

FÍSICA II - MIEIC - 2019/2020

Eletricidade, magnetismo e circuitos elétricos

Método semelhante à Física I.

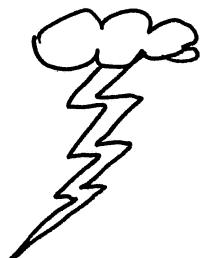
Consulte: <https://def.fe.up.pt/eic0014>

Importância. Compreender o funcionamento dos dispositivos.



Capítulo 1. CAMPO ELÉTRICO

Carga elétrica. Fenômenos como o trovão ou o choque que sentimos ao tocar alguns objetos são devidos à passagem de cargas elétricas. A força que mantém uma película aderente a uma chávena é força elétrica entre objetos com carga.

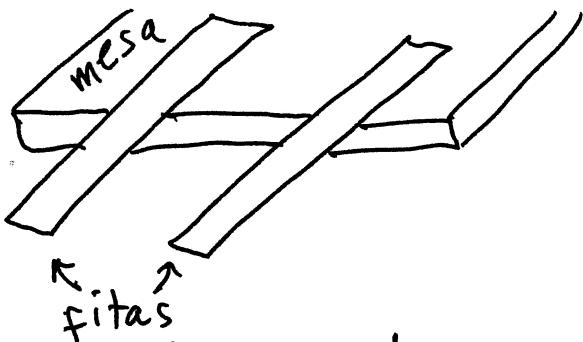


Existem dois tipos de cargas elétricas que têm sido chamadas "positiva" e "negativa".

- Entre dois objetos com cargas do mesmo tipo: força elétrica repulsiva.
- Entre dois objetos com cargas de diferente tipo: força elétrica atrativa.
- Um objeto ^{macroscópico} sem carga e outro com carga de qualquer tipo: força elétrica atrativa
- Dois objetos sem carga: força elétrica nula.

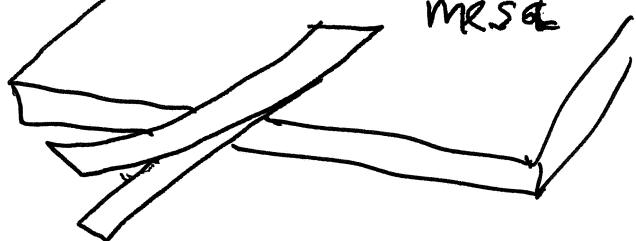
Experiência:

Cargas do mesmo tipo



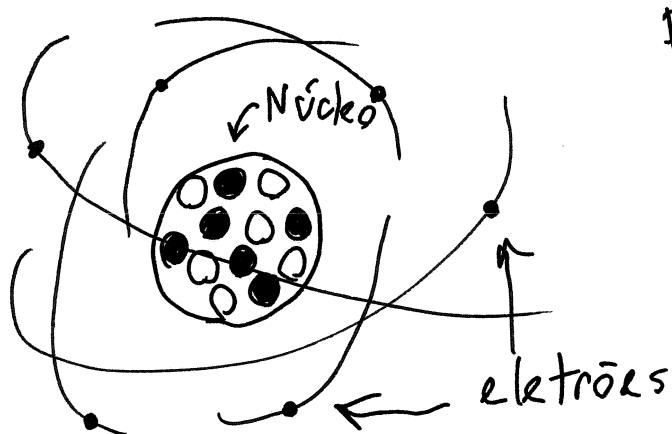
descalam-se dois pedaços de fita-cola de uma mesa, ficando com cargas do mesmo tipo.

Cargas de sinal oposto



Colam-se as duas fitas à mesa, uma por cima da outra. Descolam-se, juntas, lentamente, da mesa. A seguir descolam-se rapidamente entre elas.

ESTRUTURA DOS ÁTOMOS



Praticamente toda a massa está concentrada num núcleo de aproximadamente 10^{-15} m.

Em torno do núcleo há partículas muito mais pequenas e leves (eletróes), em órbitas de aproximadamente 10^{-10} m.

O núcleo está formado por **neutrões**, sem carga, e **protões**, com carga positiva. Os eletróes têm carga negativa com exatamente a mesma grandeza da carga dos protões, mas sinal oposto.

$q \rightarrow$ carga elétrica

$$q_{\text{protão}} = e \quad q_{\text{eletrão}} = -e$$

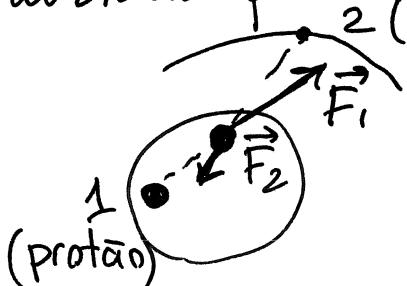
$e =$ carga elementar
(constante fundamental)
da natureza

Em unidades SI, q mede-se numa unidade chamada coulomb (C).

$$e = 1.602 \times 10^{-19} C$$

Em situações "normais", existem o mesmo número de elétrons do que prótons (átomo neutro). Uma partícula que esteja "longe" do átomo (distância muito maior do que $10^{-10} m$), não sente forças elétricas do átomo, porque o átomo aparece como objeto sem carga líquida.

Dentro do átomo, uma partícula com carga, por exemplo um dos prótons no núcleo, sente as forças produzidas pelos prótons e elétrons



Um átomo ionizado negativamente, com n elétrons a mais, tem carga:

$$q = -ne$$

e um átomo ionizado positivamente tem n elétrons em falta e carga: $q = +ne$

Propriedades da carga:

1 - Quantização: todas as partículas conhecidas têm cargas elétricas que são múltiplos inteiros da carga elementar e . $q_{\text{objeto}} = ne$ (n pos. ou neg)

2 - Conservação: A carga de cada partícula é sempre a mesma. Quando uma partícula é desintegrada, dando origem a novas partículas, a carga total das novas partículas é igual à carga da partícula inicial.

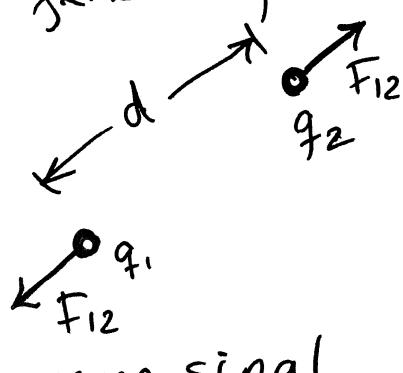
Exemplo: Radiação beta, que são elétrons que saem do núcleo, devido à desintegração de um neutrão, dando origem a um protão, mais um elétron, mais uma pequena partícula neutra (neutrino).

O novo átomo tem quase a mesma massa, pois as massas do neutrão e protão são semelhantes, mas tem mais uma carga positiva no núcleo.

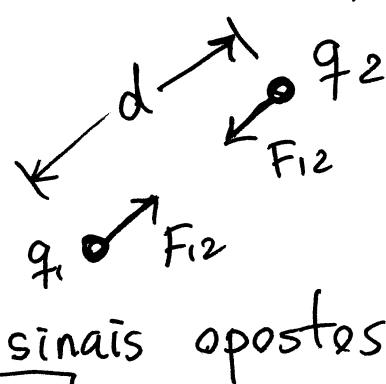
LEI DE COULOMB

A força elétrica entre duas **cargas pontuais** (carga concentrada numa região muito pequena em comparação com a distância até o outro objeto), é diretamente proporcional à magnitude de cada carga e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

A direção é na reta que passa pelas duas cargas pontuais, atrairá se os sinais das cargas forem diferentes, ou repulsira se os sinais forem iguais.



mesmo sinal



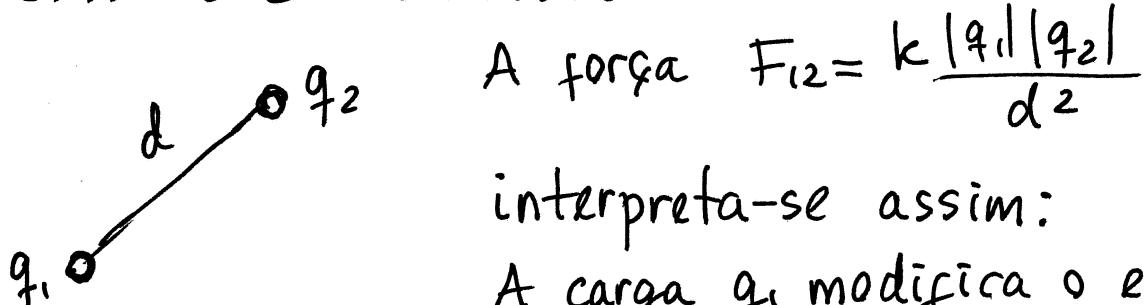
sinais opostos

$$F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{d^2}$$

k = constante de Coulomb. No sistema SI:

$$k = 8.998 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

CAMPO ELÉCTRICO



interpreta-se assim:

A carga q_1 modifica o espaço à sua volta, criando um **campo** com módulo:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} \quad r_1 = \text{distância desde } q_1.$$

A carga q_2 , colocada à distância $r_1 = d$, sente uma força devida à ação do campo E_1 sobre ela:

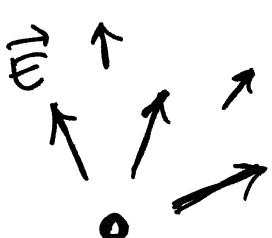
$$F_{12} = |q_2| E_1$$

De igual forma, a carga q_2 cria um campo com módulo: $E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2}$ $r_2 = \text{distância desde } q_2$.

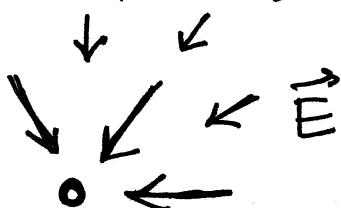
e a carga q_1 sente a ação desse campo E_2 :

$$F_{12} = |q_1| E_2$$

O campo \vec{E} produzido por uma carga pontual q é um vetor com módulo: $E = \frac{k|q|}{r}$ ($r = \text{distância}$ desde q), na direção da reta que passa por q (direção radial), afastando-se de q , se q for positiva, ou aproximando-se dela, se q for negativa.

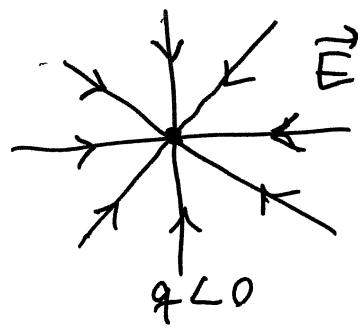
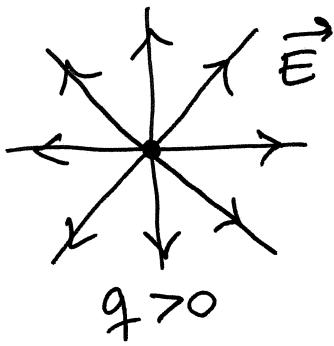


$$q > 0$$



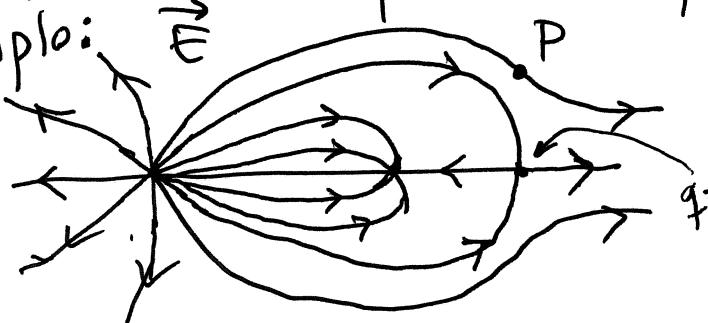
$$q < 0$$

uma representação simples consiste em usar linhas de campo:



Os campos \vec{E}_i de várias cargas somam-se, produzindo (vetorialmente) linhas de campo mais complicadas.

Exemplo:



Nos pontos de equilíbrio (onde começam ou terminam linhas) o campo \vec{E} é nulo. Neste exemplo há 3 pontos de equilíbrio, onde há

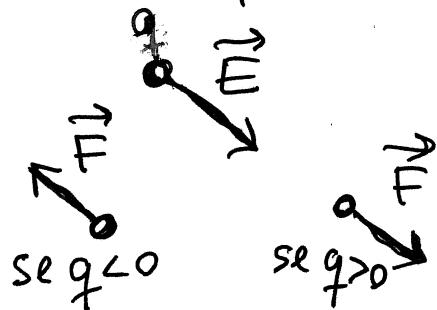
uma carga positiva, uma carga negativa e nenhuma carga.

Em qualquer ponto do espaço onde existe campo elétrico \vec{E} , uma partícula de carga q , colocada nesse ponto, sente força elétrica

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E}}$$

(indivise o sinal de q)

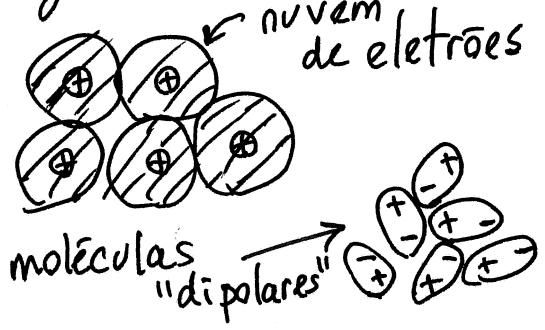
Exemplo: ponto P do exemplo anterior



Os materiais classificam-se em dois tipos:

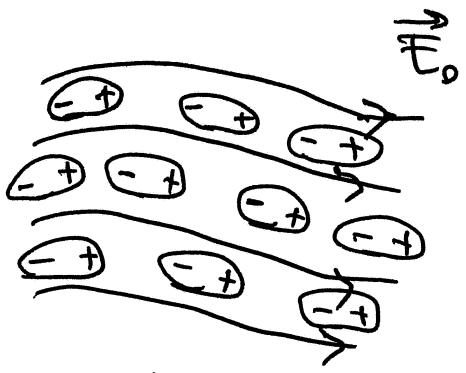
1. ISOLADORES (também chamados dielétricos)

As partículas com carga (eletrões e protões) permanecem ligadas às moléculas ou átomos no material



O campo \vec{E} médio no isolador é nulo, porque as cargas estão centradas no mesmo ponto em cada molécula, ou as moléculas têm campos fracos distribuídos aleatoriamente.

quando existirem cargas externas que produzem campo \vec{E}_0 , as moléculas polarizam-se com as cargas + no sentido de \vec{E}_0 e as cargas - no sentido oposto.



Isso dá origem a um campo interno \vec{E}_p ← polarização, oposto a \vec{E}_0 , mas $|\vec{E}_p| < |\vec{E}_0|$. → campo total

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \frac{\vec{E}_0}{K}$$

K = constante dielétrica

tem então as mesmas linhas de campo de \vec{E}_0 , mas módulo $|\vec{E}|$ menor que $|\vec{E}_0|$ numa proporção $K > 1$, que depende do material. Como tal, o campo \vec{E} produzido por uma carga q , com dielétrico à sua volta é:

$$|\vec{E}| = \frac{k|q|}{Kd^2}$$

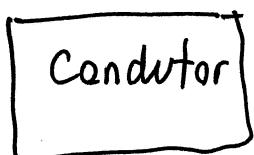
Exemplos de dielétricos:

- ar seco ($K \approx 1.00059$)
- óleo ($K \approx 2.24$)
- água desfilada ($K \approx 80$, a 20°C)
- papel ($K \approx 3.7$)
- vidro ($K \approx 5.6$)

2. CONDUTORES. Possuem cargas livres (eletrões ou iões) que deslocam-se livremente no material.

Exemplos: Metais (eletrões livres), Soluções (iões), Plasmas (ar ionizado). Um campo externo também polariza o condutor (mas o objeto todo e não cada atomo).

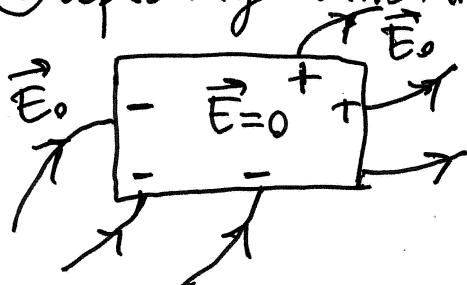
a)



b) aplica-se \vec{E}_0



c) após algum instante:



Eletrização por fricção.



caneta esfregada
no cabelo

passam elétrões entre
o cabelo e a caneta,
ficando um deles com
carga negativa (excesso
de elétrões) e o outro com a mesma
carga mas positiva (falta de elétrões)

Série triboelétrica

- + ↑ Cabelo humano
- : alumínio
- ↓ plástico

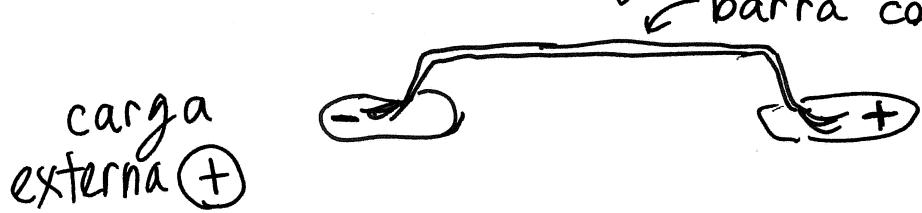
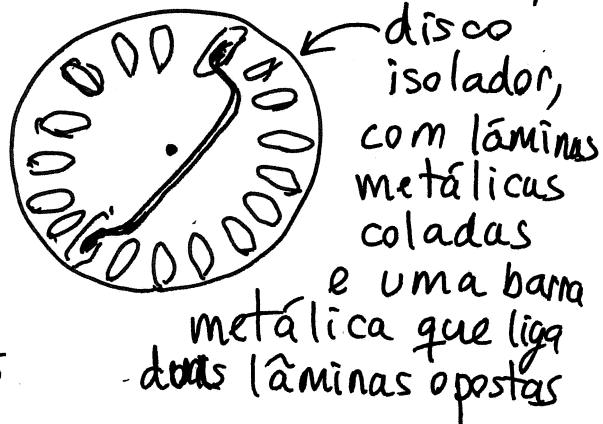
Os materiais acima na série
são mais suscetíveis a perder
elétrões. Como tal, a caneta
(plástico) ficou com carga -
e o cabelo com carga +.

Uma barra de alumínio, esfregada no cabelo, fica também com carga -. Mas se for esfregada com plástico, fica com carga +.

Eletrização por indução. Método que permite induzir cargas muito elevadas nos condutores. Exemplo:

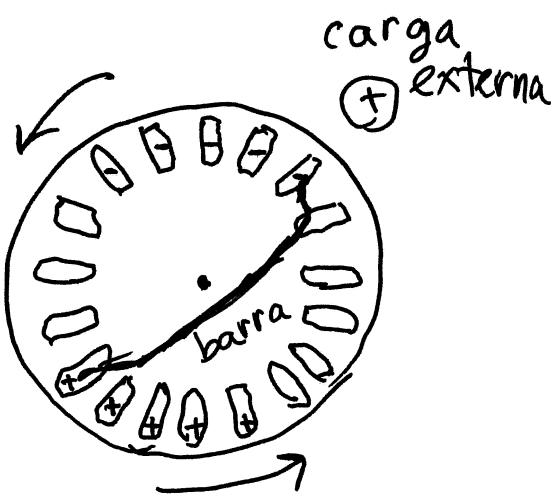
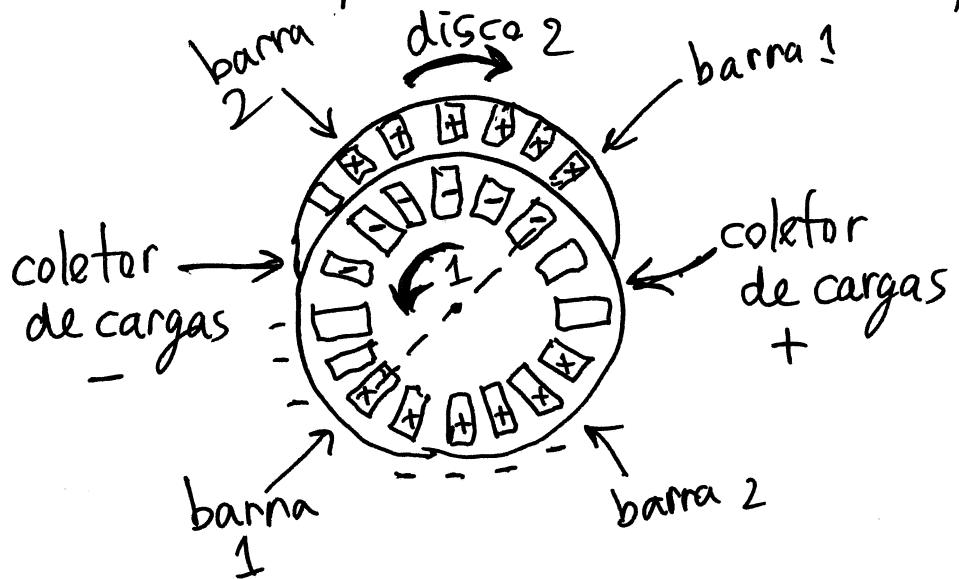
Gerador de Wimshurst:

Se, no instante em que
duas lâminas no disco
estão ligadas pela barra,
aproxima-se dumha das lâminas
um cargo +, a lâmina mais
próxima fica com carga - e a lâmina mais
afastada com carga +



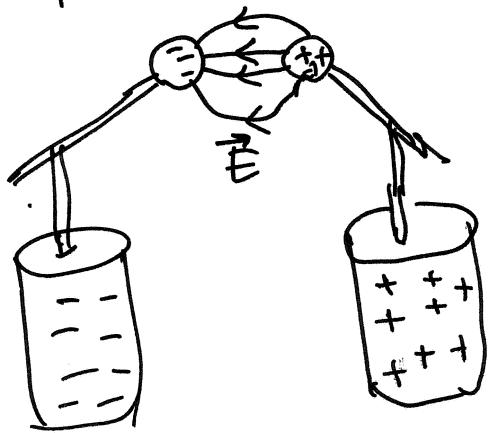
A rotação do disco faz com que as lâminas percam o contacto, ficando as cargas + e - nas lâminas isoladas.

Pela sua vez, essas cargas induzem cargas num segundo disco que roda no sentido oposto



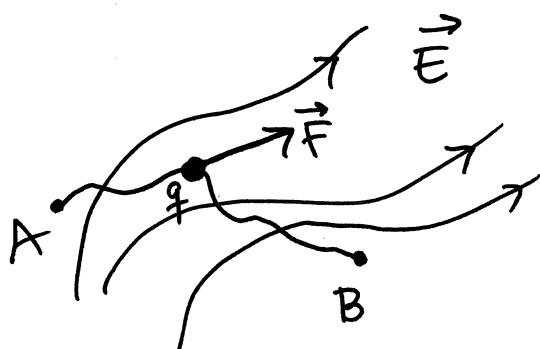
Antes de completar cada volta, as lâminas passam próximo de escovas metálicas (coletores) ligadas a duas garrafas metálicas, onde são coletadas as cargas das lâminas ficando descarregadas.

As cargas (+ e -) nas duas garrafas aumentam exponencialmente. O campo entre duas esferas metálicas ligadas às garrafas aumenta tanto que chega a ionizar o ar, produzindo descarga brusca das garrafas (tal como o trovão descarrega uma nuvem).



trabalho para casa: ler seção 1.7. do livro.

ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA



Força elétrica sobre uma carga pontual q :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Qualquer que seja o campo (eletrostático), é produzido por várias cargas pontuais.

A força produzida por cada carga pontual é central e, como tal, é conservativa (Física I).

Conclui-se que $\vec{F} = q\vec{E}$ é força conservativa:

O trabalho realizado pela força elétrica, quando uma carga pontual desloca-se entre dois pontos A e B , numa região onde existe campo elétrico, não depende do percurso, e é igual à diminuição da energia potencial elétrica, U .

integral de linha

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_A - U_B$$

qualquer que for o percurso desde A até B .

POTENCIAL ELÉTRICO

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

como o integral de \vec{F} não depende do percurso, então o integral de \vec{E} também não. Isso permite-nos definir outra função da posição, V , chamada potencial elétrico

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

os valores de V_A e V_B podem ser arbitrários, mas $V_A - V_B$ não!

Unidade SI de potencial: volt (V)

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} \text{ (joule sobre coulomb)}$$

As cargas modificam o espaço à sua volta, criando um campo escalar V (cada ponto do espaço tem um determinado valor numérico V).

Uma carga pontual q , colocada num ponto P onde o potencial for V , terá energia potencial elétrica:

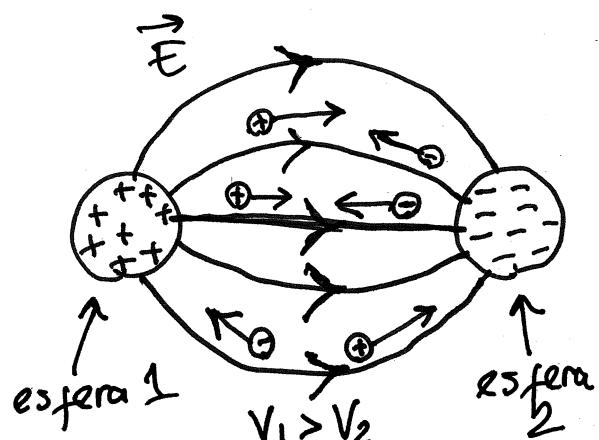
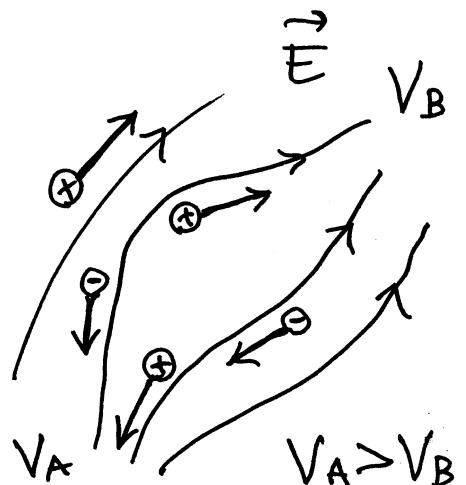
$$\boxed{U = qV}$$

$V \rightarrow$ propriedade do espaço
 $U \rightarrow$ propriedade da partícula

A definição $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ implica que V diminui na direção das linhas de campo. Quando a partícula acelera, pela ação da força elétrica, ganha energia cinética e, portanto, perde energia de potencial elétrico. Ouseja, as partículas deslocam-se para onde a sua energia U diminui.

$U = qV$ implica que as cargas positivas deslocam-se para onde V for menor (no sentido das linhas de campo), e as cargas negativas deslocam-se para onde V for maior (sentido oposto às linhas de campo).

Exemplo: Faisca no gerador de Wimshurst; quando o Campo \vec{E} é muito elevado, produz iões positivos e negativos no ar:



Se a distância entre as esferas for 3cm, como o campo necessário para ionizar o ar é $3 \times 10^6 \frac{N}{C}$, então

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 E ds = \bar{E} \Delta s \approx \left(3 \times 10^6 \frac{N}{C}\right) (3 \times 10^{-2} m) \approx 90\,000 V$$

CORRENTE ELÉTRICA

Carga transferida (Δq) durante um intervalo (Δt), por unidade de tempo:

$$I = \left| \frac{\Delta q}{\Delta t} \right|$$

A corrente instantânea é:

$$I = \left| \frac{dq}{dt} \right|$$

q = carga transferida, função de t .

Unidade SI de corrente: ampere (A) $1 A = 1 \frac{C}{s}$

No exemplo da faísca no gerador de Wimshurst, se forem transferidas Δq cargas positivas de 1 para 2 ($\Delta q > 0$) são também transferidas $-\Delta q$ cargas negativas de 2 para 1.

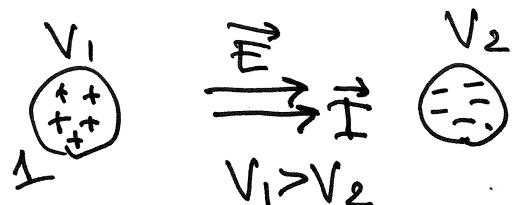
$I_+ = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ corrente devida aos íões +

$I_- = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ corrente devida aos íões -

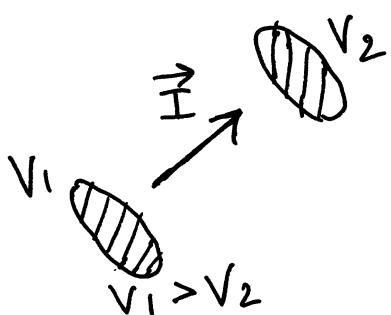
A corrente total é a soma das duas, e não a diferença, porque ambas correntes produzem o mesmo efeito:

descarregar as esferas 1 e 2 e diminuir as energias V_1 e V_2 das duas esferas (diminuir $V_1 - V_2$).

Como tal, define-se o vetor corrente \vec{I} , no sentido do campo elétrico = sentido do movimento das cargas positivas = sentido contrário ao movimento das cargas negativas = sentido de maior para menor potencial.



POTÊNCIA ELÉTRICA



Se a corrente instantânea entre duas regiões com potenciais diferentes, V_1 e V_2 , for \vec{I} , no intervalo de tempo dt é transferida carga positiva:

$$dq = |\vec{I}| dt \text{ de 1 para 2.}$$

(ou, de forma equivalente, carga negativa, $-|\vec{I}| dt$ de 2 para 1; $+ \frac{1}{3} |\vec{I}| dt$ de 1 para 2 e $- \frac{2}{3} |\vec{I}| dt$, de 2 para 1; etc.)

