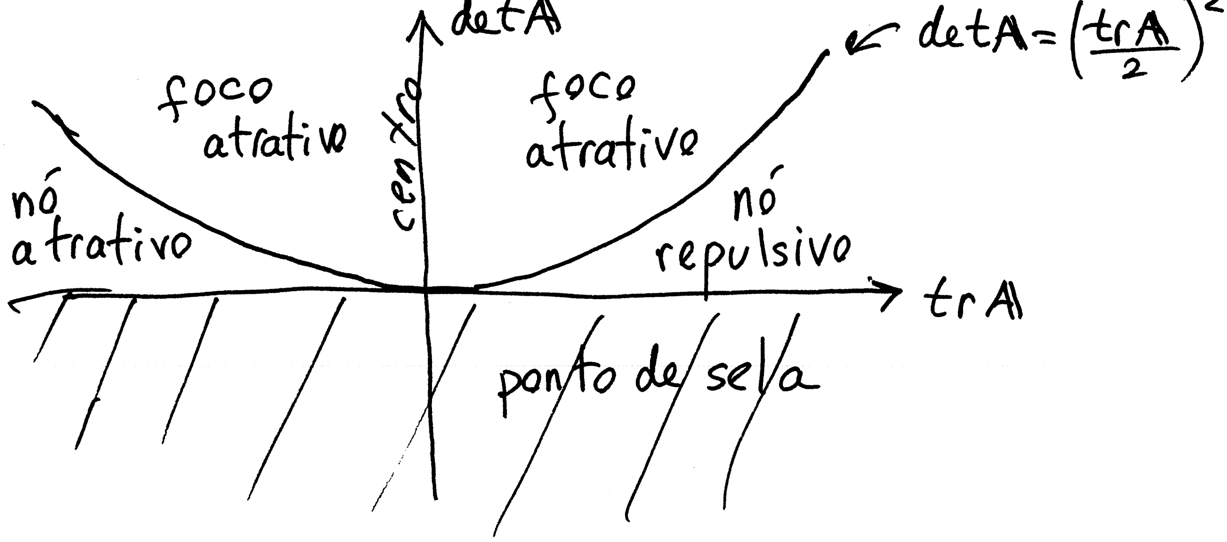
Aula 20. 2019-05-13

Tipos de equilíbrio nos sistemas lineares



Nos pontos da parábola $\det A = \left(\frac{\mathrm{tr} A}{2}\right)^2$, a matriz tem um único valor próprio, real. Existe apenas uma reta com duas curvas de evolução que se aproximam, ou afastam da origem. → NÓ IMPRÓPRIO

SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

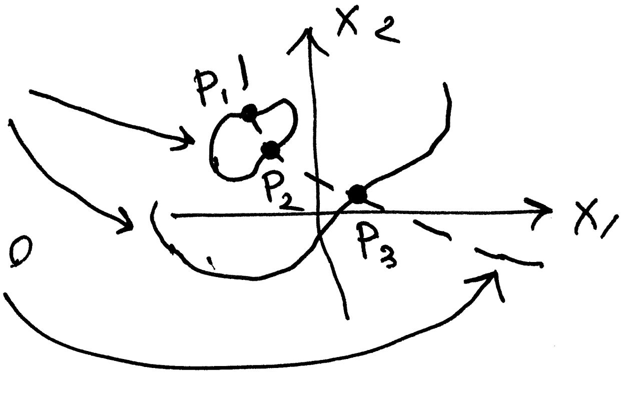
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

f_1 e f_2 são funções contínuas de x_1 e x_2 e não são simples combinações lineares de x_1 e x_2

Podem existir vários pontos de equilíbrio.

