

**COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA****Aula Teórico-Prática – Ficha 2****FUNÇÕES A VÁRIAS VARIÁVEIS; GRADIENTES**

- 1) Determine a função de campo escalar  $f(x, y, z)$ , tal que o seu valor no ponto  $(x, y, z)$  é:
- a) A área da superfície da caixa, sem a sua tampa superior, cujos lados são definidos pelos vectores  $x\vec{i}$ ,  $y\vec{j}$  e  $z\vec{k}$ .
  - b) O valor do ângulo formado pelos vectores  $\vec{i} + \vec{j}$  e  $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .
  - c) O volume do prisma definido pelos vectores  $\vec{i}$ ,  $\vec{i} + \vec{j}$  e  $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .
- 2) Considere a equação  $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = z$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- a) Que superfície é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem a equação dada.
  - b) O que acontece a esta superfície quando  $b \rightarrow \infty$ .
  - c) Qual a secção resultante da intersecção da superfície dada com a superfície  $z = 1$ .
  - d) O que acontece a esta secção quando  $b \rightarrow \infty$ .
- 3) Identifique as superfícies definidas pelas equações:
- a)  $g(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ .
  - b)  $\rho(\theta, \varphi) = \sin \varphi \cos \theta$ .
- 4) Obtenha o limite da função  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ao longo de:
- a) Eixo dos  $xx$ .
  - b) Eixo dos  $yy$ .
  - c) Recta  $y = mx$ ,  $m \neq 0$ .
  - d) Espiral  $r = \theta$ ,  $\theta > 0$ .
  - e) Arco  $r = \sin(3\theta)$ ,  $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ .

f) Curva descrita pela função vectorial  $\vec{r}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{\text{sen } t}{t}\vec{j}$ ,  $t > 0$ .

5) Calcule as derivadas parciais das seguintes funções de campo escalares:

a)  $\rho(\theta, \varphi) = \text{sen}(\varphi)\cos(\theta)$ .

b)  $g(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ .

c)  $h(x, y) = \text{arc tg}(2x + y)$ .

d)  $u(x, y, z) = \frac{e^z}{xy^2}$ .

e)  $\omega(x, y, z) = \ln(zx + 3y)$ .

f)  $v(x, y, z) = x^{y^z}$ .

g)  $f(x, y) = \ln\left(x^2 + \sqrt{x^3 + y^2}\right)$ .

6) Calcule o gradiente das seguintes funções de campo escalar:

a)  $f(x, y, z) = xe^y \text{sen}(z + x)$ .

b)  $g(x, y, z) = (-x + 2y)^5 + \frac{2}{z}$ .

7) Seja a função de campo escalar  $f(x, y) = x(4 - y^2)$  e a função vectorial  $\vec{\alpha}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j}$ . Obtenha a derivada da função composta das funções dadas:

a) Sem efectuar a composição das funções.

b) Determinando a função composta.

8) Determine a derivada direcciona da função de campo escalar  $f(x, y, z) = z \ln \frac{x}{y}$  no ponto  $P = (1, 2, -2)$ , na direcção do ponto  $Q = (2, 2, 1)$ .

9) Calcule a derivada direcciona da função de campo escalar  $f(x, y, z) = xe^{y^2 - z^2}$  em  $P = (1, 2, -2)$ , na direcção do percurso descrito pela função vectorial  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 2\cos(t-1)\vec{j} - 2e^{t-1}\vec{k}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

10) Obtenha a derivada direcciona da função de campo escalar  $f(x, y, z) = (x + y^2 + z^3)^2$  no ponto  $P = (1, -1, 1)$ , na direcção definida pelo vetor  $\vec{i} + \vec{j}$ .

