Aula 21. 2019-05-15

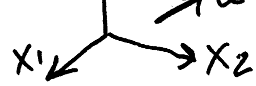
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO AUTÓNOMOS

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

Considerando t como mais uma variável de estado, e acrescentando a equação $\dot{t} = 1$ $\left(\frac{dt}{dt} = 1\right)$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

sistema autónomo com espaço de fase (x_1, x_2, t)



como t passa a ser variável de estado, para determinar a curva de evolução é necessário saber o valor de t_0 (para além de x_0 e v_0).

ESPAÇO DE FASE COM 3 OU MAIS VARIÁVEIS

O programa rk (método de Runge-Kutta) produz uma lista de pontos que aproximam a curva de evolução a partir dum ponto inicial no espaço de fase, num intervalo de valores de t.

<u>Exemplo</u>. $\dot{x} = f_x$, $\dot{y} = f_y$, $\dot{z} = f_z$

f_x, f_y e f_z são expressões que podem depender de x, y, z e t. <u>Estado inicial</u>: (x_1, y_1, z_1)

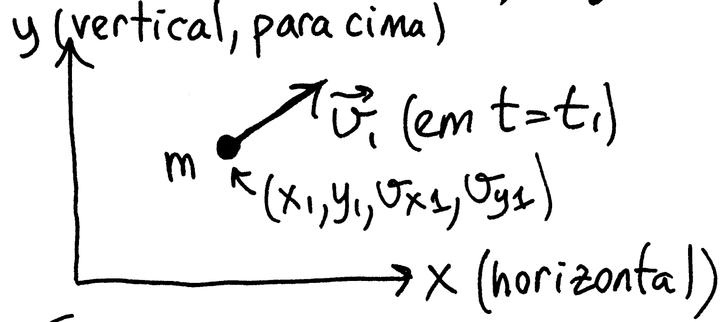
<u>Variável independente</u> $\rightarrow t$, desde t_1 até t_n, com incrementos $\Delta t = \frac{t_n - t_1}{n-1}$

$$\text{rk}([fx, fy, fz], [x, y, z], \underbrace{[x1, y1, z1]}_{\text{números}}, [t, \underbrace{t1, tn, \Delta t}_{\text{números}}])$$

produz a lista:

$$[[t1, x1, y1, z1], [t2, x2, y2, z2], \ldots, [tn, xn, yn, zn]]$$

Lançamento de projéteis

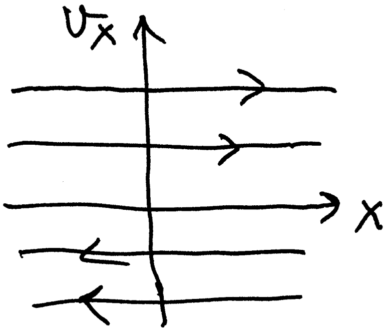


Equações de movimento (ignorando a resistência do ar):

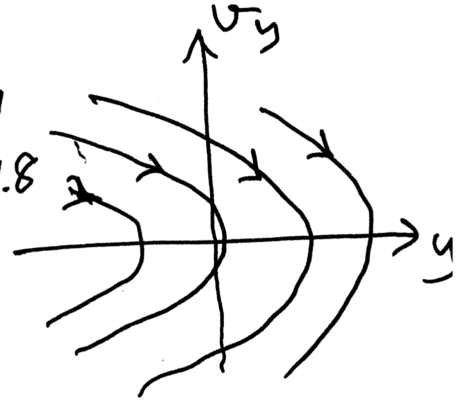
$$\dot{v}_x = 0 \,, \quad \dot{v}_y = -g$$

É um sistema com 4 variáveis de estado (x, y, v_x, v_y), mas separa-se em dois sistemas independentes, cada um com 2 variáveis

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_y = -9.8 \end{cases}$$



<u>Com resistência do ar</u>: para uma esfera de raio R,

$$\vec{F}_r = -\frac{\pi}{4}\rho R^2 |\vec{v}|\,\vec{v} = -\frac{\pi \rho R^2}{4}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\left(v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath}\right)$$

ρ = massa volúmica do ar $\approx 1.2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Equações de movimento (SI)

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -\dfrac{1.2\pi}{4}\left(\dfrac{R^2}{m}\right)\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\; v_x \\[2ex] \dot{v}_y = -9.8 - \dfrac{1.2\pi}{4}\left(\dfrac{R^2}{m}\right)\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\; v_y \end{cases}$$

(sistema autónomo. Valor de t_0 arbitrário)

Solução numérica, para $R = 3.25$ cm e $m = 62$ g (bola de tenis), com velocidade inicial de $12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, inclinada 45° sobre a horizontal.

```
k: float(1.2*%pi*0.0325^2/4/0.062);
v: sqrt(vx^2+vy^2);
c1: rk([vx, vy, -k*v*vx, -9.8*v*vy],
        [x, y, vx, vy],
        [0, 0, 12*cos(%pi/4), 12*sin(%pi/4)],
        [t, 0, 2, 0.01])$
```

origem na posição inicial → [0,0,12*cos(%pi/4),12*sin(%pi/4)]

