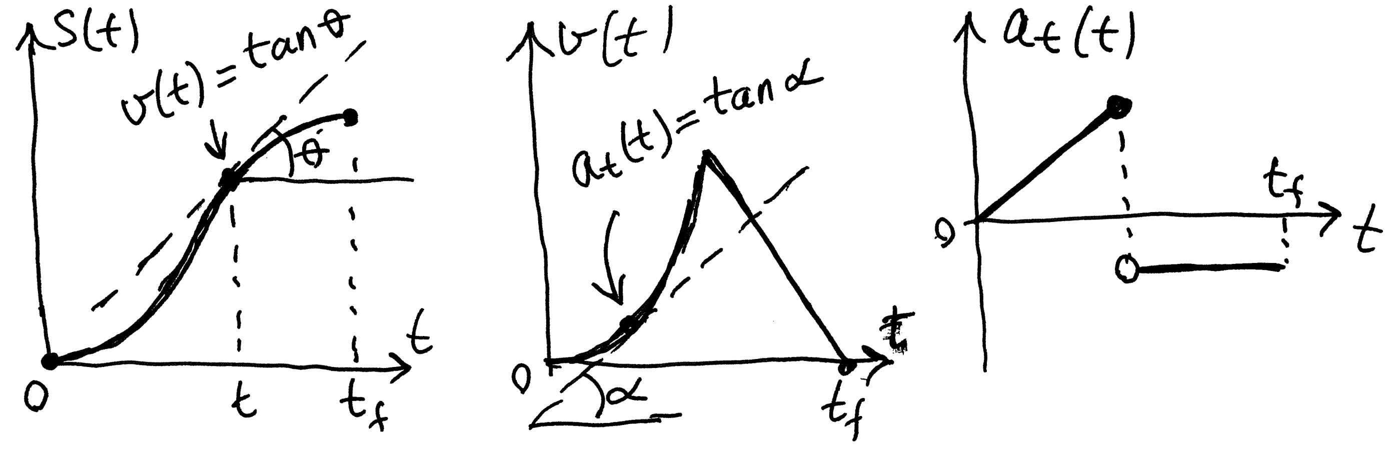
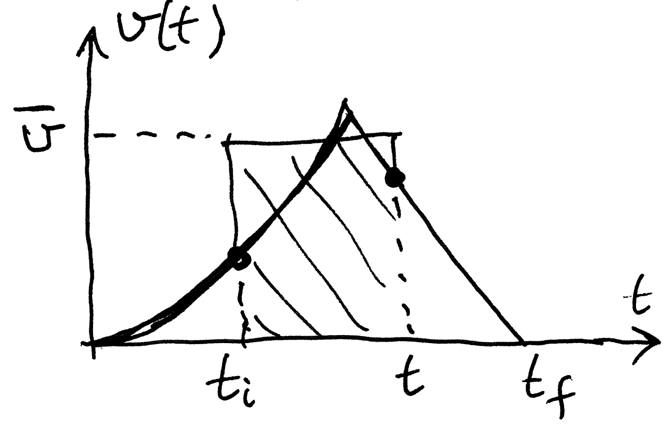
Aula 2. 2019-02-13

$$\boxed{v(t) = \dot{s}(t)} \qquad \boxed{a_t(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)}$$



Se a expressão de $v(t)$ é conhecida, como obter $s(t)$?

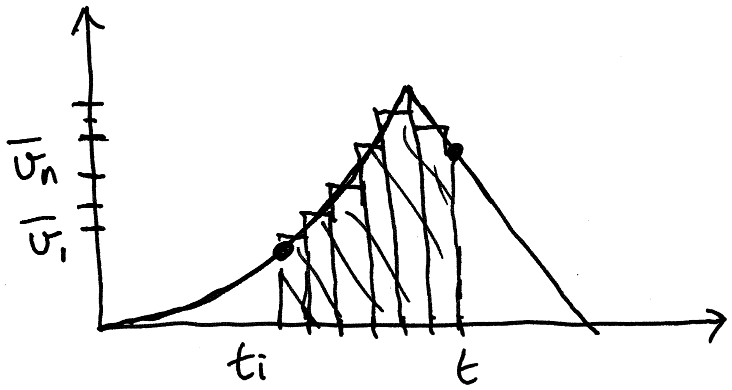


$\bar{v}$ = velocidade média no intervalo $[t_i, t]$

$$\bar{v} = \frac{s(t) - s_i}{t - t_i}$$

$$s(t) = s_i + \overbrace{\bar{v}\,(t - t_i)}^{\text{área na figura}}$$

O resultado é exato, mas como obter $\bar{v}$ a partir de $v(t)$?



n subintervalos:

$$\Delta t = \frac{t - t_i}{n}$$

n velocidades médias:

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$$

$$s(t) = s_i + \sum_{j=1}^{n} \bar{v}_j \, \Delta t$$

No limite $n \to \infty$, $\bar{v}_j$ aproxima-se de $v(t_j)$, e o somatorio infinito chama-se **primitiva** de $v(t)$:

$$\boxed{s(t) = s_i + \int_{t_i}^{t} v(t_j)\, dt_j}$$

Primitivas da função $v(t)$:

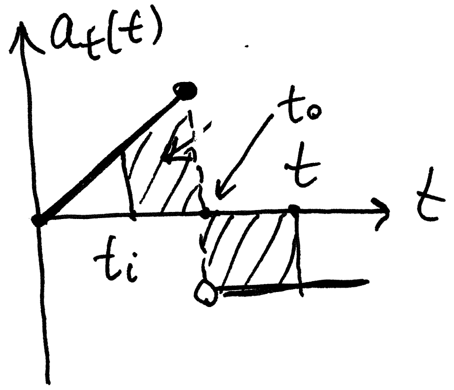
$$P_i(t) = \int_{t_i}^{t} v(t')\,dt'$$ (tantas primitivas quantos possíveis valores de t_i)

$$= \text{área sob a curva } v(t') \text{ em } t_i \le t' \le t$$

$$P_i(t) = s(t) - s_i \implies \frac{dP_i}{dt} = \dot{s}(t) = v(t)$$

A derivada de qualquer primitiva de uma função, é igual à função.

