COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 7

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE; FLUXO

1. Dados os vectores não nulos $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, determine o integral de superfície do campo escalar $h(x,y,z) = xy$ sobre a superfície, *S*, parametrizada através da função vectorial a duas variáveis reais $\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + v\vec{b}$, $(u,v) \in \Omega$, em que $\Omega = \{(u,v) \ : \ 0 \le u \le 1 \ , \ 0 \le v \le 1\}$.

2. Calcule o integral $\iint_S (2y)\, dS$ sobre a superfície, *S*, definida por $z = y^2/2$, $(x,y) \in \Omega$, em que $\Omega = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1\}$.

3. Calcule o integral $2\iint_S dS$ sobre a superfície, *S*, definida por $z = y^2/2$, $(x,y) \in \Omega$, em que $\Omega = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1\}$.

4. Calcule o integral $\iint_S 4\sqrt{x^2 + y^2}\, dS$ sobre a superfície, *S*, definida por $z = xy$, $(x,y) \in \Omega$, em que $\Omega = \left\{(x,y) \ : \ 0 \le x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

5. Calcule o integral $\iint_S (xyz)\, dS$ sobre a superfície, *S*, que corresponde ao primeiro octante do plano $x + y + z = 1$.

6. Calcule o integral $\iint_S (x^2 z)\, dS$ sobre a superfície cilíndrica, *S*, definida por $x^2 + z^2 = 1$, tal que $1 \le y \le 4$ e $z \ge 0$.

10. Seja a superfície, *S*, parametrizada através da função vectorial a duas variáveis reais $\vec{r}(u,v)=(u+v)\vec{i}+(u-v)\vec{j}+u\vec{k}$, $(u,v)\in\Omega$, em que $\Omega=\{(u,v)\ :\ 0\le u\le 1\ ,\ 0\le v\le 1\}$. Admita que a densidade, em cada um dos seus pontos, é dada por $\lambda(x,y,z)=kz\ (k>0)$. Calcule:

a) A sua área.

b) As coordenadas do seu centroide.

c) A sua massa.

d) As coordenadas do seu centro de massa.

e) Os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados, I_x, I_y e I_z.

11. Seja a superfície triangular, *S*, com vértices nos pontos $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ e $(0,0,a)$, tal que $a>0$. Calcule:

a) A sua área.

b) As coordenadas do seu centroide.

12. Admitindo que a densidade em cada ponto da superfície do exemplo 11 é dada por $\lambda(x,y,z)=kx^2\ (k>0)$, calcule:

a) A sua massa.

b) As coordenadas do seu centro de massa.

16. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ através da superfície cilíndrica, *S*, parametrizada através da função vectorial a duas variáveis reais $\vec{r}(u,v)=a\cos(u)\vec{i}+a\,\mathrm{sen}(u)\vec{j}+v\vec{k}$, com $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,1]$ e $a>0$, no sentido de dentro para fora da superfície.

17. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ através da superfície do paraboloide, *S*, definida por $z=1-(x^2+y^2)$, $z\ge 0$, no sentido de dentro para fora da superfície.

18. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=-y\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$, através da superfície cónica, *S*, definida por $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\le 4$, no sentido de dentro para fora da superfície.

19. Seja *S* a superfície parametrizada através da função vectorial a duas variáveis reais $\vec{r}(u,v)=u\cos(v)\vec{i}+u\,\mathrm{sen}(v)\vec{j}+v\vec{k}$, com $u\in[0,1]$ e $v\in[0,2\pi]$. Calcule o integral de fluxo $\iint_S xdy\wedge dz$ através de *S*, no sentido definido pelo seu produto vectorial fundamental.

20. Seja a superfície triangular, *S*, do exemplo 11.. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x^2\vec{i} - y^2\vec{j}$ através de *S*, no sentido definido pelo semieixo positivo dos *zz*.

22. Considere a superfície, *S*, definida por $z = xy$, $(x,y) \in \Omega$, tal que $\Omega = \{(x,y) \,:\, 0 \le x \le 1 \,,\, 0 \le y \le 2\}$. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = -xz\vec{j} + xy\vec{k}$ através de *S*, no sentido definido pelo semieixo negativo dos *zz*.