A energia potencial elétrica transferida de 1 para 2 é:

$$dU = dq V_1 - dq V_2 = dq (V_1 - V_2)$$

$\Delta V = |V_1 - V_2|$ chama-se diferença de potencial, ou voltagem.

$$\Rightarrow dU = (|\vec{I}| dt) \Delta V$$

a potência elétrica instantânea (energia transferida por unidade de tempo) é:

$$P = \frac{dU}{dt} = |\vec{I}| \Delta V$$

Unidades

Corrente: A (ampere)

Carga: $C = A \cdot S$, $A \cdot h = 3600 \text{ C}$, $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Campo elétrico: $\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$ (força/carga, ou, $\Delta V/\text{distância}$)

Potência: $W = \frac{J}{S} = V \cdot A$ (energia/tempo, ou, ΔV vezes corrente)

Energia: $J = W \cdot S = C \cdot V$ (carga vezes potencial)

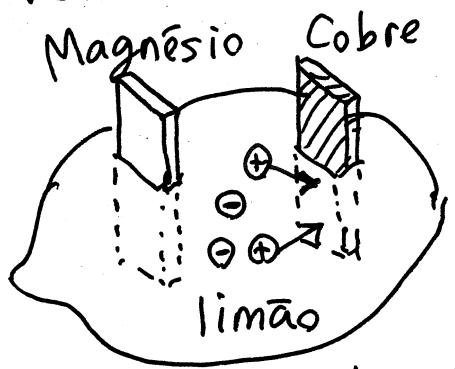
$eV = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ (eletrão-volt)

$W \cdot h = 3600 \text{ J}$

PILHAS QUÍMICAS

Oxidação dos metais \rightarrow reação com o oxigênio, formando um sal; são retirados elétrões do metal.

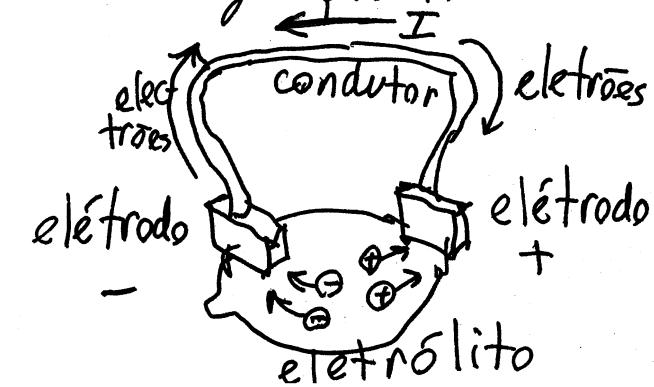
O cobre oxida-se mais facilmente que outros metais, por exemplo, magnésio (é necessária menos energia para retirar elétrões do cobre do que do magnésio).



Qualquer solução, por exemplo, no interior dum limão, tem iões positivos (catiões) e negativos (aniões).

Os iões \oplus reagem com o cobre, extraíndo elétrões. A barra de cobre fica coberta dum sal e com excesso de carga positiva.

Se for ligado algum dispositivo, condutor, entre as barras de cobre e magnésio, as cargas positivas



do cobre circulam pelo condutor até a barra de magnésio, onde atraem iões negativos do eletrólito; produzem-se reações de redução no magnésio (eléktodo -), deixando-o coberto de sal. O processo continua enquanto existam iões no eletrólito.

Carga máxima da pilha: $Q_{\text{máx}} = eN_+ = |-eN_-|$

$N_+ = N_-$ = número de iões positivos, ou negativos, no eletrólito

Nas reações de oxidação, no eléktodo +, liberta-se energia ΔU_+ e nas reações de redução, no eléktodo -, perde-se energia elétrica ΔU_- a energia total:

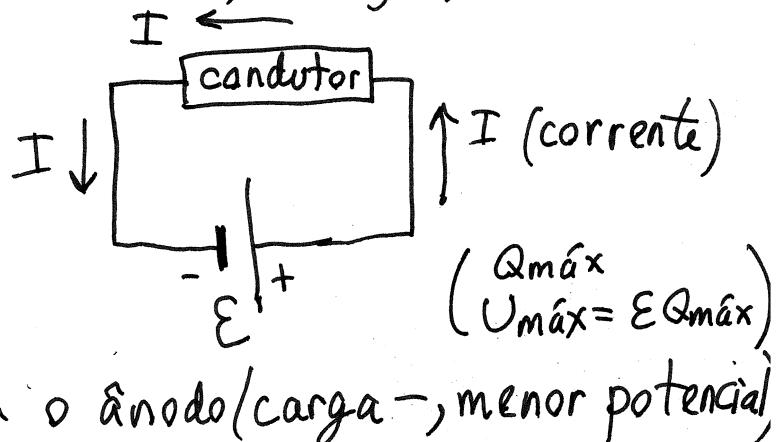
$$\Delta U = \Delta U_+ - \Delta U_-$$

É positiva, porque $\Delta U_+ > \Delta U_-$. Por cada elétron extraído no cátodo (eléktodo +) e cada elétron inserido no ânodo (eléktodo -), ΔU é da ordem dos elétron-volt. Define-se a **força eletromotriz** da pilha: f.e.m. = $E = \Delta U$ por cada carga elementar

E é uma constante, independente do tamanho da pilha ou do número de iões no eletrólito, que depende das reações químicas envolvidas, ou seja, dos metais e o eletrólito usado.

Diagrama de circuito

| (+) representa o cátodo
(carga positiva; maior potencial) e || representa o ânodo/carga -, menor potencial)

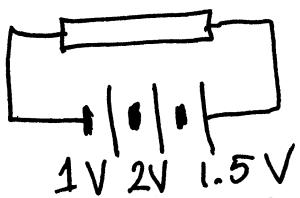


Na passagem pelo condutor, as cargas de condução perdem energia elétrica que é dissipada em calor, devido a colisões entre as cargas de condução e as cargas fixas. A potência elétrica dissipada é:

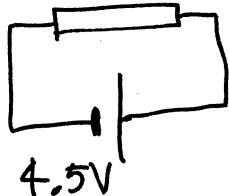
$$P = I(V_+ - V_-) = IE$$

que é a mesma potência que a pilha fornece. Dentro da pilha os íons não se deslocam sob o efeito do campo elétrico; a energia que as cargas ganham é devida às reações químicas.

Pilhas em série



equivalente a

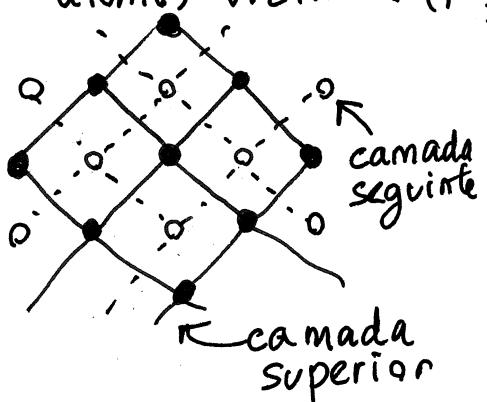


a carga disponível será a menor das cargas disponíveis das 3 pilhas

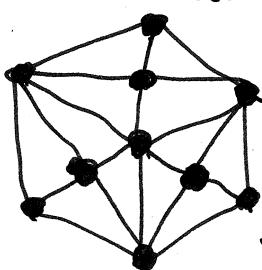
SEMICONDUTORES — cada átomo de

Cristal de silício. Si tem 4 elétrões de valência, que ligam-se aos elétrões de valência de outros 4 átomos vizinhos (forças magnéticas).

Em 3d, a rede cristalina é a repetição de um cubo com 8 átomos nos vértices, mais 6 átomos nos centros das faces



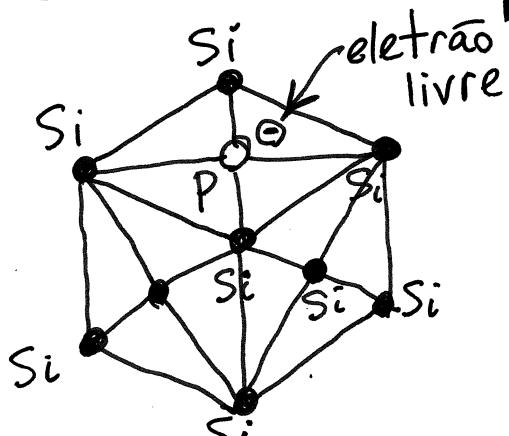
Si_{14} } valéncia 4
 Ge_{32} }



cristal FCC
(face centered cubic).

← átomos de silício,
ou germânio (valéncia 4)

Semicondutor tipo N



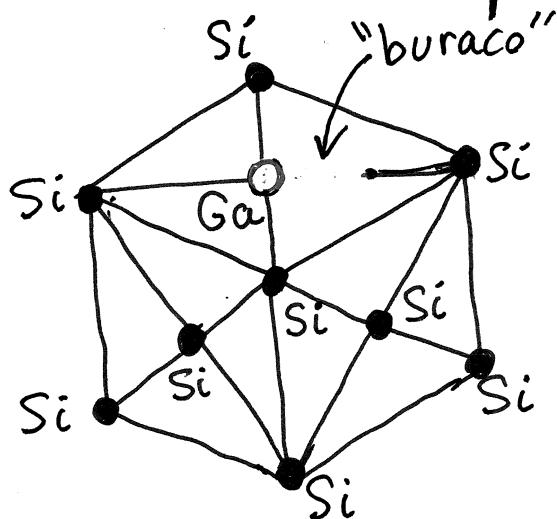
Impurezas de fósforo ou arsénio

P_{15} } valência 5
 As_{33} }

4 dos eletrões de valência ligados aos quatro vizinhos, ficando um eletrão livre

\Rightarrow cargas de condução negativas

Semicondutor tipo P



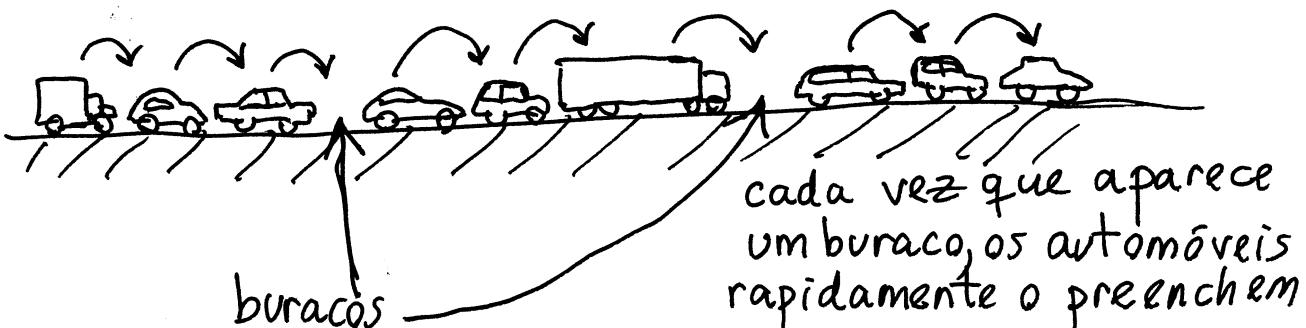
Impurezas de gálio ou índio

Ga_{31} } valência 3
 In_{49} }

os 3 eletrões de valência ligam-se a 3 vizinhos, deixando um dos vizinhos com um lugar livre para um eletrão (buraco).

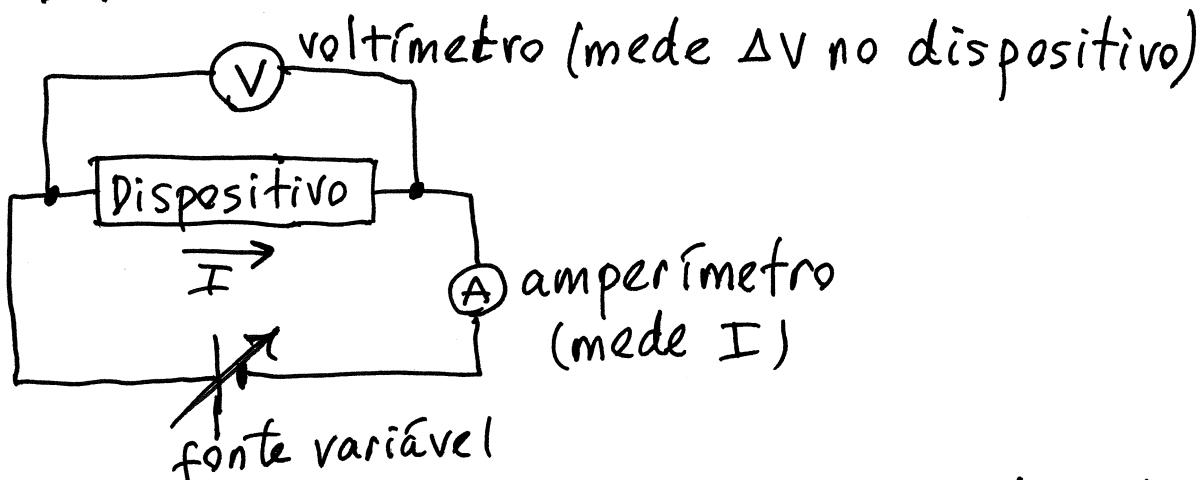
\Rightarrow cargas de condução positivas (buracos)

Analogia mecânica:



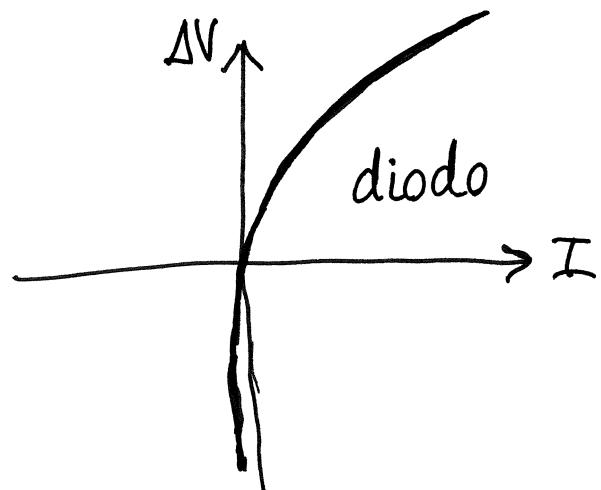
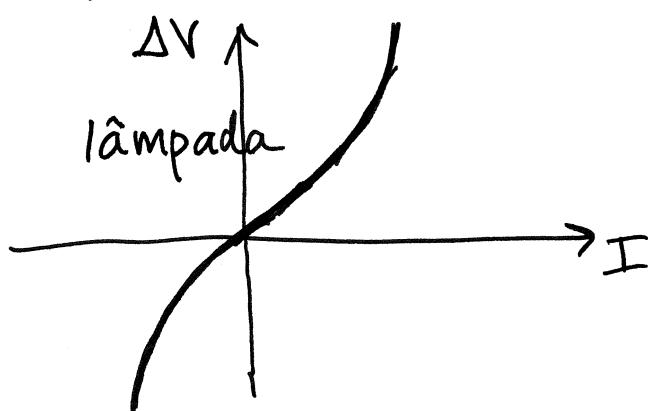
Não vemos os automóveis a andar muito, mas vemos buracos que passam rapidamente para a esquerda.

CURVAS CARATERÍSTICAS



Qualquer dispositivo tem uma curva característica, que relaciona a voltagem (ΔV) com a corrente (I). Se o dispositivo for passivo, quando $\Delta V=0$, a corrente I também é nula, e trocando os terminais da fonte, ΔV e I mudam ambos de sinal.

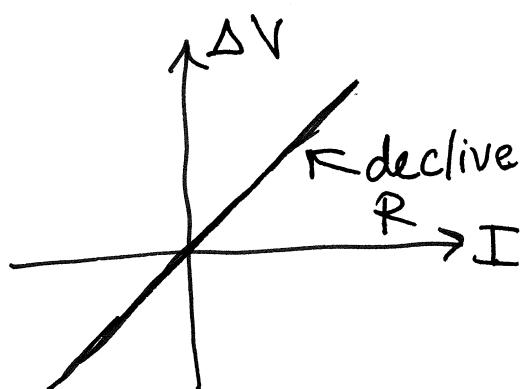
Alguns exemplos:



LEI DE OHM

Alguns condutores (metais, grafite,...) apresentam uma curva característica reta:

$$\Delta V = R I \quad \text{lei de Ohm}$$



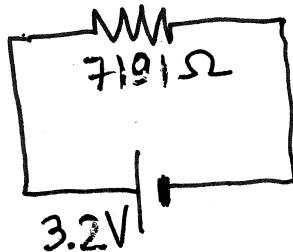
O declive, R , chama-se resistência (em inglês, resistance).

Unidade SI de resistência: $1\Omega = 1 \frac{V}{A}$ (ohm)

O condutor que verifica a lei de Ohm, chama-se ohmico, ou, simplesmente, "resistência" (em inglês, resistor). A potência dissipada (em calor) numa resistência é: $P = I \Delta V = I(RI) = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$

O símbolo usado nos circuitos para as resistências é .

Exemplo:



A voltagem na resistência é:

$$\Delta V = 3.2 \text{ V}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{3.2}{7191} \text{ A} = 0.445 \text{ mA}$$

(de esquerda para direita)

$$P = \frac{3.2^2}{7191} \text{ W} = 1.424 \text{ mW}$$

RESISTIVIDADE

A lei de Ohm é consequência da existência de forças dissipativas (sobre os elétrões de condução) diretamente proporcionais à velocidade.

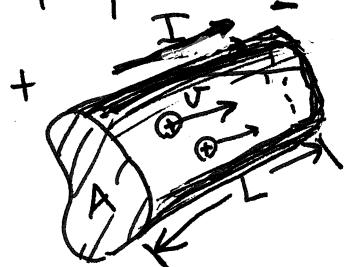
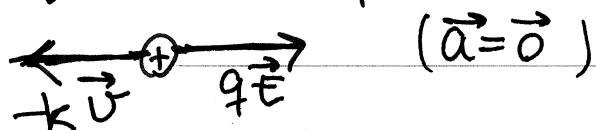


diagrama de forças:



$$\Rightarrow kV = qE \Rightarrow V = \frac{q}{k} E$$

Num intervalo Δt , a nuvem de cargas de condução desloca-se: $\Delta S = V \Delta t$ (V constante)

$\Rightarrow \Delta Q = \text{carga por unidade de volume} \times \text{volume da nuvem que passa por A.}$

Se houver n cargas de condução por unidade de volume,

$$\Delta Q = (nq) \times (A \Delta S) = nq A V \Delta t = \left(\frac{nq^2}{k}\right) A E \Delta t$$

$$\Delta V = E \times L = \left(\frac{k}{nq^2}\right) \frac{L}{A} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

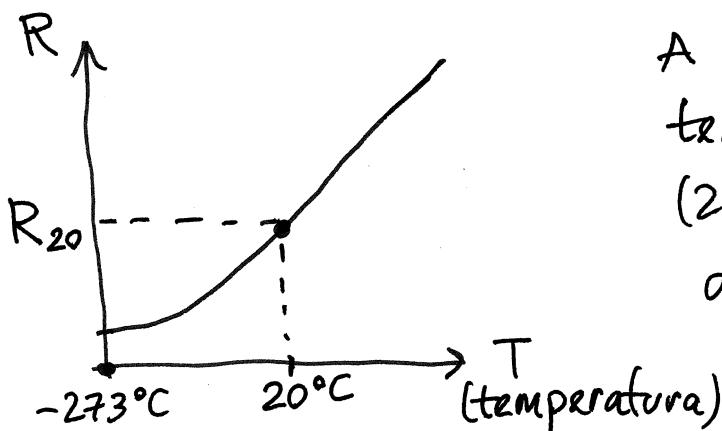
O termo entre parêntesis é uma propriedade de cada material, chamada resistividade (σ). $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ é a corrente I .

$$\Rightarrow \Delta V = R I, \text{ onde } \boxed{R = \sigma \frac{L}{A}}$$

RESISTÊNCIA E TEMPERATURA

O aumento da temperatura implica maior vibração das moléculas e, portanto, forças dissipativas maiores.

$\Rightarrow k$ aumenta com $T \Rightarrow \sigma$ aumenta $\Rightarrow R$ aumenta.



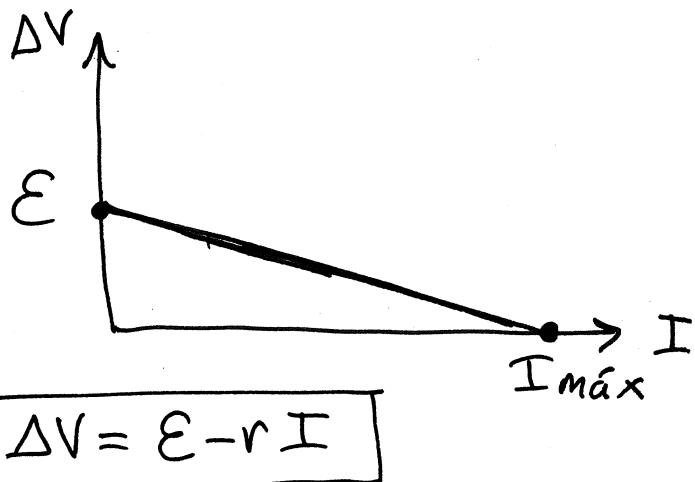
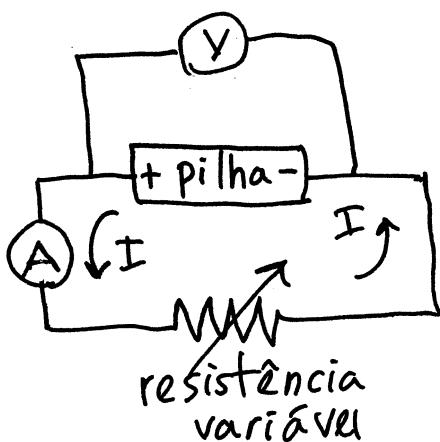
A temperaturas próximas da temperatura de referência (20°C), é suficiente usar uma aproximação linear:

$$\boxed{R(T) = R_{20} (1 + \alpha_{20} (T - 20))}$$

em que o coeficiente de temperatura, α_{20} , é uma constante com unidades de $^\circ\text{C}^{-1}$, que depende do material e pode ser medida experimentalmente.

Observe-se que o declive da reta é $R_{20} \alpha_{20}$, e não α_{20} . Por isso, o valor de α depende da temperatura usada como referência.

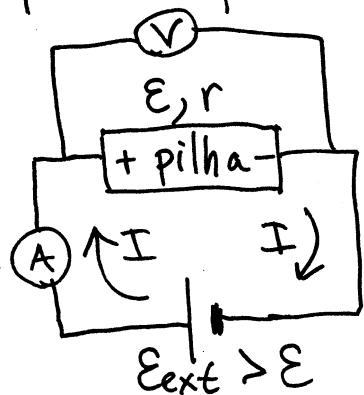
CARATERÍSTICA DE UMA PILHA



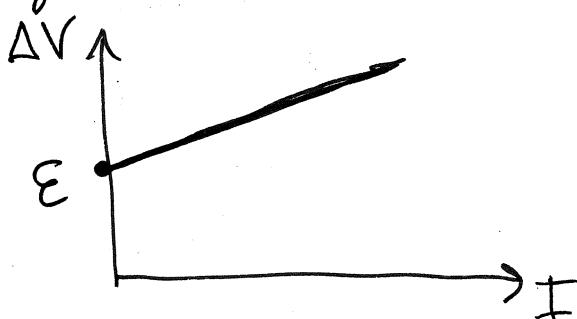
r = resistência interna (declive da recta)

As reações químicas na pilha fornecem potência EI . Uma parte dessa potência, rI^2 , é dissipada no eletrolito, e a restante, ΔVI , é fornecida ao circuito ligado à pilha.

Quando a pilha está descarregada, r aumenta e a corrente máxima, $I_{\text{máx}}$, pode não ser suficiente para o funcionamento do circuito.



Se a pilha for recarregável, uma fonte externa com fém E_{ext} maior que E pode usar-se para recarregar a pilha. O sentido da corrente agora é inverso e a característica é:



$$\Delta V = E + rI$$

($\Delta V \geq E$)

a pilha absorve potência ΔVI . Uma parte, rI^2 , é dissipada no eletrolito.

Modos de funcionamento
de uma pilha

gerador. I sai do eletrodo +
e entra no -. $\Delta V \leq \varepsilon$

fornecendo energia
 $\Delta V = \varepsilon - rI$

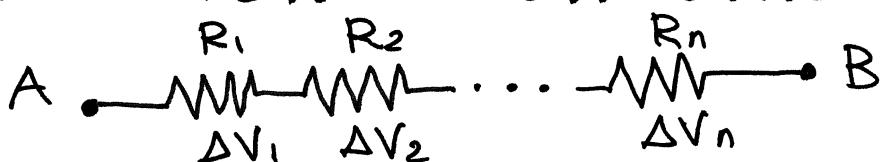
receptor. I sai do eletrodo -
e entra no +. $\Delta V \geq \varepsilon$

$\Delta V = \varepsilon + rI$. Absorve energia.

Diagrama de circuito de uma pilha



RESISTÊNCIAS EM SÉRIE

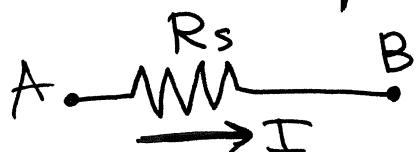


Se $V_A > V_B \Rightarrow$ circula corrente I, de A para B, através de todas as resistências.

$$\Delta V = V_A - V_B = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I$$

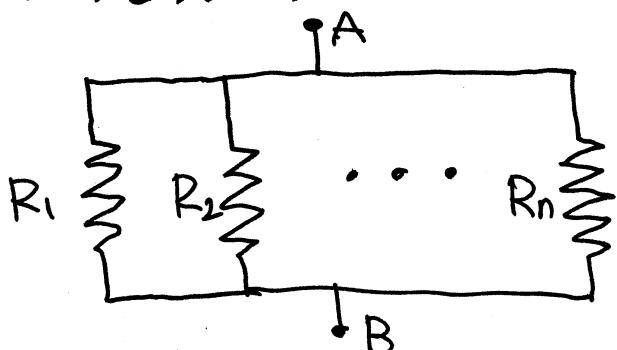
$$\Rightarrow \Delta V = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I \quad (\text{lei de Ohm})$$

círcuito equivalente.



$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

RESISTÊNCIAS EM PARALELO



Se $V_A > V_B$, circulam
correntes I_1, I_2, \dots, I_n
In pelas resistências,
todas de A para B

A corrente I que entra por A e sai por B é a soma de todas essas correntes. A diferença de potencial é igual em todas as resistências

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \dots = \Delta V_n = V_A - V_B = \Delta V$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} + \dots + \frac{\Delta V}{R_n}$$

$$\Rightarrow \Delta V = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)^{-1} I \quad (\text{lei de Ohm})$$

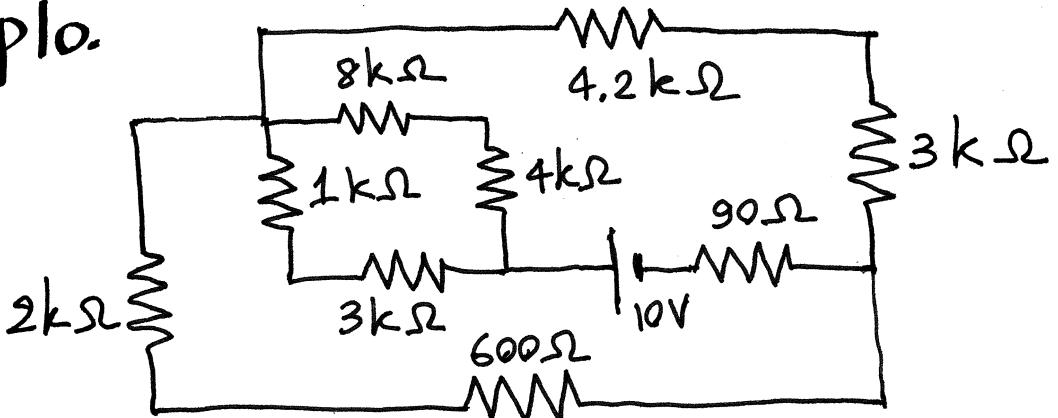
círculo equivalente.



$$R_p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)^{-1}$$

caso particular, $n=2$: $R_p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Exemplo.



Determine a voltagem e corrente em cada resistência.

Resolução. Usaremos unidades de $k\Omega$ para as resistências e volt para a f.e.m. Como tal, as correntes obtidas estarão em mA.

