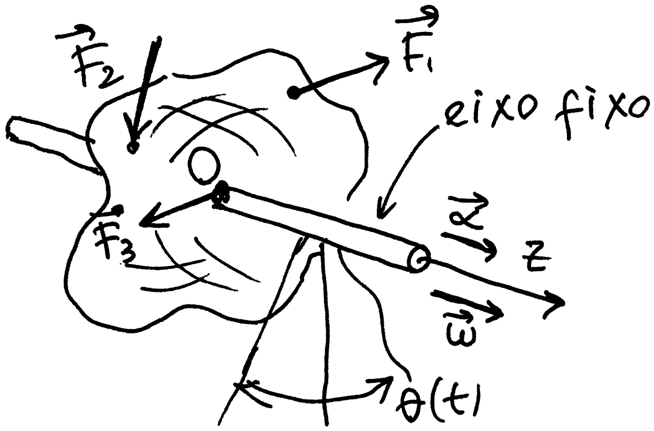
Aula 12. 2019-03-25



Este sistema tem um único grau de liberdade, $\theta(t)$. Em função da velocidade angular, $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$ e a aceleração angular, $\vec{\alpha} = \ddot{\theta}\hat{k}$, a velocidade e aceleração de um ponto na posição $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ são:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \omega(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath})$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \underbrace{\alpha(-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath})}_{a_t\text{, na direção de }\vec{v}} \underbrace{-\,\omega^2(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath})}_{a_n\text{, perpendicular ao eixo de rotac.}}$$

Como tal, a força resultante na massa dm nesse ponto é:

$$d\vec{F} = \left((-\alpha y - \omega^2 x)\hat{\imath} + (\alpha x - \omega^2 y)\hat{\jmath}\right) dm$$

e o momento $d\vec{M}$, em relação à origem é:

$$d\vec{M} = \vec{r}\times d\vec{F} = dm\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ -\alpha y - \omega^2 x & \alpha x - \omega^2 y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\omega^2 y z - \alpha x z)\hat{\imath} \\ -(\omega^2 x z + \alpha y z)\hat{\jmath} \\ +\alpha(x^2+y^2)\hat{k} \end{pmatrix} dm$$

O momento resultante, $\iiint d\vec{M}$, deverá ter unicamente componente $\hat{k}$, porque o corpo só pode rodar em torno do eixo dos z. As forças de contacto, no eixo, produzem binários em $\hat{\imath}$ e em $\hat{\jmath}$, mas não podem produzir binários em $\hat{k}$. Conclui-se que

$$\iiint d\vec{M} = \left(\iiint \alpha R^2\, dm\right)\hat{k} \quad \left(\begin{array}{l} R^2 = x^2+y^2 = \text{distância} \\ \text{até o eixo, ao quadrado} \end{array}\right)$$

Nesse integral, as forças internas anulam-se, ficando unicamente a soma dos momentos das forças externas:

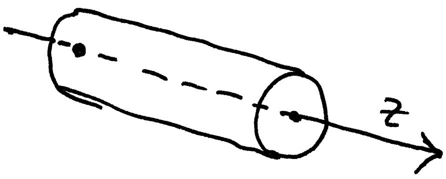
$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i\right| = I_z \alpha}$$

(excluindo as forças de contacto, no eixo.)

onde I_z é o **momento de inércia**, em relação ao eixo dos x:

$$I_z = \iiint R^2\, dm = \iiint (x^2+y^2)\, dm$$

Exemplo: determine o momento de inércia de um cilindro homogéneo (massa volúmica ρ constante), de raio R, altura L e massa m, em torno ao seu eixo.



coordenadas cilíndricas: (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta \ , \quad y = r\sin\theta$$

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow dm = \rho\, dx\, dy\, dz = \left(\frac{m}{\pi R^2 L}\right) r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$I_z = \iiint r^2\, dm = \left(\frac{m}{\pi R^2 L}\right) \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \frac{m R^4 \pi L}{2\pi R^2 L}$$

