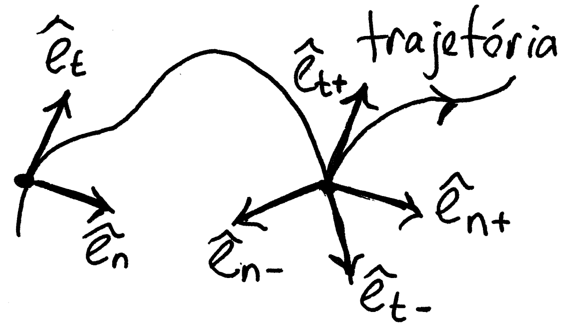
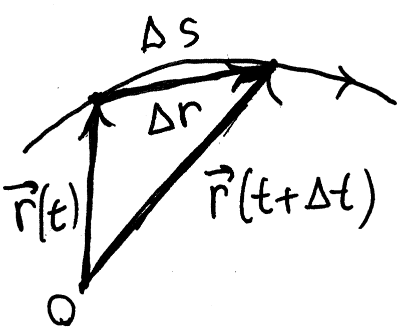
Aula 5. 2019-02-25

COORDENADAS TANGENCIAL E NORMAL

Em cada ponto da trajetória há um versor tangencial, $\hat{e}_t$, tangente à trajetória e no sentido de $s>0$, e um versor normal, $\hat{e}_n$, perpendicular a $\hat{e}_t$ e no sentido em que a trajetória se curva. Onde a trajetória for reta, não existe $\hat{e}_n$; e em alguns pontos existem dos versores $\hat{e}_t$ e dois versores $\hat{e}_n$





Para um movimento dado, $\vec{r}(t)$, os dois versores são funções de t: $\hat{e}_t(t)$ e $\hat{e}_n(t)$ são os versores no ponto na posição $\vec{r}(t)$. Num intervalo $[t, t+\Delta t]$, o deslocamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

tem módulo menor ou igual ao deslocamento na trajetória, Δs ($|\Delta\vec{r}| \leq \Delta s$). Mas no limite $\Delta t \to 0$, $|\Delta\vec{r}|$ aproxima-se de Δs é $\Delta\vec{r}$ é tangente à trajetória. Como tal, a velocidade é:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \hat{e}_t(t) \qquad \boxed{\vec{v}(t) = \dot{s}\,\hat{e}_t}$$

O módulo de $\vec{v}$ é a rapidez, $|v| = |\dot{s}|$, e a direção de $\vec{v}(t)$ é $\hat{e}_t(t)$, no mesmo sentido, se $v>0$, ou no sentido oposto, se $v<0$.

Nos pontos onde $\hat{e}_t$ é descontínua, $\lim\limits_{t \to t_d^-} \hat{e}_t \neq \lim\limits_{t \to t_d^+} \hat{e}_t$, a velocidade $\vec{v}$ é, necessariamente, nula ($\vec{v}$ deve ser contínua):

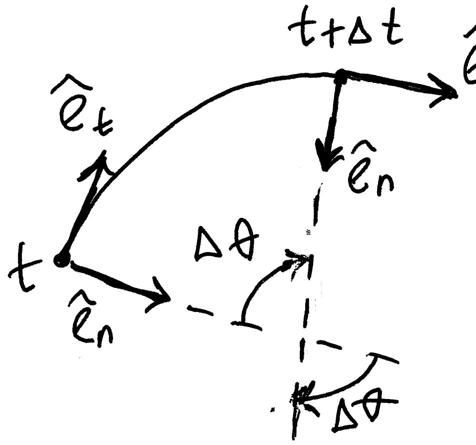
$$\vec{v}(t_d) = \underbrace{v(t_d^-)}_{0}\hat{e}_{t-} = \underbrace{v(t_d^+)}_{0}\hat{e}_{t+} = \vec{0}$$

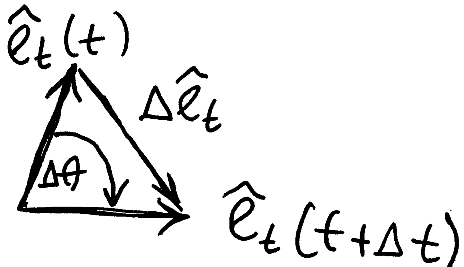
Derivada de $\hat{e}_t(t)$

$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = 1$ (módulo ao quadrado)

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t) = \frac{d\hat{e}_t}{dt} \cdot \hat{e}_t + \hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 2\,\hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0$$

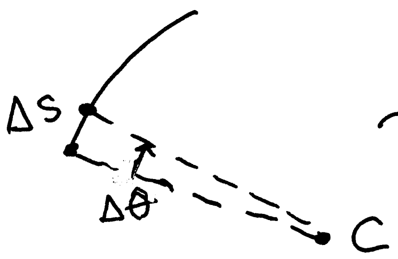
Isso implica que a derivada, $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$, é perpendicular a $\hat{e}_t$.