Simplifica-se o circuito em vários passos, combinando resistências em série ou paralelo, até ficar com apenas uma resistência. A seguir regressa-se passo a passo aos circuitos anteriores:

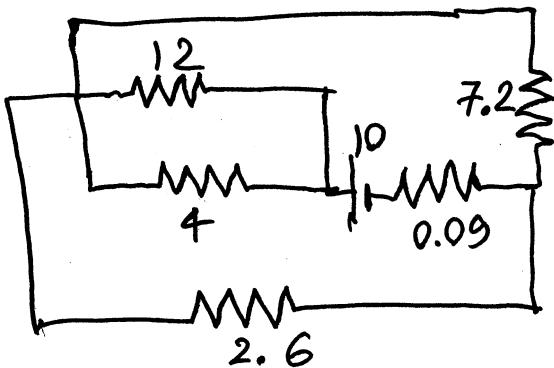
Série (inicialmente não há nada em paralelo)

$$\textcircled{1} \quad 8 + 4 = 12$$

$$1 + 3 = 4$$

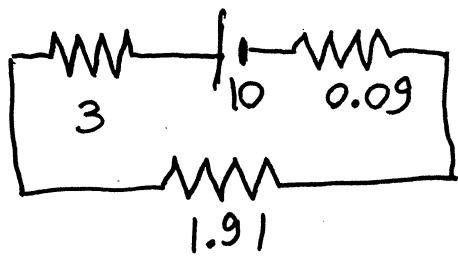
$$4.2 + 3 = 7.2$$

$$2 + 0.6 = 2.6$$

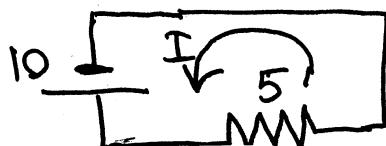


$$\textcircled{2} \quad \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3 \text{ (paralelo)}$$

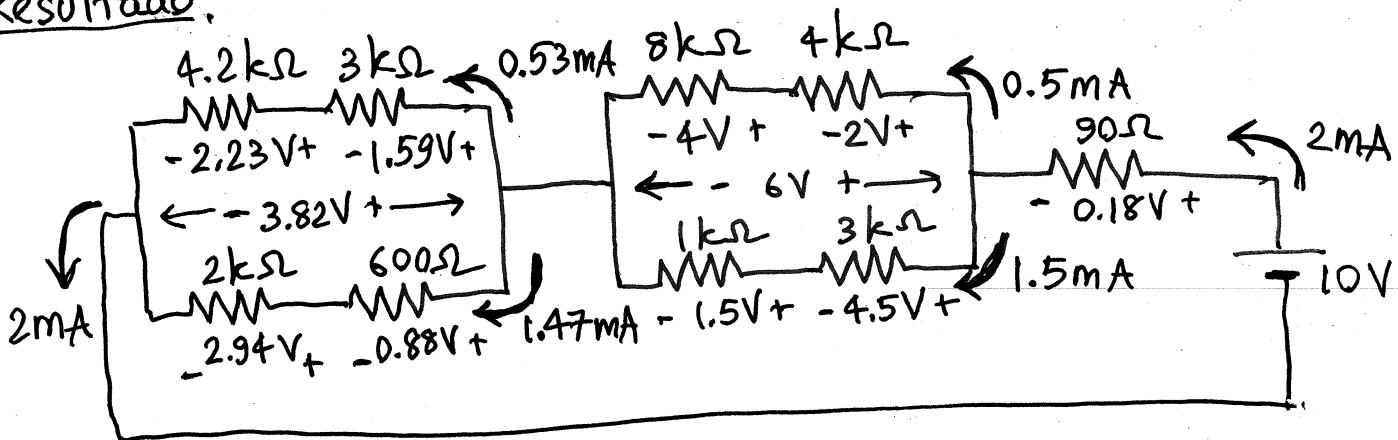
$$\frac{2.6 \times 7.2}{2.6 + 7.2} = 1.91 \text{ (paralelo)}$$



$$\textcircled{3} \quad 3 + 1.91 + 0.09 = 5$$



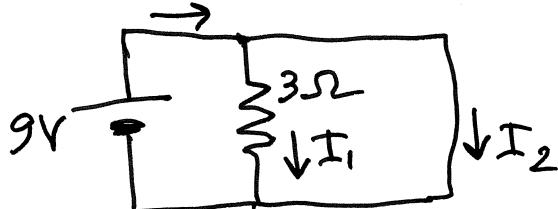
Resultado:



"curto-circuito": $R=0$

Note-se que $\Delta V = RI$ implica $\Delta V = 0$, se I for finito, mas se $I \rightarrow \infty$, ΔV poderá ter qualquer valor.

Exemplo:



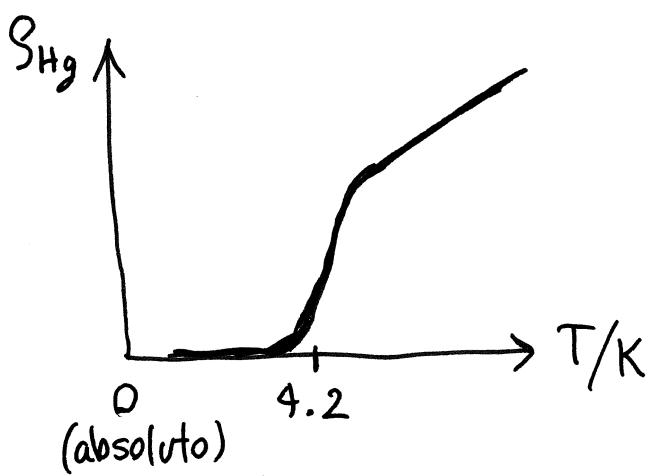
em $R=3\Omega$:

$$\Delta V = 9V, I_1 = 3A$$

$$I_2 = \infty \quad I = I_1 + I_2 = \infty$$

Este é um exemplo idealizado, mas cada vez estamos mais próximos de termos fontes ideais ($r=0$) e curto-circuitos ideais ($R=0$)

SUPERCONDUTIVIDADE

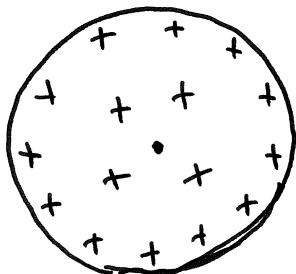


Em algas matérias (supercondutores) a resistividade decresce abruptamente quando T for menor que uma temperatura crítica. No mercúrio, $T_{crítica} \approx 4.2 K$

CAPACIDADE ELÉTRICA

Num condutor isolado, com carga Q , o campo elétrico é diretamente proporcional a $|Q|$.

Campo de uma esfera condutora de raio R , com carga Q , isolada (apêndice B).



A mobilidade das cargas faz com que a carga fique distribuída na superfície, de forma uniforme, com carga superficial

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Para calcular o campo \vec{E} num ponto P, escolhe-se o eixo dos z com origem no centro da esfera e passando por P. Divide-se a superfície da esfera em pedaços com área infinitesimal dA .

Em coordenadas esféricas,

ϕ = ângulo com o eixo dos z (latitude)

θ = ângulo da projeção no plano xy com o eixo dos X (longitude)

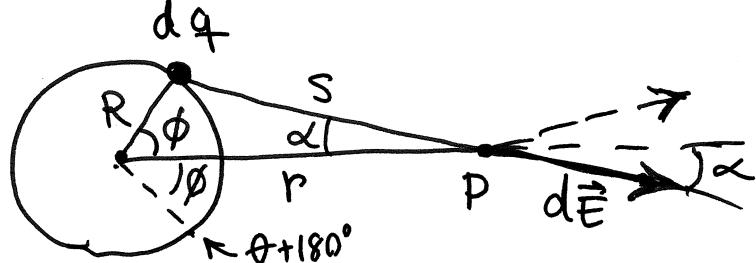
aumentando ϕ em $d\phi$ e θ em $d\theta$, obtem-se uma área infinitesimal na

$$\text{esfera: } dA = R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$\text{que terá carga: } dq = \frac{Q}{4\pi} \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

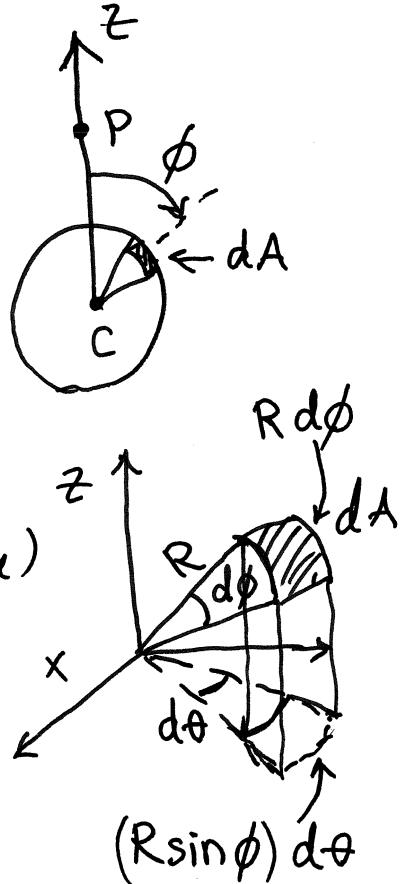
Admite-se que dq é carga pontual. Pela lei de Coulomb, o módulo do campo produzido por dq em P é:

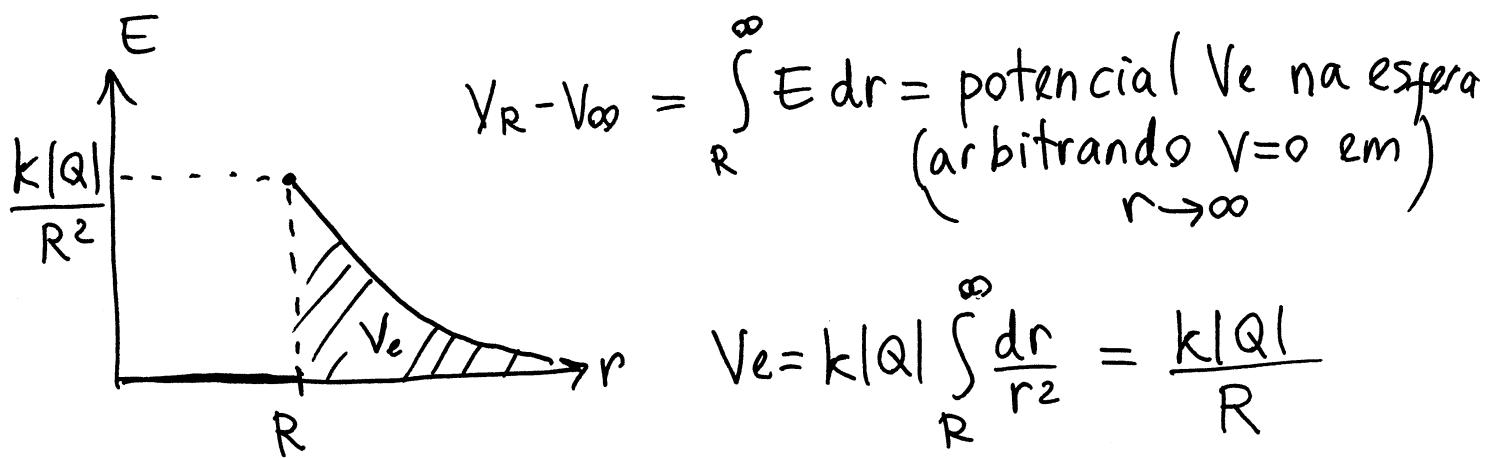
$$dE = \frac{k |dq|}{S^2} = \frac{k |Q|}{4\pi} \frac{\sin \phi \, d\phi \, d\theta}{S^2}$$



Os campos $d\vec{E}$ das duas cargas em (ϕ, θ) e $(\phi, \theta + 180^\circ)$ somam-se, produzindo um campo na direção de \hat{k} :

$$d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = dE \hat{k} , \quad dE = \frac{k |Q|}{2\pi} \frac{\sin \phi \cos \theta}{S^2} d\phi d\theta$$





O potencial na esfera (e em qualquer condutor isolado) é diretamente proporcional à carga $|Q|$.

A constante de proporcionalidade, que depende do tamanho e forma geométrica do condutor, define a **capacidade** do condutor:

$$C = \frac{|Q|}{V}$$

medida em coulomb sobre volt.

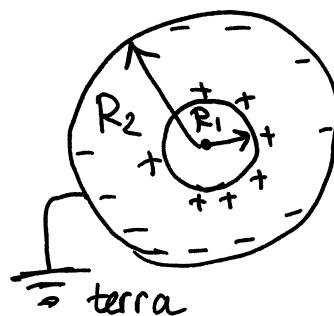
$$1 F = 1 \frac{C}{V} \text{ (um farad).}$$

A capacidade da esfera de raio R é

$$C_e = \frac{R}{k}$$

CONDENSADORES.

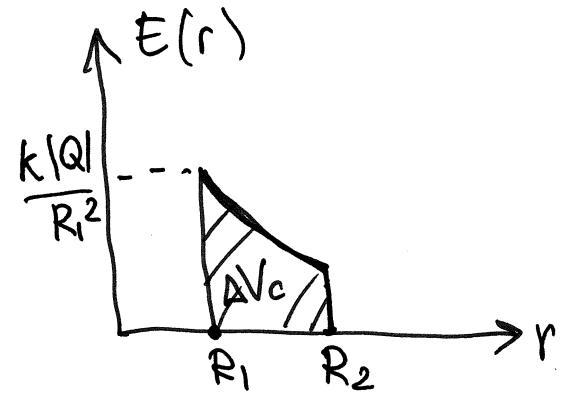
Se o integral sob a função $E(r)$ fosse menor, V seria também menor, e a capacidade C maior. Isso consegue-se colocando outro condutor perto do primeiro, ligado a terra ($V_{\text{terra}} = 0$).



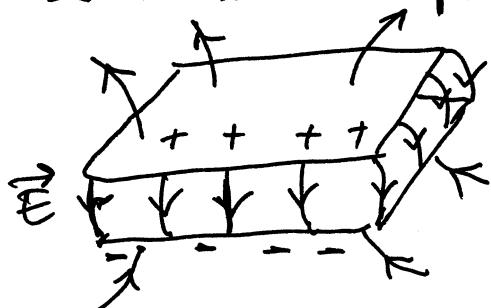
$$\Delta V = k|Q| \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = k|Q| \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

capacidade do condensador esférico:

$$C = \frac{|Q|}{\Delta V} = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

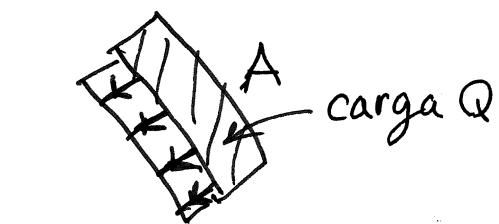
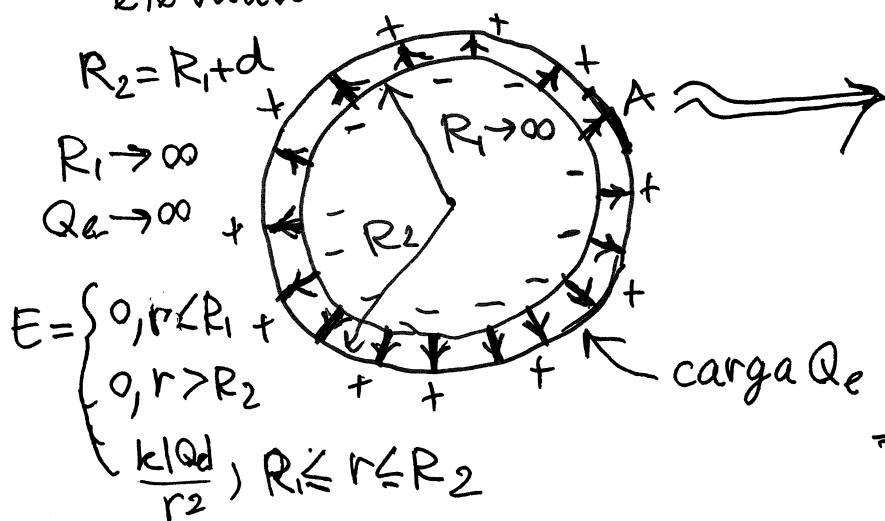


Condensador plano.



Formado por duas armaduras planas, de área A , paralelas e separadas uma distância d . O campo elétrico entre as armaduras é muito maior

que o campo fora. Como tal, uma boa aproximação é considerar o condensador plano como uma parte, de área A , num condensador esférico com raios muito elevados:



$$Q = \left(\frac{A}{4\pi R_1^2} \right) Q_e$$

$$\Rightarrow E = \frac{k}{r^2} \left(\frac{4\pi R_1^2}{A} \right) Q$$

No limite $R_1 \rightarrow \infty \Rightarrow R_2 \rightarrow \infty$ e $Q_e \rightarrow \infty$ (mas Q é finita e $d = R_2 - R_1$ também)
se: $R_1 \leq r \leq R_2 \Rightarrow r \rightarrow R_1$

$$E \rightarrow \frac{k}{R_1^2} \left(\frac{4\pi R_1^2}{A} \right) Q = \frac{4\pi k Q}{A} \text{ (constante!)}$$

$$\Delta V = \int_0^d E ds = \frac{4\pi k d}{A} Q$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (\text{usando } Q > 0 \text{ e } \Delta V > 0)$$

$$C_{\text{plano}} = \frac{A}{4\pi k d}$$

CONDENSADORES COM DIELÉTRICO

Em qualquer condensador, com qualquer forma, se for inserido um material com constante dieletrica K entre as armaduras, o campo E entre as armaduras diminui num fator K :

$$E = \frac{E_0}{K} \quad (E_0 = \text{campo sem dieletrico})$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta V_0}{K} \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = K \left(\frac{Q}{\Delta V_0} \right)$$

$$\Rightarrow C = K C_0$$

C_0 = capacidade sem dieletrico
C aumenta num fator K

O campo elétrico máximo (rigidez dieletrica) também é maior num dieletrico. Como tal, o uso do dieletrico também aumenta a voltagem máxima que o condensador suporta, sem descarregar:

$$\Delta V_{\max} = d E_{\max} \quad (E_{\max} = \text{rigidez dieletrica})$$

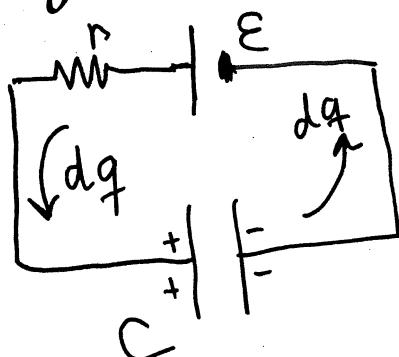
Diagrama de circuito dos condensadores:



a voltagem é diretamente proporcional à carga armazenada.

$$\Delta V = \frac{Q}{C}$$

Energia elétrica num condensador



Quando o condensador, descarregado, for ligado a uma bateria, a cada intervalo infinitesimal, dt , o cátodo fornece carga dq numa armadura,

e o ânodo refira carga dq da outra armadura. O condensador acumula carga que aumenta até o instante em que $\Delta V = \frac{Q}{C}$ aumente até o valor da f.e.m. E .

Se num instante houver já carga total q no condensador ($q < CE$), a carga dq que entra na armadura com carga $+q$, mas a carga dq que sai da armadura com carga $-q$, acrescenta energia:

$$dU = V_+ dq - V_- dq = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

A energia que ficará armazenada no condensador, quando este atingir a sua carga final Q (estado estacionário) é:

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{C} \right)$$

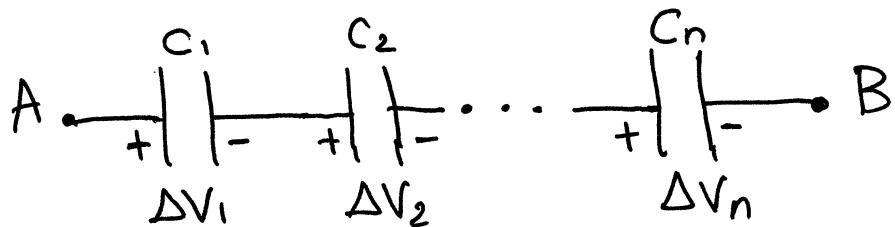
que pode ser escrito também em função de ΔV :

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

tal como uma pilha, o condensador armazena carga e energia que pode ser usada para alimentar circuitos.

A diferença das pilhas, a energia do condensador é $\frac{1}{2} Q \Delta V$, e não QE como nas pilhas, porque o condensador tem uma força eletromotriz que diminui proporcionalmente à carga armazenada Q . A vantagem é que o condensador carrega/descarrega rapidamente.

CONDENSADORES EM SÉRIE



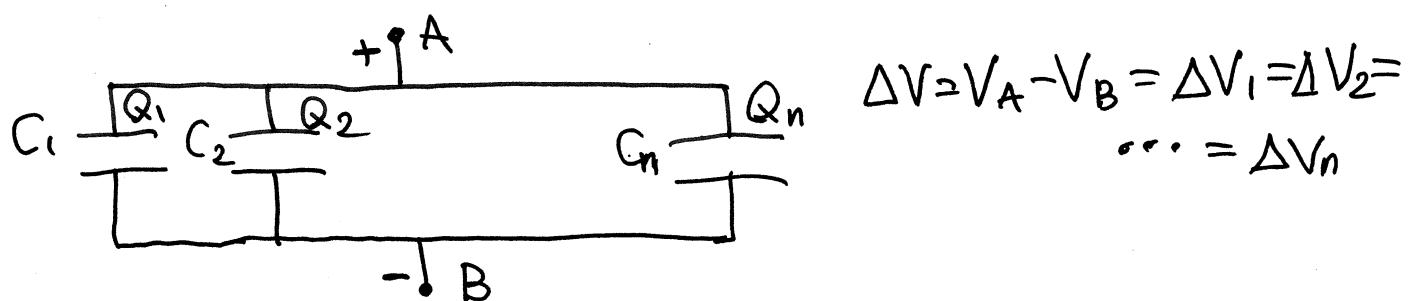
$$V_A - V_B = \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n$$

A carga armazenada em todos os condensadores é a mesma (Q)

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) Q$$

$$\Rightarrow C_s = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)^{-1}$$

CONDENSADORES EM PARALELO



$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V + \dots + C_n \Delta V$$

$$\Rightarrow C_p = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Nos circuitos com baterias e condensadores, pode encontrar-se ΔV e Q em cada condensador, usando o mesmo método usado nos circuitos com resistências.

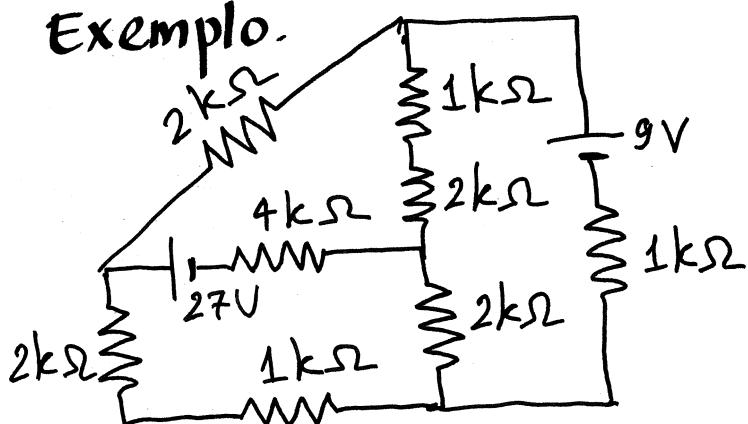
Em vez da lei de Ohm, usa-se $\Delta V = \frac{Q}{C}$

CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA

Com uma ou várias fontes com f.e.m. constante.

O objetivo é determinar ΔV e I em cada elemento.

Exemplo:



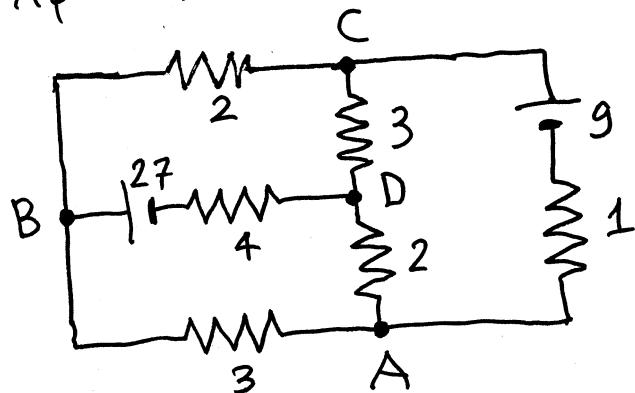
Unidades:

$$\Delta V \rightarrow V$$

$$R \rightarrow k\Omega$$

$$I \rightarrow mA$$

Após combinar as resistências em série:



O método do capítulo 3 falha, porque não há mais combinações em série ou paralelo.

O circuito tem 6 ramos: AB, BC, AC, BD e CD
(por conveniência, usaremos ordem alfabética, ou seja, AC não CA)

Em cada ramo a lei de Ohm relaciona a voltagem e corrente

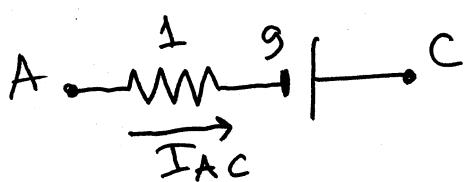


$$V_{A/B} = V_A - V_B = \text{potencial de } A, \text{ relativo a } B.$$

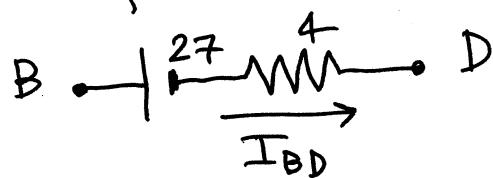
I_{AB} = corrente do ponto A para o ponto B

$$V_{A/B} = 3 I_{AB}, \quad V_{B/C} = 2 I_{BC}, \quad V_{A/D} = 2 I_{AD}, \quad V_{C/D} = 3 I_{CD}$$

Nos dois ramos onde há fontes:



$$V_{A/C} = I_{AC} - 9$$



$$V_{B/D} = 4 I_{BD} + 27$$

Temos 12 variáveis (voltagem e corrente em 6 ramos) e apenas 6 equações. As 6 equações que faltam são obtidas a partir das:

LEIS DE KIRCHHOFF

① Lei das malhas (voltagens): Em cada malha (percurso fechado no circuito), a soma algébrica das voltagens é nula.

No exemplo acima, as equações das malhas ABD, BCD & CAD são:
 (é fácil de corroborar, porque $V_{X/Y} = V_X - V_Y$)

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{A/B} + V_{B/D} - V_{A/D} = 0 \\ V_{B/C} + V_{C/D} - V_{B/D} = 0 \\ -V_{A/C} + V_{A/D} - V_{C/D} = 0 \end{array} \right.$$

② Lei do nós (correntes): Em cada nó (ponto comum a três ou mais ramos), a soma algébrica das correntes é nula.

No exemplo, nos 3 nós A, B e C, e arbitrando $I > 0$ se sair do nó e $I < 0$ se entrar,

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{AB} + I_{AC} + I_{AD} = 0 \\ I_{BC} + I_{BD} - I_{AB} = 0 \\ I_{CD} - I_{AC} - I_{CB} = 0 \end{array} \right.$$

Podem escreverem-se mais equações de malha, e de nó, mas serão dependentes das 6 já escritas.

Em vez de resolvêrmos as 12 equações, com 12 variáveis, há um método que permite reduzir as equações a apenas 3, com 3 variáveis.

MÉTODO DAS MALHAS

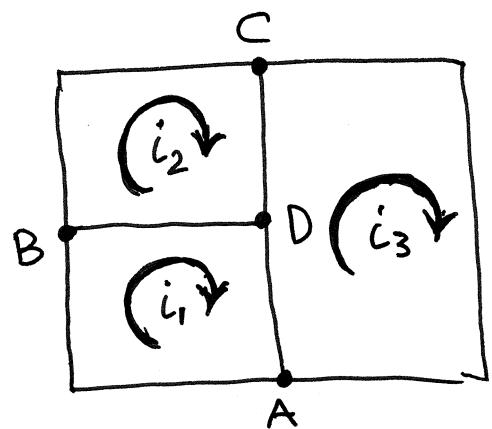
As variáveis serão as correntes nos 3 ramos na periferia do circuito: $I_{AB} = i_1$, $I_{BC} = i_2$, $I_{AC} = -i_3$ (convém que sigam o mesmo sentido, neste caso contrário) (aos ponteiros do relógio).

As correntes nos outros três ramos obtêm-se pelas leis dos nós:

$$I_{AD} = i_1 - i_3$$

$$I_{BD} = i_1 - i_2$$

$$I_{CD} = i_2 - i_3$$



As 6 expressões das correntes são fáceis de obter admitindo que i_1 , i_2 e i_3 são **correntes de malha**, em cada uma das 3 malhas (todas no mesmo sentido). Num ramo que pertence a apenas uma malha, a corrente é a corrente dessa malha. Nos ramos entre duas malhas a corrente é a diferença entre as correntes dessas duas malhas.

As 3 equações das malhas, em função de (i_1, i_2, i_3) , são:

$$\begin{cases} 3i_1 + 4(i_1 - i_2) + 27 + 2(i_1 - i_3) = 0 \\ 2i_2 + 3(i_2 - i_3) + 4(i_2 - i_1) - 27 = 0 \\ i_3 + 9 + 2(i_3 - i_1) + 3(i_3 - i_2) = 0 \end{cases}$$

que é um sistema linear. De forma matricial, o sistema é:

$$IR \vec{i} = \vec{\epsilon}$$

(forma matricial da lei de Ohm)
matriz 3×1 , com valores de f.e.m.

matriz 3×3
com valores
de resistências

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

e a sua solução é:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^{-1} \mathcal{E}$$

Sem fazer a análise que fizemos, para obter as equações das malhas, as matrizes \mathbb{R} e \mathcal{E} podem ser escritas imediatamente, apenas olhando para o circuito:

- $R_{n,n} = \text{soma de todas as resistências na malha } n.$
- $R_{n,m} = -\text{soma de todas as resistências na fronteira das malhas } n \neq m$
- $E_n = \text{soma de todas as f.e.m. na malha } n$
Positiva, se i_n passa de I para $|$, ou
negativa, se passa de $|$ para I

No nosso exemplo:

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -2 \\ -4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} -27 \\ 27 \\ -9 \end{bmatrix}$$

No Maxima, a solução do sistema obtém-se assim:

(%i1) invert(matriX([9,-4,-2],[-4,9,-3],[-2,-3,6])). [-27, 27, -9];

(%o1) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

↑
ponto (produto
matrizial)

$$i_1 = -3, \quad i_2 = 1, \quad i_3 = -2$$

E com esses valores obtém-se as voltagens e correntes.

