O operador vectorial diferencial ∇ (nabla)

- O *operador vectorial diferencial*, ∇, por vezes também designado por *operador gradiente*, é definido por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

e tanto pode ser aplicado a *campos escalares*, como a *campos vectoriais*.

Gradiente de um campo escalar, ∇f

- Se $f(x,y,z)$ é um *campo escalar*, então

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

designa *o gradiente de* $f(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).
A função resultante, $\nabla f(x,y,z)$, é um campo vectorial e pode ser usada, por exemplo, no cálculo da *derivada direccional de* $f(x,y,z)$ num ponto ou na definição do *plano tangente* a uma *superfície de nível* que passa num ponto, ou seja, a uma superfície do tipo $f(x,y,z) = k$, $k \in \mathbb{R}$ (tal como vimos no capítulo 2).

Exemplo 7: O gradiente do campo escalar

$$f(x,y,z) = x^3 z + xy^2 z^2 - 2yz + 2x - 1$$

é o campo vectorial:

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 z + y^2 z^2 + 2)\vec{i} + (2xyz^2 - 2z)\vec{j} + (x^3 + 2xy^2 z - 2y)\vec{k}$$

Divergência de um campo vectorial, $\nabla \cdot \vec{f} = div\ \vec{f}$

- Dado o campo vectorial

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

o campo escalar definido por

$$\nabla \cdot \vec{f}(x,y,z) = div\ \vec{f}(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

chama-se *divergência de* $\vec{f}(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).

- O campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ diz-se *solenoidal* quando $\nabla \cdot \vec{f}(x,y,z) = 0$.

Exemplo 8: A divergência do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = \alpha\vec{r}(x,y,z) = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j} + \alpha z\vec{k} \qquad (9)$$

é o campo escalar:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \alpha\frac{\partial v_1}{\partial x} + \alpha\frac{\partial v_2}{\partial y} + \alpha\frac{\partial v_3}{\partial z} = 3\alpha$$

O campo vectorial não é solenoidal, se $\alpha \neq 0$.

Exemplo 9: Seja o campo vectorial:

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ (x,y) \neq (0,0) \qquad (10)$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}=\frac{\alpha y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\ ,\ \frac{\partial v_2}{\partial y}=\frac{\alpha x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\ ,\ \frac{\partial v_3}{\partial z}=0 \tag{11}$$

obtém-se para a divergência de $\vec{v}(x,y,z)$:

$$\nabla\cdot\vec{v}(x,y,z)=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}=\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{12}$$

O campo vectorial não é solenoidal, se $\alpha\neq 0$.

Exemplo 10: Seja o campo vectorial:

$$\vec{v}(x,y,z)=-\frac{\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}+0\vec{k}\ ,\ (x,y)\neq(0,0) \tag{13}$$

Recorrendo às derivadas parciais

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}=\frac{\alpha xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\ ,\ \frac{\partial v_2}{\partial y}=-\frac{\alpha xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\ ,\ \frac{\partial v_3}{\partial z}=0 \tag{14}$$

conclui-se que

$$\nabla\cdot\vec{v}(x,y,z)=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}=0$$

ou seja, o campo vectorial é *solenoidal*.

Rotacional de um campo vectorial, $\nabla \times \vec{f} = rot\ \vec{f}$

- Considerando o campo vectorial

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

o campo vectorial dado por

$$\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = rot\ \vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)\vec{k}$$

chama-se *rotacional de* $\vec{f}(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).

- O campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ diz-se *irrotacional* quando $\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = \vec{0}$.

- A propriedade apresentada no teorema seguinte estabelece uma condição para que um campo vectorial, $\vec{v}(x,y,z)$, seja *gradiente*, ou seja, para que $\vec{v}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$, em que $f(x,y,z)$ é um dado campo escalar.

Teorema 2: O rotacional de um gradiente é o vector nulo, isto é, se $f(x,y,z)$ é um campo escalar com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então:

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

- Em face do teorema anterior pode-se, ainda, afirmar que um campo vectorial, $\vec{v}(x,y,z)$, é *gradiente*, se e só se for *irrotacional*.

Exemplo 11: O rotacional do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (9) é:

$$\nabla\times\vec{v}(x,y,z)=\alpha\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\vec{0}$$

Conclui-se, então, que o campo vectorial é *gradiente* (*irrotacional*).

