Aula 11. 2019-03-20

MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\iiint \frac{d\vec{r}}{dt}\, dm = \frac{1}{M}\iiint \vec{v}\, dm$$

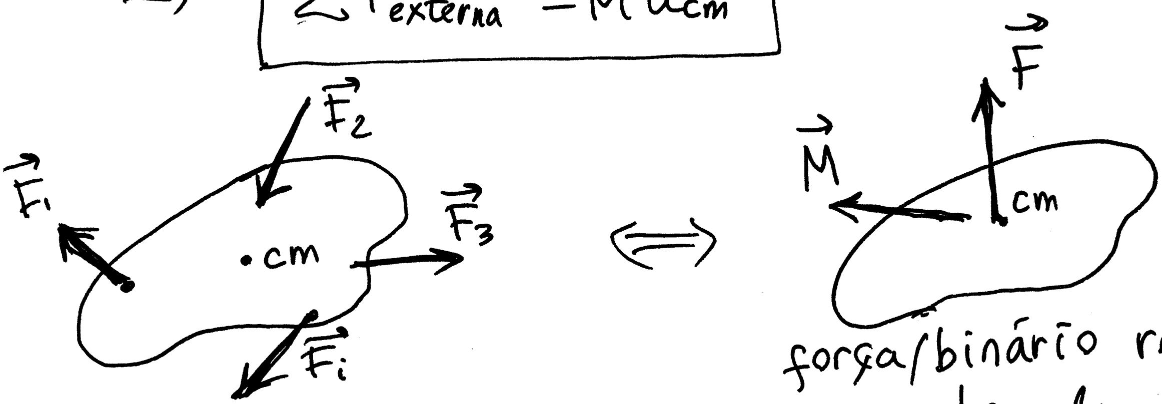
$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\iiint \vec{a}\, dm \Rightarrow M\vec{a}_{cm} = \iiint \vec{a}\, dm$$

$\vec{a}\, dm = d\vec{F}$ = força resultante sobre a massa dm, no volume infinitessimal $dx\,dy\,dz$, na posição $\vec{r}$

$$\Rightarrow \iiint d\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$$

$d\vec{F}$ inclui forças internas e externas. No integral, as forças internas anulam-se, ficando unicamente forças externas

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{externa} = M\vec{a}_{cm}}$$



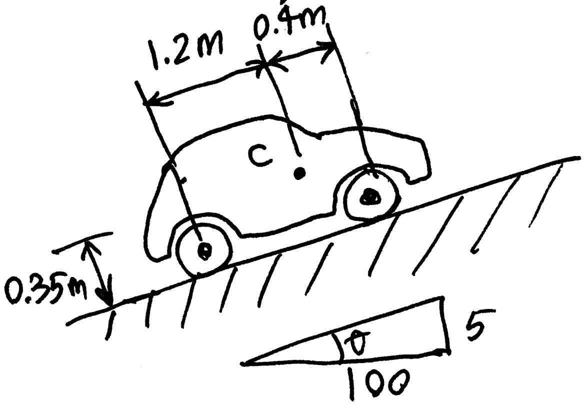
força/binário resultantes no centro de massa

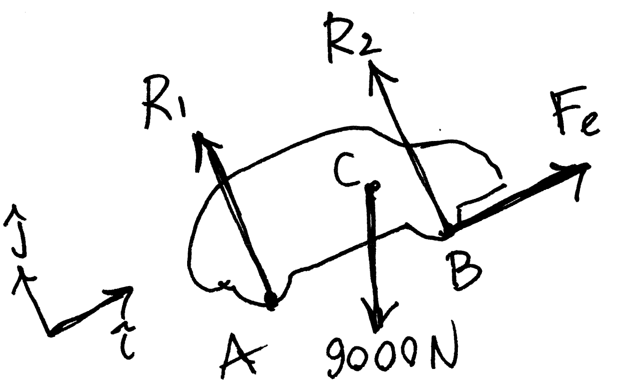
$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}}{M} = \frac{\sum \vec{F}_i}{M}$$

Se $\vec{M} = \vec{0}$, então não há aceleração angular ($\vec{\alpha} = \vec{0}$)

Se $\vec{M} = \vec{0}$ e $\vec{\omega} = 0$, o corpo tem movimento de translação, sem rotação, e a aceleração de todos os pontos no corpo é a mesma $\vec{a}_{cm}$.

Exemplo.





Determine a aceleração máxima que poderá ter o automóvel, com peso de 9000N, a subir a estrada com declive de 5%, se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada for $\mu_e = 0.3$, e a tração do automóvel for nas rodas da frente

Resolução. A máxima aceleração obtém se:

(i) $F_e = F_{e\,máx} = \mu_e R_2$

(ii) as rodas de atrás são perfeitamente livres ($F_{atrito} = 0$)

(iii) O automóvel está a começar a acelerar, com $v_i = 0$, ou seja, a resistência do ar é nula.

O movimento do automóvel é translação, sem rotação; com $a_y = 0$

$$\begin{cases} \sum F_x = m\,a \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{cm} = 0 \end{cases}$$

Com origem no c.m., $A = (-1.2, -0.35)$, $B = (0.4, -0.35)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-9000\cdot 5}{\sqrt{10025}} + 0.3 R_2 = \dfrac{9000\,a}{9.8} \\ R_1 + R_2 - 9000\cdot 100/\sqrt{10025} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1.2 & -0.35 \\ 0 & R_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.4 & -0.35 \\ 0.3R_2 & R_2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

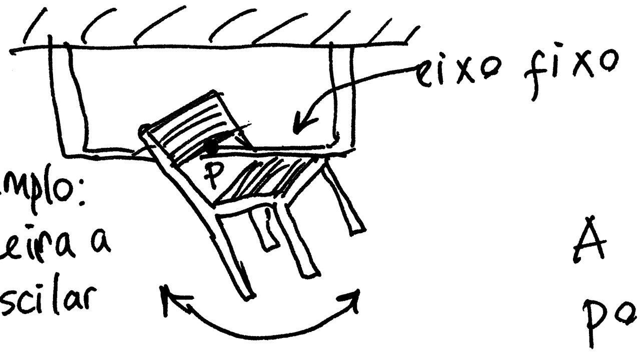
No Maxima:

```
e1: -9000*5/sqrt(10025) +0.3*R2 = 9000*a/9.8;
e2: R1+R2-9000*100/sqrt(10025) =0;
e3: determinant(matrix([-1.2,-0.35], [0, R1]))
    +determinant(matrix([0.4,-0.35],[0.3*R2, R2])) =0;
float(solve([e1,e2,e3]));
```

$\Rightarrow \boxed{a_{máx} = 1{,}577\ \frac{m}{s^2}}$

Se se conseguisse manter essa aceleração, demorava 17.6 s até atingir 100 $\frac{km}{h}$

ROTAÇÃO COM EIXO FIXO



Exemplo: cadeira a oscilar

O ponto P, em contacto com o eixo, está em repouso.

A aceleração de qualquer outro ponto, fora do eixo, é

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$ ($\vec{r}$ = posição com origem em P)

Escolhe-se o eixo do z no eixo de rotação:

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \omega\hat{k}\ ,\ \vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega(x\hat{\jmath} - y\hat{\imath})$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{r} = \alpha(x\hat{\jmath} - y\hat{\imath}) \Rightarrow a_t = \alpha R \quad \left(R = \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \Rightarrow a_n = \omega^2 R$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

R = distância até o eixo.