{2t}+2$ (c) $f(t)=\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}$ (d) $f(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}$

4. O desenvolvimento em série de Maclaurin da função $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ é:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)(2n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)(2n+1)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n}}{(2n+1)(2n)!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$

GRUPO II

5. [**2**] Usando a transformada inversa de Laplace, determine a função $f(t)$, $t\in R_o^+$:

$$F(s)=\frac{7s-5}{s^2}\,e^{-2\,s}+\frac{s}{s^2+2s+2}$$

6. [**3**] Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, sabendo que $y(0)=0$ e $y'(0)=1$,

$$y''+4y'+4y=\delta(t-2\pi)$$

7. **[2]** Calcule, se existir, a soma das seguintes series:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{\frac{n}{2}} e^{-n}$ (b) $4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2}$

GRUPO III

8. **[3]** Verifique a convergência ou divergência das seguintes séries, justificando de forma conveniente todos os cálculos efectuados e enuncie os critérios de convergência considerados:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n+2n^2}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{2n}\, n!}$

9. **[3]** Considere a seguinte função $f(x) = \ln x$.

   (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x)$ na vizinhança do ponto $x_0 = 1$. Caso entenda necessário, considere a seguinte relação (válida para $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   (b) Analise a convergência da série de Taylor da função $f(x)$ e indique o intervalo de valores de x para o qual a série se diz absolutamente convergente.

   (c) Baseado no resultado da alínea a), mostre que a série harmónica alternada, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$, converge para $\ln 2$.

10. **[3]** Considere a seguinte função $f(x)$ periódica com $f(x) = f(x + 2\pi)$:

$$f(x) = \frac{x}{\pi}, \qquad x \in]-\pi, \pi[$$

   (a) Determine $F(x)$ que é a série de Fourier de $f(x)$.

   (b) Esboce o gráfico das funções $f(x)$ e $F(x)$ em $x \in [-3\pi, 2\pi]$ e calcule o valor de $F(\frac{\pi}{2}) + F(\pi)$.

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$\mathcal{L}[a] = \frac{a}{s}$

$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ (n \in \mathbb{N})$

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}$

$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\sinh kt] = \frac{k}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}[\cosh kt] = \frac{s}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

$\mathcal{L}[e^{at} \sin kt] = \frac{k}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}[e^{at} \cos kt] = \frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$

$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$

$\mathcal{L}[f(t-a)\mathcal{U}(t-a)] = e^{-as} F(s)$

$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$