

- Em todas as suas respostas defina e apresente, com clareza, a **terminologia** (acontecimentos e variáveis aleatórias), a **metodologia** e as **hipóteses subjacentes aos diferentes passos da sua análise**.
- Nos testes de hipóteses que realizar deve apresentar também o **valor de prova** e uma **conclusão** no contexto do problema.
- Todos os problemas devem ser respondidos em **folhas diferentes**.

1. (4 VALORES) A Filipa voluntariou-se para uma experiência que está a decorrer na FEUP. A experiência consiste nos seguintes procedimentos: na próxima Segunda-feira ela será anestesiada e, posteriormente, será despertada, entrevistada e novamente anestesiada, desta vez com um tipo de anestesia especial que faz com que esqueça a entrevista. A entrevista consiste na realização de um de dois tipos de questionários (A e B). A seleção do tipo de questionário é determinada pelo lançamento ao ar de uma moeda equilibrada logo após ter sido colocada a dormir pela primeira vez. Se sair CARA, a Filipa responderá ao questionário A e será despertada entre Terça-feira e Sábado, se sair COROA, responderá ao questionário B e será despertada entre Sexta-feira e Segunda-feira.

Notas: para cada resultado do lançamento da moeda a escolha do dia é aleatória;  
 há sobreposição entre os dias em que a Filipa é despertada caso saia CARA e caso saia COROA.

- a) Tendo por base a experiência descrita, calcule a probabilidade da Filipa ser despertada no fim de semana.

*Solução: 0.35*

- b) No final da experiência informaram a Filipa que ela respondeu ao questionário durante um dia da semana. De seguida perguntaram-lhe qual terá sido a face da moeda que determinou o dia em que foi despertada para responder ao questionário. Qual deverá ser a resposta da Filipa? Justifique.

*Solução: 0.62*

- c) Imagine agora que a experiência foi alargada a 200 alunos da FEUP. Se retirarmos uma amostra aleatória de 30 alunos de entre os que participaram na experiência, qual a probabilidade de 10 alunos terem sido despertados durante o fim de semana para responder ao questionário.

*Solução: 0.1621 obtido a partir da distribuição Hipergeométrica  
 (pode também ser resolvido por aproximação à Binomial e à Normal)*

2. (5.5 valores) A produção de um determinado tipo de peça é constante e demora 0.3 minutos. Cada peça produzida é inspecionada e classificada numa de cinco categorias (A, ..., E), sendo que a categoria de uma peça é independente das outras. Peças da categoria A estão em perfeitas condições não requerendo reparações, enquanto peças das outras categorias necessitam de reparação. A inspeção de uma peça demora 0.1 minutos e tem um custo fixo de 0.03 €. Na tabela seguinte apresentam-se a probabilidade de uma peça ser classificada em cada uma das categorias, o tempo de reparação para cada categoria e o respetivo custo de reparação.

Categoria	A	B	C	D	E
Probabilidade	0.82	0.10	0.05	0.02	0.01
Custo de reparação (€)	0	0.10	0.15	0.25	0.50
Tempo de reparação (minutos)	0	0.2	0.5	1.0	2.5

- a) As peças saem agrupadas em caixas de 12 unidades. Calcule a probabilidade de:
- numa caixa haver pelo menos duas peças a requererem reparação.
  - numa caixa todas as peças serem de categoria A.
  - a primeira caixa com todas as peças de categoria A ocorrer depois da terceira caixa inspecionada.

*Soluções: i) 0.6641    ii) 0.0924    iii) 0.7475*

- b) Calcule o valor esperado e o desvio padrão da soma dos custos de inspeção e de reparação de uma peça.

*Solução:*  $\mu = 0.0575 \text{ €}$        $\sigma = 0.0715 \text{ €}$

- c) Calcule a probabilidade de serem produzidas, inspecionadas e, eventualmente, reparadas 135 peças numa hora.

*Sugestão:* obtenha a média e o desvio padrão do tempo total de produzir, inspecionar e reparar uma peça; de seguida obtenha a distribuição do tempo total de 135 peças, que pelo TLC  $\sim N()$  ; ...

3. (4 valores). Num estudo recentemente publicado, comparou-se o tempo gasto diariamente em deslocações para o trabalho dos habitantes das áreas metropolitanas de Lisboa e do Porto. Para tal, inquiriram-se 12 habitantes da área metropolitana de Lisboa sobre o tempo gasto diariamente nas suas deslocações, tendo-se obtido uma média de 90 minutos e um desvio padrão de 3 minutos. Inquiriram-se também 15 habitantes da zona metropolitana do Porto sobre o tempo gasto diariamente nas suas deslocações, tendo-se obtido uma média de 77 minutos e um desvio padrão de 5.5 minutos.