Por exemplo: $I_{BD} = i_1 - i_2 = 4 \text{ mA}$ (corrente de B para D)

$$V_{BD} = 4I_{BD} + 27 = 43 \text{ V} \quad (V_B > V_D)$$

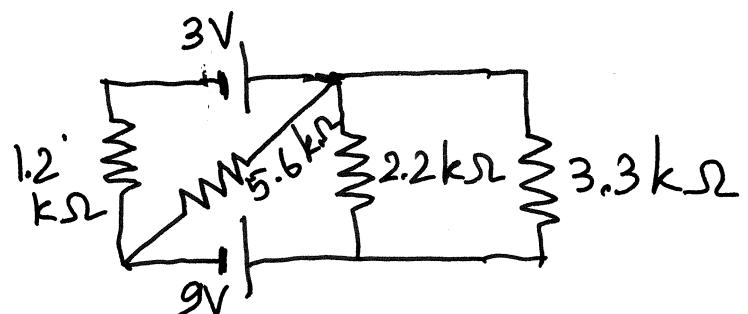
MÉTODO DE SOBREPOSIÇÃO

Circuito com n f.e.m.s $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n \Rightarrow$ Resolvem-se n circuitos mais simples, em que o circuito j tem apenas uma das f.e.m., \mathcal{E}_j , e as outras foram desativadas ($\mathcal{E}_m = 0$, se $m \neq j$), ou seja, substituídas por um curto-círcito.

As voltagens/correntes no circuito original são as somas das voltagens/correntes nos n circuitos

Exemplo:

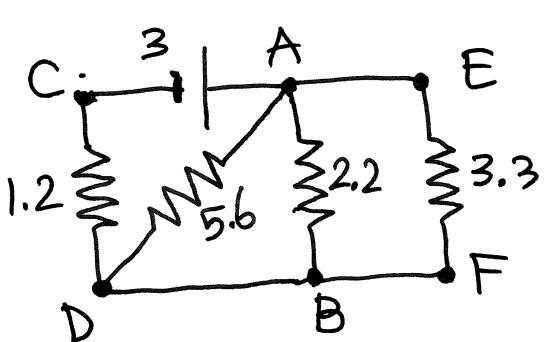
Determine as voltagens e correntes nos 6 elementos no circuito



Resolução.

Unidades: $R \rightarrow k\Omega$, $\Delta V \rightarrow V$, $I \rightarrow mA$

① Circuito apenas com a f.e.m de 3V



$$i_{AB} = \frac{V_{A/B}}{2.2} = 0.642$$

$$i_{AD} = \frac{V_{A/D}}{5.6} = 0.253$$

$$i_{EF} = \frac{V_{E/F}}{3.3} = 0.428$$

$$\begin{aligned} R_{AD} &= \left(\frac{1}{5.6} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} \right)^{-1} = 1.068 \\ i &= i_{AB} = i_{BD} = i_{DC} = i_{CA} = \frac{3}{1.2 + 1.068} \\ &= 1.323 \\ V_{A/B} &= V_{A/D} = V_{E/F} = 1.068 i_{AB} \\ &= 1.413 \\ V_{D/C} &= 1.2 i_{DC} = 1.587 \end{aligned}$$

CIRCUITOS COM CONDENSADORES E RESISTEN.

① Admitindo que em $t=0$ todos os condensadores estão descarregados,

$$Q_0 = 0 \Rightarrow \Delta V_0 = 0, \text{ mas, } I_0 = \frac{dQ}{dt} = \text{qualquer valor (em cada condensador)}$$

Cada condensador é equivalente a um curto-circuito (interruptor fechado), onde $\Delta V=0$ mas há corrente.

② $t \rightarrow \infty$. O circuito atinge um **estado estacionário** em que cada condensador tem a carga máxima que pode ter nesse circuito.

$$\Rightarrow Q_{\infty} = \text{constante} \Rightarrow I_{\infty} = \frac{dQ}{dt} = 0, \text{ mas } \Delta V_{\infty} = \text{qualquer}$$

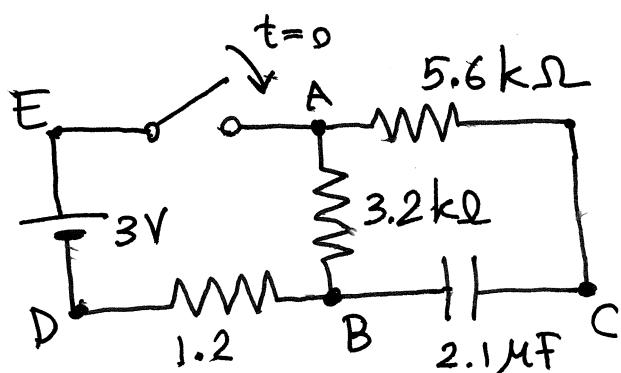
Cada condensador é equivalente a um interruptor aberto.

③ Num tempo intermédio (**estado transitório**), $\Delta V \neq 0$ e $I \neq 0$ em cada condensador ($Q=0, Q' \neq Q_{\max}$). Cada condensador é equivalente a uma f.e.m. com

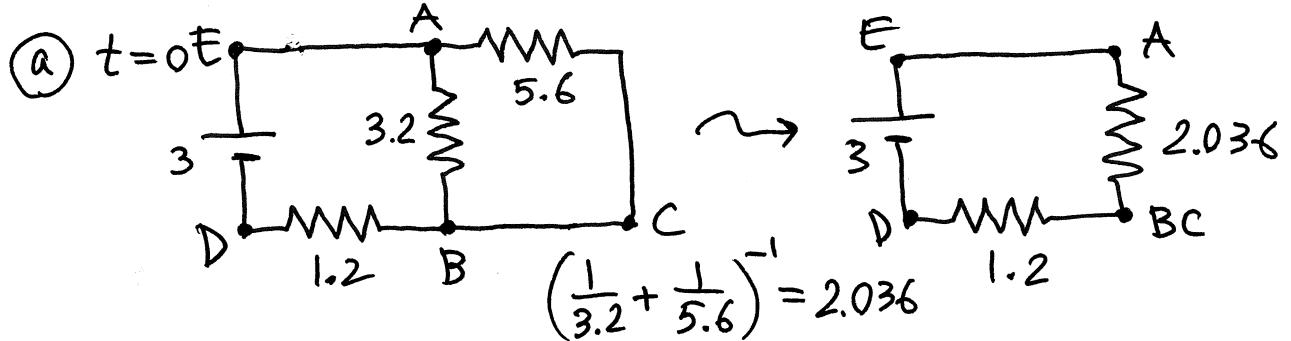
$$E = \frac{Q}{C}$$

Exemplo: Em $t=0$, quando o condensador está descarregado, fecha-se o interruptor, e volta a abrir-se em

$t \gg 0$ (muito tempo depois $t=0$). Determine a corrente na resistência de $5.6 \text{ k}\Omega$, em $t=0$ e $t=t$.



Resolução: ($R \rightarrow k\Omega$, $\Delta V \rightarrow V$, $I \rightarrow mA$)

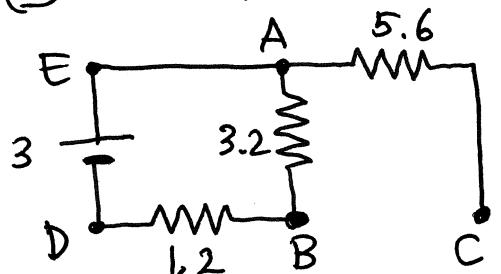


$$I_{DE} = I_{ABC} = I_{BCD} = \frac{3}{3.236} = 0.927 \quad V_{A/C} = 2.036 \quad I_{ABC} = 1.888$$

corrente na resistência $5.6 k\Omega$:

$$I_{AC} = \frac{V_{AC}}{5.6} = 0.337 \text{ mA}$$

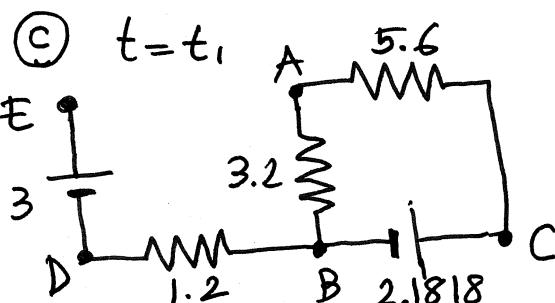
(b) $t \rightarrow t_1^-$ (t próximo de t_1 , sem ser t_1)



$$I_{AC} = 0$$

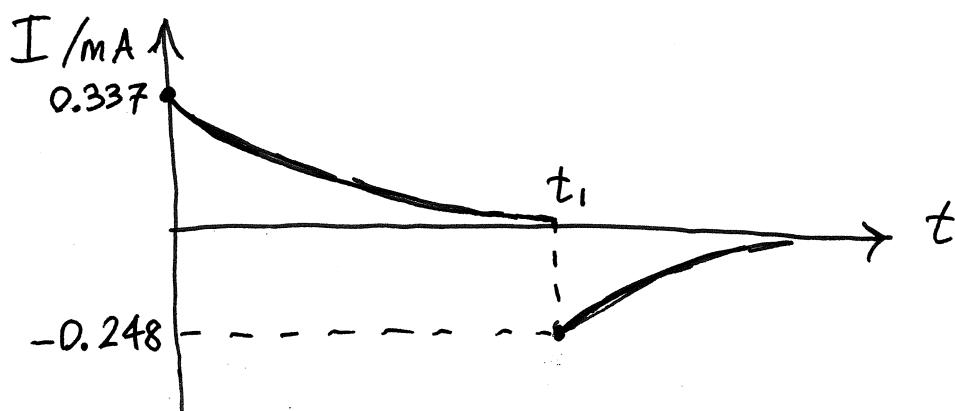
$$I_{AB} = \frac{3}{4.4} = 0.618$$

$$V_{C/B} = V_{A/B} = 3.2 I_{AB} = 2.1818$$



$$I_{AC} = -\frac{2.1818}{8.8} = -0.248 \text{ mA}$$

Gráfico da corrente na resistência de $5.6 k\Omega$



CAMPO ELÉCTRICO DE CARGAS PONTUAIS

n cargas pontuais

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

nas posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$

A distância desde q_i até a posição \vec{r} é $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ e o

versor na reta que passa por q_i e a posição \vec{r} é $\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$

O campo produzido por q_i , na posição \vec{r} , é:

$$\vec{E}_i = \frac{k q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) = k \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

O campo total, das n cargas, na posição \vec{r} é:

$$\vec{E} = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

$$E_x = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i (x - x_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}}$$

e formas semelhantes para E_y, E_z

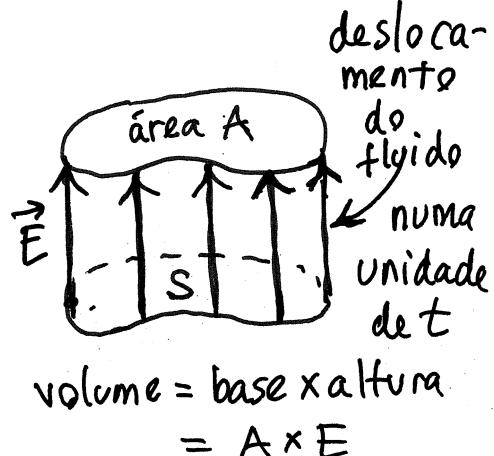
FLUXO ELÉTRICO



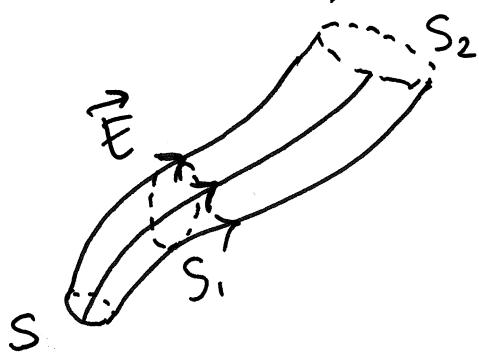
Admite-se que em cada ponto \vec{E} é a velocidade do "fluído" elétrico.

O fluxo elétrico, Φ_s , através de uma superfície S , é a quantidade de fluido elétrico que passa através de S , por unidade de tempo. Se \vec{E} for constante (em S) e perpendicular a S , o fluxo é:

$$\Phi_s = E A \quad (A = \text{área de } S)$$



Tubos de fluxo.



Todas as linhas de campo que atravessam uma superfície S formam um volume e chamado tubo de fluxo (de S). Em qualquer superfície obtida cortando o fluxo (S_1, S_2, \dots) o fluxo é o mesmo: $\Phi_S = \Phi_{S_1} = \Phi_{S_2} = \dots$

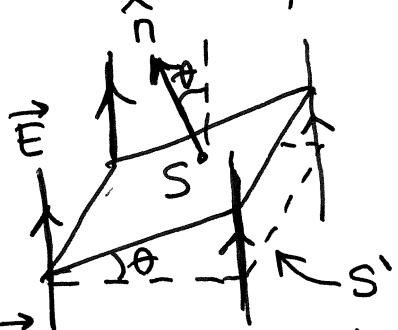
Isso permite determinar o fluxo numa superfície S que não seja perpendicular às linhas de campo.

\hat{n} = versor normal a S

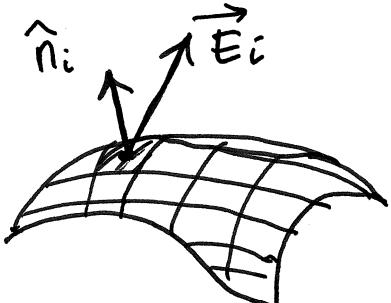
θ = ângulo entre \hat{n} e \vec{E}

S' = superfície perpendicular a \vec{E} , no mesmo tubo de fluxo de S . $\Rightarrow \Phi_S = \Phi_{S'} = EA' = EA \cos \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_S = (\vec{E} \cdot \hat{n}) A} \quad (\text{se } \vec{E} \text{ for constante em } S).$$



Para determinar o fluxo de um campo qualquer, através dum a superfície qualquer, divide-se a superfície em m partes muito pequenas de área $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_m$ e admite-se \vec{E} constante em cada uma delas



$$\Phi_S \approx \sum_{i=1}^m (\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i) \Delta A_i$$

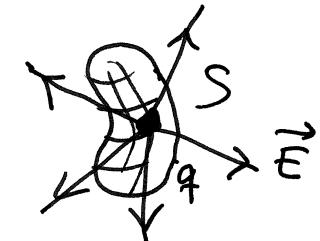
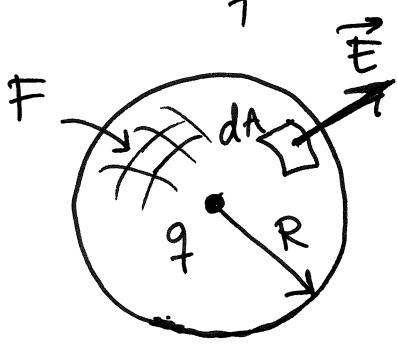
A aproximação é exata no limite $m \rightarrow \infty$ ($\Delta A_i \rightarrow 0$), em que a soma passa a ser um integral com duas variáveis:

$$\Phi_s = \iint_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dA \quad \begin{aligned} (dA &= dx dy = dx dz =) \\ &= r d\theta dr = \dots \end{aligned}$$

LEI DE GAUSS

Fluxo de uma carga pontual q , através de uma superfície fechada

S. Se q estiver dentro de S , todas as linhas de campo atravessam S e uma esfera, de raio arbitrário R , com centro em q .



$\Phi_s = \Phi_F$ (F = esfera com centro q)
Como \vec{E} é perpendicular a F e o seu módulo é constante nela:

$$E_F = \frac{k|q|}{R^2}$$

$$\Rightarrow \Phi_F = E_F A_F = \left(\frac{k|q|}{R^2} \right) (4\pi R^2) = 4\pi k |q|$$

retira-se o valor absoluto de $|q|$ e usa-se a convenção de que fluxo negativo é fluxo a entrar na superfície fechada (campo atrativo) e fluxo positivo é fluxo a sair da superfície fechada (campo repulsivo)

$$\boxed{\Phi_s = 4\pi k q}$$

Se houver um dielétrico na superfície S , com constante K , divide-se por K .

LEI DE GAUSS

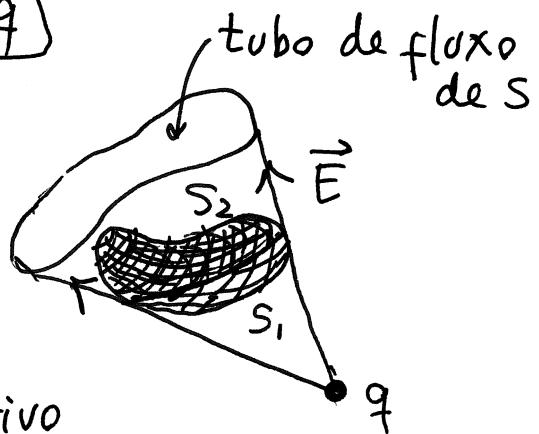
S = superfície fechada. $\Phi_s = \text{fluxo devido a uma carga pontual } q.$

a) q dentro de S \rightarrow

$$\boxed{\Phi_s = 4\pi k q}$$

b) q fora de S .

Imaginando q como uma fonte de luz, S é dividida em duas partes, S_1 , iluminada, e S_2 , à sombra. Há fluxo negativo em S_1 e positivo em S_2 (se $q > 0$). Mas como o valor absoluto dos dois fluxos é igual (estão no mesmo tubo de fluxo)



$$\Rightarrow \boxed{\Phi_s = 0}$$

Sistema com m cargas pontuais

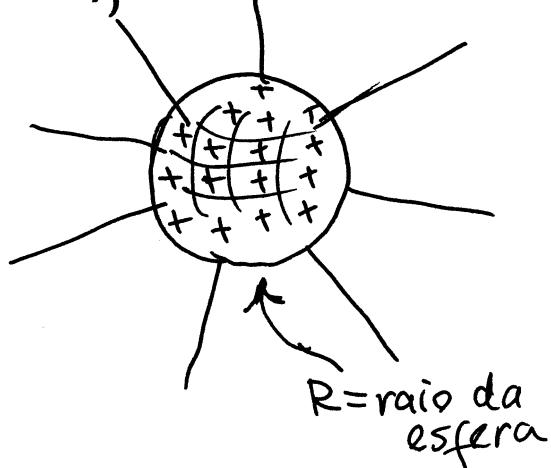
$$\Phi_s = \iint (\vec{E} \cdot \hat{n}) dA = \sum_{i=1}^m \iint (\vec{E}_i \cdot \hat{n}) dA = 4\pi k \sum_{\substack{\text{interior} \\ \text{de } S}} q_i$$

$$\boxed{\Phi_s = 4\pi k q_{\text{int}}}$$

q_{int} = carga total dentro de S .

Exemplos de cálculo do campo usando a lei de Gauss

Esfera condutora, isolada, com carga Q



A carga distribui-se uniformemente na superfície.

\Rightarrow As linhas de campo são perpendiculares à esfera e o módulo do campo depende apenas da distância r até o centro da esfera.

S = esfera de raio r , concêntrica com a esfera condutora

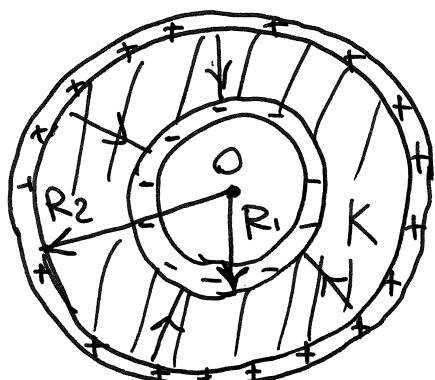
$$\Phi_S = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E(r) \iint_S dA = 4\pi r^2 E(r)$$

pela lei de Gauss: $\Phi_S = 4\pi k q_{\text{int}} \Rightarrow E(r) = \frac{kq_{\text{int}}}{r^2}$

a) $r > R \Rightarrow q_{\text{int}} = Q \Rightarrow E(r) = \frac{kQ}{r^2}$

b) $r < R \Rightarrow q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E = 0$

Condensador esférico



S = esfera de raio r com centro em O

$$\Rightarrow \Phi_S = E(r) \iint_S dA = 4\pi r^2 E(r)$$

carga Q na esfera de raio R_2
carga $-Q$ na esfera de raio R_1
dielétrico com constante K
entre as duas esferas.

A carga distribui-se uniformemente nas armaduras

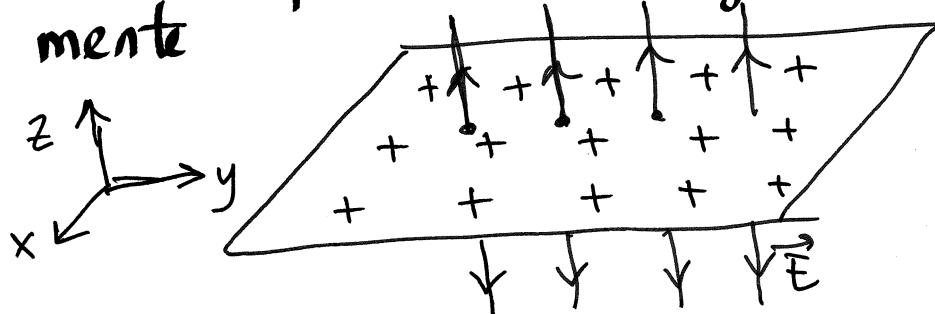
a) $\Phi_S = \frac{4\pi k q_{\text{int}}}{K}$ (se $R_1 < r < R_2$)

$$q_{\text{int}} = -Q \Rightarrow E(r) = \frac{kQ}{r^2}$$

b) $R_2 < r$ ou $r < R_1 \Rightarrow \Phi_S = 4\pi k q_{\text{int}}$

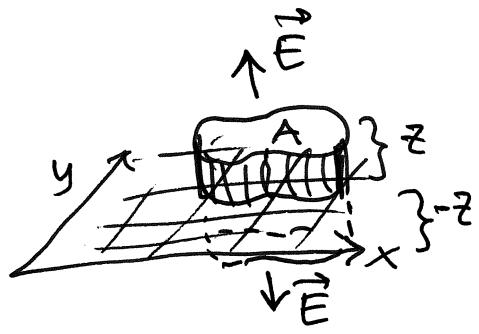
$$q_{\text{int}} = 0, \text{ nos dois casos, } \Rightarrow E(r) = 0$$

Plano infinito com carga distribuída uniformemente



E perpendicular ao plano e depende apenas da distância, z , até o plano.

S = cilindro com tampas paralelas ao plano, nos dois lados e à mesma distância $|z| = |z'|$



$$\Phi_S = \Phi_{\text{tampa}1} + \Phi_{\text{tampa}2} + \Phi_{\text{lateral}} = EA + EA + 0$$

$$\Phi_S = 4\pi k q_{\text{int}} \Rightarrow 2EA = 4\pi k q_{\text{int}}$$

q_{int} = carga numa região de área A no plano

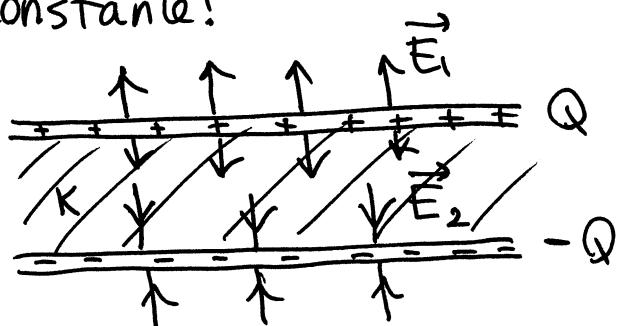
$$E_{\text{plano}} = 2\pi k \sigma$$

σ = carga superficial no plano constante!

Condensador plano.

admitindo armaduras infinitas,

$$E_1 = 2\pi k \sigma = E_2 \quad \sigma = \frac{Q}{A}$$

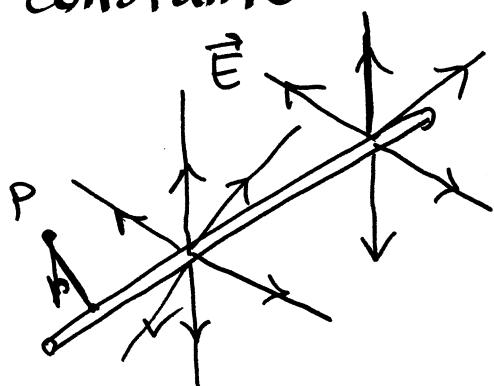


Fora do condensador, $\vec{E} = \vec{0}$, porque os dois campos anulam-se. Dentro do condensador:

$$E_{\text{cond.plano}} = \frac{4\pi k Q}{KA}$$

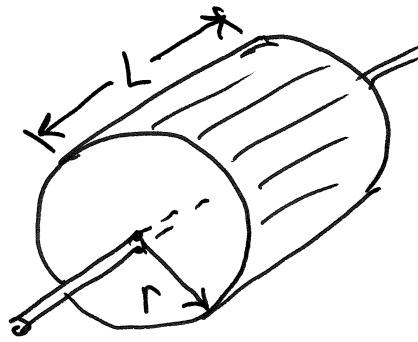
$$\Delta V = \frac{4\pi k Q d}{KA}$$

Fio retilíneo, uniforme, com carga linear λ constante



As linhas de campo deverão ser perpendiculares ao fio, e E dependerá apenas da distância até o fio, r .

$S =$ Cilindro de raio r , com eixo no fio e altura L



$$\begin{aligned}\Phi_S &= \Phi_{\text{tampa}_1} + \Phi_{\text{tampa}_2} + \Phi_{\text{lateral}} \\ &= 0 + 0 + E(2\pi r L)\end{aligned}$$

$$\Phi_S = 4\pi k q_{\text{int}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2k q_{\text{int}}}{r L}$$

q_{int} = carga num pedaço de fio de comprimento

$$L \Rightarrow \frac{q_{\text{int}}}{L} = \lambda = \text{carga linear}$$

$E = \frac{2k\lambda}{r}$

Nos casos em que não existe simetria pode usar-se a forma diferencial da lei de Gauss, que resulta de aplicar a lei a uma superfície $S =$ paralelepípedo de arestas dx, dy, dz (infinitessimais).

em cada ponto: $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{4\pi k s}{K}$ $s =$ carga volumétrica no ponto.

Existem vários métodos para resolver essa equação, em alguns casos, e métodos numéricos mais gerais, mas não vamos entrar nesse tópico nesta cadeira.

POTENCIAL ELETROSTÁTICO

O potencial V é uma função escalar, que a cada ponto P do espaço atribui um valor $V(x, y, z)$ definido pelo integral de linha do campo:

$$V(x, y, z) = - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (P_0 \text{ ponto onde arbitra-se que } V=0)$$

A diferença de potencial entre dois pontos (x, y, z) e $(x+\Delta x, y, z)$ é: $V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z) = - \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Como o integral não depende do percurso (\vec{E} é conservativo), usando um percurso reto entre os pontos, com $d\vec{r} = \hat{i} dx$, obtém-se:

$$V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z) = - \int_x^{x+\Delta x} E_x dx = - \bar{E}_x \Delta x$$

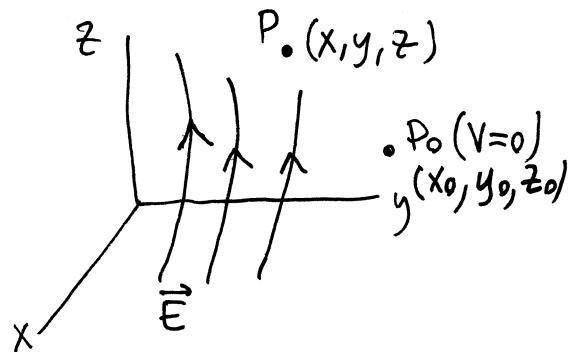
onde \bar{E}_x é o valor médio da componente E_x do campo, ao longo do percurso reto; no limite $\Delta x \rightarrow 0$, esse percurso é muito curto e \bar{E}_x aproxima-se do valor de E_x no ponto (x, y, z) . Como tal,

$$E_x(x, y, z) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}$$

que é a derivada parcial de V , em ordem a x , e denota-se:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$\frac{\partial V}{\partial x}$ calcula-se derivando V em ordem a x , enquanto y e z permanecem constantes.



