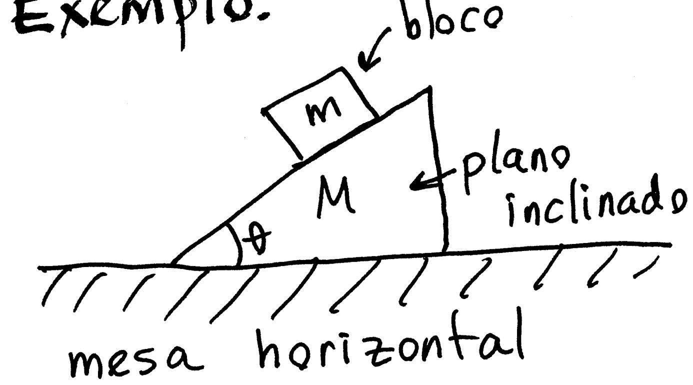
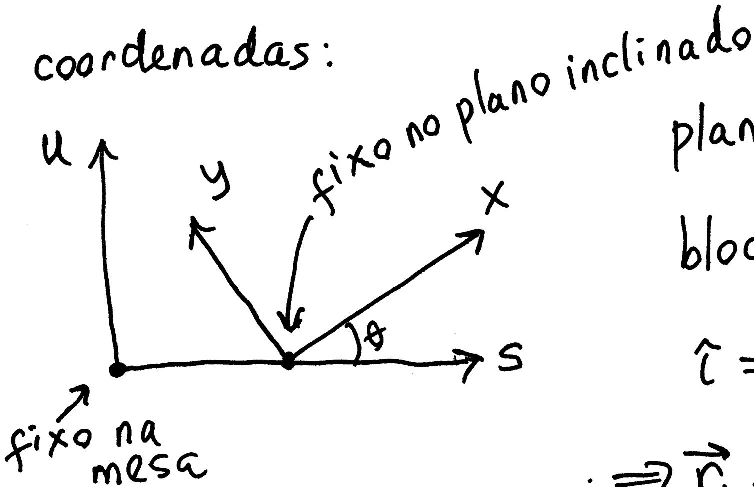
Aula 18. 2019-04-24

Exemplo.



desprezando a resistência do ar e o atrito entre o bloco e o plano, e a mesa e o plano.

coordenadas:



plano inclinado: $\vec{r}_p = s\hat{e}_s$

bloco: $\vec{r}_{b/p} = x\hat{\imath}$

$\hat{\imath} = \cos\theta\,\hat{e}_s + \sin\theta\,\hat{e}_u$

$$\Rightarrow \vec{r}_b = \vec{r}_{b/p} + \vec{r}_p$$
$$= (s + x\cos\theta)\hat{e}_s + x\sin\theta\,\hat{e}_u$$

velocidades:

$\vec{v}_p = \dot{s}\,\hat{e}_s \quad , \quad v_p^2 = \dot{s}^2$

$\vec{v}_b = (\dot{s} + \dot{x}\cos\theta)\hat{e}_s + \dot{x}\sin\theta\,\hat{e}_u \quad , \quad v_b^2 = \dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta$

Há duas coordenadas generalizadas: (s, x)

$$E_c = \frac{M}{2}v_p^2 + \frac{m}{2}v_b^2 = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\theta\right)$$

$$U = mgx\sin\theta$$

<u>2 equações de Lagrange:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \Rightarrow (M+m)\ddot{s} + m\ddot{x}\cos\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{s}\cos\theta + \ddot{x} = -g\sin\theta$$

sistema linear para as variáveis $\ddot{s}, \ddot{x}$

$$\ddot{s} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & m\cos\theta \\ -g\sin\theta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M+m & m\cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix}} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

($\ddot{s}$ e $\ddot{x}$ constantes)

$$\ddot{x} = \frac{\begin{vmatrix} M+m & 0 \\ \cos\theta & -g\sin\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M+m & m\cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

As forças de ligação (tensão numa corda, reação normal, atrito estático) não entram nas equações de Lagrange. A cada ligação está asociada uma função: $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \text{constante}$ que permite reduzir o número de graus de liberdade.