<ins>Nulclinas de x_1</ins>: $f_1(x_1, x_2) = 0$

curvas onde $\dot{x}_1 = 0$



<ins>Nulclinas de x_2</ins>: $f_2(x_1, x_2) = 0$

curvas onde $\dot{x}_2 = 0$

Os pontos de equilíbrio são a interseção entre as curvas de nivel $f_1(x_1, x_2) = 0$ e $f_2(x_1, x_2) = 0$

APROXIMAÇÃO LINEAR

Série de Taylor de f_1, na vizinhança dum ponto (a,b):

$$f_1(x_1,x_2) = f_1(a,b) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(a,b)}(x_1-a) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(a,b)}(x_2-b) + \left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\right|_{(a,b)}(x_1-a)^2 + \ldots$$

e de forma análoga para f_2. Se (a,b) for ponto de equilíbrio, $f_1(a,b) = f_2(a,b) = 0$, e mantendo unicamente os termos que dependem de (x_1-a) e (x_2-b):

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) \approx \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(a,b)}(x_1-a) + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(a,b)}(x_2-b) \\[2ex] f_2(x_1,x_2) \approx \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(a,b)}(x_1-a) + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(a,b)}(x_2-b) \end{cases}$$

Matriz jacobiana do sistema

$$\mathbb{J}(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

A aproximação das funções f_1 e f_2 conduz a um sistema linear:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbb{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x = x_1 - a \\ y = x_2 - b \end{matrix} \qquad \mathbb{A} = \mathbb{J}(a,b)$$

Em cada ponto de equilíbrio existe uma matriz $\mathbb{A}$, correspondente à aproximação linear nessa região. Se a matriz $\mathbb{A}$ estiver na parábola ou no semieixo positivo das ordenadas, no gráfico $\det \mathbb{A}$ vs. $\operatorname{tr} \mathbb{A}$ (nós impróprios e centros), os termos não lineares podem fazer com que o ponto de equil. seja foco ou nó.

Exemplo:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_2(x_2^2+x_1^2-1)^2 - 3x_1^2x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_2^3 - 6x_1(x_2^2+x_1^2-1)^2 \end{cases}$$

Resolução no Maxima: demo("~/.maxima/aula20");

```
"Definição das duas funções"$
f1: 6*x2*(x2^2+x1^2-1)^2 - 3*x1^2*x2^2;
f2: 2*x1*x2^3 - 6*x1*(x2^2+x1^2-1)^2;

"Determinação dos pontos de equilíbrio"$
p: solve([f1,f2]);

"Há 13 pontos mas apenas 9 estão no plano real."$

"Para extrair os primeiros 7 elementos e os últimos 2, da lista de 13,
usa-se o comando:"$
p: append(rest(p,-6), rest(p,11));

"4 dos pontos estão nos eixos."$

"Cálculo da matriz jacobiana"$
J: jacobian([f1,f2],[x1,x2]);

"Cálculo das 9 matrizes das aproximações lineares"$
A: makelist(subst(q,J), q, p);

"Traços das 9 matrices"$
map(mat_trace, A);

"Todas têm traço nulo. De facto, o sistema é conservativo: a matriz
jacobiana têm traço nulo e, como tal, os pontos de equilíbrio
poderão ser ou centros ou pontos de sela."$

"Cálculo dos determinantes das 9 matrizes"$
map(determinant, A);

"O primeiro, oitavo e nono pontos são centros.
O sexto e sétimo são pontos de sela.
Nos 4 pontos nos eixos não há aproximação linear: esses pontos
não são dos tipos encontrados nos sistemas lineares."$

"Retrato de fase:"$
plotdf([f1,f2],[x1,x2],[x1,-2,2],[x2,-2,2]);
```

← ficheiro aula20.dem

Os 4 pontos de equilíbrio nos eixos, (0,1), (0,−1), (1,0) e (−1,0), onde não há aproximação linear, estão ligados por 4 curvas, formando uma órbita heteroclínica.

Pode ser traçada, de forma aproximada, usando
nsteps=70 e trajectory_at = 0.005 -1.005
nsteps=110 e trajectory_at = 0.005 1.005
(menu config.)

Há 5 tipos de ciclos: 3 à volta de cada um dos 3 centros, um à volta dos 3 centros, dentro da órbita heteroclínica e outro à volta dos 3 centros, fora da órbita. Podem ser visualizados usando nsteps=300, e trajectory_at nos seguintes 5 pontos

0 08; 0 0.5; 0.9 1; -0.9 1; 0 1.4

Existem duas órbitas homoclínicas, uma em cada ponto de sela (nsteps=300, trajectory_at: 0.5773 0.6502
-0.5773 0.6502)

E há uma segunda órbita heteroclínica, com 2 curvas a ligar os dois pontos de sela.
(nsteps=300, trajectory_at: 0.5179 0.625)