- a) No estudo afirma-se que o tempo gasto diariamente em deslocações para o trabalho dos habitantes da área metropolitana de Lisboa excede o tempo gasto diariamente pelos habitantes da área metropolitana do Porto em mais de 10 minutos. Admitindo que os tempos gastos diariamente nas duas áreas metropolitanas têm a mesma variância e seguem distribuições Normais, teste, ao nível de significância de 5%, a validade da afirmação do estudo.

*Solução:*  $H_0: \mu_L - \mu_p = 10$  e  $H_1: \mu_L - \mu_p > 10$ ;  
 $VC = 1.708$ ;  $ET = 1.69$ ;  $pvalue = 5.13\% \rightarrow$  teste inconclusivo

- b) Calcule a potência do teste realizado na alínea anterior, sabendo que o verdadeiro valor da diferença do tempo gasto diariamente em deslocações nas duas áreas metropolitanas é de 15.1 minutos e admitindo que as variâncias não se alteram.

*Solução:* 0.87

- c) Com base nestes dados, teste, a um nível de significância de 5%, a hipótese de as variâncias do tempo gasto diariamente em deslocações serem realmente iguais nas duas áreas metropolitana. Discuta as implicações do resultado deste teste de hipóteses no teste da primeira alínea.

*Solução:*  $H_0: \sigma_p^2 / \sigma_L^2 = 1$  e  $H_1: \sigma_p^2 / \sigma_L^2 > 1$ ;  
 $VC = 2.74$ ;  $ET = 3.361$ ;  $pvalue = 2.49\% \rightarrow$  rejeitar  $H_0$   
(nota: na alínea a)  $H_0$  passa a ser rejeitada ...)

4. (4 VALORES) Estima-se que 25% dos equipamentos existentes em parques de diversões portugueses não satisfazem os níveis de segurança desejados. Após uma longa campanha que teve como objetivo a melhoria das condições de segurança destes parques, foram aleatoriamente selecionados 40 equipamentos e verificou-se que 8 deles não satisfazem os níveis de segurança desejados.

- a) Teste, ao nível de significância de 10%, se a campanha teve o efeito desejado.

*Solução:*  $H_0: p = 0.25$  e  $H_1: p < 0.25$ ;  
 $VC = -1.282$ ;  $ET = -0.73$ ;  $pvalue \approx 23.3\% \rightarrow$  teste inconclusivo

- b) Num inquérito realizado a 200 visitantes de um parque de diversões, selecionados aleatoriamente, sobre o nível de segurança dos equipamentos do parque, houve 38 respostas que consideraram existir equipamentos com baixos níveis de segurança. Com base nesta amostra, determine o intervalo de confiança a 90% para a verdadeira percentagem de visitantes que consideram que os equipamentos do parque têm baixos níveis de segurança.

*Solução:* [0.154, 0.226]

- c) Qual deveria ser o número de visitantes a inquirir de forma a que a amplitude do intervalo de confiança da alínea anterior seja no máximo 0.05.

*Solução:*  $N \geq 667$  (considerando o pior caso,  $p=0.5$ , viria  $N \geq 1083$ )

5. (2.5 VALORES) O projeto consistiu no desenvolvimento de um modelo de regressão para prever o número de *likes* em *posts* do instagram, com base no valor de várias variáveis, incluindo: *page\_total\_likes* (número total de *likes* dos *posts* da conta, representado como um número inteiro); *category* (tipo de *post*, número inteiro), *weekday* (dia da semana, número inteiro), *hour* (hora do dia, número inteiro); *paid* (se o *post* foi pago ou não, binário).

Usando uma regressão linear, obteve-se o seguinte modelo:

$$97.7 + 0.0003 \times \text{page\_total\_likes} + 48.2 \times \text{category} - 8.6 \times \text{weekday} - 4.3 \times \text{hour} + 84.0 \times \text{paid}$$

- a) Com base neste modelo, discuta sucintamente qual das seguintes variáveis tem mais influência no número de *likes*: *page\_total\_likes* ou *hour*?

<i>Solução: hour ...</i>
--------------------------

- b) Indique a opção correta para completar a seguinte frase:

Um dos aspetos mais importantes do desenvolvimento de modelos preditivos é:

- i. a estimativa do seu desempenho computacional. Para que o valor respetivo seja uma medida fiável, é essencial que sejam usados dados diferentes de treino.
- ii. a estimativa do seu desempenho preditivo. Para que o valor obtido seja uma medida fiável da capacidade de “*overfitting*”, é essencial que sejam usados dados diferentes de treino e de teste.
- iii. a estimativa do seu desempenho computacional. Para que o valor respetivo seja uma medida fiável, é essencial que os dados sejam alimentados ao modelo com a mesma velocidade que aconteceria na realidade.
- iv. a estimativa do seu desempenho preditivo. Para isso, é essencial que sejam usados dados diferente de treino e de teste.