Quando for necessário calcular a força de ligação $\vec{F}_i$ associada à condição $f_i = \text{constante}$, usa-se o método dos multiplicadores de Lagrange:

(i) não se usa $f_i = \text{constante}$ para reduzir o número de graus de liberdade (admitem-se $q_1, q_2, \ldots, q_n$ independentes).

(ii) em cada equação de Lagrange, acrescenta-se um termo $\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j}$ = componente j da força (momento) de ligação i.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

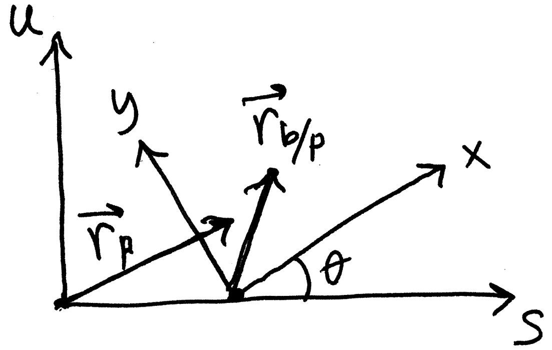
λ_i = multiplicador de Lagrange.

(iii) Resolvem-se as equações de Lagrange, junto com $f_i = \text{const}$, pare encontrar λ_i e $\ddot{q}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

Exemplo. Resolver o exemplo anterior, do plano inclinado e o bloco, admitindo coeficientes de atrito cinético μ_1, entre o bloco e o plano, e μ_2, entre o plano e a mesa.

<u>Resolução</u>. Haverá duas forças generalizadas: atrito entre o bloco e o plano e entre o plano e a mesa. Mas essas forças dependem de duas forças de ligação: reação normal no bloco (com plano) (R_1) e no plano (com a mesa) (R_2).

Sem essas duas ligações, o bloco poderia andar na direção y e o plano na direção u:



$$\vec{r}_p = s\hat{e}_s + u\hat{e}_u$$

$$\vec{r}_{b/p} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_b = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + s\hat{e}_s + u\hat{e}_u$$

$$\hat{\imath} = \cos\theta\,\hat{e}_s + \sin\theta\,\hat{e}_u \quad , \quad \hat{\jmath} = -\sin\theta\,\hat{e}_s + \cos\theta\,\hat{e}_u$$

$$\Rightarrow \vec{r}_b = (s + x\cos\theta - y\sin\theta)\hat{e}_s + (u + x\sin\theta + y\cos\theta)\hat{e}_u$$

Consideram-se 4 coordenadas: (x, y, s, u)

e 4 velocidades: $(v_x, v_y, v_s, v_u) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{s}, \dot{u})$

Há duas condições de ligação:

$$f_1 = y = \text{constante} \quad , \quad f_2 = u = \text{constante}$$

com dois multiplicadores de Lagrange, R_1 e R_2

As componentes das forças de ligação são:

$$\begin{cases} R_1\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = R_1 \ , \quad R_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = R_1\dfrac{\partial f_1}{\partial s} = R_1\dfrac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \quad (\Rightarrow R_1 = \text{reação normal}) \\[2ex] R_2\dfrac{\partial f_2}{\partial u} = R_2 \ , \quad R_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = R_2\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = R_2\dfrac{\partial f_2}{\partial s} = 0 \quad (\Rightarrow R_2 = \text{reação normal}) \end{cases}$$

As duas forças não conservativas são:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \mu_1 R_1 \hat{\imath}\ , \text{ atuando na posição: } \vec{r}_{b/p} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \\ \vec{F}_2 = -\mu_2 R_2 \hat{e}_s\ , \text{ aplicada em: } \vec{r}_p = s\hat{e}_s + u\hat{e}_u \end{cases}$$

