COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 5

INTEGRAIS DE LINHA

1. Calcule os seguintes integrais ao longo da linha indicada:

a) $\int_C (2-y)dx + (x)dy$, sendo $C: \vec{r}(t) = (t - \text{sen}(t))\vec{i} + (1-\cos(t))\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\int_C (2xy)dx + (x^2+z)dy + (y)dz$, em que C é o segmento de recta que liga o ponto $P=(1,0,2)$ ao ponto $Q=(5,8,0)$.

c) $\int_C (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$, onde C é a linha que liga os pontos $O=(0,0)$ e $P=(3,-1)$, situada sobre o gráfico da função $y = 1-|1-x|$.

d) $\int_C \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2+y^2}$, sendo C a circunferência $x^2+y^2=a^2$, percorrida no sentido retrógrado.

e) $\int_C (y)dx + (z)dy + (x)dz$, onde C é a linha de intersecção das superfícies $x^2+y^2+z^2=4$ e $x+y=2$, percorrida no sentido directo quando vista da origem do referencial.

f) $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, em que C é o quadrado com vértices nos pontos $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-1,0)$ e $D=(0,-1)$, percorrido no sentido directo.

2. Considere o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ e a linha, L, parametrizada por $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\text{sen}(t)\vec{j}$, $t \in [0,2\pi]$ e $a>0$. Calcule, recorrendo à definição, o valor do integral de linha $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, sendo L percorrida no sentido retrógrado.

3. Confirme o resultado obtido no exercício 2.:

a) Verificando que o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ é gradiente.

b) Usando o teorema de Green.

4. Verifique que o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$ é gradiente e determine o valor de $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ao longo do caminho, L, parametrizado por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in [0,2]$.

5. Confirme o resultado obtido no exercício 4. recorrendo à definição de integral de linha.

6. Verifique que o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = 3x\left(x^2 + y^4\right)^{1/2}\vec{i} + 6y^3\left(x^2 + y^4\right)^{1/2}\vec{j}$ é gradiente e calcule o valor de $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ao longo da curva $y = -\left(1 - x^2\right)^{1/2}$, entre os pontos $P = (-1,0)$ e $Q = (1,0)$.

7. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = (2xy + z^2)\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} + (2xz - y^2)\vec{k}$. Mostre que $\vec{f}(x,y,z)$ é gradiente e calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, em que C é uma linha que liga o ponto $P = (1,0,1)$ ao ponto $Q = (3,2,1)$.

8. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = (e^{2y} - 2xy)\vec{i} + (2xe^{2y} - x^2 + 1)\vec{j}$ e a linha, C, parametrizada por $\vec{r}(u) = ue^u\vec{i} + (1+u)\vec{j}$, $u \in [0,1]$. Calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$:

a) Usando a definição de integral de linha.

b) Verificando que o campo vectorial é gradiente e recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

9. Mostre que o integral de linha $\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} (6xy^3 + 2z^2)dx + (9x^2y^2)dy + (4xz+1)dz$ é independente do caminho e calcule-o.

10. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=(2xy+z^2)\vec{i}+x^2\vec{j}+2xz\vec{k}$ e a linha, C, parametrizada por $\vec{r}(u)=2u\vec{i}+(u^2+2)\vec{j}-u\vec{k}$, $u\in[0,1]$. Calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$:

a) Usando a definição de integral de linha.

b) Verificando que o campo vectorial é gradiente e recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

11. Considere o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=\left(2xz+\operatorname{sen}(y)\right)\vec{i}+x\cos(y)\vec{j}+x^2\vec{k}$ e a linha, C, parametrizada por $\vec{r}(u)=\cos(u)\vec{i}+\operatorname{sen}(u)\vec{j}+u\vec{k}$, $u\in[0,2\pi]$. Verifique que o campo vectorial é gradiente e calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

12. Calcule o valor de $\int_C (x^2y)dx+(y)dy+(xz)dz$, sendo C a parcela da curva de intersecção da superfície cilíndrica $y-2z^2=1$ com o plano $z=x+1$, definida entre os pontos $P=(0,3,1)$ e $Q=(1,9,2)$.

13. Calcule, usando o teorema de Green, o integral de linha $\oint_C (3xy+y^2)dx+(2xy+5x^2)dy$, sendo C a circunferência de raio unitário e com centro no ponto $P=(1,-2)$.

14. Verifique o resultado obtido no exercício 13. recorrendo à definição de integral de linha.

15. Recorrendo ao teorema de Green, determine o integral de linha $\oint_C (2x^2+xy-y^2)dx+(3x^2-xy+2y^2)dy$, em que $C\ :\ (x-a)^2+y^2=r^2$.

