Fichas de Exercícios sobre Linguagens sem Contexto

Resoluções/soluções para os exercícios selecionados: 1, 2, 3, 6, 8

---

1 Desenhe um autómato de pilha determinista que aceite a linguagem

$\{0^n 1^m 0^n \mid n \text{ e } m \text{ arbitrários}\}$.

Possível solução, que considera n≥1 e m≥1, é o PDA:
P= *$(\{q1,q2,q3\},\{0,1\},\{0,Z_0\},\delta,q1,Z_0)$*
Com regras de transição:

$\delta(q1,0,Z_0) = \{(q1,0Z_0)\}$; $\delta(q1,0,0) = \{(q1,00)\}$

$\delta(q1,1,0) = \{(q2,0)\}$; $\delta(q2,1,0) = \{(q2,0)\}$

$\delta(q2,0,0) = \{(q3,\varepsilon)\}$; $\delta(q3,0,0) = \{(q3,\varepsilon)\}$; $\delta(q3,\varepsilon, Z_0) = \{(q3,\varepsilon)\}$ Z_0

E se considerassemos n≥0 e m≥0? Seria possível apresentar um PDA determinista? Se sim, compare-o com o PDA não-determinista.

---

2 Nos autómatos de pilha que construiu em exercícios anteriores, teste o determinismo. Verifique se são autómatos deterministas e, caso não o sejam, localize as transições que o invalidam.

Sugestão: verifique se a partir de algum estado há mais do que uma transição que envolva o mesmo símbolo na entrada e/ou ε e o mesmo símbolo na pilha.

---

3 "Dado um autómato de pilha não determinista, existe sempre um autómato determinista equivalente, ou seja, que reconhece exactamente a mesma linguagem." Esta afirmação é verdadeira? Justifique.

Qualquer CFL (linguagem sem contexto) podem ser representada por um PDA não-determinista, mas nem todas o podem ser por um PDA determinista. Sugestão: analisar o exemplo da linguagem dos palíndromos no alfabeto {a,b}.

---

6 Mostre, usando o lema da bombagem para as linguagens sem contexto, que a linguagem das cadeias da forma $a^n b^n c^k$, em que $n \leq k \leq 2n$, não é uma linguagem sem contexto.

Vamos supor que a linguagem é uma CFL. Nesse caso terá de satisfazer o lema da bombagem para CFL's. Seja $z=a^n b^n c^{2n}$, $|z|=4n \geq n$, com z decomposta em z=uvwxy, e $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$

vwx não pode ter simultaneamente a's e c's:

- *se não tiver c's: vx tem apenas a's e b's*

  para i=0, uwy tem 2n c's, e menos de n a's e/ou menos de n b's

  Logo, uwy não pode ser da forma $a^n b^n c^k$, com $n \leq k \leq 2n$

- *se não tiver a's: vx tem apenas b's e c's*

  para $i \geq 1$[1], uv^iwx^iy fica com n a's, seguidos de mais do que n b's e/ou mais de 2n c's.

  Logo, não é da forma $a^nb^nc^k$, com $n \leq k \leq 2n$

Logo, por contradição a linguagem não é uma CFL.

qed

---

8 Mostre, usando o lema da bombagem, que a linguagem das cadeias da forma 0^l1^j, em que $j=l^2$, não é uma linguagem sem contexto.

Vamos supor que a linguagem é uma CFL. Nesse caso terá de satisfazer o lema da bombagem para CFL's. Seja $z = 0^n1^{n^2}$, com z decomposta em z=uvwxy

vwx

- *se só tiver 0's*

  para i=0, uwy tem n^2 1's e menos de n 0's. Logo, não está na linguagem.

- *se só tiver 1's*

  para i=0, uwy tem n 0's e menos de n^2 1's. Logo, não está na linguagem.

- *se v ou x tiverem 0's e 1's*

  *então com $i \geq 2$[1], uv^iwx^iy deixa de ser da forma 0*1*, e portanto não está na linguagem.*

- *se v tiver só 0's e x tiver só 1's: suponhamos que v tem k 0's e x tem m 1's.*

  Para i=0 teremos de ter n 0's e n^2 1's, e para todo o i teremos de ter (n+ik) 0's e (n^2 + im) 1's o quadrado de (n+ik) é $(n+ik)^2=n^2+snik+i^2k^2$ que tem de ser igual a (n^2 + im):

  $n^2+2nik+i^2k^2 = n^2 + im \Rightarrow 2nik+i^2k^2 = im$ que é uma igualdade impossível para todo o i (o lado direito cresce linearmente em i e o lado esquerdo cresce de forma quadrática em i)

  Logo, por contradição a linguagem não é uma CFL.

  qed

---

[1] Pode-se usar i=2, por exemplo.