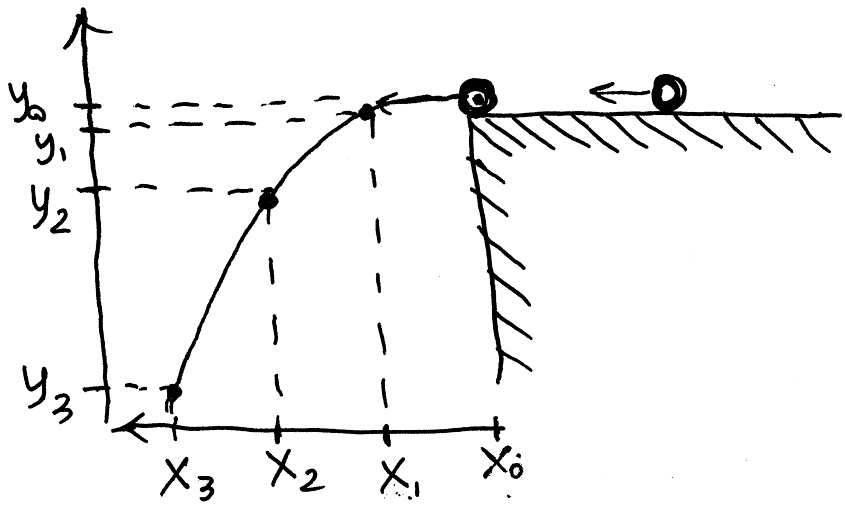
Aula 3. 2019-02-18

# LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

Quando um objeto não segue uma trajetória predeterminada, é mais conveniente estudar o movimento das projeções dum ponto no objeto, ao longo dos eixos coordenados.




Um exemplo é o movimento dum objeto, lançado horizontalmente; a cada instante $t_j$, as projeções da posição do objeto, num eixo horizontal $x$ e num eixo vertical $y$, são $x(t_j)$ e $y(t_j)$.

$x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas do tempo $t$.

As suas derivadas em ordem ao tempo são as velocidades e acelerações nos dois eixos:

$$v_x = \dot{x}\ , \quad a_x = \dot{v}_x\ , \quad a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

$$v_y = \dot{y}\ , \quad a_y = \dot{v}_y\ , \quad a_y = v_y \frac{dv_y}{dy}$$

No caso do lançamento do projétil desde uma plataforma horizontal, Galileu Galilei descobriu, no século XVII, que em intervalos de tempo iguais, $\Delta t$, as posições na horizontal, $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ estão igualmente distanciadas ( $x_{j+1} - x_j = \Delta x = \text{constante}$ ), enquanto as posições na vertical aumentam na proporção de números ímpares:

$$y_1 - y_0 = \Delta y\ , \quad y_2 - y_1 = 3\Delta y\ , \quad y_3 - y_2 = 5\Delta y\ , \ldots$$

Como tal,

$$\begin{cases} x_j = x_0 + j\Delta x = x_0 + v_x t_j \quad (t_j = j\Delta t,\ v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}) \\ y_j = y_0 - \Delta y - 3\Delta y - \dots - (2j-1)\Delta y = y_0 - j^2 \Delta y \end{cases}$$

$$j = \frac{t_j}{\Delta t} \implies y_j = y_0 - \left(\frac{\Delta y}{\Delta t^2}\right) t_j^2$$

$\Rightarrow$ A projeção na horizontal é um <u>movimento uniforme</u> (aceleração nula): $\ddot{x} = a_x = 0$, $\dot{x} = v_x$ = constante

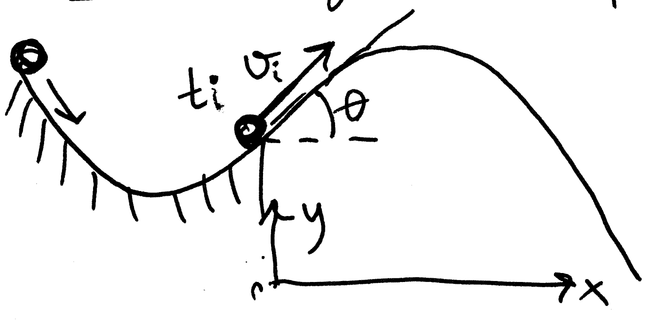
E a projeção na vertical é um <u>movimento uniformemente acelerado</u> (aceleração constante):

$$a_y = \ddot{y} = -\frac{2\Delta y}{\Delta t^2} = -g \qquad g = \text{constante} = \text{aceleração da gravidade}$$

O valor de $g$ varia, em diferentes localidades, mas é aproximadamente:

$$\boxed{g = 9.8 \frac{m}{s^2}}$$

<u>Movimento geral dos projéteis</u>:




em $t_i$, quando abandona a plataforma, a velocidade é $v_i$ e faz um ângulo $\theta$ com a horizontal.

