Aula 13. 2019-03-27

TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

Consideremos primeiro o caso dum corpo rígido em translação, sem rotação. Todos os pontos no corpo têm a mesma aceleração $\vec{a}$ e seguem a mesma trajetória.

força resultante $\rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow F_t = m a_t = m v \dfrac{dv}{ds}$

$$\Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds = m \int_{v_1}^{v_2} v \, dv \qquad \left(s = \text{posição ao longo da trajetória}\right)$$

O primeiro integral chama-se <u>trabalho</u> da força resultante, W_{12}, entre os pontos s_1 e s_2. O segundo integral é igual a $\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$.

Teorema do trabalho e a energia cinética:

$$\boxed{W_{12} = E_{c_2} - E_{c_1}} \qquad E_c = \frac{1}{2} m v^2 \ (\text{energia cinética})$$

$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds =$ trabalho da força resultante, ao longo da trajetória do corpo.

Unidade SI de trabalho e energia

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N}\cdot\text{m} = 1\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad (\text{um joule})$$

Para poder calcular W_{12} é necessário conhecer a trajetória e a expressão de $F_t(s)$ ao longo dessa curva.

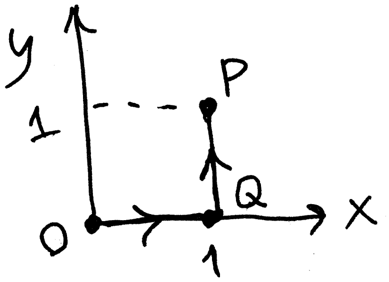
Nos casos em que $\vec{F}$ é uma função da posição, $\vec{r}$, pode definir-se o trabalho entre dois pontos quaisquer, sem ter de estar na trajetória:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad \left(\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_t \, ds\right)$$

Este é um integral de linha, em que é necessário indicar o percurso de integração; ds é o deslocamento ao longo do percurso de integração.
Em geral, o resultado é diferente para diferentes percursos entre os pontos $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$. E o integral só será igual ao aumento da energia cinética, se o percurso for a trajetória do corpo.

Exemplo 6.2. $\vec{F} = (3x+y)\hat{\imath}$ (no plano xy). $\vec{r}_1$ = origem e $\vec{r}_2 = \hat{\imath}+\hat{\jmath}$. Percurso 1: segmento desde (0,0) até (1,0), seguido do segmento desde (1,0) até (1,1). Percurso 2: segmento reto desde (0,0) até (1,1).

Resolução:



No percurso 1, $\displaystyle\int_O^P \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_O^Q \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_Q^P \vec{F}\cdot d\vec{r}$

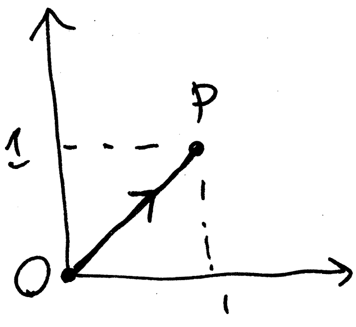
no segmento reto $\overline{OQ}$, $d\vec{r} = dx\,\hat{\imath}$
e $y=0 \Rightarrow \vec{F} = 3x\hat{\imath}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = 3x\,dx$

$$\Rightarrow \int_{\substack{O\\(\text{segmento } \overline{OQ})}}^{Q} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 3x\,dx = \frac{3}{2}$$

No segmento $\overline{QP}$, $d\vec{r} = dy\,\hat{\jmath}$, $x=1$. $\Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

$$\Rightarrow \int_{\substack{Q\\(\overline{QP})}}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \int_{\substack{O\\(\text{percurso } 1)}}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{3}{2}$$

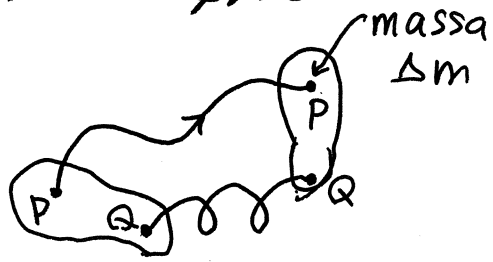
Percurso 2. $y = x$, $d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} = (\hat{\imath}+\hat{\jmath})dx$
$\vec{F} = (3x+y)\hat{\imath} = 4x\hat{\imath}$
$\vec{F}\cdot d\vec{r} = 4x\,dx$



$$\Rightarrow \int_{\substack{O\\(\text{percurso } 2)}}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 4x\,dx = 2$$

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

No movimento mais geral do corpo rígido, cada ponto segue uma trajetória diferente, com velocidade $\vec{v}$ e $\vec{a}$ própria desse ponto.



força resultante na massa Δm no ponto P:

$$\Delta\vec{F} = \vec{a}\,\Delta m \implies \Delta F_t = a_t\,\Delta m = v\frac{dv}{ds}\,\Delta m$$

ΔW_{12} = trabalho de $\Delta\vec{F}$ ao longo da trajetória de P, entre s_1 e s_2.

$$\Delta W_{12} = \int_1^2 \Delta F_t\,ds = \Delta m\int_1^2 v\,dv = \frac{1}{2}\Delta m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m\,v_1^2$$

W_{12} = trabalho da força resultante no corpo rígido

$$W_{12} = \sum_{i=1}^{n} W_{12i} = \iiint_{\text{corpo}} dW_{12} = \frac{1}{2}\iiint v_2^2\,dm - \frac{1}{2}\iiint v_1^2\,dm$$

forças externas

$$= E_{c2} - E_{c1}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\iiint v^2\,dm$$

$\vec{v}$ de qualquer ponto P, relativa a Q, é $\vec{\omega}\times\vec{r}_{P/Q}$. Em relação ao centro de massa,

$$\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$ ($\vec{r}$ = posição de P, com origem no centro de massa)

$$\implies v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = v_{cm}^2 + |\vec{\omega}\times\vec{r}|^2 + 2\,\vec{v}_{cm}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Se o eixo de rotação for escolhido como eixo z,

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \omega(-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}) \implies |\vec{\omega}\times\vec{r}|^2 = \omega^2(x^2+y^2)$$

$$\vec{v}_{cm}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = (-y\,v_{cm_x} + x\,v_{cm_y})\,\omega$$

$$E_c = \frac{1}{2}\iiint \left(v_{cm}^2 + \omega^2(x^2+y^2) - 2\omega y\, v_{cm_x} + 2\omega x\, v_{cm_y}\right) dm$$

$$= \frac{v_m^2}{2}\underbrace{\iiint dm}_{m} + \frac{\omega^2}{2}\underbrace{\iiint (x^2+y^2)\,dm}_{I_{cm}} - \omega v_{cm_x}\underbrace{\iiint y\,dm}_{y_{cm}} + \omega v_{cm_y}\underbrace{\iiint x\,dm}_{x_{cm}}$$

Como o c.m. está na origem, $x_{cm} = y_{cm} = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\,\omega^2}$$

energia de rotação

energia de translação