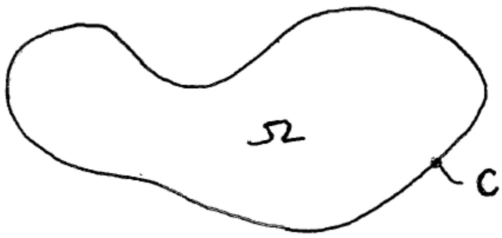
Teorema de Green

- O cálculo do integral de linha a partir do teorema de Green pode ser aplicado a regiões planas limitadas por *curvas de Jordan* suaves por secções. Trata-se de curvas planas que são fechadas e simples, isto é, não se intersectam a si próprias. Por exemplo, são curvas de Jordan, circunferências, elipses, triângulos e rectângulos; o mesmo já não acontece com curvas em forma de um oito.

- Chama-se *região de Jordan* à região fechada do plano, Ω, limitada por uma curva de Jordan, *C*, incluindo a sua fronteira.



- O teorema seguinte, chamado *teorema de Green*, exprime o integral de linha ao longo de uma curva de Jordan, *C*, através de um integral duplo sobre a região de Jordan, Ω, limitada por *C*.

Teorema 2: Seja Ω a região de Jordan limitada pela curva de Jordan suave por secções, *C*. Se *P* e *Q* são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém Ω, então

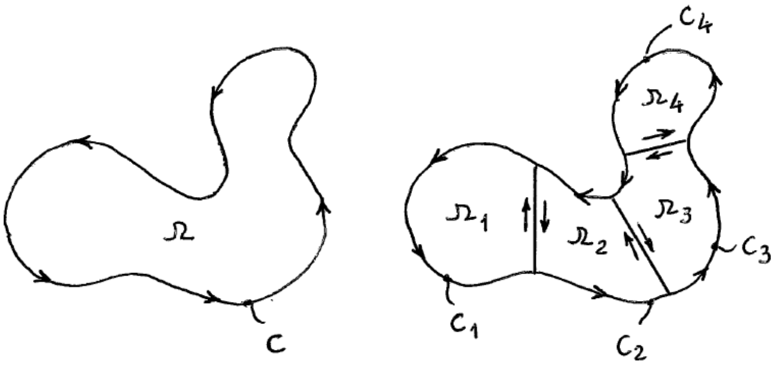
$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_{C}P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (14)$$

onde o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva *C*, percorrida no sentido directo.

- Se o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ *é gradiente*, então o o integral de linha (14) é nulo, já que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$$

- Atente-se na figura seguinte, onde a região de Jordan Ω, limitada pela curva *C*, foi dividida em quatro regiões de Jordan Ω_1, Ω_2, Ω_3 e Ω_4, limitadas, respectivamente, pelas curvas C_1, C_2, C_3 e C_4.



Neste caso, tem-se:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy = \sum_{i=1}^{4}\iint_{\Omega_i}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy = \oint_{C_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy = \oint_{C_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_3}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy = \oint_{C_3} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_4}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy = \oint_{C_4} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Exemplo 10: Calcule o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = (3x^2 + y)\vec{i} + (2x + y^3)\vec{j}$$

ao longo da circunferência $C\ :\ x^2 + y^2 = a^2$, percorrida no sentido directo.

a) Recorrendo ao teorema de Green.

b) Calculando o integral de linha.

Solução:

a) Seja Ω o círculo fechado $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$. Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1\ ,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2\ \text{ e }\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$$

da aplicação do teorema de Green resulta

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega dxdy = A(\Omega) = \pi a^2$$

onde $A(\Omega) = a^2$ é a área da região Ω.

b) A curva *C*, percorrida no sentido directo, pode ser parametrizada por:

$$\vec{r}(\theta) = a\cos(\theta)\vec{i} + a\text{sen}(\theta)\vec{j}\ ,\ \ \theta \in [0,2\pi]$$

Considere-se:

$$\vec{r}'(\theta) = -a\text{sen}(\theta)\vec{i} + a\cos(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(\theta)) = [3a^2\cos^2(\theta) + a\text{sen}(\theta)]\vec{i} + [2a\cos(\theta) + a^3\text{sen}^3(\theta)]\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(\theta))\cdot\vec{r}'(\theta) = -3a^3\text{sen}(\theta)\cos^2(\theta) - a^2\text{sen}^2(\theta) + 2a^2\cos^2(\theta) +$$

$$+a^4\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta)$$

Sabendo que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta)\cos^2(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\text{sen}^3(\theta)d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[1-\cos(2\theta)\right]d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[1+\cos(2\theta)\right]d\theta = \pi$$

obtém-se:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}\,'(\theta)d\theta = -\pi a^2 + 2\pi a^2 = \pi a^2$$

Neste exemplo é evidente a vantagem da utilização do teorema de Green na obtenção do resultado pretendido.

Exemplo 11: Utilize o teorema de Green para calcular o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = (1+10xy+y^2)\vec{i} + (6xy+5x^2)\vec{j}$$

ao longo do quadrado, C, com vértices nos pontos $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a) e $(0,a)$, percorrido no sentido retrógrado.

Solução:

Seja Ω a região quadrada limitada por C. Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 10x + 2y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 6y + 10x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 4y$$

da aplicação do teorema de Green resulta

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -4\iint_\Omega y dx dy = -4\bar{y}A(\Omega) = -4\left(\frac{a}{2}\right)a^2 = -2a^3$$

onde $\bar{y} = a/2$ é a ordenada do centroide da região Ω e $A(\Omega) = a^2$ é a sua área.