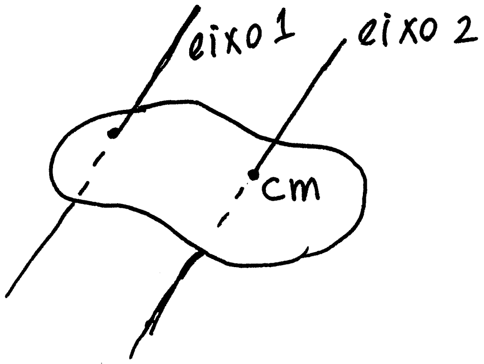
$$\Rightarrow \boxed{I_z = \frac{1}{2} m R^2}$$

As unidades de I_z são massa vezes distância ao quadrado. Define-se o **raio de giração**:

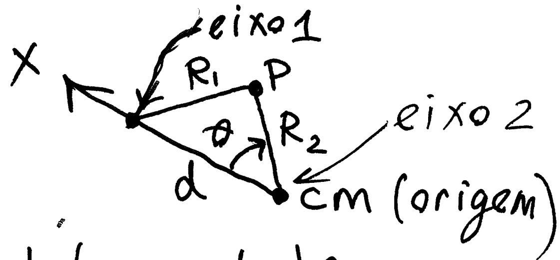
$$r_g = \sqrt{\frac{I_z}{m}}$$

O raio de giração de um cilindro homogéneo de raio R, em torno ao seu eixo é então $r_g = \frac{R}{\sqrt{2}}$

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS



O momento de inércia em torno do eixo 1, afastado do centro de massa, pode ser calculado a partir do momento de inércia em torno do eixo 2, paralelo ao eixo 1, mas passando pelo centro de massa.



Escolhe-se o eixo dos x perpendicular aos eixos, com origem no centro de massa e passando pelo eixo 1. Como tal, as distâncias R_1 e R_2, desde um ponto qualquer P até os eixos, estão relacionadas pela lei dos cossenos:

$$R_1^2 = R_2^2 + d^2 - 2dR_2\cos\theta$$
$$= R_2^2 + d^2 - 2dx$$

d = distância entre os eixos

θ = ângulo com o eixo dos x.

x = coordenada x de P.

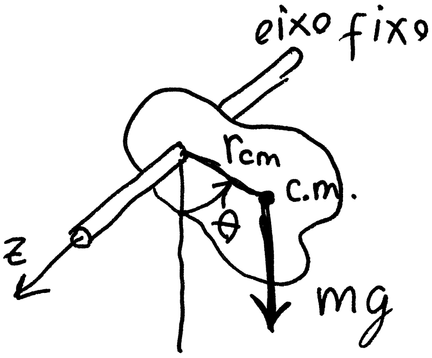
$$\Rightarrow I_{z_1} = \iiint R_1^2\,dm = \iiint R_2^2\,dm + d^2\iiint dm - 2d\iiint x\,dm$$

O primeiro integral é o momento em torno do eixo que passa pelo c.m, I_{zcm}. O segundo integral é a massa total, m. O terceiro integral é m vezes a componente x da posição do c.m., que é zero, porque o c.m. está na origem. Conclui-se que o momento de inércia, I_z, em torno de um eixo afastado da origem é:

$$\boxed{I_z = I_{z\,cm} + md^2}$$

$md^2 > 0 \Rightarrow I_z$ será maior quanto mais se afastar o eixo do c.m.

PÊNDULO FÍSICO



Corpo rígido, com um eixo fixo, em que as únicas forças extenas são o peso e as forças de contacto no eixo.

A lei do movimento do pêndulo é:

$$\vec{r}_{cm} \times (m\vec{g}) = I_z \ddot{\theta}\, \hat{k}$$

$$\Rightarrow (-r_{cm}\, m g \sin\theta)\hat{k} = m r_g^2 \ddot{\theta}\, \hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g\, r_{cm}}{r_g^2} \sin\theta}$$

$l = \frac{r_g^2}{r_{cm}}$ tem unidades de distância e a equação de movimento pode escrever-se: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$ igual à equação de um pêndulo simples de comprimento l.

Se eixo passa pelo centro de massa, entao $r_{cm}=0$, $l \to +\infty$ e $\ddot{\theta} \to 0$, ou seja, a velocidade angular, ω, permanece constante. O pêndulo roda uniformemente.