- 11) Determine a direcção e o sentido segundo os quais a função de campo escalar  $f(x, y) = y^2 e^{2x}$  tem a sua taxa de variação máxima no ponto  $P = (0, 1)$ .
- 12) Obtenha a direcção e o sentido segundo os quais a função de campo escalar  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  tem a sua taxa de variação máxima no ponto  $P = (1, -2, 1)$ .
- 13) Calcule a derivada direccional da função de campo escalar  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  no ponto  $(x, y) \neq (0, 0)$ , na direcção da origem.
- 14) Calcule a derivada direccional de:
- a)  $f(x, y, z) = x^2 + xy + yz$  em  $P = (1, 0, 2)$ , segundo a normal à superfície  $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$ .
  - b)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  em  $Q = (3, 4, 5)$ , segundo o vector tangente à curva de intersecção das superfícies  $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$  e  $z^2 = x^2 + y^2$  nesse ponto.
- 15) Seja  $f$  uma função de campo escalar contínua e diferenciável em todos os pontos do segmento de recta  $[AB]$ , com  $f(A) = f(B)$ . Mostre que existe um ponto,  $C$ , situado entre  $A$  e  $B$ , tal que  $\nabla f(C) \cdot (B - A) = 0$ .
- 16) Considere a função de campo escalar  $f(x, y, z) = 4xz - y^2 + z^2$ , diferenciável em  $\mathbb{R}$ , e os pontos  $A = (0, 1, 1)$  e  $B = (1, 3, 2)$ . Determine o ponto  $C$  situado no segmento de recta  $[AB]$ , tal que  $f(B) - f(A) = \nabla f(C) \cdot (B - A)$ .
- 17) Obtenha um vector que seja normal e um vector que seja tangente à curva de equação cartesiana  $x^3 + y^2 + 2x = 6$  no ponto  $P = (-1, 3)$ .
- 18) A temperatura,  $T$ , na vizinhança do ponto  $P = (\pi/4, 0)$  é dada pela função de campo escalar  $T(x, y) = \sqrt{2}e^{-y} \cos x$ . Uma partícula desloca-se nessa vizinhança seguindo uma trajectória que passa em  $P$  e que, em cada ponto, segue uma direcção que corresponde à máxima taxa de variação de temperatura. Determine essa trajectória.

- 19) Determine os pontos das superfícies  $z - xy = 0$  e  $4x + 2y - x^2 + xy - y^2 - z = 0$ , onde o plano tangente é horizontal.
- 20) Calcule o vector normal e o plano tangente à superfície  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  no ponto  $P = (1, 1, 1)$ .
- 21) Obtenha o plano tangente e a recta normal à superfície  $xy + yz + xz = 11$  no ponto  $P = (1, 2, 3)$ .
- 22) Mostre que a superfície esférica de equação  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$  é tangente ao elipsoide de equação  $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$  no ponto  $P = (2, 1, 1)$ .
- 23) A curva do espaço descrita pela função vectorial  $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 3t^{-1}\vec{j} - 2t^2\vec{k}$ ,  $t > 0$ , e o elipsoide de equação  $x^2 + y^2 + 3z^2 = 25$  intersectam-se no ponto  $P = (2, 3, -2)$ . Determine o valor do ângulo,  $\alpha$ , de intersecção.
- 24) Sejam as superfícies de equações  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{\omega}$ ,  $\omega > 0$ . Mostre que a soma das coordenadas dos pontos de intersecção de todos os planos tangentes às superfícies com os eixos coordenados é igual a  $\omega$ .
- 25) Supondo que a equação  $x \cos(xy) + y \cos(x) = 2$  define  $y$  implicitamente em função de  $x$ ,  $y = f(x)$ , calcule  $\frac{dy}{dx}$ .
- 26) Admitindo que a equação  $x^2 + z^4 + z^3 + y^2 + xy = 2$  define  $z$  implicitamente em função de  $x$  e  $y$ ,  $z = f(x, y)$ , calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .
- 27) Seja a função de campo escalar  $\omega = \omega(x, y, z)$ , em que  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  e  $u = u(s, t)$ ,  $v = v(s, t)$ . Desenhe a árvore diagrama para o cálculo das derivadas parciais  $\frac{\partial \omega}{\partial s}$  e  $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ , e calcule-as.

**28)** A equação  $x + z + (y + z)^2 = 6$  define  $z$  implicitamente em função de  $x$  e  $y$ ,  $z = f(x, y)$ . Determine  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ , em função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

**29)** Considere a função de campo escalar  $z = f(x, y)$ , definida implicitamente pela equação  $e^{\cos(z)} \ln(z+1) = \arctg(2x+y)$ . Determine o valor das derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  no ponto  $P = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ .

**30)** A equação  $x \ln(y) + y^2 z + z^2 = 6$  define  $z$  implicitamente em função de  $x$  e  $y$ ,  $z = f(x, y)$ , na vizinhança de  $P = (1, 1, 2)$ . Obtenha as derivadas  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  em  $P$ .

**31)** Considerando  $z(r, s, v) = \frac{r+s}{v}$ ,  $r(x, y) = x \cos(y)$ ,  $s(x, y) = y \sin(x)$  e  $v(x, y) = 2x - y$ , calcule as derivadas  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**32)** Seja a superfície definida implicitamente pela equação  $\sqrt{x} \cos(-2y + z) = 1$ . Calcule as derivadas  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  nos pontos com coordenadas  $x = 2$  e  $y = 0$ .

**33)** Considere a superfície definida implicitamente pela equação  $xz^2 - yz^2 + xy^2z - 5 = 0$ . Determine as derivadas  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  nos pontos com coordenadas  $x = 3$  e  $y = 1$ .

