

Diferenciabilidade; gradiente

- No caso de uma função real a uma variável, $f(x)$, diz-se que f é diferenciável em x , se existir o limite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

em que o número $f'(x)$ representa a derivada de f em x .

Podemos afirmar que a derivada de f em x é o único número $f'(x)$ tal que:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$$

Quando $h \rightarrow 0$, $o(h) \rightarrow 0$, pelo que $f'(x)$ toma o valor do limite definido em (2).

- Diz-se que uma função real a várias variáveis, $f(\vec{x})$, é diferenciável em \vec{x} , desde que exista um vector \vec{y} , tal que:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \vec{y} \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$

É possível mostrar que o vector \vec{y} , se existir, é único, sendo designado por *gradiente de f em \vec{x}* , ou seja, $\vec{y} = \nabla f(\vec{x})$.

Podemos, então, afirmar que o gradiente de f em \vec{x} é o único vector $\nabla f(\vec{x})$, tal que:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$

- O cálculo de $\nabla f(\vec{x})$ através da definição é, na maioria dos casos, um processo laborioso. O teorema seguinte, cuja demonstração é complexa, relaciona o gradiente de uma função com as suas derivadas parciais, sendo apresentado para funções reais a duas e a três variáveis.

Teorema 1: Se a função real a três variáveis $f(x,y,z)$ tem derivadas parciais $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ e $\partial f / \partial z$ contínuas numa vizinhança de \vec{x} , então $f(x,y,z)$ é diferenciável em \vec{x} e:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})\vec{k}$$

Se a função real é a duas variáveis, $f(x,y)$, então:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j}$$

Exemplo 36: Seja a função $f(x,y) = xe^y - ye^x$.

Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y - ye^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y - e^x$$

são funções contínuas, o gradiente de f em (x,y) é:

$$\nabla f(x,y) = (e^y - ye^x)\vec{i} + (xe^y - e^x)\vec{j}$$

Exemplo 37: Seja a função $f(x, y, z) = x \sin(\pi y) - y \cos(\pi z)$.

Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \sin(\pi y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \pi x \cos(\pi y) - \cos(\pi z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \pi y \sin(\pi z)$$

são funções contínuas, o gradiente de f em (x, y, z) é:

$$\nabla f(x, y, z) = \sin(\pi y)\vec{i} + (\pi x \cos(\pi y) - \cos(\pi z))\vec{j} + \pi y \sin(\pi z)\vec{k}$$

No ponto $\vec{x} = (0, 1, 2)$, obtém-se:

$$\nabla f(0, 1, 2) = -\vec{j} = (0, -1, 0)$$

- No caso da função escalar

$$r(x, y, z) = \|\vec{r}\| \quad \text{e} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

mostra-se que, se $r \neq 0$, então:

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{e} \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Além disso, se $\vec{r} \neq \vec{0}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\nabla r^n = n r^{n-2} \vec{r}$$

Teorema 2: Se a função real a várias variáveis $f(\vec{x})$ é diferenciável em \vec{x} , então $f(\vec{x})$ é contínua em \vec{x} .

Operações com o gradiente

- Sejam as funções reais a várias variáveis $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$. Se $\nabla f(\vec{x})$ e $\nabla g(\vec{x})$ existem, então $\nabla[f(\vec{x}) + g(\vec{x})]$, $\nabla[\alpha f(\vec{x})]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\nabla[f(\vec{x})g(\vec{x})]$ também existem e:

$$\nabla[f(\vec{x}) + g(\vec{x})] = \nabla f(\vec{x}) + \nabla g(\vec{x}),$$

$$\nabla[\alpha f(\vec{x})] = \alpha \nabla f(\vec{x}), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\nabla[f(\vec{x})g(\vec{x})] = f(\vec{x})\nabla g(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x})g(\vec{x})$$

Derivada direcional

- A derivada direcional é uma generalização da noção de derivada parcial, estando relacionada com o conceito de gradiente.
- No caso de uma função real a duas variáveis verifica-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{i}) - f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{j}) - f(\vec{x})}{h}$$

- No caso de uma função real a três variáveis verifica-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{i}) - f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{j}) - f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{k}) - f(\vec{x})}{h}$$

- Cada uma das derivadas parciais anteriores é dada pelo limite do quociente

$$\frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h}$$

onde \vec{u} é um dos seguintes vectores coordenados unitários: \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} .