Exemplo 12: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (10). Notando que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}=-\frac{\alpha xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\ ,\ \frac{\partial v_2}{\partial x}=-\frac{\alpha xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{15}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z}=\frac{\partial v_2}{\partial z}=0$$

resulta para o rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$

$$\nabla\times\vec{v}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ v_1 & v_2 & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}$$

ou seja, trata-se de um campo vectorial *gradiente* (*irrotacional*).

Exemplo 13: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (13). Notando que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{-\alpha}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} + \frac{\alpha y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{16}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\alpha}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} - \frac{\alpha x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{17}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0$$

resulta para o rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$:

$$\nabla \times \vec{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k} \tag{18}$$

- Atente-se em mais algumas propriedades que envolvem a divergência e o rotacional.

Teorema 3: A divergência de um rotacional é nula, isto é, se as componentes de um campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

Teorema 4: Se $f(x,y,z)$ um campo escalar e se $\vec{u}(x,y,z)$ e $\vec{v}(x,y,z)$ são campos vectoriais, então:

$$\nabla \cdot (f\ \vec{v}) = (\nabla f)\cdot \vec{v} + f(\nabla \cdot \vec{v})$$

$$\nabla \times (f\ \vec{v}) = (\nabla f)\times \vec{v} + f(\nabla \times \vec{v})$$

$$\nabla \cdot (\vec{u}\times\vec{v}) = (\nabla \times \vec{u})\cdot \vec{v} + \vec{u}\cdot(\nabla \times \vec{v})$$

Teorema 5: Seja o campo vectorial $\vec{r}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, tal que $r(x,y,z) = \|\vec{r}(x,y,z)\|$. Se $n \in \mathbb{N}$, então para todo o $\vec{r} \neq \vec{0}$ verifica-se:

$$\nabla \cdot (r^n\ \vec{r}) = (n+3)r^n$$

$$\nabla \times (r^n\ \vec{r}) = \vec{0}$$

Laplaciano de um campo escalar, $\nabla^2 f$

- Seja $f(x,y,z)$ um campo escalar. O campo escalar definido por

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \nabla \cdot \left(\nabla f(x,y,z)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

designa *o laplaciano de* $f(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).

Exemplo 14: O laplaciano do campo escalar

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

é o campo escalar:

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2) = 6$$

Exemplo 15: O laplaciano do campo escalar

$$g(x,y,z) = e^{xyz}$$

é o campo escalar:

$$\nabla^2 g(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{xyz}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{xyz}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{xyz}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(yze^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial y}(xze^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial z}(xye^{xyz}) =$$

$$= (y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2)e^{xyz}$$

Laplaciano de um campo vectorial, $\nabla^2\vec{f}$

- Considerando o campo vectorial

  $$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

  o campo vectorial dado por

  $$\nabla^2\vec{f}(x,y,z) = \left(\nabla^2 f_1(x,y,z)\right)\vec{i} + \left(\nabla^2 f_2(x,y,z)\right)\vec{j} + \left(\nabla^2 f_3(x,y,z)\right)\vec{k}$$

  designa *o laplaciano de* $\vec{f}(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).

Exemplo 16: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (10). Recorrendo a (11) e (15), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -\frac{3\alpha x y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}} \ , \ \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{3\alpha x y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = -\frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{3\alpha x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}} \ , \ \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = -\frac{3\alpha x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = -\frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Então, o laplaciano de $\vec{v}(x,y,z)$ é:

$$\nabla^2 \vec{v}(x,y,z) = -\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{i} - \frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j} \qquad (19)$$

Exemplo 17: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (13). Recorrendo a (14) e (16), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} - \frac{3\alpha x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = \frac{3\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} - \frac{3\alpha y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=\frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Por outro lado, tendo em atenção (14) e (17), resulta:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}=-\frac{3\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{3\alpha x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}=-\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{3\alpha xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}=-\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Então, o laplaciano de $\vec{v}(x,y,z)$ é:

$$\nabla^2\vec{v}(x,y,z)=\frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{i}-\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j} \qquad (20)$$

- A propriedade apresentada no teorema seguinte relaciona os operadores divergência, rotacional e laplaciano de um campo vectorial.

Teorema 6: Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial, então:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v})=\nabla(\nabla\cdot\vec{v})-\nabla^2\vec{v} \qquad (21)$$

Exemplo 18: Uma vez que o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ dos exemplos 9 e 12 é *irrotacional*, então o seu laplaciano pode ser obtido, recorrendo a (21), através da relação:

$$\nabla^2\vec{v} = \nabla(\nabla\cdot\vec{v})$$

Recorrendo a (12), obtém-se

$$\nabla^2\vec{v} = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) = \nabla\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{j} =$$

$$= -\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{i} - \frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j}$$

confirmando-se o resultado encontrado em (19).