23. Seja a superfície fechada, *S*, limitada pelas superfícies $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = 1$. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z^2\vec{k}$ através de *S*, no sentido de fora para dentro da superfície.

24. Considere a superfície fechada, *S*, que limita o cubo unitário, *T*, situado no quarto octante $T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le a \,,\, -a \le y \le 0 \,,\, 0 \le z \le a\}$ $(a > 0)$. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície.

a) $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j}$.

b) $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

c) $\vec{f}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

d) $\vec{f}(x,y,z) = -2x^2\vec{i} - 2xz\vec{j} + z^2\vec{k}$.

e) $\vec{f}(x,y,z) = xz\vec{i} + 4xyz^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$.

26. Considere a superfície fechada, *S*, limitada pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + xy\vec{j} + z^2\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície.

28. Seja a superfície fechada, *S*, limitada pelas superfícies $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = 2$. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = \left(2x + ze^y\right)\vec{i} + \left(y + \mathrm{sen}(z)\right)\vec{j} + \left(3z + e^{xy}\right)\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície.

29. Considere a superfície fechada, S, situada no primeiro octante e limitada pelos planos coordenados e pela superfície $x+y+z=a\ (a>0)$. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=3x^2\vec{i}+2xy\vec{j}-5xz\vec{k}$ através de S, no sentido de fora para dentro da superfície.

30. Calcule $\nabla\cdot\vec{f}$ (divergência) e $\nabla\times\vec{f}$ (rotacional), sendo $\vec{f}$ o campo vectorial:

a) $\vec{f}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

b) $\vec{f}(x,y,z)=-2x\vec{i}+4y\vec{j}-6z\vec{k}$.

c) $\vec{f}(x,y,z)=xyz\vec{i}+xz\vec{j}+z\vec{k}$.

d) $\vec{f}(x,y,z)=x^3y\vec{i}+y^3z\vec{j}+xy^3\vec{k}$.

e) $\vec{f}(x,y,z)=x^2y\vec{i}+(z-x-y)\vec{j}+2xy\vec{k}$.

f) $\vec{f}(x,y,z)=xz\vec{i}+4xyz^2\vec{j}+2yz\vec{k}$.

g) $\vec{f}(\vec{r})=e^{r^2}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

h) $\vec{f}(\vec{r})=r^{-2}\vec{r}$.

i) $\vec{f}(x,y,z)=\dfrac{\alpha x}{x^2+y^2}\vec{i}+\dfrac{\alpha y}{x^2+y^2}\vec{j}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

j) $\vec{f}(x,y,z)=\dfrac{\alpha y}{x^2+y^2}\vec{i}+\dfrac{\alpha x}{x^2+y^2}\vec{j}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

k) $\vec{f}(x,y,z)=\left(2x+ze^{y}\right)\vec{i}+\left(y+\operatorname{sen}(z)\right)\vec{j}+\left(3z+e^{xy}\right)\vec{k}$.

31. Mostre que a divergência e o rotacional são operadores lineares, isto é, se $\vec{f}$ e $\vec{g}$ são campos vectoriais e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, então:

a) $\nabla\cdot(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})=\alpha(\nabla\cdot\vec{f})+\beta(\nabla\cdot\vec{g})$.

b) $\nabla\times(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})=\alpha(\nabla\times\vec{f})+\beta(\nabla\times\vec{g})$.

32. Mostre que o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=2x^3y\vec{i}-y^2z\vec{j}+(yz^2-6x^2yz)\vec{k}$ é solenoidal.

33. Mostre que o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=(2xy+z^2)\vec{i}+(x^2-2yz)\vec{j}+(2xz-y^2)\vec{k}$ é irrotacional.

34. Mostre que se φ é um campo escalar e $\vec{f}$ um campo vectorial, então:

a) $\nabla\cdot(\varphi\vec{f})=(\nabla\varphi)\cdot\vec{f}+\varphi(\nabla\cdot\vec{f})$.

b) $\nabla\times(\varphi\vec{f})=(\nabla\varphi)\times\vec{f}+\varphi(\nabla\times\vec{f})$.

