Aula 23. 2019-05-22

DINÂMICA POPULACIONAL

$x(t)$ = população no instante $t \geq 0$

$\dot{x} = f(x,t)$ = aumento/diminuição da população

f deverá ter a propriedade: $f(0,t)=0$

$\Rightarrow$ $x=0$, é sempre ponto de equilíbrio

Modelo de Malthus

$\dot{x} = a x \quad (a>0)$ $\quad a$ = taxa de natalidade = constante

$\Rightarrow x(t) = x_0 e^{at}$ cresce exponencialmente até ∞

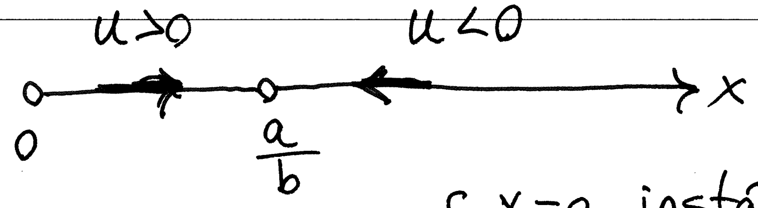
Modelo Logístico (Verhulst)

$\dot{x} = x(a - b x) \quad (a>0, b>0)$

a = taxa de natalidade, constante

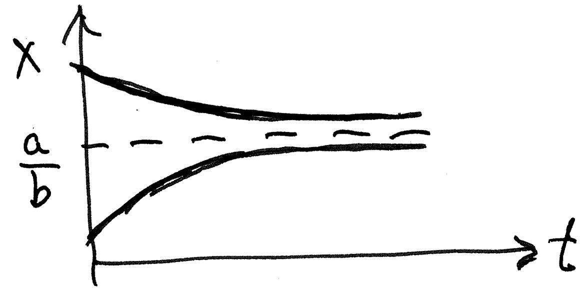
bx = taxa de mortalidade; maior quanto maior for a população

o espaço de fase é a semi reta real $\mathbb{R}^+$ e a velocidade de fase é $u = x(a-bx)$. Retrato de fase:



2 Pontos de equilíbrio: $\begin{cases} x=0, \text{ instável} \\ x=\frac{a}{b}, \text{ estável} \end{cases}$

A população aproxima-se do valor limite $x = \frac{a}{b}$



SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

$x_1(t)$ = população da espécie 1 ≥ 0

$x_2(t)$ = população da espécie 2 ≥ 0

Equações de evolução:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad \lim_{x_1 \to 0^+} f_1(x_1,x_2) = 0 \qquad \lim_{x_2 \to 0^+} f_2(x_1,x_2) = 0$$

Matriz jacobiana

$$J(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$: crecimento próprio da espécie 1

$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$: influência da espécie 2 na espécie 1

$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$: crecimento próprio da espécie 2

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$: influência da espécie 1 na espécie 2

Tipos de sistemas

① Sistema com cooperação: $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0$

② Sistema com competição: $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0$

③ Sistema predador-presa: $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0$, $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0$

$x_i \to$ predadores

$x_j \to$ presas

Exemplo. Sistema de Lotka-Volterra:

$$\dot{x} = x(a - cy), \quad \dot{y} = y(bx - d) \quad (a>0, b>0, c>0, d>0)$$

$$J = \begin{bmatrix} a - cy & -cx \\ by & bx - d \end{bmatrix}$$

$x \to$ presas

$y \to$ predadores

Pontos de equilíbrio: $\begin{cases} x(a - cy) = 0 \\ y(bx - d) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=0, \vee, y=\frac{a}{c} \\ y=0, \vee, x=\frac{d}{b} \end{cases} \implies$$ 2 pontos de equilíbrio: $(x,y)=(0,0)$ $\quad (x,y)=\left(\frac{d}{b},\frac{a}{c}\right)$

$$A_1 = J(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = a > 0 \ , \ \lambda_2 = -d < 0$$

PONTO DE SELA

$$A_2 = J\left(\frac{d}{b},\frac{a}{c}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{cd}{b} \\ \frac{ab}{c} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{tr} A_2 = 0 \quad \det A_2 = ad > 0$$

