Aula 24. 2019-05-27

# SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

As variáveis de estado $x_i$ são sequências, em vez de funções contínuas:

$$x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \qquad x_n = \text{valor da variável no período } n.$$

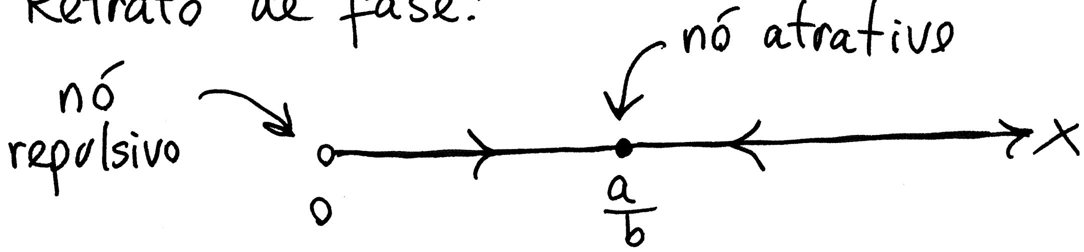
As equações de evolução são relações de recorrência, em vez de equações diferenciais.

## Exemplo: Modelo logístico.

No caso contínuo:

$$\dot{x} = x(a - b\,x) \qquad (a>0,\ b>0,\ x \geq 0)$$

Retrato de fase:




No caso discreto, o aumento da população entre o período $n$ e o período $n+1$ é:

$$x_{n+1} - x_n = x_n(a - b\,x_n)$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = c\,x_n - b\,x_n^2 \qquad (c = a+1 > 1)$$

Ponde escrever-se em funcão dum único parâmetro:

$$x_n = \frac{c}{b}\,y_n \Rightarrow \quad \frac{c}{b}\,y_{n+1} = \frac{c^2}{b}\,y_n - \frac{c^2}{b}\,y_n^2$$

$$\boxed{y_{n+1} = c\,y_n(1 - y_n)} \qquad (c > 1) \quad (0 \leq y \leq 1)$$

**Pontos de equilíbrio:** quando $y_{n+1} = y_n$

$$\Rightarrow y_n\left((c-1)y_n - c\right) = 0 \qquad \begin{cases} y_n = 0 \\ y_n = \frac{c-1}{c} \end{cases}$$

Dado um valor inicial, a sequência $\{y_0, y_1, \dots\}$ encontra-se iterando a equação de recorrência:

$$\{y_0,\ y_1 = c y_0(1-y_0),\ y_2 = c y_1(1-y_1),\ \dots\}$$

No Maxima, podemos definir uma função que crie a sequência:

$y_0$

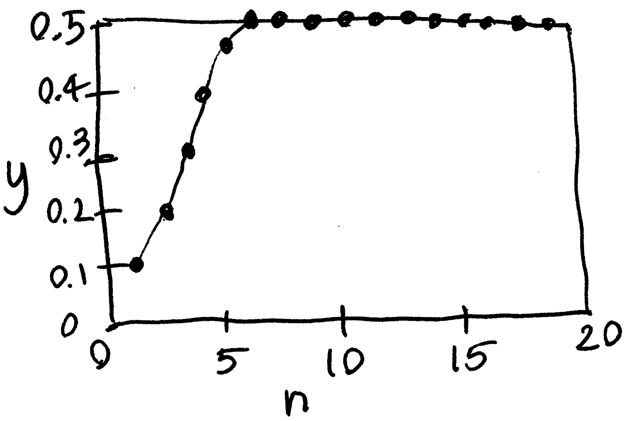
```
f(c,n):=block([y:[0.1]],for i:2 thru n do
                          y: endcons(c*last(y)*(1-last(y)),y),
                y);
```

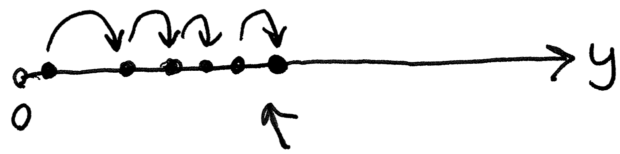
mostra a sequência y

Resultado para diferentes valores do parâmetro c:

1. $c = 2$. plot2d([discrete, f(2,20), [style, linespoints]]);

[xlabel, "n"]




$\frac{c}{c-1} = 0.5$
nó atrativo

2. $c = 3.2$. f(3.2, 60) mostra que após alguns períodos, a sequência oscila entre dois valores:

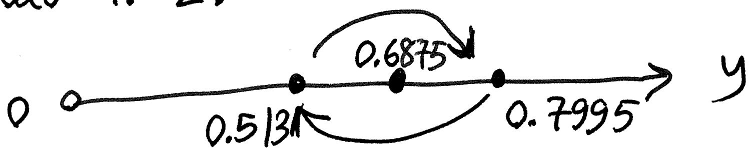
   0.513 e 0.7995

O ponto de equilíbrio, $\frac{c-1}{c} = 0.6875$ está entre os dois.

O ponto de equilíbrio é agora FOCO REPULSIVO e apareceu um ciclo limite atrativo:

$$\{0.513, 0.7995, 0.513, 0.7995, \ldots\}$$

com período $n=2$.




No caso contínuo, não podiam existir ciclos, porque o estado X não pode passar de um lado para o outro do ponto de equilíbrio. No caso discreto o estado sim pode passar dum ponto para outro, sem ter de passar pelos pontos intermédios.

