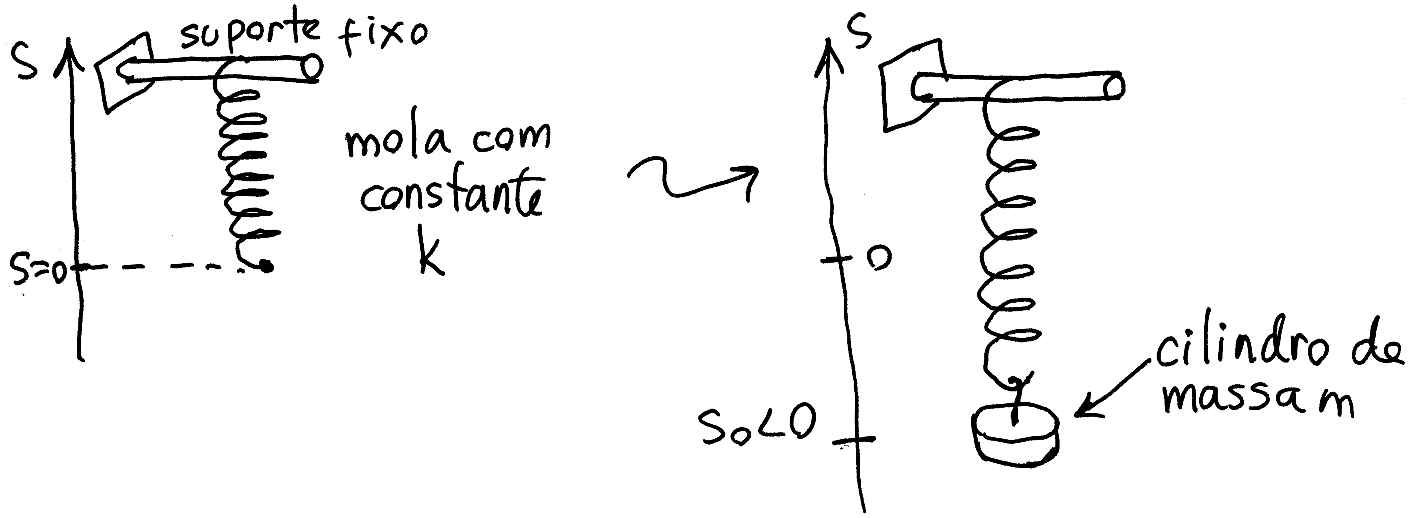
Aula 15. 2019-04-03

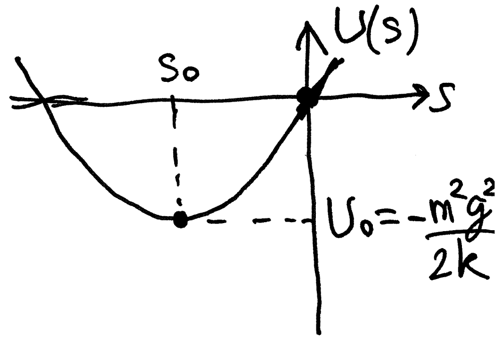
OSCILADOR HARMÓNICO SIMPLES



Energia potencial: $U = \frac{k}{2} s^2 + mgs$

Força tangencial: $F_t = -\frac{dU}{ds} = -kz - mg$ (porque U é menos a primitiva de F_t)

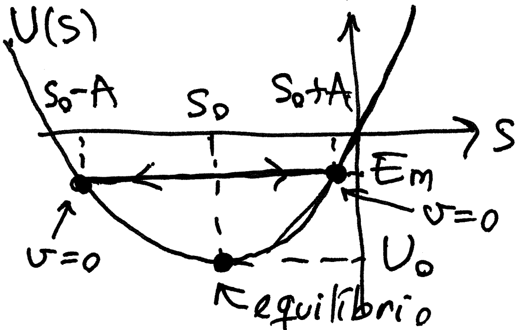
O gráfico de U(s) é uma parábola, crescente, com valor mínimo em s_0, onde $\frac{dU}{ds} = 0$, ou seja,



$F_t = -ks_0 - mg = 0 \Rightarrow \boxed{s_0 = -\frac{mg}{k}}$

(ponto de equilíbrio)

A energia mecânica, E_m, não pode ser menor que U_0. Se $E_m = U_0$, o sistema estará em repouso em $s = s_0$. Se $E_m > U_0$, desprezando a resistência do ar, E_m é uma reta horizontal que corta U em $s_0 + A$ e $s_0 - A$