$ ← importante não usar ;

```
last(c1);  →  [2.0, 14.7, -3.2, 6.3, -10.6]
```

y em t=2, negativo

Descobrir em que instante a bola regressou a y=0:

```
first(sublist_indices(c1, lambda([p], p[3]<0)));
```

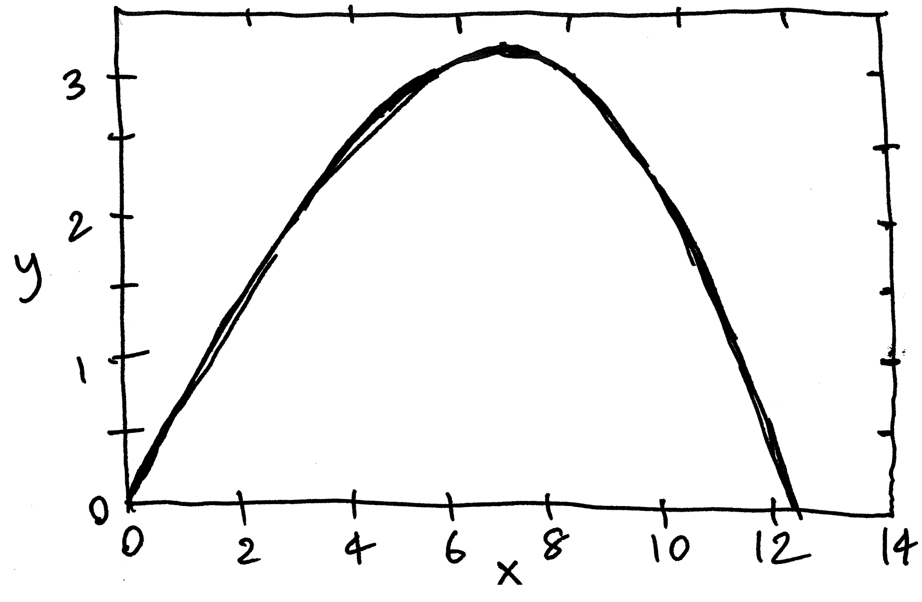
↳ 167 (ou seja, y<0 a partir do elemento 167 da lista c1)

Gráfico da trajetória, em y≥0:

```
g1: makelist([c1[i][2], c1[i][3]], i, 1, 166)$
```

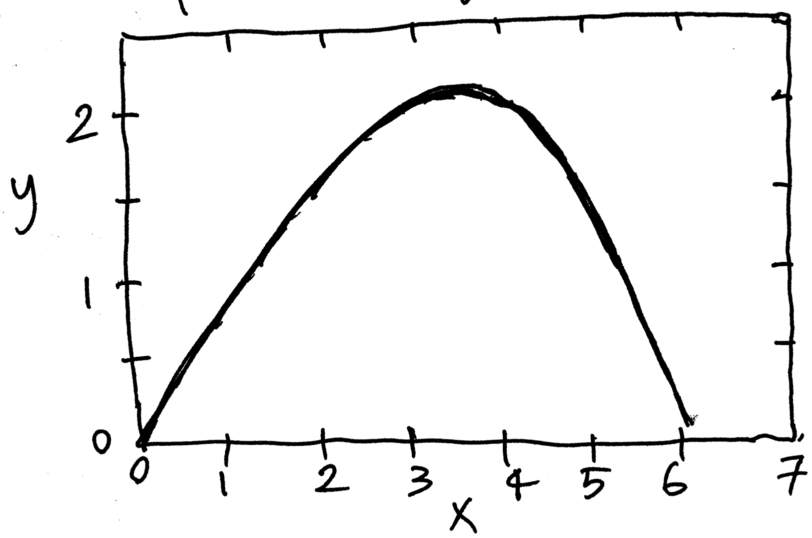
$\underbrace{c1[i][2]}_{x_i}$, $\underbrace{c1[i][3]}_{y_i}$

```
plot2d([discrete, g1]);
```



Se a bola for de ping-pong, $R \approx 1.9$ cm, $m \approx 2.4$ g

```
k: float(1.2*%pi*0.019^2/4/0.0024);
c2: rk([vx,vy,-k*v*vx,-9.8-k*v*vy],
      [x,y,vx,vy],[0,0,12*cos(%pi/4),12*sin(%pi/4)],
      [t,0,2,0.01])$
last(c2); → [2 , 7.6, -4.6, 1.4, -7.55]
first(sublist_indices(c2, lambda([p], p[3]<0))); → 133
g2: makelist([c2[i][2], c2[i][3], i, 1, 132)$
plot2d([discrete, g2])$
```



Resolução de equações diferenciais.

Exemplo: $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \frac{1}{9}) y = 0$, (com $y=0$, $y'=1$, em $x=0$)

sistema dinâmico com 3 variáveis:

$y' = u$, $u' = \left(\frac{1}{9x^2} - 1\right) y - \frac{u}{x}$, $x' = 1$

solução numérica:

```
rk([u, y*(1/9/x^2-1)-u/x], [y, u], [0,1], [x,0,30,0.01])
```