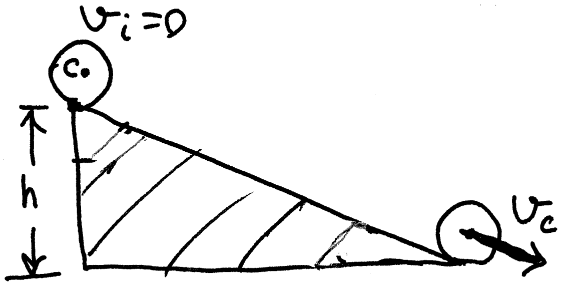
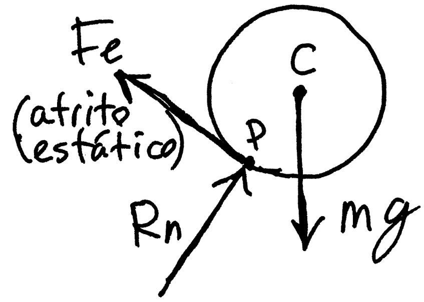
Aula 14. 2019-04-01

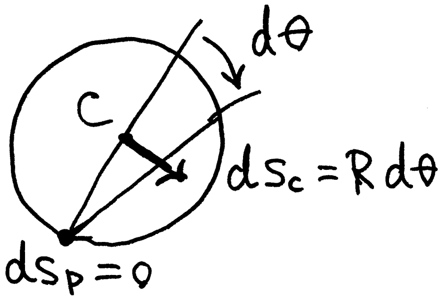
Exemplo. Uma esfera homogénea, de raio R e massa m, parte do repouso, a uma altura h, num plano inclinado, e roda sem deslizar, descendo o plano. Determine a velocidade do centro da esfera no fim do plano inclinado.



Forças externas

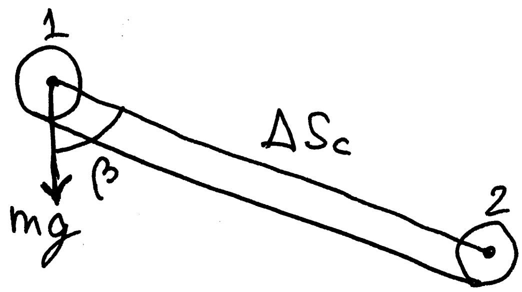


deslocamentos



$$v_c = \frac{ds_c}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$\Rightarrow$ As forças que atuam em P (R_n e F_e) não realizam trabalho.



trabalho total = trabalho do peso

$$= \int_1^2 mg\cos\beta\, ds = mg\underbrace{\Delta s_c\cos\beta}_{h}$$

$\Rightarrow W_{12} = mgh$

(não depende do declive do plano)

$$E_{c_i} = 0 \qquad E_{c_f} = \frac{1}{2}m v_c^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$ (tabela 5.1) $\Rightarrow E_{c_f} = \frac{m}{2}v_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v_c}{R}\right)^2$

usando o teorema do trabalho e a energia cinética

$$mgh = \frac{7}{10}m v_c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_c = \sqrt{\frac{10\,gh}{7}}}$$

FORÇAS CONSERVATIVAS

No exemplo anterior, qualquer que fosse a trajetória do ponto C, o trabalho do peso seria sempre mg x altura que C desce.

$$W_{12} = \int_1^2 mg\cos\beta\, ds = -\int_1^2 mg\, dh = mg(h_1 - h_2)$$ a pesar de β ser variável.

Diz-se que o peso é uma **força conservativa**, porque o trabalho que realiza entre dois pontos não depende da trajetória, apenas das posições dos pontos 1 e 2.

Energia potencial. Define-se a energia potencial gravífica, U_g, na posição $\vec{r}$:

$$U_g = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} m\vec{g}\cdot d\vec{r} = mg\int_0^h dh = mgh = \text{peso} \times \text{altura}$$

onde $\vec{r}_0$ é um ponto onde arbitra-se $h_0 = 0$

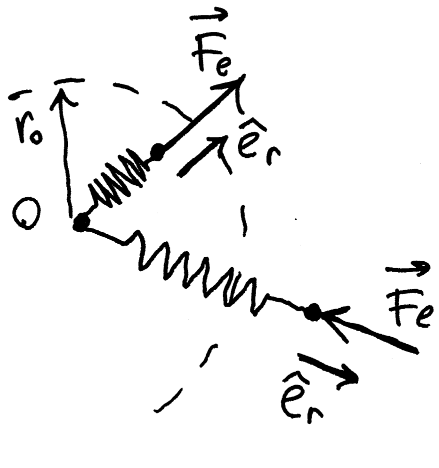
Entre dois pontos 1 e 2, com alturas h_1 e h_2, o trabalho do peso é:

$$W_{12} = \int_1^2 m\vec{g}\cdot d\vec{r} = -\int_{h_1}^{h_2} mg\, dh = mg(h_1 - h_2)$$

$$\boxed{W_{12} = U_{g_1} - U_{g_2}}$$

FORÇA ELÁSTICA

Uma mola, de comprimento r_0, com um extremo fixo na origem, produz força elástica $\vec{F}_e$, na direção radial.