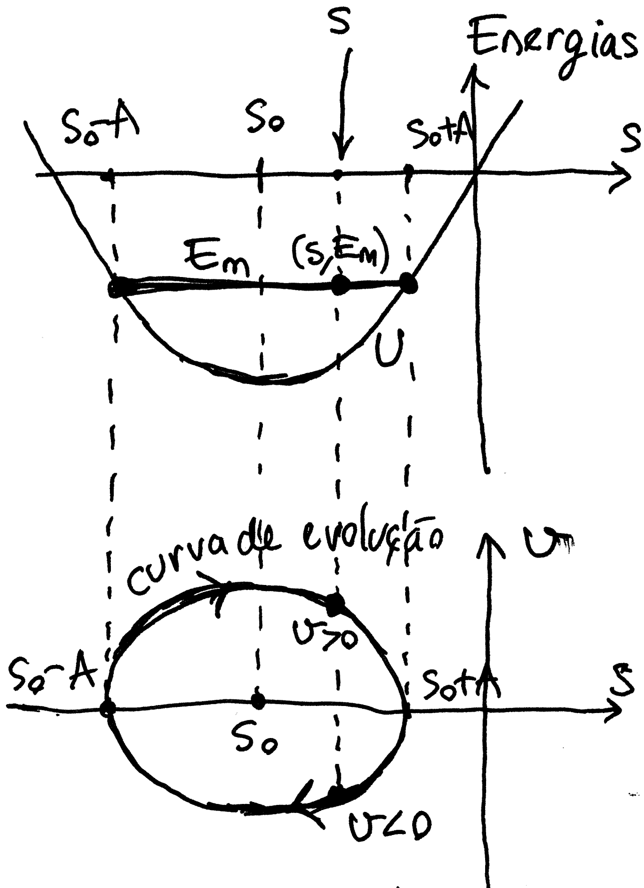


O movimento do sistema é oscilatório, entre $s_0 - A$ e $s_0 + A$. Se a mola for deslocada até $s_0 - A$ e largada do repouso, então $E_m = U(s_0 - A)$ permanece constante e o cilindro oscila com amplitude A.

ESPAÇO DE FASE

Cada ponto (s, E_m) no gráfico das energias corresponde a dois instantes diferentes, quando o cilindro passa por s, com velocidade positiva ou negativa: $E_m = \frac{m}{2}v^2 + U(s)$

$$\Longrightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2(E_m - U(s))}{m}}$$

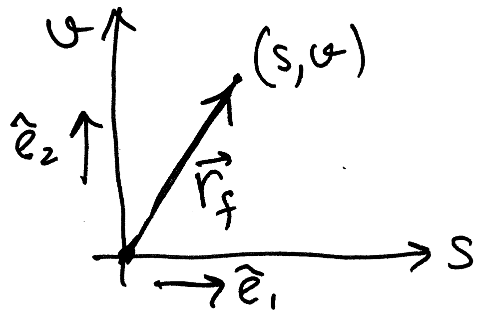


Espaço de fase

Representando v no eixo das ordenadas, esses dois instantes ficam em pontos diferentes numa elipse. Cada ponto da elipse (curva de evolução) corresponde a um instante t, entre 0 e o período de ascilação T. Após $t = T$, a elipse volta a ser percorrida de T até $2T$, ...

A cada instante t corresponde um único ponto no espaço de fase (s, v) na posição $\vec{r}_f$

$$\vec{r}_f = s\,\hat{e}_1 + v\,\hat{e}_2$$

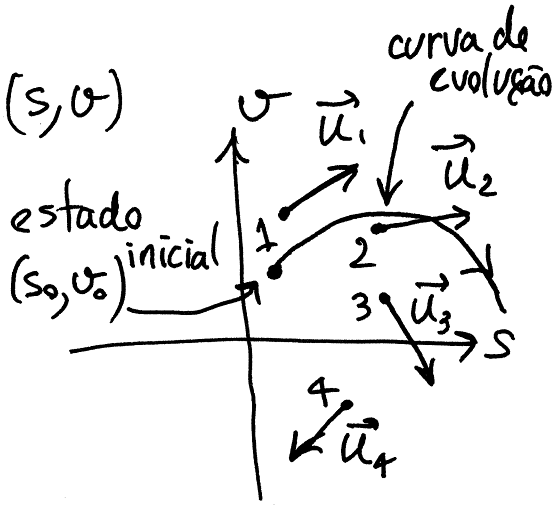


Velocidade de fase

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}_f}{dt} = \dot{s}\,\hat{e}_1 + \dot{v}\,\hat{e}_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{u} = v\,\hat{e}_1 + a_t\,\hat{e}_2}$$

Equação de movimento: $a_t = f(s, v)$ permite determinar a velocidade de fase em qualquer ponto do espaço de fase e traçar um **campo de direções**, que mostra os vetores $\vec{u}$ em vários pontos.



