

Daniel Herrera Aráuz

MATEMÁTICA FINANCIERA



Contiene:

- ✓ *Teoría.*
- ✓ *251 Problemas Resueltos.*
- ✓ *247 Problemas Propuestos.*
- ✓ *29 Programas de cálculo en Excel.*



Instituto Ecuatoriano
de la Propiedad
Intelectual

**Dirección Nacional de Derecho de Autor
y Derechos Conexos**

Certificado N° QUI-046297

Trámite N° 000991

La Dirección Nacional de Derecho de Autor y Derechos Conexos, en atención a la solicitud presentada el 28 de mayo del año 2015, **EXPIDE** el certificado de registro:

AUTOR(es): HERRERA ARAUZ, DANIEL EUGENIO

TITULAR(es): HERRERA ARAUZ, DANIEL EUGENIO

CLASE DE OBRA: LITERARIA (Inédita)

TÍTULO DE LA(s) OBRA(s): MATEMÁTICA FINANCIERA.

Quito, a 29 de mayo del año 2015



Lcda. Elena López Merizalde
Experta Principal en Registro

Delegada del Director Nacional de Derecho de Autor y Derechos Conexos,
mediante Resolución N° 002-2012-DNDAYDC-IEPI

El presente certificado no prejuzga sobre la originalidad de lo presentado para el registro, o su carácter literario, artístico o científico, ni acerca de la autoría o titularidad de los derechos por parte de quien solicita la inscripción. Solamente da fe del hecho de su declaración y de la identidad del solicitante.

ELM.

PALABRAS INICIALES

Con el título de "MATEMÁTICA FINANCIERA", se pone a consideración del estudiante universitario, del profesional ecuatoriano y del mundo esta recopilación de material didáctico que ha sido desarrollado durante varios años en que el autor ha dictado la cátedra de Matemática Financiera en la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central del Ecuador y en otras instituciones de educación superior del país, tanto en nivel de pregrado como posgrado.

Estos apuntes responden a la temática desarrollada en un curso normal de Matemática Financiera, iniciando con algunas definiciones básicas sobre la terminología utilizada en esta materia; incluye material de estudio para el Interés Simple y el Interés Compuesto como elementos fundamentales para el desarrollo de aplicaciones, tales como: el Descuento Simple, la Amortización simple, las Anualidades, la Amortización, la Acumulación de Fondos, la Depreciación de Activos y la Negociación de Bonos; por otro lado, se ha incluido como último capítulo las herramientas de Decisión Financiera mediante el Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Retorno (TIR).

Todos los temas que contiene el texto, disponen de un marco teórico donde se exponen las definiciones, fórmulas de cálculo y metodología para la solución de problemas; a la par, cada una de las unidades de estudio disponen de un número suficiente de problemas resueltos en los cuales se ha aplicado con detalle la metodología de las Ecuaciones de Valor

Dentro de cada capítulo se incluye conjuntamente un grupo de problemas propuestos con sus respuestas, que deberán ser resueltos por el lector aplicando los conocimientos y metodologías contenidas en el marco teórico.

Finalmente se han elaborado un grupo de programas de cálculo desarrollados en Hoja electrónica Excel; estos programas constituyen una efectiva herramienta para comprobar los resultados obtenidos.

Haciendo hincapié en los programas de cálculo, estos responden a la necesidad de contar con un software de carácter didáctico, que desarrolle el proceso de cálculo, con lo cual se garantiza la exactitud de las respuestas; como también la oportunidad de que el usuario pueda establecer, gracias a la interactividad del Excel, diferentes escenarios, con la variación de los valores iniciales del problema; cumpliendo así con el objetivo fundamental de la informática, que es el de facilitar los procesos de cálculo, contando, por parte del usuario con el conocimiento, y la capacidad de interpretar los resultados obtenidos.

AGRADECIMIENTOS

- ✓ *Para Armando Mora Zambrano y Víctor Hugo Pro Zambrano, catedráticos de la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central del Ecuador, por la revisión del texto y por sus recomendaciones, siempre tan objetivas y oportunas.*
- ✓ *A Francisco Garzón Salazar, Decano de la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central del Ecuador, por la confianza y apoyo brindados para el logro de este trabajo académico.*

Dedicado a:

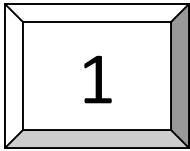
*Mi madre, a mis hermanos, a mis sobrinos y a
Nilma Rúa; familia comprometida con La Verdad,
El Conocimiento, La Academia y El Arte.*

*A Genoveva, María Lorena y Esteban Daniel,
eternos y brillantes colaboradores; apoyo
fundamental en todos mis proyectos.*

TABLA DE CONTENIDOS

UNIDAD 1.- DEFINICIONES BÁSICAS	1
1.1. DEFINICIÓN DE MATEMÁTICA FINANCIERA	1
1.2. EL DINERO.....	1
1.3. USOS DEL DINERO	1
1.4. INVERSIÓN.....	1
1.5. EL TRIANGULO FINANCIERO	2
1.6. EL CRÉDITO	2
1.7. EL INTERÉS.....	2
1.8. ELEMENTOS FINANCIEROS	2
1.9. EL DINERO Y EL TIEMPO	3
UNIDAD 2.- EL INTERÉS SIMPLE.....	4
2.1. INTRODUCCIÓN	4
2.2. ELEMENTOS FINANCIEROS Y CÁLCULO DEL INTERÉS SIMPLE	4
2.3. MONTO DE UNA TRANSACCIÓN A INTERÉS SIMPLE	5
2.4. VALOR ACTUAL DE UNA TRANSACCIÓN A INTERÉS SIMPLE.....	5
2.5. CALCULO DE LA TASA DE INTERÉS.....	6
2.6. CALCULO DEL TIEMPO	6
2.7. ECUACIONES DE VALOR.....	7
2.8. RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	8
2.9. PROBLEMAS RESUELTOS.	9
2.10. PROBLEMAS PROPUESTOS	25
UNIDAD 3.- DESCUENTO SIMPLE Y AMORTIZACIÓN SIMPLE	28
3.1. DESCUENTO RACIONAL	28
3.2. DESCUENTO BANCARIO O DESCUENTO SIMPLE	28
3.3. VALOR DESCONTADO	29
3.4. APLICACIÓN DEL DESCUENTO BANCARIO EN DOCUMENTOS FINANCIEROS.....	29
3.5. RELACIÓN ENTRE LA TASA DE DESCUENTO Y LA TASA DE INTERÉS SIMPLE	29
3.6. AMORTIZACIÓN SIMPLE	30
3.6.1. AMORTIZACIÓN CON PAGOS IGUALES.....	30
3.6.2. MÉTODO DE SALDOS DEUDORES	30
3.6.3. TABLA DE AMORTIZACIÓN	31
3.7. PROBLEMAS RESUELTOS	33
3.8. PROBLEMAS PROPUESTOS	38

UNIDAD 4.- INTERÉS COMPUESTO	41
4.1. INTRODUCCIÓN	41
4.2. ELEMENTOS FINANCIEROS DEL INTERÉS COMPUESTO.....	42
4.3. MONTO A INTERÉS COMPUESTO	44
4.4. MONTO A INTERÉS COMPUESTO SI EL NÚMERO DE PERÍODOS ES FRACCIONARIO	44
4.5. VALOR ACTUAL DE UNA TRANSACCIÓN A INTERÉS COMPUESTO	45
4.6. VALOR ACTUAL EN PERÍODOS FRACCIONARIOS	45
4.7. CÁLCULO DEL NÚMERO DE PERÍODOS Y DEL TIEMPO	46
4.8. CÁLCULO DE LA TASA PERIÓDICA A INTERÉS COMPUESTO	46
4.9. TASA EQUIVALENTE Y TASA EFECTIVA ANUAL	46
4.10. CAPITALIZACIÓN CONTINUA	47
4.11. PROBLEMAS RESUELTOS	48
4.12. PROBLEMAS PROPUESTOS	64
UNIDAD 5.- INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS ANUALIDADES	67
5.1. DEFINICIÓN.....	67
5.2. ELEMENTOS DE UNA ANUALIDAD.....	67
5.3. CLASIFICACIÓN	68
5.4. COMBINACIÓN DE LAS ANUALIDADES	68
UNIDAD 6.- ANUALIDADES VENCIDAS	69
6.1. DEFINICIÓN.....	69
6.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA	69
6.3. VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD VENCIDA	69
6.4. VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD VENCIDA.....	70
6.5. PAGO PERIÓDICO DE UNA ANUALIDAD VENCIDA.....	71
6.6. DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE PERÍODOS.....	72
6.7. CÁLCULO DE LA TASA PERIÓDICA.....	72
6.8. PROBLEMAS RESUELTOS	74
6.9. PROBLEMAS PROPUESTOS	87

1**DEFINICIONES BÁSICAS****1.1. DEFINICIÓN DE MATEMÁTICA FINANCIERA**

La Matemática Financiera es una serie de métodos, procesos y herramientas numéricas que permiten analizar y determinar las variaciones del dinero como elemento fundamental en las transacciones que se presentan en las actividades diarias, sean estas de tipo personal, comercial, o empresarial (<http://www.monografias.com/trabajos29/matematicas-financieras>, 2015).

La Matemática Financiera requiere de conocimientos básicos de álgebra y una calculadora; pudiendo también utilizarse algún programa informático, tal como la Hoja de cálculo Excel.

1.2. EL DINERO

El dinero es un bien convencionalmente aceptado como medio de pago en la compra de bienes y servicios de toda clase, permite realizar y llevar a buen término las operaciones de intercambio, entre compradores y vendedores; por otro lado, puede considerarse como definiciones del dinero las siguientes (<http://www.economia.so/2013/10/dinero>, 2013):

- Es el elemento comúnmente aceptado en el mercado de bienes y servicios.
- Cualquier bien, ampliamente aceptado, que sirve como medio de pago y como medida y reserva de valor.

1.3. USOS DEL DINERO

Como **medio de pago**, el dinero es aceptado a cambio de bienes y servicios, y da a su poseedor el poder de compra a su vez otros bienes y servicios.

Como **medida de valor**, el dinero permite la comparación entre todos los bienes y servicios, y relaciona cada uno de ellos con los demás.

1.4. INVERSIÓN

En términos generales la Inversión es el empleo productivo de bienes económicos, que da como resultado una magnitud de este mayor que la empleada; es decir: **la inversión económica es el crecimiento del dinero, tomando a este como bien económico**.

Por otro lado, la Inversión es:

En el contexto empresarial, la inversión es el acto mediante el cual se invierten ciertos bienes con el ánimo de obtener unos ingresos o rentas a lo largo del tiempo; la inversión se refiere al empleo de un capital en algún tipo de actividad o negocio, con el objetivo de incrementarlo.

Dicho de otra manera, consiste en renunciar a un consumo actual y cierto, a cambio de obtener unos beneficios futuros y distribuidos en el tiempo. (MASSÉ, 1963).

1.5. EL TRIANGULO FINANCIERO

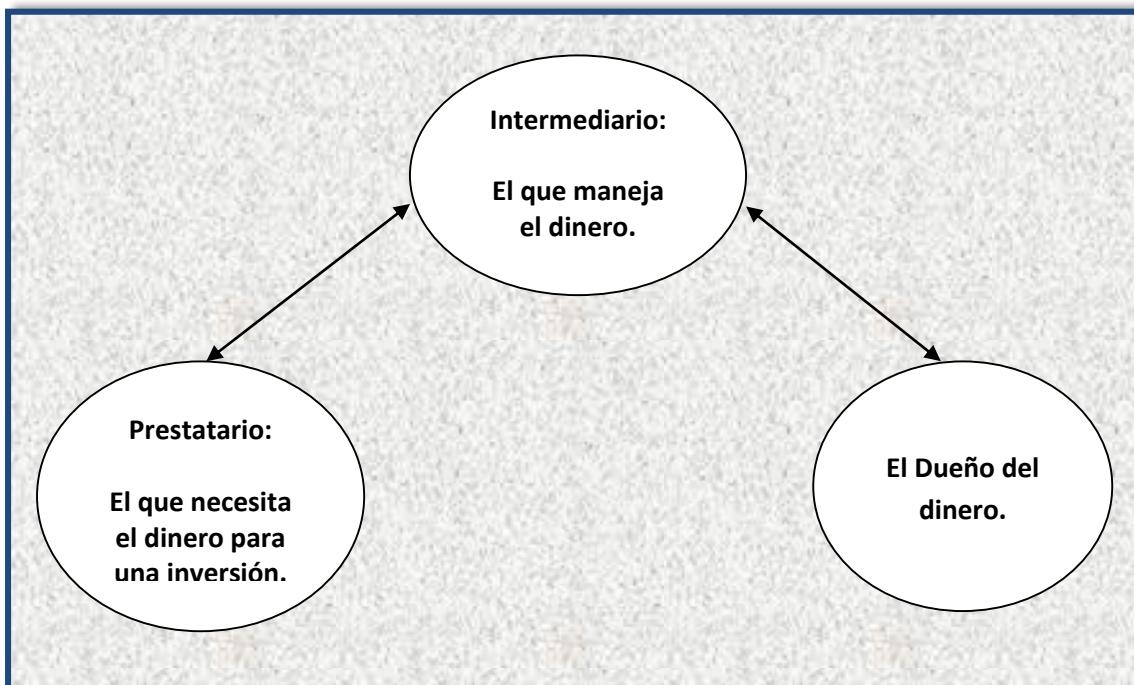


Figura N° 1

En este triángulo se puede observar el nexo entre el **Prestatario**, es decir: el que necesita dinero para una inversión, y el dueño del dinero y el intermediario, el mismo que gana dinero por manejar el dinero ajeno.

El Dueño del dinero considera a la acción de prestar dinero como inversión, dado que es una manera en la cual el bien económico en juego (dinero), crecerá.

1.6. EL CRÉDITO

Es el proceso económico, mediante el cual el prestatario puede obtener dinero para realizar una inversión. Usar el dinero ajeno, es decir: **utilizar el dinero ajeno, tiene un costo**.

1.7. EL INTERÉS

Es la cantidad de dinero que el prestamista o acreedor exige en un préstamo **como pago por el uso de su dinero**, precisamente, **el interés** es el costo que debe pagar el prestatario para usar en una inversión, un dinero que no le pertenece. (PORTUS Govinden, 1985)

En resumen: el interés puede definirse, en una primera aproximación de su concepto, como el precio pagado en dinero por el uso del dinero ajeno.

1.8. ELEMENTOS FINANCIEROS

Existen tres elementos financieros fundamentales en el estudio de la Matemática Financiera, estos elementos son considerados como variables de cálculo en los ejercicios y problemas que se presentan en esta disciplina, su descripción es la siguiente:

➤ **CAPITAL O PRINCIPAL**

Es la cantidad de dinero en juego, es el valor del préstamo solicitado por el prestatario o deudor al dueño del dinero.

➤ **PLAZO**

Es el tiempo en el cual el deudor se compromete a retribuir o devolver el capital junto con sus intereses al dueño del dinero; este plazo se expresa en unidades de tiempo: años, meses, días.

➤ **RÉDITO**

Conocido también como Tasa de Interés, es el valor que norma o regula la situación legal del crédito; se lo expresa en porcentaje, es decir en unidades monetarias por cada cien unidades del Principal; está normado por las situaciones propias del mercado.

La tasa de interés, conocida como tasa nominal, es un porcentaje de dinero expresado en unidades de tiempo; por ejemplo; 5% trimestral, 8% mensual, etc. si la unidad de tiempo no está registrada se asume que es anual.

1.9. EL DINERO Y EL TIEMPO

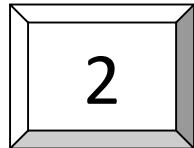
Se definió a la Matemática Financiera como una serie de procesos, normas y maneras de calcular la variación del dinero con respecto al tiempo; el dinero y el tiempo son dos variables intrínsecamente relacionadas, de la variación de estas dos variables se determinan algunas definiciones tales como: el Valor Actual y el Valor Futuro de una inversión.

El dinero, representado como el capital o principal de una transacción, varía conforme varía el tiempo, no es lo mismo, por ejemplo: disponer ahora de \$ 1000 que la misma cantidad dentro de un año.

La variación del dinero en función del tiempo responde a dos tipos de factores:

- ❖ **Factores internos:** Representado por la propia tasa de interés o rédito de la transacción, no olvide que esta tasa de interés se expresa como un porcentaje, acompañado por una unidad de tiempo.
- ❖ **Factores Externos:** El más importante: La Inflación, que es un fenómeno económico cuyo efecto produce la desvalorización del dinero, es decir la pérdida del proceso adquisitivo del mismo.

Las definiciones registradas en este capítulo, serán herramientas cotidianas en el estudio de la Matemática Financiera y de sus aplicaciones en el mundo de los negocios y la administración de recursos como también, en la toma de decisiones empresariales de carácter financiero.



EL INTERÉS SIMPLE

2.1. INTRODUCCIÓN

El Interés simple, es una transacción financiera en la cual, el Capital o Principal es prestado o invertido en un plazo relativamente corto, normalmente menor a un año. En este tipo de transacciones financieras, el costo del dinero en inversión o en préstamo, es decir el interés, se lo paga al dueño del mismo, **una sola vez**. En la mayoría de las ocasiones, al final del plazo, o en algunos casos, al inicio del mismo.

2.2. ELEMENTOS FINANCIEROS Y CÁLCULO DEL INTERÉS SIMPLE

El valor del interés, en este tipo de transacciones, está en función del capital en juego, del plazo o tiempo de la transacción, y de la tasa de interés vigente en el mercado financiero.

Sean:

I: Interés simple.

C: Capital.

r: Tasa de interés o rédito.

t: Tiempo o plazo de la inversión.

Entonces, el Interés simple es:

$$I = Crt$$

El tiempo de la transacción o plazo, se expresa normalmente en años o fracción de año; es decir: en meses o días; Cuando está expresado en días, se debe establecer previamente si el año es comercial o exacto; el año comercial se considera de 360 días; mientras que, el año exacto es de 365 o 366 días, si el año es bisiesto (CISSELL, CISSELL, & FLASPOHLER, 1996).

Si el plazo de la transacción financiera está expresado entre dos fechas, es necesario determinar el número exacto de días que existe entre fecha y fecha; el número de días entre fecha y fecha se lo puede calcular de dos maneras:

➤ Tabla de cálculo entre fecha y fecha.

Al final del texto se incluye el Anexo N° 1 “Numeración de días de un año”; en esta tabla se ha asignado en forma secuencial un número a cada día del año, de manera que para establecer el número de días entre dos fechas, se determinará el número correspondiente a cada fecha y la diferencia entre estos dos números será el número de días entre dos fechas

➤ Programa de cálculo de días entre fechas.

En la Hoja electrónica Excel se puede calcular el número de días entre dos fechas; el usuario deberá ingresar en cada celda las fechas y luego, con una operación de resta o sustracción, en forma inmediata el programa entregará como resultado los días transcurridos entre dos fechas.

2.3. MONTO DE UNA TRANSACCIÓN A INTERÉS SIMPLE

El monto de una transacción a Interés Simple, está determinado por la suma del Capital más el interés generado por esta transacción.

Representando con M al monto se tiene:

$$M = C + I$$

Reemplazando el valor del interés y factorizando la expresión, se tiene:

$$M = C + Crt$$

$$M = C(1 + rt)$$

2.4. VALOR ACTUAL DE UNA TRANSACCIÓN A INTERÉS SIMPLE

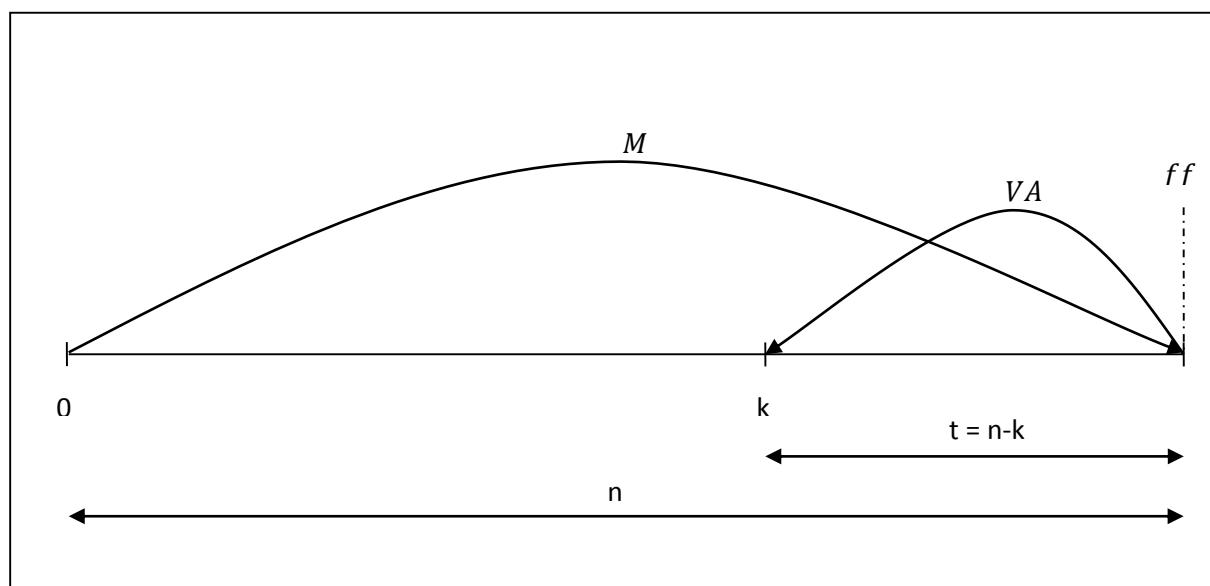
El Valor Actual de una transacción financiera es el valor del dinero en una fecha anterior al vencimiento; a interés simple, el Valor Actual se determina con la siguiente expresión:

$$VA = \frac{M}{(1 + rt)}$$

En donde t representa al tiempo que falta por vencerse, es decir: el tiempo entre el pago adelantado y la fecha de vencimiento.

Recuerde que el tiempo debe estar en las mismas unidades en las que se encuentra expresada la tasa de interés o rédito.

Gráficamente, esta situación se puede representar así:



En el gráfico, el lector puede observar:

La Fecha Focal se ha ubicado al final del plazo de la transacción; se define a la Fecha Focal como el punto en la recta de tiempos (o fuera de ella) al cual convergen todos los elementos financieros, conocidos o desconocidos que intervienen en el problema.

El capital (C) se ubica al inicio de la transacción, luego, este capital se desplaza hacia la derecha, hasta la fecha focal convirtiéndose, teóricamente, en Monto.

El Valor Actual de la transacción, en un tiempo k , se calcula con la expresión indicada en el párrafo anterior; tomando en cuenta que el tiempo que se debe utilizar, es el que falta para finalizar la transacción, es decir: $t = n - k$.

2.5. CALCULO DE LA TASA DE INTERÉS

La tasa de interés o rendimiento del dinero puede calcularse con las siguientes expresiones:

- ✓ Cuando el rendimiento o rédito está en función del Interés:

$$r = \frac{I}{Ct}$$

Cuando el rendimiento o rédito está en función del Monto:

$$r = \frac{\left(\frac{M}{C}\right) - 1}{t}$$

En ambos casos, el valor obtenido deberá multiplicarse por 100 para expresarlo como porcentaje.

2.6. CALCULO DEL TIEMPO

Para el cálculo del tiempo en una transacción a interés simple se pueden utilizar estas dos expresiones:

- ✓ Cuando el tiempo está en función del Interés:

$$t = \frac{I}{Ct}$$

- ✓ Cuando el tiempo está en función del Monto:

$$t = \frac{\left(\frac{M}{C}\right) - 1}{r}$$

Tomar en cuenta:

- La unidad de tiempo es la misma en la cual está expresada la tasa de interés.
- Mientras no se diga lo contrario, se considera que el año tiene 360 días y se lo denomina como Año Comercial.
- El año calendario, cuando así se lo indique, tiene 365 días o 366 días, si es año bisiesto.
- Cuando el plazo de la transacción está dado entre fechas el tiempo (en días) se lo determina restando de la fecha final, la fecha inicial.

2.7. ECUACIONES DE VALOR

Muchos problemas de Matemática Financiera, pueden resolverse fácilmente planteando una Ecuación de Valor, esta ecuación tiene la siguiente estructura matemática:

Deudas = pagos

Pueden presentarse los siguientes casos:

- Un compromiso financiero (deuda, inversión) se cumpla con un solo pago.
- Un compromiso financiero se cumpla con varios pagos.
- Varias deudas se cumplan con un solo pago, denominado pago único.
- Varias deudas se cumplan con varios pagos.

Metodología:

Trace una recta y en ella ubique el tiempo que transcurre entre los diferentes elementos financieros que intervienen en el problema, esta recta se denomina Recta de Tiempos.

Ubique la Fecha Focal, para el caso de problemas de interés simple, la fecha focal está dada por las condiciones del problema; en la mayoría de los casos esta fecha focal se ubica al final del plazo de la transacción; en caso del Interés Compuesto, debido a la periodicidad de la capitalización de intereses, la Fecha Focal puede ubicarse en cualquier punto de la Recta de Tiempos, inclusive fuera de ella, el resultado siempre será el mismo.

Ubique los valores financieros del problema de manera que los pagos y las deudas se coloquen en cada lado de la recta de tiempo; ejemplo: las deudas en la parte superior de la recta y los pagos en la parte inferior de la misma, los valores desconocidos se representan con la letra **X**.

Traslade todos los valores financieros, (conocidos y desconocidos) hasta la fecha focal, tomando en cuenta que si el traslado es hacia la derecha de la fecha focal; entonces este valor financiero se convierte en Monto; si el traslado es hacia la izquierda de la fecha focal, este valor financiero se convierte en Valor Actual.

El tiempo que interviene en el cálculo de los valores financieros, que se han convertido en Monto o en Valor Actual, es aquel que transcurre entre la fecha de ubicación en la recta de tiempo y la fecha focal;

este tiempo debe expresarse en la misma unidad para todos los casos; esta unidad de tiempo debe coincidir con la unidad que expresa la tasa de interés.

Ahora ya se puede plantear la ecuación de valor, el elemento financiero desconocido se lo encuentra resolviendo la ecuación planteada.

Se debe tomar en cuenta el redondeo de decimales, esto puede causar dificultades en la exactitud del problema, es conveniente plantear la ecuación de valor y determinar cada uno de los valores, mediante el uso adecuado de una calculadora electrónica; entendiéndose por uso adecuado: la fijación de decimales, la utilización de paréntesis, memorias y demás funciones electrónicas de la calculadora, para hacer todo el trabajo numérico en el interior de la misma, de manera que el usuario, solamente transcriba el resultado; operaciones parciales sin la debida precaución con los decimales, hacen que no se obtenga la respuesta exacta del problema.

2.8. RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo y en todos los que conforman este libro, se han incluido un grupo de ejercicios resueltos y un grupo de ejercicios propuestos a los que se ha añadido su respuesta, la solución de estos problemas toma en consideración las siguientes recomendaciones metodológicas:

- ✓ Lea detenidamente el problema, determine la información numérica y de carácter literal existente, finalmente identifique la pregunta y establezca la incógnita para el planteamiento de la ecuación.
- ✓ Grafique la información en la Recta de Tiempos; el gráfico siempre será de extremada utilidad, sin embargo en problemas de fácil interpretación, puede omitir el gráfico.
- ✓ Ubique la Fecha Focal, es muy conveniente ubicarla en la incógnita, en el caso del Interés Simple la fecha focal se ubicará de acuerdo con la información existente, en los demás casos, puede ubicarla en cualquier parte y obtendrá el mismo resultado.
- ✓ Verifique que el tiempo esté expresado en las mismas unidades y de acuerdo con el tiempo que indica la tasa de interés o rédito; no se olvide que la tasa de interés, mientras no se diga lo contrario, es anual y que el año tiene 360 días (año comercial).
- ✓ Plantee la ecuación de valor, reemplace los términos de la ecuación por las fórmulas de cálculo y finalmente por los valores conocidos, la ecuación resultante podrá ser resuelta como cualquier ecuación lineal o de primer grado.
- ✓ Optimice el uso de la calculadora, fije dos decimales, utilice paréntesis, memorias y todos los demás recursos que dispone su máquina, de manera que evite al máximo el redondeo de operaciones.
- ✓ Para comprobar el resultado obtenido puede utilizar los programas de cálculo que se encuentran almacenados en el CD adjunto al texto; estos programas están desarrollados en la Hoja Electrónica de Cálculo Excel, para versión 2010 en adelante.

2.9. PROBLEMAS RESUELTOS.

1. Una Cooperativa paga el 5% sobre los depósitos a plazos. Determinar el pago anual por interés sobre un depósito de \$18000.

<u>Datos:</u>	<u>Solución:</u>
$C = 18000$ $r = 5\%$ $t = 1 \text{ año}$ $I = ?$	$I = Crt$ $I = 18000 \times \frac{5}{100} \times 1$ $I = \$ 900,00$

2. Un Banco obtiene fondos al costo de 12% y presta a los microempresarios al 18.6% anual, ganándose así el 6.6% bruto. Si los ingresos anuales que obtuvo de esta forma fueron de \$5000, cuánto dinero prestó?

<u>Datos:</u>	<u>Solución:</u>
$I = 5000$ $r = 6.6\%$ $t = 1 \text{ año}$ $C = ?$	$C = \frac{I}{rt}$ $C = \frac{I}{rt} = \frac{5000}{\frac{6.6}{100} \times 1}$ $C = \$ 75.757,58$

3. Una entidad financiera invirtió \$ 250000 al 11.6% en hipotecas locales y ganó \$ 22000, determinar el tiempo que estuvo invertido el dinero.

<u>Datos:</u>	<u>Solución:</u>
$C = 250000$ $I = 22000$ $r = 11.6\%$ $t = ?$	$t = \frac{I}{Cr}$ $t = \frac{22000}{250000 \times \frac{11.6}{100}}$ $t = 0.758 \text{ años} \approx 9.10 \text{ meses}$ $t = 9 \text{ meses}, 3 \text{ días}$

4. Si una empresa hipotecaria tiene invertido \$ 300000 durante 2.5 años; - largo plazo, factible a interés simple - y obtiene en total \$ 46250 de ingresos, cuál es la tasa de interés?

<u>Datos:</u> $C = 300000$ $I = 46250$ $t = 2.5 \text{ años}$ $r = ?$	<u>Solución:</u> $r = \frac{I}{Ct}$ $r = \frac{46250}{300000 \times 2.5}$ $r = 0.0616 \approx 6.17\%$
---	--

5. Una persona deposita \$2500, en una cuenta de ahorros al 9% anual, cuánto tendrá después de 8 meses?

<u>Datos:</u> $C = 2500$ $r = 9\%$ $t = 8 \text{ meses}$ $M = ?$	<u>Solución:</u> $M = C(1 + rt)$ $M = 2500 \left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{8}{12}\right)$ $M = \$ 2.650,00$
--	---

6. Un empleado recibe \$ 12800 por concepto de liquidación de su trabajo, los deposita en una libreta de ahorros en un banco al 4.7% anual. Calcular cuánto tendrá al final de 150 días.

<u>Datos:</u> $C = 12800$ $r = 4.7\%$ $t = 150 \text{ días}$ $M = ?$	<u>Solución:</u> $M = C(1 + rt)$ $M = 12800 \left(1 + \frac{4.7}{100} \times \frac{150}{360}\right)$ $M = \$13.050,67$
--	---

7. Determinar la fecha de vencimiento y el valor al vencimiento o Monto de los siguientes pagarés:

Nº	Valor Nominal	Fecha de Emisión *	Plazo (días)	Tasa de interés
1	\$ 2500	15-mar-12	100	4.5%
2	\$ 4500	18-jun-12	120	5.2%
3	\$ 3500	17-jul-12	90	6.4%

* El año 2012 es bisiesto.

<u>Pagaré N° 1</u> Fecha de emisión: 15-mar-12 (día 75) Fecha de vencimiento: $75+100 = 175$ Corresponde a: 23-jun-12	<u>Valor al vencimiento o Monto:</u> $M = C(1 + rt)$ $M = 2500 \left(1 + \frac{4.5}{100} \times \frac{100}{360}\right)$ $M = \$ 2.531,25$
<u>Pagaré N° 2</u> Fecha de emisión: 18-jun-12 (día 170) Fecha de vencimiento: $170+120 = 290$ Corresponde a: 16-oct-12	<u>Valor al vencimiento o Monto:</u> $M = C(1 + rt)$ $M = 4500 \left(1 + \frac{5.2}{100} \times \frac{120}{360}\right)$ $M = \$4.578,00$
<u>Pagaré N° 3</u> Fecha de emisión: 17-jul-12 (día 199) Fecha de vencimiento: $199+90 = 289$ Corresponde a: 15-oct-12	<u>Valor al vencimiento o Monto:</u> $M = C(1 + rt)$ $M = 3500 \left(1 + \frac{6.4}{100} \times \frac{90}{360}\right)$ $M = \$3.566,00$

8. Hallar el interés al 5%, y el monto sobre un documento de \$ 4000, fechado el 15 de enero de 2011, con vencimiento el 28 de agosto de 2011.

Cálculo del tiempo: 15-ene-2011 (día 15) 28-agosto-2011 (día 240) $t = 240 - 15 = 225$ días $C = \$ 4000$ $r = 5\%$	Cálculo del Interés: $I = Crt$ $I = 4000 \times \frac{5}{100} \times \frac{225}{360}$ $I = \$ 125,00$	Cálculo del Monto: $M = C + I$ $M = 4000 + 125$ $M = \$ 4.125,00$
--	--	--

9. Hallar el interés al 8%, y el monto sobre un documento de \$ 5000, fechado el 15 de noviembre de 2011, con vencimiento el 18 marzo de 2012.

Cálculo del tiempo:	Cálculo del Interés:	Cálculo del Monto:
<p>15-nov-2011 (día 319) 31-dic-2011 (día 365) 18-mar-2012 (día 78) (2012 año bisiesto) $t = 365 - 319 + 78$ $= 124 \text{ días}$</p> <p>$C = \\$ 5000$ $r = 8\%$</p>	$I = Crt$ $I = 5000 \times \frac{8}{100} \times \frac{124}{360}$ $I = \$ 137.78$	$M = C + I$ $M = 5000 + 137.78$ $M = \$ 5.137,78$

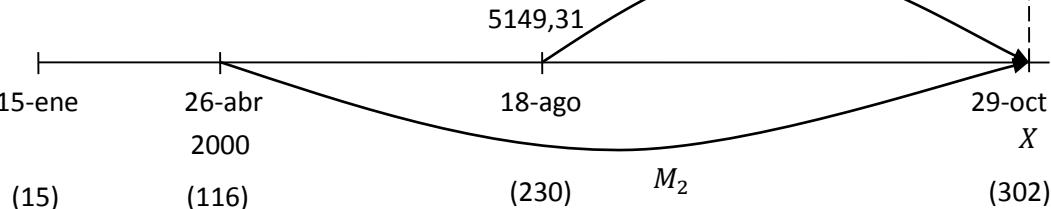
10. Se debe cubrir una deuda de \$4500 en nueve meses; cual es el pago que se debe realizar si esta deuda se cancela: a) hoy, b) en tres meses, c) en 6 meses, d) en un año; considerando que el dinero se negocia al 7%.

a. Pago el día de hoy	Sea X el pago a realizar: $X = VA$ $X = \frac{M}{(1 + rt)}$ $X = \frac{4500}{(1 + \frac{7}{100} \times \frac{9}{12})}$ $X = \$ 4.275,53$
b. Pago en tres meses	Sea X el pago a realizar: $X = VA$ $X = \frac{M}{(1 + rt)}$ $X = \frac{4500}{(1 + \frac{7}{100} \times \frac{6}{12})}$ $X = \$ 4.347,83$

<p>c. Pago en 6 meses</p>	<p>Sea X el pago a realizar:</p> $X = VA$ $X = \frac{M}{(1 + rt)}$ $X = \frac{4500}{\left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{3}{12}\right)}$ $X = \$ 4.422,60$
<p>d. Pago en un año</p>	<p>Sea X el pago a realizar:</p> $X = M$ $X = C(1 + rt)$ $X = 4500 \left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{3}{12}\right)$ $X = \$ 4.578,75$

11. El 15 de enero se contrae una deuda por \$ 5000 a pagarse dentro de 215 días con un interés del 5%; el 26 de abril del mismo año se realiza un pago de \$ 2000; cuál debe ser el valor del pago adicional que liquide la deuda si este pago se realiza el 29 de octubre del mismo año.

	$M = C(1 + rt)$ $M = 5000 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{215}{360}\right)$ $M = \$ 5.149,31$
--	--



Ecuación de valor:

$$\text{Deuda} = \text{Pagos}$$

$$M_1 = M_2 + X$$

$$C(1 + rt) = C(1 + rt) + X$$

$$5149,31 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{72}{360}\right) = 2000 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{186}{360}\right) + X$$

$$5200,80 = 2051,67 + X$$

$$X = 5200,80 - 2051,67$$

$$X = \$3.149,13$$

12. Un comerciante vende mercadería por \$ 10700 con una cuota inicial del 40% y el resto a pagar en 6 meses. Cuál debe ser el valor del pagaré que debe recibir si se aplica una tasa de interés del 8%.

Valor de la compra: \$ 10700

$$M = C(1 + rt)$$

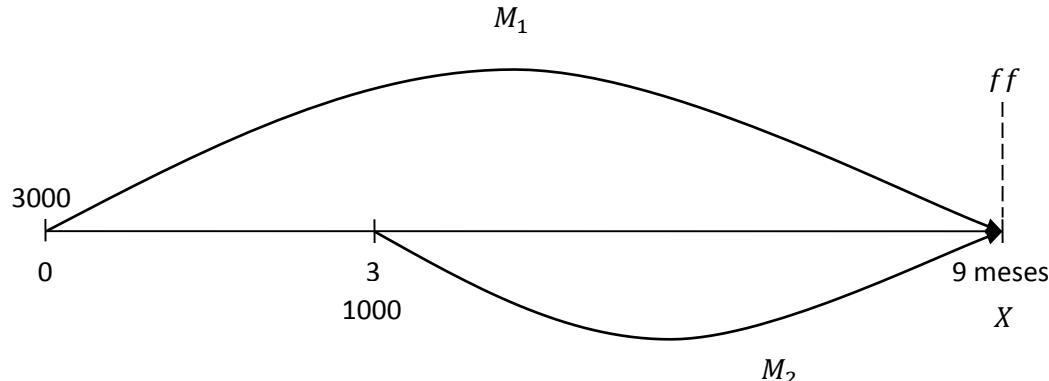
Cuota inicial: 40% \$ 4280

$$M = 6420 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right)$$

Saldo a financiar: \$ 6420

$$M = \$ 6.676,80$$

13. El día de hoy una comerciante recibe un préstamo por \$3000, comprometiéndose a pagar \$ 1000 dentro de 3 meses y la diferencia en 9 meses; tomando como tasa de interés simple el 10%, encuentre el valor del pago a realizar en el plazo establecido. Tómese como fecha focal 9 meses.



Ecuación de valor:

$$\text{Deuda} = \text{Pagos}$$

$$M_1 = M_2 + X$$

$$C(1 + rt) = C(1 + rt) + X$$

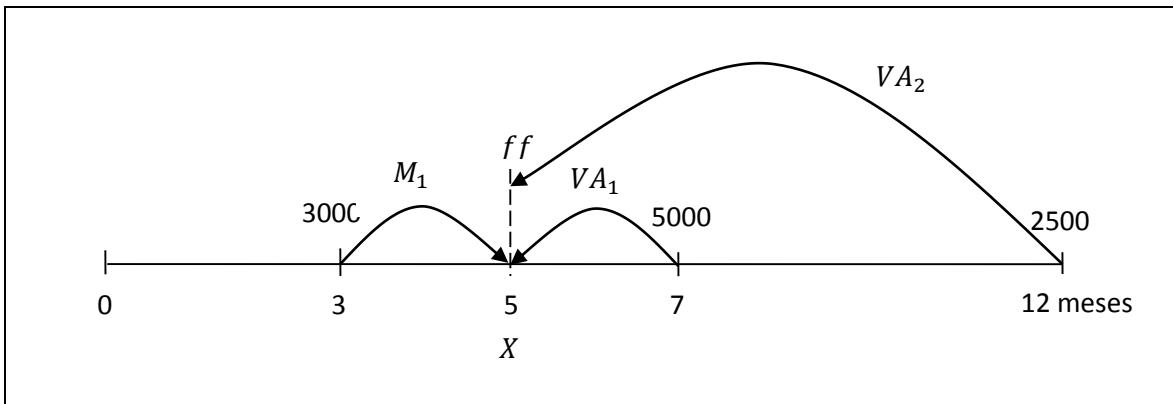
$$3000 \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{9}{12}\right) = 1000 \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right) + X$$

$$3225 = 1050 + X$$

$$X = 3225 - 1050$$

$$X = \$2.175,00$$

14. Una empresa debe \$ 3000 a pagarse en 3 meses, \$ 5000 a pagar el 7 meses y \$2500 a pagar en un año; decide cumplir con sus acreedores mediante un pago único en 5 meses; Encuentre el valor del pago único considerando el 10% de interés y como fecha focal en cinco meses.



Ecuación de valor:

$$M_1 + VA_1 + VA_2 = X$$

$$C(1 + rt) + \frac{M}{(1 + rt)} + \frac{M}{(1 + rt)} = X$$

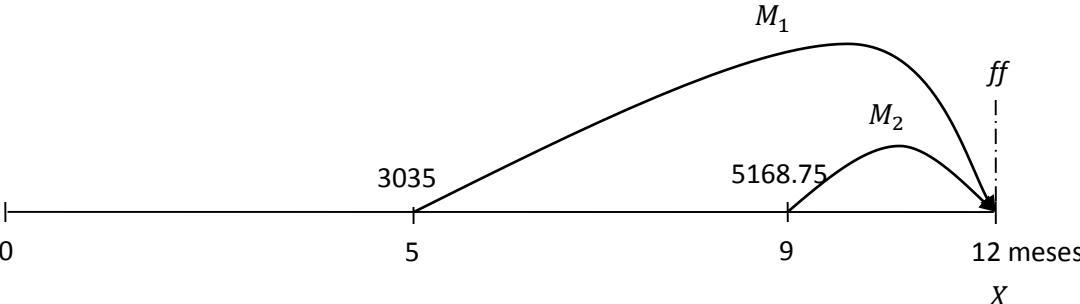
$$3000\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{2}{12}\right) + \frac{5000}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{2}{12}\right)} + \frac{2500}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{7}{12}\right)} = X$$

$$3050 + 4918,03 + 2362,20 = X$$

$$X = \$ 10.330,23$$

15. Una persona recibe un préstamo por \$ 5000 a pagar en nueve meses con un interés del 4.5%; tres meses más tarde recibe otro préstamo por \$ 3000 a pagar en 2 meses con un interés del 7%. Decide liquidar las dos deudas mediante un pago único a realizar en un año; halle el valor del pago que liquida la deuda considerando una tasa del 8%; tómese como fecha focal un año.

