

Nome COMPLETO: _____

IMPORTANTE: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste.

GRUPO I - Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista:** 1.2 valores por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta 0.5 valor na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4	5

1. Calcule, se existir, o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x \sin x}$

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\infty$ (c) 0 (d) $-\frac{1}{2}$

2. Calcule, se existir, o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - e^{x^2})^{1/x}$

- (a) 1 (b) e (c) e^2 (d) 0

3. Qual o valor do integral definido $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x)^5 \cos x \, dx$

- (a) $\frac{1}{3}$ (b) 0 (c) $-\frac{1}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

4. Qual a expressão de $\frac{d}{dx} \left[\sin \left(\frac{\cos x}{x} \right) \right]$?

- (a) $-\frac{1}{x^2} \cos \left(\frac{\cos x}{x} \right) (x \sin x + \cos x)$ (b) $-\frac{1}{x^2} \cos \left(\frac{\sin x}{x} \right) (x \cos x + \cos x)$
 (c) $\frac{1}{x} \cos \left(\frac{\cos x}{x^2} \right) (x \cos x + \cos x)$ (d) $\frac{1}{x^2} \cos \left(\frac{\cos x}{x} \right) (x \sin x + \cos x)$

5. Considere a função $f(x) = x^2$ no intervalo $x \in [0, 2]$. Qual o valor da aproximação da área sinalada de $f(x)$ obtida pela soma de Riemann superior para 4 partições de $\Delta x_i = 1/2$

- (a) $\frac{14}{8}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{30}{8}$ (d) $\frac{28}{3}$

GRUPO II

6. [3] Café escoa através de um filtro cónico (diâmetro e altura máxima de $D = 6$ cm e $H = 5$ cm, respectivamente) para uma caneca cilíndrica de diâmetro $D_c = 3$ cm. A taxa de variação de volume de café no filtro é de $\frac{9}{4}\pi$ cm³/segundo. Supondo que não há mais café a entrar no filtro, calcule:
- (a) a velocidade de subida do nível de café no caneca, quando o nível de café no filtro for de 2.5 cm?
 - (b) qual a velocidade de descida do nível de café no filtro para o mesmo instante?
7. [2] Usando os conceitos de derivada da função composta e de derivada da função inversa, calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$ para $y = \arcsin(\ln x)$.

GRUPO III

8. [2] Esboce a região Q do plano limitada pelos gráficos das funções $f_1(x) = 4 - x^2$ e $f_2(x) = x - 2$. Determine a área da região Q .
9. [5] Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:
- (a) $\int \frac{1}{x} (\sqrt{x} + \ln x) \, dx$
 - (b) $\int x \arctan x \, dx$
 - (c) $\int x \sqrt{16 - 4x^2} \, dx$
 - (d) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} \, dx$
10. [2] Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, determine uma função $f(x)$ contínua, não nula e derivável que satisfaça a equação:

$$\ln |f(x)| = \int_{\pi}^{x^2} \frac{1}{t f(\sqrt{t})} \, dt$$

Justifique todos os cálculos efectuados.