A partir de um estado inicial, (s_0, v_0), obtém-se uma **curva de evolução**, que segue o campo de direções e que representa o movimento do sistema a partir de (s_0, v_0).

No Maxima, o campo de direções e as curvas de evolução, podem ser obtidos com o programa plotdf:

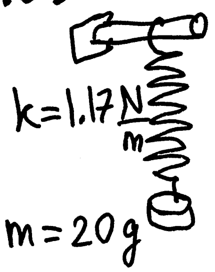
```
plotdf([u1, u2], [x1, x2], [x1, a, b], [x2, c, d]);
```

duas expressões que dependem de x_1 e x_2 (componentes da velocidade de fase)

duas variáveis que definem o espaço de fase

intervalos para as variáveis de estado.

Exemplo.



$$U = \frac{k}{2} s^2 + m g s$$

$$F_t = -\frac{dU}{ds} = -ks - mg \qquad a_t = \frac{F_t}{m}$$

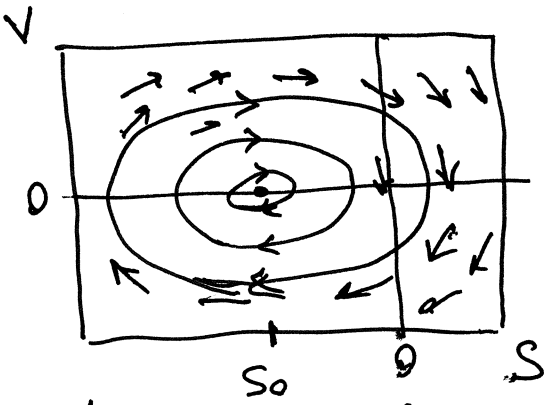
$$a_t = -\frac{k}{m} s - g = -\frac{1.17}{0.02} s - 9.8$$

O campo de direções obtém-se com o comando:

```
plotdf([v,-1.17*s/0.02-9.8],[s,v],[s,-0.4,0.1],[v,-3,3]);
```

valores escolhidos após algumas tentativas

Clicando com o rato num ponto do espaço de fase, obtém-se a curva de evolução que passa por esse ponto.



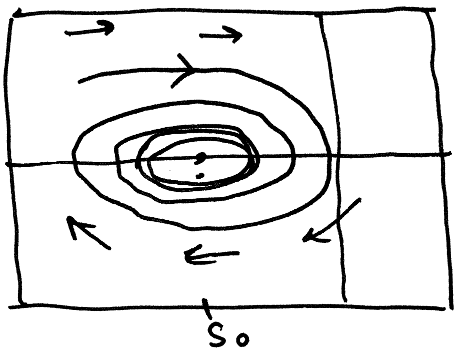
Se incluirmos a resistência do ar, a aceleração terá um termo adicional, proporcional a v^2, mas com sinal oposto a v:

$$a_t = -\frac{k}{m}s - g - c\,v|v|$$

constante aerodinâmica.

Admitindo $c=0.3$, o campo de direções obtém-se com:

```
plotdf([v,-1.17*s/0.02-9.8-0.3*v*abs(v)],
       [s,v], [s,-0.4,0.1], [v,-3,3]);
```



As curvas de evolução são espirais aproximando-se para $(s_0, 0)$.

SISTEMAS DINÂMICOS

Espaço de fase (estado do sistema) com n variáveis:

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

velocidade de fase com n componentes:

$$\vec{u} = (\dot{s}_1, \dot{s}_2, \ldots, \dot{s}_n)$$

em que cada componente, $\dot{s}_i$, é uma função conhecida, que depende do estado:

$$\dot{s}_i = f(s_1, \ldots, s_n, t)$$

Dado um estado inicial, encontra-se a curva de evolução do sistema, seguindo o campo de direções em n dimensões.