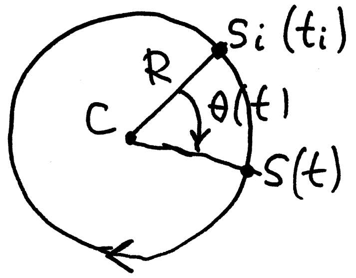
Aula 6. 2019-02-27

MOVIMENTO CIRCULAR



Trajetória plana, com centro de curvatura num ponto C, fixo, e com raio R constante. $s(t) = s_i + R\,\theta(t)$ (θ em radianos)

$\omega = \dot{\theta}$ = velocidade angular

$\alpha = \dot{\omega}$ = aceleração angular

$$\boxed{\omega = \dot{\theta} \qquad \alpha = \dot{\omega} \qquad \alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}}$$

Resolvem-se tal como as equações do Capítulo 1.

Relação entre variáveis angulares e circulares:

$$v = R\omega \qquad a_t = R\alpha \qquad a_n = R\omega^2$$

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

$$\alpha = 0\,, \qquad \omega = \omega_i = \text{constante}, \qquad \theta = \theta_i + \omega(t - t_i)$$

Período. tempo que demora uma volta ($\Delta\theta = 2\pi$)

$$\Delta\theta = \omega T = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega}$$

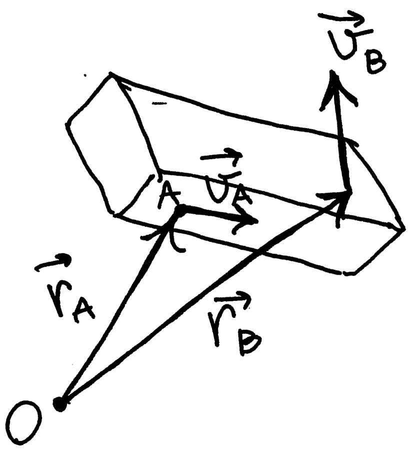
Frequência. Número de voltas por unidade de tempo.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \implies \omega = 2\pi f$$

f tem unidades de inverso do tempo. No sistema SI, $1\,\text{H} = 1\,\text{s}^{-1}$ (hertz)

$$\text{rpm} = \text{min}^{-1} = \frac{1}{60}\,\text{Hz} \quad \text{(rotações por minuto)}$$

ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS



Posição relativa a um ponto (A) do corpo:

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

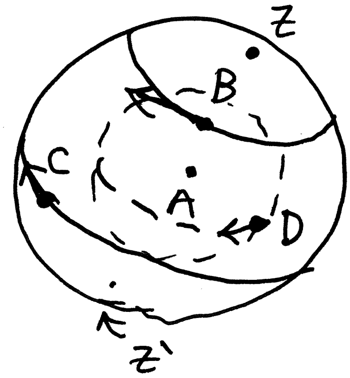
$\vec{r}_{B/A}$ pode mudar de direção, mas o seu módulo permanece constante

$$|\vec{r}_{B/A}|^2 = \vec{r}_{B/A} \cdot \vec{r}_{B/A} = \overline{AB}^2 = \text{constante}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{r}_{B/A} \cdot \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \vec{v}_{B/A} \cdot \vec{r}_{B/A} = 0$$

A velocidade relativa entre dois pontos no corpo é sempre perpendicular à posição relativa entre eles.

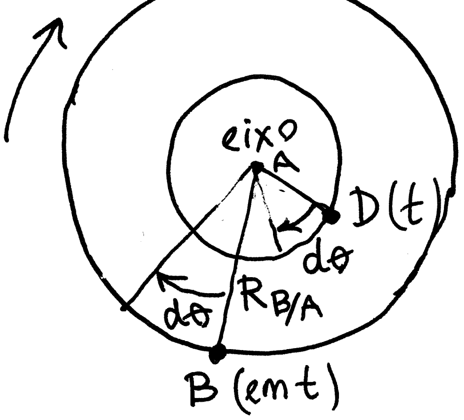
Como tal, o movimento de B, e de qualquer outro ponto, relativo a A, é numa esfera de raio $\overline{AB}$. Como as distâncias entre todos os pontos do corpo devem ser constantes, $\vec{v}_{B/A}$, $\vec{v}_{C/A}$, ... serão tangentes a arcos de circunferências paralelas entre sim. Deverão existir então dois pontos, z e z', que estão em repouso, em relação a A ($\vec{v}_z = \vec{v}_{z'} = \vec{v}_A$)



Eixo de rotação: linha reta que passa por A e por todos os pontos com a mesma velocidade de A.