Exemplo 19: Uma vez que o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ do exemplo 10 é *solenoidal*, então o seu laplaciano pode ser obtido, recorrendo a (21), através da relação:

$$\nabla^2\vec{v} = -\nabla\times(\nabla\times\vec{v})$$

Recorrendo a (18), obtém-se

$$\nabla^2\vec{v} = -\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = -\alpha\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \left(x^2+y^2\right)^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

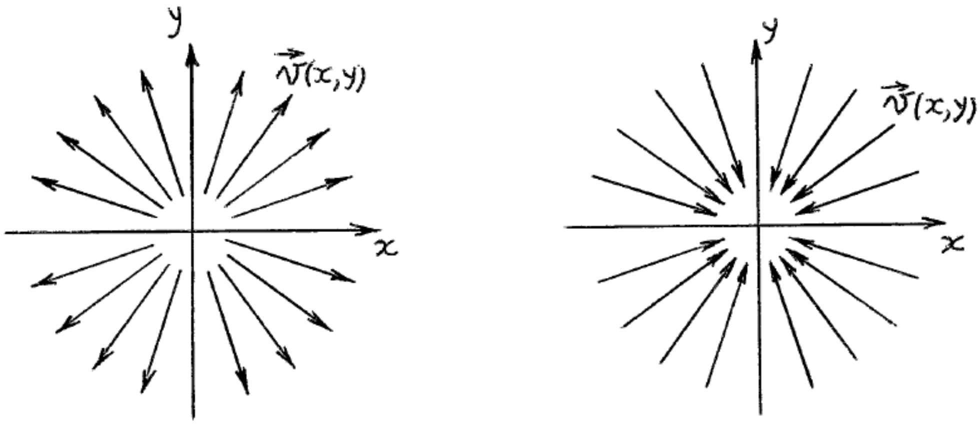
$$= \frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{i} - \frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j}$$

confirmando-se o resultado encontrado em (20).

Interpretação da divergência

- Considere-se uma sala fechada sujeita a um processo de aquecimento/arrefecimento, em que o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ define, em cada ponto (x,y,z) da sala, a velocidade do ar que se encontra em movimento.

  Se, numa determinada região, o ar é aquecido, então ele estará sujeito a um fenómeno de expansão em todas as direcções; nesta situação a *divergência* do campo de velocidades é *positiva*. Fixando um pequeno elemento de volume em torno de um ponto, *P*, nessa região, verifica-se que haverá uma maior quantidade de ar a sair do que a entrar nesse elemento de volume; neste caso, o ponto *P* é designado por "*fonte*".



$\nabla\vec{v}(x,y) > 0$ (*fonte*) $\nabla\vec{v}(x,y) < 0$ (*sumidouro*)

  Por outro lado, se o ar for arrefecido, verificar-se-á uma contracção e a *divergência* do campo de velocidades será *negativa*. No elemento de volume referido haverá, agora, uma maior quantidade de ar a entrar do que a sair e o ponto *P* é designado por "*sumidouro*".

  Se a *divergência* do campo de velocidades for *nula* não se verifica nem a acumulação, nem a dispersão do fluido em qualquer ponto do escoamento; neste caso, diz-se que o escoamento é *solenoidal*.

Exemplo 20: O campo de velocidades expresso em (9), cuja divergência é definida por

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = 3\alpha$$

diz respeito a uma *fonte*, se $\alpha > 0$, e a um *sumidouro*, se $\alpha < 0$.

Exemplo 21: O campo de velocidades expresso em (10), cuja divergência é definida por

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

diz respeito a uma *fonte*, se $\alpha > 0$, e a um *sumidouro*, se $\alpha < 0$.

Exemplo 22: O campo de velocidades definido em (13), cuja divergência é

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = 0$$

diz respeito a um escoamento *solenoidal*.

Interpretação do rotacional

- É, ainda, possível dar uma interpretação para o rotacional de um campo vectorial no âmbito da mecânica dos fluidos. Assim, se o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ representar o campo de velocidades de um fluido, o seu rotacional num dado ponto *P* caracteriza a tendência do fluido poder girar sobre si próprio em torno de *P*.
  Nos dois exemplos seguintes apresentam-se dois casos particulares de dois escoamentos bidimensionais designados por *vórtices*, isto é, escoamentos em que a componente radial da velocidade é nula; nestes casos, o fluido circula ao longo de linhas de escoamento que são circunferências concêntricas.