Os valores do ciclo limite podem encontrar-se a partir da condição: $y_{n+2} = y_n \Rightarrow c\,y_{n+1}(1-y_{n+1}) = y_n$

$$\Rightarrow c\left(c\,y_n(1-y_n)\right)\left(1-c\,y_n(1-y_n)\right) = y_n \quad \text{(equação cúbica)}$$

$$y_n = \frac{c+1 \pm \sqrt{c^2-2c-3}}{2c} \qquad \left(\text{ou } y_n = \frac{c-1}{c} \text{ que é o ponto de equilíbrio}\right)$$

$$\Rightarrow y_n = 0.513 \quad \text{ou} \quad y_n = 0.7995$$

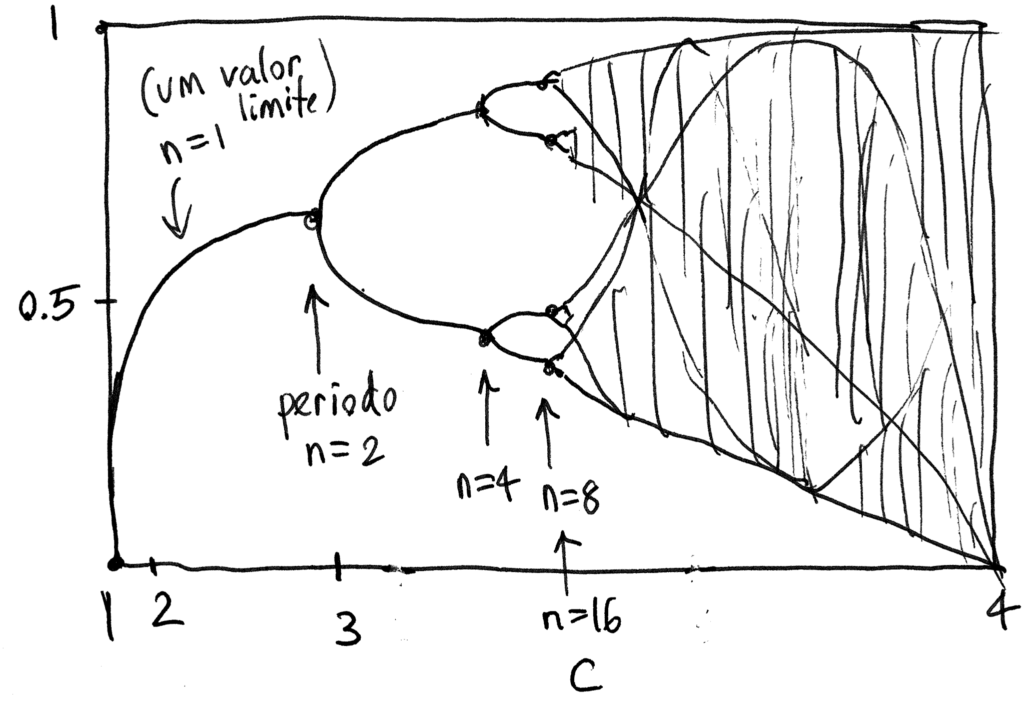
③ $c=3.5$. f(3.5, 60) mostra um ciclo limite atrativo com período $n=4$:

$$\{0.5009, 0.875, 0.3828, 0.8269, 0.5009, \ldots\}$$

dois valores maiores do que o ponto de equilíbrio (0.7143) e os outros dois menores.

# DIAGRAMA DE BIFURCAÇÕES

Gráfico com valores de c no eixo das abcissas, e os valores limite da sequência $\{y_n\}$ no eixo das ordenadas:




Nos valores de c em que o período do ciclo limite duplica, diz-se que há uma bifurcação.
A primeira bifurcação é em c=3, e as seguintes cada vez mais próximas:

| i | n | c | $(c_{i-1}-c_{i-2})/(c_i-c_{i-1})$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | — |
| 2 | 4 | 3.44949 | — |
| 3 | 8 | 3.54409 | 4.7514 |
| 4 | 16 | 3.56440 | 4.6562 |

a distância entre duas bifurcações é aproximadamente 4.67 vezes menor do que entre as duas anteriores

Como tal, o período torna-se infinito para alguns valores de c.

Um ciclo de período $\infty$ é uma sequência que nunca se repete → SOLUÇÃO CAÓTICA.

Um sistema caótico é muito sensível ao valor inicial dado. Por exemplo, modifiquemos a função f que produz a sequência logística, indicando um valor inicial:

```
f(c,y1,n):= block([y:[y1]], for i:2 thru n do
                        y:endcons(c*last(y)*(1-last(y)),y),
                  y);
```

Em $c=4$, que é um sistema caótico, o valor de $y_{60}$, com $y_1=0.1$ será:

```
last(f(4,0.1,60)); → 0.3214
```

Mas se o valor inicial fosse 0.101,

```
last(f(4,0.101,60)); → 0.574
```

e com outros valores iniciais próximos de 0.1,

```
last(f(4,0.1001,60); → 0.9642
last(f(4,0.10001,60); → 0.01407
```

O sistema é determinístico (a sequência está definida de forma exata); mas como nunca teremos o valor inicial exato (erro de medição), ficaremos com uma grande incerteza no valor de $y_{60}$.