

COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA**Aula Teórico-Prática – Ficha 1****FUNÇÕES VECTORIAIS**

1. Seja a função vectorial $\vec{f}(t) = (t^2 - 2)\vec{i} + 2t\vec{j} + e^{t-1}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t)$.
2. Considere a função vectorial $\vec{f}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{\ln t}{t}\vec{j} + e^{-2t}\vec{k}$, $t \in (0, +\infty)$. Determine:
 - a) A sua função derivada, $\vec{f}'(t)$.
 - b) $\int_1^3 \vec{f}(t) dt$.
3. Calcule os seguintes integrais:
 - a) $\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t} \vec{i} + \frac{1}{1+e^t} \vec{j} \right) dt$.
 - b) $\int_0^1 \left(te^t \vec{i} + t^2 e^t \vec{j} + te^{-t} \vec{k} \right) dt$.
4. Dados os vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \int_0^1 \left(te^{2t} \vec{i} + t \cosh(2t) \vec{j} + 2te^{-2t} \vec{k} \right) dt$, calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
5. Seja a função vectorial $\vec{f}(t) = \frac{2t}{1+t^2} \vec{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$. Mostre que o ângulo, θ , formado por $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}'(t)$ é independente do valor do parâmetro t .
6. Sejam as funções vectoriais $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t) = \vec{f}(t) \times \vec{f}'(t)$ com valores em \mathbb{R}^3 . Escreva $\vec{g}'(t)$ em função de $\vec{f}(t)$ e das derivadas desta função.

7. Considere a função vectorial $\vec{f}(t)$, com valores em \mathbb{R}^3 , e a função escalar $g(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)$. Mostre que $g'(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) \times \vec{f}'''(t)$.
8. Seja a função vectorial $\vec{f}(t)$, $t \geq 0$, tal que $t\vec{f}'(t) = \vec{f}(t) + t\vec{a}$ e \vec{a} é um vector não nulo e constante. Sabendo que $\vec{f}(1) = 2\vec{a}$, obtenha os valores de $\vec{f}(3)$ e $\vec{f}''(1)$.
9. Considere a função vectorial $\vec{f}(t) = \sin(2t)\vec{a} + \cos(2t)\vec{b}$, $t \in \mathbb{R}$, em que \vec{a} e \vec{b} são vectores não nulos e constantes. Mostre que os vectores $\vec{f}''(t)$ e $\vec{f}(t)$ são paralelos.
10. Parametrize as curvas do plano xOy que são o gráfico das funções:

a) $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. b) $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$.
11. Obtenha a parametrização do segmento de recta que liga o ponto $P = (2, 7, -1)$ ao ponto $Q = (4, 2, 3)$.
12. Parametrize as seguintes linhas do plano xOy :

a) $y = x^2$, percorrida no sentido do ponto $(-1, 1)$ para o ponto $(3, 9)$.

b) $y = x^2$, percorrida no sentido do ponto $(3, 9)$ para o ponto $(-1, 1)$.

c) $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido directo.

d) $x^2 + y^2 = 2x$, percorrida no sentido directo e unindo o ponto $(2, 0)$ ao ponto $(0, 0)$.

e) $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido retrógrado.
13. Determine as equações cartesianas das curvas do plano xOy definidas parametricamente pelas equações:

a) $\vec{f}(t) = (3t - 1)\vec{i} + (5 - 2t)\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$. b) $\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 3\sin(t)\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

c) $\vec{f}(t) = t^{-1}\vec{i} + t^{-2}\vec{j}$, $t \in (0, 3)$. d) $\vec{f}(t) = \tan(t)\vec{i} + \sec(t)\vec{j}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

e) $\vec{f}(t) = e^{2t}\vec{i} + (e^{2t} - 1)\vec{j}$, $t \leq 0$. f) $\vec{f}(t) = 2\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