16. Recorrendo ao teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (y)dx+(3x)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $y=2x$ e $y=x^2$, percorrida no sentido retrógrado. Verifique o teorema de Green.

17. Usando o teorema de Green, calcule o integral de linha $\oint_C (x+y)dx + (y^2 - x)dy$, sendo $C = C_1 \cup C_2$, tal que $C_1 : y = 0$, $x \in [-1,1]$ e $C_2 : x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. Verifique o teorema de Green.

18. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{i} + (z+y)\vec{j} - y\vec{k}$ e a curva, C, que é a intersecção das superfícies $y^2 + z^2 = 1$ e $x = y$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva C.

b) Calcule o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, se a curva for percorrida no sentido directo quando vista do ponto $P = (1,0,0)$.

19. Considere a a curva, C, que é a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva C.

b) Calcule o integral de linha $\int_C (x)dx + (-y)dy + (xyz)dz$, se a curva for percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial.

20. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = z^2\vec{i} + y^2\vec{j} + xz\vec{k}$ e a curva, C, que é a intersecção das superfícies $x^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$ e $z = y$. Esboce a curva C e determine $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, se a curva for percorrida no sentido directo quando vista do ponto $P = (0,1,0)$.

21. Usando o teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (x)dx + (x)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $y = 1 - x$ e $y = (x-1)^2$, percorrida no sentido retrógrado. Verifique o teorema de Green.

22. Relativamente aos integrais de linha seguintes, verifique o teorema de Green:

a) $\oint_C (y^2)dx + (x)dy$, sendo C a fronteira da região quadrada, Ω, com vértices nos pontos $O = (0,0)$, $A = (2,0)$, $B = (2,2)$ e $C = (0,2)$.

b) $\oint_C (x^2)dy$, sendo C a fronteira da região rectangular, Ω, com vértices nos pontos $O = (0,0)$, $A = (a,0)$, $B = (a,b)$ e $C = (0,b)$.

c) $\oint_C (4x^3 + 2y^2)dx + (4xy + e^y)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

23. Recorrendo ao teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (2xy + 3x^2)dx + (2y)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, do 1º quadrante limitada pelos gráficos das funções $y = 2$, $y = 3 - 2x$ e $y = x^2$, percorrida no sentido directo. Verifique o teorema de Green.

29. Calcule os seguintes integrais de linha em relação ao comprimento de arco:

a) $\int_C (x - y)ds$, onde C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3t\vec{j}$, $t \in [0,2]$.

b) $\int_C (x^2 + y^2)ds$, em que C é o segmento de recta percorrido entre o ponto $O = (0,0)$ e o ponto $P = (3,9)$.

c) $\int_C (x^2 + y^2)ds$, sendo C o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, percorrido entre o ponto $P = (1,0)$ e o ponto $Q = (0,1)$.

d) $\int_C (x + 4\sqrt{y})ds$, sendo C o triângulo com vértices nos pontos $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ e $C = (0,1)$, percorrido no sentido retrógrado.

e) $\int_C (z)ds$, onde C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = t\cos(t)\vec{i} + t\mathrm{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $t \in [0, t_1]$.

30. Usando o teorema de Green, calcule o integral de linha

$$\oint_{C_1} (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy - \oint_{C_2} (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$$

onde C_1 é a circunferência $x^2 + y^2 = b^2$ e C_2 é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, tal que $0 < a < b$.

31. Seja C a linha de intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 2y$ e $z = 1 + y$, percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial. Calcule:

a) $\int_C (yz)dx + (xz)dy$. **b)** $\int_C (yz)dx + (xz)dy + (xy)dz$.

32. Calcule o integral de linha $\int_C (z)dx + (y^2)dy + (xy)dz$, em que C é a linha de intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $x + z = 1$, percorrida no sentido directo quando vista do ponto $P = (0,0,3)$.

33. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + xz^2\vec{k}$ e a linha, C, que é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 - 4 = 0$ e $z = 3$, percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial. Determine o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$.

34. Seja C a linha parametrizada por $\vec{r}(t) = \text{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + \frac{1}{2}\text{sen}(2t)\vec{k}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calcule o integral de linha $\int_C (yz + z^2)dx + (xz)dy + (xy + 2xz)dz$, se C é percorrida na direcção oposta à definida pela sua parametrização.

36. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y\vec{j}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo da parábola $y = 3x^2$, entre o ponto $O = (0,0)$ e o ponto $P = (1,3)$.

37. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + xy\vec{j} + xyz\vec{k}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo do segmento de recta que liga o ponto $P = (0,1,4)$ ao ponto $Q = (1,0,-4)$.

38. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z) = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + z^2\vec{k}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo da hélice $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$, entre o ponto $P = (1,0,0)$ e o ponto $Q = (1,0,2\pi)$.

40. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z)=(x+e^{2y})\vec{i}+(2y+2xe^{2y})\vec{j}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo da linha, C, parametrizada por $\vec{r}(t)=3\cos(t)\vec{i}+4\operatorname{sen}(t)\vec{j}$, $t\in[0,2\pi]$. Comece por verificar se o campo de forças é gradiente.

41. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z)=\left(2x\ln(y)-yz\right)\vec{i}+(x^2y^{-1}-xz)\vec{j}-xy\vec{k}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo do segmento de recta, C, que liga o ponto $A=(1,2,1)$ ao ponto $B=(3,2,2)$. Comece por verificar se o campo de forças é gradiente.

45. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=xy\vec{i}+yz\vec{j}+x^2\vec{k}$ e a linha C que é a fronteira da região rectangular com vértices nos pontos $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,1,1)$ e $D=(1,0,1)$. Determine o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, se a linha C é percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial.

46. Calcule o integral de linha $\int_C (2xe^y)dx+(x^2e^y)dy+dz$, sendo C a linha parametrizada por $\vec{r}(t)=t\vec{i}+(4-t^2)\vec{j}+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\vec{k}$, $t\in[0,2]$, percorrida na direcção oposta à definida pela sua parametrização.

47. Seja C a linha que liga o ponto $P=(1,0,0)$ ao ponto $Q=(0,-1,2)$ e que pertence à intersecção das superfícies $x^2+y^2-1=0$ e $x+y+z=1$. Calcule o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, em que $\vec{f}(x,y,z)=(2xz+y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}+(x^2+3z^2)\vec{k}$.

Soluções: Consultar o manual "Noções sobre Análise Matemática", Efeitos Gráficos, 2019. ISBN: 978-989-54350-0-5.

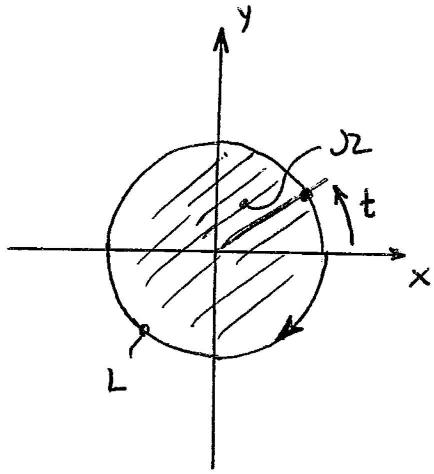
2) $\vec{F}(x,y) = (x,y)$

<u>Curva L</u> :

$\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\,\text{sen}\,t)$, $t \in \overleftarrow{[0,2\pi]}$

$(a>0)$

$\vec{r}\,'(t) = (-a\,\text{sen}\,t,\ a\cos t)$



Formulação vectorial :

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L \vec{F}[\vec{r}(t)]\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$\vec{F}[\vec{r}(t)] = (a\cos t,\ a\,\text{sen}\,t)$$

$$\vec{F}[\vec{r}(t)]\circ\vec{r}\,'(t) = -a^2\,\text{sen}(t)\cos(t) + a^2\,\text{sen}(t)\cos(t) = 0$$

Assim

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{2\pi}^{0} 0\,dt = 0$$

2) a) $\vec{F}(x,y) = (P,Q) = (x,y)$ $\qquad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ é gradiente

Tendo em atenção que $\vec{F}$ é gradiente e L é uma linha fechada, conclui-se que

$$\oint_L \vec{F}\circ d\vec{r} = 0$$

b) O Teorema de Green permite-nos escrever, para o caso presente,

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = -\iint_\Omega 0\,dx\,dy = 0$$

Wij

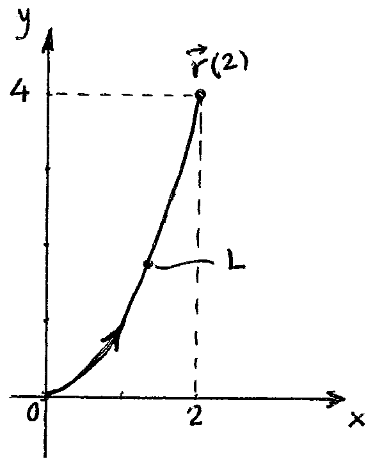
4)

$$\vec{F}(x,y) = (P,Q) = (xy^2, x^2y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \vec{F} \text{ é gradiente}$$

Então

$$\exists_{\varphi(x,y)} : \nabla\varphi = \vec{F}(x,y)$$



Determinação de função potencial:

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = xy^2 \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \phi_1(y) + k_1$$

$$Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2y \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \phi_2(x) + k_2$$

Curva L:

$\vec{r}(t) = (t, t^2), t \in [\overrightarrow{0,2}]$

ou

$y = x^2, \; x \in [\overrightarrow{0,2}]$

Compatibilizando, obtém-se

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + K$$

Então

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(2,4) - \varphi(0,0) = 32 + K - K = 32$$

5) Formulação vectorial:

$\vec{F}[\vec{r}(t)] = (t^5, t^4)$ e $\vec{r}'(t) = (1, 2t)$

$F[\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}'(t) = 3t^5$

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt = 3\int_0^2 t^5\, dt = \frac{1}{2}\, 2^6 = 32$$

Formulação diferencial:

$y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$P\,dx = x^5\,dx \;;\; Q\,dy = 2x^5\,dx$

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L P\,dx + Q\,dy = \int_0^2 3x^5\,dx = 32$$

Wing

7) $\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R) = (2xy+z^2,\ x^2-2yz,\ 2xz-y^2)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2z \qquad \Rightarrow \quad \vec{F} \text{ é gradiente}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -2y$$

Então, $\exists \varphi(x,y,z) : \nabla\varphi = \vec{F}(x,y,z)$

Determinação de função potencial

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy + z^2 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = x^2y + xz^2 + \phi_1(y,z) + k_1$$

$$Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - 2yz \Rightarrow \varphi(x,y,z) = x^2y - y^2z + \phi_2(x,z) + k_2$$

$$R = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2xz - y^2 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = xz^2 - y^2z + \phi_3(x,y) + k_3$$

Compatibilizando, obtém-se

$$\varphi(x,y,z) = x^2y + xz^2 - y^2z + k$$

Então

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(3,2,1) - \varphi(1,0,1) =$$

$$= 18 + 3 - 4 + k - (1+k) = 16$$

Wir

12)

$$\vec{F}(x,y,z) = (P, Q, R) = (x^2 y, y, xz)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \quad e \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \vec{F} \text{ não é gradiente.}$$

Curva $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} y = 1 + 2z^2 \\ z = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 2z^2 \\ x = z - 1 \end{cases}, \quad z \in \overrightarrow{[1,2]}$$

Formulação diferencial:

$$dy = 4z\, dz \quad e \quad dx = dz$$

$$\int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz = (*)$$

$$P\, dx = (z-1)^2 (1+2z^2)\, dz = (z^2 - 2z + 1)(1+2z^2)\, dz =$$

$$= (2z^4 + z^2 - 4z^3 - 2z + 2z^2 + 1)\, dz =$$

$$= (2z^4 - 4z^3 + 3z^2 - 2z + 1)\, dz$$

$$Q\, dy = (1 + 2z^2)\, 4z\, dz = (8z^3 + 4z)\, dz$$

$$R\, dz = z(z-1)\, dz = (z^2 - z)\, dz$$

$$(*) = \int_1^2 (2z^4 + 4z^3 + 4z^2 + z + 1)\, dz =$$

$$= \frac{2}{5}(32 - 1) + (16-1) + \frac{4}{3}(8-1) + \frac{1}{2}(4-1) + 1 =$$

$$= \frac{62}{5} + 15 + \frac{28}{3} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1177}{30}$$

Wmy

13)

$$\vec{f}(x,y) = (P, Q) = (3xy + y^2, 2xy + 5x^2)$$

Será a função $\vec{f}(x,y)$ gradiente, isto é,

$$\exists \varphi(x,y) \; : \; \nabla \varphi(x,y) = \vec{f}(x,y)$$

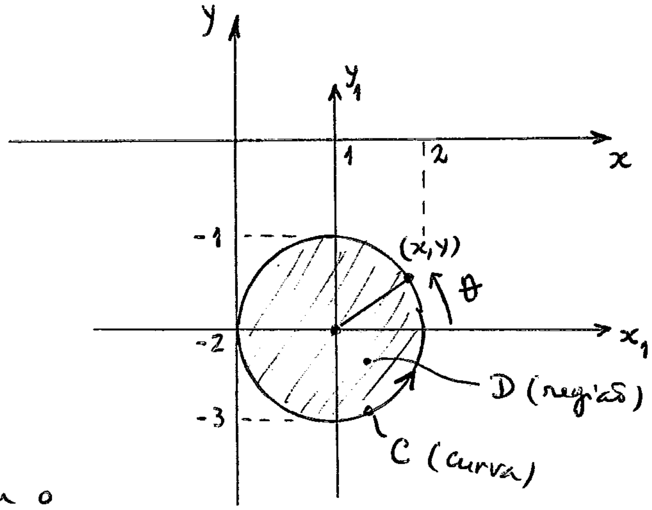
Verifiquemos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3xy + y^2) = 3x + 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 5x^2) = 2y + 10x$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, pelo que $\vec{f}(x,y)$ <u>não é gradiente</u>

Pretendemos calcular o integral de linha



$$\oint_C \vec{f}[\vec{r}] \cdot d\vec{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

Neste caso é mais simples aplicar o <u>teorema de Green</u>

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \underbrace{\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]}_{=7x} dx\,dy = 7 \iint_D x\,dx\,dy =$$

$$= 7\,\bar{x}_D\,A(D) = 7(1)\,\pi = 7\pi$$

<u>NOTA</u>: $\bar{x}_D = 1$ - coordenada x do centróide, ponto $(1,-2)$, da região D e $A(D) = \pi$ - área da região D.

