COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 6

SUPERFÍCIES

1. Parametrize as seguintes superfícies:

a) $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

b) $x^2 + y^2 = 9$, $z \in [-1,3]$.

c) A região da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ situada acima do plano $z = -\sqrt{2}$.

d) A região do plano $z = x - 1$ que é limitada pela superfície $x^2 + y^2 = 1$.

2. Identifique as seguintes superfícies e defina-as através das respectivas equações cartesianas:

a) $\vec{r}(u,v) = \cos(u)\cos(v)\vec{i} + 2\mathrm{sen}(u)\cos(v)\vec{j} + 3\mathrm{sen}(v)\vec{k}$, $u \in [0,2\pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$.

b) $\vec{r}(u,v) = au\cos(v)\vec{i} + bu\mathrm{sen}(v)\vec{j} - u^2\vec{k}$, $u \geq 0$, $v \in [0,2\pi]$ ($a,b \in \mathbb{R}^+$).

c) $\vec{r}(u,v) = \frac{a}{2}(u+v)\vec{i} + \frac{b}{2}(u-v)\vec{j} + uv\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ ($a,b \in \mathbb{R}^+$).

3. Seja a superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v) = (u^2 - v^2)\vec{i} + (u^2 + v^2)\vec{j} + 2uv\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Calcule:

a) O seu produto vectorial fundamental.

b) A equação cartesiana do plano tangente à superfície no ponto $R = (0,2,2)$.

4. Considere a superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v) = \cos(u)\mathrm{sen}(v)\vec{i} + \mathrm{sen}(u)\cos(v)\vec{j} + u\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Calcule:

a) O seu produto vectorial fundamental.

b) A equação cartesiana do plano que passa no ponto $Q = (1,2,1)$ e é paralelo ao plano tangente à superfície no ponto $R = (0,0,\pi)$.

5. Considere a superfície, *S*, definida por $z = x^2 + y^2$, $z \in [0,4]$.

a) Esboce a superfície. **b**) Determine a sua área.

6. Seja a superfície, *S*, parametrizada por $\vec{r}(u,v) = u\cos(v)\vec{i} + u\,\mathrm{sen}(v)\vec{j} + u\vec{k}$, tal que $u \in [0,1]$ e $v \in [0,2\pi]$.

a) Esboce a superfície. **b**) Calcule a sua área.

7. Confirme o resultado obtido no exercício da alínea b) do exercício 6., considerando uma parametrização da superfície em coordenadas cartesianas.

8. Seja a superfície, *S*, definida por $2 - 2x^2 - 2y^2 - z = 0$, $z \geq 0$.

a) Esboce a superfície. **b**) Determine a sua área.

9. Seja a superfície, *S*, definida por $z = 5 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 4$.

a) Esboce a superfície. **b**) Obtenha a sua área.

10. Considere a superfície, *S*, definida por $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [-4,-1]$.

a) Esboce a superfície. **b**) Calcule a sua área.

11. Seja a superfície, *S*, definida por $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, tal que $x \geq 0$, $z \geq 0$ e $x + z \leq 1$.

a) Esboce a superfície. **b**) Calcule a sua área.

12. Seja a superfície, *S*, definida por $x^2 + y^2 = (z-4)^2$, tal que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $0 \leq z \leq 2$.

a) Esboce a superfície. **b**) Calcule a sua área.

13. Determine a área da região, *S*, do plano $x + y + z = a$ situada no interior da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = b^2$.

14. Seja o plano $bcx + acy + abz = abc$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Calcule a área da região, *S*, do plano situada no primeiro octante.

15. Determine a área das superfícies, *S*, definidas por:

a) $3z = x^{3/2} + y^{3/2}$, tal que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq x$.

b) $z^2 = 2xy$, tal que $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$ e $z \geq 0$.

c) $z = a^2 - (x^2 + y^2)$, tal que $0 \leq z \leq \dfrac{3}{4}a^2$.

d) $3z^2 = (x + y)^3$, tal que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 2$.

e) $z = y^2$, tal que $x \in [0,1]$ e $y \in [0,1]$.

f) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, tal que $z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

g) $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$, tal que $z \geq \dfrac{1}{b}(x^2 + y^2)$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Soluções: Consultar o manual “Noções sobre Análise Matemática”, Efeitos Gráficos, 2019. ISBN: 978-989-54350-0-5.