g) $\vec{f}(t) = \sin(t)\vec{i} + (1 + \cos^2(t))\vec{j}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Esboce as curvas definidas em cada uma das alíneas do exercício anterior e identifique o sentido do percurso das mesmas.
15. Parametrize as seguintes curvas do espaço:
- a) $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$. b) $y = x^2$ e $z = x^3$.
- c) $x^2 + y^2 = 4$ e $z = e^x$. d) $4(x+1)^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$.
- e) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ e $z = 0$.
16. Esboce as curvas definidas em cada uma das alíneas do exercício anterior.
17. Obtenha a curva do espaço descrita pela função vectorial $\vec{r}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{r}'(t) = \alpha \vec{r}(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{r}(0) = (1, 2, 3)$.
18. Em relação à curva, C , do espaço descrita pela função vectorial $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0, 1]$, determine:
- a) A equação vectorial da recta, r , tangente à curva no ponto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.
- b) Os pontos da curva onde o vector tangente é paralelo ao vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.
- c) Os pontos da curva onde o vector tangente é ortogonal ao vector \vec{a} .
19. Seja a curva plana descrita pela função vectorial $\vec{f}(t) = t^3\vec{i} + t^5\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$.
- a) Mostre que a parametrização dada não é regular.
- b) Indique uma parametrização regular para a curva.
20. Seja a curva, C , parametrizada por $\vec{r}(\theta) = (1 + 2\cos(\theta))\vec{i} + (2 + 2\sin(\theta))\vec{j}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
- a) Esboce a curva C .
- b) Determine a linha tangente à curva nos pontos onde C intersecta o eixo dos xx .
- c) Determine a linha tangente à curva nos pontos onde C intersecta o eixo dos yy .

- 21.** Considere a curva no espaço com equações paramétricas $x = \sin(2t)$, $y = 2\sin^2(t)$ e $z = 2\cos(t)$, $t \in [0, \pi]$. Mostre que:
- a) A curva está situada sobre uma superfície esférica centrada na origem.
 - b) A norma do vector, \vec{u} , resultante da projecção ortogonal do vector tangente à curva sobre o plano xOy é constante.
- 22.** Seja a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Determine os pontos da curva onde a linha tangente é paralela à recta de equação vectorial $\vec{r}(u) = (2, 1) + u(1, 1)$, $u \in \mathbb{R}$.
- 23.** Seja a parábola de equação $y^2 = 4x$.
- a) Parametrize a curva.
 - b) Determine as linhas tangentes à parábola que passam no ponto $P = (-2, 0)$.
- 24.** Seja a elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 8$.
- a) Parametrize a curva.
 - b) Obtenha os pontos da elipse onde a linha tangente é paralela à recta de equação $x + 2y = 7$.
- 25.** Seja a curva, C , do espaço descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + \sin(2t)\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Obtenha a equação cartesiana do plano que passa no ponto $P = (0, -1, 1)$ e é paralelo ao plano osculador da curva no ponto $Q = (-1, 0, 1)$.
- 26.** Seja hélice cónica descrita pela função vectorial $\vec{r}(\lambda) = \lambda \cos(\lambda)\vec{i} + \lambda \sin(\lambda)\vec{j} + b\lambda\vec{k}$, em que $\lambda \geq 0$ e $b > 0$. Determine, no ponto $O = (0, 0, 0)$ da hélice:
- a) As equações vectoriais dos planos osculador, normal e rectificador.
 - b) As equações cartesianas dos planos osculador, normal e rectificador.
- 27.** Seja a curva plana, C , de equação $y = x^2 / 2$. Calcule o comprimento do arco da curva compreendida entre os pontos $(0, 0)$ e $(1/2, 1/8)$.

28. Seja a curva plana, C , de equação $y^2 = x^3$. Calcule o comprimento do arco da curva compreendida entre os pontos $(1, -1)$ e $(1, 1)$.
29. Seja a curva, C , do espaço de equações $y = x^2$ e $z = 2x^3/3$, tal que $x \geq 0$. Obtenha a função comprimento de arco.
30. Seja a curva do espaço, C , descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = e^t (\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \vec{k})$, $t \geq 0$.
- Esboce a curva.
 - Calcule os versores da tangente, da normal principal e da binormal em $\vec{r}(t)$.
 - Obtenha as equações cartesianas dos planos osculador, normal e rectificador em $\vec{r}(t)$.
 - Determine as equações cartesianas dos planos osculador, normal e rectificador no ponto $P = (1, 0, 1)$.
 - Calcule a curvatura, o raio de curvatura e o centro de curvatura em P .
 - Obtenha a função comprimento de arco, que determina o comprimento da curva entre o seu ponto inicial e o ponto genérico $\vec{r}(t)$.
 - Calcule o comprimento do arco da curva, entre o seu ponto inicial e o ponto $\vec{f}(2)$.
 - Determine o comprimento do arco da curva, entre os pontos $\vec{f}(1)$ e $\vec{f}(2)$.
31. Para cada uma das curvas seguintes, determine a função comprimento de arco e indique o valor do comprimento da curva:
- $\vec{r}(u) = a(1 - \cos(u))\vec{i} + a(u - \sin(u))\vec{j}$, $a > 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$.
 - $\vec{r}(u) = e^u \cos(u)\vec{i} + e^u \sin(u)\vec{j}$, $0 \leq u \leq 2$.
 - $\vec{r}(u) = a(\cos(u) + u\sin(u))\vec{i} + a(\sin(u) - u\cos(u))\vec{j}$, $a > 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$.
 - $\vec{r}(u) = \sin(u)\vec{i} + u\vec{j} + (1 - \cos(u))\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2\pi$.
 - $\vec{r}(u) = u\vec{i} + 3u^2\vec{j} + 6u^3\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2$.
 - $\vec{f}(u) = a \cos(\omega u)\vec{i} + a \sin(\omega u)\vec{j} + b \omega u \vec{k}$, $u_0 \leq u \leq u_1$.
32. Seja a curva do espaço, C , descrita pela função vectorial $\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $t \geq 0$.
- Calcule o comprimento do arco da curva entre os pontos $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (1, 0, 2\pi)$.
 - Parametrize a curva em função do comprimento de arco.