Convém <u>relembrar</u> que o <u>cálculo do integral</u>

$$\iint_D x\,dx\,dy$$

poderia ser realizado usando coordenadas polares.

Tendo em atenção a figura da página anterior, sabe-se que

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = -2 + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

O determinante da <u>matriz Jacobiana</u> tem o valor

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta = r$$

pelo que

$$dx\,dy = |J(r,\theta)|\,dr\,d\theta = |r|\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$

Assim,

$$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_D (1+r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r + r^2\cos\theta)\,d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\,dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi$$

sendo de notar que

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$$

<u>NOTA</u> : Existe literatura onde a <u>matriz Jacobiana</u> é apresentada sob a forma

$$\underset{\sim}{J}(r,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

que corresponde à matriz transposta da matriz referida acima, mantendo o mesmo valor para o determinante.

Wuj

14) Formulação vectorial:

Curva C: $\vec{r}(\theta) = (1+\cos\theta, -2+\operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$

$\vec{r}'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$\vec{F}[\vec{r}(\theta)] = ?$

$$3xy + y^2 = 3(1+\cos\theta)(-2+\operatorname{sen}\theta) + (-2+\operatorname{sen}\theta)^2 =$$
$$= -6 - 6\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta + 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4 - 4\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta =$$
$$= \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 6\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2$$

$$2xy + 5x^2 = 2(1+\cos\theta)(-2+\operatorname{sen}\theta) + 5(1+\cos\theta)^2 =$$
$$= -4 - 4\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 5 + 10\cos\theta + 5\cos^2\theta =$$
$$= 5\cos^2\theta + 6\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1$$

$$\vec{F}[\vec{r}(\theta)] = (\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 6\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2,$$
$$, 5\cos^2\theta + 6\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1)$$

$$\vec{F}[\vec{r}(\theta)] \cdot \vec{r}'(\theta) = -\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 6\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta +$$
$$+ 5\cos^3\theta + 6\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta + \cos\theta =$$
$$= -\operatorname{sen}^3\theta + 5\cos^3\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 6\cos^2\theta + 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta +$$
$$+ \cos\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta =$$
$$= -\operatorname{sen}^3\theta + 5\cos^3\theta + 5\cos^2\theta + 1 + \cancel{4}\operatorname{sen}(2\theta) + 2\operatorname{sen}\theta +$$
$$+ \cos\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$$

Tem-se, então

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}'(\theta)\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta + 5\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta +$$
$$+ 5\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} d\theta + 4\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2\theta)\, d\theta + 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta +$$
$$+ \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta - 3\int_0^{2\pi} \cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta + 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

Wir

Notando que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta\, d\theta = 0$$

e que

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$5\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} (1+\underbrace{\cancel{\cos(2\theta)}}_{=0})\, d\theta = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = 5\pi$$

Conclui-se que

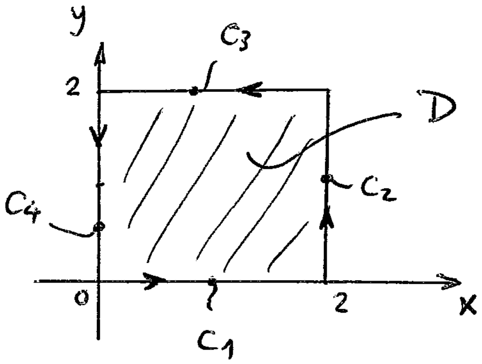
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\theta + 5\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 7\pi$$

Como é evidente, trata-se de um processo de cálculo que, no caso do presente problema, é muito mais trabalhoso do que o que resulta da aplicação do Teorema de Green (ver exercício 8)a))

Wir

22)

a) $\vec{F}(x,y) = (P,Q) = (y^2, x)$



Verificar o Teorema de Green:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Calculemos o integral de linha (formulação diferencial):