- Generalizando, para cada versor \vec{u} , o limite

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h}$$

se existir, chama-se *derivada direccional de f em \vec{x} na direcção de \vec{u}* .

- Perante a definição anterior, pode-se escrever:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = f'_i(\vec{x}): \text{derivada direccional de } f \text{ em } \vec{x} \text{ na direcção de } \vec{i};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = f'_j(\vec{x}): \text{derivada direccional de } f \text{ em } \vec{x} \text{ na direcção de } \vec{j};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = f'_k(\vec{x}): \text{derivada direccional de } f \text{ em } \vec{x} \text{ na direcção de } \vec{k}.$$

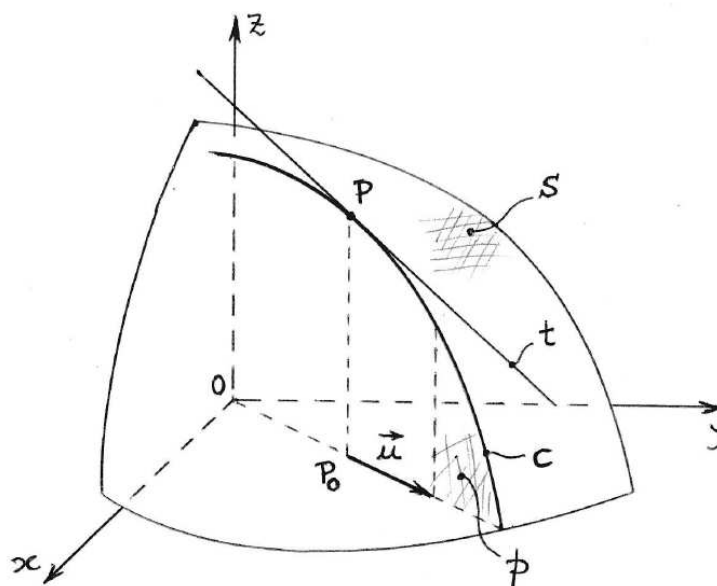
- Enquanto as derivadas parciais definem as *razões da variação de f em \vec{x} nas direcções dos versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k}* , a derivada direccional $f'_u(\vec{x})$ define a *razão da variação de f em \vec{x} na direcção do versor \vec{u}* .
- Considere-se agora um vector \vec{a} não nulo. Chama-se *derivada direccional de f em \vec{x} na direcção do vector \vec{a}* , à derivada direccional $f'_u(\vec{x})$, em que \vec{u} é o versor com a mesma direcção e sentido do vector \vec{a} , isto é:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad (3)$$

A operação definida em (3) é designada por *normalização do vector \vec{a}* .

- Tal como se verificou com as derivadas parciais, é possível apresentar uma interpretação geométrica para a derivada direccional de uma função real a duas variáveis.

- Seja a função real a duas variáveis $f(x,y)$ e admita-se que (x_0, y_0) pertence ao domínio de f .
Seja a superfície $S : z = f(x,y)$ e fixem-se os pontos $P_0 = (x_0, y_0, 0)$, situado no plano xOy , e $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ localizado sobre a superfície S .
Seja o versor \vec{u} do plano xOy aplicado em P_0 .



Considere-se o plano, p , que passa em P_0 , é paralelo ao versor \vec{u} e é perpendicular ao plano xOy .

A intersecção deste plano com a superfície S é a curva C que passa no ponto P ; seja t a recta tangente a C no ponto P .

Pode-se provar que a derivada direccional $f'_u(x_0, y_0)$ determina o declive da recta t no ponto P .

Teorema 3: Se a função f é diferenciável em \vec{x} , então f possui derivada direccional em \vec{x} em qualquer direcção. Além disso, para cada versor \vec{u} obtém-se:

$$f'_u(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u}$$

Teorema 4: Se a função real $f(x, y, z)$ é diferenciável em \vec{x} , então as derivadas parciais $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ e $\partial f / \partial z$ existem em \vec{x} e:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})\vec{k}$$

Se a função real é a duas variáveis, $f(x, y)$, então:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j}$$

Exemplo 38: Relativamente à função $f(x, y, z) = 2xz^2 \cos(\pi y)$, pretende-se calcular a derivada direccional da função no ponto $P = (1, 2, -1)$, na direcção do ponto $Q = (2, 1, 1)$.

Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2z^2 \cos(\pi y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2\pi xz^2 \sin(\pi y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4xz \cos(\pi y)$$

são funções contínuas, o gradiente de f em P é:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2, -1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2, -1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, -1) = -4$$

$$\nabla f(1, 2, -1) = 2\vec{i} - 4\vec{k}$$

O versor que define a direcção que liga P a Q é:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

Obtém-se, finalmente,

$$f'_u(1,2,-1) = \nabla f(1,2,-1) \cdot \vec{u} = \frac{-6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}$$

- Notando que \vec{u} é versor, então

$$\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{u}} \nabla f(\vec{x}) = (\nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u}) \vec{u} = f'_u(\vec{x}) \vec{u} \quad (4)$$

podendo concluir-se que (4) representa a *componente vectorial de $\nabla f(\vec{x})$ na direcção de \vec{u}* .

Por outro lado, tem-se

$$f'_u(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(\vec{x})\| \|\vec{u}\| \cos \theta = \|\nabla f(\vec{x})\| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\nabla f(\vec{x})$ e \vec{u} .

Uma vez que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, então

$$-\|\nabla f(\vec{x})\| \leq f'_u(\vec{x}) \leq \|\nabla f(\vec{x})\| \quad (5)$$

para qualquer direcção definida pelo versor \vec{u} .

- A expressão (5) permite afirmar que, em cada ponto \vec{x} do domínio, a *função f cresce mais rapidamente na direcção de $\nabla f(\vec{x})$* ; a razão da variação de f em \vec{x} toma o valor $\|\nabla f(\vec{x})\|$. Por outro lado, a *função f decresce mais rapidamente na direcção de $-\nabla f(\vec{x})$* ; neste caso, a razão da variação de f em \vec{x} é $-\|\nabla f(\vec{x})\|$.

Exemplo 39: Admita-se que a temperatura em cada ponto de uma placa metálica é definida pela função

$$T(x, y) = e^x \cos(y) + e^y \cos(x)$$

- a) Obtenha o gradiente de T no ponto genérico (x, y) .
- b) Em que direcção a temperatura cresce mais rapidamente em $(0, 0)$? Qual é o maior valor da razão da variação da temperatura neste ponto?
- c) Em que direcção a temperatura decresce mais rapidamente em $(0, 0)$? Qual é o menor valor da razão da variação da temperatura neste ponto?

Solução:

- a) Sabendo que

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(y) - e^y \sin(x), \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$$

são funções contínuas, o gradiente de T em (x, y) é:

$$\nabla T(x, y) = (e^x \cos(y) - e^y \sin(x))\vec{i} + (-e^x \sin(y) + e^y \cos(x))\vec{j}$$

- b) No ponto $(0, 0)$ a temperatura cresce mais rapidamente na direcção do gradiente:

$$\nabla T(0, 0) = \vec{i} + \vec{j}$$

O maior valor da razão da variação de T neste ponto é $\|\nabla T(0, 0)\| = \sqrt{2}$.

- c) No ponto $(0, 0)$ a temperatura decresce mais rapidamente na direcção de:

$$-\nabla T(0, 0) = -\vec{i} - \vec{j}$$

O menor valor da razão da variação de T neste ponto é $-\|\nabla T(0, 0)\| = -\sqrt{2}$.

Exemplo 40: Admita-se que a densidade mássica (massa por unidade de volume) de uma esfera metálica centrada na origem é definida pela função

$$\rho(x, y, z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad k > 0$$

- Obtenha o gradiente de ρ no ponto genérico (x, y, z) .
- Em que direcção a densidade cresce mais rapidamente em (x, y, z) ? Qual é o maior valor da razão da variação da densidade neste ponto?
- Em que direcção a densidade decresce mais rapidamente em (x, y, z) ? Qual é o menor valor da razão da variação da densidade neste ponto?
- Quais são as razões da variação da densidade nas direcções dos vectores coordenados unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} ?

Solução:

- Sabendo que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y, z) = -2kxe^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y}(x, y, z) = -2kye^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z}(x, y, z) = -2kze^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

são funções contínuas, o gradiente de ρ em (x, y, z) é

$$\nabla \rho(x, y, z) = -2ke^{-(x^2+y^2+z^2)}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -2\rho(x, y, z)\vec{r} \quad (6)$$

em que $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é o vector de posição (vector radial) que determina a posição de cada ponto da esfera no espaço.

A equação (6) mostra que o vector gradiente é, em cada ponto (x, y, z) da esfera, paralelo ao vector de posição, mas com sentido oposto.