33. Determine o comprimento da curva plana descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = \cos^3(t)\vec{i} + \sin^3(t)\vec{j}$, $t \in [0, \pi/2]$.
34. Seja a curva do espaço, C , descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = 3\cos(t)\vec{i} + 3\sin(t)\vec{j} + 4t\vec{k}$, $t \geq 0$.
- Esboce a curva.
 - Determine o comprimento de arco em função do parâmetro t .
 - Obtenha as coordenadas do ponto Q da curva, tal que o comprimento do arco da curva entre os pontos $P = (3, 0, 0)$ e Q é igual a 5π m.
 - Parametrize a curva em relação ao comprimento de arco, isto é, defina a função $\vec{r}(s)$, $s \geq 0$.
 - Mostre que a primeira derivada da função vectorial encontrada na alínea anterior é versor.
35. Seja a hélice circular parametrizada por $\vec{f}(t) = a\cos(\omega t)\vec{i} + a\sin(\omega t)\vec{j} + b\omega t\vec{k}$, $t \geq 0$, em que a e ω são constantes positivas. Determine:
- O ângulo, θ , que a tangente à hélice faz com o eixo dos zz .
 - A curvatura da hélice.
36. Determine o comprimento da curva do plano xOy definida, em coordenadas polares, pela função $r = 1 + \cos(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$.
37. Calcule o comprimento da curva (espiral de Arquimedes) do plano xOy definida, em coordenadas polares, pela função $r = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
38. Para cada uma das curvas planas seguintes, determine os pontos onde a curvatura é máxima:
- $y = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
 - $9x^2 + 4y^2 = 36$.
 - $y = \ln(x)$, $x > 0$.
39. Para cada uma das curvas planas seguintes, determine os pontos onde a curvatura é nula:
- $y = \operatorname{tg}(x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
 - $y = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

40. Para cada uma das curvas seguintes, determine o vector curvatura e a curvatura no ponto genérico da curva e particularize os seus valores para o ponto P :

a) $\vec{r}(u) = (3u - u^3)\vec{i} + 3u^2\vec{j} + (3u + u^3)\vec{k}$, $u \in \mathbb{R}$ e $P = \vec{r}(2)$.

b) $\vec{r}(u) = \cos(u)\vec{i} + \sin(u)\vec{j} + \sqrt{3}u\vec{k}$, $u \in \mathbb{R}$ e $P = \vec{r}(\pi)$.

c) $\vec{r}(u) = \cos(u)\vec{i} + \sin(u)\vec{j} + e^u\vec{k}$, $u \in \mathbb{R}$ e $P = \vec{r}(\pi)$.

41. Seja a curva do plano xOy definida, em coordenadas polares, pela função $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$. Mostre que a curvatura da curva é dada pela expressão:

$$k(\theta) = \frac{|r^2 - rr'' + 2(r')^2|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

42. Considere as curvas planas $C_1 : 4x^2 + y^2 = 4$ e $C_2 : y = 2(1 + \sqrt{2})x - 2$.

a) Parametrize as curvas dadas.

b) Determine os pontos de intersecção das curvas.

c) Calcule o ângulo, θ , formado pelas duas curvas no ponto de intersecção de menor abcissa.

d) Obtenha a curvatura da curva C_1 no ponto referido na alínea anterior.

43. Seja a curva do espaço parametrizada por $\vec{r}(u) = \cos(u)\vec{i} + \sin(u)\vec{j} + \sqrt{3}u\vec{k}$, $u \geq 0$. Calcule:

a) A equação cartesiana do plano osculador no ponto $I = (1, 0, 0)$.

b) O centro de curvatura num ponto genérico da curva.

Soluções: Consultar o manual “Noções sobre Geometria Analítica e Análise Matemática”, efeitosgraficos.pt (FEUP), 2017. ISBN: 978-989-99559-3-6