Aula 19. 2019-04-29

SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} $\longrightarrow$ 4 números reais

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{r}}$$

$$\underbrace{\underset{\text{vetor posição}}{\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{operador linear}}{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}}_{\text{no espaço de fase } (x,y)\ (\mathbb{R}^2)}$$

<u>velocidade de fase</u>: $\vec{u} = A\vec{r}$

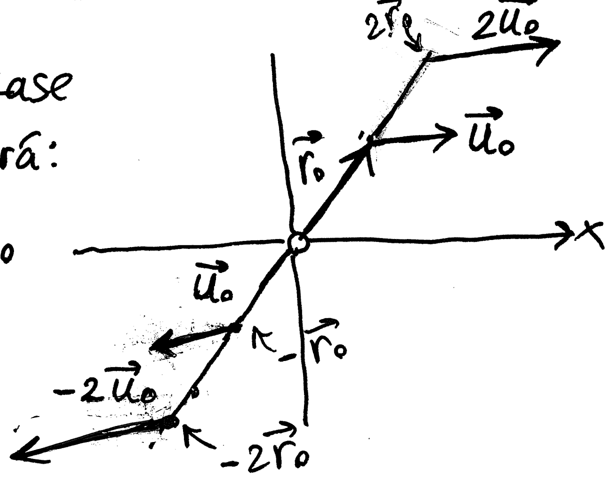
Pontos de equilíbrio: $A\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

admite-se que $\det A \neq 0$ (senão, o sistema teria apenas uma variável de estado). Como tal, o sistema $A\vec{r} = \vec{0}$ tem uma única solução, $x=0$, $y=0$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Um único ponto de equilíbrio na origem}}$

Se em $\vec{r}_0$ a velocidade de fase for $\vec{u}_0$, então em $k\vec{r}_0$, $\vec{u}$ será:

$$\vec{u} = A(k\vec{r}_0) = k(A\vec{r}_0) = k\vec{u}_0$$



$\Rightarrow$ Em cada reta que passa pela origem, a direção de $\vec{u}$ é a mesma. Sentidos opostos nos dois lados da origem.

Vetores próprios: posições $\vec{r}_0$ onde a velocidade de fase $\vec{u}_0$ tem a mesma direção de $\vec{r}_0$:

$$\Rightarrow \quad A\vec{r}_0 = \lambda\vec{r}_0$$

λ = número real = VALOR PRÓPRIO (da matriz A)

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

determinante nulo, para que existam soluções diferentes de $x=0, y=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{12})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 - \mathrm{tr}A\,\lambda + \det A = 0}$$

$\mathrm{tr}A$ = traço de A

$\det A$ = determinante de A

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}$$

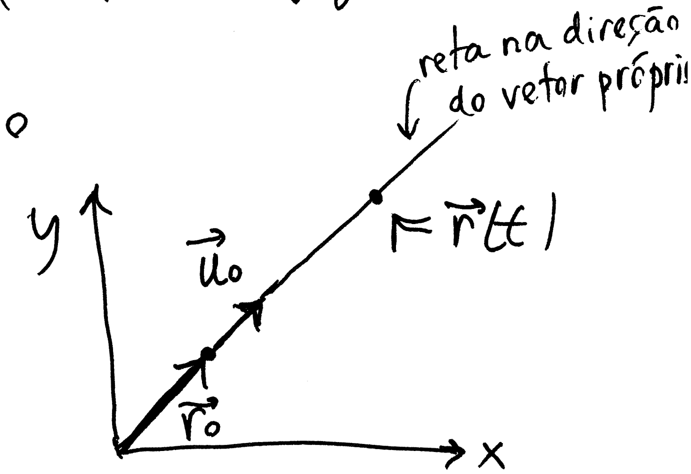
Podem existir um ou dois valores próprios reais, ou dois valores próprios complexos (complexo conjugado um do outro).

Se $\vec{r}_0$ for vetor próprio, do valor próprio λ_i:

$$\vec{u}_0 = A\vec{r}_0 = \lambda_i \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \lambda_i \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda_i \vec{r}$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0\, e^{\lambda_i t}}$$

(i) λ_i real positivo: curva de evolução reta, que se afasta exponencialmente da origem.

(ii) λ_i real negativo: curva de evolução reta, que se aproxima exponencialmente da origem.

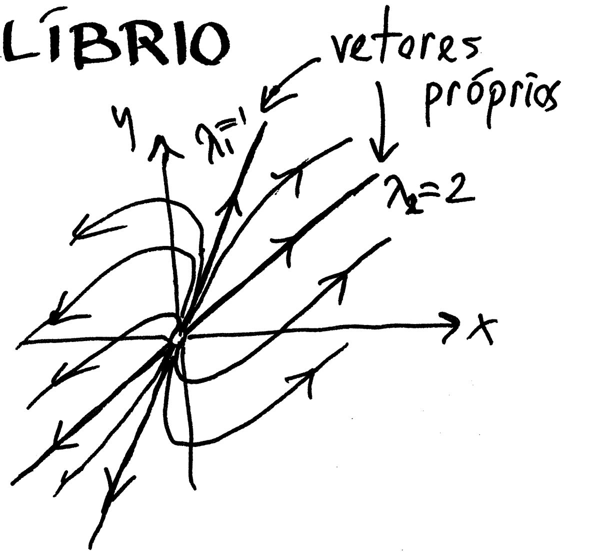
TIPOS DE PONTOS DE EQUILÍBRIO

① Nós repulsivos.