- b) Atendendo a (6) verifica-se que, em cada ponto (x, y, z) da esfera, a densidade cresce mais rapidamente na direcção da origem do referencial.

A razão da variação de ρ é:

$$\|\nabla\rho(x, y, z)\| = 2\rho(x, y, z)\|\vec{r}\| = 2\rho(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- c) Atendendo a (6) verifica-se que, em cada ponto (x, y, z) da esfera, a densidade decresce mais rapidamente na direcção oposta à origem do referencial.

A razão da variação de ρ é:

$$-\|\nabla\rho(x, y, z)\| = -2\rho(x, y, z)\|\vec{r}\| = -2\rho(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- d) As razões da variação da densidade nas direcções dos vectores coordenados unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são, respectivamente:

$$\rho'_i(x, y, z) = \nabla\rho(x, y, z) \cdot \vec{i} = -2x\rho(x, y, z)$$

$$\rho'_j(x, y, z) = \nabla\rho(x, y, z) \cdot \vec{j} = -2y\rho(x, y, z)$$

$$\rho'_k(x, y, z) = \nabla\rho(x, y, z) \cdot \vec{k} = -2z\rho(x, y, z)$$

Note-se que os valores encontrados correspondem às derivadas parciais (de primeira ordem) obtidas na alínea a).

Teorema do valor médio

- Como é sabido o *teorema do valor médio*, também conhecido por *teorema de Lagrange*, assume um papel extremamente importante no estudo das funções reais a uma variável.
Relembrando o teorema: se $f(x)$ é uma função contínua definida num intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) , então existe, pelo menos, um ponto $c \in (a, b)$, tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

- Também é possível apresentar uma propriedade análoga para as funções reais a várias variáveis. O teorema seguinte é designado por *teorema do valor médio* para funções reais a várias variáveis.

Teorema 5: Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis diferenciável em cada ponto do segmento de recta que liga o ponto \vec{a} ao ponto \vec{b} . Então existe, nesse segmento de recta, pelo menos um ponto \vec{c} entre \vec{a} e \vec{b} , tal que:

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

- Um *conjunto aberto* (sem pontos fronteira) U diz-se *conexo*, se quaisquer dois pontos de U podem ser ligados através de uma linha poligonal que está totalmente contida em U .

Teorema 6: Sejam U um conjunto aberto conexo e $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis diferenciável em U . Se $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in U$, então $f(\vec{x})$ é constante em U .

Teorema 7: Sejam U um conjunto aberto conexo e $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ funções reais a várias variáveis diferenciáveis em U . Se $\nabla f(\vec{x}) = \nabla g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in U$, então $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ apenas diferem de uma constante em U .

Regra da cadeia

- Começemos por relembrar a aplicação da regra da cadeia a funções reais a uma variável. Sejam $g(x)$ uma função diferenciável em x_0 e $f(x)$ uma função diferenciável em $g(x_0)$; então

$$\frac{d}{dx}[f(g(x_0))] = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

- Sejam a função real a três variáveis $f(x, y, z)$, definida num conjunto aberto U , e a função vectorial $\vec{r}(t)$, com $t \in [t_0, t_1]$, tal que $\vec{r}[t_0, t_1] \subset U$. Então é possível definir a *função composta*

$$(f \circ \vec{r})(t) = f(\vec{r}(t)) \text{ , } t \in [t_0, t_1]$$

A derivada da função composta $f \circ \vec{r}$ pode ser obtida recorrendo à regra da cadeia.

- Uma função real a três variáveis $f(x, y, z)$ é *continuamente diferenciável* num conjunto aberto U , se f é diferenciável em U e ∇f é contínuo em U .

Teorema 8: Se $f(x, y, z)$ é uma função real a três variáveis continuamente diferenciável num conjunto aberto U e $\vec{r}(t)$ é uma curva diferenciável contida em U , então a função composta $f \circ \vec{r}$ é diferenciável e:

$$\frac{d}{dt}[f(\vec{r}(t))] = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \quad (7)$$

- A expressão (7) pode ser reescrita sob uma forma alternativa. Notando que

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

então:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

- No caso de uma função real a duas variáveis $f(x, y)$ a equação (7) conduz-nos a:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

$$\vec{r}'(t) = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Exemplo 41: Considere-se a função $f(x, y, z) = x^2y + z\cos(x)$ e a curva, C , parametrizada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$.

- Obtenha, usando a regra da cadeia, a razão da variação de f em relação t ao longo de C .
- Confirme o resultado obtido na alínea anterior após calcular a função composta.