De forma semelhante obtém-se:

$$\boxed{E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

E observe-se que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$$

E como $V(x, y, z)$ é função contínua, a ordem das duas derivadas não interessa; como tal:

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}}$$

Que são as condições para que o campo \vec{E} seja conservativo e são equivalentes a dizer que a sua matriz jacobiana

$$J(\vec{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{é simétrica} \\ (= -\text{hessiana de } V) \end{array}$$

Operador nabla: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$

O campo elétrico é igual a menos o gradiente do potencial:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

e, portanto, o seu rotacional é nulo:

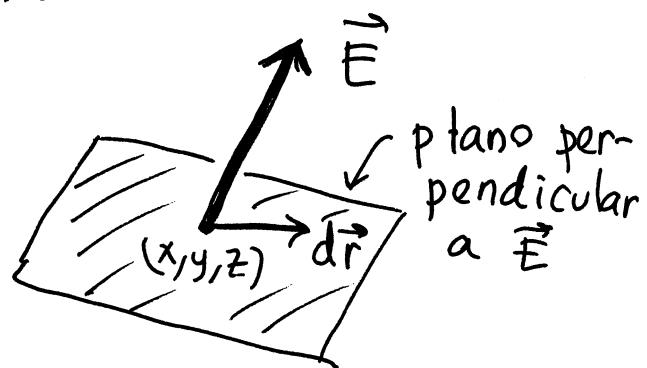
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) = 0$$

SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

Num ponto (x, y, z) um deslocamento $d\vec{r}$ no plano perpendicular a \vec{E} conduz a:

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

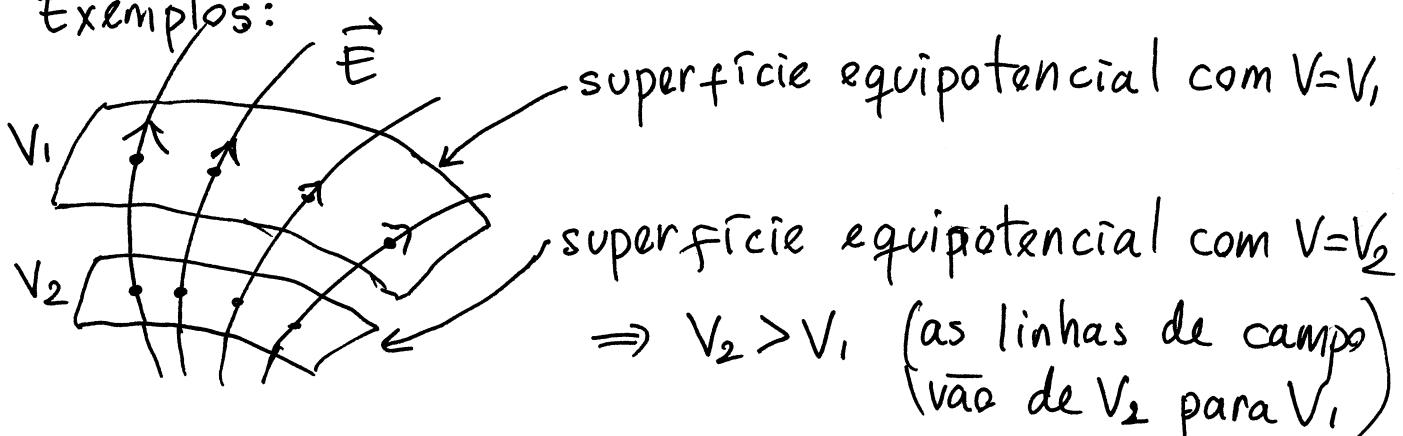


Como tal, não existe diferença de potencial entre os pontos na vizinhança de (x, y, z) , no plano perpendicular a \vec{E} . Os pontos onde V tem o mesmo valor formam uma **superfície equipotencial** contínua, perpendicular às linhas de campo \vec{E} .

O valor máximo de $-\vec{E} \cdot d\vec{r}$ obtém-se quando $d\vec{r}$ apontar na direção de \vec{E} , mas no sentido oposto; ou seja:

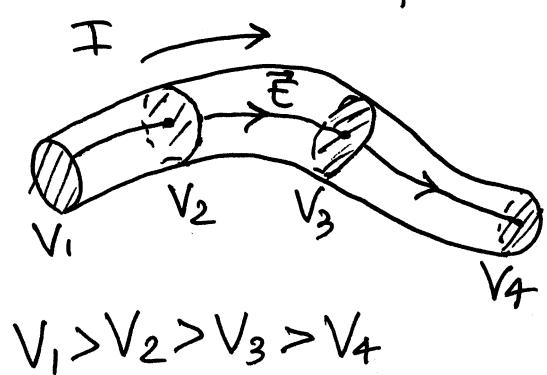
\vec{E} indica a direção e sentido em que o potencial decresce mais rapidamente

Exemplos:

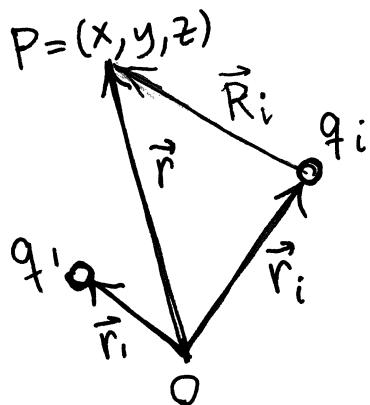


Num fio com corrente I , (condutor)

as equipotenciais são perpendiculares ao fio e com valores decrescentes no sentido da corrente.



POTENCIAL DE UM SISTEMA DE CARGAS PONTUAIS



No ponto P na posição $\vec{r} = (x, y, z)$, a carga q_i produz campo:

$$\vec{E}_i = \frac{k q_i \hat{R}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \quad \hat{R}_i = \text{versor de } (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

usando origem no ponto onde está q_i , $\vec{E}_i = \frac{k q_i}{R_i^2} \hat{R}_i \quad (R_i = \vec{r} - \vec{r}_i)$

E arbitrando $V=0$ em $r \rightarrow \infty$, o potencial devido a q_i é:

$$V_i = - \int_{\infty}^P \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^{R_i} \frac{k q_i}{R^2} dR = \frac{k q_i}{R} \Big|_{\infty}^{R_i} = \frac{k q_i}{R_i} \begin{matrix} \text{(mesm} \\ \text{sinal} \\ \text{de } q_i) \end{matrix}$$

$d\vec{r} = \hat{R} dR$ (percurso de integração, recto, direção \hat{R}_i)

Qu seja, o potencial do sistema de n cargas é:

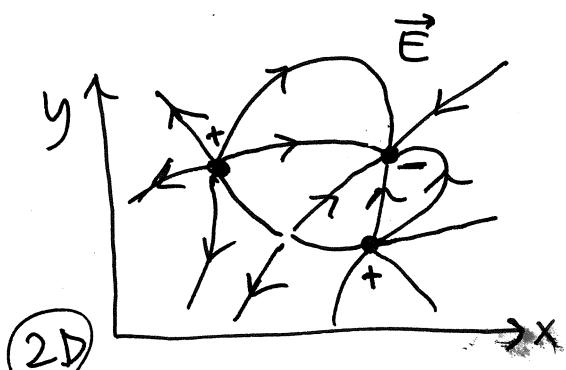
$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{R_i} = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}$$

Cargas num plano. Se todas as cargas estiverem no mesmo plano, por exemplo, o plano (x, y) ,

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}$$

é uma função de duas variáveis, que pode ser representada num gráfico em 3D.

As equipotenciais passam a ser curvas no plano (x, y) . (intersecção das superfícies equipotenciais com o plano das cargas.)



Exemplo 1. Determine o potencial, no plano xy de 3 cargas no plano xy : $-4\mu C$ em $(2, 1)$ (distâncias em cm), $3\mu C$ em $(1, -3)$ e $2\mu C$ em $(-3, 0)$.

Resolução:

$$k = 9 \times 10^9 \frac{V \cdot m}{C} = 9 \times 10^9 \frac{V \cdot (10 \text{ dm})}{10^6 \mu C} = 90 \frac{kV \cdot dm}{\mu C}$$

$$\Rightarrow V(x, y) = -\frac{360}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} + \frac{270}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}} + \frac{180}{\sqrt{(x+3)^2 + y^2}}$$

(x e y em dm, V em kV)

No Maxima:

$$\text{norm}(v) := \sqrt{v \cdot v}$$

$$q := [-4, 3, 2]$$

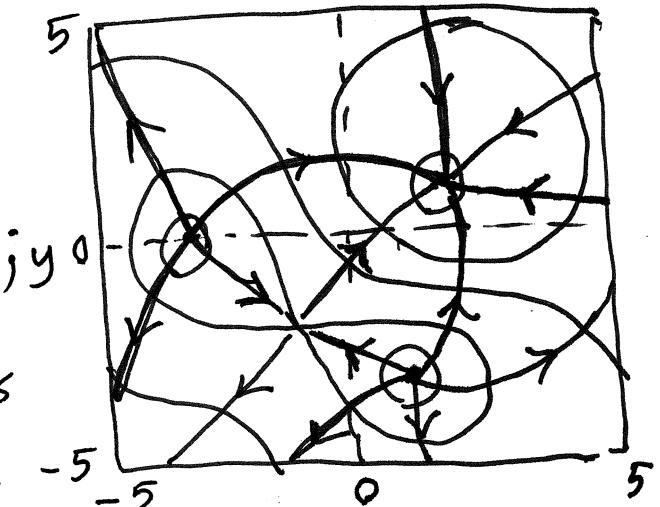
$$P := [[2, 1], [1, -3], [-3, 0]]$$

$$V := \text{sum}(90 * q[i] / \text{norm}([x, y] - P[i]), i, 1, 3);$$

As curvas equipotenciais e linhas de campo elétrico podem ser traçadas com:

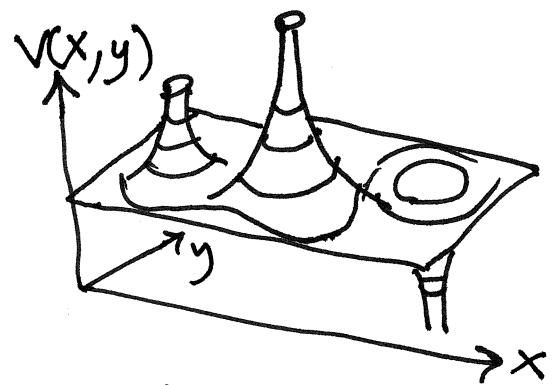
$$\text{plotEq}(V, [x, -5, 5], [y, -5, 5]);$$

Clica-se em alguns pontos para traçar equipotenciais.



Entrando no menu de configuração, apaga-se a cor no campo "curves", e seleciona-se uma cor no campo "fieldlines". Regressando ao gráfico, cada click num ponto agora traça uma linha de campo.

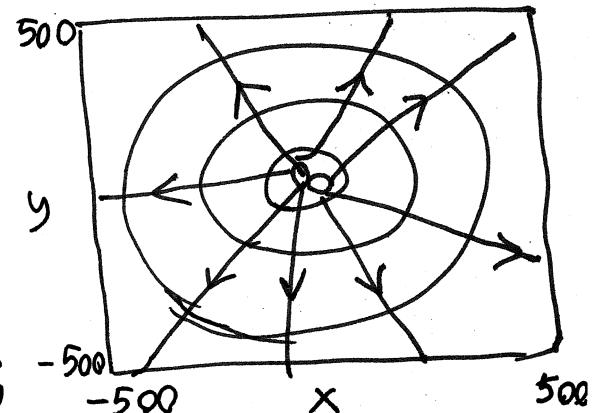
Pode também mostrarse $V(x, y)$ num gráfico a 3D, em que a altura z é o valor do potencial



`plot3d(V, [x, -5, 5], [y, -5, 5], [z, -800, 800]);`

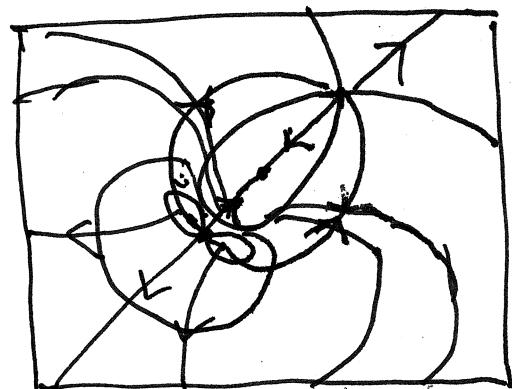
A carga total do sistema é +1uC. Como tal, visto de longe, o potencial asemelha-se ao de uma carga pontual de +1uC.

`ploteq(V, [x, -500, 500], [y, -500, 500]);`



Num domínio intermeio, descobre-se um segundo ponto de sela, aproximadamente em (24.5, 25.9) (decímetros).

`ploteq(V, [x, -50, 50], [y, -50, 50]);`



Exemplo 2. Determine o potencial de uma esfera de raio R e carga Q , distribuída uniformemente no seu volume.

Resolução. No problema 5 do capítulo 6, resolvido na aula TP 6, encontrou-se a expressão do campo:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{R^3} r & , r \leq R \\ \frac{kQ}{r^2} & , r \geq R \end{cases}$$

arbitrando $V=0$ em $r \rightarrow \infty$, $V(r) = - \int_{\infty}^r E(r) dr$

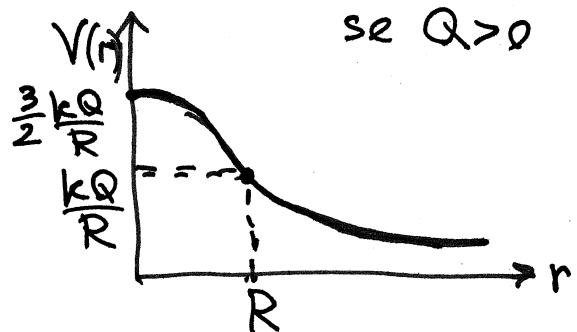
$$\textcircled{a} \quad r \geq R. \quad V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{kQ}{r^2} dr = -kQ \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty} \right)$$

$$V(r) = \frac{kQ}{r}$$

igual a uma carga pontual no centro da esfera.

$$\textcircled{b} \quad r \leq R. \quad V(r) = - \int_{\infty}^R \frac{kQ}{r^2} dr - \int_R^r \frac{kQ}{R^3} r dr \\ = \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{2R^3} (R^2 - r^2)$$

$$V(r) = \frac{kQ}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right)$$

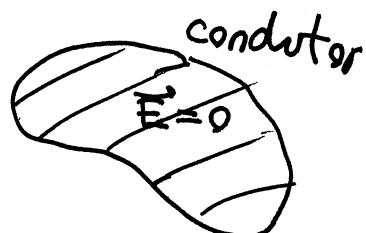


V e $\frac{dV}{dr}$ são contínuas, mas

$\frac{d^2V}{dr^2}$ é descontínua em $r=R$

CONDUTORES EM EQUILÍBRIO ELETROSTÁTICO.

Num condutor isolado, em equilíbrio eletrostático, $\vec{E}=0$ em qualquer ponto dentro do condutor



\textcircled{a} A diferença de potencial entre dois pontos P e Q, no condutor, é nula: $V_P - V_Q = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

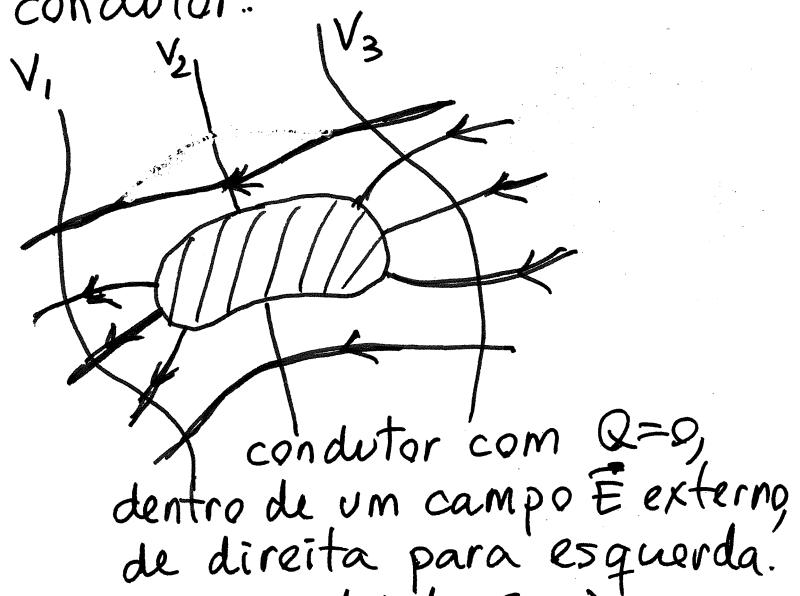
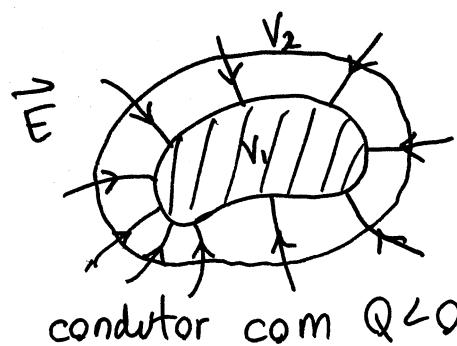
Todos os pontos no condutor estão ao mesmo potencial

\textcircled{b} Seja S=superfície fechada, dentro do condutor.
 $\Rightarrow \Phi_S = 0$, porque $\vec{E}=0$, $\Rightarrow q_{int} = 0$

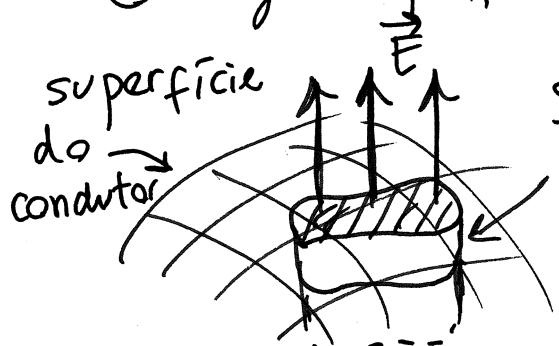
Não há carga em nenhum ponto dentro do condutor.
 Qualquer excesso de carga deposita-se na superfície do condutor.

③ Como todos os pontos na superfície do condutor têm o mesmo potencial, então as linhas de campo elétrico, fora do condutor, são todas perpendiculares à superfície do condutor.

Exemplos



④ Carga superficial σ (carga por unidade de área)



$S =$
pequena superfície fechada,
com tampas de área dA , paralelas à superfície do condutor,
por dentro e fora

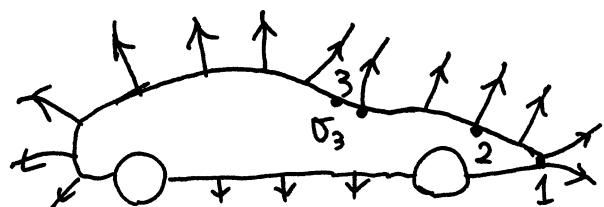
$$\Phi_s = E_s dA \quad (E_s = \text{valor do campo na superfície do condutor})$$

lei de Gauss: $\Phi_s = 4\pi k dq$ (dq carga na região
 dA na superfície do condutor)

$$\Rightarrow E_c = 4\pi k \sigma$$

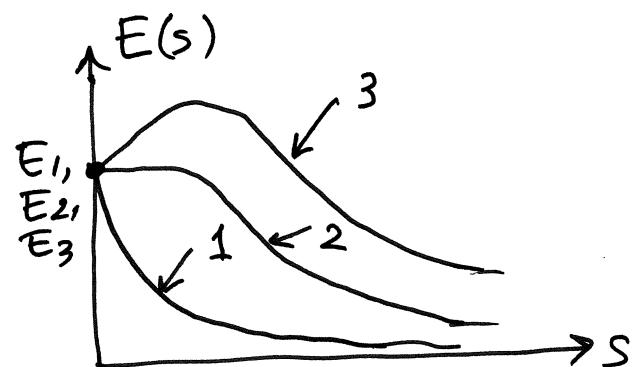
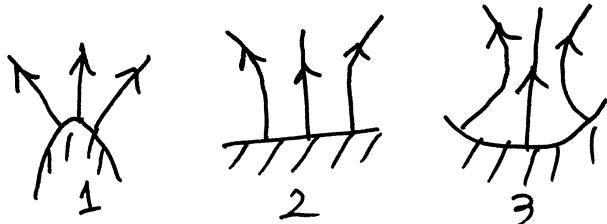
$$\sigma = \frac{dq}{dA} = \text{carga superficial}$$

Carga e campo na superfície dos condutores isolados

$$E_{\text{sup}} = \frac{q}{k\pi\sigma}$$


Se σ fosse constante na superfície, então
 $E_1 = E_2 = E_3$

Em função da distância s desde a superfície, o campo nas regiões 1 (convexa), 2 (plana) e 3 (côncava) é o seguinte:



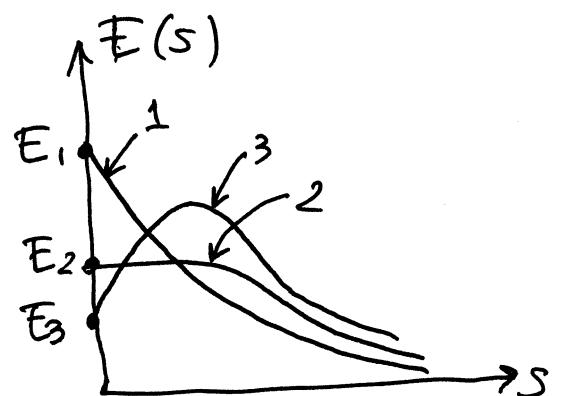
$$V_{\text{superfície}} = \int_0^{\infty} E \, ds = \text{área sob o gráfico de } E(s) \text{ vs } s.$$

$$\Rightarrow V_1 < V_2 < V_3$$

mas como o potencial deve ser igual em todos os pontos do condutor, conclui-se que E_1 deverá ser maior que E_2 , e este maior que E_3 .

$$\Rightarrow \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$$

"Poder das pontas": o campo (e a carga superficial) é maior nas pontas do condutor. É o princípio do pára-raios.



FORÇA MAGNÉTICA

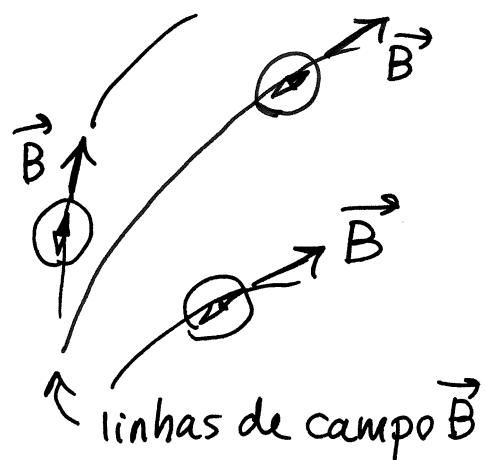
Força entre ímanes. Tal como a força elétrica, pode ser atrativa ou repulsiva. Todo íman tem um polo norte e um polo sul. Polos diferentes sofrem forças atrativas e entre polos do mesmo tipo a força é repulsiva.

A bússola é um pequeno íman, com polos norte e sul. A Terra é também um íman com polos norte e sul que fazem rodar a bússola

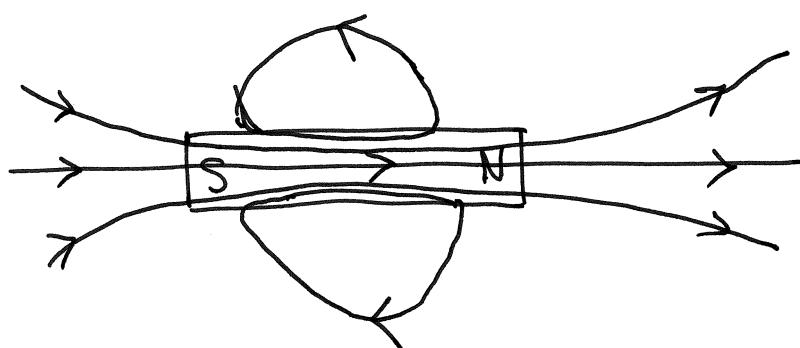


CAMPO MAGNÉTICO

A existência de um campo magnético determina-se com uma bússola. Se num ponto do espaço a bússola orienta-se numa direção e sentido específico, existe campo \vec{B} nesse ponto nessa direção e sentido.



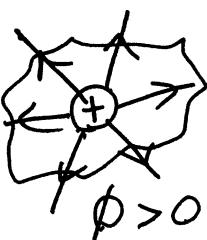
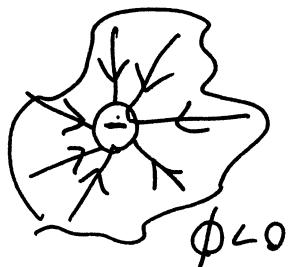
Exemplo: linhas de campo dum íman retangular:



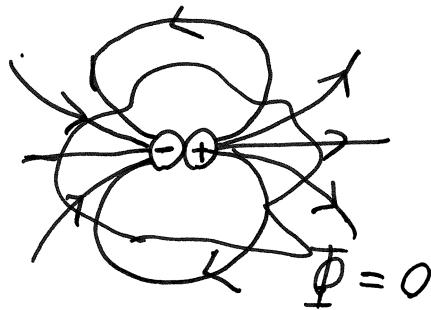
Diferenças com o campo elétrico: existem linhas de campo \vec{B} fechadas $\Rightarrow \vec{B}$ não é conservativo. Não existem monópolos magnéticos, ou seja, polos norte ou sul isolados. Se um íman for cortado ao meio, aparecem novos polos, sempre aos pares N e S.



Monópolos elétricos
(cargas)

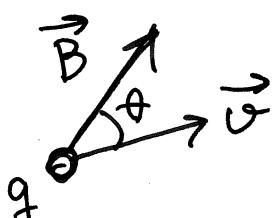


Dipolo elétrico



$\Phi_{magnético} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$ trigo da jacobiana = 0 $\Rightarrow \vec{B}$ só tem pontos de sela e centro.

FORÇA MAGNÉTICA SOBRE CARGAS PONTUAIS



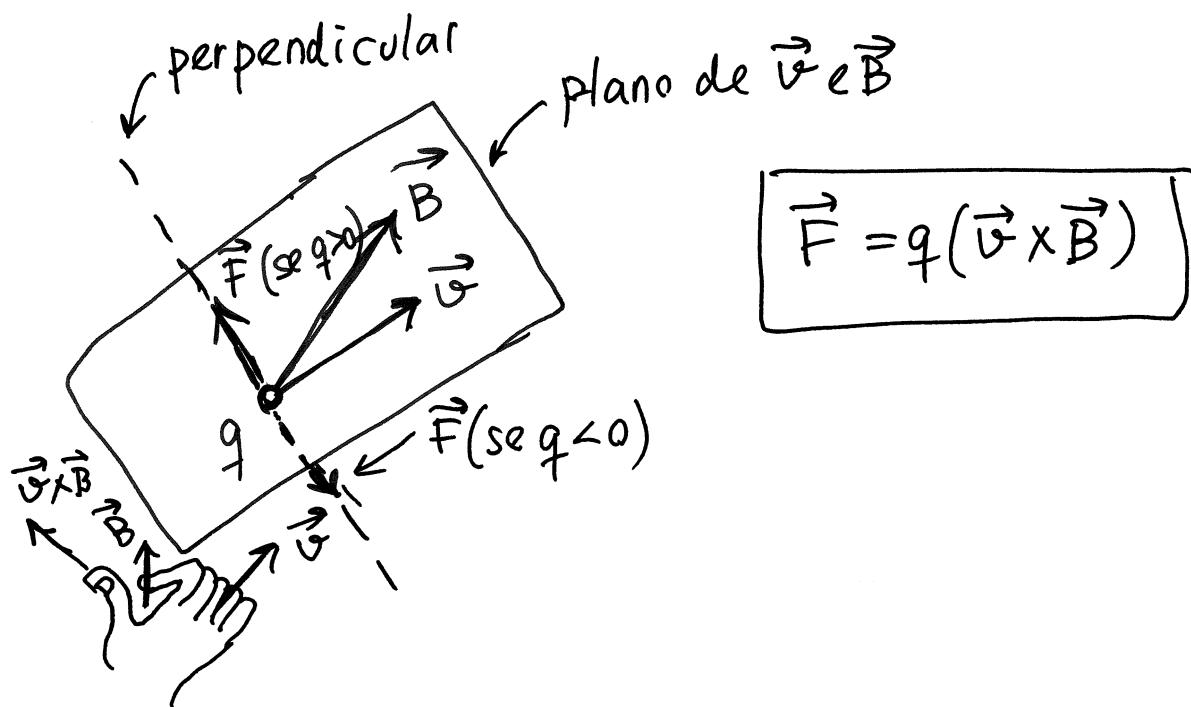
Se uma carga pontual q estiver em movimento dentro de um campo magnético, sofre força magnética \vec{F} .

O módulo da força, F , é diretamente proporcional a:

$$|q|, v, B$$

F é nulo se \vec{v} e \vec{B} tiverem a mesma direção ($\theta = 0$ ou $\theta = 180^\circ$), e máximo se forem perpendiculares ($\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$). Em geral: $F = |q|vB \sin \theta$

A direção de \vec{F} é perpendicular ao plano formado por \vec{v} e \vec{B} e no sentido da regra da mão direita, de \vec{v} para \vec{B} , se $q > 0$ (oposto, se $q < 0$).

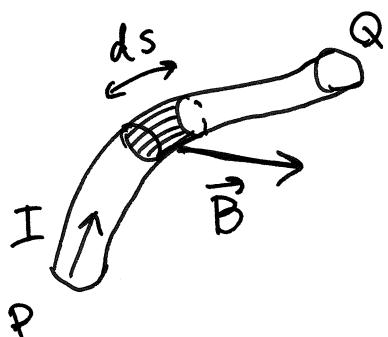


UNIDADE SI DE CAMPO MAGNÉTICO

$$1 \frac{N \cdot S}{C \cdot m} = 1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 T \text{ (um tesla)}$$

outra unidade habitual: $10^{-4} T = 1 G$ (um gauss)

FORÇA MAGNÉTICA EM CONDUTORES COM CORRENTE



$$\begin{aligned} d\vec{F} &= (\vec{J} \times \vec{B}) ds \\ \vec{F}_{\text{condutor}} &= \int_P^Q (\vec{J} \times \vec{B}) ds \end{aligned}$$

(percurso = condutor)

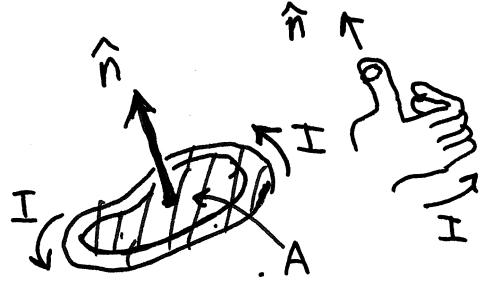
Caso particular: condutor retilíneo e \vec{B} uniforme

$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{J} \times \vec{B}) \int_P^Q ds \Rightarrow \vec{F} = (\vec{J} \times \vec{B}) l$$

l = comprimento do condutor

MOMENTO MAGNÉTICO

Espira: cabo condutor com forma de curva fechada plana.