Exemplo 23: Admita-se que o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} \ , \ \omega > 0 \tag{22}$$

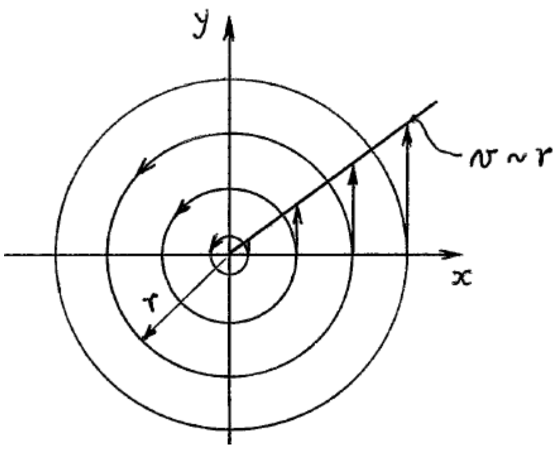
define o campo de velocidades de um escoamento bidimensional.
Pode-se verificar que, em cada ponto do escoamento, o vector velocidade é ortogonal ao vector de posição

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = (-\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = 0$$

e a sua intensidade

$$\|\vec{v}(x,y)\| = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega r$$

é directamente proporcional à distância, *r*, do ponto à origem.



rotação sólida (*vórtice forçado*)

Dado que a componente radial do campo de velocidades é nula, então a divergência é nula (o escoamento é *solenoidal*)

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\omega\frac{\partial y}{\partial x} + \omega\frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

sendo o seu rotacional dado por

$$\nabla \times \vec{v}(x,y) = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k}$$

ou seja, é duas vezes o vector velocidade angular, $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$.
O campo de velocidades (22) define um escoamento onde o meio não sofre qualquer deformação, sendo designado por *rotação sólida*, ou *vórtice forçado*.
Para exemplificar este tipo de escoamento, considere-se um recipiente cilíndrico com água que é colocado lentamente em rotação em torno do seu eixo até se atingir uma velocidade angular constante ω. A viscosidade inerente ao fluido conduzirá a uma situação em que este se moverá em círculos concêntricos. Após um período transitório, espera-se que o fluido se mova apenas com velocidade na direcção tangencial (escoamento *solenoidal*) e sem qualquer variação na direcção vertical. Nestas condições o fluido desloca-se como se fosse um corpo sólido.

Exemplo 24: Considere-se, agora, o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}\ ,\ (x,y) \neq (0,0) \tag{23}$$

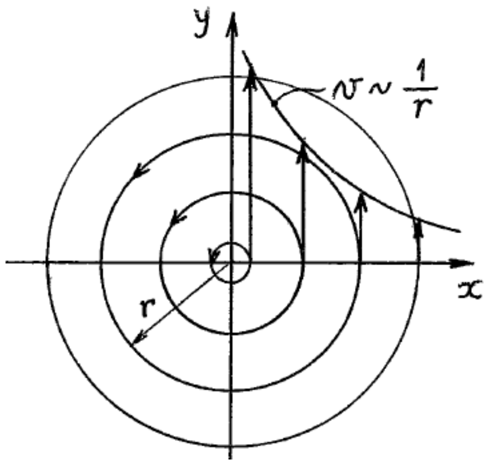
que define um campo de velocidades de um escoamento bidimensional. Em cada ponto do escoamento o vector velocidade é ortogonal ao vector de posição

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}\right)\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}) = 0$$

sendo a sua intensidade

$$\left\|\vec{v}(x,y)\right\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

inversamente proporcional à distância, r, do ponto à origem.



Vórtice irrotacional (*vórtice livre*)

Uma vez que o escoamento é *solenoidal* (a componente radial do campo de velocidades é nula), a divergência é nula:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0$$

Por outro lado, sabendo que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

obtém-se para o rotacional

$$\nabla \times \vec{v}(x,y) = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

ou seja, o escoamento é *irrotacional*.

O campo de velocidades (23) define um escoamento que é designado por *vórtice irrotacional*, ou *vórtice livre*.

Este modelo de escoamento, também conhecido por *modelo furacão*, pode ser observado no processo de escoamento da água de uma banheira, quando a água se aproxima do ralo.