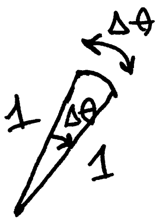




$|\Delta\hat{e}_t|$ é a base dum triângulo com dois lados iguais a 1, que fazem um ângulo $\Delta\theta$ (ângulo que $\hat{e}_n$ roda)

No limite $\Delta t \to 0$:





$|\Delta\hat{e}_t|$ aproxima-se do arco com raio 1 e ângulo $\Delta\theta$: $\quad |\Delta\hat{e}_t| \to |\Delta\theta|$

E o ângulo que $\hat{e}_n$ roda, $\Delta\theta$, é o ângulo de um arco com centro num ponto C (centro de curvatura), raio R (raio da trajetória em t) e arco de comprimento Δs (deslocamento na trajetória). A direção de $\hat{e}_t$ aproxima-se da direção (e sentido, se $\Delta\theta > 0$) de $\hat{e}_n$. Como tal:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{e}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta s}{R}\right)}{\Delta t}\hat{e}_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{\dot{s}}{R}\hat{e}_n = \frac{v}{R}\hat{e}_n}$$

R = raio de curvatura da trajetória, na posição $\vec{r}(t)$

COMPONENTES TANGENCIAL E NORMAL DE $\vec{a}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{e}_t) = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt} = a_t\hat{e}_t + v\left(\frac{v}{R}\right)\hat{e}_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}(t) = a_t\hat{e}_t + \frac{v^2}{R}\hat{e}_n}$$

$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$ = componente tangencial

$a_n = \frac{v^2}{R}$ = componente normal

como as duas componentes são em direções perpendiculares: $\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Exemplo 3.1. O movimento de um ponto é definido por: $\vec{r} = 5t\,\hat{\imath} + \frac{3}{2}t^2\hat{\jmath} + 2(1-t^2)\hat{k}$ (SI. t=tempo)

Determine: (a) O valor da velocidade, $v(t)$ em função do tempo; (b) o raio de curvatura da trajetória, em função de t; (c) o deslocamento ao longo da trajetória, entre $t=0$ e $t=1$.

(a) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 5\hat{\imath} + 3t\hat{\jmath} - 4t\hat{k}$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = 25 + 9t^2 + 16t^2 = 25(1+t^2)$$

Arbitrando $s>0$ no sentido do movimento ($v>0$):

$$\boxed{v = +5\sqrt{1+t^2}}$$

(b) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 3\hat{\jmath} - 4\hat{k} \implies |\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = 9 + 16 = 25$

(aceleração constante)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5\sqrt{1+t^2}\right) = \frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$a_n^2 = |\vec{a}|^2 - a_t^2 = 25 - \frac{25t^2}{1+t^2} = \frac{25}{1+t^2}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25(1+t^2)}{\left(\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}\right)} = 5(1+t^2)^{3/2}$$ (R>0. Não pode nunca ser negativo)

(Outra forma de obter R (t):

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{3t}{5\sqrt{1+t^2}}\hat{\jmath} - \frac{4t}{5\sqrt{1+t^2}}\hat{k}$$

$$a_t = \vec{a}\cdot\hat{e}_t = \frac{9t}{5\sqrt{1+t^2}} + \frac{16t}{5\sqrt{1+t^2}} = \frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}$$

e calcula-se a_n e R igual que foi feito acima.)

(c) $v = \frac{ds}{dt} \implies 5\sqrt{1+t^2} = \frac{ds}{dt}$ (EDO de var. separav.)

$$\int_{s_0}^{s_0+\Delta s_{01}} ds = 5\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$\implies \Delta s_{01} = \frac{5}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) \approx 5.739 \text{ m}$$

(integral calculado no Maxima)