Primer préstamo:	Segundo préstamo:		
$C = 5000$ $r = 4.5\%$ $t = 9 \text{ meses}$	$M = C(1 + rt)$ $M = 5000\left(1 + \frac{4.5}{100} \times \frac{9}{12}\right)$ $M = \$5.168,75$	$C = 3000$ $r = 7\%$ $t = 2 \text{ meses}$	$M = C(1 + rt)$ $M = 3000\left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{2}{12}\right)$ $M = \$3.035,00$



Ecuación de valor:

$$M_1 + M_2 = X$$

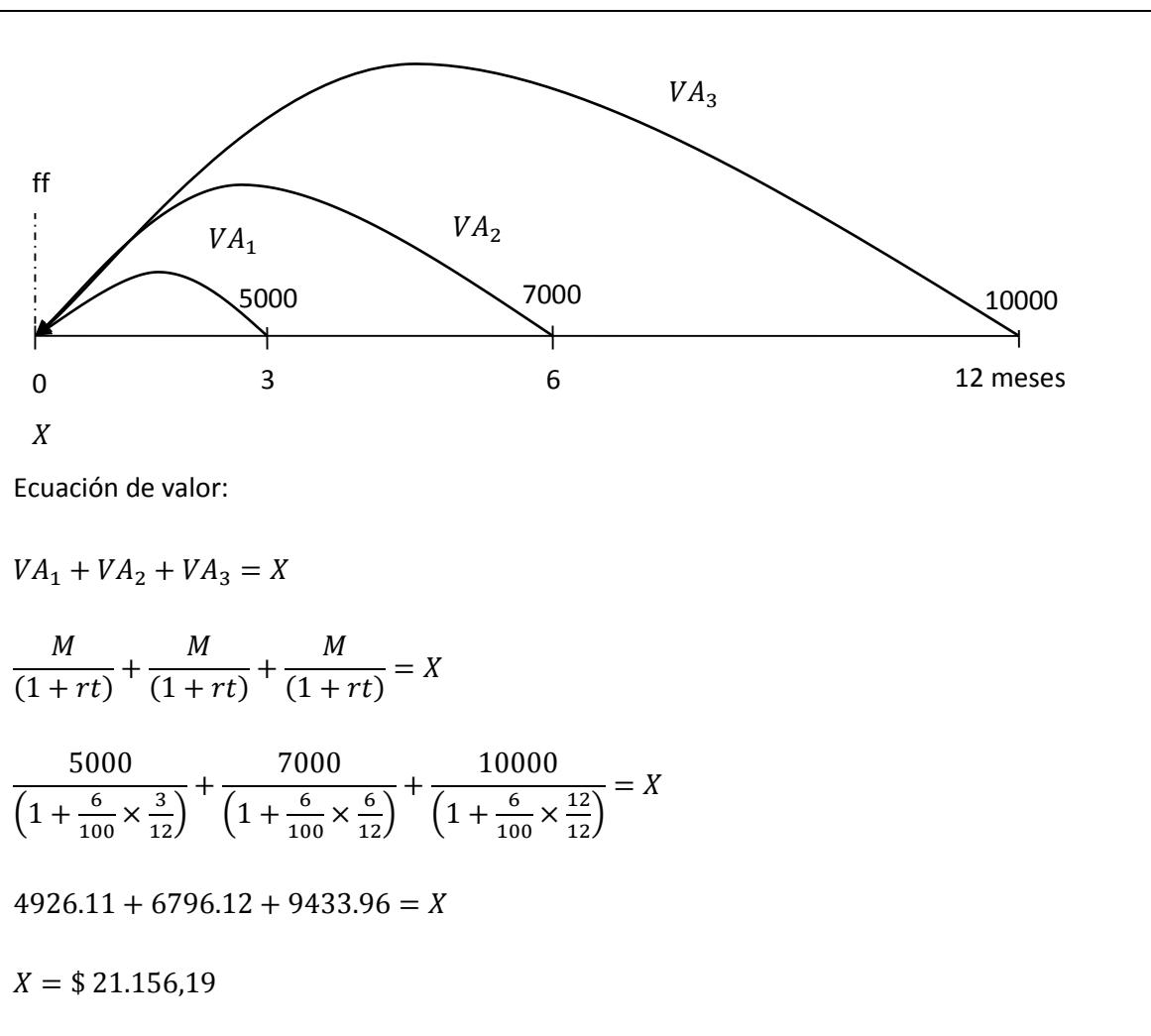
$$C(1 + rt) + C(1 + rt) = X$$

$$3035\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{7}{12}\right) + 5168.75\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{3}{12}\right) = X$$

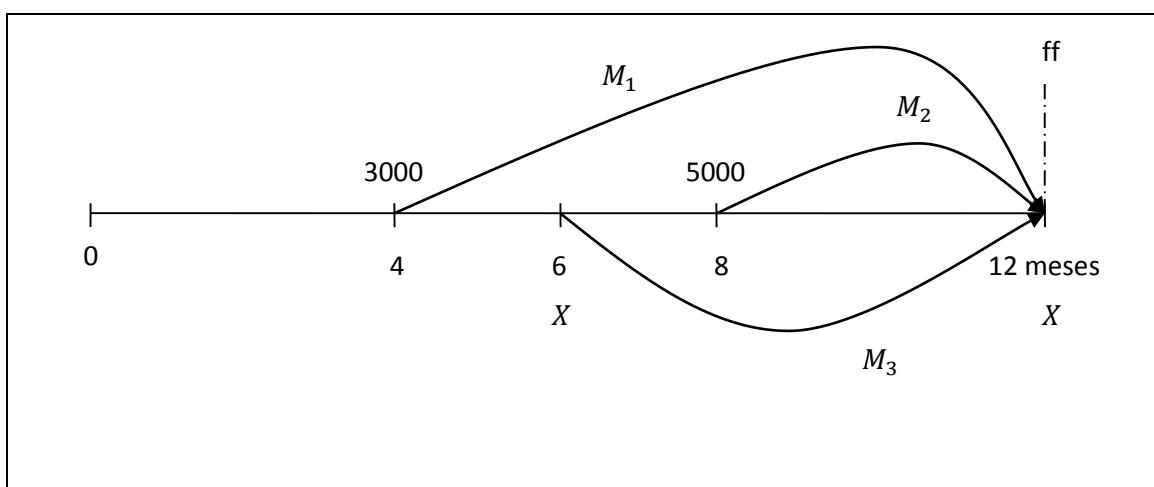
$$3176.63 + 5272.13 = X$$

$$X = \$ 8448.76$$

16. La empresa ABC debe pagar \$ 5000 en 3 meses, \$ 7000 en 6 meses y \$ 10000 en un año; considerando un rendimiento del 6% encuentre el valor del pago único inmediato que liquide las tres deudas.



17. Luis debe pagar \$ 3000 en 4 meses y \$ 5000 en 8 meses; se compromete a cumplir con esta deudas mediante dos pagos iguales en 6 meses y un año respectivamente; cuál será el valor de estos pagos considerando que el dinero rinde al 8%; tome como fecha focal en un año.



Ecuación de valor:

Deudas = Pagos

$$M_1 + M_2 = M_3 + X$$

$$C(1 + rt) + C(1 + rt) = C(1 + rt) + X$$

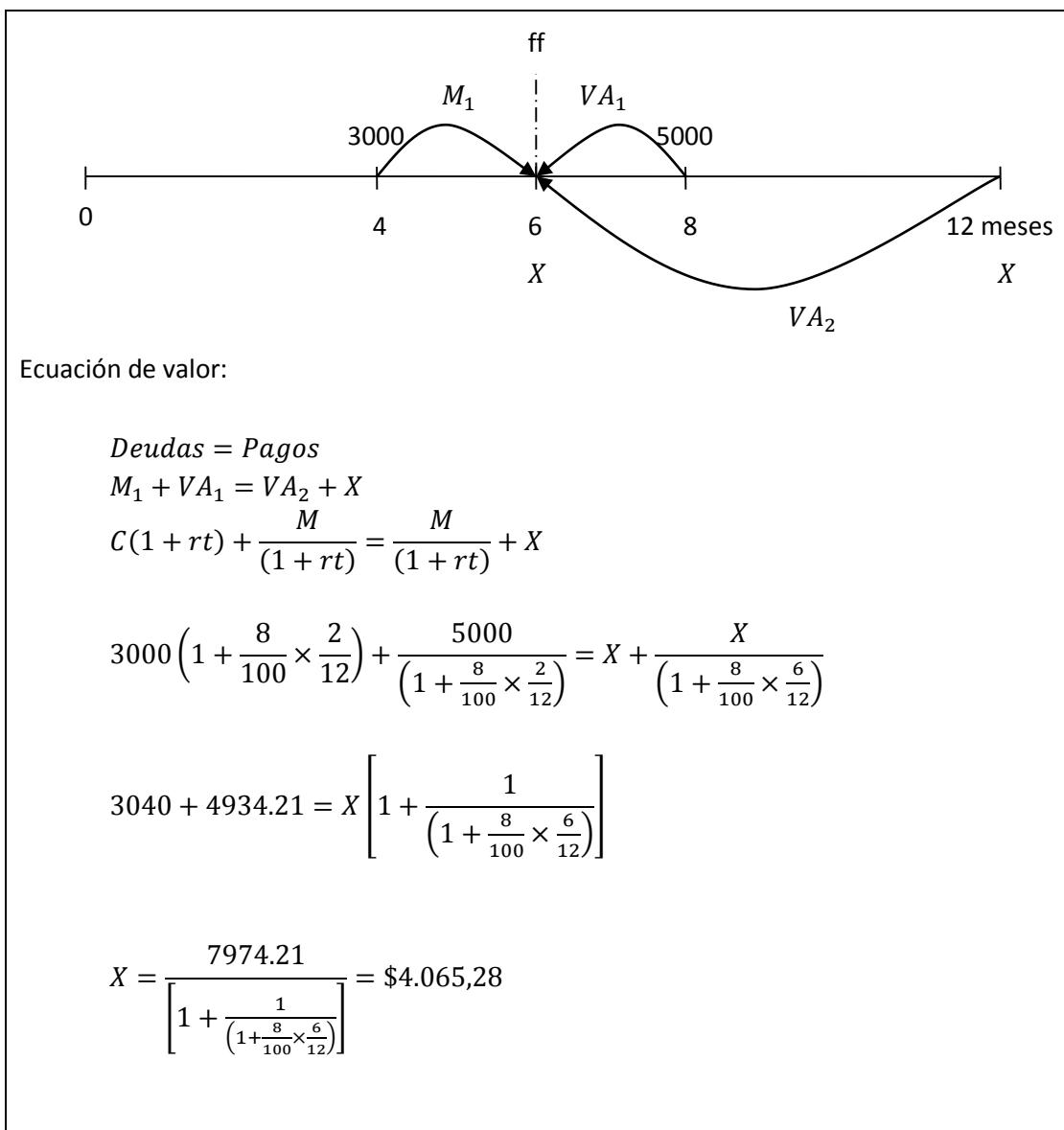
$$3000 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{8}{12}\right) + 5000 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{4}{12}\right) = X \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right) + X$$

$$3160 + 5133.33 = X \left[\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right) + 1 \right]$$

$$8293.33 = X \left[\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right) + 1 \right]$$

$$X = \frac{8293.33}{\left[\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right) + 1 \right]} = \$4.065,.36$$

18. Repita el ejercicio anterior considerando como fecha focal en 6 meses.

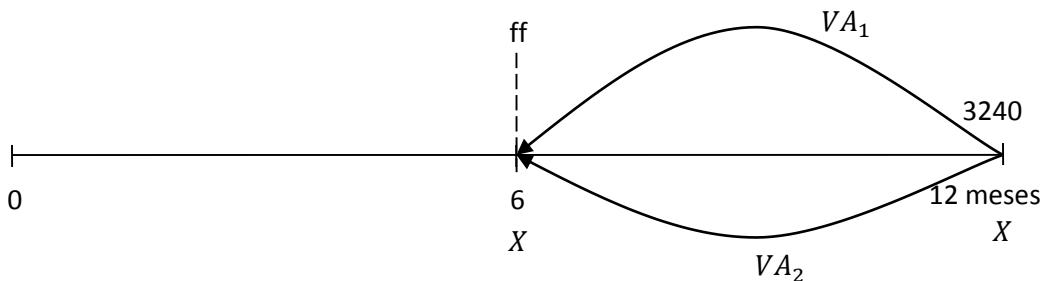


Los resultados obtenidos en los ejercicios 16 y 17 no son iguales debido a la variación en la Fecha Focal; cuando se trata de Interés Simple no existe periodicidad en la capitalización de intereses; más adelante, en el estudio del Interés Compuesto, la ubicación de la Fecha Focal es indiferente.

19. Una deuda de \$ 3000 adquirida el día de hoy, a un año plazo, con una tasa de interés de 8% va a cubrirse mediante dos pagos iguales en 6 meses y un año respectivamente; hallar el valor de dichos pagos si se toma una tasa de interés del 6.3% y como fecha focal a) en seis meses, b) en un año.

	$M = C(1 + rt)$ $M = 3000 \left(1 + \frac{8}{100} \times 1\right)$ $M = \$3.240,00$
--	---

a. Fecha focal en 6 meses



Ecuación de valor:

$$\text{Deuda} = \text{Pagos}$$

$$VA_1 = X + VA_2$$

$$\frac{M}{(1 + rt)} = X + \frac{M}{(1 + rt)}$$

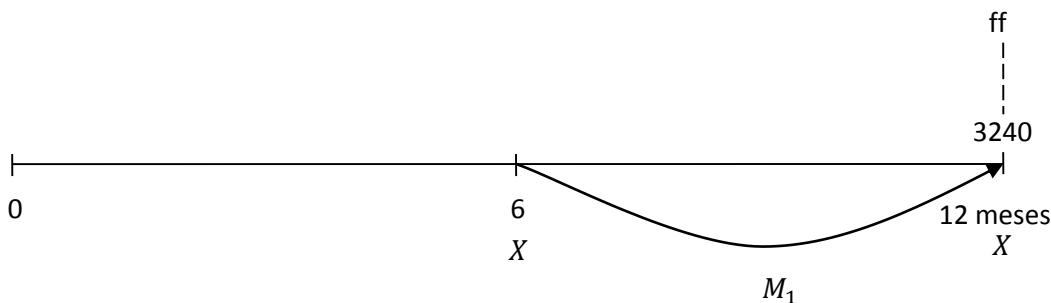
$$\frac{3240}{\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12}\right)} = X + \frac{X}{\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12}\right)}$$

$$3141,06 = X \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12}\right)} \right]$$

$$X = \frac{3141.06}{\left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12}\right)} \right]}$$

$$X = \$1.594,88$$

b. fecha focal en un año:



Ecuación de valor:

$$\text{Deuda} = \text{Pagos}$$

$$3240 = M_1 + X$$

$$3240 = C(1 + rt) + X$$

$$3240 = X \left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right) + X$$

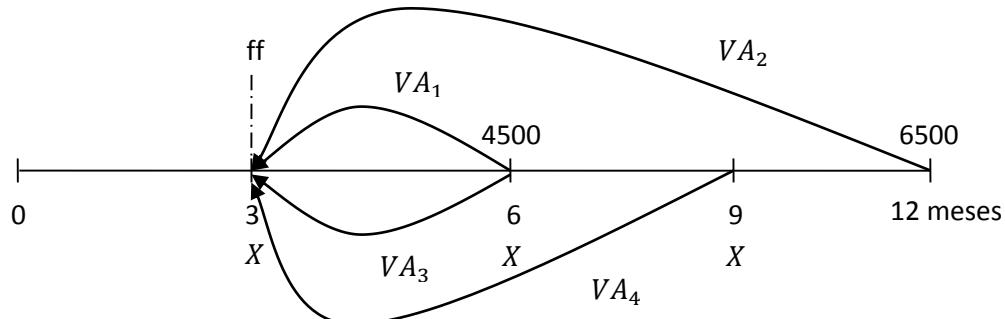
$$3240 = X \left[\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right) + 1 \right]$$

$$X = \frac{3240}{\left[\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right) + 1 \right]}$$

$$X = \$1.594,88$$

20. La compañía XYZ debe pagar en 6 meses una deuda de \$ 4500 y \$ 6500 en un año; va a cubrir mediante tres pagos iguales realizados en 3, 6 y 9 meses respectivamente; encuentre el valor de estos pagos tomando como tasa de interés el 10% y como fecha focal: a) en tres meses, b) en 6 meses, c) en un año.

a. Fecha focal en 3 meses:



Ecuación de valor:

$$\text{Deudas} = \text{Pagos}$$

$$VA_1 + VA_2 = X + VA_3 + VA_4$$

$$\frac{M}{(1+rt)} + \frac{M}{(1+rt)} = X + \frac{M}{(1+rt)} + \frac{M}{(1+rt)}$$

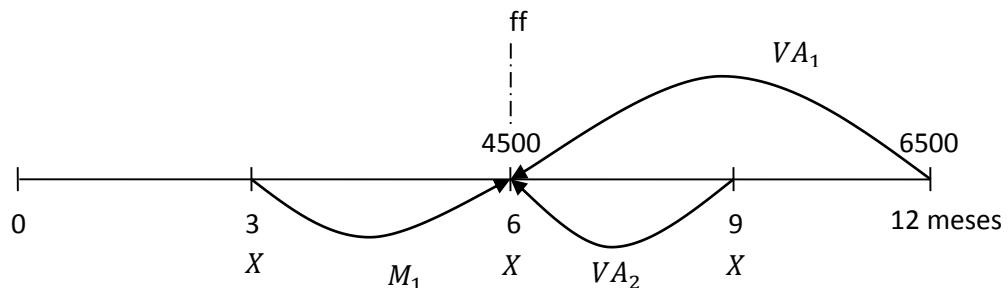
$$\frac{4500}{\left(1+\frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} + \frac{6500}{\left(1+\frac{10}{100} \times \frac{9}{12}\right)} = X + \frac{X}{\left(1+\frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} + \frac{X}{\left(1+\frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right)}$$

$$4390.24 + 6046.51 = X \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right)} \right]$$

$$X = \frac{10436.75}{\left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right)} \right]}$$

$$X = \$3.564,48$$

b. Fecha focal en 6 meses:



Ecuación de valor:

$$\text{Deudas} = \text{Pagos}$$

$$4500 + VA_1 = M_1 + X + VA_2$$

$$4500 + \frac{M}{(1+rt)} = C(1+rt) + X + \frac{M}{(1+rt)}$$

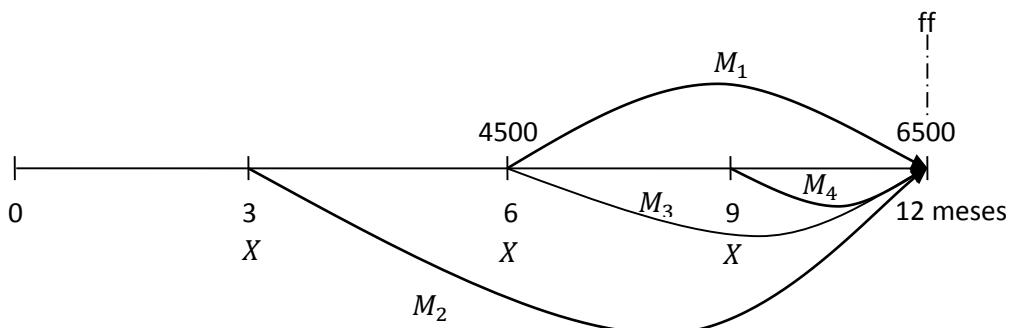
$$4500 + \frac{6500}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right)} = X \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) + X + \frac{X}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)}$$

$$4500 + 6.190,48 = X \left[\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) + 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} \right]$$

$$X = \frac{10.690,48}{\left[\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) + 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} \right]}$$

$$X = \$3.562,72$$

c. Fecha focal en 1 año:



Ecuación de valor:

$$\text{Deudas} = \text{Pagos}$$

$$M_1 + 6500 = M_2 + M_3 + M_4$$

$$C(1 + rt) + 6500 = C(1 + rt) + C(1 + rt) + C(1 + rt)$$

$$\begin{aligned} 4500 \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right) + 6500 \\ = X \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{9}{12}\right) + X \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right) + X \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) \end{aligned}$$

$$4725 + 6500 = X \left[\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{9}{12}\right) + \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right) + \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) \right]$$

$$X = \frac{11225}{\left[\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{9}{12}\right) + \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right) + \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) \right]}$$

$$X = \$3.563,49$$

2.10. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el interés simple, al 4%: a) Sobre un documento de \$14200, fechado el 14 de enero de 2010, con vencimiento el 28 de agosto de 2010., b) Sobre un documento de \$ 4500 a seis meses.

R: a) \$ 356,58; b) \$ 90,00

2. Determine: a) Qué capital produce en 9 meses \$ 650 a una tasa del 12% anual?, b)Qué capital produce \$ 450 desde el 15 de mayo al 8 de octubre del mismo año a una tasa del 5% anual?

R: a) \$ 7.222,22; b) \$ 22.191,78

3. Determine: a) El tiempo, expresado en días, para que un capital de \$ 4500 a interés simple al 2% produce una ganancia de \$420, b) En qué tiempo, expresado en meses, un capital crece el 15%, si la tasa de interés es del 6%?

R: a) 1680 días; b) 30 meses.

4. Determine: a) A que tasa de interés simple anual un capital de \$ 3200 produce \$ 450 de interés en 9 meses?, b) Determinar la tasa de interés a la que fue pactada una deuda de \$ 1750 si en 186 días el interés es \$ 275.

R: a) 18,75%; b) 30,41%

5. Hallar el monto de: a) Una inversión de \$4000 a interés simple durante 9 meses con una tasa del 8% anual, b) Una deuda de \$ 7400 a interés simple desde el 18 de mayo al 30 de diciembre mismo año, considerando el 5% de interés simple

R: a) \$ 4.240,00 b) \$ 7.632,28

6. Determinar el Monto que se obtienen al invertir \$ 4500 a interés simple durante 4 meses, si la tasa de interés es del 8%.

R: \$ 4.620,00

7. Determinar la fecha de vencimiento y el valor al vencimiento o Monto de los siguientes pagarés:

Pagaré	Valor Nominal	Fecha de Emisión	Plazo (días)	Tasa de interés
A	1800	12 mar-11	90	6%
B	2530	18-abr-11	180	4 %
C	3582	26-dic-11	270	3.5 %

R: a) 10-jun-11, \$ 1.827,00; b) 15-oct-11, \$ 2.580,60, c) 21-sep-12, \$ 3.676,03

8. Juan debe a Luis \$13000 pagaderos en 6 meses; al 10% de interés simple, Cuánto recibiría Luis si Juan saldara su deuda: a) El día de hoy, b) Dentro de 3 meses, c) Al final del año.

R: a) \$ 12.380,95; b) \$ 12.682,93; c) \$ 13.650,00

9. Una persona debe \$ 10000 para pagar en un año con intereses al 7.5%. Conviene pagar \$ 2500 al final de seis meses. Qué cantidad tendrá que pagar al final del año para liquidar la deuda suponiendo un rendimiento del 8.5%. Tomar como fecha focal al final del año.

R: \$ 8.143,75

10. Se obtiene un préstamo de \$ 8500 a un año con interés al 7.15%. Qué cantidad tendrá que pagar como liquidación del préstamo 6 meses después, suponiendo un rendimiento del 5.25%.

R: \$ 8.874,79

11. Cual oferta debe aceptar el vendedor de una computadora:

- a. \$ 350 de entrada, \$ 400 al final de 3 meses y \$ 250 al final de 6 meses.
- b. \$ 200 de entrada, \$ 500 al final de 3 meses y \$ 300 al final de 6 meses.

Considere un rendimiento del 12% de interés simple.

R: Oferta A: \$ 974,20; Oferta B: 968,46; Oferta A

12. Un comerciante adquiere artículos para su negocio por un valor de \$ 8600 pagando de contado el 30% y el resto con financiamiento directo del proveedor; dos meses más tarde realiza un pago de \$ 2000 quedando en saldar la deuda mediante un pago final después de 6 meses. Encontrar el valor del pago final considerando que el dinero se financia al 7%.

R: \$ 4.184,03

13. Un empresario adquiere una deuda de \$ 7500 para pagarse en 10 meses con interés del 8%; tres meses más tarde se realiza un abono de \$ 3000 quedando en saldar la deuda mediante un pago final en 2 meses antes del vencimiento; encontrar el valor del pago final considerando para la liquidación una tasa del 8.25%. Tómese como fecha focal en 8 meses.

R: \$ 4.788,37

14. Se adquiere una deuda de \$ 70000 el día de hoy, si se realiza un pago de \$ 30000 dentro de 2 meses y se compromete a cancelar la deuda mediante dos pagos iguales a 4 y 6 meses respectivamente, Cuál debe ser el valor de dichos pagos si se considera un rendimiento del dinero del 11%. Tomar como fecha focal en 6 meses.

R: \$ 21.180,44

15. Esteban solicita un préstamo de \$ 1500 a pagar en 3 meses con un interés del 10%; otro préstamo de \$ 5000 a pagar en 10 meses con un interés del 9%. En común acuerdo con los acreedores se va a liquidar las deudas mediante un pago único en 5 meses; hallar el valor del pago único si en la liquidación se aplica una tasa del 9.5%. Tomar como fecha focal en cinco meses.

R: \$ 6.732,18

16. Una empresa debe \$ 5000 con vencimiento en 3 meses, \$ 2000 con vencimiento en 6 meses y \$ 4800 con vencimiento en 9 meses; desea liquidar sus deudas mediante dos pagos iguales con vencimiento en 6 meses y 12 meses respectivamente. Determinar el importe de cada pago suponiendo para la liquidación un rendimiento del 6% y tomando como fecha focal la fecha de un año.

R: \$5.988,67

17. Una persona compró un automóvil usado en \$ 6000 el día 1 de junio, pagando \$ 2500 al contado y comprometiéndose a pagar un interés del 10% sobre el saldo. Si el 15 de agosto paga \$ 1000, ¿Qué cantidad debería desembolsar el 30 de noviembre para liquidar la deuda?; tomar como fecha focal el 30 de noviembre.

R: \$ 2.647,22

18. Una compañía tiene tres cuentas por pagar: \$ 1800 en 3 meses, \$ 2500 en 6 meses y \$ 3500 en un año. Cuál debe ser el valor del pago único inmediato mediante el cual la compañía cancele todas sus deudas, considerando una tasa del 8.5%?

R: \$ 7.386,43

19. Un prestamista adquiere el día de hoy a una compañía dos pagares: uno por \$ 7500 al 10% con vencimiento en 100 días y otro por \$ 4500 al 8% con vencimiento en tres meses. Qué valor deberá entregar a la compañía si se aplica una tasa del 9%?

R: \$ 12.009,32

20. Lorena adquiere un préstamo de \$ 10000 a pagar en un año al 7%; más tarde negocia con el Banco a pagar esta deuda mediante tres pagos iguales a realizarse en tres, cinco y ocho meses respectivamente; encuentre el valor de dichos pagos si en la negociación se acuerda en una tasa del 8%; tómese como fecha focal al final del año.

R: \$ 3.414,89

3

DESCUENTO SIMPLE Y AMORTIZACIÓN SIMPLE**3.1. DESCUENTO RACIONAL**

Dentro del mundo financiero se denomina Descuento Racional a la diferencia que existe entre el Monto y el Valor Actual de una inversión cuando ésta se adelanta a la fecha de vencimiento; a este descuento se lo conoce también como Descuento Matemático, es decir:

$$\text{Descuento racional} = \text{Monto} - \text{Valor actual}$$

Representando con ***Dr*** al Descuento Racional, se tiene:

$$Dr = M - VA$$

Recordando que el Valor Actual ***VA*** en el Interés simple está dado por:

$$VA = \frac{M}{1 + rt}$$

Remplazando en la expresión del descuento racional, se tiene:

$$Dr = M - \frac{M}{1 + rt}$$

Que es igual a:

$$Dr = M \left(1 - \frac{1}{1 + rt} \right)$$

3.2. DESCUENTO BANCARIO O DESCUENTO SIMPLE

Es el cobro por adelantado de los intereses de un préstamo a interés simple, este valor se denomina también Descuento bancario (***Db***); se lo define como el producto del Monto por la tasa de descuento y por el tiempo o plazo que dura la transacción, es decir:

$$Db = Mdt$$

Donde:

Db: Descuento Bancario.

M: Monto de la transacción.

t: Tiempo o plazo de la deuda.

d: Tasa de descuento.

En el mundo financiero, muy pocas veces se utiliza el Descuento Racional, en la mayoría de los casos se trabaja con el Descuento Bancario (AYRES Jr, 1998).

3.3. VALOR DESCONTADO

Cuando a un préstamo se le aplica el pago de intereses por adelantado, la cantidad que recibe el prestatario es un valor menor al monto solicitado al prestamista; este valor se lo conoce como Valor Descontado (**Vd**).

Al Valor Descontado se lo define como la diferencia entre el Monto solicitado y el Descuento Bancario correspondiente, es decir:

$$\text{Valor descontado} = \text{Monto} - \text{Descuento bancario}$$

Matemáticamente, este Valor Descontado, representado por **Vd**, es igual a:

$$\begin{aligned} Vd &= M - Db \\ Vd &= M - Mdt \\ \mathbf{Vd} &= \mathbf{M(1 - dt)} \end{aligned}$$

3.4. APLICACIÓN DEL DESCUENTO BANCARIO EN DOCUMENTOS FINANCIEROS

Los documentos financieros, tales como los pagarés pueden ser negociados o vendidos varias veces antes de su fecha de vencimiento, en cada una de estas negociaciones los involucrados, (comprador y vendedor), se ponen de acuerdo en la tasa de descuento correspondiente, es obvio suponer que el valor que resulte de la negociación del documento financiero será siempre menor al valor al vencimiento de dicho documento.

3.5. RELACIÓN ENTRE LA TASA DE DESCUENTO Y LA TASA DE INTERÉS SIMPLE

De las definiciones anteriores se puede indicar que el Valor Actual de una transacción a Interés Simple está en función de la tasa de Interés (**r**) y que el Descuento Bancario está en función de la tasa de descuento (**d**).

Asumiendo que el Valor Descontado es igual al Valor Actual de la transacción, se puede establecer expresiones de cálculo que permite determinar la relación existente entre la tasa de interés y la tasa de descuento bancario. (MORA Zambrano, 2010)

Expresado matemáticamente:

$$Vd = VA$$

$$M(1 - dt) = \frac{M}{1 + rt}$$

Eliminando **M** en cada miembro de esta ecuación queda:

$$1 - dt = \frac{1}{1 + rt}$$

De esta expresión se va ahora a despejar la tasa de descuento (**d**) y luego la tasa de interés (**r**) estableciéndose la relación existente entre la tasa de descuento en función de la tasa de interés y viceversa, es decir la tasa de interés en función de la tasa de descuento.

Despejando d se tiene:	Despejando r se tiene:
$1 - \frac{1}{1 + rt} = dt$ $dt = \frac{1 + rt - 1}{1 + rt}$ $dt = \frac{rt}{1 + rt}$ $d = \frac{r}{1 + rt}$	$1 + rt = \frac{1}{1 - dt}$ $rt = \frac{1}{1 - dt} - 1$ $rt = \frac{1 - 1 + dt}{1 - dt}$ $rt = \frac{dt}{1 - dt}$ $r = \frac{d}{1 - dt}$

3.6. AMORTIZACIÓN SIMPLE

Amortizar es el proceso financiero que consiste en cancelar una deuda y sus intereses mediante pagos periódicos; cuando el número de pagos es relativamente corto, el problema se resuelve considerando dos métodos de cálculo, el primero de ellos con pagos iguales (Método Lagarto) y el segundo con agos variables, conocido como Método de Saldos Deudores. (<http://csh.itz.uam.mx/cursos/gerardo/uam/matefin/amortización.pdf>, 2015).

3.6.1. AMORTIZACIÓN CON PAGOS IGUALES

En este método conocido también como Método Lagarto, los pagos conocidos como Abonos tienen el mismo valor; este abono se determina de la siguiente manera:

$$Abono = Capital\ parcial + Interés\ parcial$$

Si la deuda se va a cumplir mediante n pagos periódicos iguales por un tiempo t se tiene:

$$A = \frac{C}{n} + \frac{Crt}{n}$$

Finalmente el Abono parcial, igual para todos los períodos, está dado por:

$$A = \frac{C}{n}(1 + rt)$$

3.6.2. MÉTODO DE SALDOS DEUDORES

En este método los pagos son variables, con variación uniforme y decreciente, esto se debe a que el pago realizado disminuye el capital y por ende el valor del interés del siguiente período.

Sea:

C : el capital o valor del préstamo;

n : número de pagos para cubrir la deuda.

r : tasa de interés simple de la transacción.

Al igual que en el método anterior, en cada uno de los pagos se cubrirá la parte proporcional al capital junto con los intereses, en este caso, sobre el saldo deudor, es decir:

$$A_j = A_0 + I_j \quad j: 1, 2, 3, \dots, n$$

La parte proporcional A_0 se determina con la expresión:

$$A_0 = \frac{C}{n}$$

El interés sobre el Saldo Insoluto antes del Pago (*SIAP*), en cada período, se determina de la siguiente manera:

$$I_j = [SIAP_j] \times \frac{r}{n} \quad j: 1, 2, 3, \dots, n$$

Entonces, la expresión que determina el pago periódico por el método de Saldos deudores es:

$$A_j = A_0 + [SIAP_j] \times \frac{r}{n} \quad j: 1, 2, 3, \dots, n$$

3.6.3. TABLA DE AMORTIZACIÓN

La tabla de amortización es un registro cronológico de como la deuda se va extinguriendo, desde su inicio hasta el final de la misma; en esta tabla se refleja:

- ✓ El número de períodos: 1, 2, 3, ... n
- ✓ El Saldo Insoluto Antes del Pago (*SIAP*).
- ✓ El pago fijo (A_0).
- ✓ El interés sobre el saldo (I_j) para cada uno de los períodos.
- ✓ El valor del pago (A_j) realizado en cada uno de los períodos.
- ✓ El Saldo Insoluto Despues del Pago (*SIDP*).

PERÍODO	SIAP	A_0	I_j	A_j	SIDP
1	C				
2					
...					
n					0

Para llenar las celdas de la tabla debe empezarse desde el primer renglón y desarrollarlo en sentido horizontal, tomando en cuenta:

- *SIAP*: Saldo insoluto antes del pago.

Para el primer período es el valor de la deuda C ; para los demás períodos se tiene:

$$SIAP_j = SIDP_{j-1}$$

- A_0 : Pago fijo.

El pago fijo A_0 , igual para todos los períodos, se lo determina dividiendo el valor de la deuda para el número de períodos, es decir:

$$A_0 = \frac{C}{n}$$

- I_j : Interés periódico.

El Interés periódico I_j se lo determina multiplicando el Saldo Insoluto Antes del Pago por la tasa de interés simple, es decir:

$$I_j = SIAP_j \times \frac{r}{n}$$

- $SIDP$: Saldo Insoluto Despues del Pago.

El Saldo Insoluto Despues del Pago, en cada uno de los períodos se obtiene restando del Saldo Insoluto Antes del Pago del valor del Pago fijo, es decir:

$$SIDP_j = SIAP_j - A_o$$

Luego del cálculo, el Saldo insoluto después del último pago deberá ser igual a cero, con lo cual la deuda queda extinguida.

Para la elaboración de la tabla se puede utilizar el programa de Hoja de cálculo Excel, como también, como se verá más adelante, la herramienta Buscar objetivo del mismo programa.

3.7. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentre el Descuento Racional de un documento cuyo valor al vencimiento es de \$2500 si se lo canceló cinco meses antes de su vencimiento con una tasa de interés del 6%.

	$Dr = M \left(1 - \frac{1}{1 + rt} \right)$ $Dr = 2500 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{5}{12}} \right)$ $Dr = \$ 60,98$
--	---

2. Un préstamo por \$ 2000 se cancela 60 días antes de su vencimiento; Encuentre el valor del descuento racional de la transacción tomando en cuenta una tasa del 8% para su liquidación.

	$Dr = M \left(1 - \frac{1}{1 + rt} \right)$ $Dr = 2000 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{8}{100} \times \frac{60}{360}} \right)$ $Dr = \$ 26,32$
--	---

3. Calcule, al día de hoy, el descuento bancario y el Valor descontado de los siguientes documentos:

- \$3800 por 44 días con una tasa de descuento del 8%
- \$4200 por 3 meses con una tasa de descuento del 10%

a.	b.
Datos: $M = 3800$ $t = 44 \text{ días}$ $d = 8\%$	Solución: $Db = Mdt$ $Db = 3800 \times \frac{8}{100} \times \frac{44}{360}$ $Db = \$ 37,16$

a.	b.
Datos: $M = 4200$ $t = 3 \text{ meses}$ $d = 10\%$	Solución: $Db = Mdt$ $Db = 4200 \times \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}$ $Db = \$ 105,00$

4. El 15 de enero se firma un pagaré por \$ 3500 que se vence el 27 de marzo del mismo año con una tasa de descuento del 9%. Encontrar el valor del descuento bancario y el valor descontado de dicho documento.

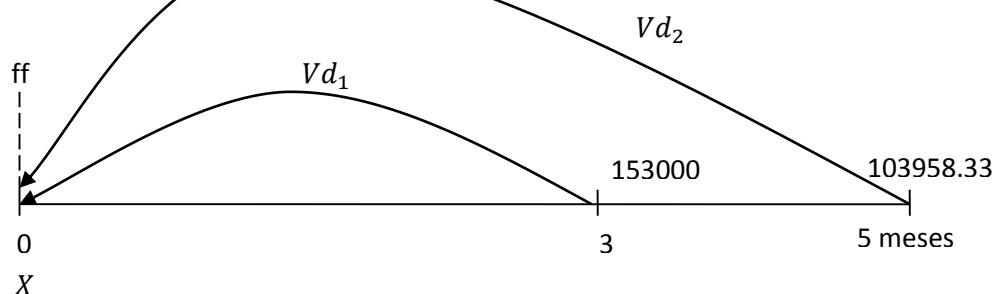
 15-ene (15) $t = 86 - 15 = 71 \text{ días}$	$Db = Mdt$ $Db = 3500 \times \frac{9}{100} \times \frac{71}{360}$ $Db = \$ 62.13$ $Vd = M - Db$ $Vd = 3500 - 62.13$ $Vd = \$ 3.437,87$
---	--

5. Un empresario recibe, como parte de pago por la venta de un vehículo, el día de hoy, un pagaré por \$ 2000 con vencimiento en tres meses con una tasa de interés simple del 9%. Un mes más tarde negocia este documento pagaré en una institución financiera que lo descuenta al 12%; encontrar el valor que entrega la institución financiera al empresario por la compra del pagaré.

 2000 0 1 3 meses	$M = C(1 + rt)$ $M = 2000 \left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{3}{12}\right)$ $M = \$ 2405$ $Vd = M(1 - dt)$ $Vd = 2405 \left(1 - \frac{12}{100} \times \frac{2}{12}\right)$ $Vd = \$ 2.004,10$
-----------------------------------	---

6. El día de hoy un banco compra los siguientes documentos financieros con una tasa de descuento del 10%: Un pagaré por \$ 150000 con vencimiento en tres meses al 8% de interés simple y un pagaré por \$ 100000 con vencimiento en 150 días al 9.5%. Determine el valor que el banco debe pagar por la compra de estos documentos.

Pagaré Nº 1	Pagaré Nº 2
$C = 150000$ $t = 3 \text{ meses}$ $r = 8\%$ $M = C(1 + rt)$ $M = 150000 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{3}{12}\right)$ $M = \$153000$	$C = 100000$ $t = 150 \text{ días}$ $r = 9.5\%$ $M = C(1 + rt)$ $M = 100000 \left(1 + \frac{9.5}{100} \times \frac{150}{360}\right)$ $M = \$103958.33$



Ecuación de Valor:

$$X = Vd_1 + Vd_2$$

$$X = M(1 - dt) + M(1 - dt)$$

$$X = 153000 \left(1 - \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) + 103958.33 \left(1 - \frac{10}{100} \times \frac{150}{360}\right)$$

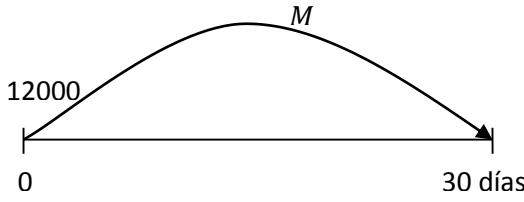
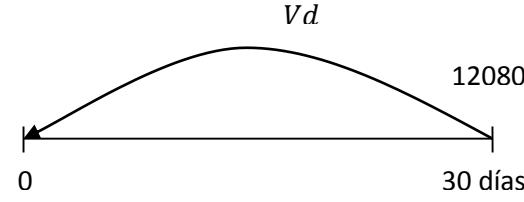
$$X = 149175 + 99626.73$$

$$X = \$ 248.801,73$$

7. Juan vende al Banco Comercial un pagaré por \$ 13500, 90 días antes de su vencimiento, el banco aplica una tasa de descuento del 4.25%; el mismo día, el Banco Comercial negocia el documento al Banco Federal con una tasa de descuento del 4%. Determine el valor que Banco Federal pagó al Banco Comercial por el pagaré de Juan y cuál fue la ganancia que obtuvo el Banco Comercial en esta transacción.

<p>Negociación con Juan:</p>	$VD = M(1 - dt)$ $VD = 13500 \left(1 - \frac{4.25}{100} \times \frac{90}{360}\right)$ $VD = \$ 13.356,56$
<p>Negociación con el Banco Federal:</p>	$VD = M(1 - dt)$ $VD = 13500 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{90}{360}\right)$ $VD = \$ 13.365,00$ Ganancia del Banco Comercial: \$ 8,44

8. Por la compra de un equipo médico se firma un pagaré por \$ 12000 a 30 días plazo con una tasa de interés del 8%. Si el tenedor del pagaré lo negocia ese mismo día en un banco que aplica una tasa de descuento del 7.5% determinar el valor descontado del pagaré.

Negociación (1): 	$M = C(1 + rt)$ $M = 12000 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{30}{360}\right)$ $M = \$ 12.080,00$
Negociación (2): 	$VD = M(1 - dt)$ $VD = 12080 \left(1 - \frac{7.5}{100} \times \frac{30}{360}\right)$ $VD = \$ 12.004,50$

9. Un banco desea ganar el 10.25 % de interés en la compra de documentos financieros, cuál debe ser la tasa de descuento si se compra documentos a: a) 30 días, b) 2 meses. c) 90días, d) 180 días.

a. 30 días	b. 2 meses	c. 90 días	d. 180 días
$d = \frac{r}{1 + rt}$ $d = \frac{\frac{10.25}{100}}{1 + \frac{10.25}{100} \times \frac{30}{360}}$ $d = 10,16\%$	$d = \frac{r}{1 + rt}$ $d = \frac{\frac{10.25}{100}}{1 + \frac{10.25}{100} \times \frac{2}{12}}$ $d = 10,08\%$	$d = \frac{r}{1 + rt}$ $d = \frac{\frac{10.25}{100}}{1 + \frac{10.25}{100} \times \frac{90}{360}}$ $d = 9,99\%$	$d = \frac{r}{1 + rt}$ $d = \frac{\frac{10.25}{100}}{1 + \frac{10.25}{100} \times \frac{180}{360}}$ $d = 9,75\%$

10. Cuál es la tasa de interés que obtiene como rédito una financiera en la compra de documentos si aplica una tasa de descuento del 8.15% en plazos de: a) 30 días. b) 2 meses, c) 90 días, d) 180 días.

a. 30 días	b. 2 meses	c. 90 días	d. 180 días
$r = \frac{d}{1 - dt}$ $r = \frac{\frac{8.15}{100}}{1 - \frac{8.15}{100} \times \frac{30}{360}}$ $r = 8,21\%$	$r = \frac{d}{1 - dt}$ $r = \frac{\frac{8.15}{100}}{1 - \frac{8.15}{100} \times \frac{2}{12}}$ $r = 8,26\%$	$r = \frac{d}{1 - dt}$ $r = \frac{\frac{8.15}{100}}{1 - \frac{8.15}{100} \times \frac{90}{360}}$ $r = 8,33\%$	$r = \frac{d}{1 - dt}$ $r = \frac{\frac{8.15}{100}}{1 - \frac{8.15}{100} \times \frac{180}{360}}$ $r = 8,50\%$

11. Se adquiere un electrodoméstico cuyo valor de contado es \$ 1200 el mismo que va a pagarse con un proceso de Amortización Simple por el método Lagarto durante 18 meses. Encuentre el valor del Abono mensual si se aplica una tasa de interés del 14%.