As quatro componentes dessas forças são:

$$\begin{cases} Q_{1x} = \vec{F}_1 \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_{b/p}}{\partial x} = \mu_1 R_1 \quad Q_{1y} = \vec{F}_1 \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_{b/p}}{\partial y} = 0 \quad Q_{1s} = Q_{1u} = 0 \\ Q_{2s} = \vec{F}_2 \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_p}{\partial s} = -\mu_2 R_2 \quad Q_{2u} = \vec{F}_2 \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_p}{\partial u} = 0 \quad Q_{2x} = Q_{2y} = 0 \end{cases}$$

Resolução das equações de Lagrange no Maxima:

```
gradef(x,t,vx)$
gradef(y,t,vy)$
gradef(s,t,vs)$
gradef(u,t,vu)$
```
definição das velocidades generalizadas

```
gradef(vx,t,ax)$
gradef(vy,t,ay)$
gradef(vs,t,as)$
gradef(vu,t,au)$
```
definição das acelerações generalizadas

vetores posição do plano e o bloco, no referencial $(\hat{e}_s, \hat{e}_u)$

```
rp: [s,u]$
rb: [s+x*cos(q)-y*sin(q), u+x*sin(q)+y*cos(q)]$
vp: diff(rp,t);
```
↳ [vs,vu] $(\vec{v}_p)$

$\vec{v}_b$

```
vb: diff(rb,t);
```
↳ [-sin(q) vy + cos(q) vx + vs, cos(q) vy + sin(q) vx + vu]

```
Ec: M*(vp.vp)/2 + m*trigsimp(vb.vb)/2;
```

A energia potencial gravítica depende das coordenadas $\hat{e}_u$ do plano e do bloco:

U: M*g*rp[2] + m*g*rb[2];

Equações de Lagrange:

eq1: diff(diff(Ec,vx),t)-diff(Ec,x)+diff(U,x)=mu1*R1;

eq2: diff(diff(Ec,vy),t)-diff(Ec,y)+diff(U,y)-R1=0;

eq3: diff(diff(Ec,vs),t)-diff(Ec,s)+diff(U,s)=-mu2*R2

eq4: diff(diff(Ec,vu),t)-diff(Ec,u)+diff(U,u)-R2=0;

Substituem-se y, u, vy, vu, ay, au, usando as condições de ligação:

subst([ay=0,au=0],[eq1,eq2,eq3,eq4]);

E resolve-se para encontrar R_1, R_2, a_x e a_s:

trigsimp(solve(%,[R1,R2,ax,as]));

<u>Solução</u>:

$$R_1 = \frac{(\mu_2 \sin\theta + \cos\theta) M}{M + ((1-\mu_1\mu_2)\sin^2\theta - (\mu_1+\mu_2)\sin\theta\cos\theta) m}\, mg$$

$$R_2 = \frac{M}{M + ((1-\mu_1\mu_2)\sin^2\theta - (\mu_1+\mu_2)\sin\theta\cos\theta) m}\, (M+m)g$$

$$a_x = -\frac{((1-\mu_1\mu_2)\sin\theta - (\mu_1+\mu_2)\cos\theta)(M+m)}{M + ((1-\mu_1\mu_2)\sin^2\theta - (\mu_1+\mu_2)\sin\theta\cos\theta) m}\, g$$

$$a_s = \frac{((1-\mu_1\mu_2)\sin\theta\cos\theta + (\mu_1+\mu_2)\sin^2\theta - \mu_1) m - (M+m)\mu_2}{M + ((1-\mu_1\mu_2)\sin^2\theta - (\mu_1+\mu_2)\sin\theta\cos\theta) m}\, g$$

Observe-se que, com $\mu_1 = \mu_2 = 0$, a_x e a_s são as mesmas expressões obtidas no exemplo anterior.