**34)** Considere a função de campo escalar  $z = f(y, x, v, u) = x + \ln(u) + (y + v)^2$ , em que  $x(u, v) = 2u + 3v$  e  $y(u, v) = \cos(u) + \sin(v)$ . Utilize a regra de derivação em cadeia para obter as derivadas  $\frac{\partial z}{\partial u}$  e  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .

**35)** Seja a função de campo escalar  $w = f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$ , em que  $x = \operatorname{tg}(u-1) - e^v$ ,  $y = u^2 - v^2$  e  $z = \cos(u^2v)$ . Usando a regra de derivação em cadeia, obtenha as derivadas parciais  $\frac{\partial w}{\partial u}$  e  $\frac{\partial w}{\partial v}$ .

**36)** Seja a função diferenciável  $u = f(x, y)$ . Considerando  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ , obtenha:

- a) As derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial r}$  e  $\frac{\partial u}{\partial \theta}$  em função das derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- b)  $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$  em função das derivadas parciais, de 1ª e 2ª ordens, de  $f$  em relação a  $x$  e  $y$ .

**37)** Verifique que as derivadas, de 2ª ordem,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  são iguais, se  $z = e^x (\cos(y) + x \sin(y))$ .

**38)** Classifique os pontos críticos das seguintes funções e, se possível, determine os seus máximos/mínimos locais:

- |  |  |
|--|--|
| a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ .               | b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ .                     |
| c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$ .     | d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ .               |
| e) $f(x, y) = 1 - (x-1)^2 - y^2$ .       | f) $f(x, y) = (x-y+1)^2$ .                     |
| g) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x + 2$ . | h) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + xy + 4x + 2y$ .     |
| i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ .         | j) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 2$ . |
| k) $f(x, y) = e^x \cos(y)$ .             | l) $f(x, y) = x \sin(y)$ .                     |
| m) $f(x, y) = (x+y)(xy+1)$ .             | n) $f(x, y) = xy + x^{-1} + 8y^{-1}$ .         |
| o) $f(x, y) = xy + x^{-1} + y^{-1}$ .    | p) $f(x, y) = x^2y + x^2 - 4y$ .               |

**39)** Seja um paralelepípedo situado no 1º octante, com um dos seus vértices na origem do referencial e duas das suas arestas situadas nos eixos dos  $xx$  e dos  $yy$ . Determine o valor máximo para o seu volume, se o vértice oposto à origem estiver situado no plano  $x + y + z = 1$ .

**40)** Calcule a distância entre as rectas com equações cartesianas  $6x = 3y = 2z$  e  $x = y - 2 = z$ .



- g)  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x\sqrt{x^3+y^2}+3x^2}{2(x^3+y^2+x^2\sqrt{x^3+y^2})}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x^3+y^2+x^2\sqrt{x^3+y^2})}$ .
- 6) a)  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = e^y(\sin(x+z) + x\cos(x+z))\vec{i} + e^y x\sin(x+z)\vec{j} + e^y x\cos(x+z)\vec{k}$ .
- b)  $\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k} = -5(-x+2y)^4\vec{i} + 10(-x+2y)^4\vec{j} - \frac{2}{z^2}\vec{k}$ .
- 7)  $\frac{df}{dt} = f'(t) = -24\sin(t)\cos^2(t)$ .
- 8) Designando  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$ , tem-se  $f'(P, \vec{u}) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = -\frac{\sqrt{10}}{5} - 3\frac{\sqrt{10}}{10}\ln(2)$ .
- 9) Designando  $\vec{u} = \frac{\vec{r}'(1)}{\|\vec{r}'(1)\|}$ , tem-se  $f'(P, \vec{u}) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = -\frac{7\sqrt{5}}{5}$ .
- 10)  $-3\sqrt{2}$ .
- 11) Segundo a direcção e o sentido definidos pelo versor  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ .
- 12) Segundo a direcção e o sentido definidos pelo versor  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$ .
- 13)  $\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .
- 14) a)  $\pm \frac{14}{\sqrt{41}}$ . b) 0.
- 15) - - - - 16)  $C = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$ .
- 17) Vector normal:  $5\vec{i} + 6\vec{j}$ ; vector tangente:  $6\vec{i} - 5\vec{j}$ .
- 18)  $y = \ln(\sqrt{2}|\sin(x)|)$ .
- 19) No caso da superfície  $z - xy = 0$  é o ponto  $O = (0,0,0)$ ; para a restante é o ponto  $P = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{28}{3}\right)$ .



20) Vector normal:  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; plano tangente:  $x + y + z = 3$ .

21) Plano tangente:  $5x + 4y + 3z = 22$ ; recta normal:  $X(t) = (1, 2, 3) + t(5, 4, 3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

22) - - - - 23)  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{19\sqrt{29}}{203}$ .

