Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação
Análise Matemática | 1^o Semestre | 2018/2019
Recurso 3^a Parte | 2019.01.28 | Duração: 1h30m + 30m

Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste.

Nome COMPLETO: ____

GRUPO I - Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista**: **1.0** valor por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta **1/3** valores na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4

1. Qual o valor de $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}}\cdots\,dx$?

   (a) $\frac{1}{3}$ (b) 2 (c) ∞ (d) $\frac{1}{4}$

2. O valor da soma da série infínita $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}\cdots$ é

   (a) 200 (b) *divergente* (c) 32 (d) 8

3. Qual a função $f(t)$, com domínio $t>0$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{(s+1)(s-1)}$?

   (a) $f(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}$ (b) $f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}$ (c) $f(t)=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$ (d) $f(t)=e^{t}-e^{-t}$

4. Qual o valor do integral definido $\displaystyle\int_0^2 \cos(x^3)\,dx$?

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{6n}}{(6n)(2n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{6n+1}}{(6n+1)(2n)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{6n}}{(6n+1)(2n)!}$

GRUPO II

5. [**2**] Usando a transformada inversa de Laplace, determine a função $f(t)$, $t\in R_o^+$:

$$F(s)=\frac{9s+9}{s^2+9}e^{-\pi s}+\frac{s}{s^2+4s+13}$$

6. [**3**] Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, sabendo que $y(0)=1$ e $y'(0)=0$,

$$y''-2y'+y=6e^{-x}$$

7. **[2]** Calcule, se existir, a soma das seguintes series:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-2n}\, e^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)$

GRUPO III

8. **[3]** Verifique a convergência ou divergência das seguintes séries, justificando de forma conveniente todos os cálculos efectuados e enuncie os critérios de convergência considerados:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{n^{3/2}+2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{3n}\, n!}$

9. **[3]** Considere a seguinte função $f(x) = e^{ix}$, com $i = \sqrt{-1}$.

   (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x)$ na vizinhança do ponto $x_0 = 0$. <u>Caso entenda necessário</u>, considere a seguinte relação:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   (b) Baseado no resultado da alínea a), verifique que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, e mostre que $e^{i\pi} = -1$.

10. **[3]** Considere a seguinte função $f(x)$ periódica com $f(x) = f(x+2\pi)$:

$$f(x) = x^2, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

   (a) Determine $F(x)$ que é a série de Fourier de $f(x)$ e esboce o gráfico em $x \in [-2\pi,\, 3\pi]$.

   (b) Baseado no resultado da alínea a), mostre que $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$\mathcal{L}[a] = \frac{a}{s}$

$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}},\ \ (n \in \mathbb{N})$

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}$

$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\sinh kt] = \frac{k}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}[\cosh kt] = \frac{s}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

$\mathcal{L}[e^{at} \sin kt] = \frac{k}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}[e^{at} \cos kt] = \frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$

$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$

$\mathcal{L}[f(t-a)\mathcal{U}(t-a)] = e^{-as} F(s)$

$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$