Plano de rotação: Plano perpendicular ao eixo de rotação

Projeção dos movimentos, relativos, no plano de rotação:



No intervalo $[t, t+dt]$, todos os pontos rodam o mesmo ângulo $d\theta$.

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ = velocidade angular do corpo, no instante t

(a cada instante, $\omega(t)$ pode ser diferente e a direção do eixo também)

$\alpha = \dot{\omega}$ = acel. angular

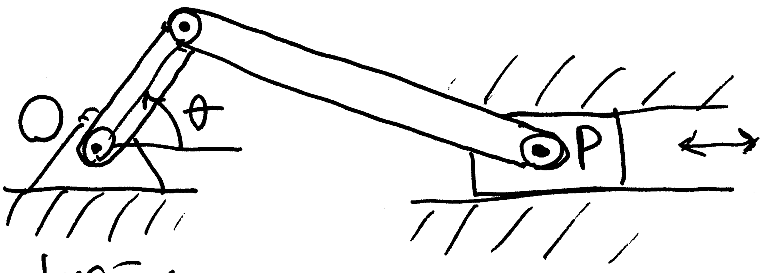
$$\boxed{v_{B/A} = R_{B/A}\,\omega}$$

$R_{B/A}$ = projeção da distância $\overline{AB}$, no plano de rotação

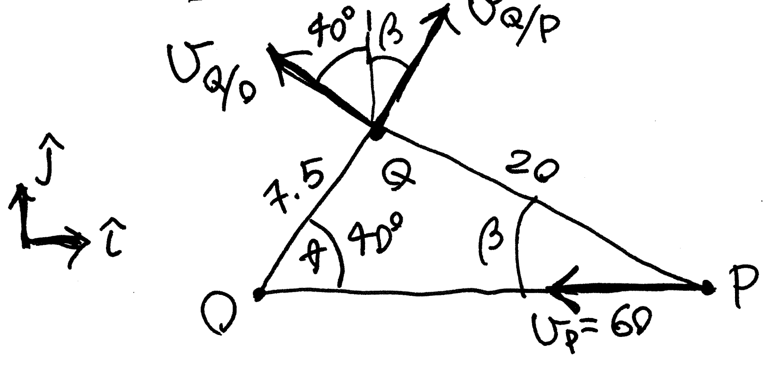
Exemplo 3.2. Sistema biela-manivela. Determine ω da biela e da manivela, no instante em que o pistão desloca-se para a esquerda, com velocidade $v_P = 60\ \frac{cm}{s}$ e $\theta = 40°$.

$\overline{OQ} = 7.5$ cm

$\overline{PQ} = 20$ cm



Resolução:



$\vec{v}_{Q/O} \perp \overline{OQ}$

$\vec{v}_{Q/P} \perp \overline{PQ}$

(distâncias em cm, tempo em s)

$$\sin\beta = \frac{7.5 \sin 40°}{20} = 0.2410$$

$$\Rightarrow \beta = 13.95°$$

$$\vec{v}_{Q/O} = \vec{v}_Q - \vec{v}_O = \vec{v}_Q \quad \Rightarrow \quad v_Q = 7.5\,\omega_m$$

$$v_{Q/P} = 20\,\omega_m$$

$$\vec{v}_Q = 7.5\,\omega_m(-\sin 40^\circ\,\hat{\imath} + \cos 40^\circ\,\hat{\jmath}) = \omega_m(-4.82\,\hat{\imath} + 5.75\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_{Q/P} + \vec{v}_P = 20\omega_b(\sin\beta\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath}) - 60\,\hat{\imath}$$

$$= (4.82\,\omega_b - 60)\,\hat{\imath} + 19.4\,\omega_b\,\hat{\jmath}$$

(corrigir equação 3.25 no livro)

$$\Rightarrow \begin{cases} -4.82\,\omega_m = 4.82\,\omega_b - 60 \\ 5.75\,\omega_m = 19.4\,\omega_b \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_b = 2.843 \text{ Hz} \\ \omega_m = 9.603 \text{ Hz} \end{array}$$

Observe-se que a direção do eixo de rotação e a velocidade angular de um corpo rígido são independentes do ponto escolhido como referência.

No exemplo da manivela e a biela, a velocidade angular, ω_m, da manivela, é a derivada do ângulo θ ($\omega_m = \dot{\theta}$) e a velocidade angular da biela é a derivada de β: $\omega_b = \dot{\beta}$

Os resultados positivos, indicam que θ e β estão a aumentar, nesse instante.

Nos dois casos, o eixo de rotação é perpendicular à figura.