Aula 17. 2019-04-10

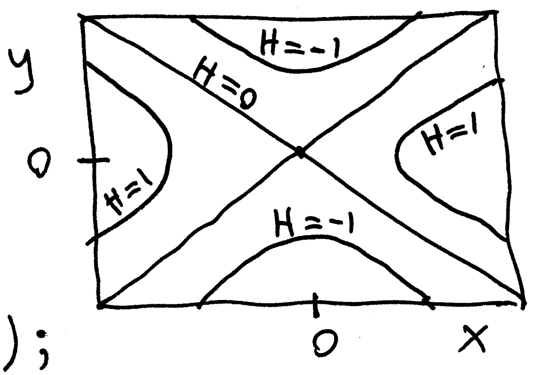
Exemplo 1. $\begin{cases}\dot{x} = -2y\\ \dot{y} = -2x\end{cases}$ $\vec{u} = (-2y, -2x)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial(-2y)}{\partial x} + \frac{\partial(-2x)}{\partial y} = 0$$

$$H = \int -2y\,dy + f(x) = \int 2x\,dx + g(y) \Rightarrow \boxed{H = x^2 - y^2}$$

Há um ponto de equilíbrio em $(x,y) = (0,0)$. As curvas de evolução são as curvas $H = x^2 - y^2 = $ constante

Maxima → ploteq(x^2-y^2);

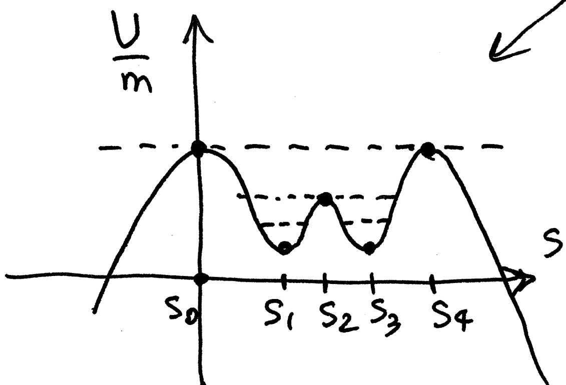


Exemplo 2. Sistema mecânico conservativo, com um grau de liberdade s, e energia potencial $U(s)$

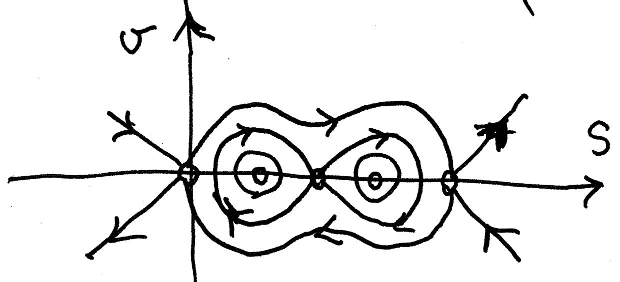
$$a_t = \dot{v} = \frac{F_t}{m} = -\frac{1}{m}\frac{dU}{ds} \quad \Rightarrow \vec{u} = \Big(v, -\frac{1}{m}\underbrace{\frac{dU}{ds}}_{\text{não depende de } v}\Big)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{m}\frac{\partial F_t}{\partial v} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{v^2}{2} + \frac{U}{m} = \frac{E_m}{m} \text{ (constante)}$$

Se o gráfico de $\frac{U}{m}$ for:



Há 5 pontos de equilíbrio $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$. Dois deles s_1 e s_3 (mínimos) estáveis. Nas vizinhanças de s_1 e s_3 há ciclos. Em s_2 há duas órbitas homoclínicas e entre s_0 e s_4 uma órbita heteroclínica.



← Retrato de fase

MECÂNICA LAGRANGIANA

Permite encontrar as equações de movimento a partir da expressão da energia mecânica.

<u>Coordenadas generalizadas</u>: $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (n graus de liberdade)
n funções de t, cada uma associada a um grau de liberdade

<u>Velocidades generalizadas</u>: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$
derivadas das coordenadas generalizadas.
Espaço de fase com 2n dimensoes: $(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$

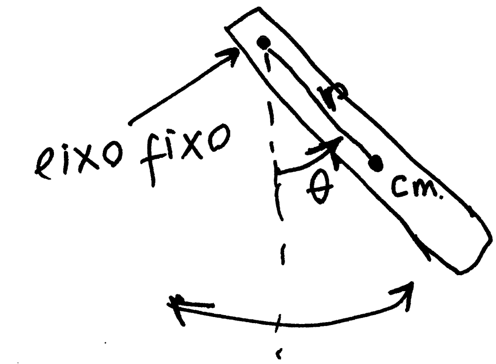
<u>Forças generalizadas</u>: Cada força não conservativa que realize trabalho define n forças generalizadas
$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ $\qquad Q_j = \vec{F} \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$ $\quad \left(\begin{array}{l} \vec{r} = \text{ponto onde é} \\ \text{aplicada } \vec{F} \end{array} \right)$

Se as energias cinética, E_c, e potencial, U forem expressas em função das variáveis de estado $(q_j, \dot{q}_j)$, as n acelerações $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$ podem ser obtidas a partir das n **equações de Lagrange**:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Estas equações são equivalentes as equações $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_{cm}$, $\sum M_c = I_{cm}\alpha$, mas têm a vantagem de serem validas em qualquer referencial (inercial ou não inercial) e não incluem forças que não realizem trabalho.

Exemplo 1.



Pêndulo físico de massa m e momento de inércia, em relação ao centro de massa, igual a I_{cm}.

Este sistema tem um grau de liberdade, θ, e o estado é: $(\theta, \dot{\theta})$

Energia cinética:

$$E_c = \frac{m}{2} v_{cm}^2 + \frac{I_{cm}}{2} \dot{\theta}^2$$

como o centro de massa tem movimento circular com raio r, então $v_{cm} = r\dot{\theta}$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}(m r^2 + I_{cm})\dot{\theta}^2 = \frac{I_{eixo}}{2}\dot{\theta}^2 \quad \text{(pelo teorema dos eixos paralelos)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} m r_g^2 \dot{\theta}^2}$$

r_g = raio de giração em relação ao eixo fixo

Energia potencial (gravítica):

$$\boxed{U = -mgr\cos\theta}$$

Admitindo a resistência do ar desprezável, $Q = 0$.

Há uma equação de Laplace:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m r_g^2 \dot{\theta}) - 0 + mgr\sin\theta =$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{gr}{r_g^2}\sin\theta}$$

Equação de movimento do pêndulo.