Solução:

- O vector tangente à curva C é:

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

Sabendo que

$$\nabla f(x, y, z) = (2xy - z\sin(x))\vec{i} + x^2\vec{j} + \cos(x)\vec{k}$$

e tendo em atenção que $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ e $z(t) = t^3$, obtém-se:

$$\nabla f(\vec{r}(t)) = t^3(2 - \sin(t))\vec{i} + t^2\vec{j} + \cos(t)\vec{k}$$

A razão da variação de f em relação a t ao longo de C é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(\vec{r}(t))] &= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = t^3(2 - \sin(t)) + 2t^3 + 3t^2 \cos(t) = \\ &= 4t^3 - t^3 \sin(t) + 3t^2 \cos(t) \end{aligned}$$

- A função composta $f \circ \vec{r}$ é a função escalar

$$g(t) = (f \circ \vec{r})(t) = f(\vec{r}(t)) = t^4 + t^3 \cos(t)$$

pelo que:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}[f(\vec{r}(t))] = 4t^3 + 3t^2 \cos(t) - t^3 \sin(t)$$

Exemplo 42: Dadas as funções

$$u = x^2 - y^2, \quad x = t^2 - 1 \quad \text{e} \quad y = 3\text{sen}(\pi t)$$

calcule $\partial u / \partial t$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{dx}{dt} = 2t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 3\pi \cos(\pi t)$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x)(2t) + (-2y)(3\pi \cos(\pi t)) = \\ &= 2(t^2 - 1)(2t) + (-2)(3\text{sen}(\pi t))(3\pi \cos(\pi t)) = \\ &= 4t(t^2 - 1) - 18\pi \text{sen}(\pi t) \cos(\pi t) \end{aligned}$$

Em alternativa, é possível resolver o problema, começando por calcular a função composta

$$\begin{aligned} u(t) &= x^2(t) - y^2(t) = (t^2 - 1)^2 - (3\text{sen}(\pi t))^2 = \\ &= (t^2 - 1)^2 - 9\text{sen}^2(\pi t) \end{aligned}$$

e derivando:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 2(2t)(t^2 - 1) - 9(2)(\pi \cos(\pi t))(\text{sen}(\pi t)) = \\ &= 4t(t^2 - 1) - 18\pi \text{sen}(\pi t) \cos(\pi t) \end{aligned}$$

Outras aplicações da regra da cadeia

- Sabendo que

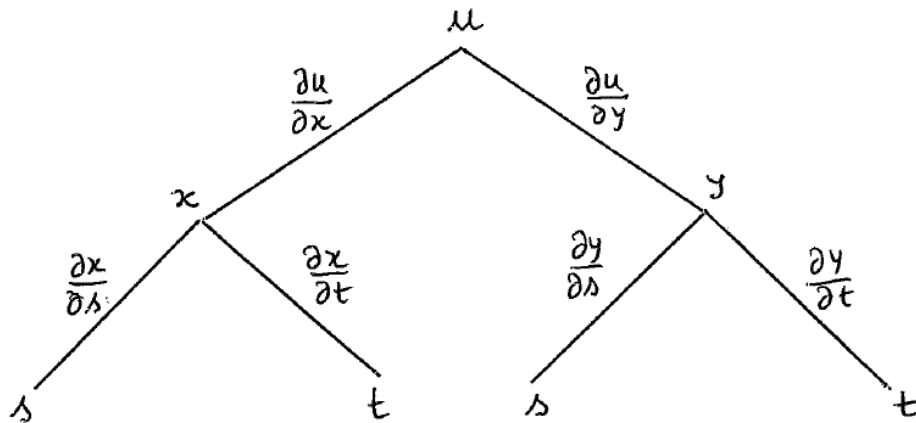
$$u = u(x, y), \text{ tal que } x = x(s, t) \text{ e } y = y(s, t)$$

então:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (9)$$

As expressões (8) e (9) podem ser deduzidas a partir do *diagrama de árvore* seguinte:



Cada caminho que se inicia em u e termina numa variável (s ou t) determina um produto de derivadas (parciais). A *derivada parcial de u em relação a uma variável* (s ou t) é dada pela soma dos produtos gerados pelos vários caminhos que nos conduzem a essa variável.

Exemplo 43: Dadas as funções

$$u = x^2 - 2xy + 2y^3, \text{ tal que } x = s^2 \ln(t) \text{ e } y = 2st^3$$

calcule $\partial u / \partial s$ e $\partial u / \partial t$.