39. Resolva os exercícios 23. a 29. recorrendo ao teorema da divergência.

40. Considere a superfície fechada, *S*, que limita o sólido, *V*, definido por $V = \left\{(x,y,z)\ :\ 1 \geq z \geq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$ e o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Verifique o teorema da divergência.

41. Considere a superfície fechada, *S*, que limita o sólido, *V*, limitado pelos planos $x=0$, $y=-1$, $y=1$, $z=0$ e $x+z=2$ e o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{j}$. Verifique o teorema da divergência.

42. Recorrendo ao teorema adequado, determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = -x^2y\vec{i} + 3y\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ através da superfície fechada, *S*, que limita o volume $V = \left\{(x,y,z)\ :\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$, no sentido de dentro para fora da superfície.

43. Considere o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$ e seja a superfície fechada, *S*, limitada pelas superfícies $x^2+y^2=1$, $z=0$ e $z=1$. Calcule $\oiint_S (\vec{f}\cdot\vec{n})\, dS$:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b**) Recorrendo ao teorema da divergência.

44. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} + 3yz\vec{k}$ através da superfície esférica, *S*, definida por $x^2+y^2+z^2=a^2$ ($a>0$), no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b**) Recorrendo ao teorema da divergência.

45. Sejam o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ e a superfície fechada, *S*, limitada pelas superfícies $x^2+y^2=2y$, $z=0$ e $z=2$. Usando o teorema adequado, determine o fluxo do campo vetorial $\vec{f}(x,y,z)$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície.

46. Seja a superfície fechada $S=\left\{(x,y,z)\ :\ (x^2+y^2+z^2=4\ ,\ z\geq 0)\ \vee\ (x^2+y^2\leq 4\ ,\ z=0)\right\}$. Recorrendo ao teorema adequado, determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=\frac{x^3}{y^2}\vec{i}+5\frac{x^2}{y}\vec{j}+2z\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície.

52. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$. Verifique o teorema de Stokes sobre a superfície $S=\left\{(x,y,z)\ :\ z+1=x^2+y^2\ ,\ z\in[-1,0]\right\}$.

53. Considere a superfície triangular, *S*, com vértices nos pontos $A=(2,0,0)$, $B=(0,2,0)$ e $C=(0,0,2)$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z)=x^3\vec{i}+2xy\vec{j}+z^2\vec{k}$ através de *S*, no sentido definido pelo semieixo positivo dos *zz*:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b**) Recorrendo ao teorema de Stokes.

54. Seja *S* a superfície $z=\sqrt{x^2+y^2}$, limitada por $2z=x^2+y^2$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z)=z\vec{i}+x\vec{j}+2\vec{k}$ através de *S*, no sentido de fora para dentro da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b**) Recorrendo ao teorema de Stokes.

55. Seja *S* a superfície definida por $z=1-x^2-y^2$, $z\geq 0$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b**) Recorrendo ao teorema de Stokes.

56. Seja *S* a superfície definida por $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z)=z^2\vec{i}+2x\vec{j}-y^3\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b**) Recorrendo ao teorema de Stokes.

57. Seja S a superfície $z = x^2 + y^2$, limitada superiormente pelo plano $z = 2x$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x, y, z) = y^2\vec{i} - \vec{k}$ através de S, no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b**) Recorrendo ao teorema de Stokes.

58. Seja S a superfície definida por $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq -2$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x, y, z) = (2xyz + 2z)\vec{i} + xy^2\vec{j} + xz\vec{k}$ através de S, no sentido de fora para dentro da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b**) Recorrendo ao teorema de Stokes.

59. Seja S a superfície definida por $z = x^2 + y^2$, $z \leq -2$, $y \geq 0$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + xz)\vec{i} + yz\vec{j}$ através de S, no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b**) Recorrendo ao teorema de Stokes.

61. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x, y, z) = y\vec{i} + zx\vec{j} + zy\vec{k}$. Verifique o teorema de Stokes sobre a superfície $S = \left\{(x, y, z) \ : \ z = 5 - (x^2 + y^2) \ , \ z \geq 1\right\}$.

Soluções: Consultar o manual "Noções sobre Análise Matemática", Efeitos Gráficos, 2019. ISBN: 978-989-54350-0-5.