Obtenção de $v(t)$ a partir de $a_t(t)$:



$$v(t) = v_i + \int_{t_i}^{t} a_t(t')\,dt'$$

observe-se que a partir de t_0 $a_t\,dt'$ é negativa porque $a_t(t') < 0$. Também, se $t < t_i$
$\implies dt' < 0$ e $a_t(t')\,dt' < 0$

A cada instante t, corresponde um único valor, $s(t)$, da posição, e uma única velocidade $v(t)$. Como tal, a cada posição s corresponde uma única velocidade v. Se a expressão $v(s)$ for conhecida,

$$\implies a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v(s)\right) = \frac{dv(s)}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

Temos então 4 equações diferenciais:

$$v = \dot{s} \qquad a_t = \dot{v} \qquad a_t = \ddot{s} \qquad a_t = v\frac{dv}{ds}$$ (equações da cinemática)

Que, em alguns casos, podem ser invertidas usando primitivas.

MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Cada uma das 3 equações de primeira ordem ($v = \dot{s}$, $a_t = \dot{v}$, $a_t = v\frac{dv}{ds}$) relaciona 3 das variáveis t, s, v, a_t

Quando conhecemos uma expressão para s, v ou a_t, em função de t, s ou v, pode substituir-se essa expressão em alguma das equações de primeira ordem, ficando apenas com 2 das variáveis.

<u>Exemplo 1</u>: temos uma expressão $a_t = f(v)$ (função de v)

a equação $a_t = v\frac{dv}{ds}$ fica: $f(v) = v\frac{dv}{ds}$ (variáveis s e v)

- <u>Separam-se</u> as variáveis, agrupando a cada lado da equação o que depende de cada uma delas:

$$ds = \frac{v}{f(v)}\,dv$$

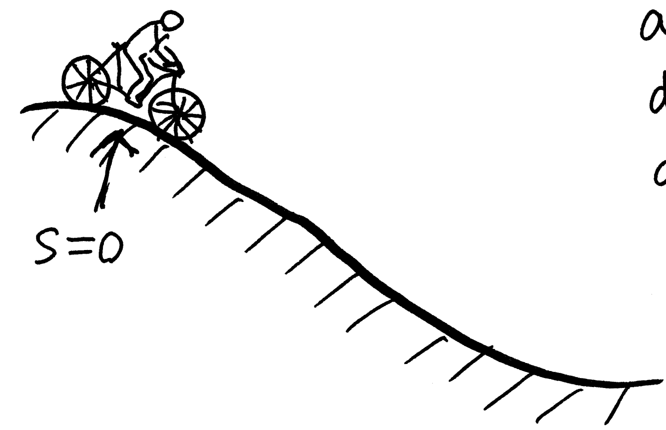
- Integram-se os dois lados, usando limites inferiores e superiores de integração que sejam consistentes no exemplo 1, as variáves de integração serão s e v. Se os limites de s fossem de s_1 para s_2, então os limites de v deveriam ser de v_1 (velocidade na posição 1) até v_2 (velocidade em s_2):

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{f(v)}\,dv$$

Um <u>integral</u>, com dois limites definidos é obtida a partir de qualquer primitiva:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t')\,dt' = P_i(t_2) - P_i(t_1) \qquad \left(P_i(t) = \int_{t_i}^{t} f(t')\,dt'\right)$$

Exemplo 2.



O ciclista trava, desde a posição $s=0$, fazendo diminuir a velocidade de acordo com a expressão:

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{100-s^2} \quad \text{(SI)}$$

até parar completamente. Determine quanto tempo demora até parar.

<u>Resolução</u>. A expressão dada substitui-se na equação $v=\dot{s}$, obtendo-se uma equação diferencial com as variáveis s e t:

$$\frac{1}{2}\sqrt{100-s^2} = \frac{ds}{dt}$$

separam-se as variáveis:

$$dt = \frac{ds}{\frac{1}{2}\sqrt{100-s^2}}$$

Seja t_i o instante em que começa a travar, em $s=0$, e t_f o instante em que para. Como tal, $s_i=0$ e s_f encontra-se resolvendo a equação $v=0$, com a expressão dada:

Maxima →

```
(%i1) v: sqrt(100-s^2)/2;
(%i2) solve(v=0, s);
(%i3) float(%); → [s=-10, s=10]
```

Para em $s_f=10$. Integrando:

$$\int_{t_i}^{t_f} dt = \int_0^{10} \frac{ds}{\frac{1}{2}\sqrt{100-s^2}}$$

```
(%i4) integrate(1/v, s, 0, 10); → %pi
```

$$\Rightarrow t_f - t_i = \pi \approx 3.1416$$

demora aproximadamente 3.14 segundos até parar.