Solução:

As derivadas parciais pretendidas podem ser obtidas recorrendo ao *diagrama de árvore* apresentado na página anterior.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \\ &= (2x - 2y)2s \ln(t) + (-2x + 6y^2)2t^3 = \\ &= (2s^2 \ln(t) - 4st^3)2s \ln(t) + (-2s^2 \ln(t) + 24s^2 t^6)2t^3 = \\ &= 4s^2 \ln(t)(s \ln(t) - 2t^3) + 4s^2 t^3(-\ln(t) + 12t^6) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \\ &= (2x - 2y)\frac{s^2}{t} + (-2x + 6y^2)(6st^2) = \\ &= (2s^2 \ln(t) - 4st^3)\frac{s^2}{t} + (-2s^2 \ln(t) + 24s^2 t^6)6st^2 = \\ &= \frac{2s^3}{t}(s \ln(t) - 2t^3) + 12s^3 t^2(-\ln(t) + 12t^6) \end{aligned}$$

- Sabendo que

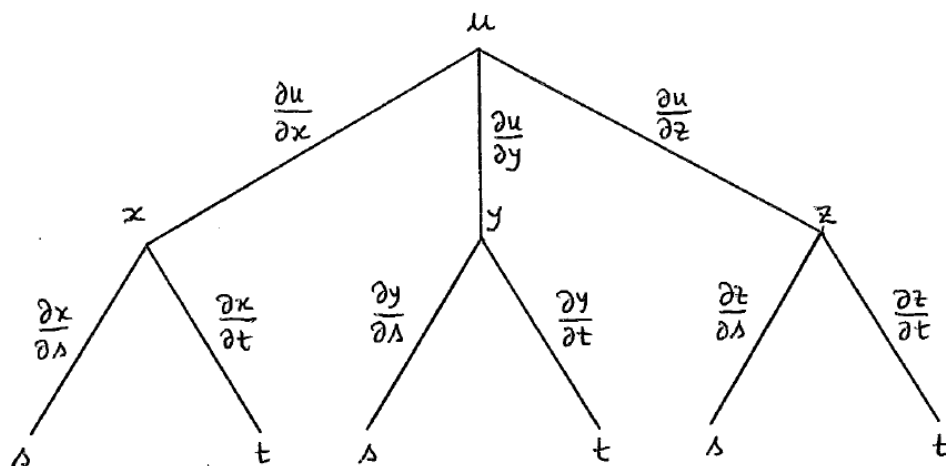
$$u = u(x, y, z), \text{ tal que } x = x(s, t), \quad y = y(s, t) \text{ e } z = z(s, t)$$

então:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (11)$$

O diagrama de árvore que corresponde às derivadas parciais apresentadas em (10) e (11) é o seguinte:



Derivação implícita

- Admita-se que $u = u(x, y)$ é uma função continuamente diferenciável e que y é uma função diferenciável em x que satisfaz a condição $u(x, y) = 0$. Então, é possível calcular a *derivada de y em relação a x* sem que seja necessário *explicitar a função y em termos de x* ; este processo é designado por *diferenciação (derivação) implícita*.

Teorema 9: Se $u = u(x, y)$ é uma função continuamente diferenciável e y é uma função diferenciável em x que satisfaz a equação $u(x, y) = 0$, então, para todos os pontos (x, y) onde $\partial u / \partial y \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}$$

Exemplo 44: Seja y uma função diferenciável em x que verifica a equação:

$$u(x, y) = 2x^2y - y^3 + 1 - x - 2y = 0 \quad (12)$$

Notando que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4xy - 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 - 3y^2 - 2$$

então:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 1}{2x^2 - 3y^2 - 2} \quad (13)$$

O resultado (13) também pode ser obtido diferenciando (12) em relação a x , tendo em atenção que y é uma função de x .

Obtém-se, neste caso,

$$\begin{aligned} 4xy + 2x^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} - 1 - 2 \frac{dy}{dx} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x^2 - 3y^2 - 2) \frac{dy}{dx} &= -4xy + 1 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 1}{2x^2 - 3y^2 - 2}$$

Exemplo 45: Calcule o declive da recta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no ponto $P = (1, \sqrt{3})$:

a) Usando a derivação implícita.

b) A partir da função que explicita y em função de x nesse ponto.

