Aula 16. 2019-04-08

Exemplos de sistemas dinâmicos

① Modelo SIR das doenças contagiosas.

Número de indivíduos $= N = S + I + R$

$S \to$ susceptíveis à doença.
$I \to$ infetados
$R \to$ recuperados (imunes)

Duas equações de evolução:

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = -aI + bSI \\ \dfrac{dS}{dt} = -bSI \end{cases}$$

estado $\to (I, S)$

velocidade de fase:

$\vec{u} = (\dot{I}, \dot{S}) = (-aI + bSI, -bSI)$

② Equações diferenciais. Exemplo:

$x^2 y''' + 3xy' - e^x y = 2x$

definem-se:

derivadas em x

$z = y'\,,\quad v = y'' = z'$

$\Rightarrow \quad x^2 v' + 3xz - e^x y = 2x$

3 equações de evolução:
$$\begin{cases} y' = z \\ z' = v \\ v' = \dfrac{2x + e^x y - 3xz}{x^2} \end{cases}$$

estado $\to (y, z, v)$ $\quad \vec{u} = (y', z', v')$

$\vec{u} = (z, v, (2x + e^x y - 3xz)/x^2)$ variável independente $\to x$

③ Pêndulo. $\quad \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta$ (eq. de movimento)

2 equações de evolução
$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta \end{cases}$$

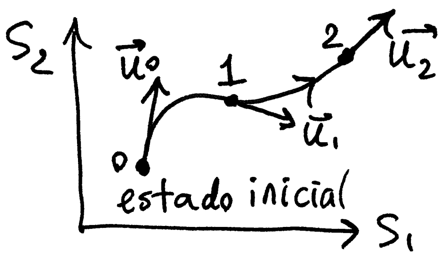
estado $\to (\theta, \omega)$ $\quad \vec{u} = (\dot{\theta}, \dot{\omega}) = (\omega, -\frac{g}{l}\sin\theta)$

Os exemplos 1 e 3 são sistemas **autónomos**, porque $\vec{u}$ não depende da variável independente (t).
Num sistema autónomo, a evolução a partir dum estado incial, em t_0, não depende do valor de t_0.

SISTEMAS AUTÓNOMOS COM 2 VARIÁVEIS.

$$\begin{cases} \dfrac{ds_1}{dt} = f_1(s_1, s_2) \\[2ex] \dfrac{ds_2}{dt} = f_2(s_1, s_2) \end{cases}$$

$$\vec{u} = (\dot{s}_1, \dot{s}_2) = (f_1, f_2)$$



PONTOS DE EQUILÍBRIO

Pontos do espaço de fase onde $\vec{u} = \vec{0}$ ($f_1 = 0$ e $f_2 = 0$)

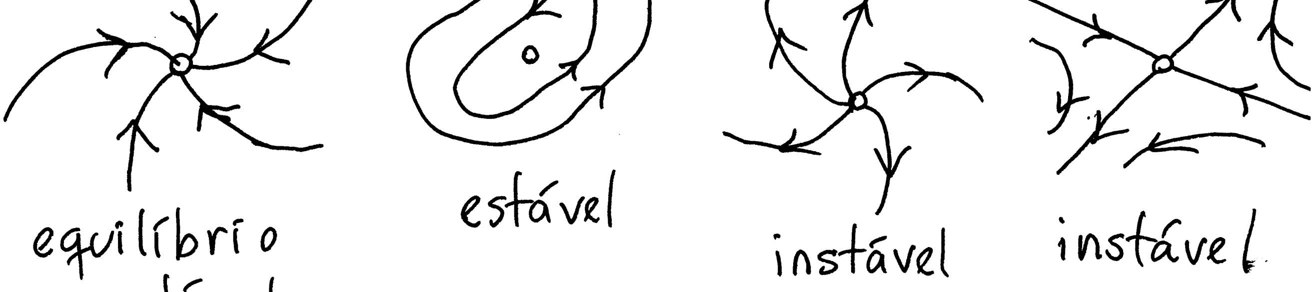
Se num instante t_0 o estado do sistema for ponto de equilíbrio, esse estado permanecerá constante em $t > t_0$.

Há dois tipos:

Ponto de equilíbrio estável. Se em t_0 o estado estiver próximo desse ponto P, em $t > t_0$ o estado continuará próximo de P.

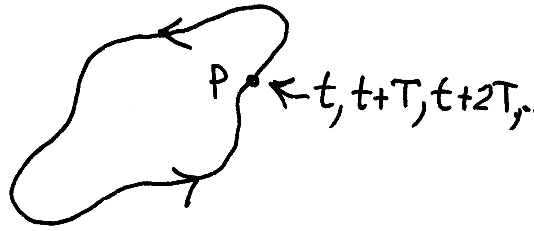
Ponto de equilíbrio instável. Se em t_0 o estado estiver próximo de P, em $t > t_0$ estará cada vez mais afastado de P.

Exemplos. O círculo representa um ponto de equilíbrio e as curvas são curvas de evolução.



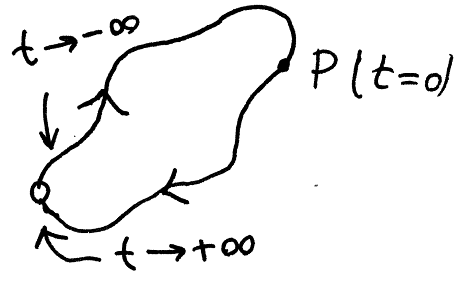
equilíbrio estável — estável — instável — instável

CICLOS. Curvas de evolução fechadas ⇒ oscilação do sistema



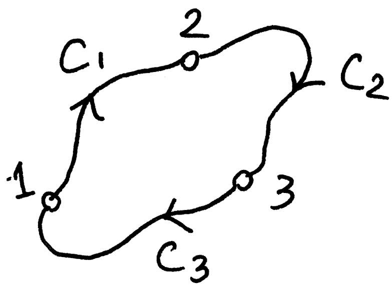
Cada estado P no ciclo repete-se indefinidamente em t, $t+T$, $t+2T$, ...

ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS



Curvas fechadas, mas com um ponto de equilíbrio ⇒ Oscilação que só ocorre uma vez (quando o estado chega ao ponto de equilíbrio já não muda).

ÓRBITAS HETEROCLÍNICAS



n curvas de evolução, C_i, entre n pontos de equilíbrio, formando uma curva fechada. $(n \geq 2)$

SISTEMAS CONSERVATIVOS

$\dot{s}_1 = f_1(s_1, s_2)$, $\dot{s}_2 = f_2(s_1, s_2)$ é conservativo, se a divergência da velocidade de fase for sempre nula:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial f_1}{\partial s_1} + \frac{\partial f_2}{\partial s_2} = 0 \quad (\text{para quaisquer } s_1 \text{ e } s_2)$$

⇒ existe uma função $H(s_1, s_2)$ (hamiltoniana), tal que:

$$\boxed{\dot{s}_1 = \frac{\partial H}{\partial s_2}\ , \quad \dot{s}_2 = -\frac{\partial H}{\partial s_1}}$$ equações de Hamilton

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s_1}\frac{ds_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial s_2}\frac{ds_2}{dt} = -\frac{ds_2}{dt}\frac{ds_1}{dt} + \frac{ds_1}{dt}\frac{ds_2}{dt} = 0 \quad \left(\begin{matrix}H\\ \text{constante}\end{matrix}\right)$$

Como tal, as curvas de evolução são as curvas de nível da função $H(s_1, s_2)$ (curvas onde H permanece constante)