$\operatorname{tr}A > 0$, $\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 > \det A$

$\Rightarrow$ λ_1 e λ_2 são reais, positivos e diferentes.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

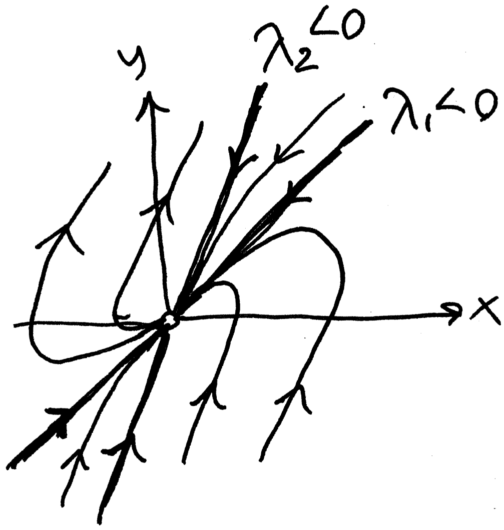


② Nós atrativos.

$\operatorname{tr}A < 0$, $\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 > \det A$

$\Rightarrow$ λ_1 e λ_2 reais, negativos, diferentes.

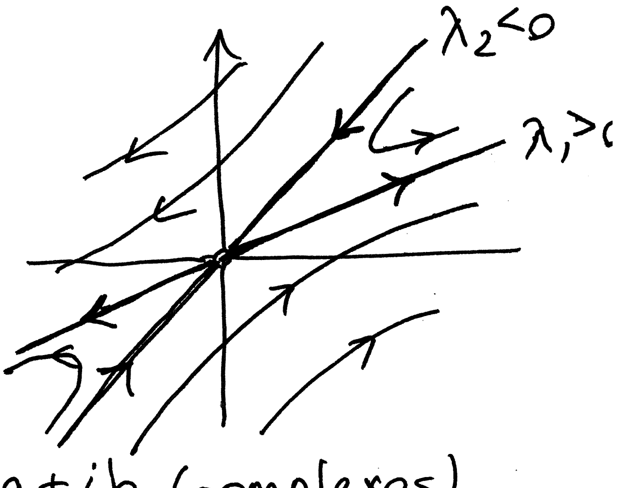
Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$



③ Pontos de sela.

$\det A < 0$ $\Rightarrow$ λ_1 e λ_2 reais, com sinais opostos

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$



Nos outros casos, quando $\lambda = a \pm ib$ (complexos), não existem vetores próprios no plano $\mathbb{R}^2$. Todas as curvas de evolução são curvas.

$$\vec{r} = \vec{r}_0\, e^{\lambda t} = \vec{r}_0\, e^{(a+ib)t} = \vec{r}_0\, e^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right)$$

(solução complexa)

as partes real e imaginária de $\vec{r}$:

$\vec{r}_0\, e^{at}\cos(bt)$, $\vec{r}_0\, e^{+at}\sin(bt)$,

são soluções (reais) particulares do sistema dinâmico.

④ Centros.

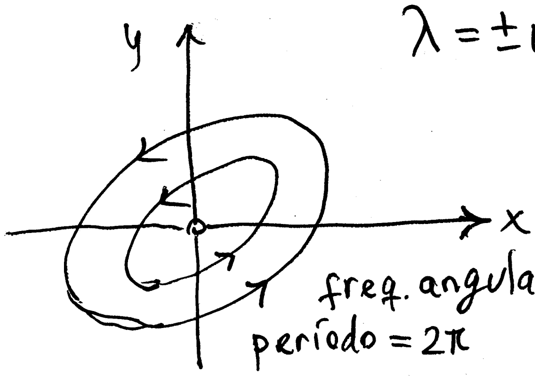
$\operatorname{tr}A = 0$, $\det A > 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\det A}$

todas as curvas de evolução são ciclos, com frequência angular $\sqrt{\det A}$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = \pm i$



freq. angular = 1

período = 2π

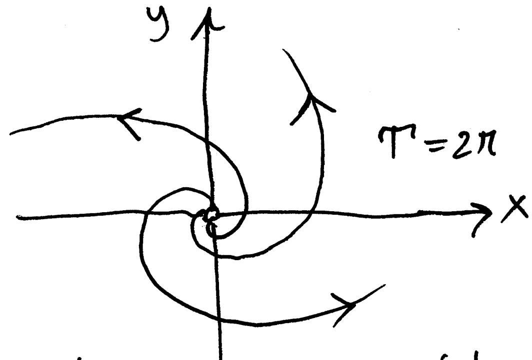
⑤ Focos repulsivos.

$\operatorname{tr}A > 0$, $\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 < \det A$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm ib \quad (a > 0)$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$



oscilações com amplitude crescente e freq. angular = 1

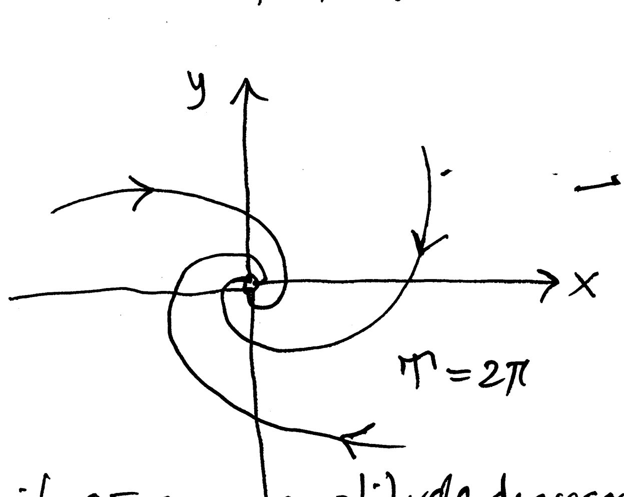
⑥ Focos atrativos

$\operatorname{tr}A < 0$, $\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 < \det A$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm ib \quad (a < 0)$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$



oscilações com amplitude decrescente e freq. angular = 1