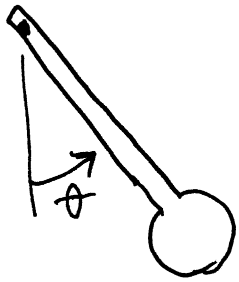
Aula 22. 2019-05-20

Pêndulo



$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

pontos de equilíbrio:

$\dot{\theta} = 0$, $\sin\theta = 0 \implies \theta = n\theta$

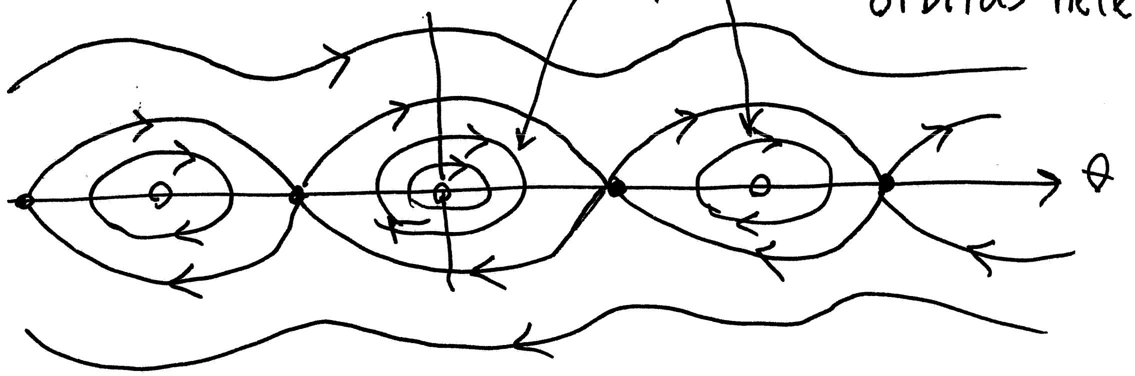
$\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ 

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} \implies \Omega \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{(centros)}$$

$\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$  (pêndulo invertido)

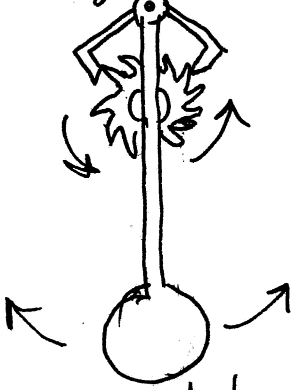
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{(pontos de sela)}$$

infinitos ciclos dentro das órbitas heteroclínicas

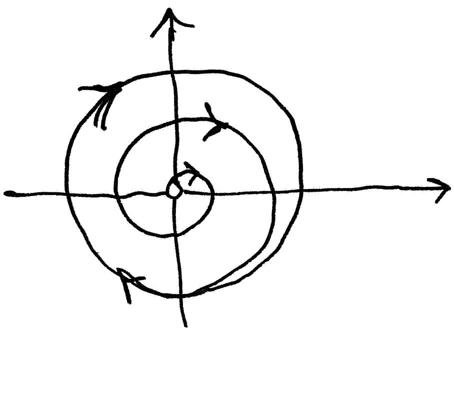


CICLOS LIMITE

Relógio de pêndulo. A rotação da roda dentada faz oscilar o pêndulo até uma amplitude determinada



pêndulo



Existe <u>um único ciclo</u> no retrato de fase (ciclo limite)

Exemplo. $\begin{cases} \dot{x} = x(1-18x^2-36y^2)-y \\ \dot{y} = y(1-18x^2-36y^2)+x \end{cases}$

`u: [x*(1-18*x^2-36*y^2)-y, y*(1-18*x^2-36*y^2)+x]$`

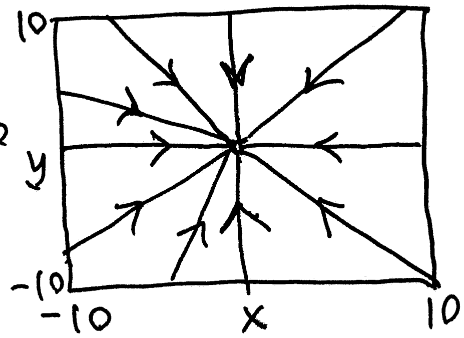
`solve(u);` $\rightarrow$ um único ponto de equilíbrio na origem

`J: jacobian(u,[x,y])$`

`eigenvalues(subst([x=0,y=0], J));` $\rightarrow \lambda = 1 \pm i$

A origem é foco repulsivo. Retrato de fase:

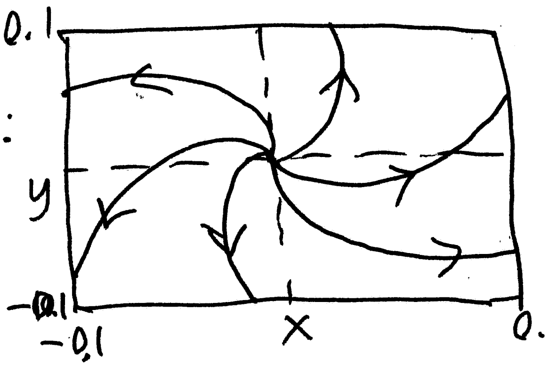
`plotdf(u,[x,y]);`



A origem <u>parece</u> ser ponto atrativo, porque o domínio, por omissão é muito grande!