Datos: Valor de la deuda C = 1200 Plazo: t = 18 meses Rédito: 14%	$A = \frac{C}{n}(1 + rt)$ $A = \frac{1200}{18} \left(1 + \frac{14}{100} \times \frac{18}{12}\right) = \$ 80,67$
--	--

12. Desarrolle para el ejercicio anterior la tabla de amortización aplicando el método de Saldos Deudores.

Datos: Valor de la deuda C = 1200 Plazo: t = 18 meses Rédito: 14%	$A_o = \frac{C}{n} = \frac{1200}{18} = \$ 66,67$ $I_1 = SIAP \times \frac{r}{n} = 1200 \times \frac{14\%}{12} = \$ 14$
--	---

PERÍODO	SIAP	Ao	I_j	A_j	SIDP
1	1.200,00	66,67	14,00	80,67	1.133,33
2	1.133,33	66,67	13,22	79,89	1.066,67
3	1.066,67	66,67	12,44	79,11	1.000,00
4	1.000,00	66,67	11,67	78,33	933,33
5	933,33	66,67	10,89	77,56	866,67
6	866,67	66,67	10,11	76,78	800,00
7	800,00	66,67	9,33	76,00	733,33
8	733,33	66,67	8,56	75,22	666,67
9	666,67	66,67	7,78	74,44	600,00
10	600,00	66,67	7,00	73,67	533,33
11	533,33	66,67	6,22	72,89	466,67
12	466,67	66,67	5,44	72,11	400,00
13	400,00	66,67	4,67	71,33	333,33
14	333,33	66,67	3,89	70,56	266,67
15	266,67	66,67	3,11	69,78	200,00
16	200,00	66,67	2,33	69,00	133,33
17	133,33	66,67	1,56	68,22	66,67
18	66,67	66,67	0,78	67,44	-
$\Sigma =$		1.200,00	133,00	1.333,00	

13. Encuentre el valor del préstamo, mediante Amortización Simple, si se cubre mediante 24 cuotas mensuales de \$ 120, considerando una tasa del 10%.

Datos: Valor de la cuota A = 120 Plazo: t = 24 meses Rédito: 10%	$A = \frac{C}{n}(1 + rt)$ $C = \frac{A \times n}{(1 + rt)} = \frac{120 \times 24}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{24}{12}\right)} = \$ 2.400,00$
---	--

14. Desarrolle para el método de Saldos deudores para una deuda de \$ 2500 pagaderos mediante 12 cuotas mensuales con una tasa de interés simple del 8%

Datos: Valor de la deuda C = 2500 Plazo: t = 12 meses Rédito: 8%	$A_o = \frac{C}{n} = \frac{2500}{12} = \$ 208,33$ $I_1 = SIAP \times \frac{r}{n} = 2500 \times \frac{8\%}{12} = \$ 16,67$
---	---

PERÍODO	SIAP	Ao	I_j	A_j	SIDP
1	2.500,00	208,33	16,67	225,00	2.291,67
2	2.291,67	208,33	15,28	223,61	2.083,33
3	2.083,33	208,33	13,89	222,22	1.875,00
4	1.875,00	208,33	12,50	220,83	1.666,67
5	1.666,67	208,33	11,11	219,44	1.458,33
6	1.458,33	208,33	9,72	218,06	1.250,00
7	1.250,00	208,33	8,33	216,67	1.041,67
8	1.041,67	208,33	6,94	215,28	833,33
9	833,33	208,33	5,56	213,89	625,00
10	625,00	208,33	4,17	212,50	416,67
11	416,67	208,33	2,78	211,11	208,33
12	208,33	208,33	1,39	209,72	-
$\Sigma =$		2.500,00	108,33	2.608,33	

3.8. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el valor al día de hoy, del descuento realizado a un documento por \$ 1500 a 210 días, si se considera: a) 6,35 % de interés simple b) 6,35 % de descuento simple.

R: a) \$ 53,58; b) \$ 55,56

2. Un documento por \$ 1600 establece 5,2% de interés simple por 120 días. Si este documento se descuenta 30 días antes del vencimiento para obtener 4,3% de interés simple, cuál es el descuento racional?

R: \$ 5,81

3. Determinar el descuento bancario y el valor descontado de un capital de \$ 1450, 30 días antes de su vencimiento al 10,5 % de descuento simple.

R: \$ 12,69; \$ 1.437,31

4. Un pagaré a 6 meses por \$ 2400 dólares, con interés al 5%, es vendido a un banco ochenta días antes de su vencimiento el cual aplica el 6% de descuento bancario. Hallar el importe de la operación.

R: \$ 2.427,20

5. Un banco carga el 6.5% de descuento simple en préstamos a corto plazo. Determinar la cantidad recibida por una persona que solicita \$ 8000 del 1 de junio al 18 de noviembre del mismo año.

R: \$ 7.754,44

6. El 30 de marzo del 2006 se firma un pagaré por \$ 12500 a 180 días plazo, con una tasa de interés del 7.53%. El 28 de junio del mismo año, el tenedor del documento lo negocia en un banco que aplica una tasa de descuento del 8.45%, determinar el valor del documento que recibe el tenedor del mismo.

R: \$ 12.696,62

7. Una empresa posee dos pagarés: el primero por \$ 14500 emitido el 24 de abril al 8.5% de interés con vencimiento en 90 días; y el segundo por \$ 25600 emitido el 13 de abril al 8.2 % de interés con vencimiento en 100 días. El 18 de junio del mismo año negocia estos dos documentos en un banco que descuenta el 10.23 %, cuánto recibe la empresa dueña de estos pagarés?

R: \$ 40.590,98

8. Una compañía comercial dispone de tres pagarés con las siguientes características: \$30000 con vencimiento el 18 de abril; \$ 25000 con vencimiento el 15 de mayo y \$ 50000 con vencimiento el 30 de junio. El 3 de marzo vende estos documentos con una tasa del 9,15 %. Cuál es el valor descontado total que recibe por la venta de estos documentos?

R: \$ 102.673,10

9. Un banco desea ganar el 12,25 % de interés en la compra de documentos financieros, cuál debe ser la tasa de descuento si se compra documentos a: a) 30 días, b) 2 meses, c) 90 días.

R: a) 12.13%; b) 12.00%; c) 11.89%

10. Cuál es la tasa de interés que aplica una financiera en la compra de documentos si en esta operación considera una tasa de descuento del 6,35% en plazos de: a) 20 días. b) 3 meses, c) 100 días.

R: a) 6,37%; b) 6,45%; c) 6,46%

11. Cuál es el valor de contado de una máquina de coser si se la vendió a plazos por el Método de Amortización Simple y se va a cubrir con 12 abonos mensuales de \$ 75,80 aplicando una tasa del 9%.

R: \$ 834,50

12. Aplicando el método Lagarto, encuentre el valor del Abono mensual durante 6 meses en una compra a plazos por mercadería cuyo valor de contado es de \$ 15000 si se aplica una tasa del 8%.

R: \$ 2.600,00

13. Aplicando el método de Saldos deudores, resuelva el ejercicio anterior y desarrolle la tabla de amortización hasta la extención de la dueda; compruebe que el valor de la primera cuota es igual a la obtenida con el método del lagarto.
14. El día de hoy se compra, mediante un crédito a interés simple, un computador cuyo valor de contado es \$ 1350 con el 25% de cuota inicial y el resto a pagarse en 12 cuotas mensuales con una tasa de interés del 9%. Desarrollando el método de Saldos deudores encuentre el valor de las cuotas mensuales y elabore la tabla de amortización para todos los pagos.

R: \$ 91,97

4

INTERÉS COMPUESTO**4.1. INTRODUCCIÓN**

El Interés Compuesto, es una modalidad financiera que acumula al capital el interés generado en un período de tiempo; formando de esta manera, en cada período, un nuevo capital y sobre este valor se calcularán los intereses para el siguiente período.

Veamos un ejemplo:

Se invierte una suma de \$ 100 al 10% con capitalización anual durante 5 años, cuál será el monto que se obtiene?

- Al final del primer año, el capital de \$ 100 genera interés del 10%, es decir: \$ 10 este valor se suma al capital, obteniéndose ahora que el capital es \$100 + \$ 10 = \$ 110.
- Al final del segundo año, el capital de \$ 110 genera ahora un interés del 10%, es decir: \$ 11, con lo que ahora el nuevo capital es \$ 110 + \$ 11 = \$ 121.
- Al final del tercer período, el capital de \$ 121 genera ahora un interés del 10%, es decir: \$ 12,10, con lo que ahora el nuevo capital es \$ 121 + \$ 12,10 = \$ 133,10.
- Al final del cuarto período, el capital de \$ 133,10 genera ahora un interés del 10 %, es decir: \$ 13,31, con lo que ahora el nuevo capital es \$ 133,10+ \$ 13,31 = \$ 146,41.
- Finalmente, al final del quinto año, el capital de \$ 146,41 genera ahora un interés del 10 %, es decir, \$ 14,64, con lo que ahora el nuevo capital es de \$ 146,41+ \$ 14,64 = \$ 161,05.

Se tendrá una apreciación más clara de este ejemplo, si los valores para cada período se los ubica en una tabla, tal como se indica:

Período	Capital	Interés Vencido	Nuevo Capital
1	100,00	10,00	110,00
2	110,00	11,00	121,00
3	121,00	12,10	133,10
4	133,10	13,31	146,41
5	146,41	14,61	161,05

En esta tabla se puede observar como el capital va creciendo cada vez que se suman los intereses; a este proceso de acumular los intereses al capital, se denomina en el mundo financiero como **Capitalización**.

Nótese además la diferencia conceptual entre el Interés Simple y el Interés Compuesto:

En el Interés Simple los intereses se calculaban una sola vez, al final del plazo de la inversión; en cambio en una transacción financiera a Interés Compuesto los intereses van sumándose periódicamente al capital.

A continuación se presenta un gráfico que registra la variación del Interés simple y del interés compuesto:

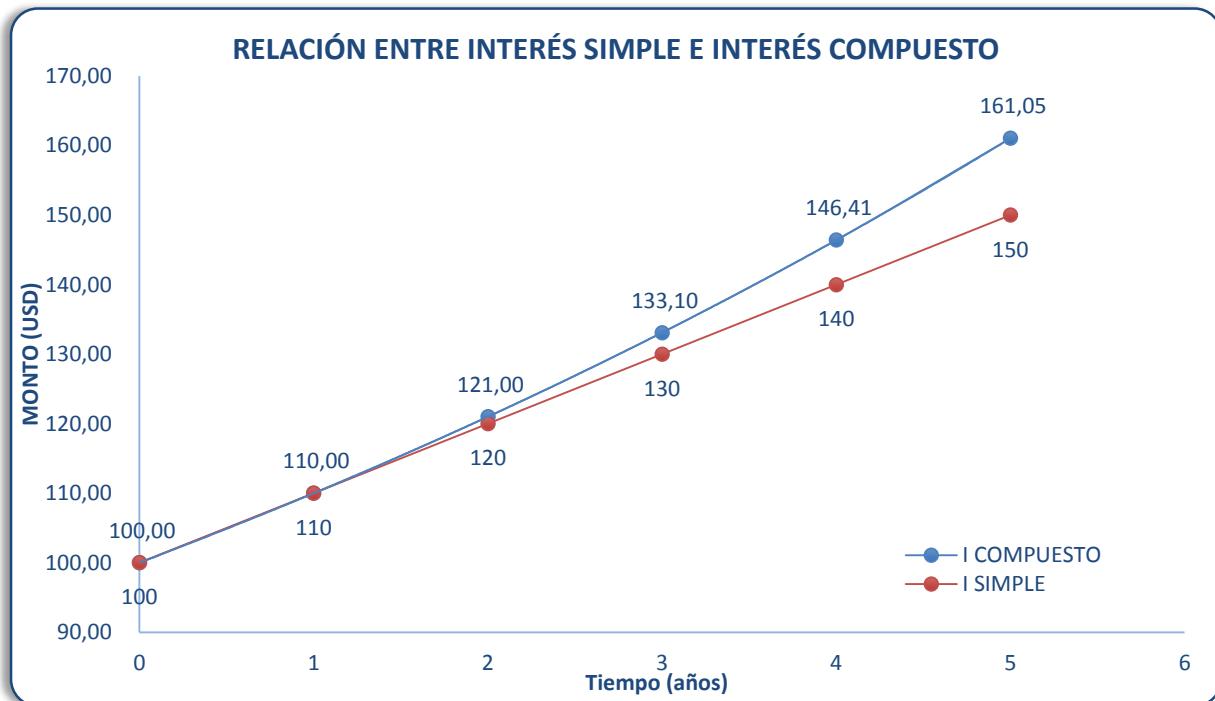


Figura N° 2

El gráfico obtenido presenta las siguientes características:

- ✓ El Monto varía con respecto al tiempo.
- ✓ Existe una relación lineal para el interés simple y una relación polinómica para el interés compuesto.
- ✓ Durante el primer año el valor del interés simple y el interés compuesto coinciden, a partir del segundo año, el monto del Interés compuesto crece en proporción geométrica a razón del 10% anual.

4.2. ELEMENTOS FINANCIEROS DEL INTERÉS COMPUUESTO.

Los siguientes son los elementos financieros, que intervienen en el cálculo del monto de una inversión a Interés Compuesto:

- ✓ Capital.
- ✓ Tasa nominal.
- ✓ Frecuencia de capitalización.
- ✓ Tiempo o plazo.
- ✓ Tasa por período.
- ✓ Número de períodos.

CAPITAL

El capital o principal, es el valor financiero en juego durante la inversión, al igual que en el Interés simple, se lo representa con (C).

TASA NOMINAL

Es el valor referencial que indica el costo por el uso del dinero ajeno, se expresa en porcentaje y va acompañada del período de conversión o capitalización de intereses; este valor se lo representa con (j) ejemplo:

- ❖ 5 % convertible semestralmente, quiere decir que los intereses se calcularán y se agregarán al capital cada semestre.
- ❖ 7 % capitalizable trimestralmente, quiere decir que cada trimestre, los intereses vencidos se sumarán al capital.
- ❖ 8 % capitalizable mensualmente, quiere decir que cada mes, los intereses deberán ser calculados y añadidos al capital; formándose, como en los casos anteriores, un nuevo capital.

En ciertas ocasiones, no se indica el período de capitalización, entonces, al igual que en el interés simple, se asume que la capitalización de intereses es anual, ejemplo:

- 4 %; quiere decir: que los intereses se capitalizarán anualmente.
- 7 %; quiere decir: que cada año los intereses se añadirán al capital.

FRECUENCIA DE CAPITALIZACIÓN

Se define a la Frecuencia de capitalización, al número de veces que los intereses se capitalizan en un año; la frecuencia de capitalización se lo representa con (m). A continuación se incluye una tabla con los valores comúnmente más usados:

Período de capitalización	Frecuencia de capitalización (m)
Anual	1
Semestral	2
Trimestral	4
Mensual	12

TIEMPO O PLAZO

Representado con (t), es la duración de la transacción a Interés Compuesto, comúnmente se expresa en años, sin embargo puede expresarse en semestres, trimestres, meses, etc. Puede presentarse también en forma combinada o finalmente la duración o plazo de la transacción a interés compuesto puede expresarse entre dos fechas.

El valor del tiempo debe trabajarse con mucho cuidado, ya que con este dato se podrá calcular el número de períodos de capitalización de los intereses.

Si se conoce la tasa nominal y el tiempo o plazo de la transacción, se pueden establecer la tasa por período y el número de capitalizaciones de la transacción.

TASA POR PERÍODO

Es el valor referencial de los intereses por período que se cargan al capital, esta tasa porcentual se calcula con la siguiente expresión:

$$\text{tasa periódica} = \frac{\text{tasa nominal} (\%)}{\text{frecuencia}}$$

Si a la tasa por período se representa con (*i*), entonces la expresión anterior puede escribirse como:

$$i = \frac{j(\%)}{m}$$

NÚMERO DE PERÍODOS

Se define al número de períodos, como el número de veces en que los intereses se suman al capital, es decir: se capitalizan; se puede calcular este valor aplicando la siguiente expresión:

$$\text{número de períodos} = \text{tiempo (en años)} \times \text{frecuencia}$$

Representando con (*n*) al número de períodos de capitalización la expresión anterior se puede escribir:

$$n = t \text{ (en años)} \times m$$

La fórmula anterior, se utiliza en muchas de las ocasiones; sin embargo, en algunos ejercicios, dicha expresión no es aplicable.

4.3. MONTO A INTERÉS COMPUUESTO

El monto a interés compuesto de una transacción financiera está dado por:

$$M = C(1 + i)^n$$

Donde **M** representa el Monto de la transacción a interés compuesto, **C** el capital o principal, **i** la tasa por período y **n** el número de capitalizaciones.

El lector podrá darse cuenta en forma inmediata, que para encontrar el monto de una transacción a interés compuesto es indispensable determinar previamente la tasa por período **i**, y el número de capitalizaciones **n**.

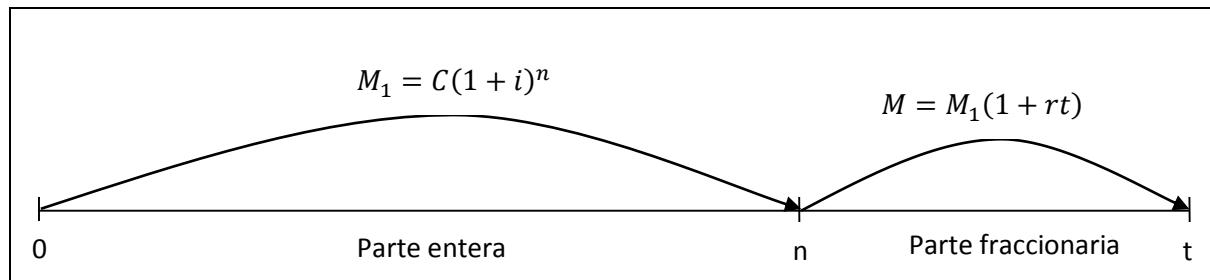
4.4. MONTO A INTERÉS COMPUUESTO SI EL NÚMERO DE PERÍODOS ES FRACCIONARIO

Hasta aquí, el valor **n**, que representa el número de capitalizaciones siempre ha sido un número entero; sin embargo, en algunas ocasiones esto no sucede. Para calcular el Monto a Interés Compuesto cuando el número de capitalizaciones es fraccionario, se puede realizarlo de dos maneras:

1. Calcular el Monto con el valor periódico fraccionario, conocido también como Método Exacto.
2. Aplicar la regla práctica o regla comercial.

La primera de estas formas casi no se utiliza, la regla práctica para el cálculo del Monto dice:

Se calcula el monto a Interés Compuesto para la parte entera (M_1), y sobre este valor, se calcula a Interés Simple para la parte fraccionaria restante. La parte entera es el número entero de períodos de capitalización que se puede obtener del tiempo o plazo de la transacción



4.5. VALOR ACTUAL DE UNA TRANSACCIÓN A INTERÉS COMPLEJO

Se define al Valor Actual, como el valor que toma la inversión, cuando se liquida en una fecha anterior al vencimiento; al Valor Actual se lo conoce como Capital, o Valor Presente de la transacción; entonces, el Valor actual, en función del Monto, la tasa por período y el número de períodos, está dado por:

$$VA = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

Donde el número de períodos está definido entre la fecha de liquidación y la fecha de vencimiento.

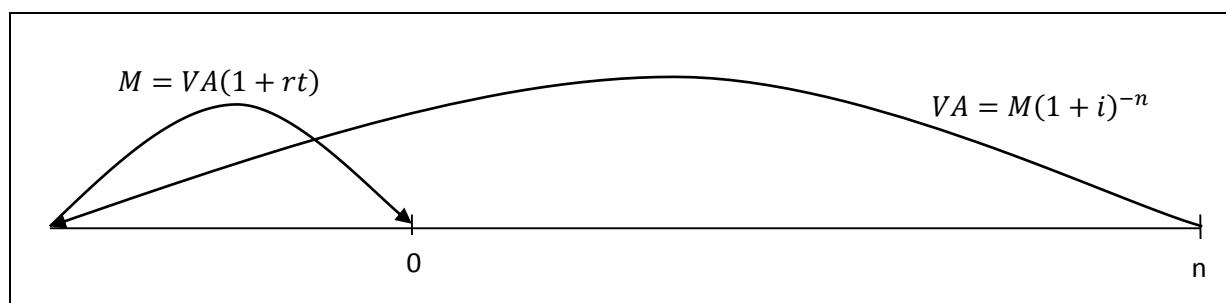
La fórmula anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$VA = M(1 + i)^{-n}$$

4.6. VALOR ACTUAL EN PERÍODOS FRACCIONARIOS

Cuando se requiere el Valor Actual de una transacción a Interés Compuesto con número de períodos fraccionario se aplica la siguiente regla práctica:

Se determina el Valor Actual a Interés Compuesto, para el número de períodos entero más próximo por exceso, luego, este valor se proyecta a interés simple, para el tiempo tomado como exceso.



4.7. CÁLCULO DEL NÚMERO DE PERÍODOS Y DEL TIEMPO

Para obtener el número de períodos y el tiempo que dura una transacción a Interés Compuesto, se debe despejar n de la fórmula general del Interés Compuesto; aplicando logaritmos se tiene:

$$M = C(1 + i)^n$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

$$\log\left(\frac{M}{C}\right) = \log(1 + i)^n$$

$$\log\left(\frac{M}{C}\right) = n \times \log(1 + i)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + i)}$$

Entonces, el tiempo está dado por:

$$t = \frac{n}{m}$$

4.8. CÁLCULO DE LA TASA PERIÓDICA A INTERÉS COMPUESTO

Para determinar la tasa por período y después la tasa nominal se puede despejar (i) de la fórmula general del monto a interés compuesto, entonces se tiene:

$M = C(1 + i)^n$	$\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = 1 + i$	Si a este valor (i) se multiplica por la frecuencia de capitalización (m), se obtiene la tasa nominal (j), de la transacción, es decir:
$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$	$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$	$j = i \times m$
$\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = \sqrt[n]{(1 + i)^n}$		

4.9. TASA EQUIVALENTE Y TASA EFECTIVA ANUAL

Se dice que dos tasas de interés, con diferentes períodos de conversión son equivalentes si producen el mismo interés compuesto al final de un año (AYRES Jr, 1998).

Se tiene una transacción a interés compuesto al que se le aplica una tasa nominal j que capitaliza con una frecuencia m , entonces; la tasa periódica i de esta transacción será:

$$i = \frac{j}{m}$$

Por otro lado, si se aplica una tasa nominal j' que capitaliza con una frecuencia m' , entonces; la tasa periódica i' de esta transacción será:

$$i' = \frac{j}{m'}$$

Asumiendo que, al final del año, las dos transacciones habrán alcanzado el mismo interés compuesto se tiene ahora:

$$(1 + i)^m = (1 + i')^{m'}$$

Despejando i' se obtiene:

$$(1 + i)^{\frac{m}{m'}} = (1 + i')^{\frac{m'}{m'}}$$

$$(1 + i)^{\frac{m}{m'}} = 1 + i'$$

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[(1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100$$

4.10. CAPITALIZACIÓN CONTINUA

Si la frecuencia de capitalización (m) crece sin límite, entonces el período de capitalización es un intervalo de tiempo cada vez más pequeño; en este caso se dice que los intereses capitalizan continuamente y que la tasa nominal (j) es una tasa instantánea (PORTUS Govinden, 1985).

Recordando que el Monto a Interés compuesto, en función de la tasa nominal (j) y la frecuencia de capitalización (m) está dado por:

$$M = C \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{t \times m}$$

Ahora haciendo

$$\frac{j}{m} = \frac{1}{\delta}$$

Se puede escribir el Monto de la siguiente manera:

$$M = C \left[\left(1 + \frac{1}{\delta} \right)^{\delta \times j} \right]^t$$

Si $\delta \rightarrow \infty$, entonces: $\left(1 + \frac{j}{\delta} \right)^\delta = 2.718281828182 \dots = e$ (base de los logartimos naturales)

Finalmente, el Monto en capitalización continua está dado:

$$M = C \times e^{jt}$$

La expresión obtenida permite calcular el Monto en capitalización continua durante un tiempo t (en años) a la tasa nominal, que se transforma en tasa instantánea, dada.

4.11. PROBLEMAS RESUELTOS

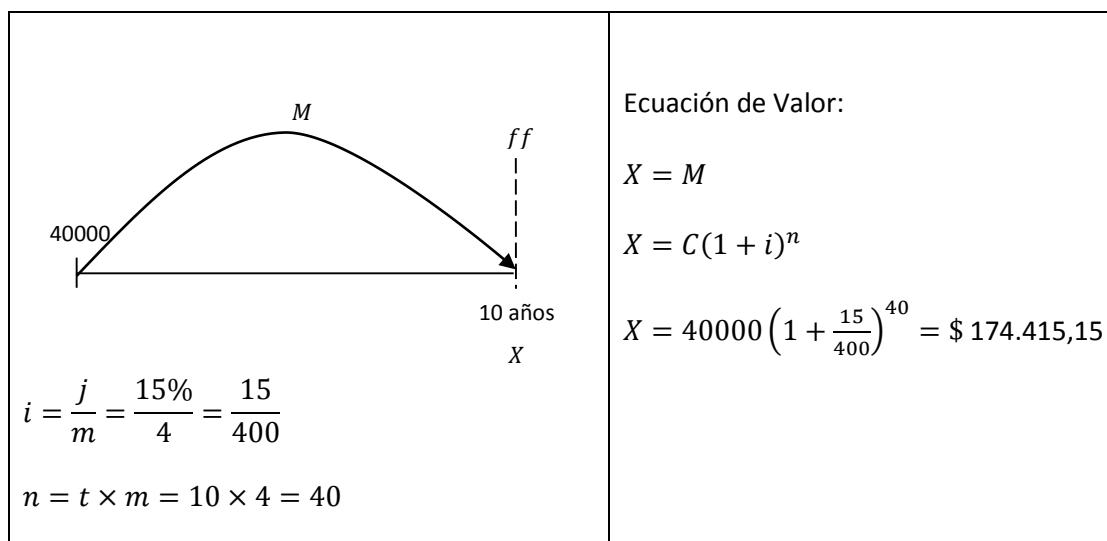
1. Con los datos registrados en la siguiente tabla, determine la tasa periódica (expresado en fracción) y el número de períodos:

Caso	Tasa nominal	Capitalización	Tiempo	Tasa periódica	Períodos
a)	6%	anual	5 años	$\frac{6}{100}$	5
b)	18 %	mensual	7 años	$\frac{18}{1200}$	84
c)	4%	trimestral	3 años	$\frac{4}{400}$	12
d)	12%	semestral	4 años	$\frac{12}{200}$	8

$$\text{Tasa periódica} = \frac{\text{Tasa nominal}}{\text{Frecuencia de capitalización}}$$

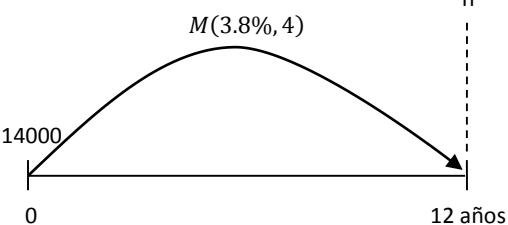
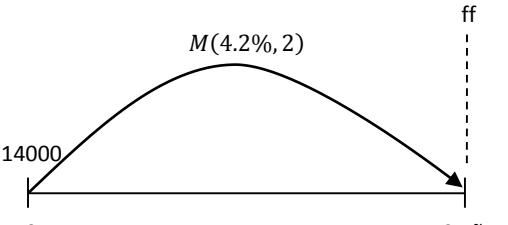
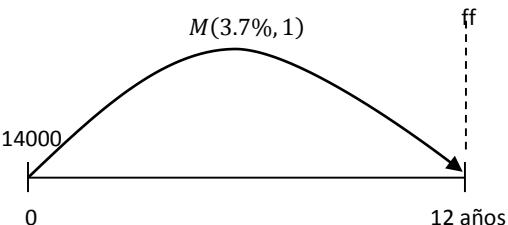
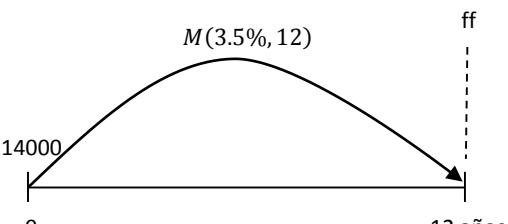
$$\text{Número de períodos} = \text{tiempo} \times \text{frecuencia de capitalización}$$

2. Una empresa obtiene un préstamo de \$ 40000 a 10 años plazo con una tasa de interés del 15% capitalizable trimestralmente. Calcular el monto que debe pagar a la fecha de vencimiento.



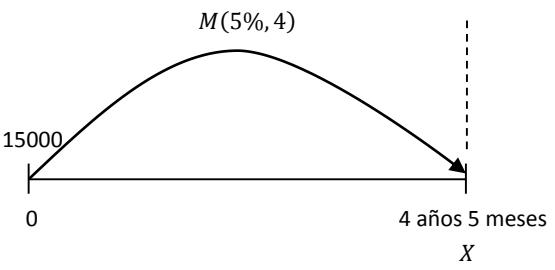
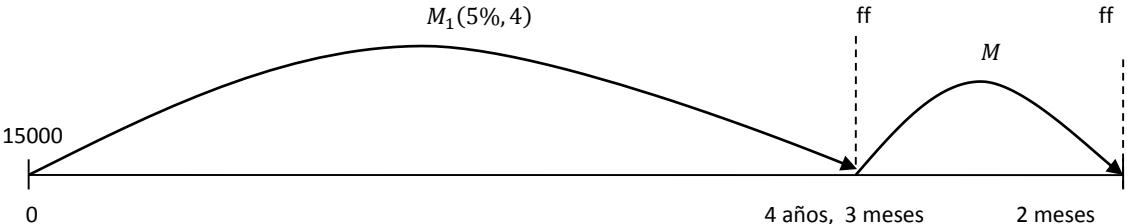
3. M colocó \$ 14000 en una cuenta de ahorro en un banco de las localidad. Cuánto tendrá la cuenta 12 años después si el banco le paga:

- 3.8% convertible trimestralmente.
- 4.2% convertible semestralmente.
- 3.7% efectivo anual.
- 3.5% convertible mensualmente.

<p>a. 3.8% convertible trimestralmente.</p>  $i = \frac{j}{m} = \frac{3.8\%}{4} = \frac{3.8}{400}; n = t \times m = 12 \times 4 = 48$	<p>Ecuación de Valor:</p> $X = M$ $X = C(1 + i)^n$ $X = 14000 \left(1 + \frac{3.8}{400}\right)^{48}$ $X = \$ 22.041,01$
<p>b. 4.2% convertible semestralmente.</p>  $i = \frac{j}{m} = \frac{4.2\%}{2} = \frac{4.2}{200}; n = t \times m = 12 \times 2 = 24$	<p>Ecuación de Valor:</p> $X = M$ $X = C(1 + i)^n$ $X = 14000 \left(1 + \frac{4.2}{200}\right)^{24}$ $X = \$ 23.053,98$
<p>c. 3.7% efectivo anual</p>  $i = \frac{j}{m} = \frac{3.7\%}{1} = \frac{3.7}{100}; n = t \times m = 12 \times 1 = 12$	<p>Ecuación de Valor:</p> $X = M$ $X = C(1 + i)^n$ $X = 14000 \left(1 + \frac{3.7}{100}\right)^{12}$ $X = \$ 21.650,76$
<p>d. 3.5% convertible mensualmente.</p>  $i = \frac{j}{m} = \frac{3.5\%}{12} = \frac{3.5}{1200}; n = t \times m = 12 \times 12 = 144$	<p>Ecuación de Valor:</p> $X = M$ $X = C(1 + i)^n$ $X = 14000 \left(1 + \frac{3.5}{1200}\right)^{144}$ $X = \$ 21.294,44$

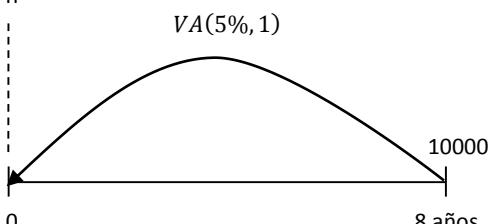
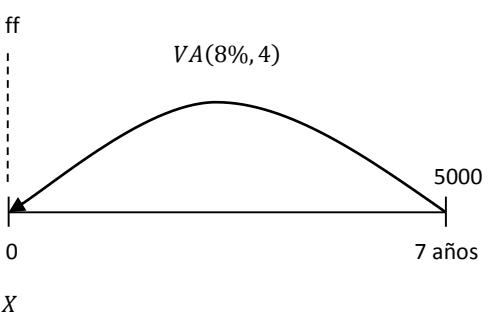
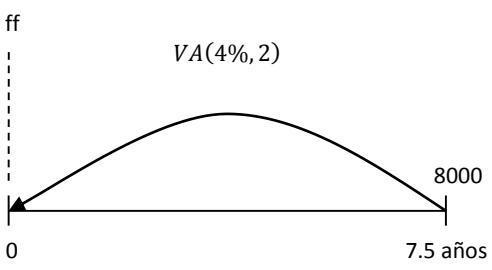
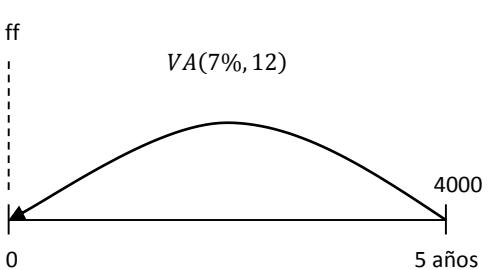
4. Hallar el valor acumulado de \$ 15000 por 4 años 5 meses al 5% capitalizable trimestralmente:

- La regla teórica, dado que el número de períodos es fraccionario.
- La regla práctica, dado que el número de períodos es fraccionario.

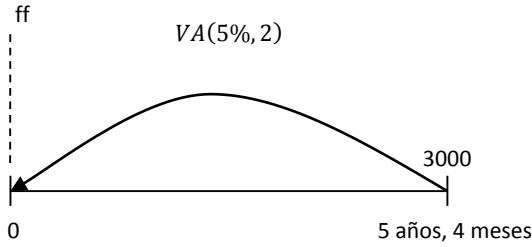
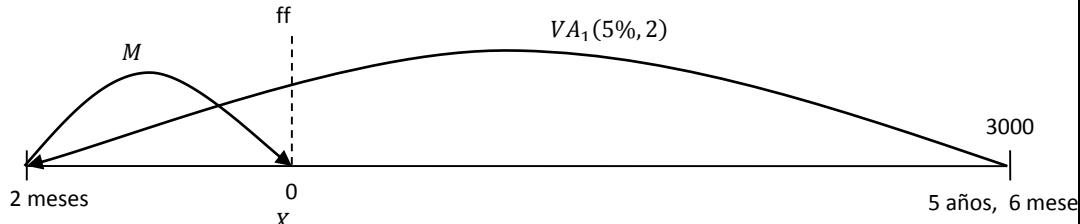
<p>a. La regla teórica.</p>  $n = t \times m = \left(4 + \frac{5}{12}\right) \times 4 = \frac{53}{3} \text{ trimestres}$	$i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{4} = \frac{5}{400}$ <p>Ecuación de Valor:</p> $X = M$ $X = C(1 + i)^n$ $X = 15000 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{\frac{53}{3}}$ $X = \$ 18.681,14$
<p>b. La regla práctica.</p> 	
<p>Monto a interés compuesto para períodos enteros:</p> $M_1 = C(1 + i)^n$ $M_1 = 15000 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{17} = \$ 18.527,07$	<p>Monto a interés simple parte fraccionaria:</p> $M = M_1(1 + rt)$ $M = 18527.07 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{2}{12}\right)$ $M = \$ 18.681,46$

5. Hallar el Valor Actual de:

- \$ 10000 pagaderos dentro de 8 años al 5% con acumulación anual.
- \$ 5000 pagaderos dentro de 7 años al 8% capitalizable trimestralmente.
- \$ 8000 pagaderos en 7.5 años al 4 % capitalizable semestralmente.
- \$ 4000 pagaderos dentro de 5 años al 7% con capitalización mensual.
- \$ 3000 pagaderos en 5 años 4 meses al 5% con capitalización semestral.
- \$ 1200 pagaderos en 6 años 5 meses al 8% con capitalización trimestral.

<p>a.</p>  ff $VA(5\%, 1)$ 10000 8 años X $i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{1} = \frac{5}{100}$ $n = t \times m = 8 \times 1 = 8$	<p>Ecuación de Valor:</p> $X = VA$ $X = \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = \frac{10000}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^8}$ $X = \$ 6.768,39$
<p>b.</p>  ff $VA(8\%, 4)$ 5000 7 años X $i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = \frac{8}{400}$ $n = t \times m = 7 \times 4 = 28$	<p>Ecuación de Valor:</p> $X = VA$ $X = \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = \frac{5000}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{28}}$ $X = \$ 2.871,87$
<p>c.</p>  ff $VA(4\%, 2)$ 8000 7.5 años X $i = \frac{j}{m} = \frac{4\%}{2} = \frac{4}{200}$ $n = t \times m = 7.5 \times 2 = 15$	<p>Ecuación de Valor:</p> $X = VA$ $X = \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = \frac{8000}{\left(1 + \frac{4}{200}\right)^{15}}$ $X = \$ 5.944,12$
<p>d.</p>  ff $VA(7\%, 12)$ 4000 5 años X $i = \frac{j}{m} = \frac{7\%}{12} = \frac{7}{1200}$ $n = t \times m = 5 \times 12 = 60$	<p>Ecuación de Valor:</p> $X = VA$ $X = \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = \frac{4000}{\left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{60}}$ $X = \$ 2.821,62$

- e. \$ 3000 pagaderos en 5 años 4 meses al 5% con capitalización semestral; dado que el número de períodos es fraccionario, aplique la regla teórica y luego la regla comercial.

<p>Regla teórica:</p>  $n = t \times m = \left(5 + \frac{4}{12}\right) \times 2 = \frac{32}{3} \text{ semestres}$	$i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{2} = \frac{5}{200}$ <p>Ecuación de Valor:</p> $X = VA$ $X = \frac{M}{(1+i)^n}$ $X = \frac{3000}{\left(1 + \frac{5}{200}\right)^{\frac{32}{3}}}$ $X = \$ 2.305,33$
<p>Regla práctica:</p> 	
<p>Valor actual para el entero más próximo:</p> $VA_1 = \frac{M}{(1+i)^n}$ $VA_1 = \frac{3000}{\left(1 + \frac{5}{200}\right)^{11}} = 2286.43$	<p>Monto a interés simple parte fraccionaria:</p> $X = VA_1(1+rt)$ $X = 2286.43 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{2}{12}\right)$ $X = \$ 2.305,49$

f. \$ 1200 pagaderos en 6 años 5 meses al 8% con capitalización trimestral.

<p>Regla teórica:</p> <p>ff</p> <p>$VA(8\%, 4)$</p> <p>0</p> <p>6 años, 5 meses</p> <p>X</p> <p>$n = t \times m = \left(6 + \frac{5}{12}\right) \times 4 = \frac{77}{3} \text{ trimestres}$</p>	$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = \frac{8}{400}$ <p>Ecuación de Valor:</p> $X = VA$ $X = \frac{M}{(1+i)^n}$ $X = \frac{1200}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{\frac{77}{3}}}$ $X = \$721,84$
<p>Regla práctica:</p> <p>$VA_1(8\%, 4)$</p> <p>M</p> <p>1 mes</p> <p>0</p> <p>6 años, 5 meses</p> <p>X</p>	
<p>Valor actual para el entero más próximo:</p> $VA_1 = \frac{M}{(1+i)^n}$ $VA_1 = \frac{1200}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{26}} = 717,10$	<p>Monto a interés simple parte fraccionaria:</p> $X = VA_1(1 + rt)$ $X = 717,10 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{1}{12}\right)$ $X = \$ 721,88$

6. Al nacer su hijo, un padre desea invertir una cantidad tal, que acumulada al 3.5% convertible semestralmente importe \$ 18000 cuando el hijo tenga 21 años. Cuánto tendrá que invertir?

<p>ff</p> <p>18000</p> <p>21 años</p> <p>X</p>	$i = \frac{j}{m} = \frac{3.5\%}{2} = \frac{3.5}{200}$ $n = t \times m = 21 \times 2 = 42$ $X = VA$ $X = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{18000}{\left(1 + \frac{3.5}{200}\right)^{42}} = \$8.686,14$
--	--

7. Cuál es el Valor Presente de un documento por \$ 4200 con interés al 5.4% convertible semestralmente por 12 años, si el rendimiento actual es del 4.5 % efectivo.

<p>4200</p> <p>0</p> <p>M(5.4%, 2)</p> <p>12 años</p>	$i = \frac{j}{m} = \frac{5.4\%}{2} = \frac{5.4}{200}$ $n = t \times m = 12 \times 2 = 24$ $M = C(1+i)^n$ $M = 4200 \left(1 + \frac{5.4}{200}\right)^{24} = \$7.960,49$
<p>ff</p> <p>VA(4.5%, 1)</p> <p>7960,49</p> <p>12 años</p> <p>X</p>	$i = \frac{j}{m} = \frac{4.5\%}{1} = \frac{4.5}{100}$ $n = t \times m = 12 \times 1 = 12$ $X = VA$ $X = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{7960.49}{\left(1 + \frac{4.5}{100}\right)^{12}} = \$4.694,01$

8. El día de hoy, B contrae un compromiso de pagar \$ 15000 en 10 años con interés al 4,25%. Cuál es el valor de la obligación dentro de 6 años suponiendo para ese entonces un rendimiento del 3,81%.

$M = C(1 + i)^n$ $M = 15000 \left(1 + \frac{4.25}{100}\right)^{10}$ $M = \$ 22.743,22$	$X = VA$ $X = \frac{M}{(1 + i)^n} = \frac{22743,22}{\left(1 + \frac{3.81}{100}\right)^4}$ $X = \$ 19583,72$

9. Una persona posee un pagaré de \$ 60000 a 6 años de plazo a un interés del 8% con acumulación semestral. Dos años antes de su vencimiento le ofrece en venta a un prestamista que invierte al 10.25 % con capitalización trimestral. Qué suma le ofrece el prestamista?

$M = C(1 + i)^n$ $M = 60000 \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{12}$ $M = \$ 96.061,93$	$X = VA$ $X = \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = \frac{96061,93}{\left(1 + \frac{10.25}{400}\right)^8}$ $X = \$ 78.458,96$

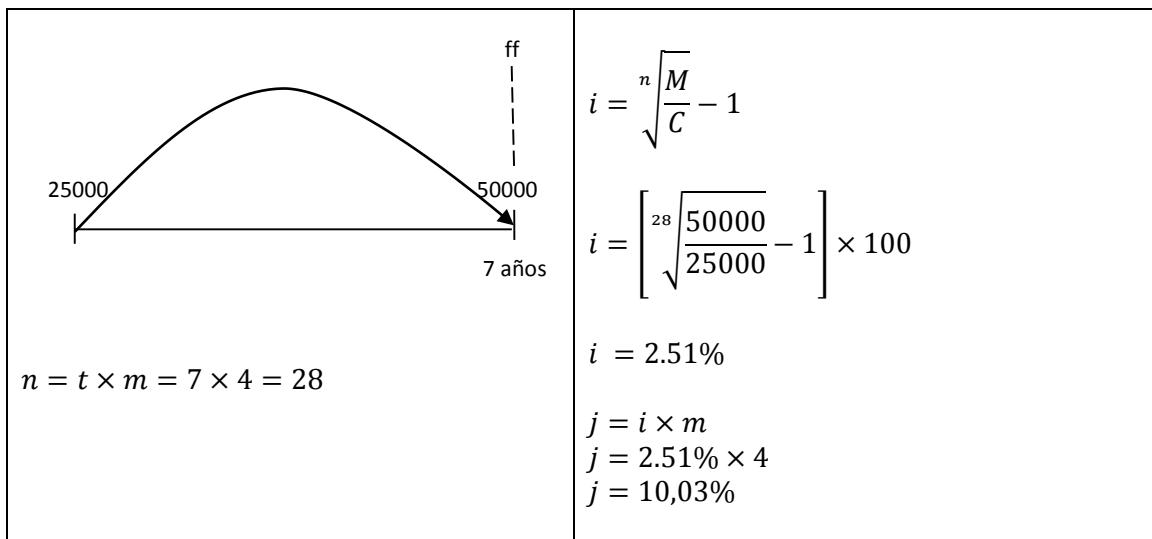
10. Sustituir dos deudas de \$ 1400 y \$ 2800 con vencimiento en 4 y 5 años respectivamente, por 2 pagos iguales con vencimiento en 2 y 3 años suponiendo un rendimiento de 8% convertible semestralmente.