Linha C_1 : $y = 0$, $x \in [\overrightarrow{0,2}]$

$dy = 0$

$P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = 0$

Linha C_2 : $x = 2$, $y \in [\overrightarrow{0,2}]$

$dx = 0$

$P\,dx + Q\,dy = 2\,dy$

$\oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^2 2\,dy = 4$

Linha C_3 : $y = 2$, $x \in [\overleftarrow{0,2}]$

$dy = 0$

$P\,dx + Q\,dy = 4\,dx$

$\oint_{C_3} P\,dx + Q\,dy = \int_2^0 4\,dx = -8$

Linha C_4 : $x = 0$, $y \in [\overleftarrow{0,2}]$

$dx = 0$

$P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{C_4} P\,dx + Q\,dy = 0$

Concluindo

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = 4 - 8 = -4$$

Wuis

Calculemos o integral de superfície

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2y$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_0^2 \int_0^2 (1 - 2y)\, dy\, dx =$$

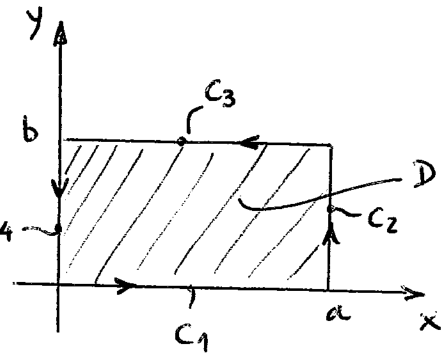
$$= 2 \left[y - y^2 \right]_0^2 = -4$$

Wij

22)

b)

$$\vec{f}(x,y) = (P,Q) = (0, x^2)$$



$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow f(x,y) \text{ não é gradiente}$$

Verificar o Teorema de Green:

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Calculemos o integral de linha (formulação diferencial):

<u>Linha C_1</u>: $y = 0$, $x \in \overrightarrow{[0, a]}$

$dy = 0$

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \Rightarrow \oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = 0$$

<u>Linha C_2</u>: $x = a$, $y \in \overrightarrow{[0, b]}$

$dx = 0$

$$P\,dx + Q\,dy = a^2\,dy \Rightarrow \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = a^2 \int_0^b dy = a^2 b$$

<u>Linha C_3</u>: $y = b$, $x \in \overleftarrow{[0, a]}$

$dy = 0$

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \Rightarrow \oint_{C_3} P\,dx + Q\,dy = 0$$

<u>Linha C_4</u>: $x = 0$, $y \in \overleftarrow{[0, b]}$

$dx = 0$

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \Rightarrow \oint_{C_4} P\,dx + Q\,dy = 0$$

Concluindo

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = a^2 b$$

Calculemos o integral de superfície

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

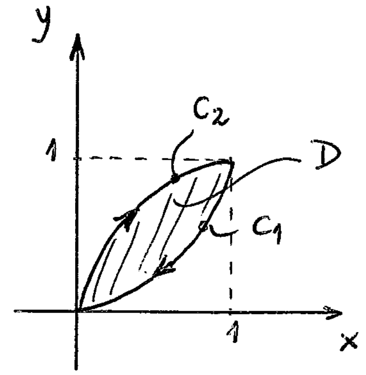
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 2 \int_0^b \int_0^a x \, dx\, dy = a^2 \int_0^b dy = a^2 b$$

22)

c) $\vec{F}(x,y) = (P,Q) = (4x^3+2y^2,\ 4xy+e^y)$

Verificar o Teorema de Green:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$



Calculemos o integral de linha (formulação diferencial):

Linha C_1: $y = x^2$, $x \in [\overleftarrow{0,1}]$

$dy = 2x\,dx$

$$P\,dx + Q\,dy = (4x^3+2x^4)\,dx + (4x^3+e^{x^2})\,2x\,dx =$$

$$= (10x^4 + 4x^3 + 2x e^{x^2})\,dx$$

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_0^1 (10x^4+4x^3+2x\,e^{x^2})\,dx =$$

$$= -\left[2x^5 + x^4 + e^{x^2} \right]_0^1 = -3 - e + 1 = -2 - e$$

Linha C_2: $y = \sqrt{x}$, $x \in [\overrightarrow{0,1}]$

$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$P\,dx + Q\,dy = (4x^3+2x)\,dx + (4x\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}})\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \left(4x^3 + 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 \left(4x^3 + 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \left[x^4 + 2x^2 + e^{\sqrt{x}} \right]_0^1 = -1 + (3+e) = 2 + e$$

Nuno

Concluindo

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = 2+e+(-2-e) = 0$$

Calculemos, agora, o integral de superfície

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4y - 4y = 0 \Rightarrow \vec{F} \text{ é gradiente}$$

Tendo em atenção que $\vec{F}$ é gradiente e que a linha C é fechada, então

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

W.M.