Solução:

a) Considerando a função real a duas variáveis

$$u(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

O declive da recta tangente em P é:

$$\frac{dy}{dx}(1, \sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) A função que define a linha que passa em P é:

$$y = +\sqrt{4 - x^2}$$

Derivando em ordem a x

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

pelo que:

$$\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Teorema 10: Se $u = u(x, y, z)$ é uma função continuamente diferenciável e $z = z(x, y)$ é uma função diferenciável que satisfaz a equação $u(x, y, z) = 0$, então, para todos os pontos (x, y, z) onde $\partial u / \partial z \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial u / \partial y}{\partial u / \partial z}$$

Gradiente; curvas de nível

Teorema 11: Seja $f = f(x, y)$ uma função continuamente diferenciável. Então em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ do seu domínio, o *gradiente* ∇f , se não for nulo, é *perpendicular à tangente à curva de nível de f que passa em \vec{x}_0* .

Exemplo 46: Em relação à função $f(x, y) = x^2 + y^2$, as curvas de nível são as circunferências concêntricas:

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0$$

Em cada ponto $(x, y) \neq (0, 0)$ o gradiente de $f(x, y)$

$$\nabla f(x, y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} = 2(x\vec{i} + y\vec{j}) = 2\vec{r}$$

é perpendicular à curva de nível (circunferência) que passa nesse ponto (tem a direcção radial) e aponta no sentido convexo da curva.

Na origem, a curva de nível reduz-se a um ponto e $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$.

- O gradiente $\nabla f(x,y)$ permite definir, em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ de uma curva de nível, a *linha normal* e a *linha tangente* a essa curva. Notando que o vector

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\vec{j}$$

é um *vector normal* à curva de nível no ponto \vec{x}_0 , então a equação vectorial da *linha normal* à curva $f(x,y) = c$ em \vec{x}_0 é:

$$\vec{r}(u) = \vec{x}_0 + u\nabla f(\vec{x}_0), \quad u \in \mathbb{R}$$

Por outro lado, sabendo que o vector

$$\vec{t}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\vec{j}$$

é perpendicular a $\nabla f(\vec{x}_0)$ (o produto escalar é nulo), então ele será um *vector tangente* à curva de nível em \vec{x}_0 ; assim, a equação vectorial da *linha tangente* à curva $f(x,y) = c$ em \vec{x}_0 é:

$$\vec{r}(v) = \vec{x}_0 + v\vec{t}(\vec{x}_0), \quad v \in \mathbb{R}$$

Exemplo 47: Considere a curva plana C de equação $x^2 + 2y^3 = xy + 4$ e o ponto $P = (2,1)$ situado em C . Determine em P :

- O vector normal e a equação da linha normal à curva.
- O vector tangente e a equação da linha tangente à curva.

Solução:

- Sendo $f(x,y) = x^2 + 2y^3 - xy$, a curva C é a curva de nível $f(x,y) = 4$. O gradiente de f é:

$$\nabla f(x,y) = (2x - y)\vec{i} + (6y^2 - x)\vec{j}$$

Assim, o *vector normal* a C em P é:

$$\vec{n} = \nabla f(2,1) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

A equação vectorial da *linha normal* a C em P é:

$$\vec{r}(\alpha) = P + \alpha\vec{n} = (2 + 3\alpha, 1 + 4\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

A sua equação cartesiana é

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4}$$

enquanto a sua equação reduzida é:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

b) O *vector tangente* a C em P é:

$$\vec{t} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

A equação vectorial da *linha tangente* a C em P é:

$$\vec{r}(\beta) = P + \beta\vec{t} = (2 + 4\beta, 1 - 3\beta), \beta \in \mathbb{R}$$

A sua equação cartesiana é

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3}$$

enquanto a sua equação reduzida é:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

Gradiente; superfícies de nível

Teorema 12: Seja $f = f(x, y, z)$ uma função continuamente diferenciável. Então em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ do seu domínio, o *gradiente* ∇f , se não for nulo, é *perpendicular ao plano tangente à superfície de nível de f que passa em \vec{x}_0* .

Exemplo 48: Em relação à função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, as superfícies de nível são as superfícies esféricas concêntricas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c, \quad c \geq 0$$

Em cada ponto $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ o gradiente de $f(x, y, z)$

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 2\vec{r}$$

é perpendicular à superfície de nível (superfície esférica) que passa nesse ponto (tem a direcção radial) e aponta no sentido convexo da superfície. Na origem, a superfície de nível reduz-se a um ponto e $\nabla f(0, 0, 0) = \vec{0}$.