 $i = \frac{j}{m} = \frac{10\%}{2} = \frac{8}{200}$	<p><i>Deudas = pagos</i></p> $VA_1 + VA_2 = M_1 + X$ $\frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} = C(1+i)^n + X$ $\frac{1400}{\left(1+\frac{8}{200}\right)^2} + \frac{2800}{\left(1+\frac{8}{200}\right)^4} = X \left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 + X$ $1294,38 + 2393,45 = X \left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 + 1 \right]$ $X = \frac{3687,83}{\left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 + 1 \right]}$ $X = \$1.771,63$
--	---

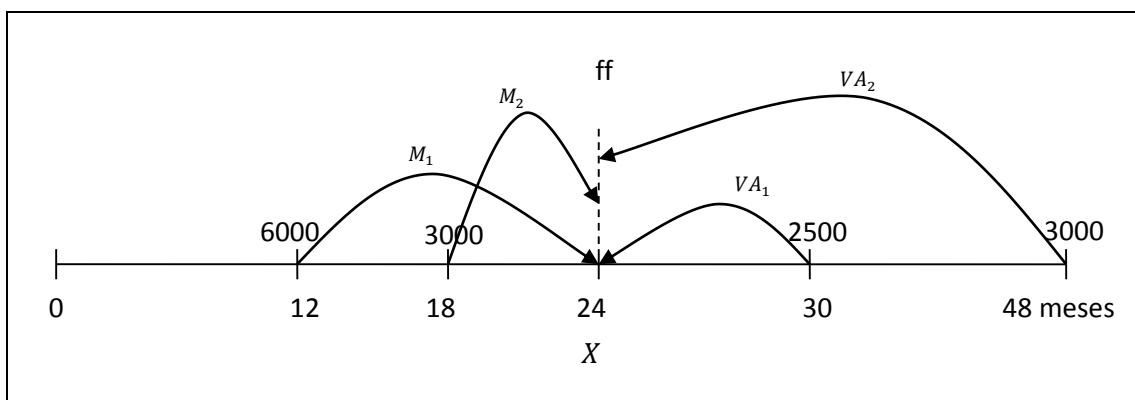
11. En qué tiempo un estudiante triplicará su capital si la financiera en la que deposita sus ahorros, le reconoce un interés del 12% capitalizable mensualmente.

	$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$ $n = \frac{\log\left(\frac{3x}{x}\right)}{\log\left(1 + \frac{12}{1200}\right)}$ $n = \frac{\log(3)}{\log\left(1 + \frac{12}{1200}\right)}$	$n = 110.41 \text{ meses}$ <p>Por lo que el tiempo, expresado en años es:</p> $t = 9.2 \text{ años} \approx 9 \text{ años}, 2 \text{ meses}, 12 \text{ días.}$
--	--	--

12. Cuál es la tasa nominal, capitalizable trimestralmente, para que en 7 años una inversión de 25000 se duplique?



13. Un colegio por la provisión de un lote de libros tiene que cumplir con los siguientes pagos: \$ 6000 en un año, \$ 3000 en 18 meses, \$ 2.500 en 30 meses y \$ 3000 en 4 años. Con su acreedor conviene efectuar un pago único a los dos años a una tasa del 7 % capitalizable semestralmente. Calcule dicho pago.



Ecuación de valor:

Deudas = Pago único

$$M_1 + M_2 + VA_1 + VA_2 = X$$

$$C(1+i)^n + C(1+i)^n + \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} = X$$

$$6000 \left(1 + \frac{7}{200}\right)^2 + 3000 \left(1 + \frac{7}{200}\right)^1 + \frac{2500}{\left(1 + \frac{7}{200}\right)^1} + \frac{3000}{\left(1 + \frac{7}{200}\right)^4} = X$$

$$6427.35 + 3105 + 2415.46 + 2614.33 = X$$

$$X = \$ 14.562,14$$

14. Una deuda de \$ 4000 pagaderos en 2 años y otra de \$ 1750 pagaderos en 6 años se van a liquidar mediante un pago único dentro de 4 años. Hallar el importe del pago suponiendo un rendimiento del 4 % convertible trimestralmente.

<p>The timeline shows two debts: one of \$4000 at year 2 and another of \$1750 at year 6. Both debts are paid off at time 4. The total amount \$X is paid at time 4, which is labeled as 'ff' (futuro futuro).</p>	$Deudas = Pago único$ $M_1 + VA_1 = X$ $C(1+i)^n + \frac{M}{(1+i)^n} = X$	$4000 \left(1 + \frac{4}{400}\right)^8 + \frac{1750}{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^8} = X$ $4331,43 + 1616,10 = X$ $X = \$ 5.947,53$
--	---	---

15. Una persona debe \$ 10000 pagaderos dentro de 3 años. Si hace el día de hoy un pago de \$ 5000, Cuál será el importe del pago que tendrá que hacer en 2 años para liquidar su deuda, suponiendo un rendimiento del 5% convertible semestralmente.

<p>The timeline shows a debt of \$10000 at year 3. A payment of \$5000 is made at year 0. The remaining debt is liquidated at year 2 with a payment \$X. The timeline is labeled 'ff' (futuro futuro) at year 2.</p>	$Deuda = Pagos$ $VA_1 = M_1 + X$ $\frac{M}{(1+i)^n} = C(1+i)^n + X$	$\frac{10000}{\left(1 + \frac{5}{200}\right)^2} = 5000 \left(1 + \frac{5}{200}\right)^4 + X$ $9518,14 = 5519,06 + X$ $X = 9518,14 - 5519,06$ $X = \$ 3.999,08$
--	---	--

16. El día de hoy, un comerciante compra artículos por valor de \$ 6500. Paga \$ 2500 iniciales y 1500 al término de 4 meses. Suponiendo un rendimiento del 4% convertible mensualmente. Cuál será el importe del pago final que tendrá que hacer al término de 9 meses?

<p>Valor a financiar = $6500 - 2500 = 4000$</p>	$\begin{aligned} Deuda &= Pagos \\ M_1 &= M_2 + X \\ C(1+i)^n &= C(1+i)^n + X \end{aligned}$ $\begin{aligned} 4000 \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^9 &= 1500 \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^5 + X \\ 4121.61 &= 1525.17 + X \\ X &= 4121.61 - 1525.17 \\ X &= \$ 2.596,44 \end{aligned}$
--	---

17. Mónica firmó un documento por \$ 3000 con intereses acumulados por 2 años al 5% convertible trimestralmente, vencido el día de hoy. Paga \$ 1800 únicamente y acuerda a pagar el resto en un año. Hallar el importe del pago requerido.

	$\begin{aligned} Deuda &= Pagos \\ M_1 &= 1800 + VA_1 \\ C(1+i)^n &= 1800 + \frac{M}{(1+i)^n} \\ 3000 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^8 &= 1800 + \frac{X}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^4} \end{aligned}$ $\begin{aligned} 3313.46 - 1800 &= \frac{X}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^4} \\ X &= 1513,46 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^4 \\ X &= \$ 1.590,56 \end{aligned}$
--	--

18. Una deuda de \$ 14000, con vencimiento en 4 años, con interés al 4% convertible semestral va a ser cubierta mediante un pago de \$5000 al término de 2 años y un pago final al término de 4 años. Hallar el valor del pago final suponiendo intereses al 5% efectivo.

<p>Deuda = Pagos $M_1 = M_2 + X$ $C(1+i)^n = C(1+i)^n + X$</p>	$14000 \left(1 + \frac{4}{200}\right)^8 = 5000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 + X$ $16403.23 = 5512.50 + X$ $X = 16403.23 - 5512.50$ $X = \$ 10.890,73$
--	---

19. El 1 de julio de 2000, Luis obtiene un préstamo de \$ 5400 a 6 años, con intereses al 4% efectivo; el 1 de julio de 2003 obtiene otro préstamo de \$5600 a 5 años con intereses al 4% convertible semestralmente. ¿Qué pagos iguales hechos el 1 de julio de 2004 y el 1 de julio de 2010 saldarán las deudas, suponiendo intereses al 4% convertible trimestralmente?

<p>$M(4\%, 1)$</p>	$i = \frac{j}{m} = \frac{4\%}{1} = \frac{4}{100}$ $n = t \times m = 6 \times 1 = 6$ $M = C(1+i)^n$ $M = 5400 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^6$ $M = \$ 6.832,72$
<p>$M(4\%, 2)$</p>	$i = \frac{j}{m} = \frac{4\%}{2} = \frac{4}{200}$ $n = t \times m = 5 \times 2 = 10$ $M = C(1+i)^n$ $M = 5600 \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{10}$ $M = \$ 6.826,37$

<p>Ecuación de valor:</p> $Deudas = Pagos$ $VA_1 + VA_2 = X + VA_3$ $\frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} = X + \frac{M}{(1+i)^n}$ $\frac{6832.72}{\left(1+\frac{4}{400}\right)^8} + \frac{6826.37}{\left(1+\frac{4}{400}\right)^{16}} = X + \frac{X}{\left(1+\frac{4}{400}\right)^{24}}$	$6309,90 + 5821,67 = X \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{4}{400}\right)^{24}} \right]$ $X = \frac{12131.57}{\left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{4}{400}\right)^{24}} \right]}$ $X = \$ 6.786,64$
--	--

20. Una persona que desea vender una propiedad y recibe tres ofertas: \$ 200000 de contado; \$ 100000 de contado y \$ 120000 a un año plazo; \$ 100000 al contado y dos letras de \$ 60000 a 6 meses y 1 año respectivamente. ¿Cuál de las tres ofertas le conviene aceptar considerando que el rendimiento del dinero es 12% capitalizable semestralmente.

Sea X el Valor Actual de la oferta:

<p>Oferta 1</p> $X = 200000$	$X = 100000 + VA_1$ $X = 100000 + \frac{M}{(1+i)^n}$ $X = 100000 + \frac{120000}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^2}$ $X = 100000 + 106799.57$ $X = \$ 206.799,57$
<p>Oferta 2</p> VA_1 $1 año$	

<p>Oferta 3</p> <p>$X = 100000 + VA_1 + VA_2$</p> $X = 100000 + \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n}$ $X = 100000 + \frac{60000}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^1} + \frac{60000}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^2}$ $X = 100000 + 56603.77 + 53399.79$ $X = \$ 210.003,56$
<p>Decisión:</p> <p>Como se trata de la venta de una propiedad, la persona que va a vender deberá escoger la que ofrece el mayor Valor Actual, entonces deberá decidirse por la tercera oferta.</p>

21. Encuentre la tasa periódica equivalente y la tasa nominal equivalente en los casos que se indica:

Caso	Tasa nominal	Período de Capitalización	Período Equivalente	Tasa periódica equivalente (i')	Tasa nominal equivalente (j')
a	15%	Anual	Mensual	1,17%	14,06%
b	8%	Semestral	Trimestral	1,98%	7,92%
c	6%	Trimestral	Semestral	3,02%	6,04%
d	2%	mensual	Anual	2,02%	2,02%

<p>Caso a:</p> $i' = \left[(1+i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100 \quad j' = i' \times m'$ $i' = \left[\left(1 + \frac{15}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] \times 100 \quad j' = 1.17\% \times 12$ $i' = 1,17\%$	<p>Caso b:</p> $i' = \left[(1+i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100 \quad j' = i' \times m'$ $i' = \left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{\frac{2}{4}} - 1 \right] \times 100 \quad j' = 1.98\% \times 4$ $i' = 1,98\%$
<p>Caso c:</p> $i' = \left[(1+i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100 \quad j' = i' \times m'$ $i' = \left[\left(1 + \frac{6}{400}\right)^{\frac{4}{2}} - 1 \right] \times 100 \quad j' = 3,02\% \times 2$ $i' = 3,02\%$	<p>Caso d:</p> $i' = \left[(1+i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100 \quad j' = i' \times m'$ $i' = \left[\left(1 + \frac{2}{1200}\right)^{\frac{12}{1}} - 1 \right] \times 100 \quad j' = 2,02\% \times 1$ $i' = 2,02\%$

22. Cual será el Monto que se debe pagar por una deuda de \$ 6500 en 5 años de plazo si se aplica la tasa instantánea del 3%.

Datos: $M = ?$ $C = 6500$ $t = 5 \text{ años}$ $\text{tasa instantánea } j = 3\%$	Solución: $M = Ce^{jt}$ $M = 6500 \times e^{5 \times \frac{3}{100}}$ $M = \$ 7.551,92$
---	---

23. En 6 años una deuda, al 5% con capitalización continua, alcanza un monto de \$ 12530 cuál es el valor incial de la deuda?

Datos: $C = ?$ $M = 12530$ $t = 6 \text{ años}$ $\text{tasa instantánea } j = 5\%$	Solución: $M = Ce^{jt}$ $C = \frac{M}{e^{jt}}$ $C = \frac{12530}{e^{6 \times \frac{5}{100}}}$ $C = \$ 9.282,45$
--	--

24. En qué tiempo un capital invertido al 8.52% con capitalización continua crece en 40%?.

Datos: $t = ?$ $C = x$ $M = 1,4x$ $\text{tasa instantánea } j = 8,52\%$	Solución: $M = Ce^{jt}$ $\frac{M}{C} = e^{jt}$ $\ln\left(\frac{M}{C}\right) = \ln e^{jt}$ $\ln\left(\frac{M}{C}\right) = j \times t \times \ln e$ $t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{j \times \ln e} = \frac{\ln\left(\frac{1,4x}{x}\right)}{\frac{8,52}{100} \times 1}$ $t = 3,95 \text{ años}$
---	--

4.12. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Con los datos registrados en la siguiente tabla, determine la tasa periódica y el número de períodos:

Tasa nominal	Capitalización	Tiempo	Tasa periódica	Períodos
6%	anual	5 años		
18 %	mensual	7 años		
4%	trimestral	2 años		
12%	semestral	6 años		

R: a) 6/100; b) 18/1200; c) 4/400; d) 12/200; a) 5; b) 84; c) 8; d) 12.

2. Una persona vende una propiedad avaluada en \$ 120000 y por ella le ofrecen \$ 70000 al contado. Por cuánto debe aceptar un pagaré por el saldo a dos años plazo si el tipo de interés es del 9%, con capitalización semestral?

R: \$ 59.625,93

3. Hallar la cantidad que es necesario depositar en una cuenta que paga el 8.25% con capitalización trimestral, para disponer de \$ 25000 al cabo de 12 años.

R: \$ 9.383,44

4. El día de hoy se firma un documento de \$ 6500 a 7 años plazo, con una tasa de interés del 12%, capitalizable semestralmente; calcule el valor del documento 3 años antes de su vencimiento a una tasa del 14% capitalizable trimestralmente.

R: \$ 9.725,49

5. Sustituir dos deudas de \$ 35000 y \$ 48000 con vencimiento en 4 y 8 años respectivamente, por 2 pagos iguales con vencimiento en 2 y 4 años suponiendo un rendimiento de 8% convertible trimestralmente.

R: Dos pagos de \$ 32.217,48

6. El día de hoy Juan obtiene un préstamo de \$ 10000 a 5 años, con intereses al 8% efectivo, 3 años más tarde obtiene otro préstamo de \$ 8000 a 6 años con intereses al 8% convertible semestralmente. ¿Qué pagos iguales hechos en 4 y 10 años saldarán las deudas, suponiendo intereses al 8% convertible trimestralmente?

R: \$13.685,40

7. Qué oferta es más conveniente para la venta de una propiedad, si la tasa de interés es el 8%, con capitalización trimestral:

Oferta 1: \$ 20000 al contado; \$ 30000 en 2 años, \$ 30000 en 4 años.

Oferta 2: \$30000 al contado, \$ 30000 en 3 años y \$ 20000 en 6 años.

R: VA Oferta 1: \$ 67.458,09; VA Oferta 2: 66.089,23; La Oferta 1.

8. Cuánto tiempo toma para que un monto de \$3000 sea \$ 3750 al 5% convertido semestralmente?

R: 4,52 años.

9. ¿A qué tasa semestral se convertirá un capital de \$ 50000 en un monto de \$ 78000 en 9 años y 6 meses?

R: 4,74%.

10. Juan depositó \$ 4000 por un año en un banco de la localidad. A los 5 meses hizo un retiro de \$ 200 y al vencimiento obtuvo un monto de \$ 4234.77. Cuál fue la tasa nominal, capitalizable mensualmente, de los últimos 4 meses si en los primeros meses la tasa fue del 10% capitalizable mensualmente.

R: 12%

11. Un deudor puede liquidar una deuda pagando (a) \$ 8000 a la fecha, (b) \$ 10000 dentro de 5 años, que opción debe aceptar un rendimiento del 5% convertible semestralmente?.

R: La segunda opción.

12. Un comerciante compra mercancías y paga \$ 20000 el día de hoy, \$ 40000 en un pagaré a 3 meses y \$ 40000 a 6 meses. Halar el valor de contado de la mercancía, si la tasa de interés local es del 9%, con capitalización mensual.

R: \$ 97.359,65

13. Se depositó en una cuenta de ahorro, que paga el 6% capitalizable mensualmente un capital de manera que en 15 meses se convierta en \$ 50000. Ocho meses después, la tasa se establece en el 7% capitalizable mensualmente; Qué retiro debe efectuarse 2 meses antes de su vencimiento para que el monto al vencimiento siga siendo de \$ 50000.

R: \$ 328,79

14. Una persona posee un pagaré de \$ 60000 a 5 años de plazo a un interés del 8%, con acumulación semestral. Tres años antes de su vencimiento le ofrece en venta a un prestamista que invierte al 12%, con capitalización trimestral. Qué suma le ofrece el prestamista?

R: \$ 62.292,81

15. Un comerciante compra \$ 150000 en mercancías y paga \$ 20000 al contado, \$ 40000 mediante un pagaré a 3 meses y \$ 40000 a 6 meses. Halar el valor del nuevo pagaré que liquide la deuda en un año si la tasa de interés local es del 9%, con capitalización trimestral.

R: \$ 57.519,38

16. Un acreedor de una sociedad en liquidación acepta que se le pague este momento el 50% del valor de dos pagarés a cargo de la sociedad, uno de \$ 50000 está vencido desde hace 18 meses y el otro por \$ 60000 vence dentro de 15 meses; si el rendimiento convenido para la liquidación es del 10% con acumulación trimestral:

- Hallar la suma que recibe este momento el acreedor.
- Si el 50% restante se pagará en un año, determine el valor de este pago.

R: a) \$ 55.507,96; b) \$ 61.270,41

17. Una empresa invierte \$ 10000 por tres años en una fiduciaria que paga el 8% convertible trimestralmente. Quince meses más tarde, la fiduciaria eleva la tasa al 10% capitalizable trimestralmente; Qué retiro podrá hacer la empresa a los dos años, de manera que al vencimiento del plazo, el monto sea el mismo inicial?.

R: \$ 2.830,24

18. Una persona deposita \$ 12000 en un banco que reconoce el 4% capitalizable trimestralmente; al cabo de un año se divide el monto en dos partes, colocando una de ellas al 6% a interés simple y la otra parte al 5% de interés compuesto, capitalizable mensualmente, ambas operaciones durante 8 meses. Qué capital corresponde a cada operación si se desea obtener montos iguales?.

R: \$ 6.225,03 a Interés Simple; \$ 6.262,22 a Interés Compuesto.

19. Una persona debe \$ 100000 y propone efectuar tres pagos anuales, iguales; con el 7% de interés, hallar el valor de estos pagos.

R: \$38.105,17

20. Carlos Vega debe pagar \$ 8000 dentro de 3 años. Con interés de 3% capitalizable semestral, cuál será el valor de los cuatro pagos iguales: hoy, en 1, 2 y 3 años que saldrán la deuda.

R: \$ 1.911,57

21. Aplicando la tasa equivalente encuentre los valores desconocidos en los casos que se indican:

Caso	Tasa nominal	Capitalización	Tasa periódica	Tasa periódica equivalente	Capitalización equivalente	Tasa nominal equivalente
a	5,81%	mensual			trimestral	
b		trimestral	2,50%		anual	
c	12%		6%		mensual	
d	10%	anual			semestral	

R: a) 0,48%, 1,46%, 5,84%; b) 10%, 10,38%, 10,38%; c) semestral, 0,98%, 11,71%; d) 10%, 4,88%, 9,76%.

22. El día de hoy se deposita \$ 7500 en una cuenta que paga el 8% capitalizable trimestralmente, cinco años más tarde el banco aplica la modalidad de capitalización continua con una tasa del 6%. Cuál será el valor en la cuenta al plazo de 10 años de haber hecho el depósito inicial.

R: \$ 15.043,64

23. Cual es la tasa instantánea para que en 8 años un depósito de \$ 4500 alcance a \$ 6000?.

R: 3,60%

24. Pedro recibe hoy un préstamo de \$ 25000 en la modalidad de capitalización continua con una tasa del 7% que deberá pagar en 8 años. Cuatro años más tarde hace un abono de \$ 10000 y propone liquidar la deuda mediante un pago único, al final del plazo, con interés de 7% capitalizable semestralmente. Determine el pago que liquide la deuda si el banco acepta la propuesta presentada por Pedro.

R: 28.759,51

5

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS ANUALIDADES

5.1. DEFINICIÓN

Una anualidad es una serie definida de pagos iguales, realizados en forma periódica, es decir: anual, semestral, trimestral o mensual y pactada a una tasa de interés capitalizable periódicamente (AYRES Jr, 1998).

En la cotidianidad, a nivel personal y empresarial las anualidades están presentes, se expone a continuación algunos ejemplos:

- ❖ Las compras a crédito de electrodomésticos, vehículos, servicios, etc.
- ❖ Los préstamos quirografarios e hipotecarios que conceden los bancos, mutualistas, cooperativas, etc.
- ❖ Los créditos educativos y los concedidos por organismos multinacionales para la construcción de la obra pública.

5.2. ELEMENTOS DE UNA ANUALIDAD

Los elementos financieros que conforman una Anualidad son los elementos fundamentales de la Matemática Financiera, es decir: Capital o principal, plazo o tiempo y rédito o tasa de interés; en forma particular en una Anualidad se tiene (PORTUS Govinden, 1985):

PAGO PERIÓDICO

Conocido también como Renta (R), es el pago realizado en cada período que conforma la anualidad, son pagos iguales, y de acuerdo en la fecha del período que se lo realiza genera un grupo de anualidades específico.

PLAZO

Es el tiempo (t) que dura la Anualidad, normalmente se lo expresa en años; este tiempo deberá ser transformado en períodos de la anualidad, la definición o no del plazo de la anualidad, genera otro grupo de anualidades.

TASA DE INTERÉS

Es la tasa nominal (j) expresada en porcentaje; esta tasa de interés, va acompañada de la frecuencia de capitalización de intereses, recuerde que si tal palabra no aparece, se debe asumir como capitalización anual. La coincidencia entre la capitalización de intereses, y el período de pago, genera otro grupo de anualidades.

TASA PERIÓDICA Y NÚMERO DE PERÍODOS

Con la tasa nominal (j) y la frecuencia de capitalización, se podrá entonces determinar, la tasa periódica (i); con el tiempo, expresado en años y la frecuencia de capitalización, se podrá entonces determinar el número de períodos (n) que conforman la anualidad.

5.3. CLASIFICACIÓN

Las Anualidades se clasifican en los siguientes grupos (PORTUS Govinden, 1985):

A. POR LA DEFINICIÓN DEL TIEMPO DE DURACIÓN

- **Anualidad Cierta:** Si el tiempo de duración de la Anualidad está perfectamente definido.
- **Anualidad Incierta:** Si el tiempo de duración de la Anualidad no está definido a este tipo de anualidades se conoce como perpetuidades o rentas vitalicias.

B. POR LA COINCIDENCIA ENTRE LA CAPITALIZACIÓN Y EL PERÍODO DE PAGO

- **Anualidad Ordinaria:** Si la frecuencia de capitalización de intereses y el período de capitalización coinciden.
- **Anualidad General:** Si la frecuencia de capitalización de intereses y el período de capitalización no coinciden.

C. POR LA FECHA DE PAGO

- **Anualidad Vencida:** Si el pago periódico se realiza al final de cada período.
- **Anualidad Anticipada:** Si el pago periódico se realiza al inicio de cada período.
- **Anualidad Diferida:** Cuando el primer pago se realiza luego de haber transcurrido algunos períodos.

5.4. COMBINACIÓN DE LAS ANUALIDADES

Con esta clasificación se podrá combinar varios tipos de Anualidades, de esta manera se establecen las siguientes (CISSELL, CISSELL, & FLASPOHLER, 1996):

- ✓ Anualidades ciertas, ordinarias y vencidas.
- ✓ Anualidades ciertas, ordinarias anticipadas.
- ✓ Anualidades ciertas ordinarias diferidas.
- ✓ Perpetuidades o rentas vitalicias.
- ✓ Anualidades Generales.

De cada una de estas anualidades se determinará en forma particular el Monto o Valor Futuro, el Valor Presente o Valor Actual y la Renta o Pago Periódico (ALVAREZ Arango, 1995).

6

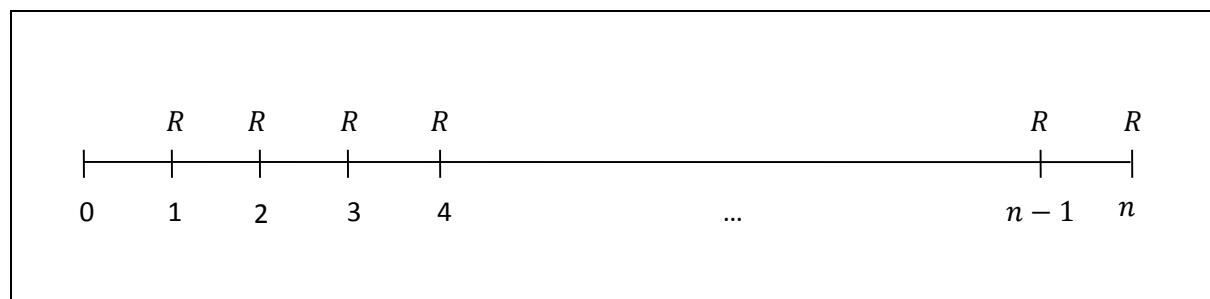
ANUALIDADES VENCIDAS

6.1. DEFINICIÓN

Una anualidad vencida es una serie definida de pagos periódicos iguales realizados al final de cada período tal que, el período de pago y la capitalización de intereses coinciden.

6.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las anualidades vencidas tienen la siguiente estructura gráfica:



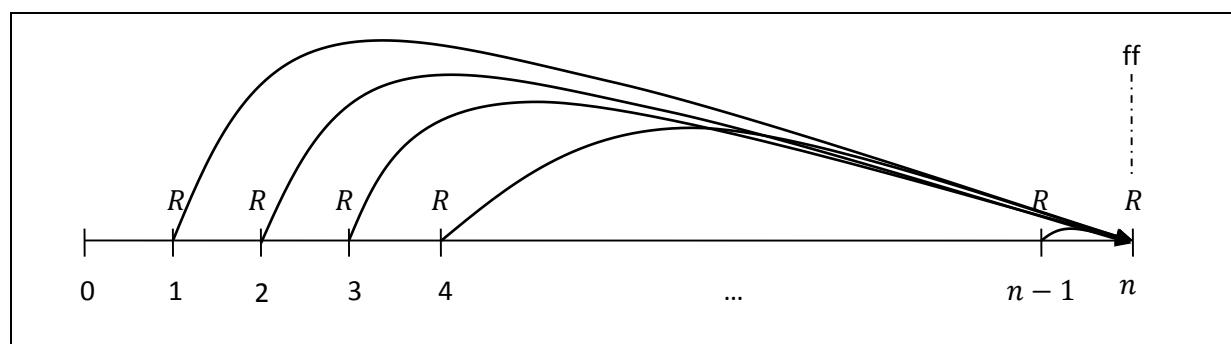
Del gráfico se tiene:

- **R** es el valor del pago periódico realizado al final de cada período.
- **n** es el número de períodos de la anualidad vencida.
- El primer pago se realiza al final del primer período, el segundo pago al final del segundo período y así sucesivamente para los demás pagos, el último pago se hará al final del último período.

6.3. VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

El Valor Futuro o Monto de una anualidad vencida es la suma del Valor Futuro o Monto de cada uno de los pagos o depósitos vencidos que conforman la anualidad, previamente trasladados hasta el final de la misma, es decir:

$$VF = \sum_{i=1}^n M_i$$



El Valor Futuro entonces es igual a:

$$VF = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \dots + M_{n-1} + R$$

Es decir:

$$VF = R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + R(1 + i)^{n-3} + R(1 + i)^{n-4} \dots + R(1 + i)^1 + R$$

En esta ecuación, el miembro de la derecha es la suma de los términos de una progresión geométrica de n términos con las siguientes características:

- ✓ Primer término a : $R(1 + i)^{n-1}$
- ✓ Último término u : R
- ✓ Razón r : $(1 + i)^{-1}$

Recordando que la suma de términos de una progresión geométrica está dada por (SPIEGEL Murray R, 1990)

$$S = \frac{ur - a}{r - 1}$$

Se tiene que el valor futuro o monto de una anualidad vencida es:

$$VF = \frac{R(1 + i)^{-1} - R(1 + i)^{n-1}}{(1 + i)^{-1} - 1}$$

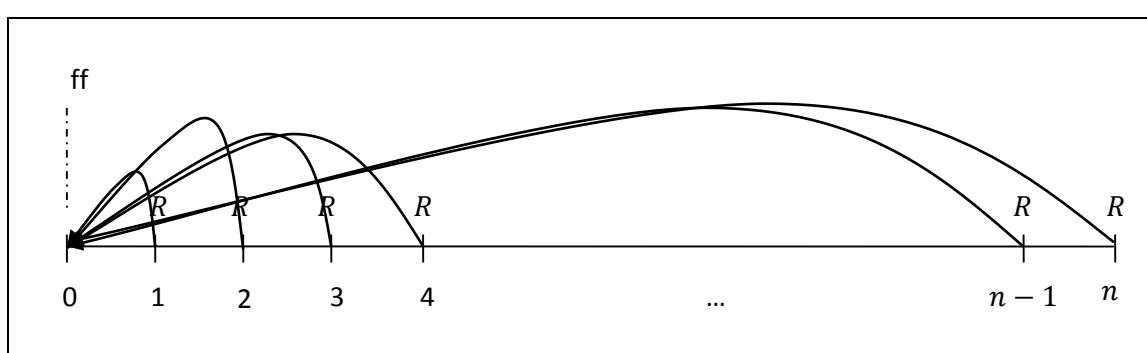
Desarrollando algebraicamente esta expresión, finalmente se tiene que el Valor Futuro o Monto de una anualidad vencida está dada por:

$$VF = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

6.4. VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

El Valor Presente o Valor Actual de una anualidad vencida es la suma del Valor Actual, trasladado a fecha de inicio, de los depósitos periódicos que conforman dicha anualidad, es decir:

$$VA = \sum_{i=1}^n VA_i$$



El Valor Actual de la anualidad vencida es entonces:

$$VA = VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 \dots + VA_{n-1} + VA_n$$

Es decir:

$$VA = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + R(1+i)^{-4} \dots + R(1+i)^{-(n-1)} + R(1+i)^{-n}$$

Factorando R :

$$VA = R[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4} \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}]$$

El interior del paréntesis resulta ser una progresión geométrica de n términos con las siguientes características:

- ◆ Primer término a : $(1+i)^{-1}$
- ◆ Último término u : $(1+i)^{-n}$
- ◆ Razón r : $(1+i)^{-1}$

Recordando que la suma de términos de una progresión geométrica está dada por (SPIEGEL Murray R, 1990)

$$S = \frac{ur - a}{r - 1}$$

Entonces, se tiene que el Valor Presente o Valor Actual de una anualidad vencida está dado por:

$$VA = R \left[\frac{(1+i)^{-n}(1+i)^{-1} - (1+i)^{-1}}{(1+i)^{-1} - 1} \right]$$

Desarrollando algebraicamente esta expresión, finalmente el Valor Actual o Valor Presente de una anualidad cierta ordinaria vencida está dado por:

$$VA = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

6.5. PAGO PERIÓDICO DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

El Pago Periódico o Renta de una Anualidad Vencida se lo determina en función del Valor Futuro o Monto o del Valor Actual o valor Presente, es decir:

➤ **En función del Valor Futuro o Monto**

$$R = \frac{VF \times i}{[(1+i)^n - 1]}$$

➤ **En función del Valor Actual o Valor Presente**

$$R = \frac{VA \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

6.6. DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE PERÍODOS

Al igual que en el caso del pago en las Anualidades Vencidas, para determinar el número de períodos que conforman una anualidad de este tipo se lo hará a partir de las expresiones para Valor Futuro o Monto y Valor Actual o Valor Presente, tomando en cuenta que al tratarse n de un exponente será necesario utilizar logaritmos.

➤ A partir del Valor Futuro

$$n = \frac{\log \left[\frac{VF \times i}{R} + 1 \right]}{\log(1 + i)}$$

➤ A partir del Valor Actual

$$n = -\frac{\log \left[1 - \frac{VA \times i}{R} \right]}{\log(1 + i)}$$

6.7. CÁLCULO DE LA TASA PERIÓDICA

Resulta imposible tratar de despejar (i) de la expresión del valor Actual o del Valor Futuro de una anualidad; para determinar la tasa periódica de una anualidad se requiere conocer el Valor Actual o Valor futuro, el número de períodos y el valor de la renta periódica; con esta información se puede determinar el valor de la tasa periódica de dos maneras:

1. Mediante la lectura de tablas y su aproximación por interpolación:

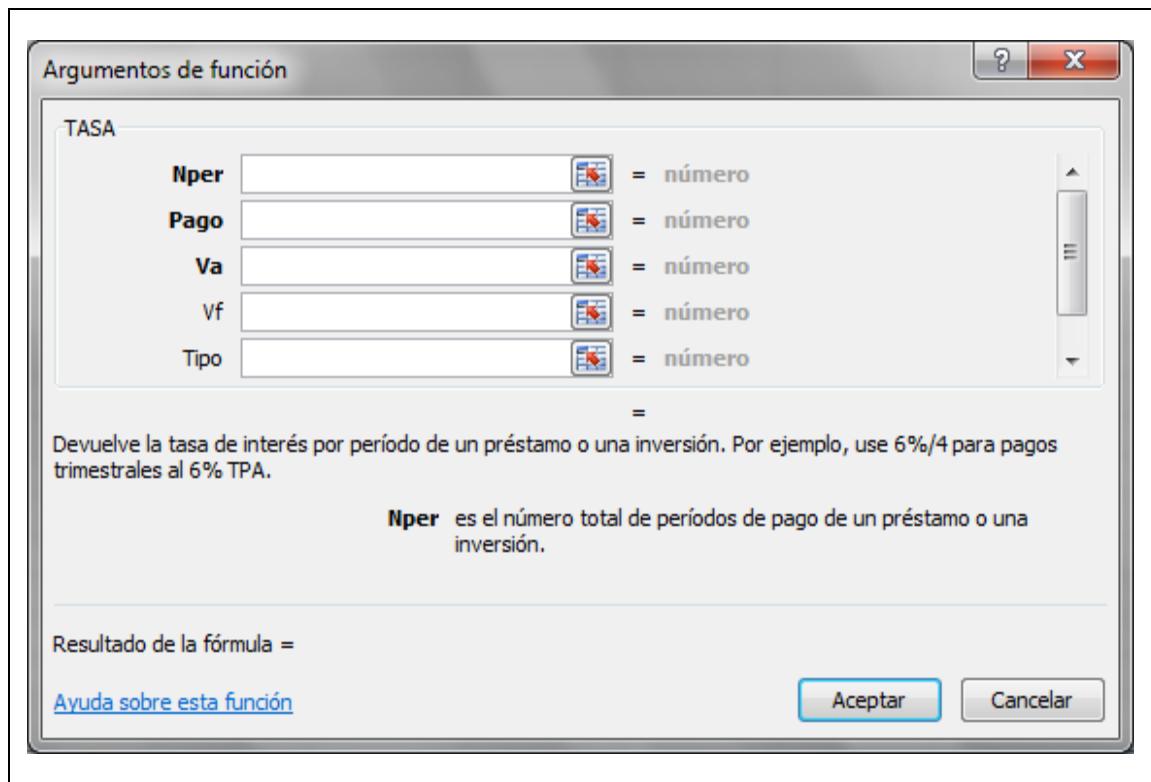
En las tablas de valores, que se encuentran al final de los libros de matemática financiera, con el número de períodos y el factor de la anualidad a Valor Futuro o a Valor Actual, se lee el valor correspondiente a la tasa periódica.

Como es de suponer, en contadas ocasiones el Factor de la anualidad coincidirá con el de las tablas, por lo que se hace necesario tomar los valores más cercanos, por defecto y por exceso y establecer el valor aproximado de i mediante interpolación.

Para una mejor aproximación de la tasa periódica es conveniente trabajar con el mayor número de decimales posible, las tablas que traen los libros de matemática financiera están formadas con 5 y hasta 8 decimales.

2. Mediante la función Electrónica “TASA” (MICROSOFT Office, 1994)

Dentro de las funciones electrónicas de la hoja electrónica de cálculo Excel se encuentra la función TASA, esta función calcula en forma inmediata la tasa periódica de una anualidad, al activar esta función se activa la siguiente ventana:



En esta ventana se tiene:

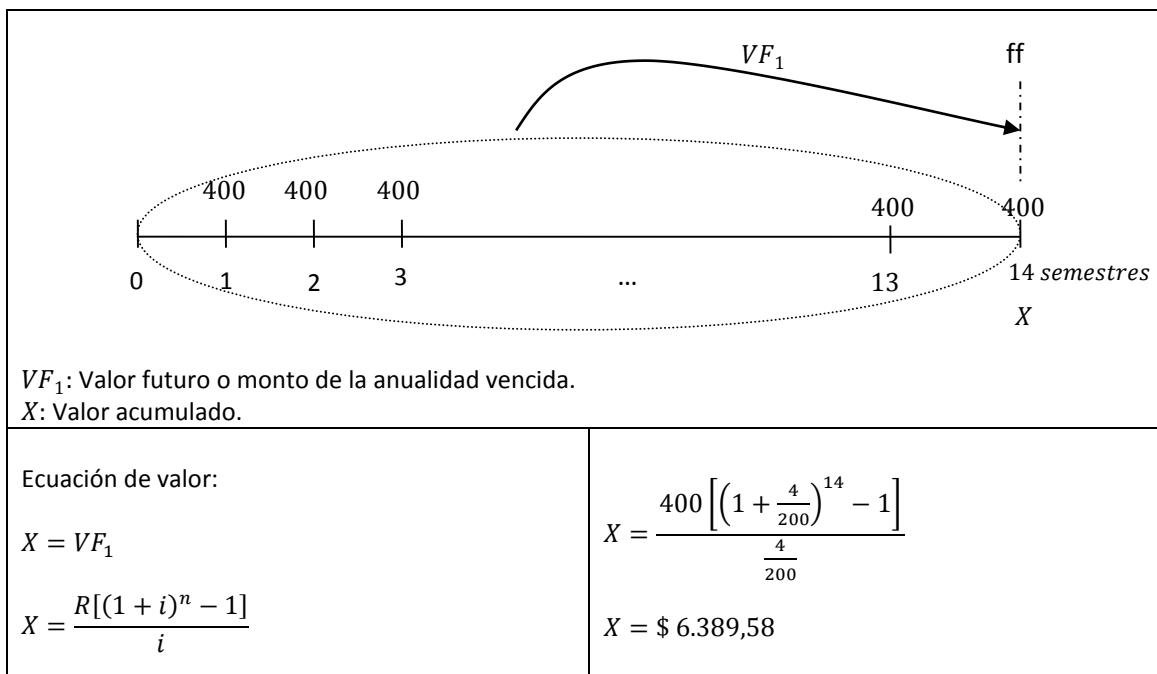
- Nper: Representa el número total de períodos de pago de la anualidad.
Pago: Es el valor del pago periódico o renta de la anualidad.
VA: Es el Valor Actual de la anualidad
VF: Es el valor Futuro de la anualidad
Tipo: Es un valor lógico: 1 si la anualidad es anticipada, o 0 u omisión si la anualidad es vencida.

Esta ventana sirve para determinar la tasa periódica en función del Valor Actual o del Valor futuro de una anualidad, como también para anualidades vencidas o anualidades anticipadas.

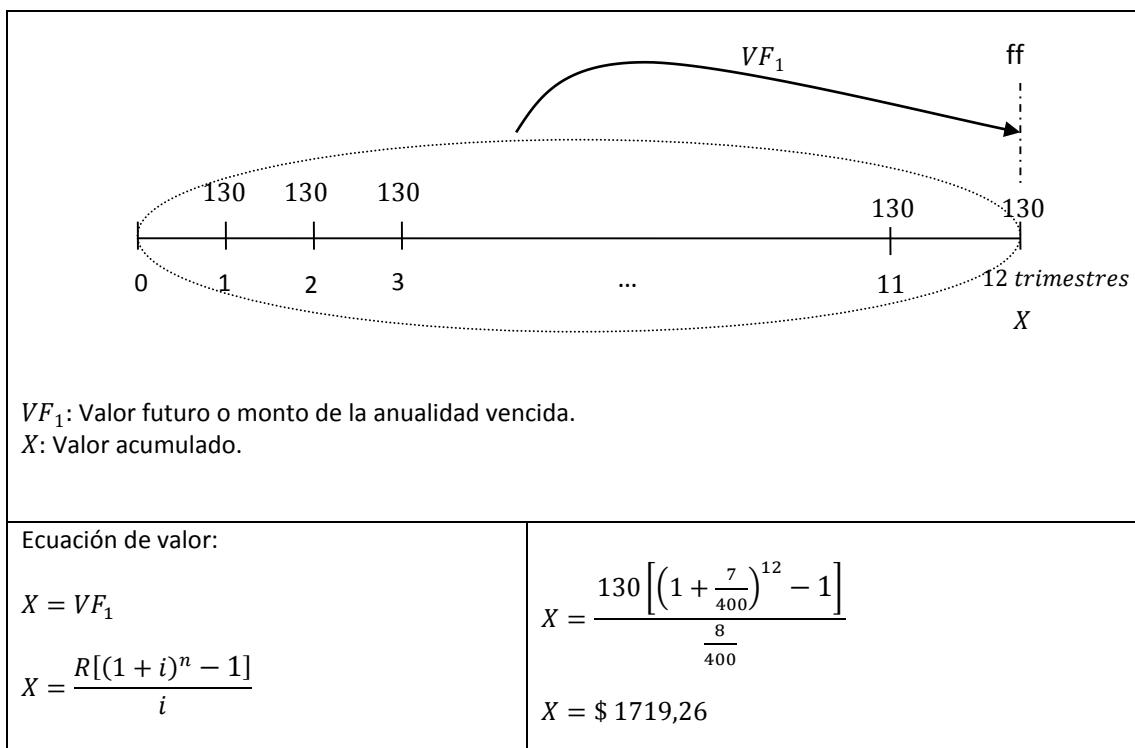
Una vez que los datos han ingresado a la ventana indicada, el usuario deberá dar un clic en el botón Aceptar; y en forma inmediata, en la celda correspondiente, aparecerá la tasa periódica de la anualidad.