291

a) Linha C : $\vec{r}(t) = (4t, 3t)$, $t \in [\overrightarrow{0,2}]$

$\vec{r}\,'(t) = (4, 3)$

$ds = \| \vec{r}\,'(t) \| \, dt = 5 \, dt$

$x - y = 4t - 3t = t$

$$\int_C (x-y)\, ds = \int_0^2 t\,(5)\, dt = 5 \int_0^2 t \, dt = 10$$

b) Linha C : $\vec{r}(t) = (3t, 9t)$, $t \in [\overrightarrow{0,1}]$

$\vec{r}\,'(t) = (3, 9)$

$ds = \| \vec{r}\,'(t) \| \, dt = \sqrt{90}\, dt$

$x^2 + y^2 = 9t^2 + 81t^2 = 90t^2$

$$\int_C (x^2+y^2)\, ds = 90\sqrt{90} \int_0^1 t^2 \, dt = 30\sqrt{90} = 90\sqrt{10}$$

c) Linha C : $\vec{r}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in [\overrightarrow{0, \pi/2}]$

$\vec{r}\,'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$ds = \| \vec{r}\,'(\theta) \| \, d\theta = d\theta$

$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

$$\int_C (x^2+y^2)\, ds = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Wwy

30)

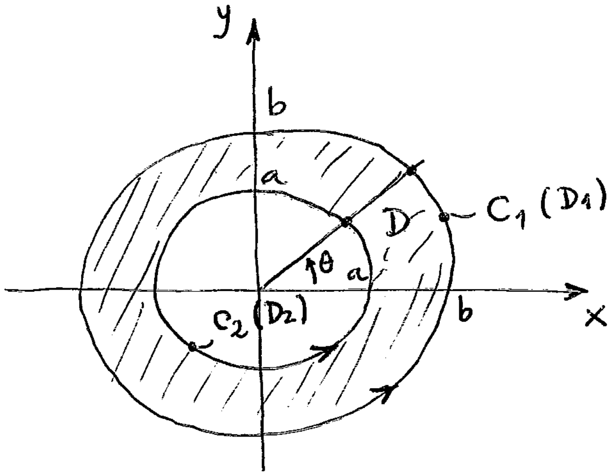
$$\vec{F}(x,y) = (P,Q) = (2x^3 - y^3,\ x^3 + y^3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2$$

$F(x,y)$ não é um campo vectorial conservativo (não é gradiente)

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$



Aplicando o teorema de Green

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy - \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy -$$

$$- \iint_{D_2} (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy = \iint_{D} (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy =$$

Coordenadas polares:
$x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$
$3x^2 + 3y^2 = 3r^2$
$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_a^b 3r^3\,dr\,d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} [r^4]_a^b = \frac{3}{4}(b^4 - a^4)\int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{3}{4}(b^4 - a^4)\,2\pi = \frac{3\pi}{2}(b^4 - a^4)$$

NOTA: Tentemos, agora, resolver este problema calculando os integrais de linha, recorrendo à formulação vectorial.

Wmp

Linha C_1 : $\vec{r}_1(\theta) = (b\cos\theta,\ b\,\text{sen}\,\theta)$, $\theta \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$

$$\vec{r}_1\,'(\theta) = (-b\,\text{sen}\theta,\ b\cos\theta)$$

$$\vec{F}[\vec{r}_1(\theta)] = (2b^3\cos^3\theta - b^3\text{sen}^3\theta,\ b^3\cos^3\theta + b^3\text{sen}^3\theta)$$

$$\vec{F}[\vec{r}_1(\theta)]\cdot\vec{r}_1\,'(\theta) = -2b^4\,\text{sen}\theta\cos^3\theta + b^4\text{sen}^4\theta + b^4\cos^4\theta + b^4\cos\theta\,\text{sen}^3\theta =$$

$$= b^4\left(-2\,\text{sen}\theta\cos^3\theta + \text{sen}^4\theta + \cos^4\theta + \cos\theta\,\text{sen}^3\theta\right)$$

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_1} \vec{F}[\vec{r}_1(\theta)]\cdot\vec{r}_1\,'(\theta)\,d\theta =$$

$$= b_4 \int_0^{2\pi} (-2\,\text{sen}\theta\cos^3\theta + \text{sen}^4\theta + \cos^4\theta + \cos\theta\,\text{sen}^3\theta)\,d\theta$$

Notando que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}\theta\cos^3\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,\text{sen}^3\theta\,d\theta = 0$$

e que

$$\int_0^{2\pi}\text{sen}^4\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}[\text{sen}^2\theta]^2\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,d\theta}_{=0} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}d\theta + \frac{1}{8}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(4\theta)\,d\theta}_{=0} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Vire

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\cos^2\theta\right]^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)\, d\theta}_{=0} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2(2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \left(1 + \cos(4\theta)\right) d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{8}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(4\theta)\, d\theta}_{=0} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Então

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = b_4\left[\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right] = \frac{3\pi}{2} b^4$$