- Neste caso, o gradiente $\nabla f(x, y, z)$ permite definir, em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de uma superfície de nível, a *linha normal* e o *plano tangente* a essa superfície. O plano tangente em \vec{x}_0 é o plano que mais se aproxima da superfície na vizinhança desse ponto.

- Um ponto $\vec{x} = (x, y, z)$ está no *plano tangente* à superfície $f(x, y, z) = c$ em $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, se e só se:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = 0$$

A equação vectorial da *linha normal* à superfície em \vec{x}_0 é:

$$\vec{r}(u) = \vec{x}_0 + u \nabla f(\vec{x}_0), \quad u \in \mathbb{R}$$

Exemplo 49: Seja o cone elíptico de equação $z^2 = x^2 + 4y^2$ e o ponto $P = (3, 2, 5)$ situado nesta superfície. Determine em P :

- O vector normal à superfície.
- A equação da linha normal à superfície.
- A equação do plano tangente à superfície.

Solução:

- O cone elíptico é uma superfície de nível da forma $f(x, y, z) = 0$, em que $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2$.

O gradiente de f é:

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\vec{i} + 8y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

Assim, o *vector normal* à superfície em P é:

$$\nabla f(3, 2, 5) = 6\vec{i} + 16\vec{j} - 10\vec{k}$$

- Notando que o vector $\nabla f(3, 2, 5)$ é paralelo ao vector $\vec{n} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}$, a equação vectorial da *linha normal* à superfície em P é:

$$\vec{r}(\alpha) = P + \alpha \vec{n} = (3 + 3\alpha, 2 + 8\alpha, 5 - 5\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

As suas equações cartesianas são:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-5}{-5}$$

c) A equação cartesiana do *plano tangente* à superfície em P é:

$$(x-3, y-2, z-5) \cdot (3, 8, -5) = 0 \Leftrightarrow 3x + 8y - 5z = 0$$

Trata-se de um plano que passa na origem.

Exemplo 50: A curva C de equação $\vec{r}(t) = 2^{-1}t^2\vec{i} + 4t^{-1}\vec{j} + (2^{-1}t - t^2)\vec{k}$ intersecta o parabolóide hiperbólico $x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ no ponto $P = (2, 2, -3)$. Calcule o ângulo de intersecção.

Solução:

Pretende-se calcular o ângulo ϕ que o vector tangente à curva faz com o plano tangente ao cone hiperbólico no ponto P .

Sabendo que $P = \vec{r}(2)$ e uma vez que

$$\vec{r}'(t) = t\vec{i} - 4t^{-2}\vec{j} + (2^{-1} - 2t)\vec{k}$$

então o vector tangente a C em P é

$$\vec{r}'(2) = 2\vec{i} - \vec{j} - \frac{7}{2}\vec{k}$$

sendo um vector paralelo a $\vec{t} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 7\vec{k}$.

O parabolóide hiperbólico é uma superfície de nível da forma $f(x, y, z) = 0$, em que $f(x, y, z) = x^2 - 4y^2 - 4z$.

O gradiente de f é

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\vec{i} - 8y\vec{j} - 4\vec{k}$$

pelo que o *vector normal* à superfície em P é

$$\nabla f(2,2,-3) = 4\vec{i} - 16\vec{j} - 4\vec{k}$$

sendo um vector paralelo a $\vec{n} = \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$.

Designando por θ o ângulo formado pelos vectores \vec{t} e \vec{n} , então:

$$\theta = \arccos \frac{|\vec{t} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{t}\| \|\vec{n}\|} = \arccos \frac{19}{\sqrt{69}\sqrt{18}} = \arccos \frac{19\sqrt{138}}{414}$$

Assim:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta = \arcsen \frac{19\sqrt{138}}{414}$$

Exemplo 51: Em que pontos da superfície $z = 3xy - x^3 - y^3$ o plano tangente é horizontal (paralelo ao plano xOy)?

Solução:

A superfície dada é uma superfície de nível da forma $f(x, y, z) = 0$, em que $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xy - z$.

O gradiente de f é:

$$\nabla f(x, y, z) = 3(x^2 - y)\vec{i} + 3(y^2 - x)\vec{j} - \vec{k}$$

Para que o plano tangente seja horizontal deverá verificar-se:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Concluindo, o plano tangente à superfície é horizontal nos pontos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$.