6.8. PROBLEMAS RESUELTOS

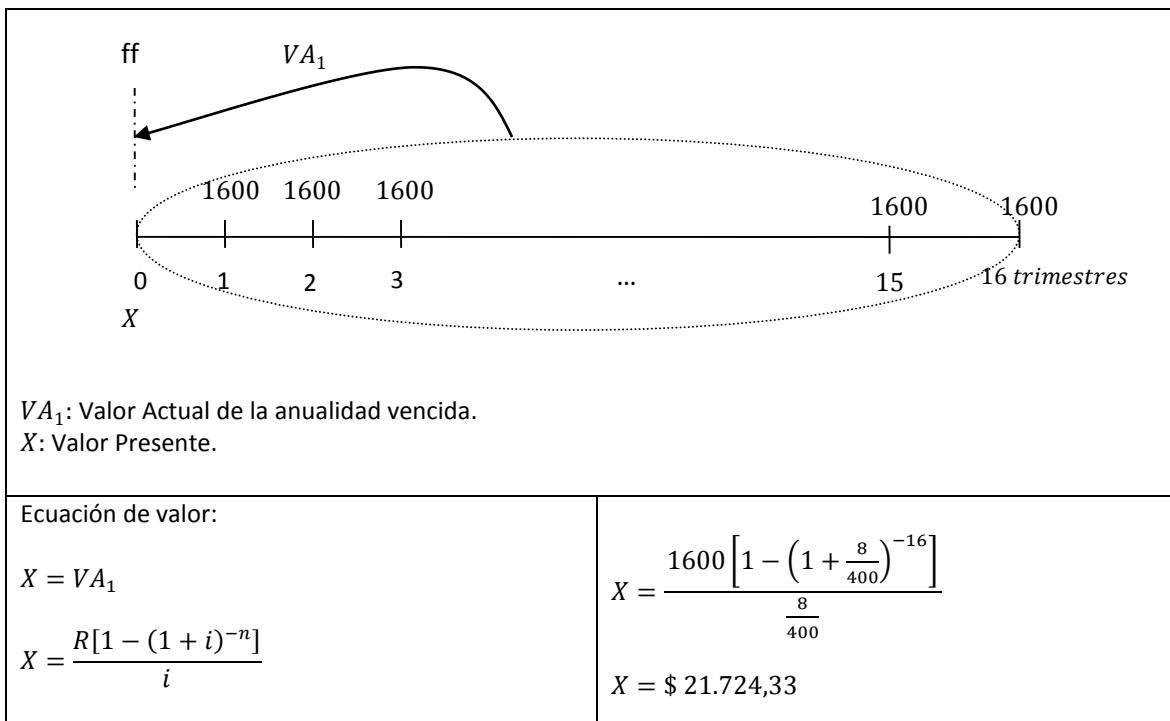
1. Una persona ahorra \$ 400 cada seis meses y los invierte al 4 % convertible semestralmente. Hallar el importe de sus ahorros después de 7 años.



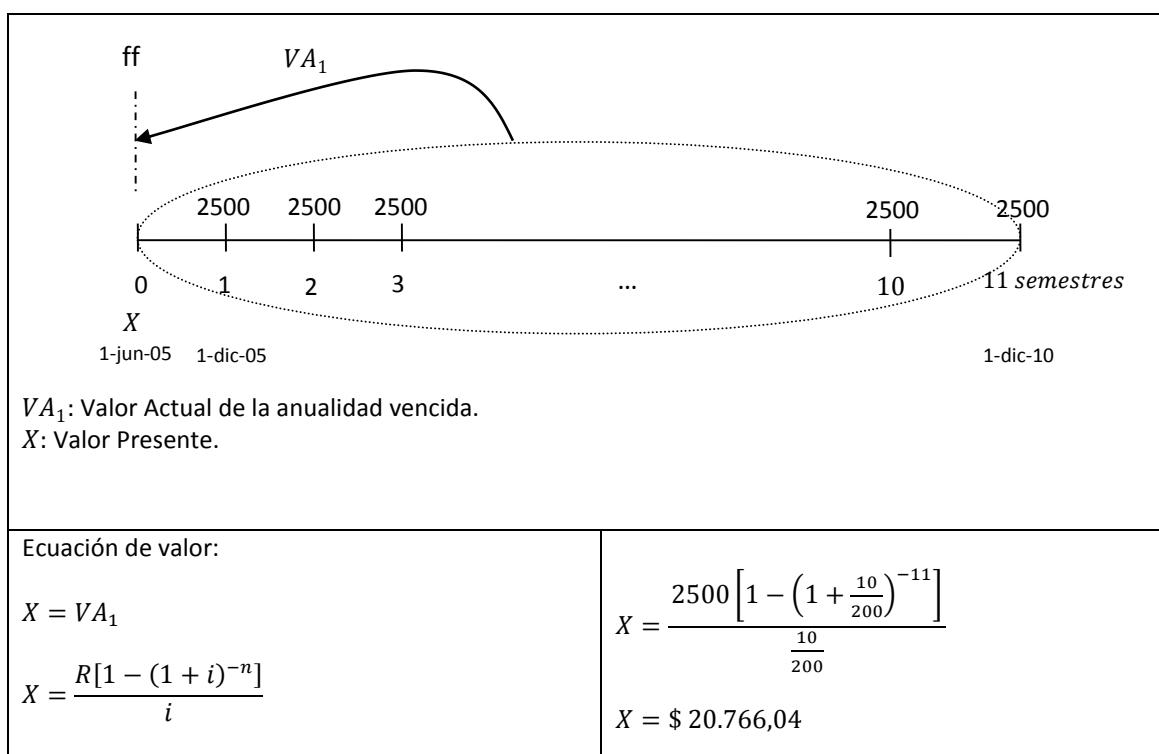
2. Un empleado invierte \$ 130 al final de cada trimestre en un fondo que paga 7%, convertible trimestralmente. Cuál será el importe del fondo, precisamente después de 12 depósitos.



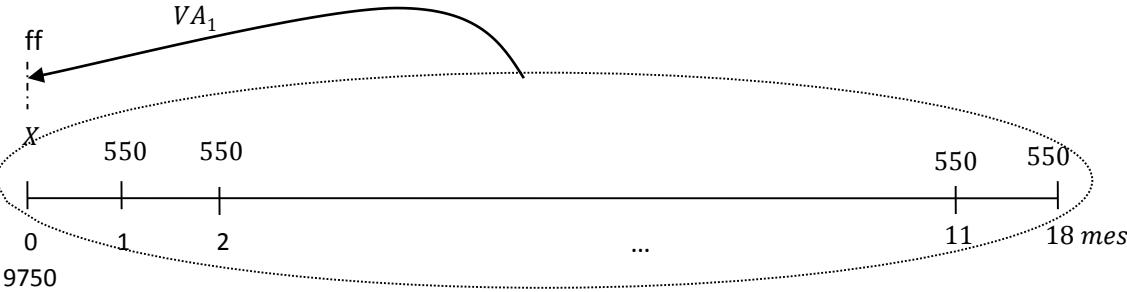
3. Cuál es el Valor Presente de \$ 1600 depositados en una cuenta al final de cada trimestre durante 4 años, si la tasa de interés es del 8% convertible trimestralmente?



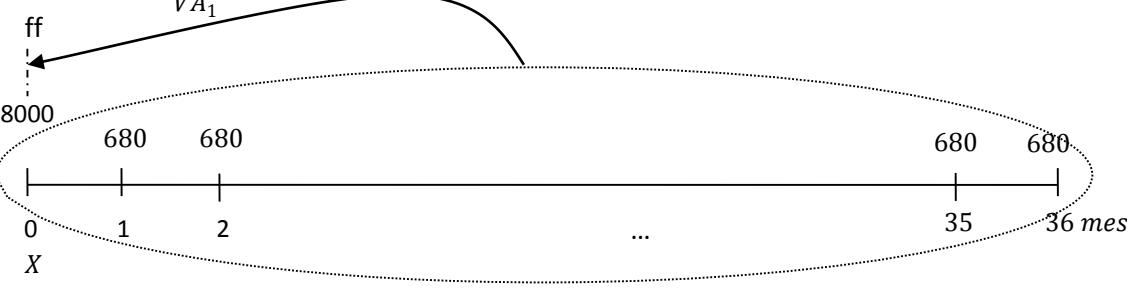
4. Cuánto debió depositarse el 1 de junio de 2005 en un fondo que pagó el 10% convertible semestralmente, con el objeto de poder hacer retiros semestrales de \$ 2500 cada uno, desde el 1 de diciembre de 2005 hasta el 1 de diciembre de 2010?



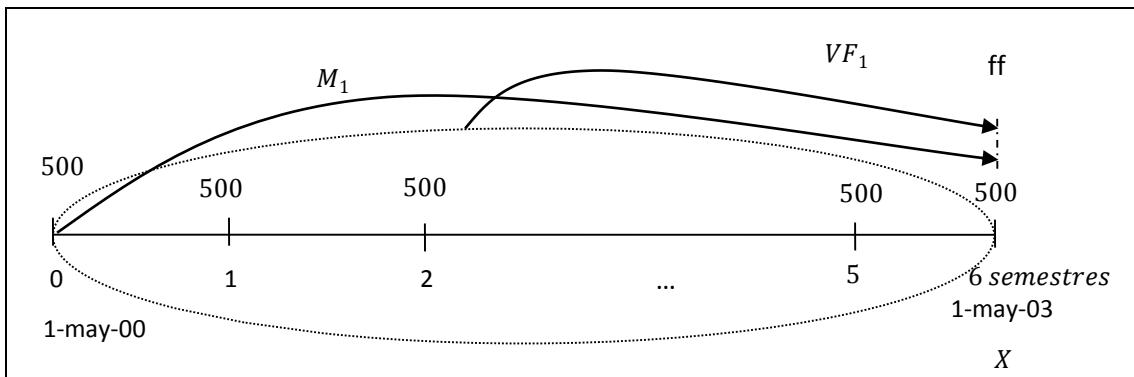
5. Al comprar Carlos un coche nuevo de \$ 14000, le reciben su coche usado en \$ 4250. Cuánto tendrá que pagar en efectivo el de hoy si el saldo restante se lo liquidará mediante el pago de \$ 550 al final de cada mes durante 18 meses, con intereses al 6 % convertible mensualmente.

<p><i>Valor del coche nuevo:</i> 14000 <i>Pago coche usado:</i> 4250 <i>Saldo a financiar:</i> 9750</p>  <p>VA₁: Valor Actual o Valor Presente de la anualidad vencida. X: Valor del pago inmediato.</p>	<p>Ecuación de valor:</p> $9750 = X + VA_1$ $9750 = X + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$ $9750 = X + \frac{550 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{1200} \right)^{-18} \right]}{\frac{6}{1200}}$ $9750 = X + 9445.02$ $X = \$ 304,98$
--	--

6. Un concesionario de automóviles ofrece un auto nuevo con un pago inicial de \$ 8000 y 36 pagos mensuales de \$ 680 cada uno, con interés del 12% capitalizable mensualmente. Cuál es el valor de contado del auto?.

 <p>VA₁: Valor Actual o Valor Presente de la anualidad vencida. X: Valor de contado.</p>	<p>Ecuación de valor:</p> $X = 8000 + VA_1$ $X = 8000 + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$ $X = 8000 + \frac{680 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-36} \right]}{\frac{12}{1200}}$ $X = 8000 + 20473.10$ $X = \$ 28.473,10$
--	--

7. El 1 de mayo de 2000, M depositó \$ 500 en una cuenta de ahorros que paga el 3% convertible semestralmente, y continuó haciendo depósitos similares cada 6 meses desde entonces. Después del 1 de mayo de 2003, el banco elevó el interés al 4% convertible semestralmente. Cuánto registró la cuenta precisamente después del depósito del 1 de noviembre de 2005?



VF_1 : Valor Futuro o Monto e de la anualidad vencida.

X : Valor acumulado a la fecha.

Ecuación de valor:

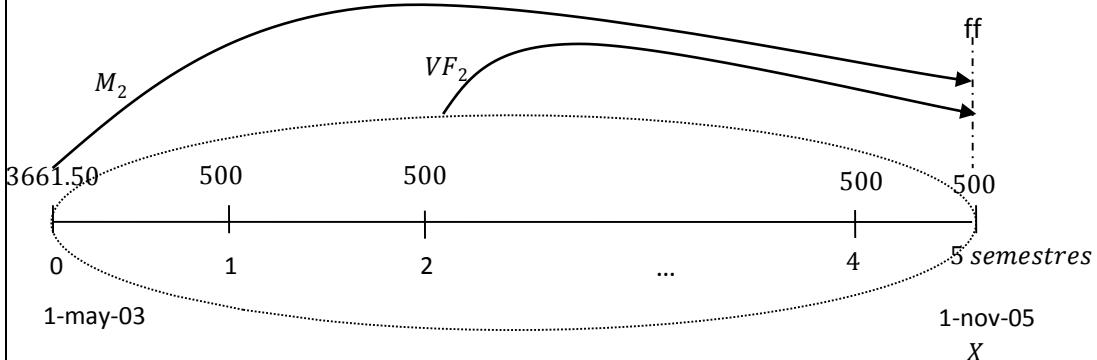
$$X = M_1 + VF_1$$

$$X = C(1+i)^n + \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$X = 500 \left(1 + \frac{3}{200}\right)^6 + \frac{500 \left[\left(1 + \frac{3}{200}\right)^6 - 1\right]}{\frac{3}{200}}$$

$$X = 546,72 + 3114,78$$

$$X = \$ 3.661,50$$



M_2 : Monto del pago único.

VF_2 : Valor Futuro o Monto de la anualidad vencida.

X : Valor acumulado a la fecha.

Ecuación de valor:

$$X = M_2 + VF_2$$

$$X = C(1+i)^n + \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$X = 3661.50 \left(1 + \frac{4}{200}\right)^5 + \frac{500 \left[\left(1 + \frac{4}{200}\right)^5 - 1\right]}{\frac{4}{200}}$$

$$X = 4042.59 + 2602.02$$

$$X = \$ 6.644,61$$

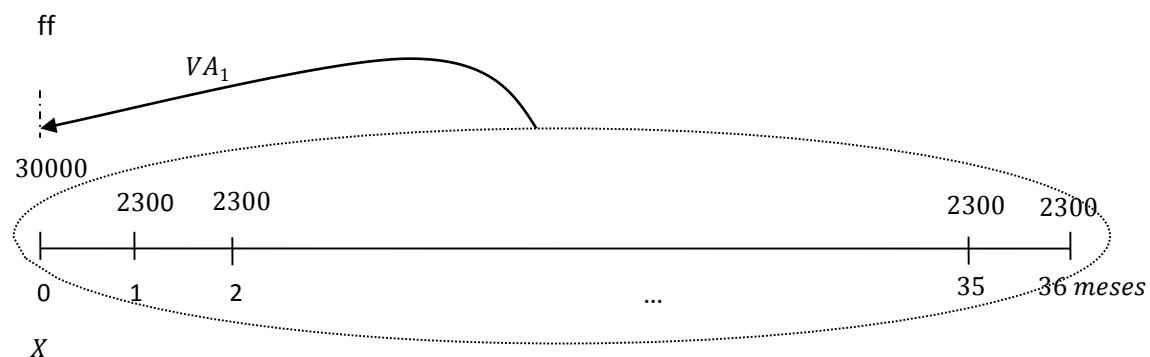
8. Luis Moreta acuerda liquidar una deuda mediante 12 pagos semestrales de \$ 5300 cada uno con intereses al 8% convertible semestral. Si omite los tres primeros pagos, qué pago tendrá que hacer en el vencimiento del siguiente para: a) quedar al corriente de sus pagos?, b) saldar su deuda?

VF_1 : Valor Futuro al cuarto pago VA_1 : Valor Actual al cuarto pago	X_1 : Valor vencido al cuarto pago X_2 : Valor no vencido al cuarto pago
a. Quedar al corriente de sus pagos $X_1 = VF_1$ $X_1 = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$ $X_1 = \frac{5300 \left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^4 - 1 \right]}{\frac{8}{200}} = 22.506,26$	b. Saldar su deuda $X_2 = VA_1$ $X_2 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$ $X_2 = \frac{5300 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-8} \right]}{\frac{8}{200}} = 35.683,55$

9. El señor Juan Pérez recibió tres ofertas al querer vender un apartamento: la primera consistía en \$ 90000 de contado, la segunda consistía en \$ 30000 de contado y \$ 2300 al mes durante 36 meses y la tercera era de \$ 2800 al mes durante 3,5 años. Si la tasa de interés es del 12% convertible mensualmente. ¿Cuál de estas ofertas es la más ventajosa para el señor Juan Pérez?.

ff $ $ $ $ 90000 $ $ 0 X	Oferta 1: $X = VA$ $X = 90.000,00$
--	--

Oferta 2



$$X = 30000 + VA_1$$

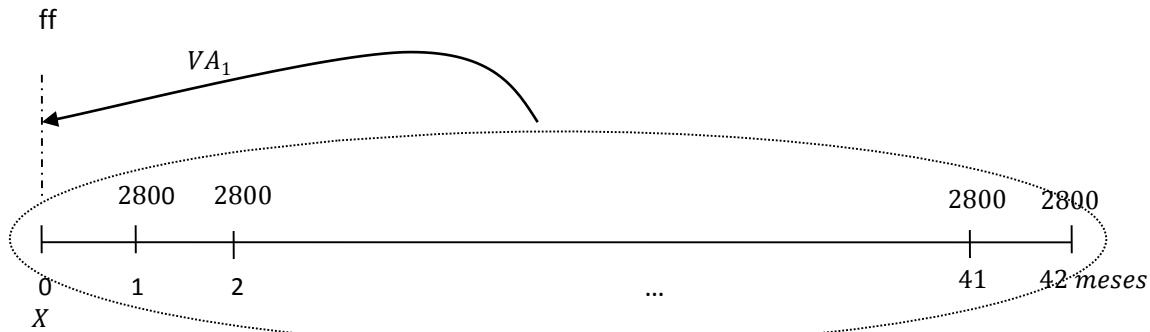
$$X = 30000 + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$X = 30000 + \frac{2300 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-36} \right]}{\frac{12}{1200}}$$

$$X = 30000 + 69247.26$$

$$X = \$ 99.247,26$$

Oferta 3



$$X = VA_1$$

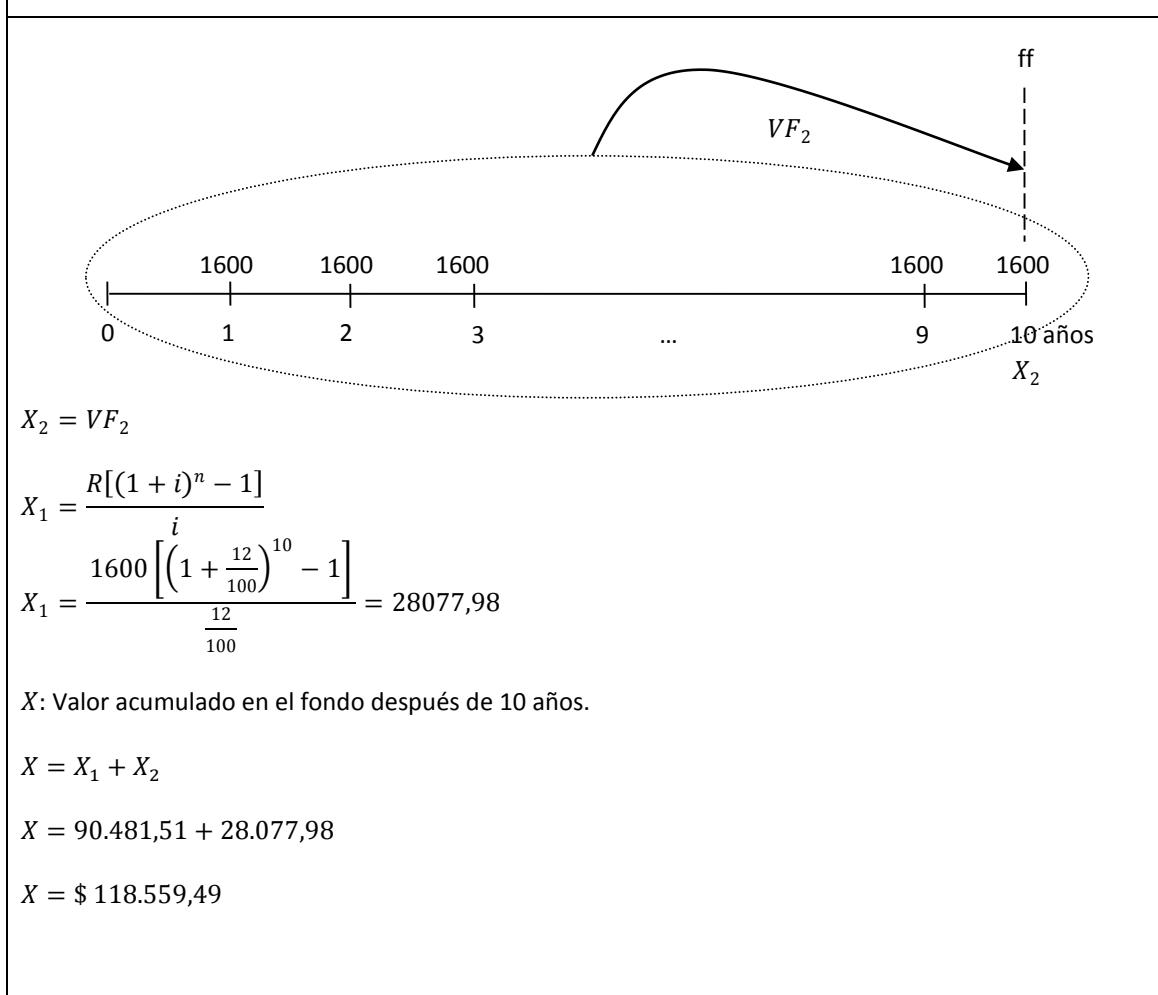
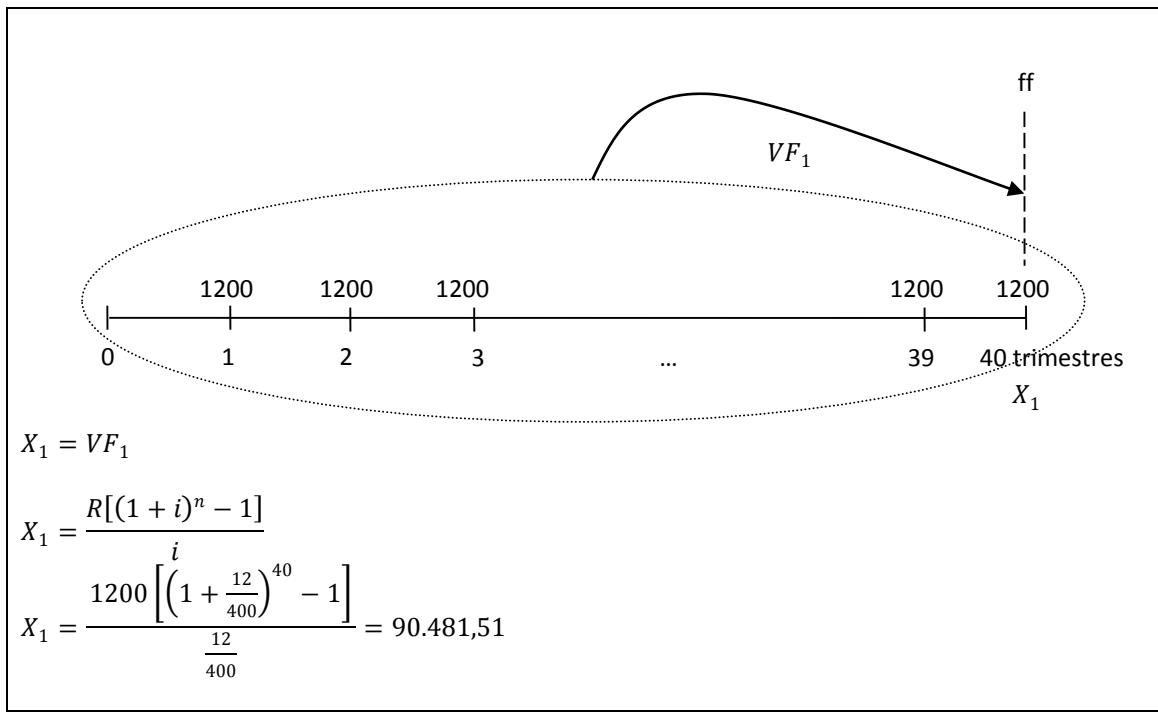
$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$X = \frac{2800 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-42} \right]}{\frac{12}{1200}}$$

$$X = \$ 95.642,70$$

Decisión: El señor Pérez debe decidirse por la segunda oferta.

10. Cuánto habrá en un fondo si se ha realizado depósitos trimestrales, durante 10 años de \$ 1200, además un depósito al final de cada año de \$ 1600 en una entidad financiera que reconoce el 12% convertible de acuerdo con la periodicidad de cada transacción.



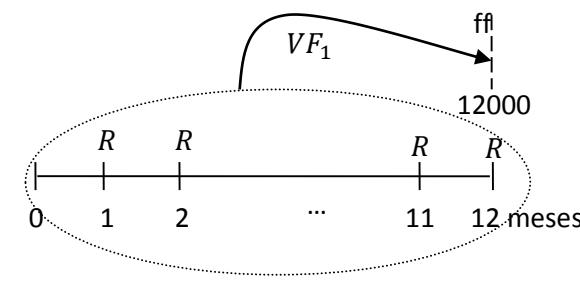
11. Una máquina que vale \$ 15000 de contado se vende a plazos, con una cuota inicial de \$ 3000 y saldo en 18 cuotas mensuales, cargando el 16% de interés convertible mensualmente. Calcular el valor de las cuotas.

 $12000 = VA_1$ $12000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$ $R = \frac{12000 \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$	$R = \frac{12000 \times \frac{16}{1200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{16}{1200}\right)^{-18}\right]}$ $X = \$ 754,28$
--	---

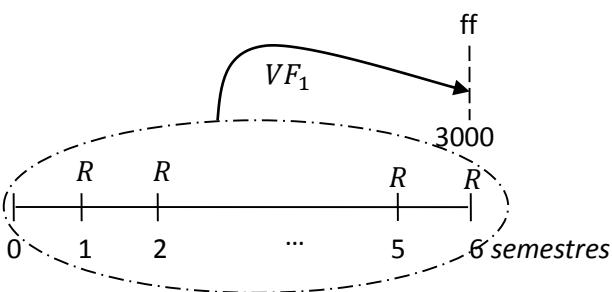
12. Una empresa necesita construir durante 10 años un fondo de depreciación de \$ 70000 para reposición de maquinaria; calcular el valor del depósito trimestral que deberá realizar en una institución financiera que paga una tasa de interés de 4% anual capitalizable trimestralmente.

 $70000 = VF_1$ $70000 = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i}$ $R = \frac{70000 \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$	$R = \frac{70000 \times \frac{4}{400}}{\left[\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{40} - 1\right]}$ $X = \$ 1.431,89$
--	--

13. Reemplazar una serie de pagos de \$ 12000 al final de cada año por el equivalente en pagos mensuales al final de cada mes suponiendo un interés al 6 % convertible mensualmente.

 <p>$VF_1 = 12000$</p>	$\frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} = 12000$ $R = \frac{12000 \times i}{[(1+i)^n - 1]}$ $R = \frac{12000 \times \frac{6}{1200}}{\left[\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12} - 1\right]}$ $R = \$ 972,80$
--	---

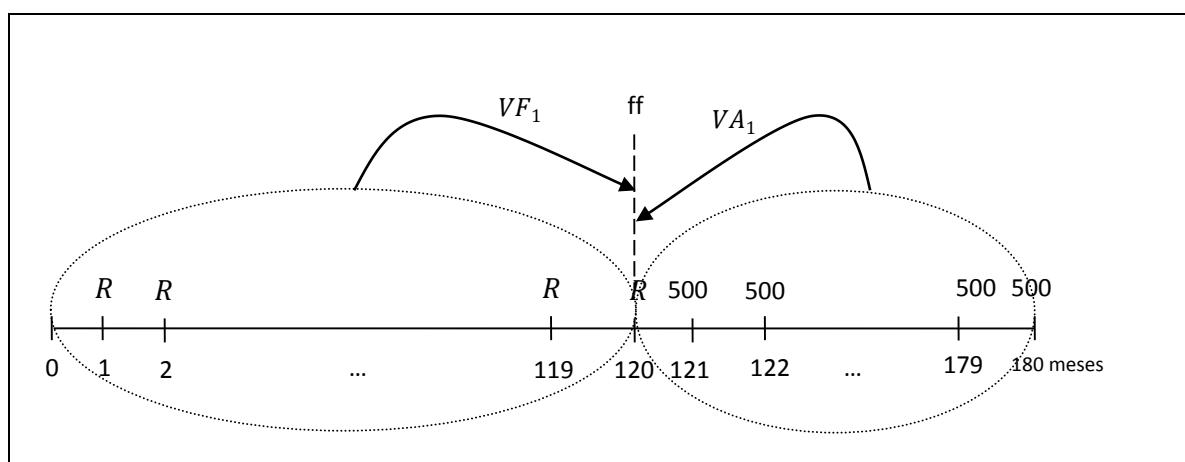
14. Una pareja espera disponer de \$ 3000 al cabo de tres años para pagar el enganche de una casa, para ello desea acumular este capital mediante depósitos semestrales en una cuenta de ahorros que paga el 6% de interés convertible semestralmente. Cuál será el valor de cada depósito semestral si esperan disponer de los \$ 3000 inmediatamente después del último depósito.

 <p>$VF_1 = 3000$</p>	$\frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} = 3000$ $R = \frac{3000 \times i}{[(1+i)^n - 1]}$ $R = \frac{3000 \times \frac{6}{200}}{\left[\left(1 + \frac{6}{200}\right)^6 - 1\right]}$ $R = \$ 463,79$
---	---

15. Para liquidar una deuda de \$ 10000, con intereses al 4% convertible semestralmente, se acuerda hacer una serie de pagos semestrales, el primero con vencimiento al término de 6 meses y el último en cinco años y un año después un pago de \$ 2500, hallar el valor del pago semestral.

<p>ff</p> <p>VA_1</p> <p>VA_2</p> <p>R</p> <p>R</p> <p>\dots</p> <p>10000</p> <p>10000</p> <p>R</p> <p>2500</p> <p>12 semestres</p>	<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad</p> <p>VA_2: Valor Actual del pago único</p> <p>Ecuación de valor:</p> $Deuda = pagos$ $10000 = VA_1 + VA_2$ $10000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1 + i)^n}$ $10000 = \frac{R[1 - (1 + \frac{4}{200})^{-10}]}{\frac{4}{200}} + \frac{2500}{(1 + \frac{4}{200})^{12}}$	$10000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{4}{200} \right)^{-10} \right]}{\frac{4}{200}} + 1971.23$ $10000 - 1971.23 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{4}{200} \right)^{-10} \right]}{\frac{4}{200}}$ $R = \frac{8028.77 \times \frac{4}{200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{4}{200} \right)^{-10} \right]}$ $R = \$ 893,81$
--	---	--

16. Calcular el valor de los depósitos mensuales que durante 10 años deberá hacer una persona en una institución financiera que reconoce una tasa de interés de 18% anual, capitalizable mensualmente, a fin de efectuar retiros de \$ 500 mensuales durante los 5 años siguientes.



VF_1 : Valor Futuro de la anualidad de los depósitos.
 VA_1 : Valor Actual de la anualidad de los retiros.

Ecuación de valor:

$Depósitos = Retiros$

$$VF_1 = VA_1$$

$$\frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

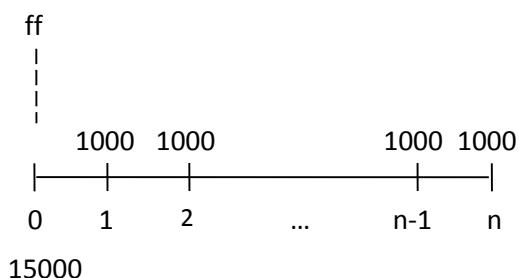
$$\frac{R \left[\left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{120} - 1 \right]}{\frac{18}{1200}} = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{-60} \right]}{\frac{18}{1200}}$$

$$R = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{-60} \right]}{\left[\left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{120} - 1 \right]}$$

$$R = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{-60} \right]}{\left[\left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{120} - 1 \right]}$$

$$R = \$ 59,44$$

17. Para liquidar una deuda de \$ 15000 se van a realizar una serie de depósitos trimestrales de \$ 1000 en un banco que reconoce una tasa del 4% con capitalización trimestral; determinar el número de depósitos necesarios y el valor del depósito adicional junto con el último depósito para liquidar la deuda.

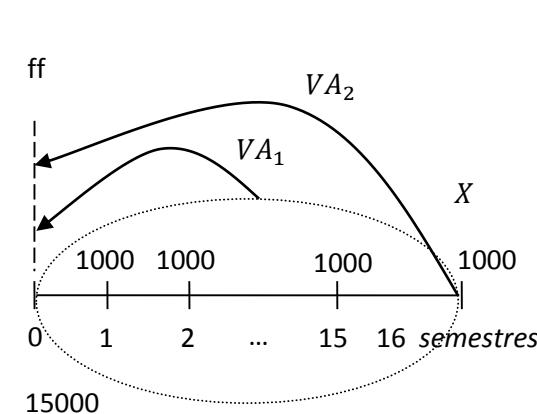


$$n = -\frac{\log \left[1 - \frac{VA \times i}{R} \right]}{\log(1+i)}$$

$$n = -\frac{\log \left[1 - \frac{15000 \times \frac{4}{400}}{1000} \right]}{\log \left(1 + \frac{4}{400} \right)}$$

$$n = 16.33$$

Pagos completos: $n = 16$



$$15000 = VA_1 + VA_2$$

$$15000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$15000 = \frac{1000 \left[1 - \left(1 + \frac{4}{400}\right)^{-16} \right]}{\frac{4}{400}} + \frac{X}{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{16}}$$

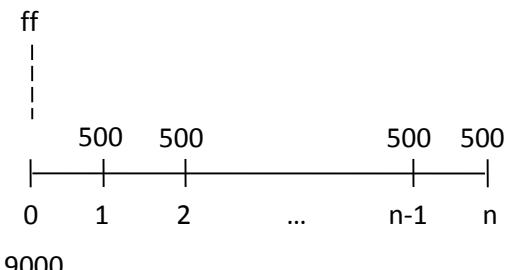
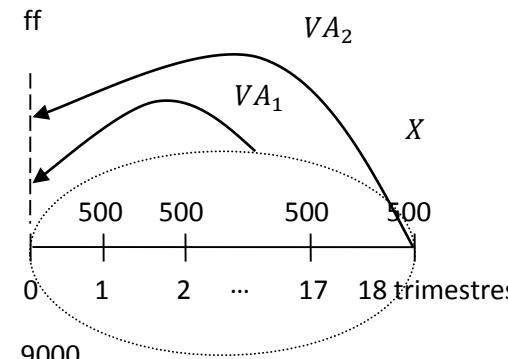
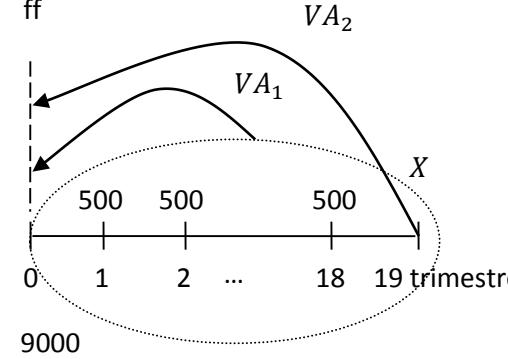
$$15000 = 14717.87 + \frac{X}{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{16}}$$

$$X = 282.13 \left(1 + \frac{4}{400}\right)^{16}$$

$$X = \$330,82$$

18. Como beneficiaria de una póliza de \$ 10000 de seguro, una viuda recibirá \$ 1000 inmediatamente y posteriormente \$ 500 cada tres meses. Si la compañía paga el 2% convertible trimestralmente:

- cuántos pagos completos de \$ 500 recibirá.
- Con qué suma adicional, pagada en el último pago completo cesará el beneficio del seguro?
- Con qué suma pagada 3 meses después del último pago completo cesará el beneficio?

<p>a.- Número de pagos:</p>  <p>ff</p> <p>9000</p>	$n = -\frac{\log \left[1 - \frac{VA \times i}{R} \right]}{\log(1+i)}$ $n = -\frac{\log \left[1 - \frac{9000 \times \frac{2}{400}}{500} \right]}{\log \left(1 + \frac{2}{400} \right)}$ $n = 18,91$ <p>Pagos completos: $n = 18$</p>
<p>b.- Pago adicional con el último pago:</p>  <p>ff</p> <p>VA₂</p> <p>VA₁</p> <p>500 500 500 500</p> <p>0 1 2 ... 17 18 trimestres</p> <p>9000</p>	$9000 = VA_1 + VA_2$ $9000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n}$ $9000 = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{2}{400} \right)^{-18} \right]}{\frac{2}{400}} + \frac{X}{\left(1 + \frac{2}{400} \right)^{18}}$ $9000 = 8586.38 + \frac{X}{\left(1 + \frac{2}{400} \right)^{18}}$ $X = 413.62 \left(1 + \frac{2}{400} \right)^{18}$ $X = \$452,47$
<p>c.- Pago adicional 3 meses más tarde:</p>  <p>ff</p> <p>VA₂</p> <p>VA₁</p> <p>500 500 500</p> <p>0 1 2 ... 18 19 trimestres</p> <p>9000</p>	$9000 = VA_1 + VA_2$ $9000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n}$ $9000 = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{2}{400} \right)^{-18} \right]}{\frac{2}{400}} + \frac{X}{\left(1 + \frac{2}{400} \right)^{19}}$ $9000 = 8586,38 + \frac{X}{\left(1 + \frac{2}{400} \right)^{19}}$ $X = 413.62 \left(1 + \frac{2}{400} \right)^{19}$ $X = \$454,73$

19. Al cumplir 45 años, una persona depositó \$ 1000 en un fondo que paga el 3.5%, y continuó haciendo depósitos similares cada año, el último, al cumplir 64 años. Si esta persona desea hacer retiros anuales de \$ 2000:

- Cuántos de dichos retiros podrá hacer.
- Con qué retiro final, hecho un año después del último retiro completo se agotará el fondo?

<p>Número de pagos: ff 2000 2000 2000 2000 0 1 2 ... n-1 n 28279.68</p>	$X = VF_1 + VF_2$ $X = C(1+i)^n + \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$ $X = 1000\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{19} + \frac{1000\left[\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{19} - 1\right]}{\frac{3.5}{100}}$ $X = 1922.50 + 26357.18$ $R = \$ 28.279,68$
<p>Pago liquidación 1 año más tarde</p> <p>ff 2000 2000 2000 2000 0 1 2 ... 19 20 años 28279.68</p>	$n = -\frac{\log\left[1 - \frac{VA \times i}{R}\right]}{\log(1+i)}$ $n = -\frac{\log\left[1 - \frac{28279.68 \times \frac{3.5}{100}}{2000}\right]}{\log\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)}$ $n = 19.85$ <p>Pagos completos: $n = 19$</p>
<p>ff 2000 2000 2000 2000 0 1 2 ... 19 20 años 28279.68</p>	$28279.68 = VA_1 + VA_2$ $28279.68 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n}$ $28279.68 = \frac{2000\left[1 - \left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{-19}\right]}{\frac{3.5}{100}} + \frac{X}{\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{20}}$ $28279.68 = 27419.67 + \frac{X}{\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{20}}$ $X = 859.71\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{20}$ $X = \$1.711,24$

20. Una máquina puede adquirirse en \$ 2500 de contado o mediante una cuota inicial de \$ 200 seguida de 10 pagos trimestrales de \$ 280 cada uno. Hallar la tasa periódica trimestral y la tasa nominal cargada en esta transacción.

$R = \$ 280; n = 10;$ $VA = \$ 2300; m = 4;$ $i = ? \quad j = ?$	$i = 0.03746 = 3.75\%$ $j = i \times m$ $j = 3.75\% \times 4 = 15\%$
--	--

Argumentos de función

TASA

Nper	10	= 10
Pago	280	= 280
Va	-2300	= -2300
Vf		= número
Tipo		= número

= 0,037463581

Devuelve la tasa de interés por período de un préstamo o una inversión. Por ejemplo, use 6%/4 para pagos trimestrales al 6% TPA.

Pago es el pago efectuado en cada período y no puede cambiar durante la vigencia del préstamo o la inversión.

Resultado de la fórmula = 3,75%

[Ayuda sobre esta función](#) Aceptar Cancelar

6.9. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una persona ha depositado \$ 250 al final de cada mes durante 5 años en una cuenta que paga el 4 % convertible mensualmente, Cuánto tenía en la cuenta al final de dicho período.

R: \$ 16.574,74

2. El papá de un niño de 12 años empieza a ahorrar para que su hijo pueda estudiar una carrera universitaria. Planea depositar \$ 1500 en una cuenta de ahorros al final de cada trimestre durante los próximos 6 años. Si la tasa de interés es del 7% capitalizable trimestralmente, cuál será el monto de la cuenta al cabo de 6 años?

R: \$ 44.266,52

3. Qué cantidad debió ser depositada el 1 de junio de 1998 en un fondo que produjo el 5% convertible semestralmente con el fin de poder hacer retiros semestrales de \$ 600 cada uno, a partir del 1 de diciembre de 1998 y terminando el 1 de diciembre de 2007?

R: \$ 8.987,33

4. Con una tasa de interés al 8% convertible semestralmente, Qué pago único inmediato es equivalente a 25 pagos semestrales de \$ 1000 cada uno, haciendo el primero al final de seis meses?

R: \$ 15.622,08

5. Se estima que un terreno boscoso producirá \$ 18000 anuales por su explotación en los próximos 20 años y entonces la tierra podrá venderse en \$ 15000. Encontrar su valor actual suponiendo un interés al 6.25%.

R: \$ 206.794,79

6. Qué es más conveniente, comprar un automóvil en \$ 2750 de contado o pagar \$ 500 iniciales y \$ 200 al final de cada mes por los próximos 12 meses, suponiendo intereses del 6% convertible mensualmente?

R: La primera opción.

7. Un contrato estipula pagos semestrales de \$ 400 por los próximos 10 años y un pago adicional de \$ 2.500 al término de dicho período. hallar el valor efectivo equivalente del contrato al 8% convertible semestralmente.

R: \$ 6.577,10

8. El 1 de mayo de 1980, Marianela depositó \$ 100 en una cuenta de ahorros que paga el 3% convertible semestralmente, y continuó haciendo depósitos similares cada 6 meses desde entonces. Después del 1 de mayo de 1992, el banco elevó el interés al 4% convertible semestralmente, Cuánto tuvo en la cuenta precisamente después del depósito del 1 de noviembre de 2000?

R: \$ 6.210,76

9. Cada trimestre el señor García deposita \$ 3200 en su cuenta de ahorros, la cual gana un interés del 3,8% trimestral. Después de tres años, el señor García suspende los depósitos trimestrales y el monto obtenido en ese momento pasa a un fondo de inversión que da el 22% capitalizable cada mes. Si el dinero permaneció 2 años en el fondo de inversión, obtenga el monto final en el fondo.

R: \$ 62.590,20

10. Una computadora cuesta \$ 1050 y el comprador conviene pagar cuotas mensuales durante dos años. Si la tasa del mercado es 14.5% anual, convertible mensualmente, halle el valor de cada cuota.

R: \$ 50,66

11. El día de hoy se contrae una deuda de \$ 20000 y se compromete a pagar en cuotas semestrales vencidas durante 5 años. Hallar el valor de la cuota semestral que debe pagarse si se aplica un interés de 12% anual capitalizable semestralmente.

R: \$ 2.717,36

12. Sustituir una serie de pagos de \$ 10000 al principio de cada año, por el equivalente en pagos mensuales vencidos, con un interés del 8% convertible mensualmente.

R: \$ 869,88

13. Al 1 de mayo de 2000, se tiene \$ 2475.60 en un fondo que paga el 3% convertible trimestralmente. Haciendo depósitos trimestrales iguales en el fondo, el 1 de agosto de 2000 y el último el 1 de noviembre de 2006, tendrá en esta última fecha \$ 10000 en el fondo. Hallar el depósito requerido.

