Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste.

Nome COMPLETO: ______________________________

GRUPO I - Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista**: **1.0** valor por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta 1/3 valores na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4

1. Calcule, se existir, o valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$

   (a) $\frac{\pi^2}{2}$ (b) $-\infty$ (c) 0 (d) $-\frac{1}{2}$

2. Qual o valor de $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}}\cdots \,\mathrm{d}x$?

   (a) 2 (b) $\frac{1}{3}$ (c) ∞ (d) $\frac{1}{4}$

3. Qual o valor do integral definido $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^a \sin x \,\mathrm{d}x$ (com $a \in R_0^+$)?

   (a) $\frac{\pi^{a+1}}{a+1}$ (b) $2\frac{(-1)^{a+1}}{a+1}$ (c) 0 (d) π^{a+1}

4. Qual a função $f(t)$, com domínio $t>0$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{(s+1)(s-1)}$?

   (a) $f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}$ (b) $f(t)=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$ (c) $f(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}$ (d) $f(t)=e^{t}-e^{-t}$

GRUPO II

5. [**2**] Esboce a região Q do plano limitada pelos gráficos das funções e calcule a respectiva área:

$$f_1(x) = x^2-4x+3 \quad e \quad f_2(x) = -x^2+2x+3$$

6. [**2**] Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\pi-\tan^2 x}}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

7. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' - 2y' + y = 6e^{-x}$$

(a) **[1]** Calcule a solução homogénea da equação diferencial ordinária.

(b) **[2]** Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária.

(c) **[2]** Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, sabendo que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

GRUPO III

8. **[2.5]** Verifique a convergência ou divergência das seguintes séries, justificando de forma conveniente todos os cálculos efectuados e enuncie os critérios de convergência considerados:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{n^{3/2}+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{3n}\, n!}$

9. **[2]** Considere a seguinte função $f(x) = e^{ix}$, com $i = \sqrt{-1}$. Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x)$ na vizinhança do ponto $x_0 = 0$. Caso entenda necessário, considere a seguinte relação:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

10. **[2.5]** Considere a função $f(x)$ periódica com $f(x) = f(x + 2\pi)$:

$$f(x) = x^2, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

Determine $F(x)$ que é a série de Fourier de $f(x)$ e esboce o gráfico em $x \in [-2\pi,\ 3\pi]$.

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$\mathcal{L}[a] = \dfrac{a}{s}$

$\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}},\ \ (n \in \mathbb{N})$

$\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}[te^{at}] = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}[\sin kt] = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\cos kt] = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\sinh kt] = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}[\cosh kt] = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

$\mathcal{L}[e^{at}\sin kt] = \dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}[e^{at}\cos kt] = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$

$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$

$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)] = \dfrac{e^{-as}}{s}$

$\mathcal{L}[f(t-a)\mathcal{U}(t-a)] = e^{-as}F(s)$

$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$