Quando houver corrente na espira, define-se o versor normal à espira, \hat{n} , no sentido da regra da mão direita. E define-se o momento magnético da espira:

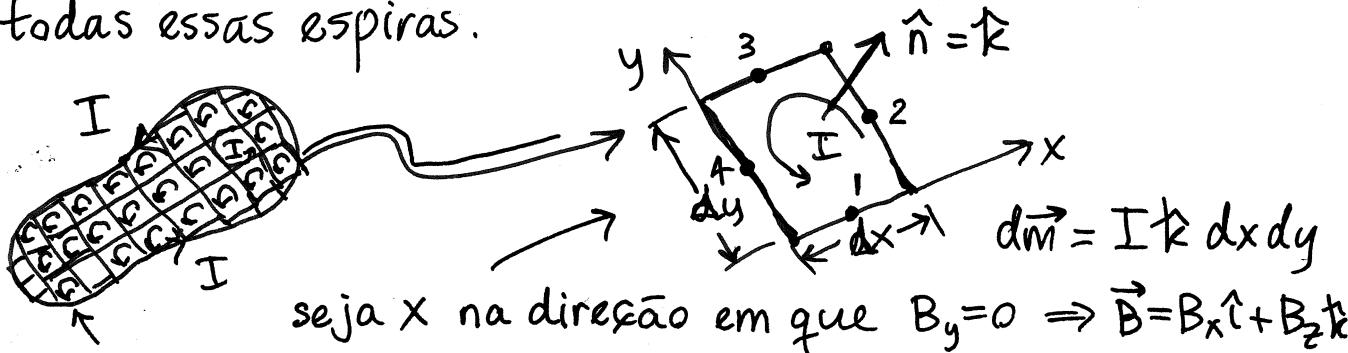
$$\vec{m} = A \mathbf{I} \hat{n}$$

A = área delimitada pela espira

Nos ímanes, \vec{m} é um vetor que aponta do polo sul para o polo norte

$$\begin{matrix} S & \xrightarrow{} & N \\ \vec{m} \end{matrix}$$

Binário magnético. O efeito do campo magnético sobre uma espira, determina-se dividindo a espira em várias espiras infinitesimalmente pequenas, todas com a mesma corrente, e somando as forças/binários em todas essas espiras.



Forças em 4 fios retilíneos:

$$\textcircled{1} \quad \vec{I}_1 = I \hat{i}, \quad l_1 = dx, \quad d\vec{F}_1 = (\vec{I}_1 \times \vec{B}) dx = -IB_z dx \hat{j}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{I}_2 = I \hat{j}, \quad l_2 = dy, \quad d\vec{F}_2 = (\vec{I}_2 \times \vec{B}) dy = +IB_z dy \hat{i} - IB_x dy \hat{k}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{I}_3 = -I \hat{i}, \quad l_3 = dx, \quad d\vec{F}_3 = (\vec{I}_3 \times \vec{B}) dx = +IB_z dx \hat{j}$$

$$\textcircled{4} \quad \vec{I}_4 = -I \hat{j}, \quad l_4 = dy, \quad d\vec{F}_4 = (\vec{I}_4 \times \vec{B}) dy = -IB_z dy \hat{i} + IB_x dy \hat{k}$$

A força resultante, $d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4$ é nula.

As componentes de $d\vec{F}_2$ e $d\vec{F}_4$ perpendiculares à espira, com módulo $IB_x dy$, atuam em linhas de ação paralelas, separadas dx . O resultado é um binário com momento \vec{M} na direção de \hat{j} :

$$\vec{M} = I B_x dy dx \hat{j} = I dx dy (\vec{k} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

faz rodar \vec{m} na direção e sentido de \vec{B}

É o princípio de funcionamento dos motores elétricos a corrente numa bobina produz momento magnético, que roda no sentido do campo \vec{B} dum íman. Quando \vec{m} fica a apontar para \vec{B} , troca-se o sentido da corrente, de forma a trocar o sentido de \vec{m} .

Numa bobina:

$$\vec{M}_{\text{bobina}} = N \vec{M}_{\text{espira}}$$

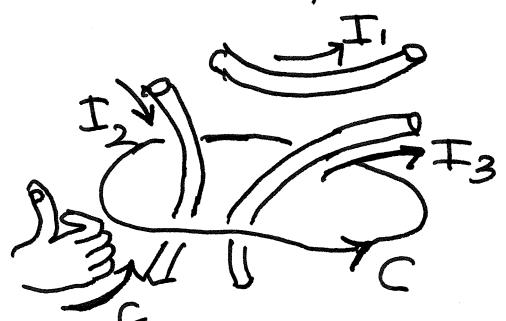
N = número de espiras.

LEI DE AMPÈRE

A corrente nos cabos condutores da origem a campo magnético.

Em qualquer curva fechada C , verifica-se a lei de Ampère para o campo produzido pelas correntes:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{\text{int}}$$



\oint_C → integral de linha, no percurso fechado C .

$$k_m = \text{constante magnética} = 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \quad (\text{no vácuo})$$

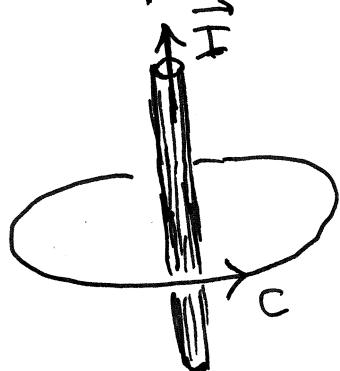
I_{int} = soma algébrica das correntes que atravessam a área delimitada por C .

O sentido em que C seja percorrida, determina o sinal das correntes, de acordo com a regra da mão direita.

Na figura acima, I_1 não atravessa C , I_2 atravessa no sentido negativo e I_3 no sentido positivo:

$$\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi km (I_3 - I_2)$$

Campo de um fio retilíneo com corrente.



por simetria, as linhas de campo deverão ser circunferências perpendiculares ao fio e com centro nele.

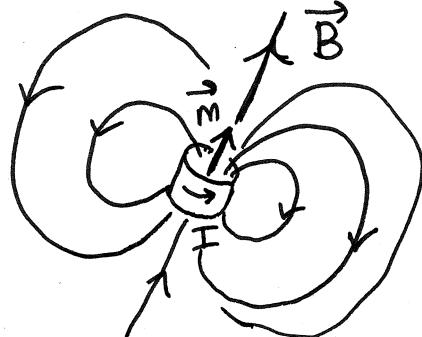
Seja C uma dessas circunferências de raio r . $\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B$

Se C for percorrida no sentido da regra da mão direita segundo I , então $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi km I$

$$\Rightarrow B_{fio} = \frac{2kmI}{r}$$

no sentido da regra da mão direita.

Nas espiras e bobinas, o campo \vec{B} produzido pela corrente é o campo de um dipolo, com m a apontar na direção em que o campo é mais forte.



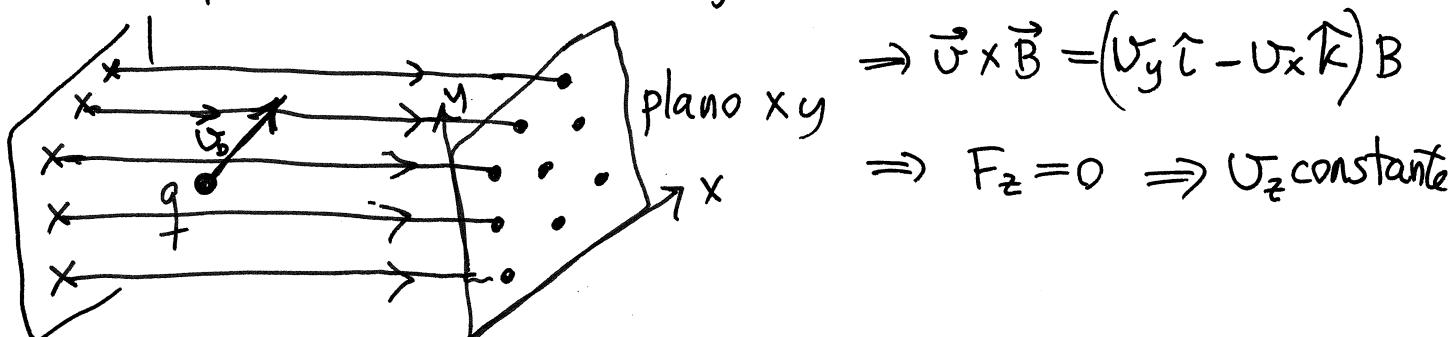
Movimento de cargas pontuais num campo magnético.

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{F} \text{ perpendicular a } \vec{v}$$

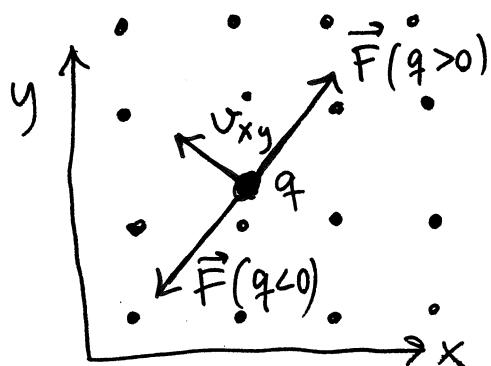
$$\Rightarrow \begin{cases} F_t = 0 \\ F_n = |q(\vec{v} \times \vec{B})| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v} = 0 \\ a_n = \frac{|q(\vec{v} \times \vec{B})|}{m} \end{cases} \Rightarrow v \text{ constante}$$

A velocidade \vec{v} muda de direção mas mantém módulo constante. A força magnética não realiza trabalho (energia cinética constante).

Campo \vec{B} uniforme. Seja $\vec{B} = B\hat{k}$



Movimento na projeção no plano xy:



$$F = m \frac{v_{xy}^2}{r}$$

$$F = |q| v_{xy} B$$

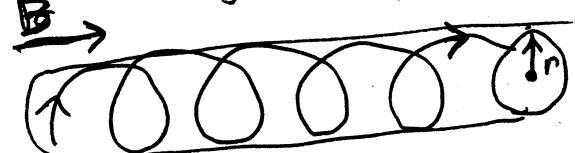
como $|\vec{v}|$ e v_z são constantes, v_{xy} também $\Rightarrow F = \text{constante}$
 \Rightarrow movimento circular uniforme de raio r .

$$|q| v_{xy} B = \frac{m v_{xy}^2}{r}$$

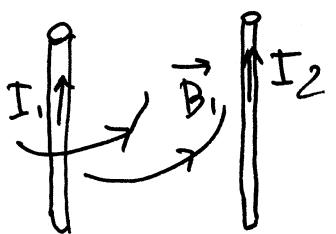
$$\Rightarrow r = \frac{m v_{xy}}{|q| B}$$

$$\text{período} = T = \frac{2\pi r}{v_{xy}} = \frac{2\pi m}{|q| B}$$

Em quanto v_{xy} roda no plano xy, a partícula segue movimento helicoidal



FORÇA ENTRE CABOS RETOS COM CORRENTE



Se os cabos são paralelos:

$$F_{1/2} = F_{2/1} = \frac{2km l I_1 I_2}{d}$$

O cabo 1 produz campo magnético \vec{B}_1 , que produz força magnética $\vec{F}_{1/2}$ no cabo 2.

E o cabo 2 produz campo magnético \vec{B}_2 e força $\vec{F}_{2/1}$, no cabo 1.

l = comprimentos dos cabos
 d = distância entre eles

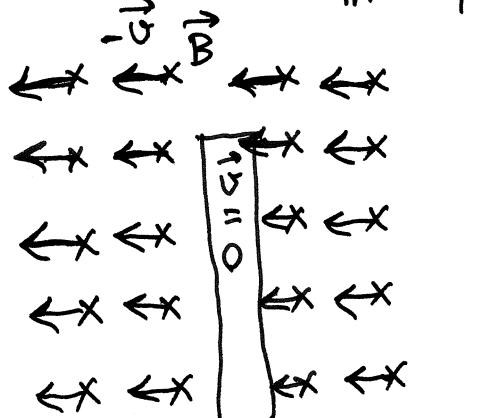
Se as correntes I_1 e I_2 têm o mesmo sentido, a força é atrativa. Caso contrário, a força é repulsiva.



INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

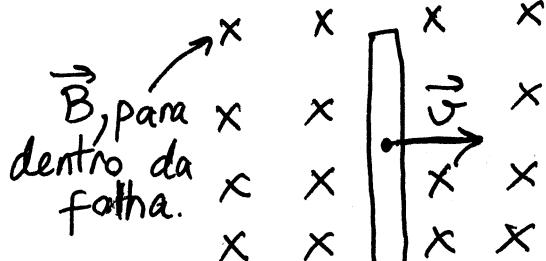
Num condutor com velocidade \vec{v} , dentro de um campo magnético \vec{B} , as cargas de condução sofrem força magnética:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



as linhas de campo passam pela barra, com velocidade $-\vec{v}$.

Exemplo: barra com velocidade \vec{v} perpendicular a um campo \vec{B} uniforme



No referencial em que a barra está em repouso, observa-se a mesma força nas cargas de condução, mas não pode ser força magnética, porque as cargas de condução estão em repouso.

O que acontece é que as forças elétrica e magnética são a manifestação do efeito dum campo electromagnético em diferentes referenciais. É mais correto escrever:

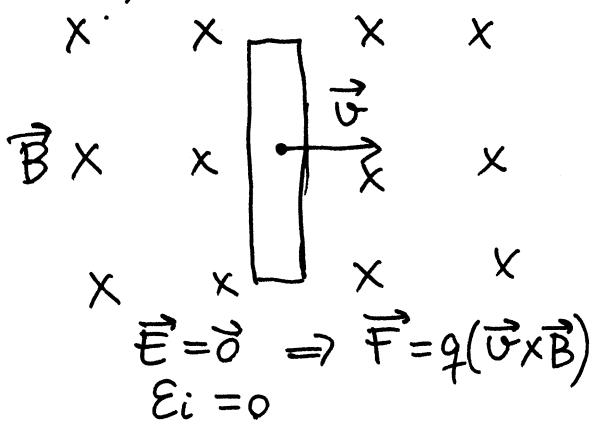
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

força de Lorentz

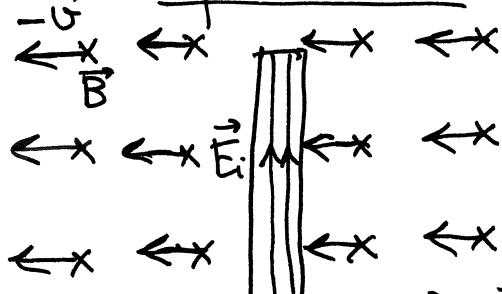
No referencial em que a barra se desloca com velocidade \vec{v} , $\vec{E} = 0$ e \vec{B} é uniforme e estático.

No referencial em que a barra está em repouso, o movimento do campo \vec{B} , com velocidade $-\vec{v}$, produz campo elétrico induzido: $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$

Referencial 1



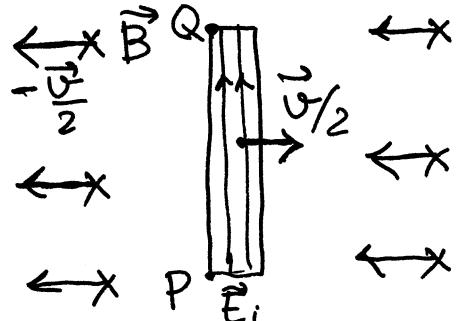
Referencial 2



$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$E_i = vB_l \quad (\{l = \text{comprimento da barra}\})$$

Referencial 3



$$\vec{E}_i = \frac{\vec{v}}{2} \times \vec{B}$$

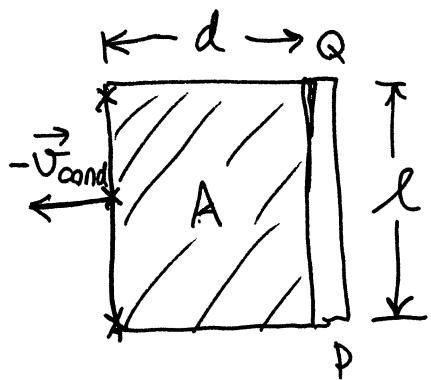
$$\vec{F} = q(\vec{E}_i + \frac{\vec{v}}{2} \times \vec{B}) = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$E_i = \frac{1}{2} v B l$$

F.E.M. induzida.

$$E_i = \int_P^Q \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_P^Q (\vec{v}_{\text{condutor}} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

\vec{E}_i não é conservativo, mas não há problema na definição de E_i , já que o integral é no condutor e não num percurso qualquer.



Observe-se que E_i é igual a B vezes a área A onde se encontram as linhas de campo \vec{B} que passam pelo condutor, por unidade de tempo: $A = ld = l v_{cond} t$.

$\Rightarrow E_i = BA = \text{fluxo magnético que passa através do condutor, por unidade de tempo.}$

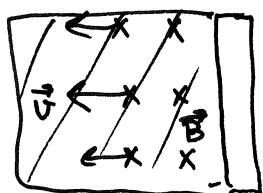
LEI DE FARADAY

fluxo magnético: $\Psi = \iint_S (\vec{B} \cdot \hat{n}) dA$

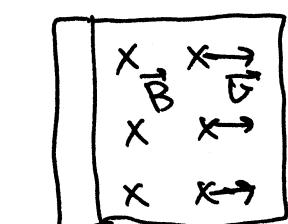
$$E_i = -\frac{d\Psi}{dt}$$

Lei de Lenz: O sentido de \vec{E}_i (e E_i) é oposto à variação do fluxo magnético, segundo a regra da mão direita.

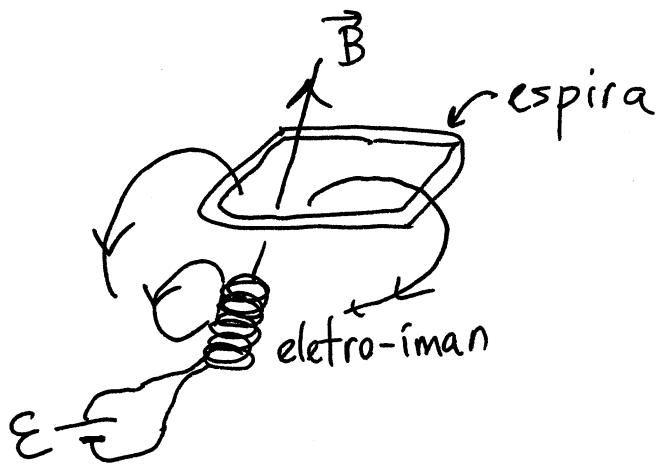
Exemplos.



O fluxo na região sombreada é para dentro da folha. Como aumenta, $\frac{d\Psi}{dt}$ é também para dentro; a direção oposta, para fora, implica sentido contrário aos ponteiros do relógio, na fronteira de A , ou seja, \vec{E}_i para cima na barra.

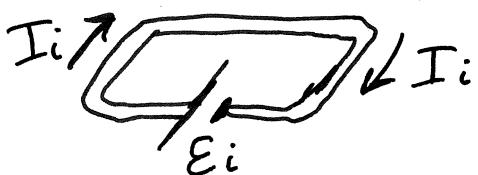


Se o movimento das linhas de campo fosse para a direita, $\frac{d\Psi}{dt}$ é ainda para dentro da folha, e o sentido oposto implica campo no sentido oposto aos ponteiros do relógio, na fronteira da região $\Rightarrow \vec{E}_i$ para baixo na barra.

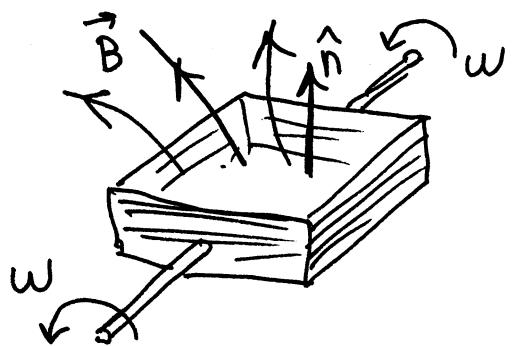


o campo do eletroíman produz fluxo Ψ para cima na espira. Enquanto a f.a.m. permanecer ligada, esse fluxo é constante e $E_i = 0$

Quando a fonte for desligada, Ψ diminui até zero. Como tal $\frac{d\Psi}{dt}$ aponta para baixo; o sentido oposto, para cima, implica uma f.e.m. induzida que produz I_i no sentido indicado na figura ao lado



ALTERNADOR



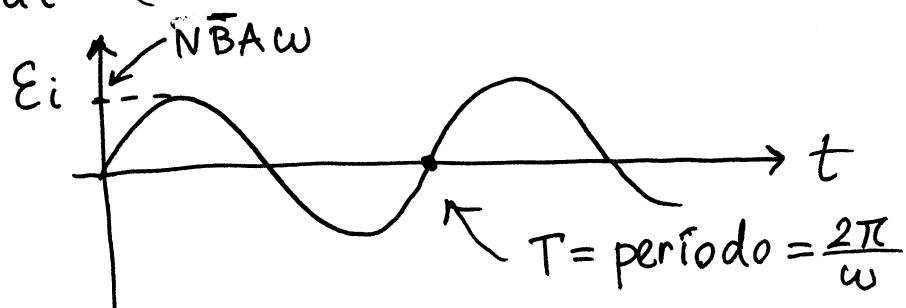
bobina com N espiras de área A , a rodar com velocidade angular w num campo magnético \vec{B}

$$\Psi = \iint_{\text{espira}} (\vec{B} \cdot \hat{n}) dA = N \bar{B} \cos \theta \iint dA$$

campo médio \uparrow
 espira \uparrow
 ângulo entre \vec{B} e \hat{n}

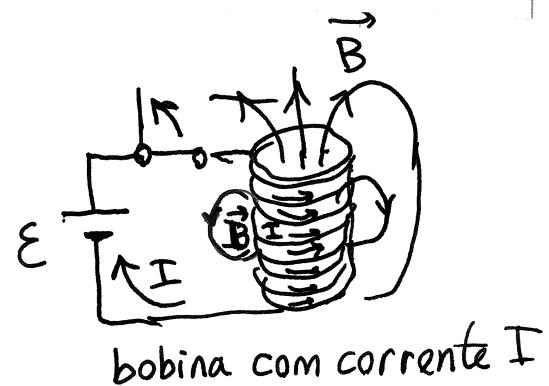
$$\Rightarrow \Psi = N \bar{B} A \cos \theta$$

$$E_i = - \frac{d\Psi}{dt} = (N \bar{B} A \sin \theta) w$$



AUTO INDUÇÃO

Em qualquer espira ou bobina, se a corrente muda, o campo magnético dentro dela também muda, e a variação de fluxo através da espira dá origem a f.e.m. induzida. Por exemplo, na bobina da figura, quando o interruptor for aberto, a diminuição da corrente dá origem a uma f.e.m. induzida que contraria a diminuição da corrente; como tal, a corrente não diminui instantaneamente até zero, mas o faz de forma gradual.

bobina com corrente I

O campo \vec{B} produzido pela bobina é diretamente proporcional à corrente I e ao número de espiras, N :

$$\vec{B}(\vec{r}) = N I \vec{f}(\vec{r}) \quad (\vec{f} = \text{função da posição}).$$

O fluxo magnético através da bobina é o fluxo total através das N espiras:

$$\Psi = N \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = N^2 I \iint_{\text{espira}} \vec{f} \cdot \hat{n} dA$$

O integral de superfície de \vec{f} é um número, K , que depende da forma e tamanho da espira (quanto maior for, maior K)

$$\Rightarrow \Psi = N^2 I K$$

Aplicando a lei de Faraday, a f.e.m. induzida é:

$$E_i = - \frac{d\Psi}{dt} = - N^2 \dot{I} K$$

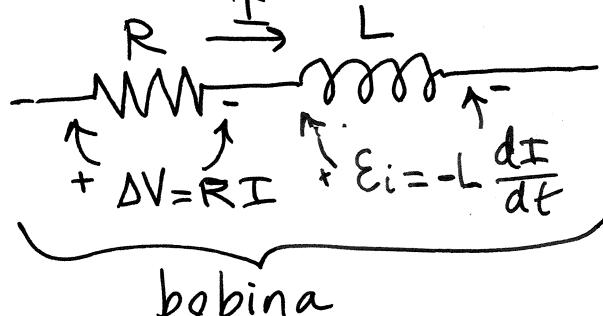
a constante $L = N^2 K$ chama-se **indutância** da bobina. Em geral, em qualquer dispositivo onde há fluxo magnético, o fluxo é proporcional a I : $\Psi = L I$

E a f.e.m. auto-induzida no dispositivo é:

$$E_i = -L \frac{dI}{dt}$$

L = indutância do dispositivo

Diagrama de circuito:



R representa o efeito Joule no condutor.

L representa a auto-indução no condutor

Unidade S.I. de indutância

$$\text{henry (H)} \quad 1\text{H} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$$

CIRCUITOS D.C. COM INDUTORES

- ① $I=0$ no indutor. \Rightarrow Não há campo magnético, mas $\Delta V = -L \frac{dI}{dt}$ pode ter qualquer valor.
 \Rightarrow o indutor é equivalente a um interruptor aberto.

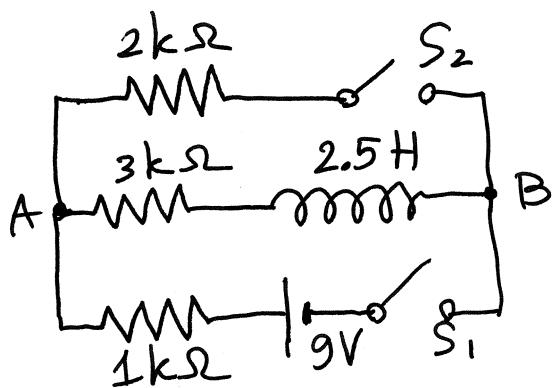
- ② Estado estacionário ($\frac{dI}{dt} = 0$) $\Rightarrow \Delta V = -L \frac{dI}{dt} = 0$
voltagem nula mas corrente com qualquer intensidade.
 \Rightarrow equivalente a um curto-círcuito.

- ③ $I \neq 0$ e a mudar (estado não estacionário)
O indutor é equivalente a uma fonte de corrente I_g ideal (resistência interna nula)



mas é uma fonte variável (I pode ser diferente de I_g em outros instantes).

Exemplo.



Em $t < t_1$, os dois interruptores S_1 e S_2 estão abertos e não há corrente no indutor. Em t_1 fecham-se simultaneamente S_1 e S_2 , e em t_2 (muito tempo depois de t_1), abre-se S_2 , mantendo S_1 fechado. Determine as correntes nas três resistências em t_1 , t_2 e $t \rightarrow \infty$.