R: \$ 244,61

14. Hoy se depositan \$ 15000 en una cuenta de ahorros que abona el 7 % de interés. Transcurridos 3 años, se hacen nuevos depósitos cada final de año, de modo que a los 5 años, tenga \$ 70000 al efectuar el último depósito. Hallar el valor de los depósitos anuales.

R: \$ 7.690,70

15. Para poder adquirir una casa una pareja piensa realizar, al final de cada mes, depósitos mensuales de \$ 450 en una entidad financiera que abona el 8% con capitalización mensual; durante qué tiempo deberán hacer estos depósitos si desean reunir \$ 25000?

R: 3,95 años.

16. Cuántos pagos completos de \$ 18000 al final de cada mes son necesarios para cancelar una deuda de \$ 120000 considerando una tasa de interés de 15% anual capitalizable mensualmente. ¿Con qué pago final coincidente con el último pago completo se cancelará la citada deuda?

R: 7 pagos completos; \$ 77,38

17. Se adquiere un auto de \$ 13250, con una cuota inicial de \$ 5000. Un mes después empezará una serie de pagos mensuales de \$ 735 cada uno, considerando una tasa del 12% capitalizable mensualmente. Cuántos pagos completos deberá hacer y qué cantidad pagada, un mes después del último pago completo, saldrá la deuda?

R: 11 pagos completos; \$ 709,67

18. Francisco ha depositado al final de cada mes \$ 3500 en una cuenta de ahorros. Al cabo de tres años recibe un monto de \$ 180000. ¿Qué tasa nominal capitalizable mensualmente, ha ganado?

R: 23,32%.

19. Determinar la tasa periódica y la tasa nominal de una serie de 30 pagos mensuales vencidos de \$ 200 si se acumularon \$ 6.377,00.

R: 0.42%; 5%.

20. Para cumplir con una deuda de \$ 20000 se realizaron 20 pagos trimestrales de \$ 1108,31 determinar la tasa nominal de la transacción.

R: 4%

TABLA DE CONTENIDOS

UNIDAD 7.- ANUALIDADES ANTICIPADAS	90
7.1. DEFINICIÓN.....	90
7.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA	90
7.3. VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA	90
7.4. VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA	91
7.5. PAGO PERIÓDICO DE UNA ANUALIDAD CIERTA ORDINARIA ANTICIPADA	92
7.6. DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE PERÍODOS.....	93
7.7. CÁLCULO DE LA TASA PERIÓDICA.....	93
7.8. PROBLEMAS RESUELTOS	94
7.9. PROBLEMAS PROPUESTOS	108
UNIDAD 8.- ANUALIDADES DIFERIDAS.....	110
8.1. DEFINICIÓN.....	110
8.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA	110
8.3. VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA.....	110
8.4. VALOR FUTURO O MONTO DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA	111
8.5. CÁLCULO DE LA RENTA EN UNA ANUALIDAD DIFERIDA	111
8.6. NÚMERO DE PERÍODOS Y TASA PERIÓDICA DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA.....	111
8.7. PROBLEMAS RESUELTOS	112
8.8. PROBLEMAS PROPUESTOS	124
UNIDAD 9.- PERPETUIDADES.....	127
9.1. DEFINICIÓN.....	127
9.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA	127
9.3. VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD PERPETUA	127
9.4. VALOR ACTUAL DE UNA PERPETUIDAD VENCIDA.....	127
9.5. VALOR ACTUAL DE UNA PERPETUIDAD ANTICIPADA.....	128
9.6. VALOR ACTUAL DE UNA PERPETUIDAD CON PAGOS CADA CIERTO PERÍODO	129
9.7. COSTOS ADICIONALES PARA INCREMENTO DE LA VIDA ÚTIL DE UN ACTIVO	130
9.8. COSTOS CAPITALIZADOS	130
9.9. PROBLEMAS RESUELTOS	131
9.10. PROBLEMAS PROPUESTOS	143

7

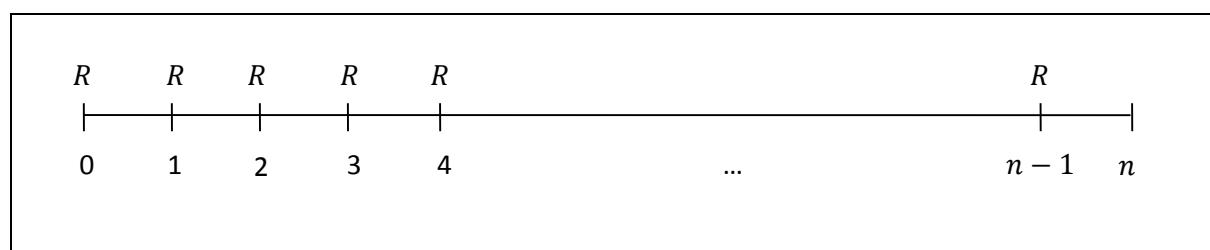
ANUALIDADES ANTICIPADAS

7.1. DEFINICIÓN

Una Anualidad Anticipada es una serie definida de pagos periódicos iguales, realizados al inicio de cada período, tal que: el período de pago o depósito y la capitalización de intereses, coinciden (PORTUS Govinden, 1985).

7.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las anualidades anticipadas tienen la siguiente estructura gráfica:



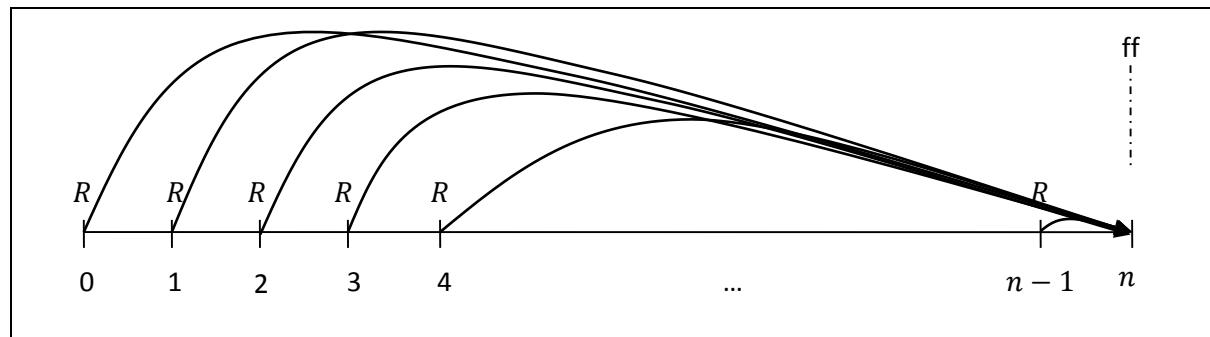
Del gráfico se tiene:

- R:** Es el valor del pago periódico, realizado al inicio de cada período.
- n:** Es el número de períodos de la anualidad anticipada.

7.3. VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

El Valor Futuro o Monto, de una Anualidad Anticipada, es la suma de los valores futuros o montos de cada uno de los **n** pagos o depósitos anticipados, trasladados hasta la fecha final, que conforman la anualidad, (PORTUS Govinden, 1985) es decir:

$$VF = \sum_{i=1}^n M_i$$



El valor futuro entonces es igual a:

$$VF = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_{n-1}$$

Es decir:

$$VF = R(1 + i)^n + R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + R(1 + i)^{n-3} \dots + R(1 + i)^1$$

En esta ecuación, el miembro de la derecha, es la suma de los términos de una progresión geométrica, con las siguientes características:

En esta ecuación, el miembro de la derecha es la suma de los términos de una progresión geométrica de **n** términos con las siguientes características:

- ✓ Primer término **a**: $R(1 + i)^n$
- ✓ Último término **u**: $R(1 + i)$
- ✓ Razón **r**: $(1 + i)^{-1}$

Recordando que la suma de términos de una progresión geométrica está dada por (SPIEGEL Murray R, 1990):

$$S = \frac{ur - a}{r - 1}$$

Se tiene que, el Valor Futuro o Monto de una Anualidad Anticipada es:

$$VF = \frac{R(1 + i)(1 + i)^{-1} - R(1 + i)^n}{(1 + i)^{-1} - 1}$$

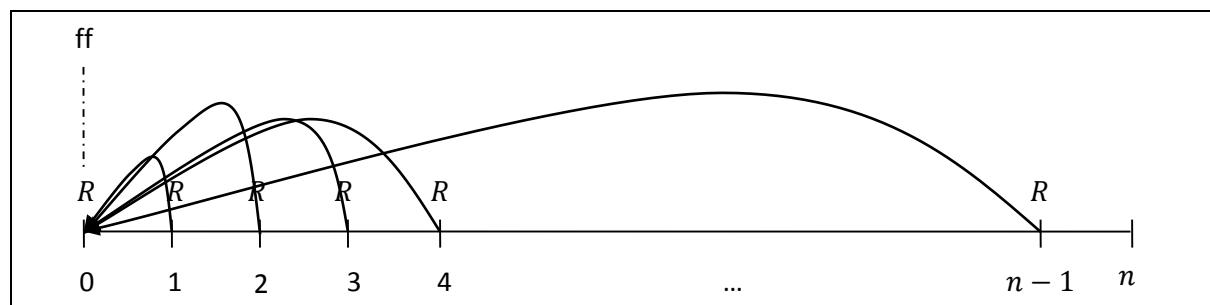
Desarrollando algebraicamente esta expresión, finalmente se tiene que el valor futuro o monto de una anualidad anticipada está dada por:

$$VF = R \left[\frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

7.4. VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

El Valor Presente o Valor Actual de una Anualidad Anticipada, es la suma del Valor Actual, trasladado a fecha de inicio, de los pagos periódicos que conforman dicha anualidad, es decir:

$$VA = \sum_{i=1}^n VA_i$$



El Valor Actual de la anualidad vencida es entonces:

$$VA = VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 \dots + VA_{n-1} + VA_n$$

Es decir:

$$VA = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + R(1+i)^{-4} \dots + R(1+i)^{-(n-1)}$$

Que resulta ser una progresión geométrica de n términos con las siguientes características:

- ✓ Primer término a : R
- ✓ Último término u : $R(1+i)^{-(n-1)}$
- ✓ Razón r : $(1+i)^{-1}$

Recordando que la suma de términos de una progresión geométrica está dada por (PORTUS Govinden, 1985):

$$S = \frac{ur - a}{r - 1}$$

Se tiene que el Valor Presente o Valor Actual de una Anualidad Anticipada es:

$$VA = \frac{R(1+i)^{-(n-1)}(1+i)^{-1} - R}{(1+i)^{-1} - 1}$$

Desarrollando algebraicamente esta expresión finalmente el Valor Actual o Valor Presente de una anualidad cierta ordinaria anticipada está dado por:

$$VA = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]$$

7.5. PAGO PERIÓDICO DE UNA ANUALIDAD CIERTA ORDINARIA ANTICIPADA

El Pago Periódico, o Renta de una Anualidad Cierta Ordinaria Anticipada, se lo determina en función del Valor Futuro o Monto, o del Valor Actual o Valor Presente, es decir:

➤ **En función del Valor Futuro o Monto**

$$R = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1 \right]}$$

➤ **En función del Valor Actual o Valor Presente**

$$R = \frac{VA}{\left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]}$$

7.6. DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE PERÍODOS

Al igual que en el caso de las anualidades vencidas, para determinar el número de períodos que conforman una anualidad anticipada, se lo hará a partir de las expresiones para Valor Futuro o Monto y Valor Actual o Valor Presente; tomando en cuenta que al tratarse n de un exponente, será necesario utilizar logaritmos.

➤ **A partir del Valor Futuro**

$$n = \frac{\log \left[\left(\frac{VF}{R} + 1 \right) \times i + 1 \right]}{\log(1 + i)} - 1$$

➤ **A partir del Valor Actual**

$$n = - \left[\frac{\log \left[1 - \left(\frac{VA}{R} - 1 \right) \times i \right]}{\log(1 + i)} - 1 \right]$$

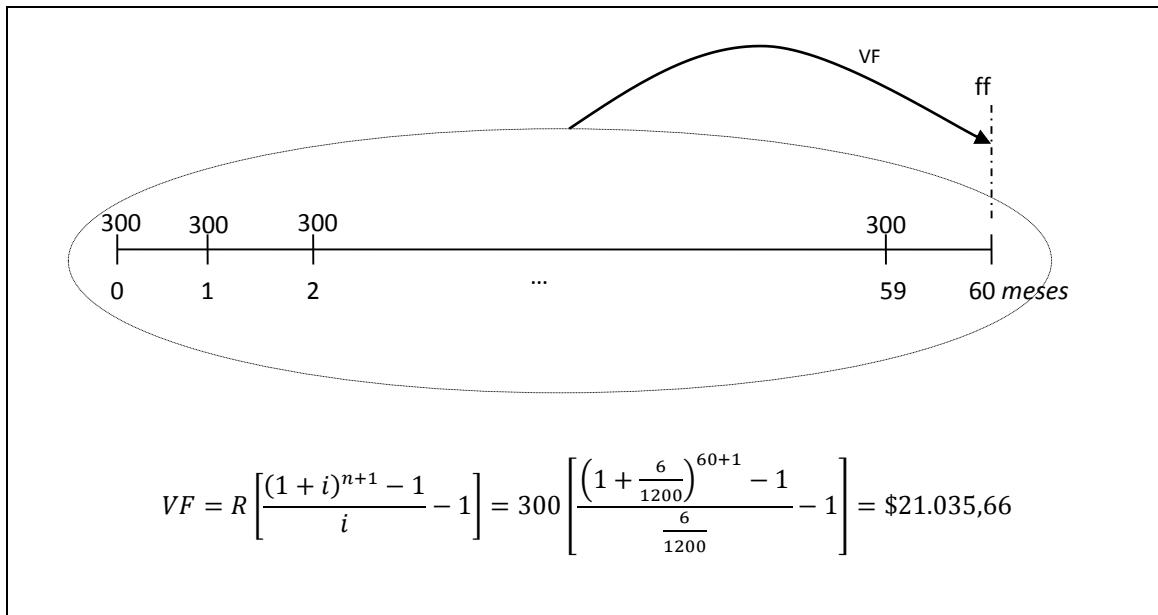
7.7. CÁLCULO DE LA TASA PERIÓDICA

La tasa periódica de una anualidad, como se vio en el caso de las anualidades vencidas, se lo determina mediante la lectura e interpolación de tablas, o en su defecto; mediante el uso de la función electrónica TASA de la Hoja Electrónica de Cálculo Excel.

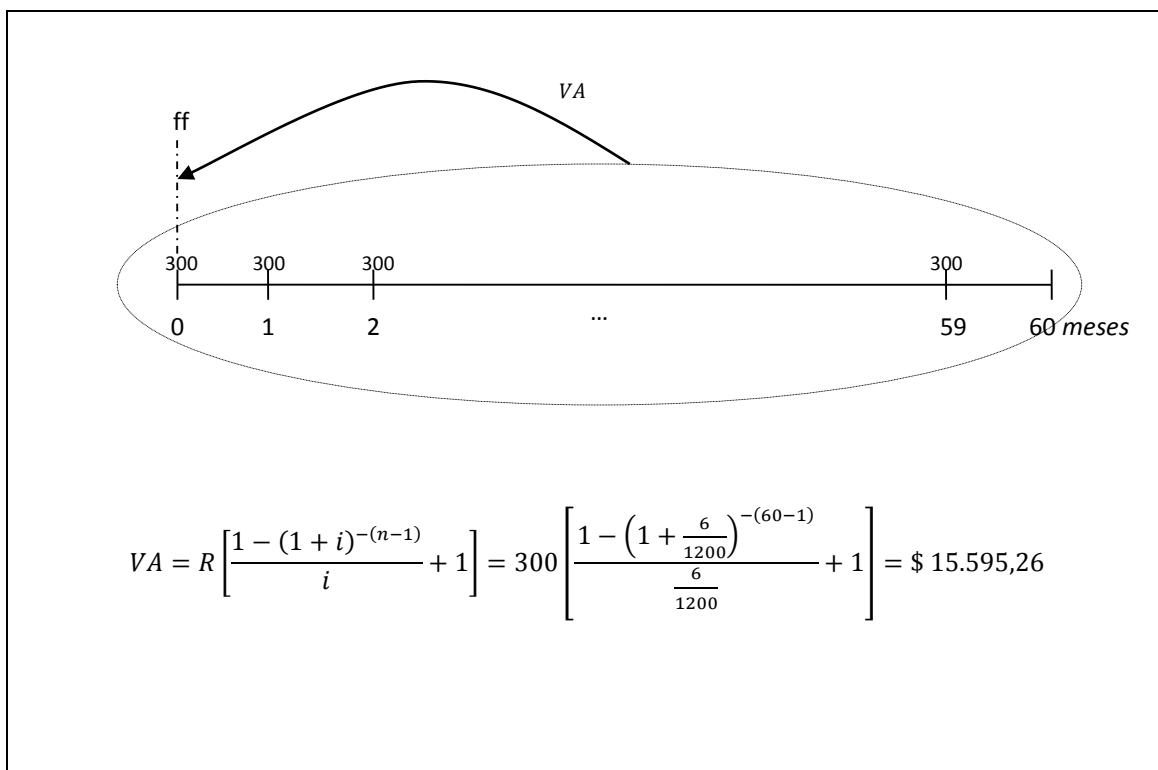
7.8. PROBLEMAS RESUELTOS

- Hallar el Valor futuro y el Valor actual de la anualidad anticipada: \$ 300 mensuales durante 5 años al 6% capitalizable mensualmente.

Monto o Valor Futuro de la Anualidad Anticipada:

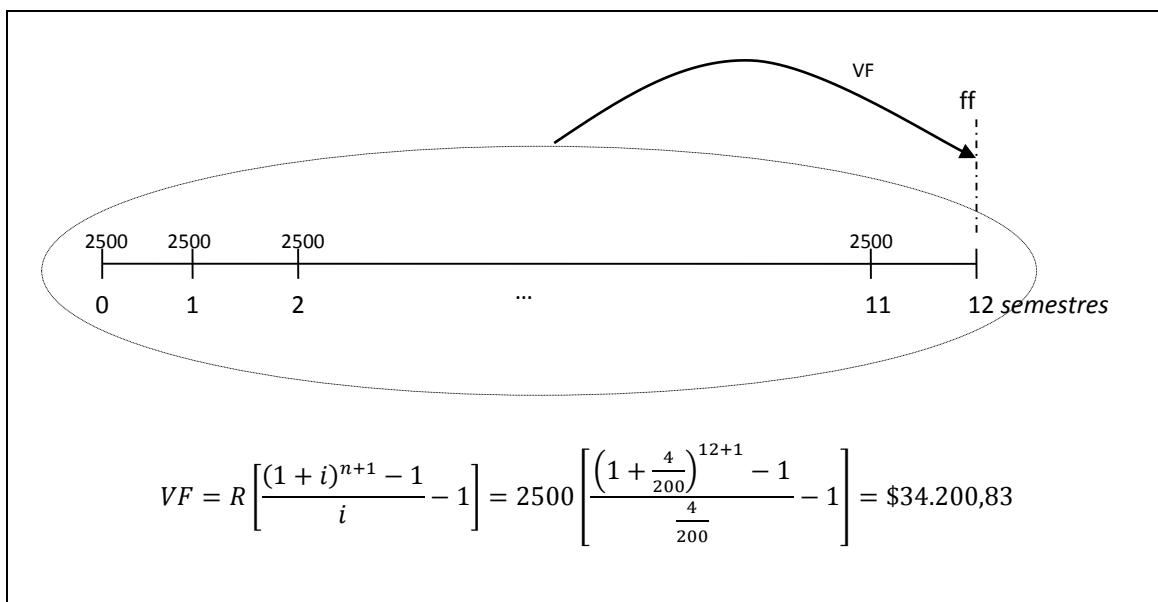


Valor Actual de la Anualidad Anticipada:

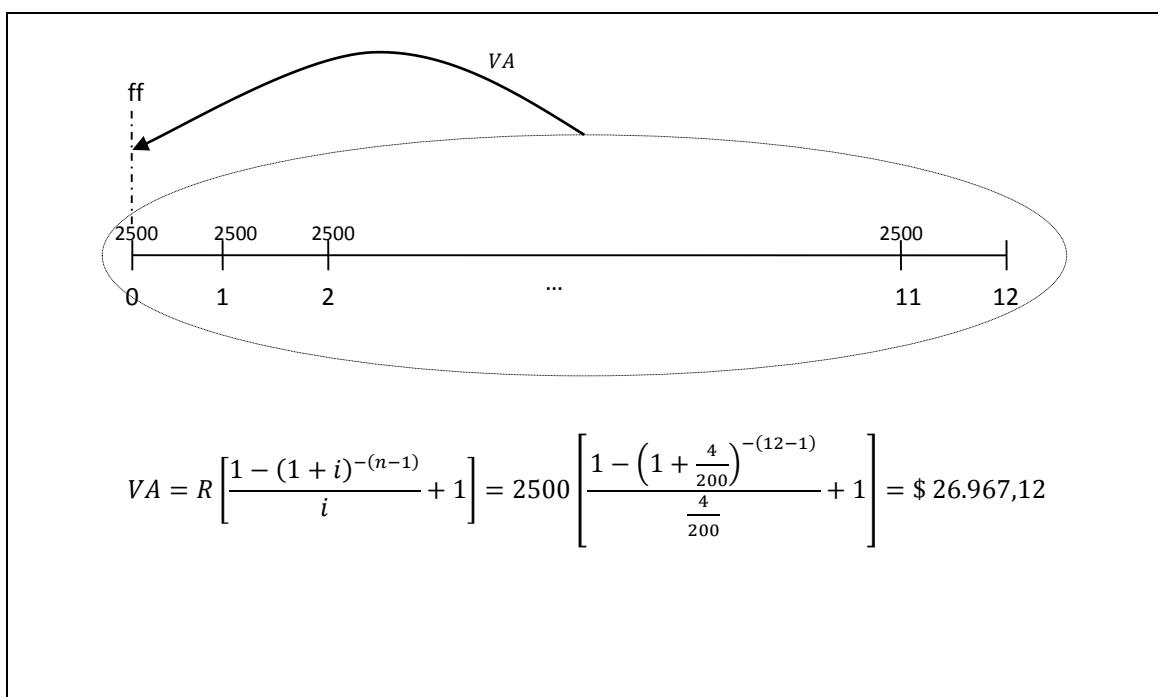


2. Hallar el Valor Futuro y el Valor Actual de una anualidad anticipada de \$ 2500 semestrales, por 6 años al 4% capitalizable semestralmente.

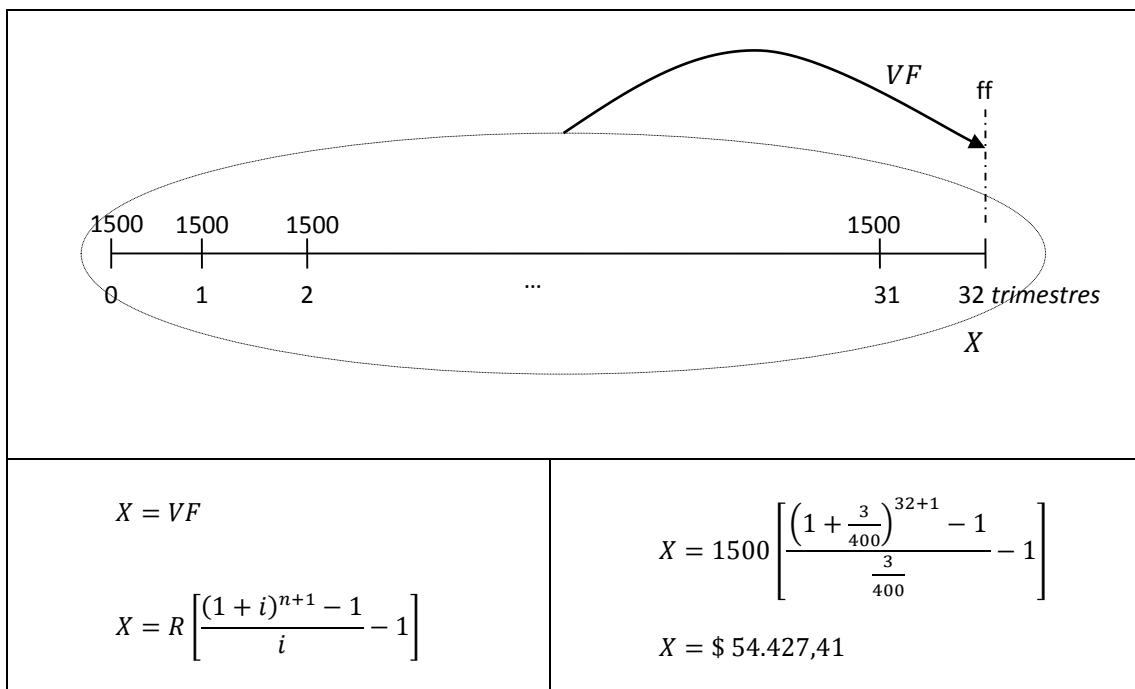
Monto o Valor futuro de la Anualidad Anticipada:



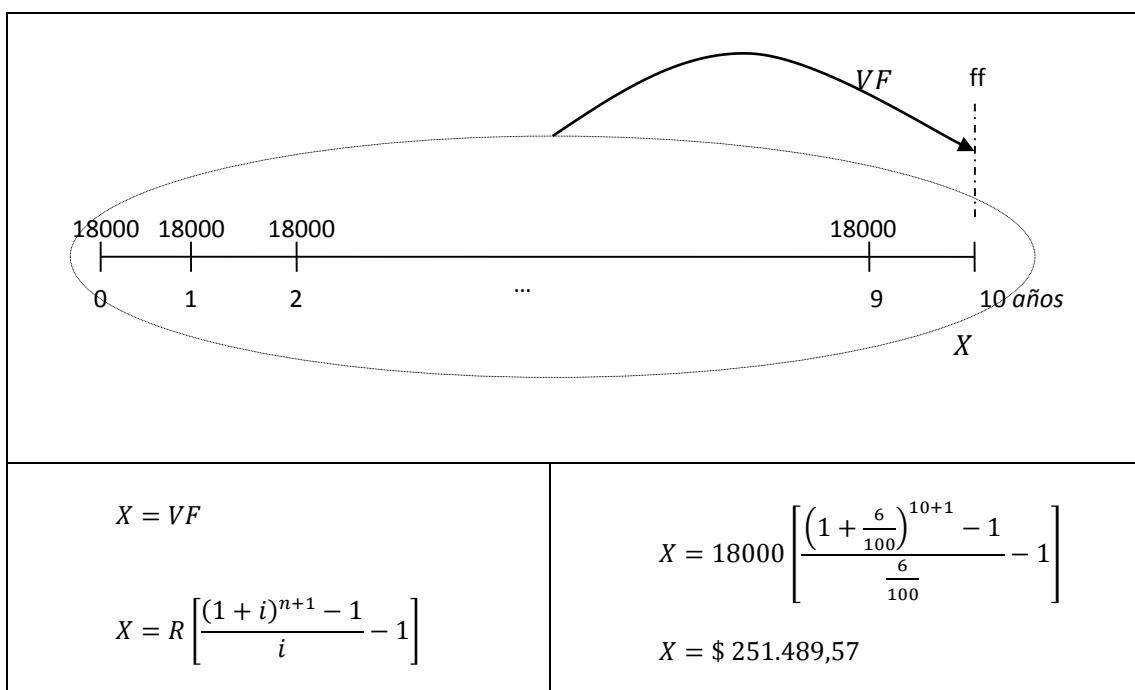
Valor Actual de la Anualidad Anticipada:



3. Una empresa reserva \$ 1500 al principio de cada trimestre para construir un fondo para renovación de activos. Si el fondo acredita el 3% capitalizable trimestralmente, cuál será el monto que dispondrá el fondo después de 8 años?



4. Gina García alquila un edificio en \$ 25000 anuales por adelantado e invierte \$ 18000 de cada pago en un fondo que reconoce el 6%. Cuál es el importe del fondo después de 10 años.



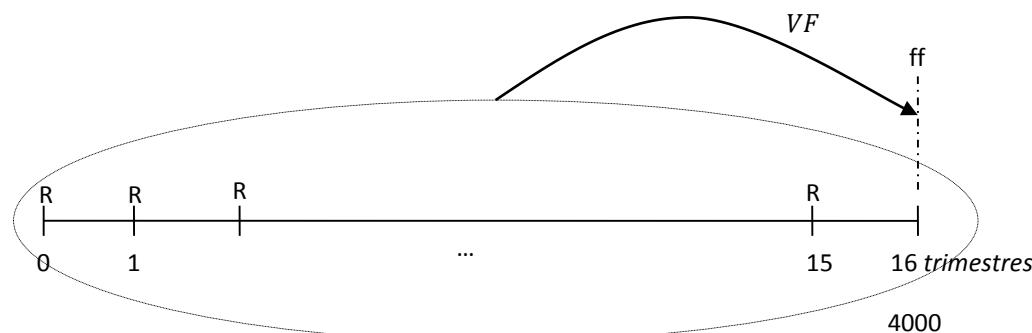
5. Calcular el valor de contado de una propiedad vendida a 8 años plazo con pagos de \$ 15200 semestrales por semestre anticipado, si la tasa de interés es del 10% convertible semestralmente.

 $X = VA$ $X = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]$	$X = 15200 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{10}{200}\right)^{-(16-1)}}{\frac{10}{200}} + 1 \right]$ $X = \$ 172.970,80$
---	--

6. Un auto puede ser adquirido mediante cuotas anticipadas de \$ 950 mensuales, durante 18 meses, suponiendo intereses al 8% convertible mensualmente, cual es el valor de contado del auto?

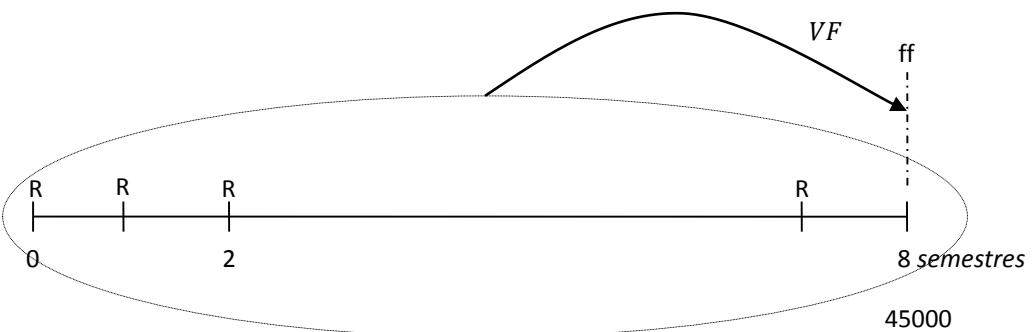
 $X = VA$ $X = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]$	$X = 950 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{-(18-1)}}{\frac{8}{1200}} + 1 \right]$ $X = \$ 161.70,59$
---	---

7. Con el fin de disponer de \$ 4000 dentro de 4 años, una empresa decide realizar depósitos trimestrales por anticipado en un fondo que reconoce el 8% con capitalización trimestral, encontrar el valor del depósito que se debe realizar.



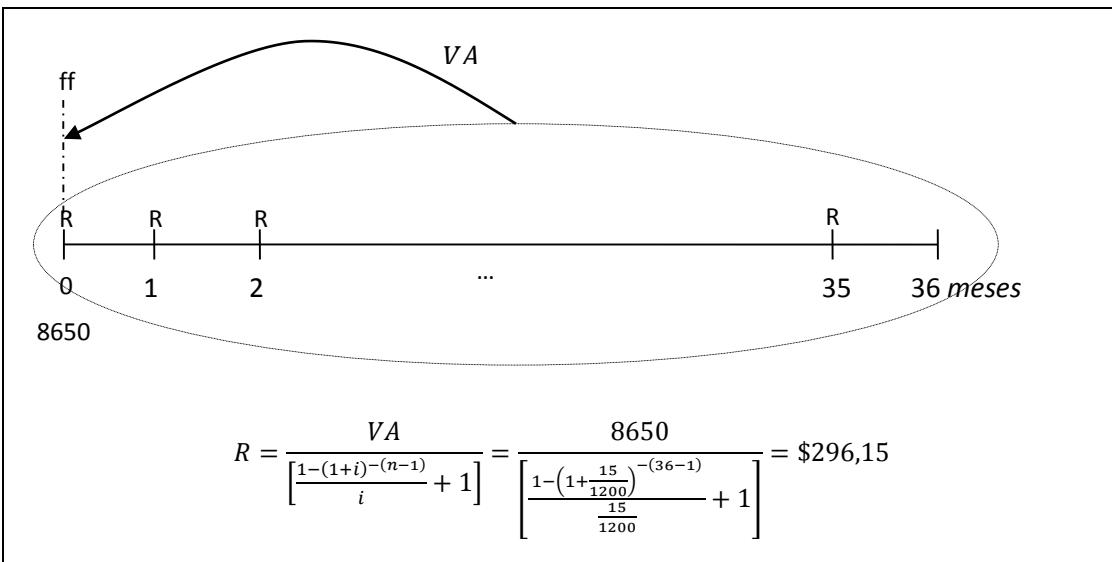
$$R = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1 \right]} = \frac{4000}{\left[\frac{\left(1+\frac{8}{400}\right)^{16+1}-1}{\frac{8}{400}} - 1 \right]} = \$ 210,39$$

8. Para reposición de activos, una empresa requiere de \$ 45000 dentro de 4 años, decide entonces realizar depósitos semestrales por anticipado en un fondo que reconoce el 10% con capitalización semestral, encontrar el valor del depósito que se debe realizar.

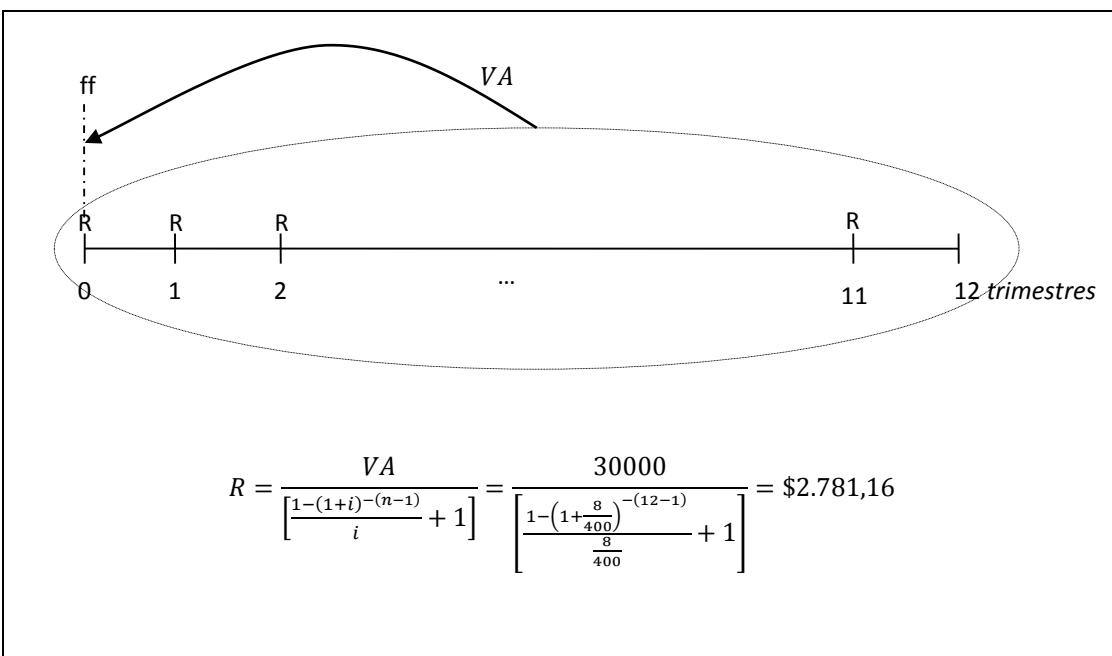


$$R = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1 \right]} = \frac{45000}{\left[\frac{\left(1+\frac{10}{200}\right)^{8+1}-1}{\frac{10}{200}} - 1 \right]} = \$4.488,08$$

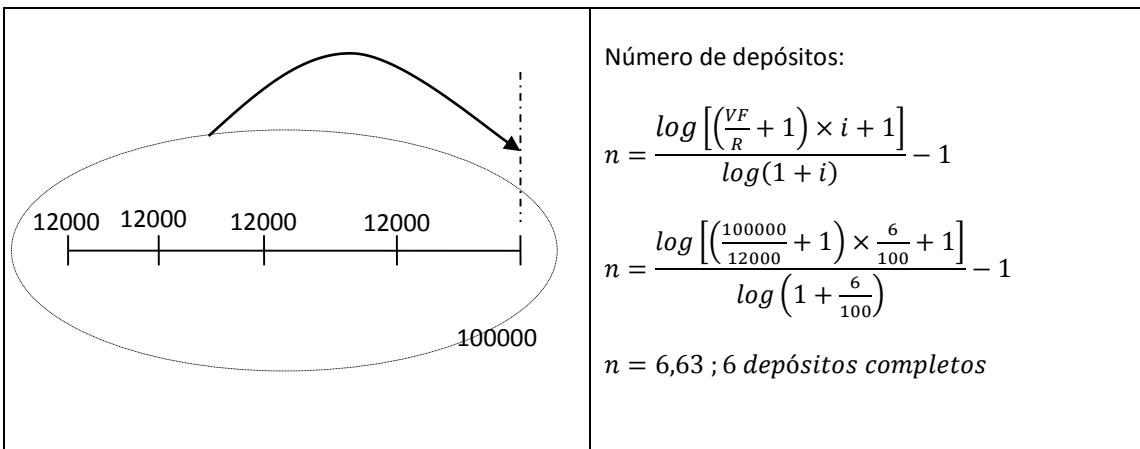
9. El valor de contado de un coche usado es de \$ 8650, una persona desea pagar en 36 abonos mensuales, venciendo el primero el día de la compra. Si se carga el 15% convertible mensualmente, hallar el importe del pago mensual.



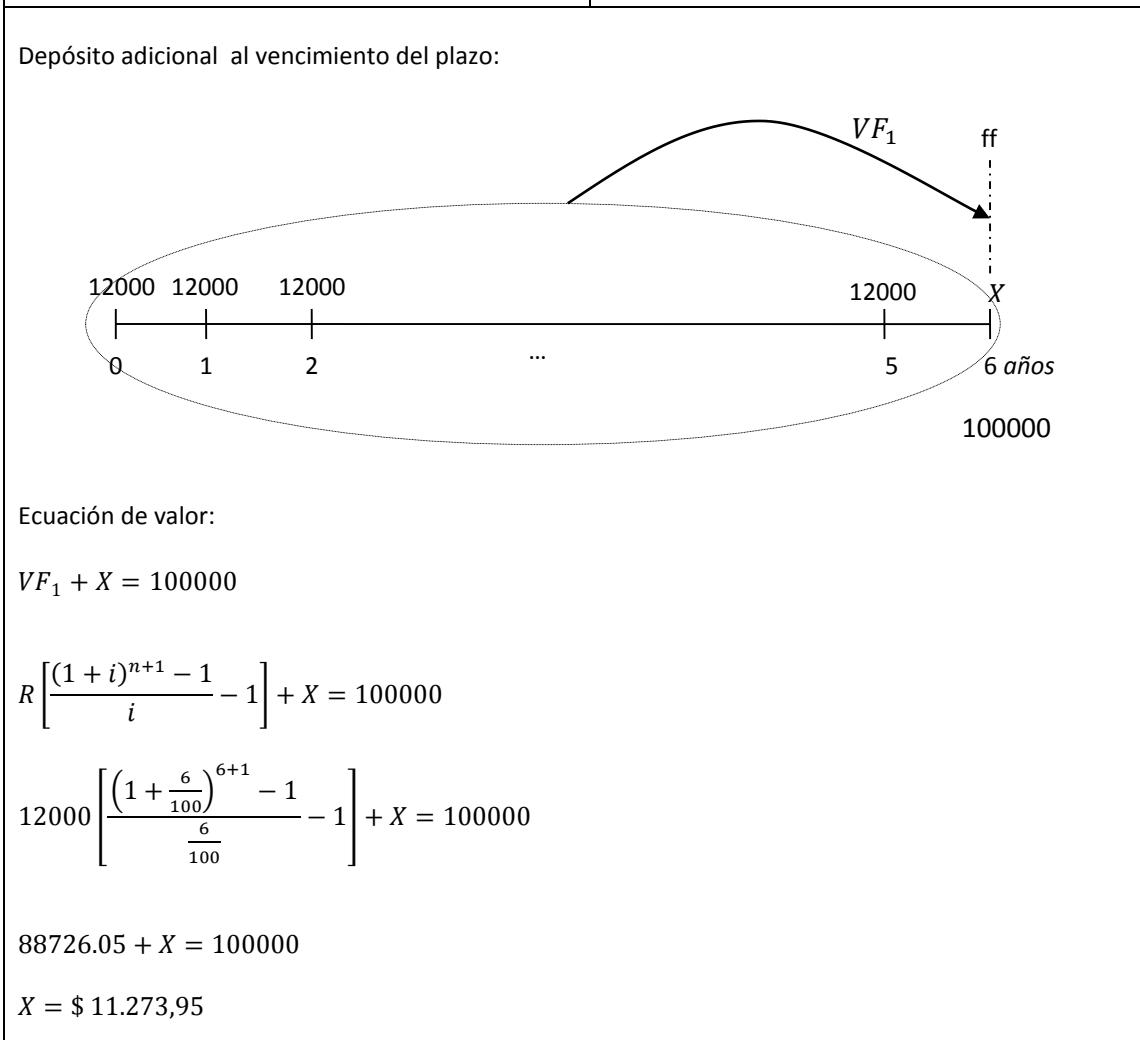
10. Una empresa adquiere una deuda de \$30000 y propone pagar mediante cuotas trimestrales anticipadas por 3 años; encontrar el valor de la cuota trimestral anticipada si se aplica un interés de 8% anual capitalizable trimestralmente.