Com um domínio menor consegue-se ver o foco repulsivo:

```
plotdf(u,[x,y],[x,-0.1,0.1],
       [y,-0.1,0.1]);
```



Como as curvas de evolução que se aproximam da origem, no primeiro gráfico, não podem cruzar-se com as curvas a sair da origem, no segundo gráfico, deverá existir um ciclo limite atrativo.

Consegue mostrar-se o ciclo com:

```
plotdf(u,[x,y],[x,-0.5,0.5],
       [y,-0.5,0.5]);
```

$\boxed{\text{No interior de qualquer ciclo limite há sempre um ponto de equilíbrio, atrativo, ou repulsivo}}$

COORDENADAS POLARES

Em alguns casos, expressando as equações de evolução em coordenadas polares conseguem-se descobrir ciclos limite.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d(r\cos\theta)}{dt} = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \dfrac{d(r\sin\theta)}{dt} = g(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = F(r,\theta) \\ \dot{r} = G(r,\theta) \end{cases}$$

existirão ciclos limite se $F(r,\theta)$ for sempre positiva ou sempre negativa (curvas a rodar no mesmo sentido) e $G(r,\theta)$ tiver raízes $r_i \neq 0$, onde $G(r_i,\theta)=0$.

Exemplo.

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^2+y^2-3\sqrt{x^2+y^2}+2\right)+2y \\ \dot{y} = y\left(x^2+y^2-3\sqrt{x^2+y^2}+2\right)-2x \end{cases}$$

Definem-se x e y em coordenadas polares e as derivadas de r e θ:

```
[x,y]: r*[cos(q),sin(q)];
gradef(r,t,rp)$
gradef(q,t,qp)$
```

$q \to \theta$

$rp \to \dot{r}$

$qp \to \dot{\theta}$

E as equações de evolução:

```
eq1: diff(x,t)=x*(x^2+y^2-3*sqrt(x^2+y^2)+2)+2*y
eq2: diff(y,t)=y*(x^2+y^2-3*sqrt(x^2+y^2)+2)-2*x
```

que neste momento estarão em função de r, θ, $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$. Resolvem-se para encontrar as expressões para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$.

solve([eq1,eq2],[rp,qp]); → $\boxed{\dot{\theta} = -2}$

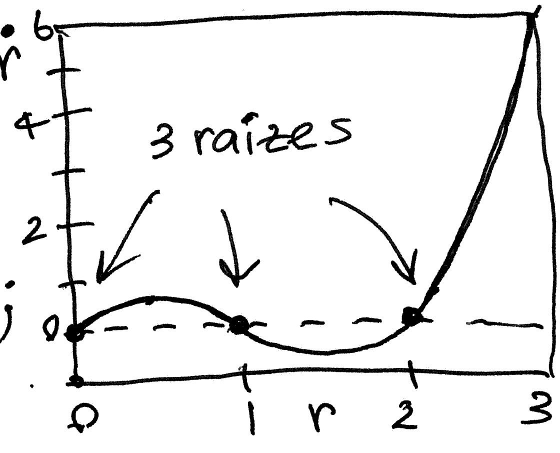
simplifica-se a expressão de $\dot{r}$:

trigsimp(%[1][1]);

↳ $\dot{r} = -3r|r| + r^3 + 2r$

gráfico:

plot2d(subst(%,rp),[r,0,3]);



→ $\dot{\theta} = -2$ indica que todas as curvas de evolução rodam no sentido [illegible] dos ponteiros do relógio.

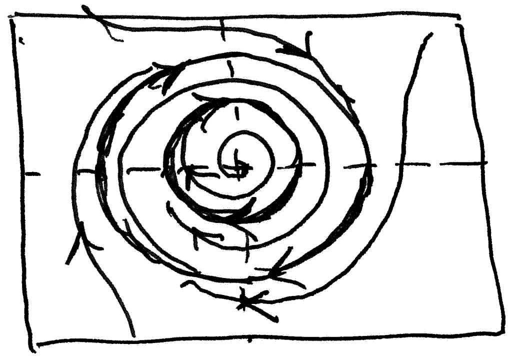
→ $\dot{r} = 0$ em $r = 0$, indica que se $r = 0$ (origem) o estado permanece sempre nesse ponto (equilíbrio).

→ $\dot{r} = 0$ em $r = 1$ e $r = 2$, indica que se num instante o estado estiver a uma distância de 1 ou 2 unidades da origem, esse estado rodará mantendo sempre a mesma distância (dois ciclos limite circulares)

→ $\dot{r} > 0$, em $0 < r < 1$: o estado roda afastando-se da origem (a origem é foco repulsivo)

→ $\dot{r} < 0$, em $1 < r < 2$: o estado roda afastando-se do ciclo $r = 2$ e aproximando-se do ciclo $r = 1$ (atrativo).

→ $\dot{r} > 0$, em $r > 2$: o estado roda, afastando-se até ∞ (ciclo com $r = 2$ repulsivo)



kill(all);

f1: y*(x^2+y^2-3*sqrt...

f2: x*(x^2+y^2-3*sqrt...

plotdf([f1,f2],[x,y],[x,-3,3],[y,-3,3]);