Resolução. Unidades: $R \rightarrow k\Omega$, $\Delta V \rightarrow V$, $I \rightarrow mA$.

a) $t = t_1$. O indutor é equivalente a um interruptor aberto $\Rightarrow I_3 = 0$.

$$I_1 = I_2 = \frac{9}{2+1} = 3 \text{ mA}$$

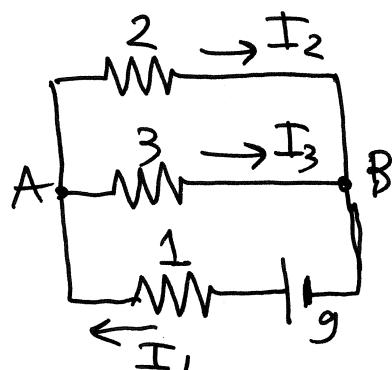
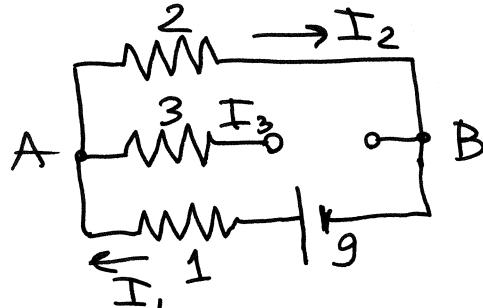
b) $t \rightarrow t_2^-$. Indutor em estado estacionário (curto-circuito).

$$I_1 = \frac{9}{\left(1 + \frac{3 \times 2}{3+2}\right)} = 4.09 \text{ mA}$$

$$V_A - V_B = 4.09 \left(\frac{3 \times 2}{3+2} \right) = 4.91 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{2} = 2.45 \text{ mA} \quad (I_2 + I_3 = I_1)$$

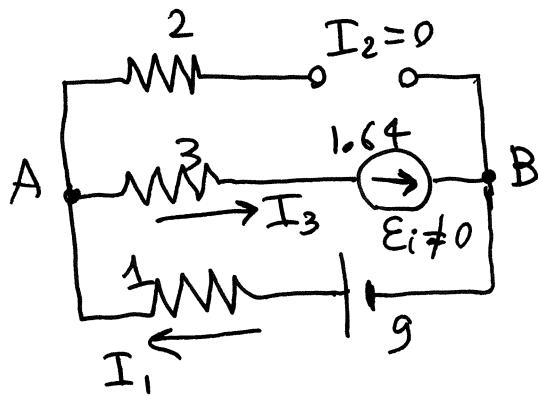
$$I_3 = \frac{V_A - V_B}{3} = 1.64 \text{ mA}$$



c) $t=t_2$

$$I_2=0$$

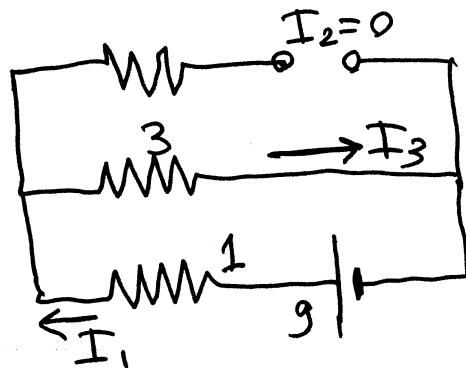
$$I_1 = I_3 = I_{\text{fonte}} = 1.6 \text{ mA}$$



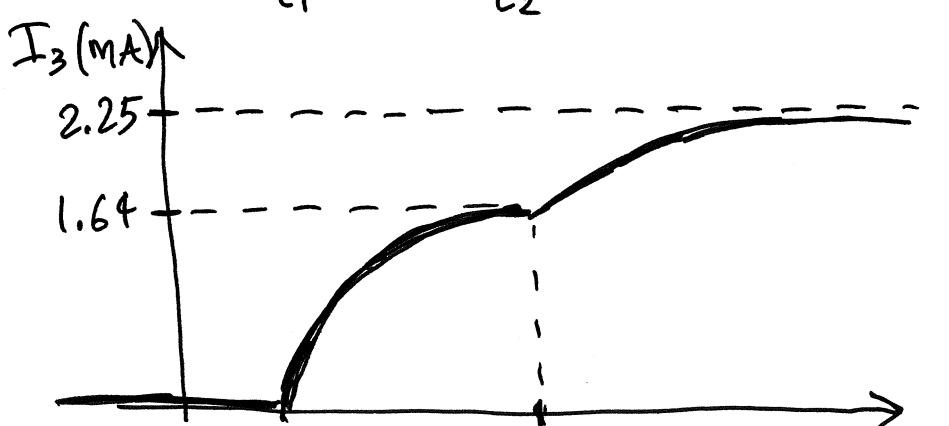
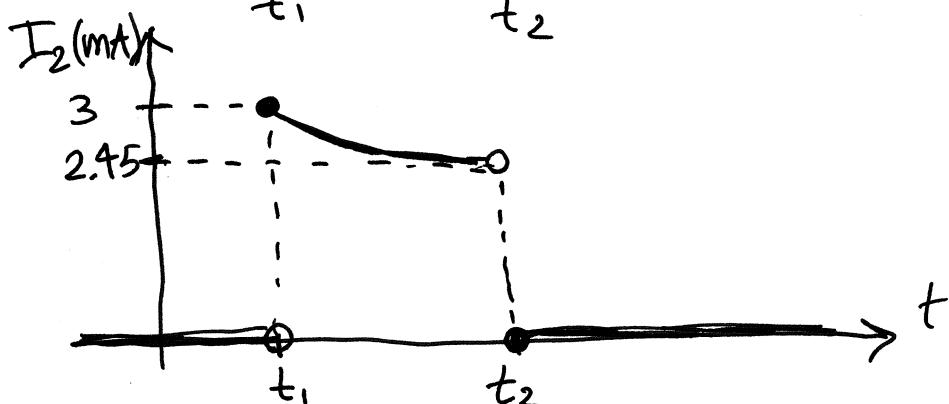
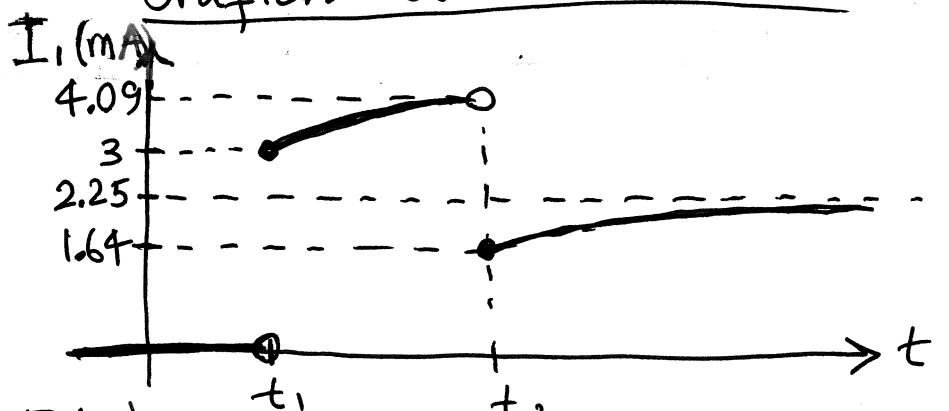
④ $t \rightarrow \infty$. Indutor no estado estacionário.

$$I_2=0$$

$$I_1 = I_3 = \frac{9}{3+1} = 2.25 \text{ mA}$$



Gráficos das 3 correntes:

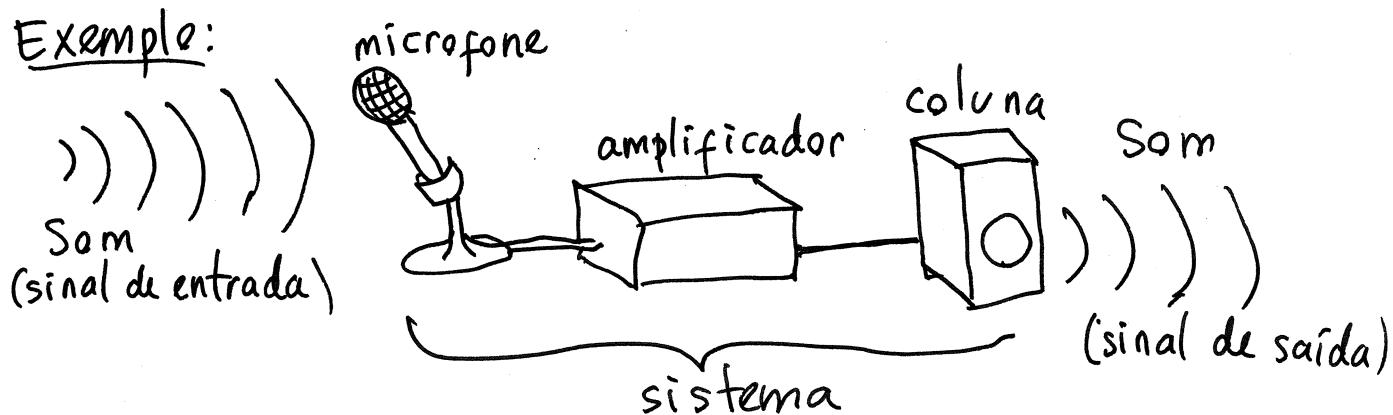


As correntes em $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ são descontínuas em t_1 e t_2 .

A corrente em $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ tem de ser contínua porque é a mesma corrente no indutor, que é contínua, porque a sua derivada, $\frac{dI}{dt} = -\frac{E_i}{L}$ existe

PROCESSAMENTO DE SINAIS

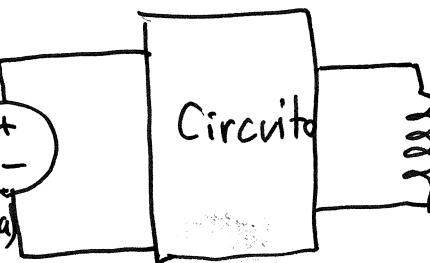
Exemplo:



Este sistema é um circuito elétrico

f.e.m. induzida no microfone

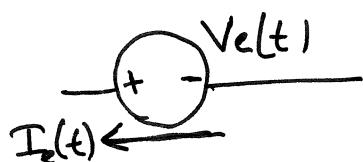
E_i (entrada)



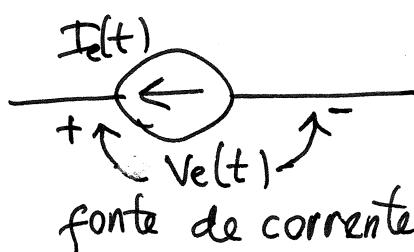
$I(t)$
corrente na
coluna
(saída).

Consideraremos circuitos com uma única fonte, que depende do tempo (entrada), em que pretende-se obter a corrente ou voltagem, em função de t , em alguma parte do circuito (saída).

Entrada (elemento ativo):



fonte de tensão.



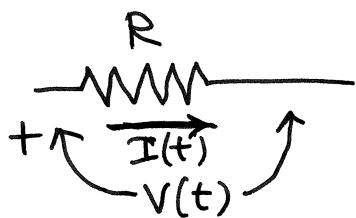
fonte de corrente

O sentido indicado para I é o que corresponde aos intervalos em que $V(t)$ e $I_e(t)$ são positivas.

Nesses intervalos o eletrodo "+" tem maior potencial do que o eletrodo "-". Em alguns intervalos $V(t)$ e $I_e(t)$ podem ser ambas negativas: o sentido de I é contrário à seta, e "+" tem menor potencial que "-". A fonte fornece sempre energia

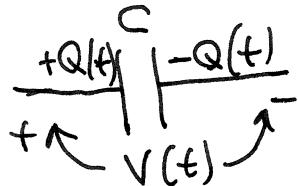
Elementos passivos:

① Resistências



$$V(t) = R I(t)$$

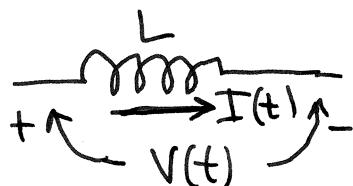
② Condensadores



$$Q(t) = C V(t)$$

$$\Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = C \frac{dV}{dt}$$

③ Indutores



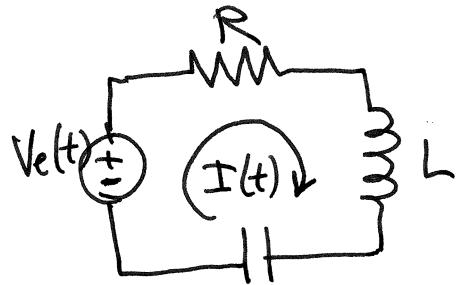
$$V(t) = L \frac{dI}{dt}$$

positivo por estar a ser considerado elemento passivo, e não fonte com f.e.m. E_i .

Exemplo 1. Circuito RLC, em série, com fonte $V_e(t)$ e saída igual à corrente $I(t)$ no circuito

Regra da malha:

$$LI + RI + \frac{Q}{C} = V_e$$



Derivando os dois lados obtém-se:

$$L\ddot{I} + RI + \frac{\dot{Q}}{C} = \dot{V}_e$$

equação diferencial linear, de coeficientes constantes.

Dada uma função $V_e(t)$ e condições iniciais I_0 e \dot{I}_0 , em $t=0$, existe solução única $I(t)$, que pode ser determinada por vários métodos diferentes.

Método da transformada de Laplace:

transformada de $I(t)$: $\tilde{I}(s) = \mathcal{L}\{I(t)\} = \int_0^\infty V_e(t) e^{-st} dt$

s = parâmetro real, com unidades de frequência

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\dot{I}\} = s\tilde{I} - I_o \Rightarrow \mathcal{L}\{\ddot{I}\} = s^2\tilde{I} - sI_o - \dot{I}_o$$

transformando os dois lados da equação diferencial, obtém-se uma equação algébrica para $\tilde{I}(s)$:

$$L(s^2\tilde{I} - sI_o - \dot{I}_o) + R(s\tilde{I} - I_o) + \frac{\tilde{I}}{C} = s\tilde{V}_e - V_{e_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{I} = \frac{s\tilde{V}_e - V_{e_0} + LsI_o + L\dot{I}_o + RI_o}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}}$$

polinómio característico

a transformada inversa de \tilde{I} conduz a $I(t)$.

Em vez de aplicar regras de Kirchhoff para $V(t)$ ou $I(t)$, para obter uma equação diferencial que será logo resolvida por transformada de Laplace, é mais fácil transformar as funções de t , no circuito para funções de s , e logo resolver o circuito.

Dominio da frequência

① Fontes. $V_e(t) \rightarrow \tilde{V}_e(s)$, $I_e(t) \rightarrow \tilde{I}_e(s)$

② Resistências $V(t) = RI(t) \rightarrow \boxed{\tilde{V}(s) = R\tilde{I}(s)}$

③ Condensadores

$$\frac{dV}{dt} = \frac{I}{C} \rightarrow s\tilde{V} - V_0 = \frac{\tilde{I}}{C} \Rightarrow \boxed{\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs} + \frac{V_0}{s}}$$

fonte com $E = V_0$ constante

④ Indutores

$$V = L \frac{dI}{dt} \rightarrow \boxed{\tilde{V} = Ls\tilde{I} - LI_o}$$

fonte de corrente constante I_o , em paralelo com o indutor

IMPEDÂNCIA. Se $t=0$ for o instante em que não há fonte, então $V_0=0$, $I_0=0$ e as resistências, condensadores e indutores verificam a lei de Ohm (no domínio da frequência): $\tilde{V}(s) = Z(s) \tilde{I}(s)$

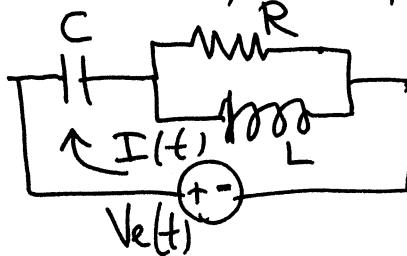
$$Z(s) = \begin{cases} \text{impedância (função constante)} \\ (\text{função de } s) \end{cases} = \begin{cases} R, \text{ nas resistências (função constante)} \\ \frac{1}{Cs}, \text{ nos condensadores (diminui com } s) \\ LS, \text{ nos indutores (aumenta com } s) \end{cases}$$

Z tem unidades de resistência: $\frac{1}{F \cdot Hz} = \frac{s}{F} = \Omega$

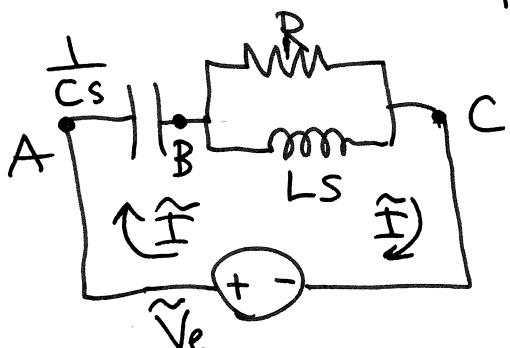
 $H \cdot Hz = \frac{H}{s} = \Omega$

No domínio da frequência o circuito resolve-se tal como os circuitos do capítulo 3, com fontes contínuas e resistências.

Exemplo:



No domínio da frequência:



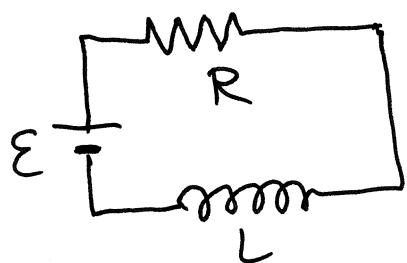
$$Z_{BC} = \frac{RLS}{LS+R} \quad (\text{paralelo})$$

$$Z_{AC} = \frac{1}{Cs} + \frac{RLS}{LS+R} = \frac{RLCs^2 + LS + R}{CLS^2 + RCS}$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{Z_{AC}} = \frac{\tilde{V}_e(CLS^2 + RCS)}{RLCs^2 + LS + R} \Rightarrow (RLCs^2 + LS + R)\tilde{I} = \tilde{V}_e(CLS^2 + RCS)$$

transf. inversa: $RLC\ddot{I} + L\dot{I} + RI = CL\ddot{V}_e + RC\dot{V}_e$
(eq. diferencial do sistema)

Exemplo 1 (Circuito RL)

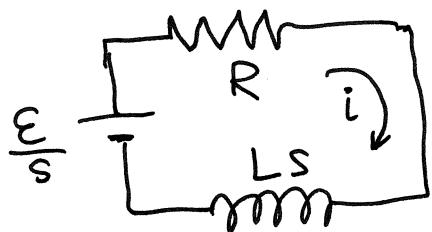


A fonte foi ligada em $t=0$, quando a corrente no indutor era nula. Determine a corrente no circuito, em função de t .

No Maxima, representaremos com V_e a voltagem da fonte no domínio do tempo, e com v_e a sua transformada de Laplace, no domínio da frequência.

$$v_e : \text{laplace}(E, t, s); \rightarrow \frac{E}{s}$$

O circuito no domínio da frequência é:



E resolve-se como se as impedâncias fossem resistências; Impedância da resistência e o indutor em série:

$$Z : R + L \times s;$$

transformada de Laplace da corrente:

$$i : v_e / Z; \rightarrow i = \frac{E}{s(Ls + R)}$$

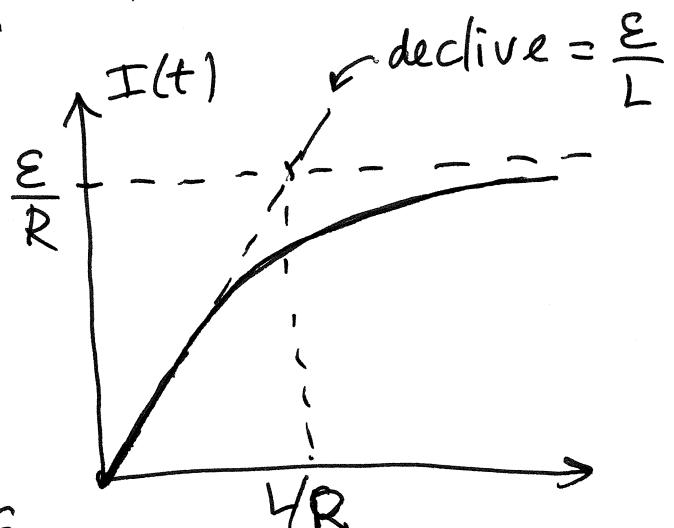
$I(t)$ é a transformada inversa, calculada com a função $i(s,t)$ do Maxima:

$$I : i(s,t);$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{E}{R}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(0) = \frac{E}{L}$$



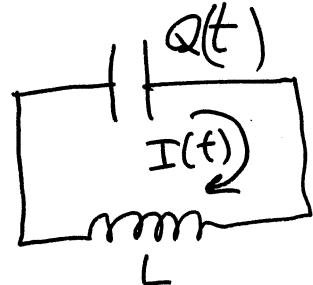
unidades de $L \rightarrow$ impedância
frequência unid. de $R \rightarrow$ impedância

unidades de $\frac{L}{R} \rightarrow$ $\frac{1}{\text{frequência}} = \text{tempo}$

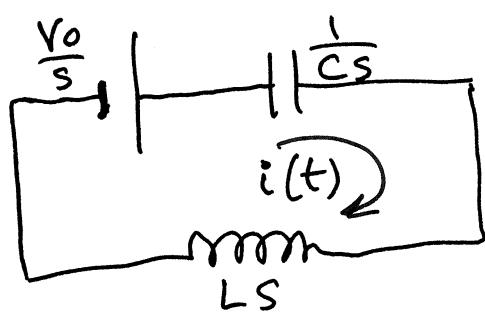
$\frac{L}{R} = \text{constante de tempo} = \text{tempo que demorava o circuito a ficar no estado estacionário, se } I \text{ mantivesse o seu valor inicial.}$

Exemplo 2 (círculo oscilador)

Um condensador, com carga inicial Q_0 , liga-se a um indutor, com indutância L , em $t=0$. Determine $I(t)$ no circuito.



Círculo no domínio da frequência:



$$V_0 = \frac{Q_0}{C}$$

$$z := \text{ratsimp}(1/C/s + L*s);$$

$$i := \text{ratsimp}(Q_0/C/z); \\ \hookrightarrow Q_0/(CLs^2 + 1)$$

assume ($C > 0, L > 0$)

$I: \text{ilt}(i, s, t);$

$$\rightarrow I(t) = \frac{Q_0}{\sqrt{CL}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right)$$

$L \rightarrow$ impedância
frequência

$C \rightarrow$ $\frac{1}{\text{impedância} \times \text{frequência}}$

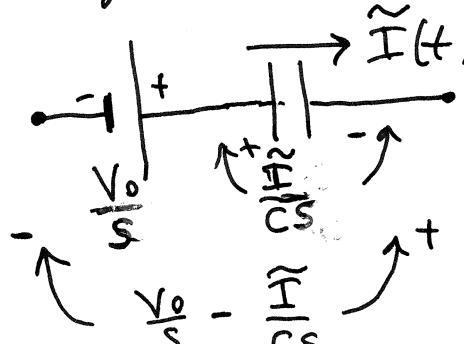
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{CL}} \rightarrow \text{frequência}$$

$I(t)$ é uma função senoidal, com frequência angular $\frac{1}{\sqrt{CL}}$.

voltagem no indutor:

$$V(t) = L \frac{dI}{dt} = \frac{Q_0}{C} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right) = V_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right)$$

voltagem no condensador:

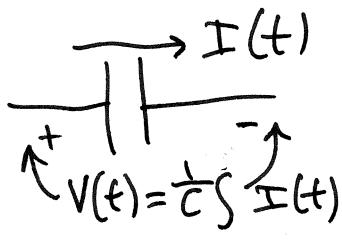


(domínio s)

$$\frac{V_0}{s} - \frac{I}{Cs} = \frac{V_0}{s} + \frac{V_0}{s(CLS^2 + 1)} = \frac{V_0 CLS}{CLS^2 + 1}$$

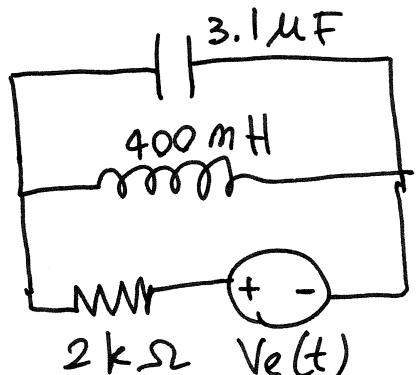
$$\Rightarrow V(t) = V_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right) \quad (\text{igual ao indutor})$$

Ov, no domínio do tempo: $I(t) = C \frac{dV}{dt}$



$$V(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt = -V_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right)$$

Exemplo 3.



A voltagem da fonte é:

$$V_e(t) = 5(1 - e^{-600t}) \quad (\text{SI})$$

Sabendo que $Q(0)=0$, no condensador, e $I(0)=0$, no indutor, determine a expressão da voltagem na resistência, em função do tempo t.

Unidades: $V \rightarrow$ Volt, $R(ez) \rightarrow k\Omega$
 $\Rightarrow I \rightarrow mA$

Se usarmos $C \rightarrow MF$, como a impedância de um condensador é $Z = \frac{1}{Cs}$, então $s \rightarrow \frac{1}{\text{capac.} \times \text{impedância}}$

$$\Rightarrow s \rightarrow \frac{1}{\mu C \cdot k\Omega} = Hz \quad \text{e o tempo } t \rightarrow \frac{1}{\text{frequência}}$$

$$\Rightarrow t \rightarrow ms$$

Finalmente, como a impedância de um indutor é $Z = Ls$

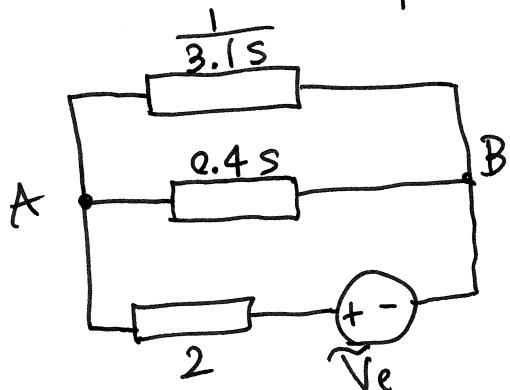
$$\Rightarrow L \rightarrow \frac{\text{impedância}}{\text{frequência}} \rightarrow \frac{k\Omega}{kHz} = H$$

passando 600t de segundos para t em ms, Vefica.

$$V_e(t) = 5(1 - e^{-0.6t}) \quad (\text{em volts, se testiver em ms})$$

$$\tilde{V}_e(s) \rightarrow \begin{cases} V_e: 5 * \exp(-0.6 * t) \$ \\ v_e: \text{laplace}(V_e, t, s) \$ \end{cases}$$

Dominio da frequência S:



impedância em paralelo, entre A e B:

$$Z_P: \text{ratsimp}\left(\frac{1}{(3.1s + 1/(0.4s))}\right);$$

impedância total:

$$Z: Z_P + 2;$$

A corrente na resistência é a mesma que na fonte, igual a: $i: v_e/Z$;

e a voltagem na resistência é:

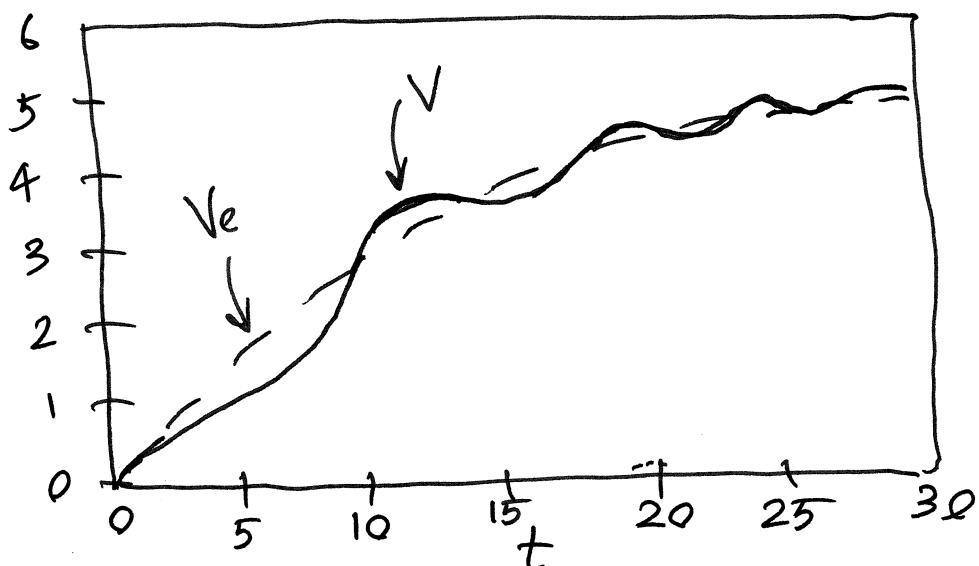
$v := \text{ratsimp}(2*i);$

E a transformada inversa dá a voltagem, $V(t)$, na resistência: $V := \text{ilt}(v, s, t);$

O resultado inclui vários termos com funções exponenciais, seno e cosseno.

É mais útil um gráfico de $V(t)$, onde podemos incluir também o sinal de entrada, $V_e(t)$:

$\text{plot2d}([V_e, V], [t, 0, 30], [\text{legend}, \text{false}], [\text{ylabel}, "V"]);$



$V(t)$ oscila em torno de $V_e(t)$, com amplitude decrescente.
(foco atrativo)

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

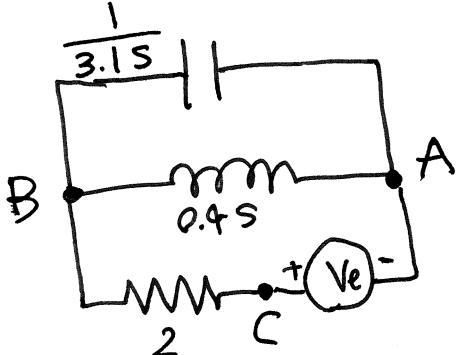
Num sistema linear, as transformadas de Laplace do sinal de entrada, $\tilde{f}_e(s)$, e do sinal de saída, $f(s)$, estão sempre relacionadas por:

$$\tilde{f}(s) = H(s)\tilde{f}_e(s)$$

em que $H(s)$ chama-se função de transferência.

Os circuitos com resistências, condensadores e indutores são sistemas lineares.

Exemplo: exemplo 3 da aula anterior.



$$V_e \rightarrow V, s \rightarrow kHz, z \rightarrow k\Omega$$

entre A e B (paralelo):

$$Z_{AB} = \frac{1}{3.1s + \frac{1}{0.4s}} = \frac{10}{31s + \frac{25}{s}} = \frac{10s}{31s^2 + 25}$$

$$Z_{AC} = 2 + Z_{AB} = \frac{62s^2 + 10s + 50}{31s^2 + 25}$$

corrente na resistência: $\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{Z_{AC}} = \frac{31s^2 + 25}{62s^2 + 10s + 50} \tilde{V}_e$

voltagem na resistência:

$$\Rightarrow H(s) = \frac{31s^2 + 25}{31s^2 + 5s + 25}$$

$\tilde{V} = 2\tilde{I} = \frac{31s^2 + 25}{31s^2 + 5s + 25} \tilde{V}_e$

raízes:
$$\frac{-5}{62} \pm \frac{i\sqrt{123}}{62}$$
 foco atrativo

Equação diferencial: $(31s^2 + 5s + 25)\tilde{V} = (31s^2 + 25)\tilde{V}_e$

$$\Rightarrow 31\ddot{V} + 5\dot{V} + 25V = 31\ddot{V}_e + 25V_e$$

IMPULSO UNITÁRIO (delta de Dirac)

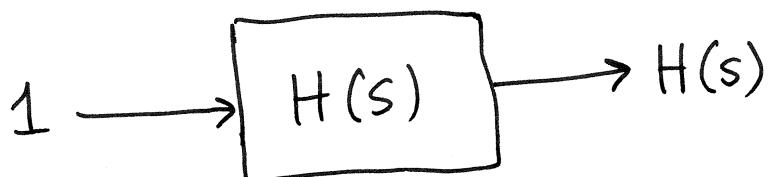
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t=0 \end{cases} \quad \text{mas} \quad \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$\infty \leftarrow \circ$ qualquer valor positivo

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^0 = 1$$

Como tal, se a entrada num sistema linear for um impulso unitário:



A saída será a função de transferência do sistema. Para determinar a função de transferência de um sistema linear, alimenta-se com um sinal $\delta(t)$, que pode ser approximado:



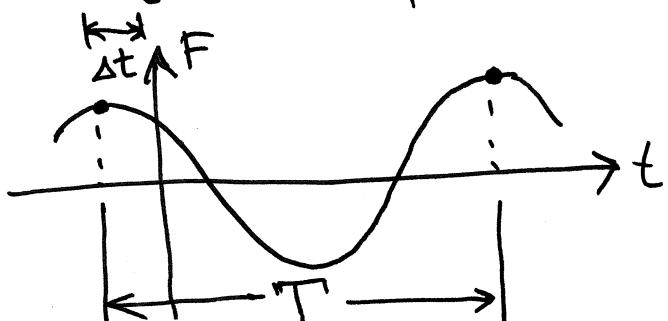
e mede-se a saída.