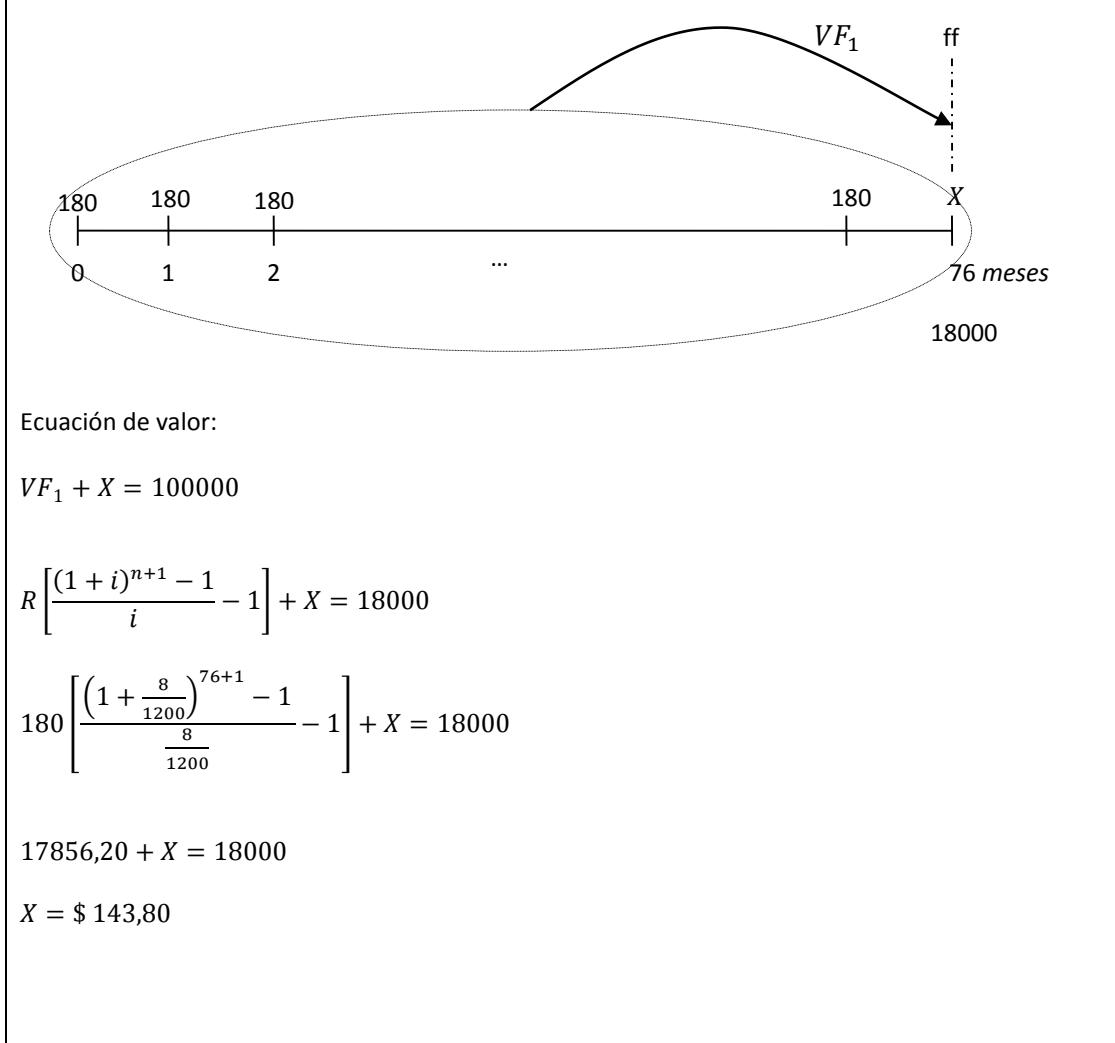
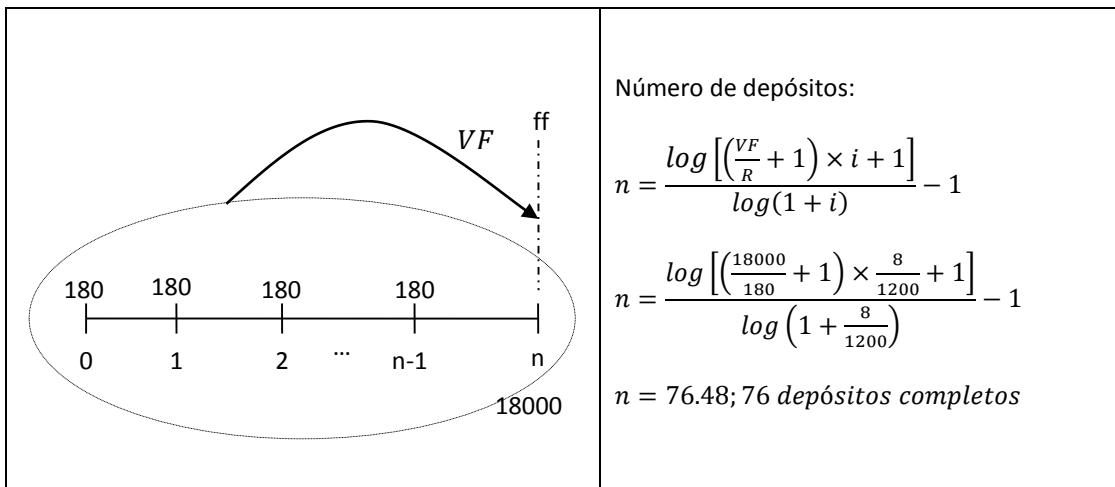
11. Para establecer un fondo de \$ 100000 se consigna a principio de cada año \$12000 en una cuenta de ahorros que paga el 6%. Calcular el tiempo de la transacción, el número de depósitos completos y encuentre el valor del depósito adicional realizado al vencimiento del plazo.



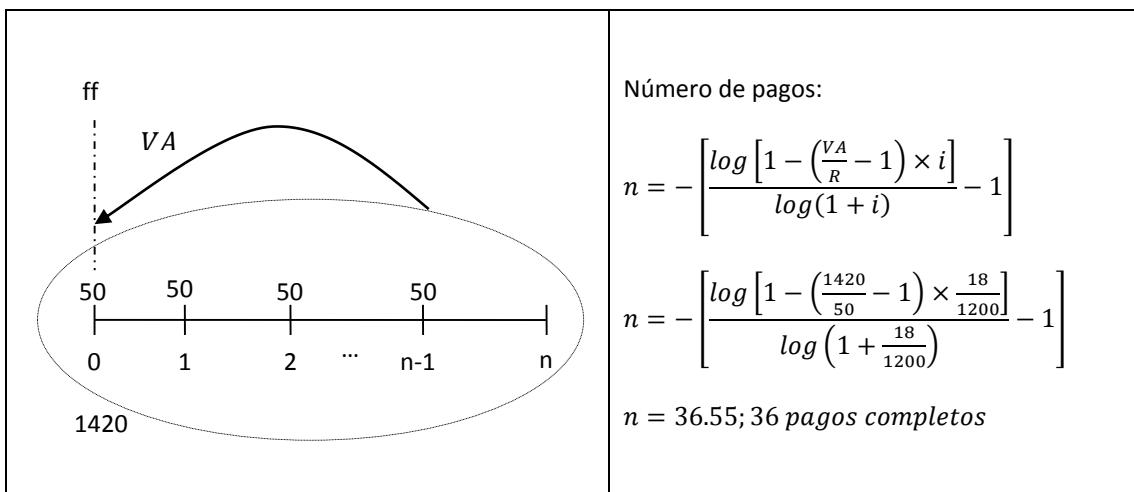
Depósito adicional al vencimiento del plazo:



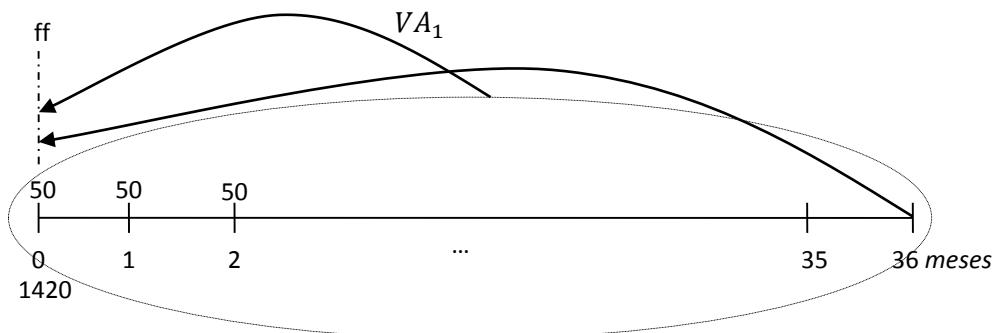
12. Un empleado consigna \$180 al principio de cada mes en una cuenta de ahorros que reconoce el 8%, convertible mensualmente, en cuánto tiempo y con qué pago final, al vencimiento del plazo, logrará ahorrar \$18000.



13. Un comerciante estima que puede aumentar sus ventas ofreciendo refrigeradoras que valen \$1420 de contado en cuotas mensuales de \$ 50 sin cuota inicial, obligando a la primera cuota el pago inmediato; hallar el número de cuotas completas y el valor de la cuota adicional al vencimiento del plazo si se carga el 18% anual, capitalizable mensualmente.



Depósito adicional al vencimiento del plazo.



Ecuación de valor:

$$VA_1 + VA_2 = 1420$$

$$R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] + \frac{M}{(1 + i)^n} = 1420$$

$$50 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{-(36-1)}}{\frac{18}{1200}} + 1 \right] + \frac{X}{\left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{36}} = 1420$$

$$1403.78 + \frac{X}{\left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{36}} = 1420$$

$$X = 16.22 \times \left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{36}$$

$$X = \$27,72$$

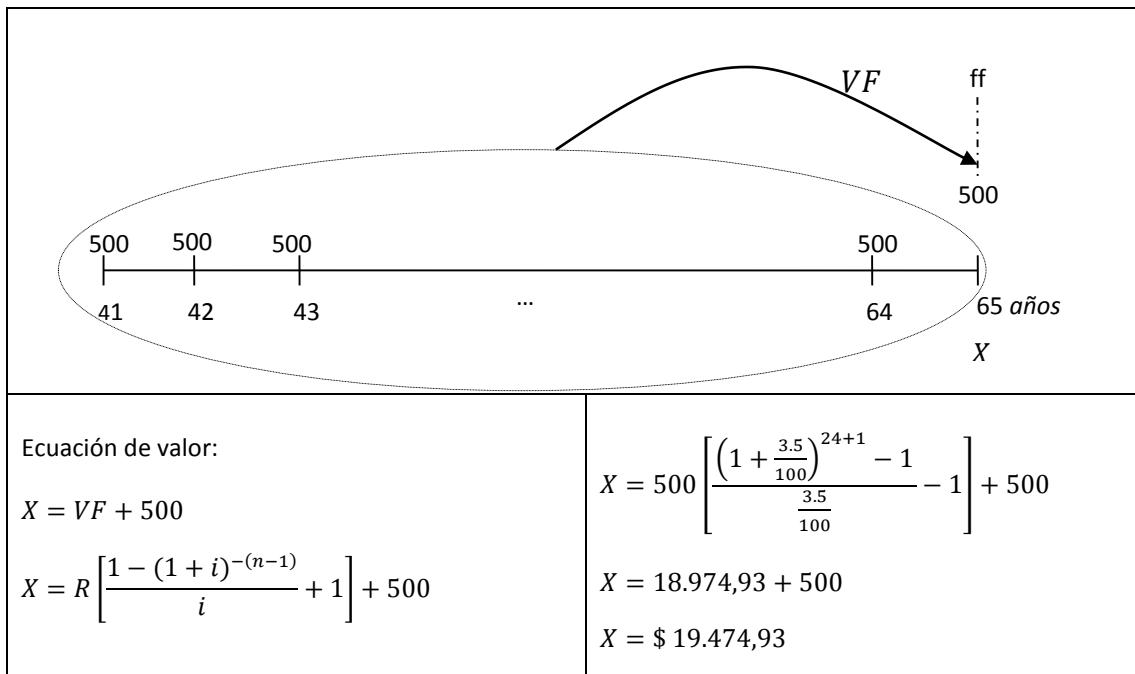
14. Una deuda de \$60000 con interés del 12% capitalizable semestralmente, se conviene en cancelar de inmediato, con pagos semestrales de \$5000. Hallar el número de pagos y el valor del pago final realizado al vencimiento del plazo.

	<p>Número de pagos:</p> $n = - \left[\frac{\log \left[1 - \left(\frac{VA}{R} - 1 \right) \times i \right]}{\log(1 + i)} - 1 \right]$ $n = - \left[\frac{\log \left[1 - \left(\frac{60000}{5000} - 1 \right) \times \frac{12}{200} \right]}{\log \left(1 + \frac{12}{200} \right)} - 1 \right]$ <p>$n = 19,51; 19$ pagos completos</p>
<p>Pago adicional al vencimiento del plazo:</p>	<p>Ecuación de valor:</p> $VA_1 + VA_2 = 60000$ $R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] + \frac{M}{(1 + i)^n} = 60000$ $5000 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{200} \right)^{-(19-1)}}{\frac{12}{200}} + 1 \right] + \frac{X}{\left(1 + \frac{12}{200} \right)^{19}} = 60000$ $59138.02 + \frac{X}{\left(1 + \frac{12}{200} \right)^{19}} = 60000$ $X = 861.98 \times \left(1 + \frac{12}{200} \right)^{19}$ $X = \$2.608,01$

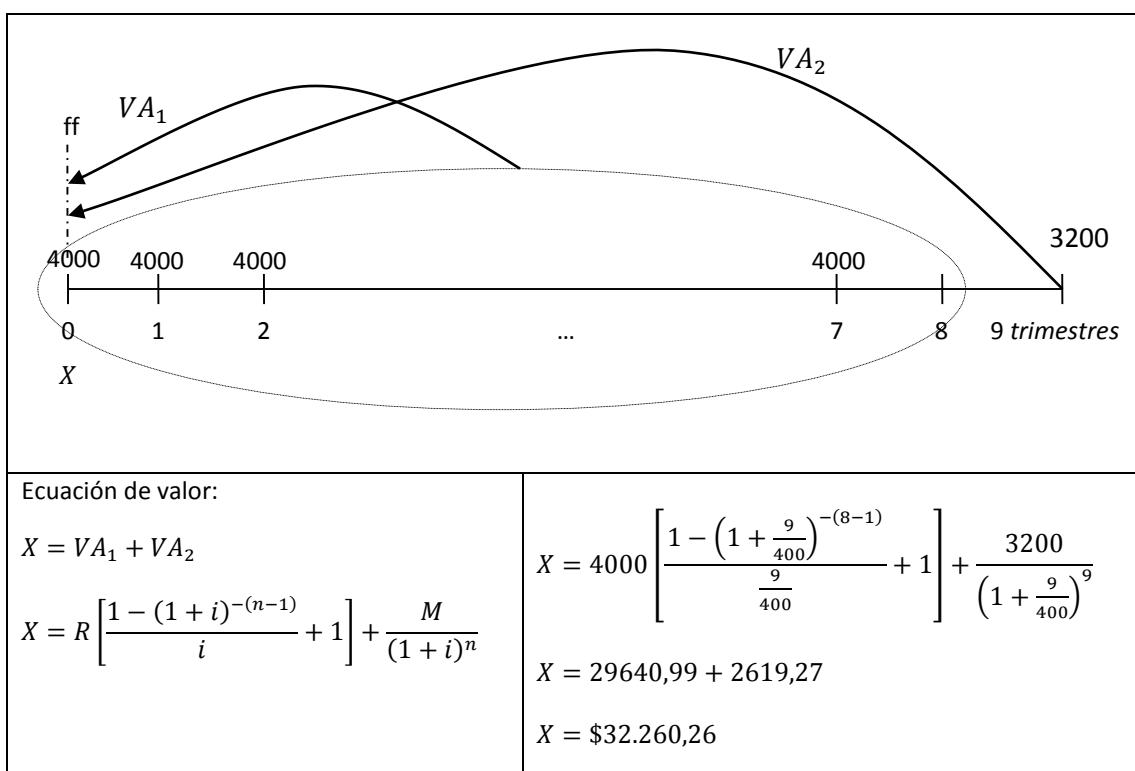
15. Una persona recibe tres ofertas por la compra de su propiedad: (a) \$400000 de contado, (b) \$190000 de contado y \$50000 semestralmente durante 2.5 años, (c) \$ 20000 por trimestre anticipado durante 3 años y un pago de \$ 250000 al finalizar el cuarto año; Que oferta debe preferir si la tasa nominal de interés es del 8%?, capitalizable de acuerdo con dada oferta.

<p>Sea X el Valor Actual de cada una de las ofertas, entonces:</p>	
<p>ff 400000 0 X</p>	<p>a. Primera alternativa:</p> $X = VA$ $X = \$ 400.000,00$
<p>ff VA_1 190000 50000 50000 50000 0 1 2 ... 4 5 semestres X</p>	<p>b. Segunda Alternativa:</p> $X = 190000 + VA_1$ $X = 190000 + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$ $X = 190000 + \frac{50000 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200} \right)^{-5} \right]}{\frac{8}{200}}$ $X = 190000 + 222591,12$ $X = \$ 412.591,12$
<p>ff VA_1 VA_2 20000 20000 20000 20000 250000 0 1 2 ... 11 12 ... 16 trimestres X</p>	<p>c. Tercera Alternativa:</p> $X = VA_1 + VA_2$ $X = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] + \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = 20000 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{-(12-1)}}{\frac{8}{400}} + 1 \right] + \frac{250000}{\left(1 + \frac{8}{400} \right)^{16}}$ $X = 215736.96 + 182111.45$ $X = \$ 397.848,41$
<p>Decisión: El vendedor deberá escoger la segunda alternativa, dado que presenta el Valor Actual más alto.</p>	

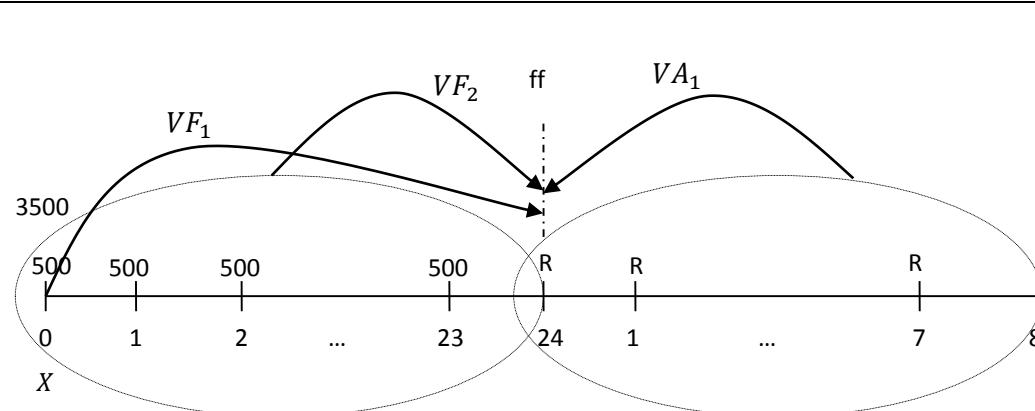
16. Principiando al cumplir 41 años y terminando de cumplir 65, una persona depositó 500 anuales en un fondo que paga 3.5 % efectivo ¿Cuánto hay en el fondo, inmediatamente después de realizar el depósito en su 65º cumpleaños?



17. Calcular el valor de contado de un equipo médico que se vende a 2 años plazo, con el 9% de interés convertible trimestralmente y con pagos trimestrales anticipados de \$4000, y un último pago de \$3200 a los 2 años 3 meses.



18. El día de hoy, Galo Bonilla deposita \$ 500 en una cuenta cuyo saldo a la fecha del depósito es de \$ 3500; y cada mes continúa con dichos depósitos por 2 años con un interés del 8% capitalizable mensualmente; precisamente al finalizar el segundo año va a empezar a realizar 8 retiros semestrales considerando una tasa del 12% capitalizable semestralmente. Encontrar el valor de los retiros semestrales de manera que la cuenta se liquide.



Ecuación de valor:

$$\text{Depósitos} = \text{Retiros}$$

$$VF_1 + VF_2 = VA_1$$

$$C(1+i)^n + R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right] = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]$$

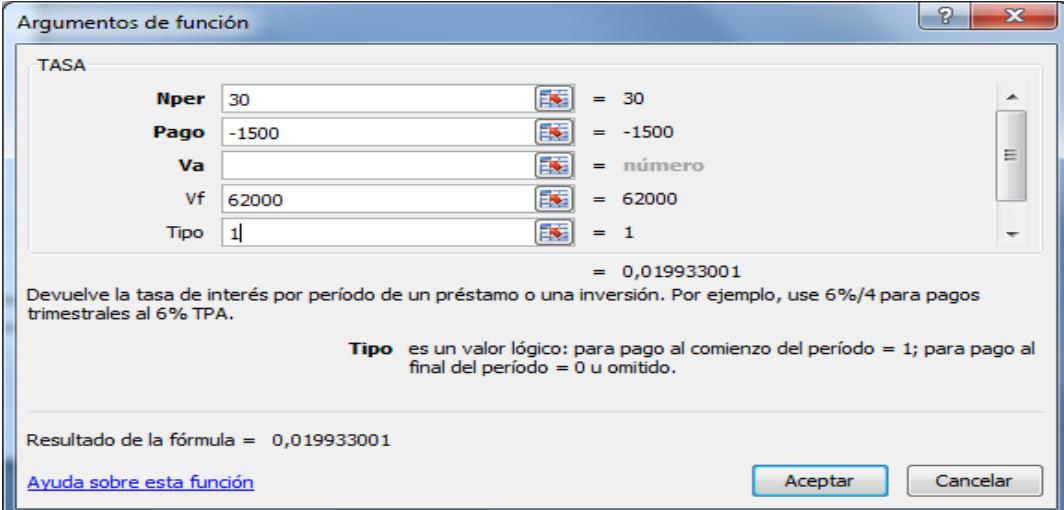
$$3500 \left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{24} + 500 \left[\frac{\left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{24+1} - 1}{\frac{8}{1200}} - 1 \right] = R \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{200}\right)^{-(8-1)}}{\frac{12}{200}} + 1 \right]$$

$$4015.11 + 13053.04 = R \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{200}\right)^{-(8-1)}}{\frac{12}{200}} + 1 \right]$$

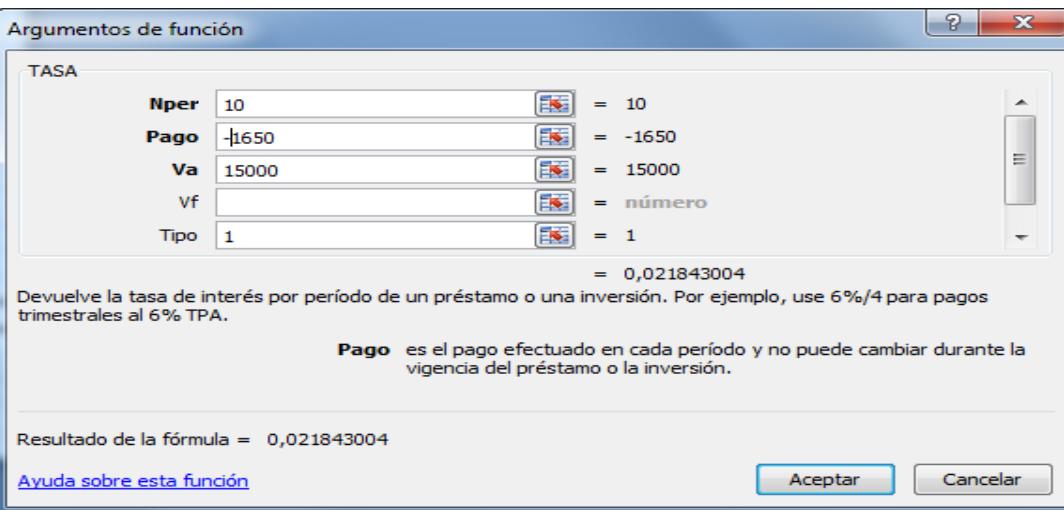
$$R = \frac{17068.15}{\left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{200}\right)^{-(8-1)}}{\frac{12}{200}} + 1 \right]}$$

$$R = \$ 2.606,68$$

19. A qué tasa nominal, 30 depósitos semestrales por \$1500 por semestre anticipado darán un monto de \$62000.

$R = \$ 1500; n = 30;$ $VF = \$ 62000; m = 2;$ $i = ? \quad j = ?$	$i = 0.0199 = 1.99\%$ $j = i \times m$ $j = 1.999\% \times 2 = 3.99\%$
	

20. Una deuda de \$ 15000 va a pagarse con 10 pagos de \$ 1650 por trimestre anticipado. A qué tasa nominal se pactó la transacción?

$R = \$ 1650; n = 10;$ $VF = \$15000; m = 4;$ $i = ? \quad j = ?$	$i = 0.0218 = 2.18\%$ $j = i \times m$ $j = 2.18\% \times 4 = 8.74\%$
	

7.9. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el Valor Futuro y el Valor Actual de la anualidad anticipada: \$1500 trimestrales, durante 7 años al 7% convertible trimestralmente.
R: \$ 54.544,94; \$ 33.557,59
2. Hallar el Valor Futuro y el Valor Actual de la anualidad anticipada: \$2500 anuales durante 7 años al 8% efectivo anual.
R: \$ 24.091,57; \$ 14.057,20
3. Los dineros de un contrato de arrendamiento por un año, que empieza hoy, con canon de \$ 3000 mensuales anticipados, se depositan en una corporación que ofrece el 10% convertible mensualmente. Hallar el acumulado obtenido una vez vencido el contrato.
R: \$ 38.010,84
4. Una persona ahorra \$ 1000 mensuales empezando hoy y haciéndolo en 2 años en una institución financiera que reconoce el 12% capitalizable mensualmente para el primer año y el 13% capitalizable mensualmente para el segundo año. Cuál es el acumulado al final de los 24 meses.
R: \$ 27.456,92
5. Calcular el valor de contado de una propiedad vendida a 10 años plazo con pagos de \$ 3000 trimestrales por trimestre anticipado; si la tasa de interés del 12% convertible trimestralmente.
R: \$ \$71.424,65
6. Un equipo puede ser adquirido mediante \$ 150 de cuota inicial y \$ 150 mensuales, por los próximos 12 meses; suponiendo intereses al 7% convertible mensualmente, cual es el valor de contado del equipo?
R: \$ 1.883,57
7. Una persona recibe tres ofertas por la venta de su propiedad: (a) \$500000 de contado, (b) \$300000 de contado y \$60000 semestralmente durante 2 años, (c) \$ 25000 por trimestre anticipado durante 3 años y un pago de \$ 320000 al finalizar el cuarto año; Que oferta debe preferir si la tasa nominal de interés es del 8%, capitalizable de acuerdo con la transacción.
R: La segunda oferta.
8. El dueño de una propiedad cobra por el alquiler de ella \$ 4000 por mes anticipado. Hallar la pérdida que le significa en 2 años, si el arrendatario le pagó por mes vencido. Tasa nominal 12% capitalizable mensualmente.
R: \$ 849,73
9. Se adquiere una deuda de \$15000 para ser pagada mediante cuotas mensuales anticipadas por 2 años, y un pago adicional de \$ 3500 al final de los dos años. Encontrar el valor de la cuota mensual anticipada si se aplica un interés de 15% anual capitalizable mensualmente.
R: \$ 570,64
10. Juan dispone en su cuenta \$ 2500; a partir de hoy y al principio de cada mes durante 3 años realiza depósitos de \$400, el banco paga el 8% capitalizable mensual. Al cumplir tres años retira el dinero y lo deposita en un fondo para realizar retiros semestrales anticipados de \$ 3000. Cuántos retiros podrá realizar y el cuál es valor del último retiro, si el fondo reconoce el 8% capitalizable semestralmente.
R: 7 retiros completos; \$ 976,19 junto con el último retiro.

11. Qué suma debe depositarse a principio de cada año, en un fondo que abona el 6%, para proveer la sustitución de los equipos de una compañía que tienen un costo de \$20000 y una vida útil de 5 años si el valor de salvamento se estima el 10% del costo?

R: \$ 3.012,39

12. Hallar el valor de la renta de una anualidad pagadera el principio de cada trimestre equivalente a pagos de \$10000 al final de cada periodo de 5 años suponiendo interés al 4% convertible trimestralmente.

R: \$ 449,66

13. Hallar el valor de la renta de una anualidad pagadera el principio de cada semestre equivalente a pagos de \$50000 al principio de cada periodo de 10 años, suponiendo interés al 4% convertible semestralmente.

R: \$ 2.997,88

14. Sofía Rodríguez recibe un préstamo de \$ 5000 que deberá cubrir mediante 24 pagos mensuales, al principio de cada mes, correspondiendo el primer pago el día de hoy; si la tasa del préstamo es el 14% convertible mensualmente, cuál es el valor de los pagos que debe realizar?

R: \$ 237,30

15. Se va a construir un fondo de \$ 60000, para lo cual conviene empezar de inmediato con depósitos semestrales de \$8000; si el fondo reconoce el 7% capitalizable semestralmente, hallar el número de depósitos completos y el valor del depósito adicional al vencimiento del plazo para lograr el objetivo.

R: 6 depósitos completos; Depósito adicional de \$ 5.764,64

16. Se requiere establecer un fondo de \$ 100000, se consigna a principios de cada año \$ 5000 en una cuenta de ahorros que abona el 6%. Calcular el número de depósitos completos necesarios y el valor del último depósito adicional al vencimiento del plazo para lograr el objetivo propuesto.

R: 12 depósitos completos; Depósito adicional de \$ 10.589,31

17. Con el fin de incentivar a sus clientes, un comerciante estima que puede aumentar sus ventas, ofreciendo televisores que valen \$750 de contado en cuotas mensuales anticipadas de \$75. Hallar el número de cuotas y el valor adicional al vencimiento del plazo si se carga el 10% de interés convertible mensualmente.

R: 10 pagos completos; Pago adicional de \$ 29,65

18. Una deuda de \$ 35000 con interés del 8% capitalizable semestralmente, se conviene en cancelar de inmediato, con pagos semestrales de \$ 2500; Hallar el número de pagos y el valor del pago adicional realizado en un semestre más tarde para cancelar la deuda.

R: 19 pagos completos; Pago adicional de \$ 1.866,31

19. A qué tasa nominal, 12 depósitos semestrales por \$ 2800 por semestre anticipado darán un monto de \$ 45000.

R: 8,84%

20. Una máquina industrial cuyo valor de contado es de \$ 8000 puede adquirirse con 10 pagos trimestrales anticipados de \$865 cada uno. Hallar la tasa periódica y la tasa nominal de la transacción.

R: 7,12%

8

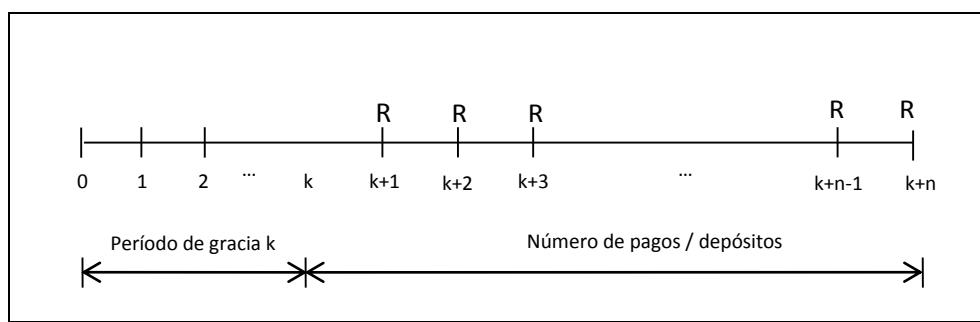
ANUALIDADES DIFERIDAS

8.1. DEFINICIÓN

Una anualidad diferida, es una serie definida de pagos periódicos iguales, realizados al final de cada período, tal que: el primer pago, se realiza luego de haber transcurrido algunos períodos de pago; **al tiempo transcurrido antes del primer pago, se denomina tiempo de gracia.** (CISSELL, CISSELL, & FLASPOHLER, 1996)

8.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Salvo lo contrario, las anualidades diferidas se consideran como vencidas; es decir: el pago se lo realizará al final de cada período; gráficamente, las anualidades diferidas tienen la siguiente estructura:

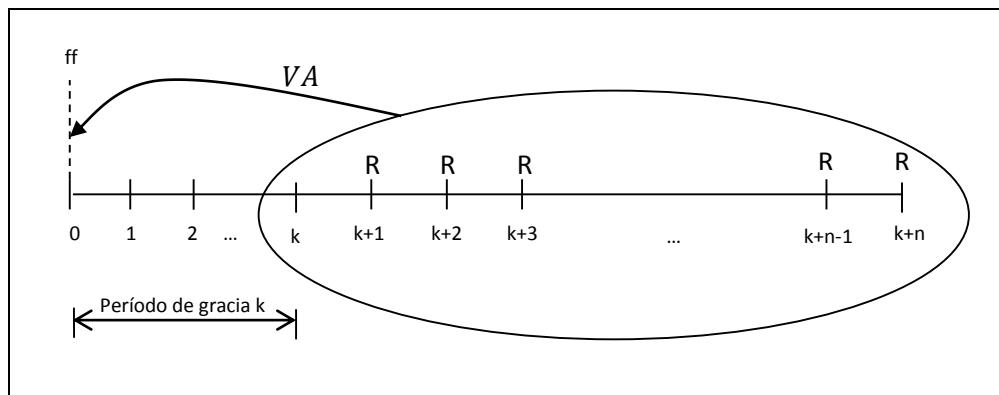


Del gráfico se tiene:

- **R** es el valor del pago periódico realizado al final de cada período.
- **n** es el número de períodos de la anualidad vencida.
- **k**: es el número de períodos antes de realizar el primer pago (período de gracia).
- El primer pago se realiza al final del primer período, el segundo pago al final del segundo período y así sucesivamente para los demás pagos, el último pago se hará al final del último período.

8.3. VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA

El Valor Actual o Valor Presente de una anualidad diferida es el Valor Actual, considerado como pago único de la anualidad formada para los n períodos de pago, proyectado a k períodos, es decir:



$$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} \times (1 + i)^{-k}$$

Que puede escribirse como:

$$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i(1 + i)^k}$$

8.4. VALOR FUTURO O MONTO DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA

El Valor Futuro o Monto de una Anualidad Diferida, es el valor del monto de la Anualidad Vencida, es decir:

$$VF = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

El lector podrá observar que en el Valor Futuro o Monto de una Anualidad Diferida, el período de gracia no interviene.

8.5. CÁLCULO DE LA RENTA EN UNA ANUALIDAD DIFERIDA

Como se ha visto en el caso de las anualidades anteriores, el valor del pago periódico o Renta se determina en función del Valor Actual y del Valor Futuro de la Anualidad, entonces:

En términos del Valor Actual:

$$R = \frac{VA \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

En términos del Valor Futuro:

$$R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$$

8.6. NÚMERO DE PERÍODOS Y TASA PERIÓDICA DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA

No se presentan con frecuencia los casos en las cuales se requiera determinar el número de períodos que conforman una anualidad diferida, así como tampoco se presentan con frecuencia los casos en las que se requiera determinar el período de gracia (PORTUS Govinden, 1985); dado el caso, si es necesario este cálculo, se podrá encontrar la expresión correspondiente, mediante el uso de los logaritmos.

En cuanto a la determinación de la tasa periódica y la tasa nominal de una anualidad diferida, se realizará el mismo proceso; es decir: mediante el uso de tablas, con factores de equivalencia, se podrá usar también la función **TASA**, de la hoja electrónica de cálculo Excel.

8.7. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se desea establecer un fondo, para que un hospital que estará terminado dentro de 6 años, reciba una renta anual de \$ 35000 por 20 años. Hallar el valor del fondo si gana el 8% de interés.

<p>ff VA</p> <p>0 1 2 ... 5 6 7 8 ... 24 25 años</p> <p>$K = 5$</p>	$VA: \text{Valor Actual de la anualidad diferida}$ $i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{1} = \frac{8}{100}$ $n = 20 \quad k = 5$ $R = \$35000$	$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$ $VA = \frac{35000 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{100} \right)^{-20} \right]}{\frac{8}{100} \times \left(1 + \frac{8}{100} \right)^5}$ $VA = \$233.872,32$
--	--	--

2. Al nacimiento de su hijo, Marcelo desea depositar en una fiduciaria una cantidad tal que le proporcione a su hijo pagos de \$ 1250 cada 6 meses durante 10 años, venciendo el primero cuando cumpla 18 años. Si la fiduciaria paga el 3% convertible semestralmente, cuánto tendrá que depositar Marcelo?

<p>ff VA₁</p> <p>0 1 2 ... 35 36 37 ... 54 55 semestres</p> <p>X $K = 35$</p>	$VA_1: \text{Valor Actual de la anualidad diferida}$ $i = \frac{j}{m} = \frac{3\%}{2} = \frac{3}{200} \quad n = 20 \quad k = 35$ $\text{Ecuación de valor:}$ $X = VA_1$	$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$ $X = \frac{1250 \left[1 - \left(1 + \frac{3}{200} \right)^{-20} \right]}{\frac{3}{200} \times \left(1 + \frac{3}{200} \right)^{35}}$ $X = \$ 12.744,84$
--	--	---

3. Carlos desea depositar en un fondo que gana el 3% convertible trimestralmente, una cantidad de dinero suficiente que le permita hacer retiros trimestrales de \$ 1000 cada uno, el primero al término de 5 años y el último al término de 10 años. Hallar el depósito necesario.

<p>V_A_1</p> <p>X</p> <p>$k = 19$</p>	<p>V_A_1: Valor Actual de la anualidad diferida</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{3\%}{4} = \frac{3}{400} \quad n = 20, \quad k = 19$ <p>Ecuación de valor:</p> $X = V_A_1$ $X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$ $X = \frac{1000 \left[1 - \left(1 + \frac{3}{400} \right)^{-20} \right]}{\frac{3}{400} \times \left(1 + \frac{3}{400} \right)^{19}}$ $X = \$ 16.058,46$
--	---

4. Una compañía es concesionaria de la explotación de un hotel, por 15 años contados desde su inauguración; el hotel será puesto en servicio dentro de dos años. Se estima que los ingresos brutos mensuales serán de \$ 25000. Hallar con la tasa del 12% convertible mensualmente, el valor actual de los ingresos brutos.

<p>V_A_1</p> <p>X</p> <p>$k = 24$</p>	<p>V_A_1: Valor Actual de la anualidad diferida</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{12\%}{12} = \frac{12}{1200}, \quad n = 180 \quad k = 24$ <p>Ecuación de valor:</p> $X = V_A_1$ $X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$ $X = \frac{25000 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-180} \right]}{\frac{12}{1200} \times \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{24}}$ $X = \$ 1'640.533,01$
--	---

5. Una compañía adquiere yacimientos de mineral; los estudios de ingeniería demuestran que los trabajos preparatorios y vías de acceso demorarán 6 años. Se estima que los yacimientos en explotación rendirán una ganancia anual de \$ 600000. Suponiendo que la tasa comercial de interés es del 8% y que los yacimientos se agotarán después de 15 años continuos de explotación, hállese el Valor actual de la renta que espera obtenerse.

<p>ff</p> <p>X</p> <p>$k = 6$</p>	VA_1 $600000 \quad 600000 \quad 600000 \quad \dots \quad 600000 \quad 600000$ 21 años
<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{1} = \frac{8}{100} \quad n = 15 \quad k = 6$ <p>Ecuación de valor:</p> $X = VA_1$	$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$ $X = \frac{600000 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{100} \right)^{-15} \right]}{\frac{8}{100} \times \left(1 + \frac{8}{100} \right)^6}$ $X = \$ 3'236.354,09$

6. Hallar el precio de contado de una propiedad comprada así: Cuota inicial de \$ 50000; 10 pagos trimestrales de \$ 12000, el primer pago dentro de 2 años; y un pago final de \$ 18000, 6 meses después del último pago trimestral. Calcular con el 15% convertible trimestralmente.

<p>ff</p> <p>X</p> <p>$K = 7$</p>	VA_1 $50000 \quad R \quad R \quad R \quad \dots \quad R \quad R \quad 18000$ 19 trimestres
<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida</p> <p>VA_2: Valor Actual del pago único</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{15\%}{4} = \frac{15}{400} \quad n = 10 \quad k = 7$ <p>Ecuación de valor:</p> $X = 50000 + VA_1 + VA_2$	$X = 50000 + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = 50000 + \frac{12000 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{400} \right)^{-10} \right]}{\frac{15}{400} \times \left(1 + \frac{15}{400} \right)^7} + \frac{18000}{\left(1 + \frac{15}{400} \right)^{19}}$ $X = 50000 + 76164.94 + 8943.31$ $X = \$ 135.108,25$

7. Un huerto proporcionará la primera cosecha completa al final del 5to año y se espera obtener, por las siguientes cosechas, un ingreso anual de \$ 5000 durante 20 años en total; finalmente se podrá vender el huerto en \$35000. Hallar el valor en efectivo del huerto suponiendo intereses al 5%.

<p>ff</p> <p>X</p> <p>$k = 4$</p>	<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida VA_2: Valor Actual del pago único.</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{1} = \frac{5}{100} \quad n = 16, \quad k = 4$ <p>Ecuación de valor:</p> $X = VA_1 + VA_2$	$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = \frac{5000 \left[1 - \left(1 + \frac{5}{100} \right)^{-16} \right]}{\frac{5}{100} \times \left(1 + \frac{5}{100} \right)^4} + \frac{35000}{\left(1 + \frac{5}{100} \right)^{20}}$ $X = \$ 44581,30 + 13191,13$ $X = \$ 57.772,43$
---	--	---

8. Un granjero compró un tractor el 1 de marzo, comprometiéndose a hacer pagos mensuales de \$ 2000 durante 24 meses, el primero el 1 de octubre y un pago adicional de \$ 1500 3 meses más tarde; si el interés es 12% convertible mensualmente, hallar el Valor Actual equivalente.

<p>ff</p> <p>X</p> <p>$1-\text{mar}$</p> <p>$1-\text{oct}$</p> <p>$k = 6$</p>	<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida VA_2: Valor Actual del pago único.</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{12\%}{12} = \frac{12}{1200} \quad n = 24, \quad k = 6$ <p>Ecuación de valor:</p> $X = VA_1 + VA_2$	$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = \frac{2000 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-24} \right]}{\frac{12}{1200} \times \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^6} + \frac{1500}{\left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{33}}$ $X = 40024.46 + 1080.15$ $X = \$ 41.104,61$
---	--	--

9. Con cuánto se puede comprar una renta de \$ 15000 trimestrales, pagadera durante 10 años, debiendo comenzar el primer pago dentro de 4 años, si con el primer pago deberá recibirse además \$ 10000, si la tasa de interés es del 8% capitalizable trimestralmente.

<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida VA_2: Valor Actual del pago único.</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = \frac{8}{400} \quad n = 40 \quad k = 15$ <p>Ecuación de valor:</p> $X = VA_1 + VA_2$	$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n}$ $X = \frac{15000 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{-40} \right]}{\frac{8}{400} \times \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{15}} + \frac{10000}{\left(1 + \frac{8}{400} \right)^{16}}$ $X = 304882.86 + 7284.46$ $X = \$ 312.167,32$
--	---

10. Un artículo se compró a plazos con un pago inicial de \$ 1000 y 7 cuotas mensuales iguales de \$ 800 y un interés de financiación del 8% mensual, si la primera cuota se pagó cinco meses después de entregado el artículo, encontrar el valor de contado.

<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{12} = \frac{8}{1200} \quad n = 7 \quad k = 4$ <p>Ecuación de valor:</p> $X = 1000 + VA_1$	$X = 1000 + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$ $X = 1000 + \frac{800 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-7} \right]}{\frac{8}{1200} \times \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^4}$ $X = 1000 + 5310.57$ $X = \$ 6310.57$
---	--

11. Una ley de incentivos para la agricultura, permite a un agricultor adquirir equipos por valor de \$ 50000, para pagarlos dentro de 3 años, con 8 cuotas semestrales. Si la tasa fija para este tipo de préstamos es el 6% de interés, capitalizable semestralmente, hallar el valor de las cuotas semestrales.

	<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{6\%}{2} = \frac{6}{200} \quad n = 8 \quad k = 5$ <p>Ecuación de valor:</p> $50000 = VA_1$ $50000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$	<p>Despejando R se tiene:</p> $R = \frac{50000 \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$ $R = \frac{50000 \times \frac{6}{200} \times \left(1 + \frac{6}{200}\right)^5}{\left[1 - \left(1 + \frac{6}{200}\right)^{-8}\right]}$ $R = \$ 8.257,30$
--	---	--

12. El día de hoy se adquiere un préstamo de \$ 25000 para adquirir un plantío de frutas. Se va a liquidar el préstamo al 5% en 10 pagos anuales iguales, haciendo el primero en 8 años. Hallar el valor del pago anual.

	<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{1} = \frac{5}{100} \quad n = 10 \quad k = 7$ <p>Ecuación de valor:</p> $25000 = VA_1$ $25000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$	<p>Despejando R se tiene:</p> $R = \frac{25000 \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$ $R = \frac{25000 \times \frac{5}{100} \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^7}{\left[1 - \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{-10}\right]}$ $R = \$ 4.555.65$
--	--	---

13. El día de hoy se depositan \$ 7500 en un fondo que gana el 4% convertible semestralmente. Se tiene planeado agotar totalmente el fondo mediante 12 retiros semestrales iguales, haciéndose el primero al término de 5 años a partir de la fecha. Halle el valor del retiro semestral.