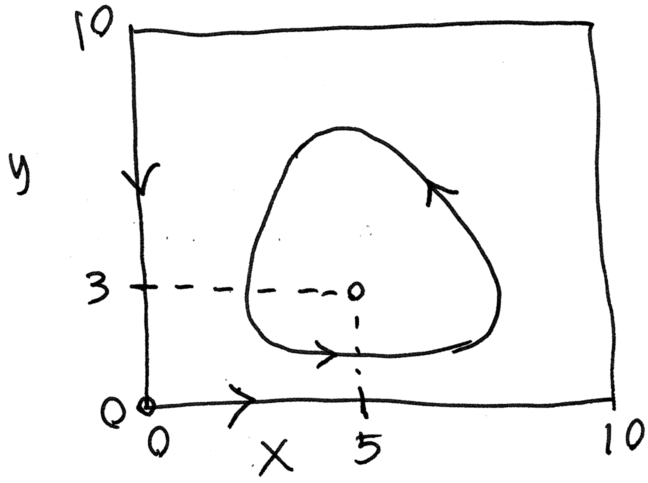
$$\lambda = \pm i\sqrt{ad}$$

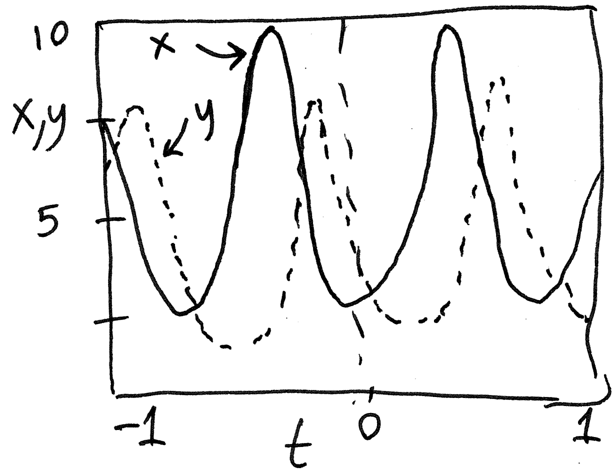
$\implies x(t)$ e $y(t)$ oscilam com frequência angular

$$\Omega \approx \sqrt{ad}$$

Exemplo de retrato de fase com $a=6, b=3, c=2, d=15$

```
plotdf([x*(6-2*y), y*(3*x-15)], [x,y], [x,0,10], [y,0,10])
```





$P \approx 0.662$

Esse tipo de oscilações observam-se na natureza nos sistemas predador-presa (exemplo, rapozas e coelhos). Um problema deste modelo é que se inicialmente uma das populações for quase nula, o ciclo varia até valores muito elevados das populações, com a outra a ficar quase extinta. Seria mais realista um ciclo limite.

Exemplo. Modelo de Holling-Tanner:

$$\dot{x} = x\left(1-\frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7+7x} \qquad \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1-\frac{y}{2x}\right)$$

No Maxima:

```
u: [x*(1-x/7)-6*x*y/(7+7*x), y*(1-y/2/x)/5];
solve(u); → [[y=0, x=0], [y=0, x=-1], [y=0, x=7],
             [y=-14, x=-7], [y=2, x=1]];
```

3 pontos de equilíbrio. Um em que as duas populações estão extintas (0,0), outro em que y está extinta e a população x fica em 7 e outro em que as duas populações coexistem, estabilizando-se em $(x,y)=(1,2)$.

Matriz jacobiana:

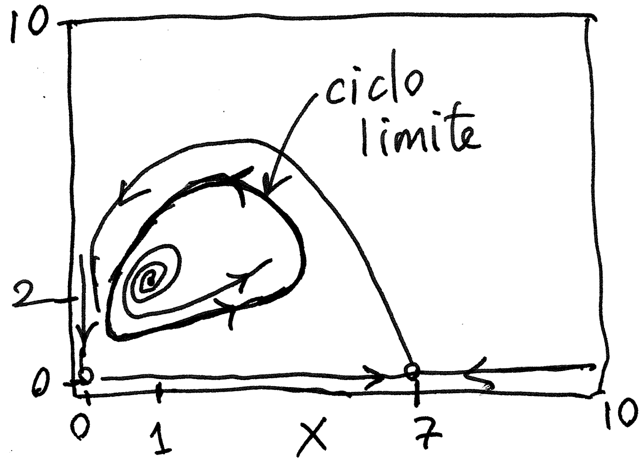
```
J: jacobian(u,[x,y]);
```
$$\to \begin{bmatrix} \cdots & -\dfrac{6x}{7x+7} \\ \dfrac{y^2}{10x^2} & \cdots \end{bmatrix} \qquad -\frac{6x}{7x+7} < 0, \quad \frac{y^2}{10x^2} > 0$$

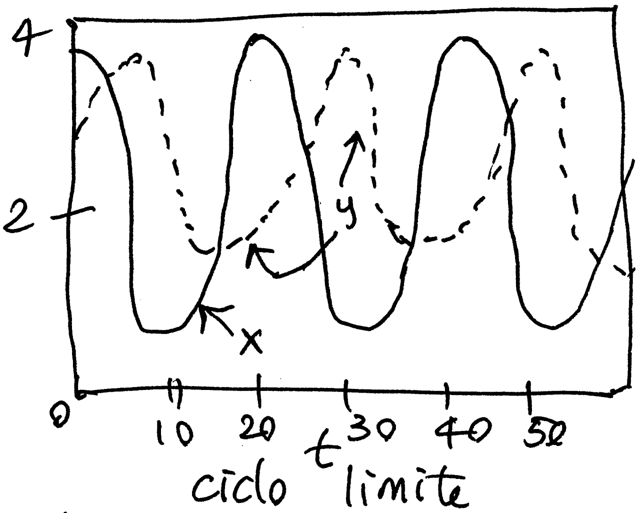
⇒ sistema predador-presa

x → presas, y → predadores.

Retrato de fase:

```
plotdf(u, [x,y], [x,-0.1,10], [y,-0.1,10]);
```





existe um único ciclo limite com período ≈ 20.

(0,0) e (7,0) são pontos de sela e (1,2) é foco repulsivo.