Exemplo: um pulso laser, muito curto, em direção de um satélite que o reflete de volta, permite determinar a função de transferência da atmosfera e reconstruir imagens de corpos celestes, deformadas pela atmosfera.

FUNÇÕES SINUSOIDAIS

$$F(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

{
 } F_{\max} = amplitude (valor máximo)
 ω = frequência angular
 φ = desfasamento



frequência: $f = \frac{\omega}{2\pi}$

período: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)T \quad (|\varphi| \leq \pi)$

(em $t = -\Delta t$, $F(t) = F_{\max}$)

Outras formas de escrever $F(t)$:

a) $F = F_{\max} \cos(\omega t) \cos \varphi - F_{\max} \sin(\omega t) \sin \varphi$

$\Rightarrow \boxed{F = F_r \cos(\omega t) - F_i \sin(\omega t)}$

{
 $F_r = F_{\max} \cos \varphi \quad$ se $\varphi = 0 \Rightarrow (F_r = F_{\max}, F_i = 0)$
 $F_i = F_{\max} \sin \varphi \quad$ se $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow (F_r = 0, F_i = \pm F_{\max})$

b) $F = \text{parte real de } ((F_r + iF_i)(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)))$
 $= \text{Real}((F_r + iF_i)e^{i\omega t})$

FASOR DE $F(t) \rightarrow \boxed{F = F_r + iF_i = F_{\max} e^{i\varphi}}$

$F(t)$ é a projeção no eixo real de $F e^{i\omega t}$
 em $t=0$, $F(0)$ é a projeção de F no eixo real.

em $t \geq 0$, o produto par $e^{i\omega t}$ faz rodar \vec{F} um ângulo ωt , no sentido contrário aos ponteiros do relógio. \vec{F} roda no plano complexo, com velocidade angular constante ω , e a sua projeção no eixo real é o valor de $F(t)$.

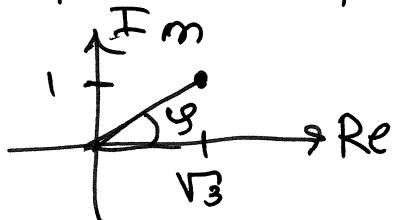
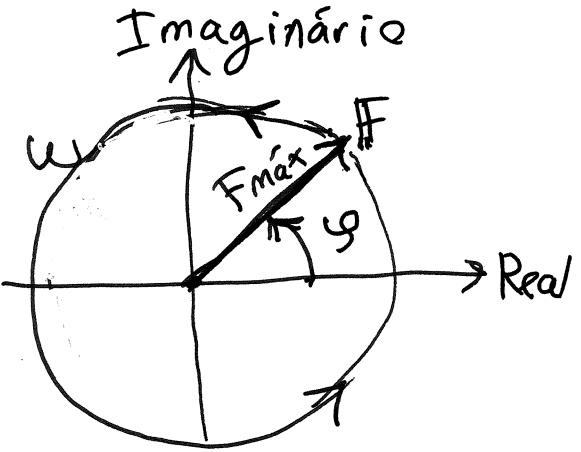
Cada função sinusoidal, com frequência angular ω , representa-se por um fasor que roda no plano complexo com velocidade angular ω .

Exemplo: O fasor de uma função sinusoidal com frequência 2Hz é $\sqrt{3} + i$. Determine a expressão da função em ordem a t . Resolução:

$$\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

também costuma escrever-se

$$2 \angle \frac{\pi}{6}$$



$$\text{argumento: } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{módulo: } \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

função de t :

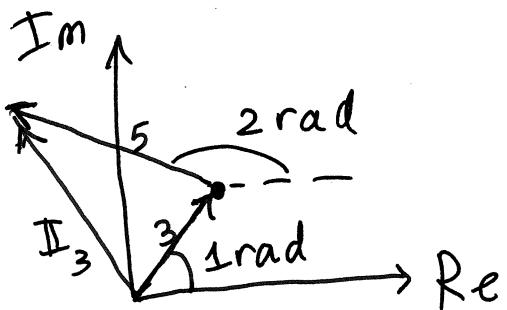
$$F(t) = 2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

da mesma
frequência

A soma de duas funções sinusoidais obtém-se somando os seus fasores (números complexos)

Exemplo. Num nó num circuito entram duas correntes: $I_1(t) = 5\cos(\omega t + 2)$ e $I_2(t) = 3\cos(\omega t + 1)$. Determine a corrente que sai desse nó.

Resolução: $\mathbb{I}_1 = 5 \angle 2$, $\mathbb{I}_2 = 3 \angle 1$



$$\mathbb{I}_1 = 5(\cos 2 + i \sin 2)$$

$$\mathbb{I}_2 = 3(\cos 1 + i \sin 1)$$

$$\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 = (5\cos 2 + 3\cos 1) + i(5\sin 2 + 3\sin 1)$$

No Maxima:

$$I_1: 5 * \exp(%i * 2);$$

$$I_2: 3 * \exp(%i);$$

$$I_3: I_1 + I_2;$$

$$\text{float}(\text{cabs}(I_3)); \rightarrow 7.086 \text{ (módulo)}$$

$$\text{float}(\text{carg}(I_3)); \rightarrow 1.636 \text{ (argumento)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_3 = 7.086 \angle 1.636$$

$$I_3(t) = 7.086 \cos(\omega t + 1.636)$$

FUNÇÕES SINUSOIDAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

$$F(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Real}(\mathbb{F} e^{i\omega t}) \quad (\mathbb{F} = F_{\max} \angle \varphi)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{F(t)\} = \text{Real}(\mathbb{F} \mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}) = \text{Real}\left(\frac{\mathbb{F}}{s - i\omega}\right)$$

escreve-se: $\tilde{F}(s) = \frac{\mathbb{F}}{s - i\omega}$, ficando implícito que apenas interessa a parte real.

Se num sistema linear, com função de transferência $H(s)$, a entrada for uma função sinusoidal:

$$\tilde{f}_e(s) = \frac{F_e}{s-iw} \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow \tilde{f}(s) = \frac{F_e H(s)}{s-iw}$$

A saída, $\tilde{f}(s)$, é uma função complexa com uma singularidade em $s=iw$. A singularidade diz-se ser um polo de primeira ordem se o limite $\lim_{s \rightarrow iw} (s-iw)\tilde{f}$ existir.

Nesse caso a função pode escrever-se:

$$\tilde{f}(s) = \frac{F}{s-iw} + G(s)$$

onde F é um número complexo (resíduo de \tilde{f} em $s=iw$)

$$F = \lim_{s \rightarrow iw} (s-iw)\tilde{f}(s) = \lim_{s \rightarrow iw} F_e H(s) = F_e H(iw)$$

a saída

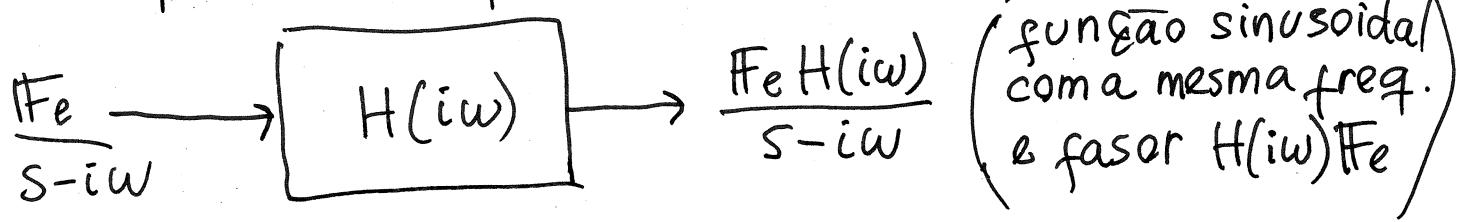
$f(t)$ será a transformada inversa de $\frac{F}{s-iw}$, que é $F_{\max} \cos(wt + \varphi)$, mais a transformada inversa de $G(s)$.

$$f(t) = F_{\max} \cos(wt + \varphi) + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

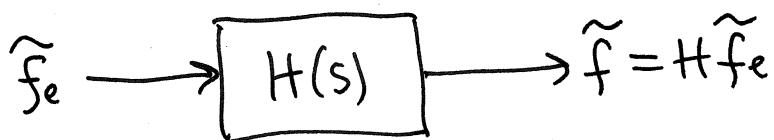
resposta estacionária

resposta transitória

Geralmente (circuitos dissipativos) a resposta transitória aproxima-se de zero ($t \rightarrow \infty$). Considerando apenas a resposta estacionária, o sistema é:

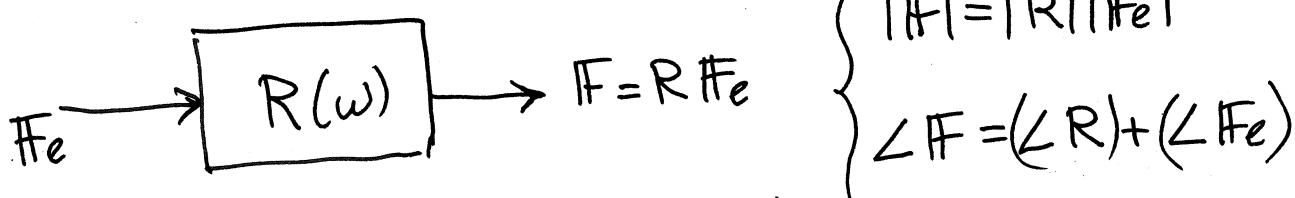


FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA



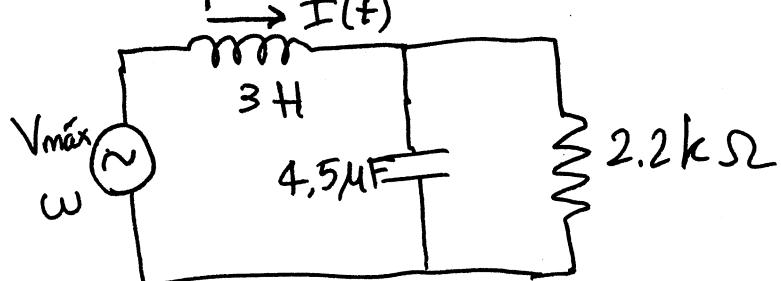
e freq.
angular ω

Se a entrada for uma função sinusoidal, com fasor I_{Fe} , no estado estacionário a saída será também sinusoidal, com fasor $H(i\omega)I_{Fe}$



$R(w) \doteq H(i\omega)$ = função complexa.

Exemplo 1.



$\text{V}_máx \omega$
—~— representa
uma fonte de tensão
alternada:

$$V(t) = V_{máx} \cos(\omega t)$$

Resolução. Unidades: $Z \rightarrow k\Omega$, $\Delta V \rightarrow V \Rightarrow I \rightarrow mA$ ($I = \frac{A}{R}$)
 $C \rightarrow \mu F \Rightarrow s \rightarrow kHz$ ($s = \frac{1}{ZC}$) $\Rightarrow t \rightarrow ms$ ($t = \frac{1}{s}$)
 $\Rightarrow L \rightarrow H$ ($L = \frac{Z}{s}$)

No domínio da frequência:

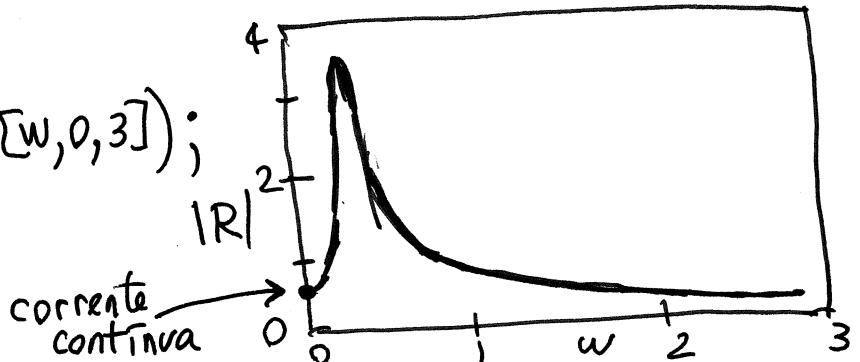
$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{Z_{total}} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{Z_{total}}$$

$$H = \frac{1}{3s + \left(\frac{2.2 \left(\frac{1}{4.5s} \right)}{2.2 + \frac{1}{4.5s}} \right)} = \frac{1}{3s + \left(\frac{2.2}{9.9s + 1} \right)} = \frac{99s + 1}{297s^2 + 30s + 22}$$

$$R(\omega) = H(i\omega) = \frac{10 + i99\omega}{22 - 297\omega^2 + i30\omega}$$

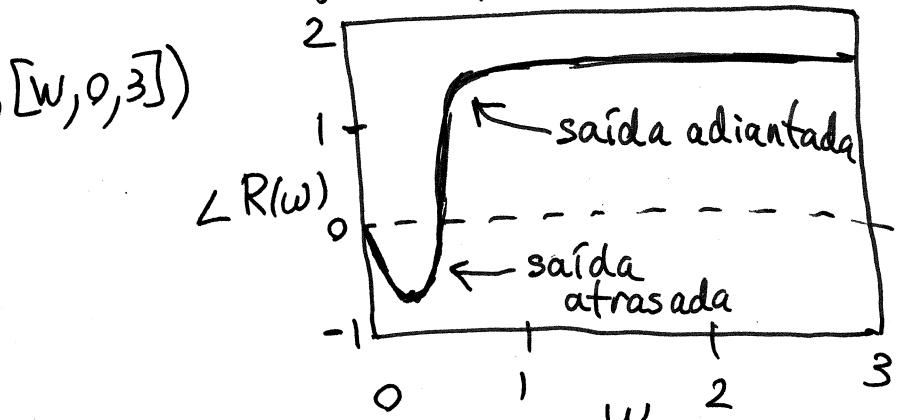
módulo:

`plot2d(cabs(R),[w,0,3]);`

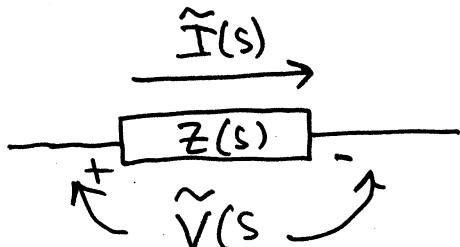


argumento:

`plot2d(2*pi*carg(R),[w,0,3])`



IMPEDÂNCIA COMPLEXA



$$\tilde{V}(s) = Z(s) \tilde{I}(s)$$

Se $I(t) = I_{\max} \cos(\omega t + \varphi_I)$
no estado estacionário,

$$V(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi_V)$$

$$\Rightarrow V = Z(i\omega) I$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_{\max} = |Z(i\omega)| I_{\max} \\ \varphi_V = \varphi_I + \angle Z(i\omega) \end{cases}$$

$$Z(i\omega) = \begin{cases} R, \text{ nas resistências} \\ i\omega L, \text{ indutores (reatância positiva)} \\ -\frac{i}{\omega C}, \text{ condensadores (reatância negativa)} \end{cases}$$

$$\angle Z(i\omega) = \begin{cases} 0, \text{ resistências} \\ \frac{\pi}{2}, \text{ indutores} \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ condensadores} \end{cases}$$

$$|Z(i\omega)| = \begin{cases} R, \text{ resistênc.} \\ \omega L, \text{ indutores} \\ \frac{1}{\omega C}, \text{ condens.} \end{cases}$$

Exemplo 2. Encontre $I(t)$ no exemplo 1, se $V(t)$ tiver $V_{\max} = 325V$ e $f = 50\text{ Hz}$. (voltagem alternada usada em Portugal).

Resolução. $f = 0.050\text{ kHz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = \frac{\pi}{10}$

$$I = R V \rightarrow I = 325 \left(\frac{10 + i \frac{(99\pi)}{10}}{22 - \frac{29\pi^2}{100} + i \frac{30\pi}{10}} \right) = 890.1 \angle -0.97096$$

$$\Rightarrow I(t) = 890.1 \cos\left(\frac{\pi}{10}t - 0.97096\right) \quad \begin{matrix} I \rightarrow \text{mA} \\ t \rightarrow \text{ms} \end{matrix}$$

POTÊNCIA MÉDIA

Num dispositivo com voltagem $V(t)$ e corrente $I(t)$, a potência dissipada no instante t é:

$$P(t) = V(t) I(t)$$

se a corrente for alternada, com frequência angular ω , no estado estacionário a potência instantânea é:

$$P(t) = V_{\max} I_{\max} \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_I)$$

usando a identidade: $\cos A \cos B = \frac{1}{2} (\cos(A+B) + \cos(A-B))$,

$$P(t) = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} (\cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_I) + \cos(\varphi_v - \varphi_I))$$

$$\varphi_v - \varphi_I = \angle Z(i\omega) \quad (\text{não depende de } t)$$

potência média dissipada:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos(Z)$$

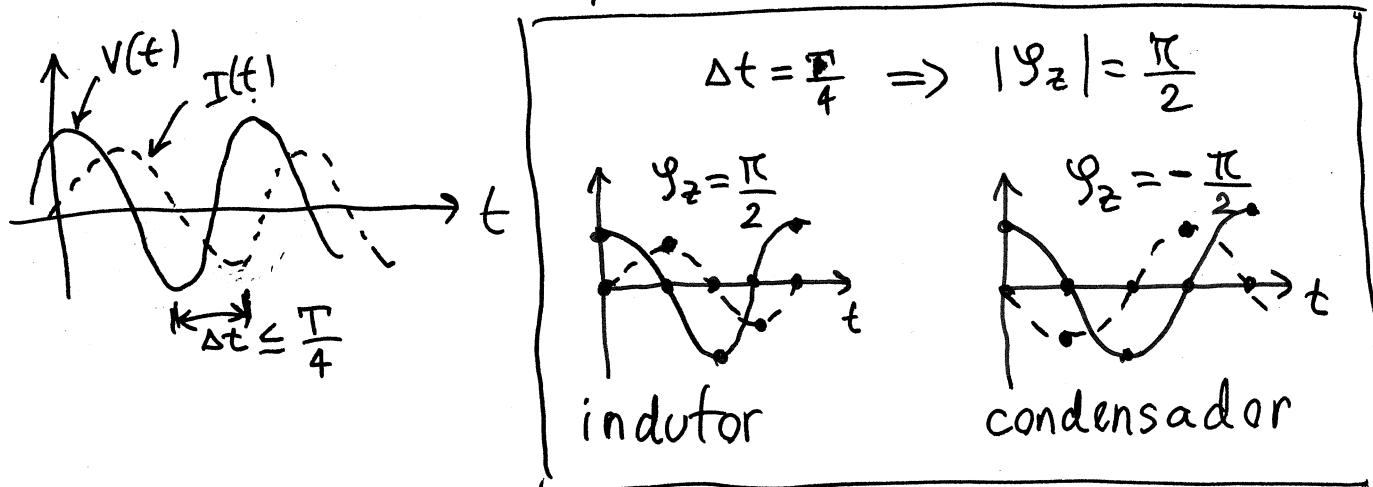
(o integral de $\cos(2\omega t + \dots)$ é 0)

(fator de potência = cosseno do ângulo de Z)

Num sistema com resistências ($\text{Re}(z) > 0$), indutores ($\text{Re}(z) = 0$) e condensadores ($\text{Re}(z) = 0$), a impedância total tem sempre parte real positiva ou nula:

$$Z = |Z| \angle \varphi_Z, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_Z \leq \frac{\pi}{2} \quad \left(1^{\circ} \text{ e } 2^{\circ} \text{ quadrantes do plano complexo} \right)$$

$\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I = \text{desfasamento entre } V(t) \text{ e } I(t)$.



FATOR DE POTÊNCIA

$$0 \leq \cos \varphi_Z \leq 1$$

$\cos \varphi_Z = 1 \Rightarrow \text{resistência}$
 $\cos \varphi_Z = 0 \Rightarrow \text{condensador ou indutor}$

potência média dissipada:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos \varphi_Z$$

numa resistência:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max}$$

Como num circuito de corrente contínua $P = VI$, definem-se: **voltagem eficaz** = $V_{ef} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$

$$\text{corrente eficaz} = I_{ef} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P} = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi_Z}$$

($\bar{P} = V_{ef} I_{ef}$ numa resistência)

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (V(t))^2 dt}$$

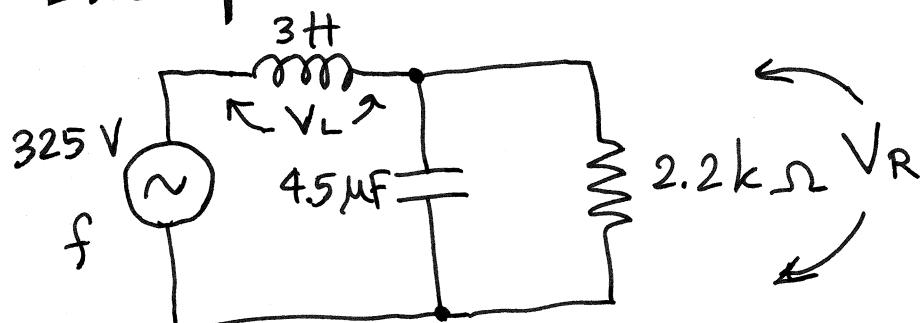
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (I(t))^2 dt}$$

Em Portugal usa-se $V_{máx} = 325 V \Rightarrow V_{ef} \approx 230 V$

RESSONÂNCIA

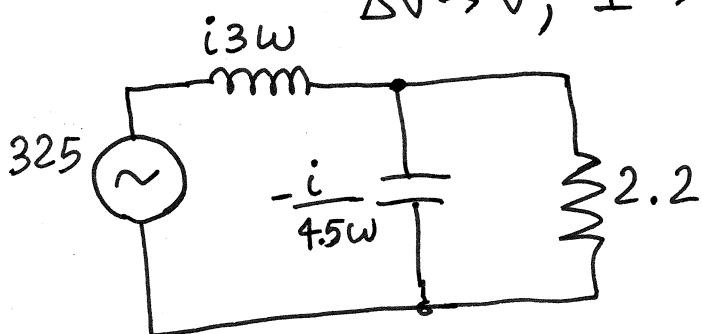
Efeito de amplificação da voltagem de uma fonte de tensão alternada, nos circuitos com indutores e condensadores.

Exemplo.



Determine as expressões de $VL_{máx}$ e $VR_{máx}$, em função da frequência angular $\omega = 2\pi f$.

Resolução. Unidades: $L \rightarrow H$, $C \rightarrow \mu F$, $R \rightarrow k\Omega$
 $\Delta V \rightarrow V$, $I \rightarrow mA$, $t \rightarrow ms$, $\omega \rightarrow kHz$



No Maxima:

$$[Z_R, Z_L, Z_C] : [2.2, \% i * 3 * \omega, - \% i / 4.5 / \omega];$$

$$Z_P : Z_C * Z_R / (Z_C + Z_R);$$

$$Z : Z_L + Z_P;$$

$$I = 325/z;$$

$$V_L = zL * I;$$

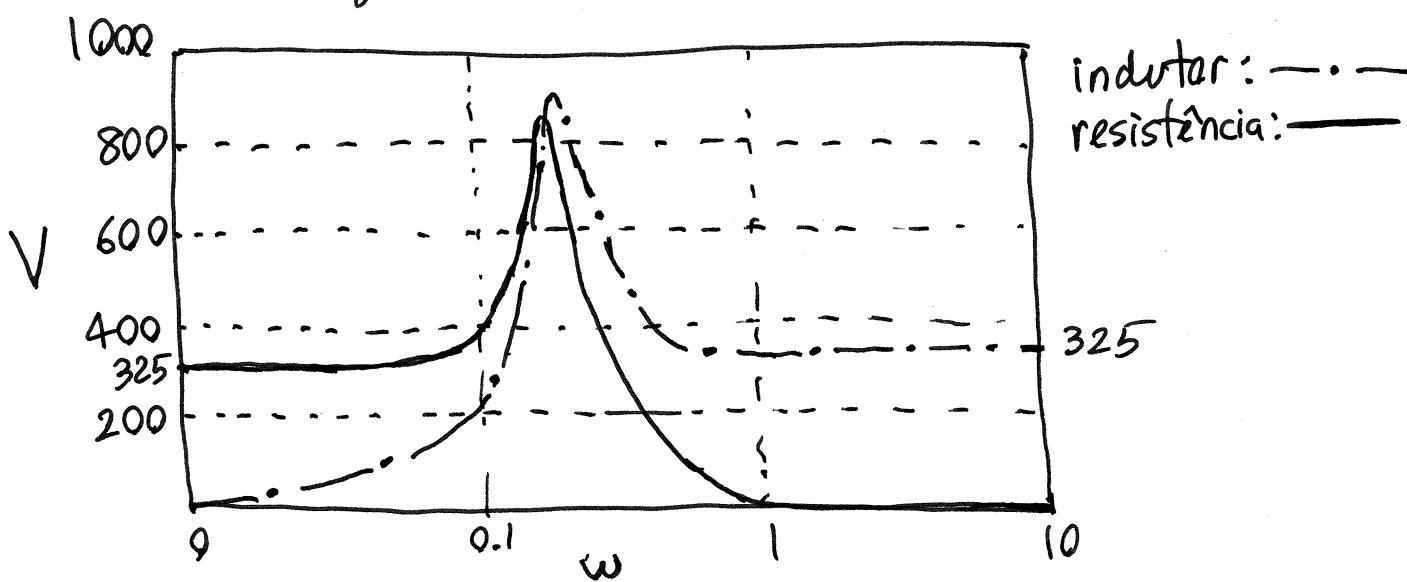
$$V_R = zP * I;$$

$$V_{L\max} = \text{ratsimp}(\text{cabs}(V_L)); \rightarrow V_{L\max} = \frac{975w\sqrt{9801w^2 + 100}}{\sqrt{88209w^4 - 12168w^2 + 484}}$$

$$V_{R\max} = \text{ratsimp}(\text{cabs}(V_R)); \rightarrow V_{R\max} = \frac{7150}{\sqrt{88209w^4 - 12168w^2 + 484}}$$

Gráficos de $V_{L\max}$ e $V_{R\max}$ em função de w :

`plot2d([VLmax, VRmax], [w, 0, 10], [legend, "indutor", "resistência"], log x);`



$w=0$ (corrente contínua): $V_{L\max}=0$, $V_{R\max}=325$ V

$w=10$ kHz : $V_{L\max} \approx 325$ V, $V_{R\max} \approx 0$

Existe uma frequência de ressonância
 $w \approx 0.26$ kHz

em que $V_{L\max}$ e $V_{R\max}$ são ambas próximas de 900 V. $V_{L\max} + V_{R\max}$ é muito maior que a voltagem máxima da fonte! (325V)

ω em que $V_{L\max}$ tem valor máximo:

$$\text{float}(\text{solve}(\text{diff}(V_{L\max}, \omega) = 0)); \rightarrow \omega \approx 0.2808 \text{ kHz}$$

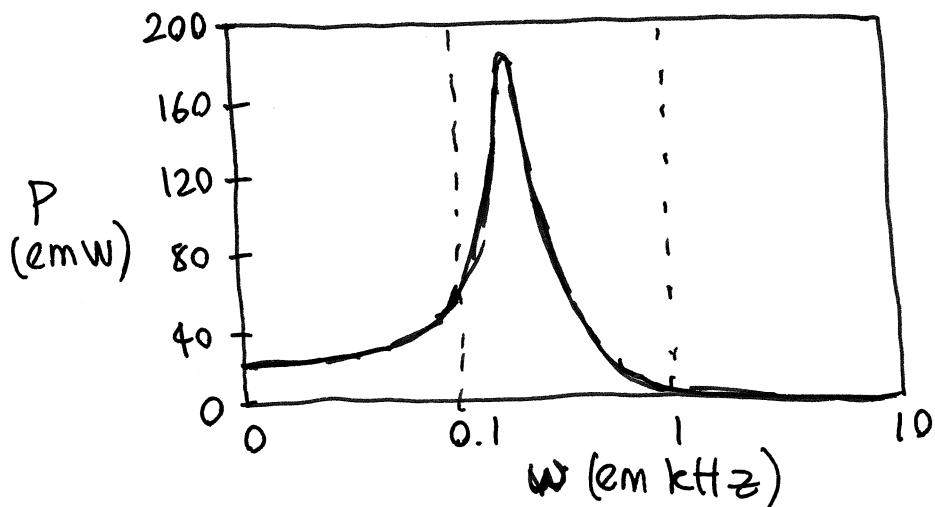
ω em que $V_{R\max}$ tem valor máximo:

$$\text{float}(\text{solve}(\text{diff}(V_{R\max}, \omega) = 0)); \rightarrow \omega \approx 0.2626 \text{ kHz}$$

Potência fornecida pela fonte:

$$P: 325 * \text{cabs}(I) * \cos(\text{carg}(z)) / 2; \text{ (em mW)}$$

```
plot2d(P, [w, 0, 10], [ylabel, "P"], logx);
```



frequência angular de ressonância:

$$\text{float}(\text{solve}(\text{diff}(P, \omega) = 0)); \rightarrow \omega \approx 0.2626 \text{ kHz}$$

$$\text{se } f = 50 \text{ Hz} \rightarrow \omega = \frac{\pi}{f} \text{ kHz} \approx 0.3141 \text{ kHz}$$