24) - - - - 25)  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy \operatorname{sen}(xy) + y \operatorname{sen}(x) - \cos(xy)}{\cos(x) - x^2 \operatorname{sen}(xy)}$ .

26)  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+y}{(4z+3)z^2}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+2y}{(4z+3)z^2}$ .

27)  $\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \right);$   
 $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right).$

28)  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1+2y+2z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2\frac{y+z}{1+2y+2z}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3}$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

29)  $\frac{\partial z}{\partial x} \left( -\frac{1}{2}, 1, 0 \right) = \frac{2}{e}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} \left( -\frac{1}{2}, 1, 0 \right) = \frac{1}{e}$ .

30)  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1, 2) = 0$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1, 2) = -1$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1, 2) = -\frac{1}{5}$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1, 1, 2) = -\frac{1}{5}$ .

31)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos(y) + y \cos(x)}{2x-y} - 2\frac{x \cos(y) + y \operatorname{sen}(x)}{(2x-y)^2}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x)}{2x-y} + \frac{x \cos(y) + y \operatorname{sen}(x)}{(2x-y)^2}$ .

32)  $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 0, \arccos(1/\sqrt{2})) = \pm \frac{1}{4}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 0, \arccos(1/\sqrt{2})) = 2$ .

33)  $\frac{\partial z}{\partial x}(3, 1, 1) = -\frac{2}{7}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}(3, 1, 1) = -\frac{5}{7}$  ou  $\frac{\partial z}{\partial x}\left(3, 1, -\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{28}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}\left(3, 1, -\frac{5}{2}\right) = -\frac{85}{28}$ .

34)  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} = -2 \operatorname{sen}(u)(\cos(u) + \operatorname{sen}(v) + v) + 2 + \frac{1}{u}$ ;

$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} = 2(1 + \cos(v))(\cos(u) + \operatorname{sen}(v) + v) + 3$ .

35)  $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{u^2 - v^2}{\cos(u^2 v) \cos^2(u-1)} + \frac{2u(\operatorname{tg}(u-1) - e^v)}{\cos(u^2 v)} + \frac{2uv \operatorname{sen}(u^2 v)(u^2 - v^2)(\operatorname{tg}(u-1) - e^v)}{\cos^2(u^2 v)};$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{(u^2 - v^2)e^v}{\cos(u^2 v)} - \frac{2v(\operatorname{tg}(u-1) - e^v)}{\cos(u^2 v)} + \frac{u^2 \operatorname{sen}(u^2 v)(u^2 - v^2)(\operatorname{tg}(u-1) - e^v)}{\cos^2(u^2 v)}.$$

**36) a)**  $\frac{\partial u}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}$  e  $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}.$

**b)**  $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2 \left( \operatorname{sen}^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \frac{r^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - r \left( \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \right).$

**37) - - - -**

**38) a)** Ponto estacionário em  $(0,0)$ , com um mínimo local de valor igual a 0.

**b)** Ponto de sela em  $(0,0)$ .

**c)** Ponto estacionário em  $(2,1)$ , com um mínimo local de valor igual a  $-3$ .

**d)** Pontos estacionários em  $(-1,-1)$  e  $(1,1)$ , com mínimos locais de valor igual a  $-2$ ; ponto de sela em  $(0,0)$ .

**e)** Ponto estacionário em  $(1,0)$ , com um máximo local de valor igual a 1.

**f)** Ponto estacionário ao longo da recta  $y = x + 1$ , com um mínimo local de valor igual a 0.

**g)** Ponto estacionário em  $(4,-2)$ , com um mínimo local de valor igual a  $-10$ .

**h)** Ponto estacionário em  $\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$ , com um máximo local de valor igual a  $\frac{28}{3}$ .

**i)** Ponto estacionário em  $(2,2)$ , com um mínimo local de valor igual a  $-8$ ; ponto de sela em  $(0,0)$ .

**j)** Ponto estacionário em  $\left(5, \frac{27}{2}\right)$ , com um mínimo local de valor igual a  $-\frac{117}{4}$ ; ponto de sela em  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ .

**k)** Sem pontos estacionários nem mínimos ou máximos locais.

**l)** Pontos de sela em  $(0, k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**m)** Pontos de sela em  $(1,-1)$  e  $(-1,1)$ .

- n)** Ponto estacionário em  $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ , com um mínimo local de valor igual a 6.
- o)** Ponto estacionário em  $(1, 1)$ , com um mínimo local de valor igual a 3.
- p)** Pontos de sela em  $(2, -1)$  e  $(-2, -1)$ .

**39)**  $\frac{1}{27}$ .

**40)**  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

- 41)** O cesto tem uma base quadrada de dimensões  $4 \times 4 \text{ m}^2$  e a sua altura é 6 m.