No caso da linha C_2 : $\vec{r}_2(\theta) = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $\theta \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$ o processo de cálculo do integral de linha é idêntico ao que foi desenvolvido para a linha C_1, já que ambas são circunferências centradas no mesmo ponto (de raios distintos). Assim, obtém-se

$$\oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_2} \vec{F}\left[\vec{r}_2(\theta)\right] \cdot \vec{r}_2\,'(\theta)\, d\theta = \frac{3\pi}{2} a^4$$

Assim, obtém-se finalmente

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy - \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{3\pi}{2} b^4 - \frac{3\pi}{2} a^4 = \frac{3\pi}{2}\left(b^4 - a^4\right)$$

31)

<u>Linha C</u> : parametrização

Notando que

$\overrightarrow{OX} = X = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{X_1X} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad X = X_1 + \overrightarrow{X_1X}$

em que

$X_1 = (x, y, 0) = (\cos\theta, 1+\operatorname{sen}\theta, 0)$

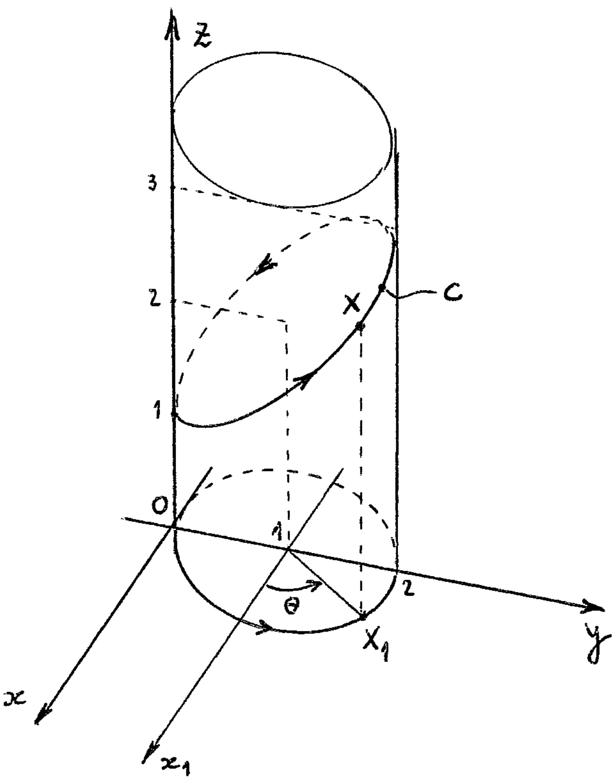
$\overrightarrow{X_1X} = (0,0,z) = (0,0,1+y) =$

$= (0,0,2+\operatorname{sen}\theta)$

obtém-se :

$\vec{r}(\theta) = (\cos\theta, 1+\operatorname{sen}\theta, 2+\operatorname{sen}\theta)\ ,\ \theta \in [\overrightarrow{0, 2\pi}]$

$\vec{r}'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \cos\theta)$



a) $\vec{F}(x,y,z) = (P, Q, R) = (yz, xz, 0)$

$\frac{\partial P}{\partial z} = y \neq \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{F}(x,y,z)$ não é gradiente.

<u>formulação vectorial</u> :

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C \vec{F}[\vec{r}(\theta)] \cdot \vec{r}'(\theta)\,d\theta$$

$$\vec{F}[\vec{r}(\theta)] = \Big((1+\operatorname{sen}\theta)(2+\operatorname{sen}\theta), \cos\theta\,(2+\operatorname{sen}\theta), 0 \Big) =$$

$$= \left(2 + 3\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta, 2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta, 0 \right)$$

$$\vec{F}[\vec{r}(\theta)] \cdot \vec{r}'(\theta) = \left(2 + 3\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)(-\operatorname{sen}\theta) + \left(2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\cos\theta =$$

$$= -2\operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta + 2\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta =$$

$$= -2\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta - 5\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta + 2\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\left(1 - \operatorname{sen}^2\theta\right) =$$

$$= -\operatorname{sen}\theta + 2 - 5\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}^3\theta$$

Assim

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = -\underbrace{\int_0^{2\pi} \cancel{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta}_{=0} + 2\int_0^{2\pi} d\theta - 5\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta - 2\underbrace{\int_0^{2\pi} \cancel{\operatorname{sen}^3\theta}\,d\theta}_{=0} =$$

$$= 4\pi - 5\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right) d\theta =$$

$$= 4\pi - \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{5}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cancel{\cos(2\theta)}\,d\theta}_{=0} =$$

$$= 4\pi - 5\pi = -\pi$$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R) = (yz, xz, xy)$

Notando que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x$$

Conclui-se que a função de campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ é gradiente.

Tendo em atenção que $\vec{F}(x,y,z)$ é gradiente e que a linha C é fechada, conclui-se que, neste caso,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$