elongação = $z = r - r_0$

Lei de Hooke. O módulo da força elástica é diretamente proporcional a $|z|$.

$$z = \begin{cases} >0 \rightarrow \text{força no sentido oposto ao versor } \hat{e}_r \\ <0 \rightarrow \text{força no sentido do versor } \hat{e}_r \\ =0 \rightarrow \text{força nula} \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{F}_e = -k z \hat{e}_r$ $\quad$ k = constante elástica da mola (unidades de força sobre distância)

Em coordenadas polares, (r,θ): $d\vec{r} = \hat{e}_r\, dr + \hat{e}_\theta\, r\, d\theta$

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -kz(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r)dr - kz(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta) r\, d\theta = -kz\, dr$$

$$dz = d(r - r_0) = dr$$

. trabalho da força elástica, desde $\vec{r}_1$ até $\vec{r}_2$:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -k \int_{z_1}^{z_2} z\, dz = \frac{1}{2}k z_1^2 - \frac{1}{2}k z_2^2$$
$$= U_{e_1} - U_{e_2}$$

A força elástica é conservativa, com energia potencial elástica: $U_e = \frac{1}{2}kz^2$

ENERGIA MECÂNICA

$$E_m = E_c + U_g + U_e + \cdots = E_c + U$$

soma das energias potenciais de todas as forças conservativas

$$W_{12} = W_{12}^{cons.} + W_{12}^{n.c.} = E_{c_2} - E_{c_1}$$

$W_{12}^{cons.}$ = trabalho das forças conservativas

$W_{12}^{n.c}$ = trab. das forças não conservativas

$$U_1 - U_2 + W_{12}^{n.c.} = E_{c_2} - E_{c_1}$$

$$\Rightarrow W_{12}^{n.c.} = (E_{c_2} + U_2) - (E_{c_1} + U_1)$$

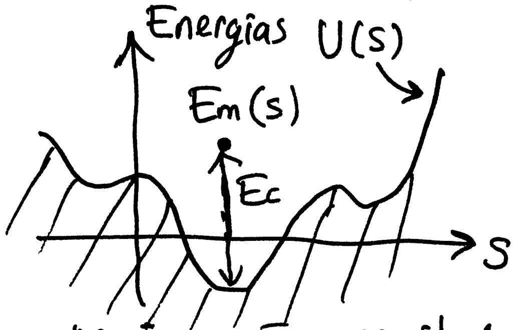
$$\boxed{W_{12}^{n.c.} = E_{m_2} - E_{m_1}}$$

O aumento da energia mecânica é igual ao trabalho de todas as forças não conservativas.

Sistemas conservativos: sistemas em que as forças não conservativas não realizam trabalho. A energia mecânica permanece constante.

ANÁLISE GRÁFICA DO MOVIMENTO

Num sistema com um único grau de liberdade, s, no gráfico da energia potencial total, U(s), a energia mecânica deverá estar sempre por cima de U(s), porque:

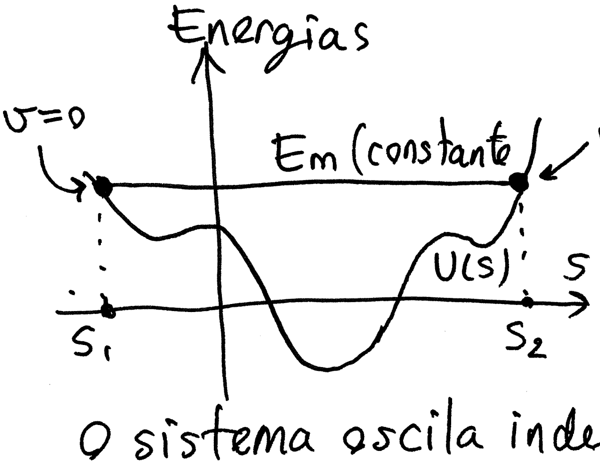


região não permitida para Em.

$$E_m - U = E_c \geq 0$$

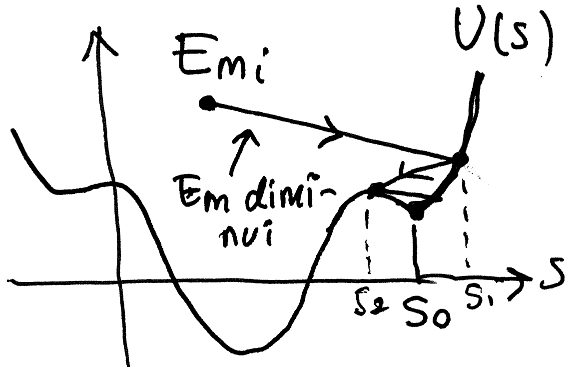
A distância entre Em(s) e U(s) é a energia cinética. O gráfico de U(s) e Em(s) permite analisar o movimento. Exemplos:

Sistema conservativo



O sistema oscila indefinidamente entre s_1 e s_2

Sistema dissipativo



O sistema para em s_1, s_2, s_3, ... e fica em repouso em s_0.