Exemplo 12: Utilize o teorema de Green para calcular o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = e^x \operatorname{sen}(y)\vec{i} + e^x \cos(y)\vec{j} \qquad (15)$$

ao longo da linha, C, que é a fronteira da região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, percorrida no sentido retrógrado.

Solução:

Seja Ω a região limitada pela curva fechada C. Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = e^x \cos(y) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$$

da aplicação do teorema de Green resulta:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\iint_\Omega 0 dx dy = 0$$

Neste caso, o campo vectorial (15) é gradiente.

A resolução deste problema recorrendo ao integral de linha exige um esforço de cálculo que é substancialmente superior ao envolvido na presente resolução.

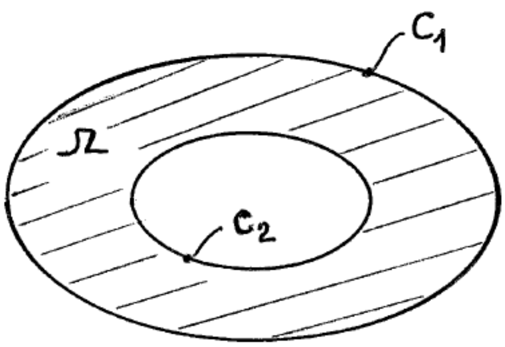
- O teorema de Green permite, ainda, calcular a área de uma região de Jordan, integrando ao longo da fronteira dessa região.

Teorema 3: Seja a região de Jordan, Ω, limitada pela curva de Jordan suave por secções, C. Então a área de Ω, $A(\Omega)$, tem o valor de qualquer um dos seguintes integrais de linha:

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dxdy = \oint_{C} -ydx = \oint_{C} xdy = \frac{1}{2}\oint_{C} -ydx + xdy$$

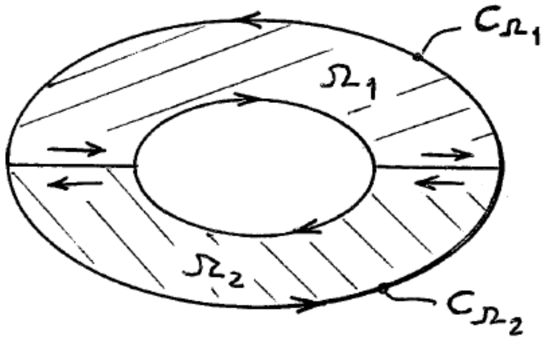
Teorema de Green: regiões multiplamente conexas

- Na figura seguinte apresenta-se uma região anelar, Ω, que não é uma região de Jordan: a fronteira é formada por duas curvas de Jordan, C_1 e C_2.



Neste caso não é possível aplicar directamente o teorema de Green.

- Contudo, se Ω for dividida em duas subregiões de Jordan, Ω_1 e Ω_2,



já é possível aplicar o teorema de Green a cada uma dessas duas subregiões.
Designando, respectivamente, por C_{Ω_1} e C_{Ω_2} as curvas de Jordan que limitam as subregiões Ω_1 e Ω_2, sabe-se que:

$$\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_{\Omega_1}} Pdx+Qdy$$

$$\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_{\Omega_2}} Pdx+Qdy$$

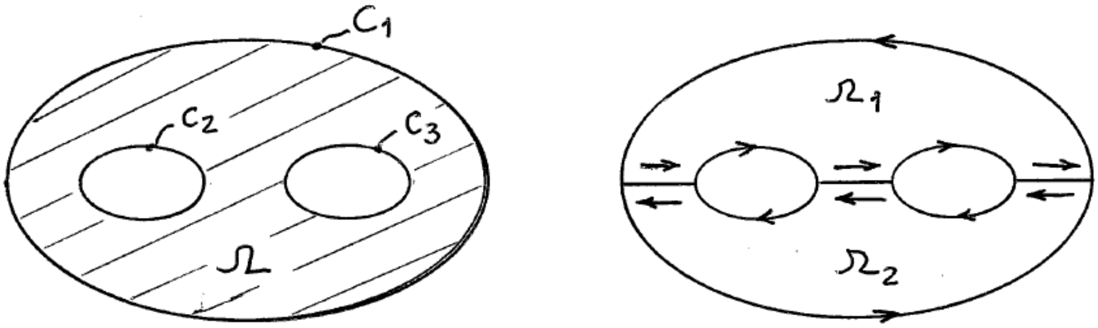
Considerando, agora, os integrais duplos, tem-se:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy+\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy$$

No entanto, quando se somam os dois integrais de linha, as contribuições das secções que são comuns às linhas C_{Ω_1} e C_{Ω_2} deverão se anular, pelo que a *linha* C_1 deverá ser *percorrida no sentido directo*, enquanto a *linha* C_2 deverá ser *percorrida no sentido retrógrado*; então:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_1} Pdx+Qdy+\oint_{C_2} Pdx+Qdy$$

- Considere-se, por exemplo, a região Ω da figura seguinte, limitada por três curvas de Jordan: C_2 e C_3, cada uma delas exterior à outra, mas ambas interiores a C_1.



Neste caso, a aplicação do teorema de Green conduz a:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_1}Pdx+Qdy+\oint_{C_2}Pdx+Qdy+$$

$$+\oint_{C_3}Pdx+Qdy$$

- Generalizando, é possível escrever para este tipo de configurações:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_1}Pdx+Qdy+\sum_{i=2}^{n}\oint_{C_i}Pdx+Qdy$$