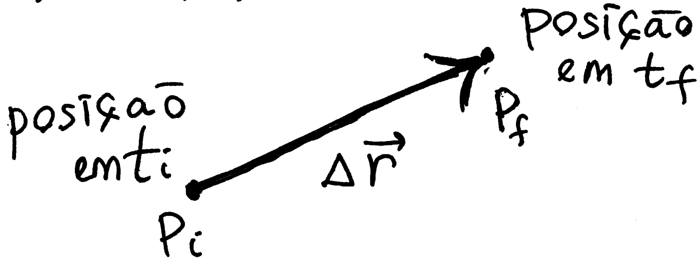
$$v_x = v_i \cos\theta = \text{constante} \implies x = x_i + v_x(t - t_i)$$

$$v_{iy} = v_i \sin\theta, \qquad a_y = -g = \text{constante}$$

$$-g = \frac{dv_y}{dt} \implies v_y(t) = v_{iy} - g(t - t_i)$$

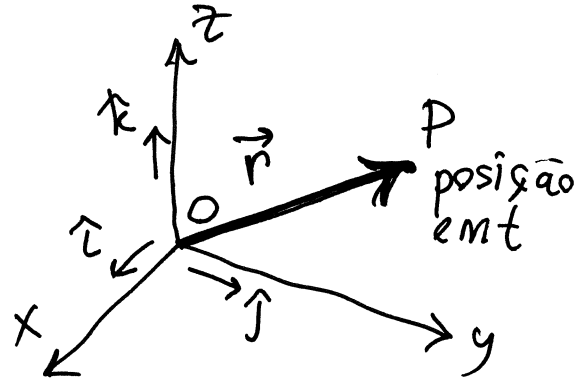
$$v_{iy} - g(t - t_i) = \frac{dy}{dt} \implies y = y_i + v_{iy}(t - t_i) - \frac{g}{2}(t - t_i)^2$$

# DESLOCAMENTO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO VETORIAIS




$\Delta\vec{r}$ = deslocamento vetorial no intervalo $[t_i, t_f]$

Num sistema de coordenadas com origem no ponto O, o vetor $\vec{r}$ que vai da origem até o ponto P, onde se encontra o objeto no instante $t$, chama-se <u>vetor posição</u>:

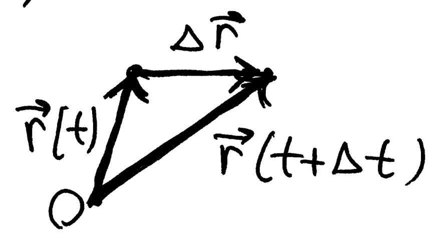



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

($\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ = versores nas direções dos eixos x, y e z)

Deslocamento no intervalo $[t, t+\Delta t]$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$
$$= \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} + \Delta z\,\hat{k}$$




Vetor velocidade:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath} + \dot{z}\,\hat{k}}$$

Vetor aceleração:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)$$

$$\boxed{\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} = \dot{v}_x\hat{\imath} + \dot{v}_y\hat{\jmath} + \dot{v}_z\hat{k}}$$

**Exemplo** 2.2 (do livro). A velocidade de uma partícula, em função do tempo $t$, é

$$\vec{v} = \left(5 - t^2 e^{-\frac{t}{5}}\right)\hat{\imath} + \left(3 - e^{-\frac{t}{12}}\right)\hat{\jmath} \quad \text{(SI)}$$

em $t=0$, a sua posição é $(2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})$. Determine $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{r}(t=15)$, $\vec{v}(t=15)$, $\vec{a}(t=15)$ e os limites de $\vec{v}$ e $\vec{a}$ em $t \to \infty$.

Resolução: No Maxima, os vetores podem ser representados por listas

```
(%i1) v: [5-t^2 exp(-t/5), 3-exp(-t/12)];
(%i2) a: diff(v,t);
```

(derivada de cada elemento na lista v)

$$\longrightarrow \quad \vec{a} = \left(\frac{t^2 e^{-\frac{t}{5}}}{5} - 2te^{-\frac{t}{5}}\right)\hat{\imath} + \frac{e^{-\frac{t}{12}}}{12}\hat{\jmath}$$

```
(%i3) assume(t>0);
(%i4) r: [2,5] + integrate(v,t,0,t);
(%i5) expand(%);
```

$$\longrightarrow \quad \vec{r} = \left((5t^2 + 50t + 250)e^{-\frac{t}{5}} + 5t - 248\right)\hat{\imath} + \left(12e^{-\frac{t}{12}} + 3t - 7\right)\hat{\jmath}$$

lista de 3 listas

```
(%i6) float(subst(t=15, [r,v,a]));
```

$$\rightarrow \vec{r}(15) = -67.2\hat{\imath} + 41.44\hat{\jmath} \quad \vec{v}(15) = -6.20\hat{\imath} + 2.71\hat{\jmath}$$

$$\vec{a}(15) = 0.75\hat{\imath} + 0.024\hat{\jmath}$$

No limite $t \to \infty$:

```
(%i7) limit([r,v,a], t, inf);
```

$$\longrightarrow \vec{r}(\infty) = \infty\hat{\imath} + \infty\hat{\jmath}, \quad \vec{v}(\infty) = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}, \quad \vec{a}(\infty) = \vec{0}$$