<p>ff</p> <p>VA_1</p> <p>7500</p> <p>$K = 9$</p> <p>21 semestres</p>	<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{4\%}{2} = \frac{4}{200} \quad n = 12 \quad k = 9$ <p>Ecuación de valor:</p> $7500 = VA_1$ $7500 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$	<p>Despejando R se tiene:</p> $R = \frac{7500 \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$ $R = \frac{7500 \times \frac{4}{200} \times \left(1 + \frac{4}{200}\right)^9}{\left[1 - \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{-12}\right]}$ $R = \$ 847,56$
--	--	---

14. Una persona deposita hoy \$ 12000 en un banco que abona el 8 % capitalizable semestralmente, para que, dentro de 6 años, se le comience a pagar una renta semestral durante 10 años. Hallar el valor de la renta establecida.

<p>ff</p> <p>VA_1</p> <p>12000</p> <p>$K = 11$</p> <p>31 semestres</p>	<p>VA_1: Valor Actual de la anualidad diferida</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{2} = \frac{8}{200} \quad n = 20, \quad k = 11$ <p>Ecuación de valor:</p> $12000 = VA_1$ $12000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$	<p>Despejando R se tiene:</p> $R = \frac{12000 \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$ $R = \frac{12000 \times \frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{11}}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-20}\right]}$ $R = \$ 1.359,31$
--	--	--

15. Una compañía obtiene, para renovación de activos, un préstamo de \$ 85000 con intereses al 6% efectivo a pagarse en 18 cuotas anuales iguales, debiendo hacerse el primero 5 años después de la fecha en que se recibió el préstamo. Hallar el valor de la cuota anual.

<p>VA_1</p> <p>$i = \frac{j}{m} = \frac{6\%}{1} = \frac{6}{100}$ $n = 18$, $k = 4$</p> <p>Ecuación de valor:</p> $85000 = VA_1$ $12000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$	<p>Despejando R se tiene:</p> $R = \frac{85000 \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$ $R = \frac{85000 \times \frac{6}{100} \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^4}{\left[1 - \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{-18}\right]}$ $R = \$ 9.910,83$
--	--

16. El día de hoy se depositan \$ 100000 en un fondo que gana el 8% convertible trimestralmente. Se tiene previsto agotar el 80% del fondo mediante 10 retiros trimestrales, haciéndose el primero al término de 2 años; el 20% restante se entregará seis meses más tarde. Halle el valor del retiro trimestral.

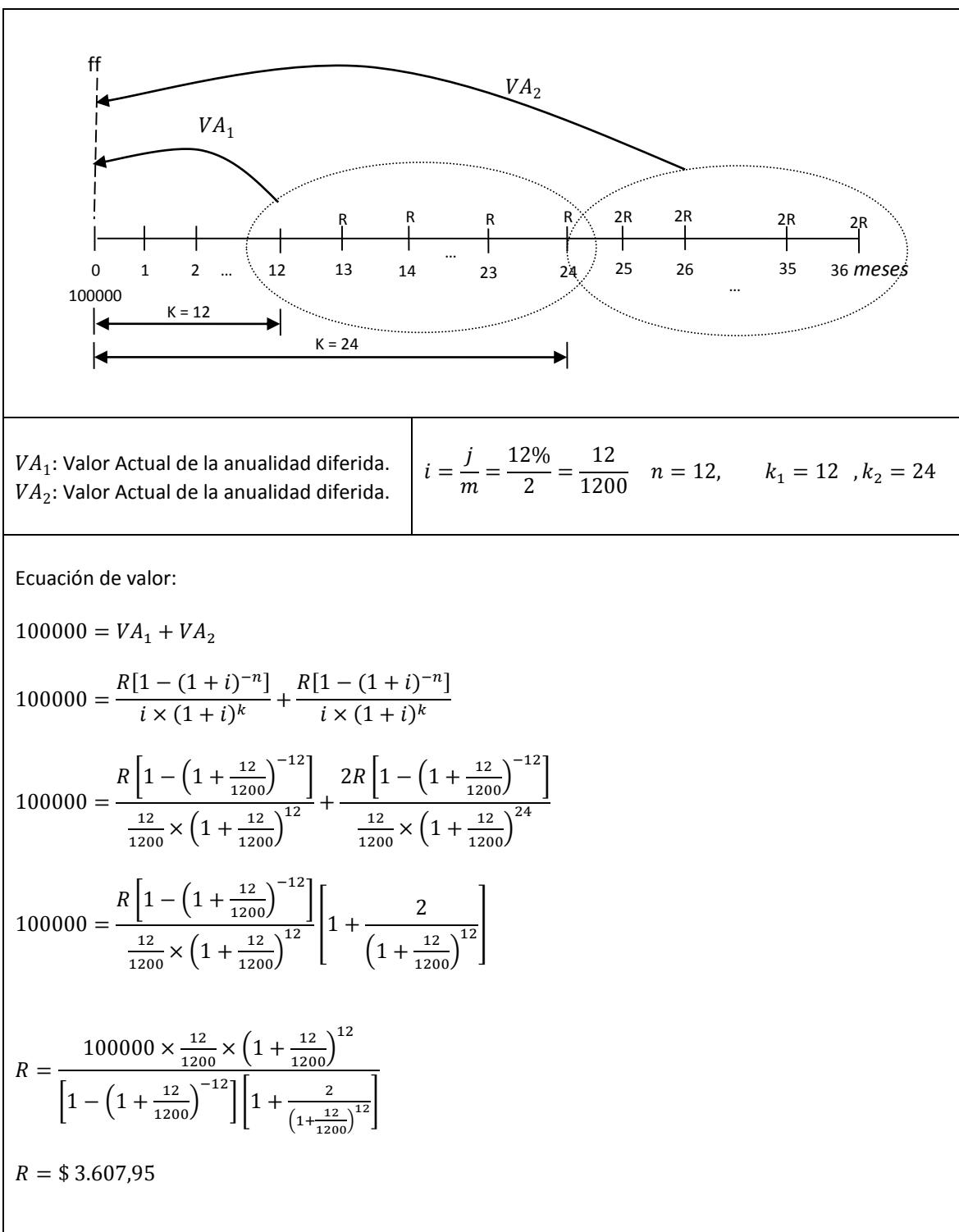
<p>VA_1</p> <p>$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = \frac{8}{400}$ $n = 10$, $k = 7$</p> <p>Ecuación de valor:</p> $100000 = VA_1 + VA_2$	$100000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n}$ $100000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{400}\right)^{-10}\right]}{\frac{8}{400} \times \left(1 + \frac{8}{400}\right)^7} + \frac{20000}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{19}}$ $100000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{400}\right)^{-10}\right]}{\frac{8}{400} \times \left(1 + \frac{8}{400}\right)^7} + 13728.62$
---	--

$86271.38 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{-10} \right]}{\frac{8}{400} \times \left(1 + \frac{8}{400} \right)^7}$	$R = \frac{86271.38 \times \frac{8}{400} \times \left(1 + \frac{8}{400} \right)^7}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{-10} \right]} = \$11.032,31$
--	---

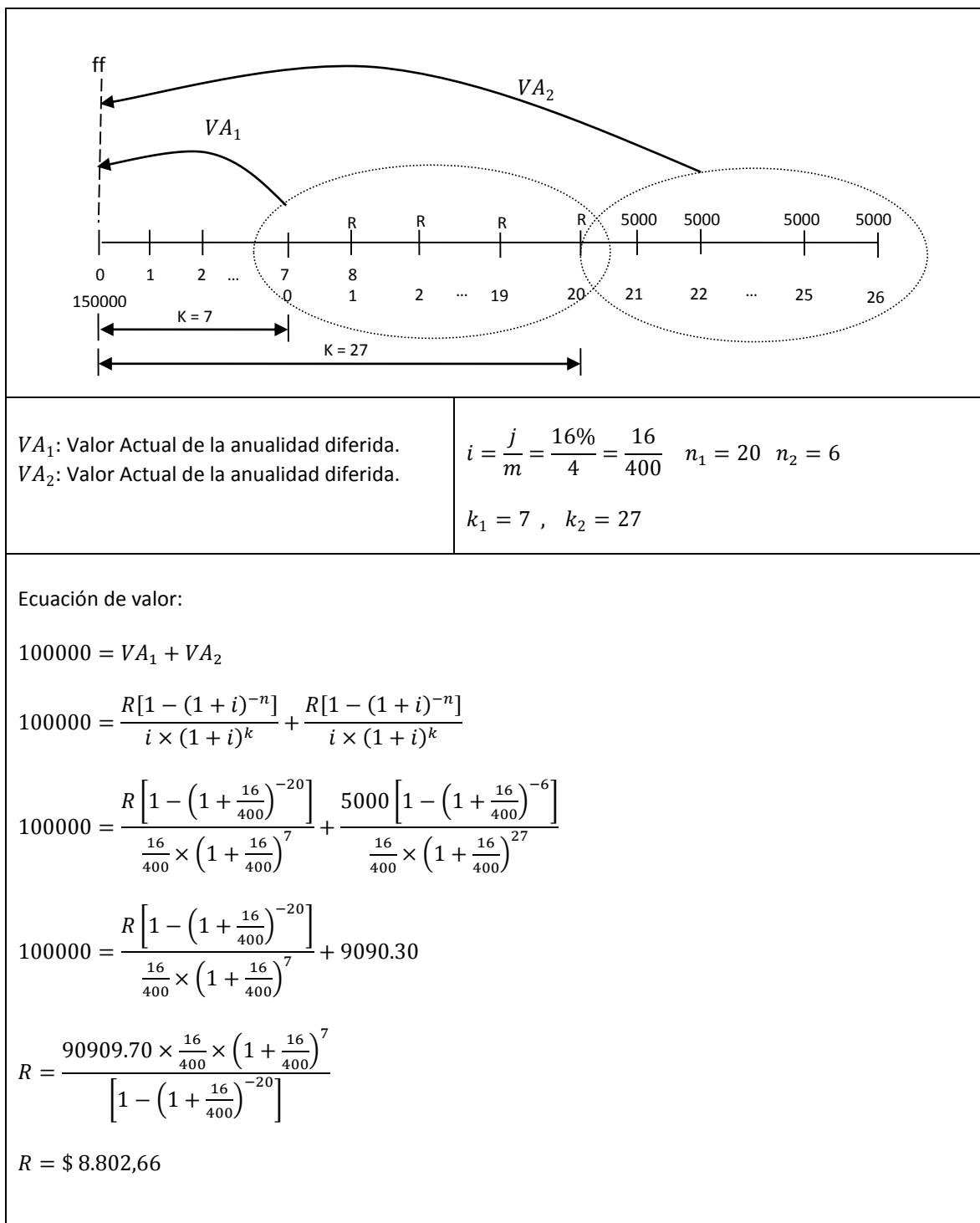
17. Una persona deposita hoy \$ 120000 en un banco que abona el 8 % capitalizable semestralmente, para, dentro de 5 años, se le comience a pagar una renta que se cancelará semestralmente, durante 8 años, conjuntamente con dos pagos de \$ 10000 realizados un año después del depósito inicial y el otro un año después de los pagos semestrales. Hallar el valor del pago semestral.

	$VA_1: \text{Valor Actual del pago único}$ $VA_2: \text{Valor Actual de la anualidad diferida}$ $VA_3: \text{Valor Actual del pago único}$ $i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{2} = \frac{8}{200} \quad n = 16 \quad k = 9$
Ecuación de valor:	
$120000 = VA_1 + VA_2 + VA_3$ $120000 = \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k} + \frac{M}{(1+i)^n}$ $120000 = \frac{10000}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2} + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-16} \right]}{\frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^9} + \frac{10000}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{27}}$ $120000 = 9245.56 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-16} \right]}{\frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^9} + 3468.17$ $107286.27 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-16} \right]}{\frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^9}$ $R = \frac{107286.27 \times \frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^9}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-16} \right]} = \$13.104,87$	

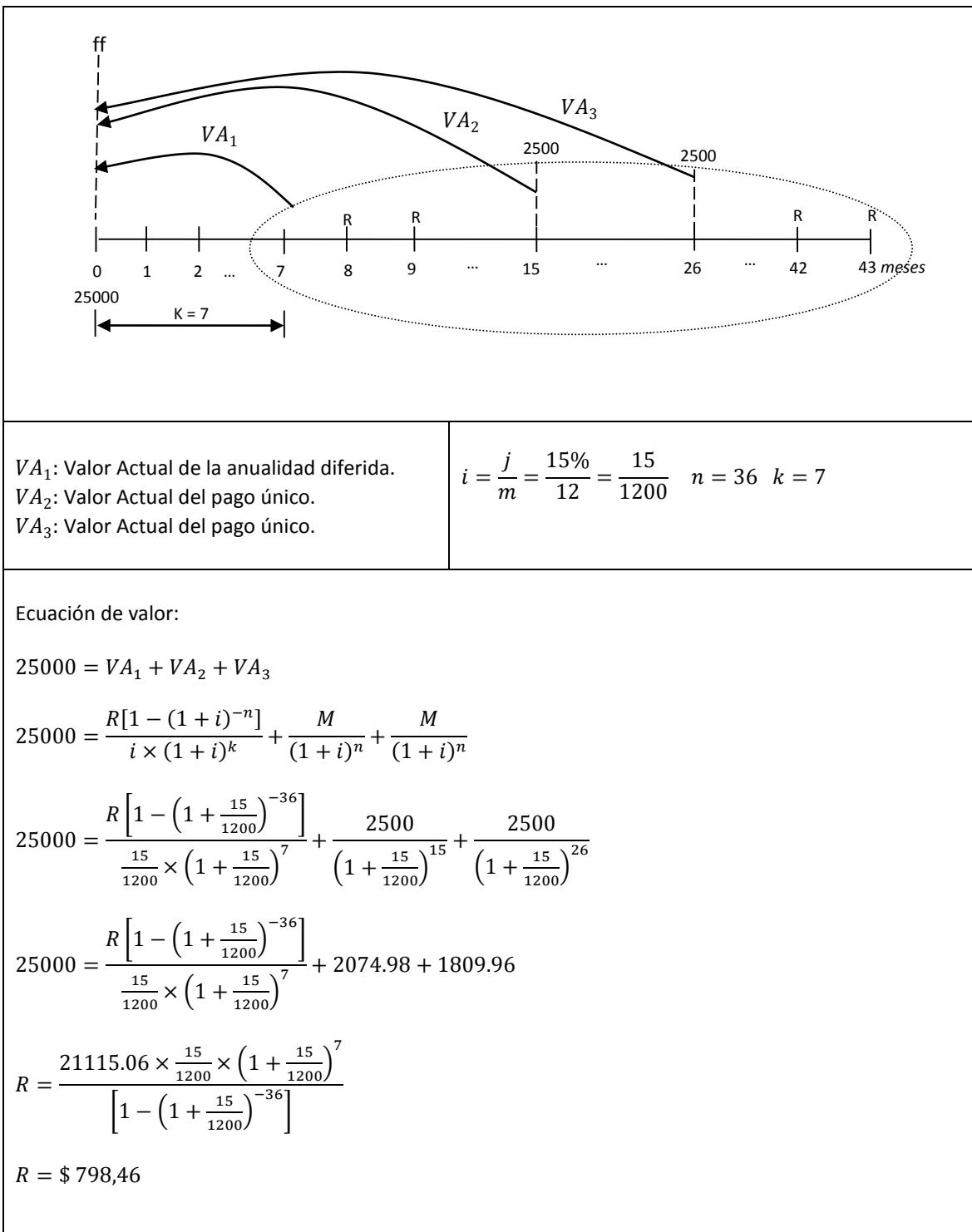
18. El Banco Ganadero concede un préstamo de \$100000 a una tasa del 12% capitalizable mensualmente, con un período de gracia de un año. El préstamo tiene un plazo de 3 años, incluido el período de gracia, y se va a cancelar en 12 cuotas mensuales iguales a R , seguidas de 12 cuotas mensuales iguales a $2R$ el segundo año. Calcule el valor de las cuotas.



19. Una empresa ha solicitado al banco un préstamo de \$100000 para ser cancelado en 20 pagos trimestrales con el primer pago exactamente a dos años de haber sido concedido; además, seguidamente, se realizarán 6 pagos trimestrales de \$ 5000. calcular el valor del pago trimestral con una tasa del 16% capitalizable trimestralmente.



20. Se obtiene un préstamo \$ 25000 a pagar en tres años en cuotas mensuales iguales debiendo cancelar la primera dentro de 8 meses y dos pagos adicionales por \$2500 cada uno en los meses 15 y 26, considerados desde el inicio del plazo, sabiendo que la tasa de interés es del 15% capitalizable mensualmente, encuentre el valor de la renta mensual para saldar la deuda.



8.8. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una compañía frutera sembró cítricos que empezarán a producir dentro de 5 años. La producción anual se estima en \$ 300000 y que este rendimiento se mantendrá, por espacio de 20 años. Hallar con la tasa del 6% el valor actual de la producción.

R: \$ 2'725.575,57

2. Qué cantidad depositada el día de hoy en una cuenta que paga el 4% convertible trimestralmente será necesaria para hacer 20 retiros trimestrales de \$ 500 cada uno, haciendo el primero al término del 3er. año.

R: \$ 8.087,33

3. El Sr. Dueñas adquiere una lavadora que la recibe el 1 de noviembre y que debe pagar en 12 mensualidades de \$125 a partir del 1 de marzo del siguiente año. Si se considera el interés al 14% anual convertible mensualmente ¿cuál es el valor de contado de la lavadora?

R: \$ 1.344,57

4. Se compra una máquina que va a cancelarse mediante 10 cuotas trimestrales iguales a \$ 18500 debiendo cancelarse la primera de ellas exactamente dentro de 2 años; reemplazar este compromiso por 20 pagos semestrales vencidos, empezando con el primero justamente a los seis meses de haber realizado la compra; considere una tasa de 10% nominal capitalizable de acuerdo con el período de pago correspondiente.

R: \$ 10.930,00

5. Una deuda contraída al **5% nominal**, debe cancelarse con 8 cuotas **semestrales** de \$ 25000 cada una, con la primera cuota a pagar dentro de dos años. Sustituirla por una obligación equivalente pagadera con 24 cuotas **trimestrales**, pagándose la primera cuota de inmediato.

R: \$ **7.991,19**

6. El 1 de junio de 2008 se compra un negocio con \$ 10000 de cuota inicial y 10 pagos trimestrales de \$ 2500 cada uno, el primero con vencimiento el 1 de junio de 2011. Cuál es el valor de contado del negocio suponiendo intereses al 6% convertible trimestralmente?

R: \$ 29.572,55

7. El 15 de marzo de 2010 se compra un negocio con \$ 20000 de cuota inicial y 20 pagos trimestrales de \$ 1800 cada uno, el primero con vencimiento el 15 de septiembre de 2011. Cuál es el valor de contado del negocio suponiendo intereses al 12% convertible trimestralmente?

R: \$ 43.100,19

8. Hallar el precio de contado de una propiedad comprada con el siguiente plan: Una cuota inicial de \$ 40000; 12 pagos trimestrales de \$ 10000, debiendo efectuar el primer pago dentro de 4 años; y un pago final de \$ 30000, 6 meses después del último pago trimestral. Calcular con el 12 % convertible trimestralmente.

R: \$ 116.621,35

9. Una granja es vendida mediante \$ 10000 de cuota inicial y 8 pagos semestrales de \$ 2500 cada uno, venciendo el primero al término del 3er año y dos pagos finales de \$ 4500 realizados uno y dos años después del último pago **trimestral**. Hallar el valor de contado de la granja suponiendo intereses al 5% convertible semestralmente.

R: \$31.907,86

10. En esta fecha, se adquiere una deuda con intereses al 5% convertible semestral, la cual será pagada mediante desembolsos de \$ 250 al final de cada seis meses por los próximos 5 años, seguidos de pagos de \$ 400 semestrales por los siguientes 4 años. Hallar el importe de la deuda.

R: \$ 4.428,54

11. Una persona hereda \$ 20000 y los invierte al 10% anual capitalizable semestralmente, conviniéndose que recibirá 20 pagos semestrales iguales debiendo recibir el pago inicial dentro de 5 años. Encontrar a cuánto asciende el valor del pago semestral.

R: \$ 2.489,65

12. Una compañía obtiene un préstamo de \$ 75000 para ser pagado con intereses al 6% efectivo en 15 pagos anuales iguales, debiendo hacerse el primero 5 años después de la fecha del préstamo. Hallar el pago anual.

R: \$ 9.749,11

13. Una persona deposita hoy \$ 150000 en un banco que abona el 7% capitalizable mensualmente, para, dentro de 6 años, se le comience a pagar una renta que se cancelará mensualmente, durante 10 años. Hallar la renta mensual que recibirá.

R: \$ 2.632,10

14. Una deuda de \$ 80000 se va a cancelar mediante 18 pagos trimestrales; si el primer pago se efectúa exactamente al año de haberse prestado el dinero, calcular el valor del pago periódico considerando el 14% capitalizable trimestralmente.

R: \$ 6.724,76

15. El día de hoy se adquiere un préstamo de \$ 25000 y se va liquidar en 10 pagos anuales iguales con intereses al 5%, haciendo el primero en 3 años. Hallar el valor del pago anual.

R: \$ 3.569,47

16. Una entidad financiera concede un crédito por tres años a un cliente por valor de \$ 50000 con las siguientes condiciones: período de gracia de 6 meses, cuotas mensuales iguales, un pago de \$ 10000 al final del plazo. Calcular las cuotas mensuales con la tasa de interés del 14% capitalizable mensualmente.

R: \$ 2.234,64

17. Luis debe a la fecha \$ 16000 que desea liquidar mediante 5 pagos semestrales de \$ 2000, el primero de ellos seis meses más tarde; y 10 pagos trimestrales, el primero de ellos justamente dentro de 4 años. Hallar el valor del pago trimestral necesario suponiendo intereses al 4% capitalizable en el mismo tiempo del período de pago.

R: \$ 805,71

18. Al comprar una volqueta, se quedaron debiendo \$ 30000, para ser cancelado en 8 cuotas trimestrales, empezando dentro de 9 meses; junto con la última cuota trimestral deberá pagarse \$ 5000. Hallar el valor de las cuotas si el interés de financiación es del 6% capitalizable trimestralmente.

R: \$ 3.535,73

19. Un vehículo se va a financiar con 36 cuotas mensuales de \$ 450, a última hora se cambia el financiamiento a la siguiente propuesta: período de gracia 6 meses, 30 cuotas mensuales R y tres cuotas anuales de \$ 1000 al final de cada año **Faltando el pago de 12 cuotas se resuelve cancelar el saldo con un solo pago, 6 meses más tarde.** Calcular el valor de ese pago, si la tasa de interés es del 10% capitalizable mensualmente.

R: \$ 456,22

20. Un banco concede un préstamo de \$ 60000 al 6%, capitalizable trimestralmente. El préstamo se va a cancelar en 12 cuotas trimestrales iguales, la primera de ellas justamente al año de haber recibido el préstamo; un pago adicional, igual al pago trimestral, un año después de la última cuota trimestral y un pago final, igual a dos pagos trimestrales, dos años después de la última cuota. Calcule el valor de la cuota.

R: \$ 6.230,92

9

PERPETUIDADES

9.1. DEFINICIÓN

Una anualidad perpetua, o renta perpetua, es una serie **indefinida** de pagos periódicos iguales, realizados en cada período; y en muchas ocasiones: el período de pago y la capitalización de intereses coinciden. (PORTUS Govinden, 1985)

Como rentas perpetuas tenemos los legados a instituciones, como también los costos de mantenimiento en obras públicas, tales como puentes, sistemas de alcantarillado, hospitales, carreteras, etc.

Dependiendo de cuando se realice el primer pago, las anualidades perpetuas pueden ser: vencidas o anticipadas.

9.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las anualidades perpetuas o perpetuidades tienen la siguiente estructura gráfica:



Del gráfico se tiene:

- R es el valor del pago periódico realizado en cada período; observe que el número de pagos no está definido.

9.3. VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD PERPETUA

Por constituir una serie indefinida de pagos, no es posible determinar el Valor Futuro o Monto de una anualidad perpetua.

9.4. VALOR ACTUAL DE UNA PERPETUIDAD VENCIDA

El Valor Presente, o Valor Actual de una anualidad perpetua, es la suma del Valor Actual, trasladado a fecha de inicio, de los pagos periódicos que conforman dicha anualidad; es decir:

$$VA = \sum_{i=1}^{\infty} VA_i$$

El Valor Actual de la anualidad vencida es, entonces:

$$VA = VA_1 + VA_2 + VA_3 + \cdots + VA_{\infty}$$

Recordando que, el Valor Actual o Valor Presente de una anualidad vencida, está dado por:

$$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

Que se puede escribir como:

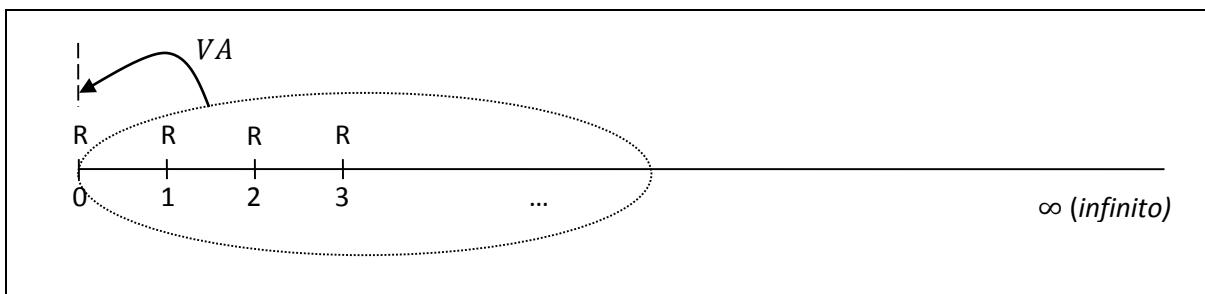
$$VA = \frac{R}{i} [1 - (1 + i)^{-n}]$$

$$VA = \frac{R}{i} - \frac{R}{i} (1 + i)^{-n}$$

Como el número de períodos (n) crece indefinidamente, el segundo término del segundo miembro se aproxima a cero, por lo que el Valor Actual de una anualidad perpetua vencida se tiene:

$$VA = \frac{R}{i}$$

9.5. VALOR ACTUAL DE UNA PERPETUIDAD ANTICIPADA



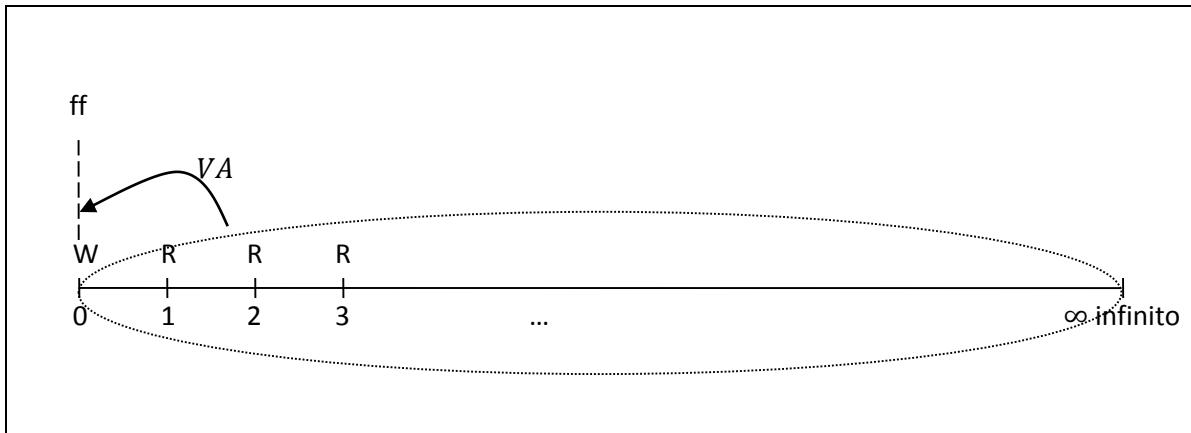
Tomando en cuenta el esquema financiero de la anualidad perpetua anticipada, como fecha focal el inicio de la anualidad, al aplicar el método de las ecuaciones de valor se tiene que el Valor Actual de está dado por:

$$VA = R + \frac{R}{i}$$

Factorizando la expresión anterior se tiene:

$$VA = R \left[1 + \frac{1}{i} \right]$$

Puede presentarse el caso, en que el primer pago sea diferente a los pagos periódicos de la anualidad perpetua, tal como se indica en el siguiente esquema financiero:

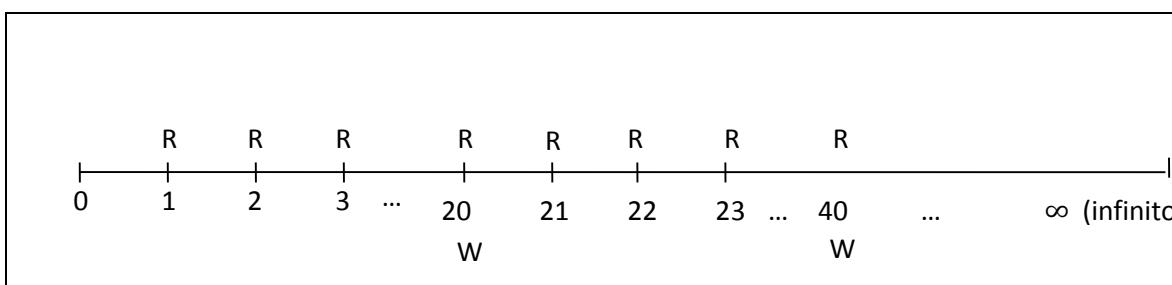


Entonces el Valor Actual de este evento financiero está dado por:

$$VA = W + \frac{R}{i}$$

9.6. VALOR ACTUAL DE UNA PERPETUIDAD CON PAGOS CADA CIERTO PERÍODO

Es común, en la práctica comercial, que los desembolsos periódicos de una anualidad perpetua sean entregados luego de que han transcurrido algunos períodos; por ejemplo si se construye un fondo con capitalización anual para que produzca el dinero necesario para cubrir las operaciones de mantenimiento de una carretera, las mismas que ocurren cada 20 años; en otras palabras: la capitalización del fondo es anual pero se entrega el dinero cada 20 años. Este caso se representa gráficamente de la siguiente manera:



Recordando que el Valor Actual de la Perpetuidad está dado por:

$$VA = \frac{R}{i}$$

Por otro lado, el Valor W , que es el desembolso realizado cada cierto número (k) de períodos, genera un valor futuro, entonces:

$$W = \frac{R[(1+i)^k - 1]}{i}$$

Es decir:

$$R = \frac{Wi}{[(1+i)^k - 1]}$$

Reemplazando este resultado en la expresión del Valor Actual de una perpetuidad se tiene:

$$VA = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

Esta última expresión permite calcular el Valor Actual de una anualidad perpetua, cuando se realizan desembolsos W , cada k períodos.

9.7. COSTOS ADICIONALES PARA INCREMENTO DE LA VIDA ÚTIL DE UN ACTIVO

Es muy frecuente buscar mecanismos para incrementar la vida útil de los activos; por ejemplo el uso de algún químico que prolongue la vida útil de los postes de madera, pintura anticorrosiva para prolongar la vida útil de las estructuras de acero, etc. (PORTUS Govinden, 1985)

El costo adicional de este tratamiento que prolongará la vida útil del activo está dado por:

$$X = C \frac{[1 - (1+i)^{-b}]}{[(1+i)^k - 1]}$$

Donde:

X : Costo adicional que se debe pagar por el proceso que prolonga la vida útil del activo.

b : Tiempo, expresado en años, que se prolonga la vida útil del activo.

C : Costo del activo, el mismo que deberá renovarse luego de cumplir la vida útil.

k : Tiempo, expresado en años, que representa la vida útil del activo.

i : Tasa periódica.

9.8. COSTOS CAPITALIZADOS

Se conoce como costo capitalizado K a la suma del Costo inicial de un activo más el Valor actual de la anualidad a perpetuidad que conforma renovación del mismo.

Sea C el Costo inicial de un activo, si este activo debe renovarse a un precio W luego de k períodos de vida útil entonces, considerando una tasa periódica i , el costo capitalizado estará dado por:

$$K = C + \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

Si el costo de renovación W es igual al costo inicial del activo se tiene:

$$K = C + \frac{C}{[(1+i)^k - 1]}$$

$$K = C \left[1 + \frac{1}{[(1+i)^k - 1]} \right]$$

$$K = C \left[\frac{(1+i)^k - 1 + 1}{[(1+i)^k - 1]} \right]$$

$$K = C \left[\frac{(1+i)^k}{[(1+i)^k - 1]} \right]$$

Dividiendo a esta expresión para $(1 + i)^k$, el Costo capitalizado, cuando el costo de renovación del activo es igual al costo inicial del mismo, está dado por:

$$K = \frac{C}{[1 - (1 + i)^{-k}]}$$

El criterio del costo capitalizado, es de gran utilidad para tomar decisiones sobre la adquisición de equipos que tienen el mismo rendimiento pero presentan diferente costo de compra y distinta vida útil. (PORTUS Govinden, 1985).

9.9. PROBLEMAS RESUELTOS

1. El testamento del señor Pérez, conocido filántropo, establece que deberá pagarse al asilo de ancianos María Auxiliadora, una renta perpetua de \$1000, pagaderos al final de cada año. ¿Cuál es el valor actual de ese legado, suponiendo que se encuentra invertido a 10% de interés efectivo anual?

	<p>Ecuación de valor:</p> $X = VA_1$ $X = \frac{R}{i} = \frac{1000}{\left(\frac{10}{100}\right)}$ $X = \$ 10.000,00$
--	--

2. Suponiendo que una granja produzca \$ 5000 anuales indefinidamente, cuál es su valor actual sobre la base del 10%.

	<p>Ecuación de valor:</p> $X = VA_1$ $X = \frac{R}{i} = \frac{5000}{\left(\frac{10}{100}\right)}$ $X = \$ 50.000,00$
--	--

3. ¿Qué interés nominal, capitalizable trimestralmente le reconocen a una persona que con depósito de \$ 800000 realizado hoy, puede hacer retiros de \$ 2000 trimestrales, el primero de ellos dentro de tres meses y en forma indefinida.

	<p>Ecuación de valor:</p> $800000 = VA_1$ $800000 = \frac{R}{i}$ $i = \frac{R}{800000} = \frac{2000}{800000} = 0.25\%$ $j = i \times m$ $j = \frac{0.25}{100} \times 4 = 1\% \text{ capitalizable trimestral}$
--	--

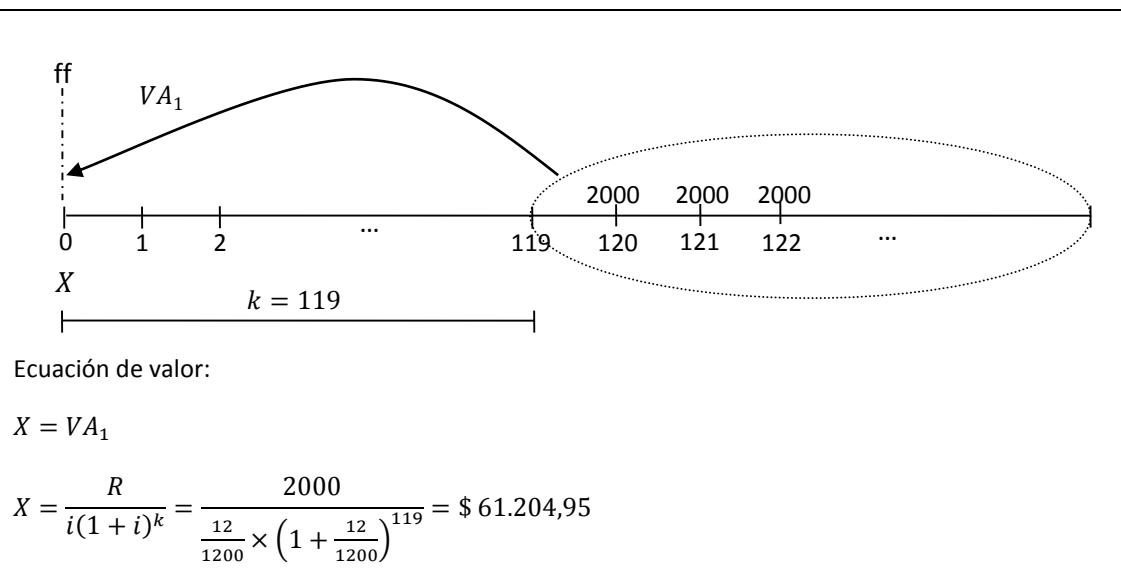
4. Establecer una cátedra en una universidad cuesta \$ 12500 anuales. Hallar el valor presente del fondo necesario para establecerla suponiendo intereses de 4%.

	<p>Ecuación de valor:</p> $X = VA_1$ $X = R \left[1 + \frac{1}{i} \right] = 12500 \left[1 + \frac{1}{\frac{4}{100}} \right]$ $X = \$ 325.000,000$
--	---

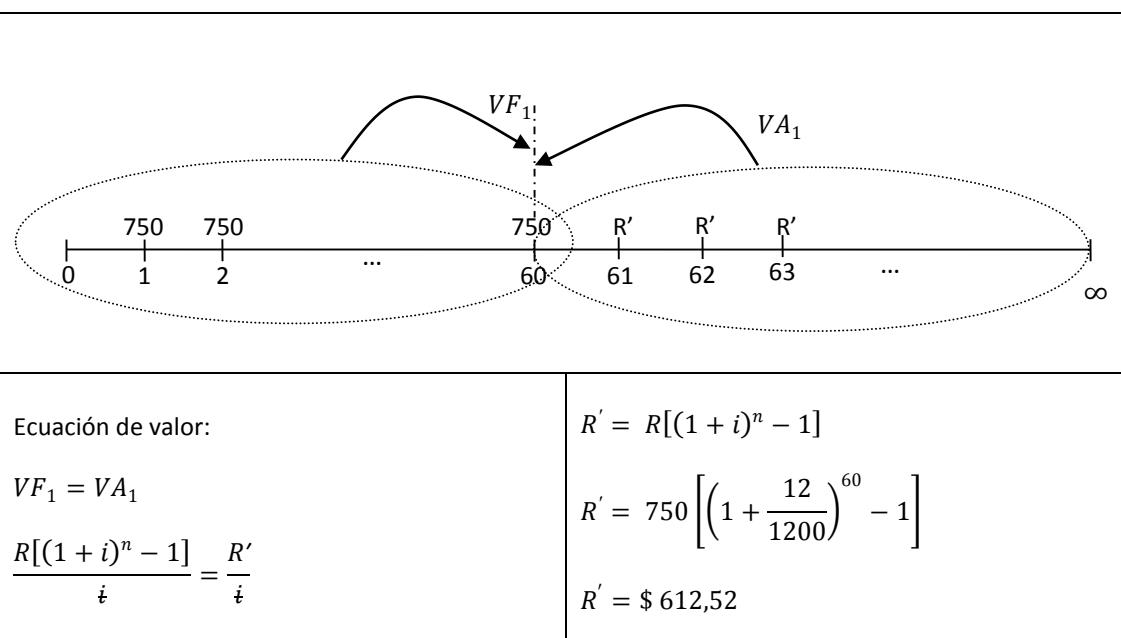
5. Los ex alumnos de una universidad deciden donar un laboratorio y los fondos para su mantenimiento futuro. Si el costo inicial es de \$ 150000 y el mantenimiento se estima en \$ 3000 anuales, hallar el valor de la donación si la tasa efectiva de interés es del 6 %.

	<p>Ecuación de valor:</p> $X = W + \frac{R}{i}$ $X = 150000 + \frac{3000}{\frac{6}{100}}$ $X = \$ 200.000,00$
--	---

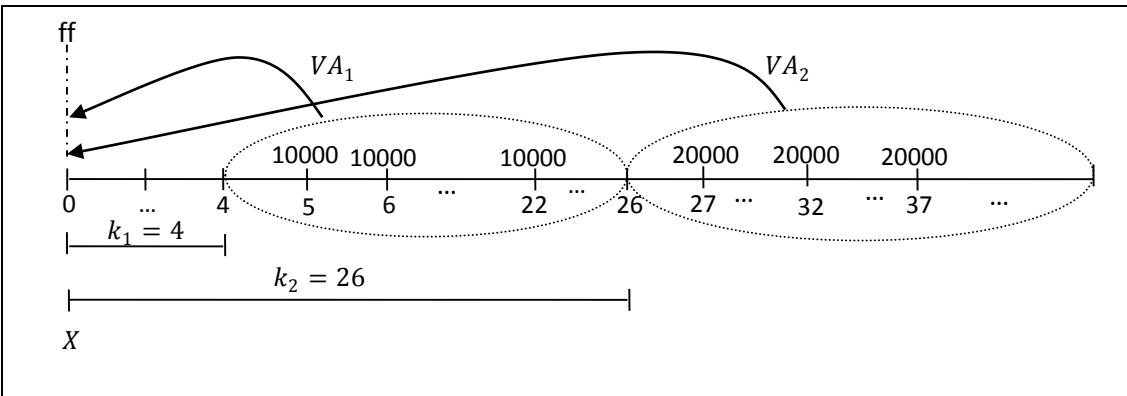
6. Para estudiar en una universidad de prestigio, dentro de 10 años, es requisito fundamental -entre otros- depositar el día de hoy una suma de dinero en una institución financiera que paga mensualmente por ahorros de este tipo el 12 % capitalizable mensualmente y que permite a la institución disponer de \$2000 mensuales a perpetuidad. ¿Cuánto debo depositar el día de hoy?



7. Se propone efectuar una serie de 60 depósitos mensuales iguales de \$ 750, para poder al siguiente mes después del último depósito, hacer retiros mensuales iguales a perpetuidad; cuál será el valor de cada uno de los retiros si el banco reconoce una tasa de 12% capitalizable mensualmente.



8. El directorio de la empresa, para afrontar los pagos de jubilación de sus empleados decide crear un fondo dentro de cuatro años y generará un depósito anual de \$10000, durante 18 años. Cinco años a partir de entonces no se realizan pagos y de allí en adelante (27 años después de hoy) pagos a perpetuidad de \$20000 cada 5 años. Utilizando una tasa de interés 6% efectiva anual encontrar el valor con el cual se deberá depositar hoy, para solventar todos los gastos futuros.



$$X = VA_1 + VA_2$$

$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i(1 + i)^{k_1}} + \frac{W}{[(1 + i)^k - 1](1 + i)^{k_2}}$$

$$X = \frac{10000 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{100} \right)^{-18} \right]}{\frac{6}{100} \times \left(1 + \frac{6}{100} \right)^4} + \frac{20000}{\left[\left(1 + \frac{6}{100} \right)^5 - 1 \right] \left(1 + \frac{6}{100} \right)^{26}}$$

$$X = 85764.76 + 12997.84$$

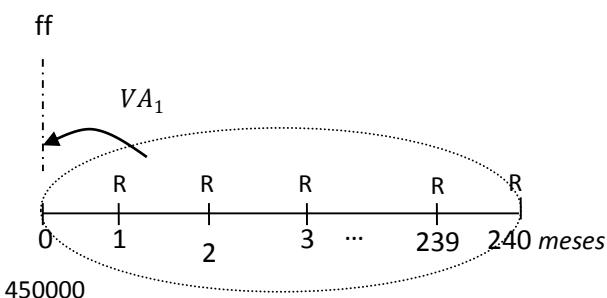
$$X = \$ 98.762,60$$

9. El señor González queda incapacitado de por vida a consecuencia de un accidente laboral, la empresa donde labora le concede una indemnización de \$ 450000, con lo cual desea asegurarse una renta mensual a perpetuidad, si el señor González puede invertir su dinero al 14% capitalizable mensualmente:

- a) ¿Cuál será su renta mensual si desea conservar intacto su capital?
 b) ¿Cuál será su renta mensual si el capital se agotará a los 20 años?

<p>a.- Capital intacto (perpetuidad)</p> <p>The timeline diagram shows a perpetuity starting at time 1 with payments of R every year. The initial capital of \$450,000 is shown at time 0. The timeline is marked with years 0, 1, 2, 3, ..., ∞.</p>	<p>Ecuación de valor:</p> $450000 = \frac{R}{i}$ $R = 450000 \times \frac{14}{1200}$ $X = \$ 5.250,00$
---	--

b.- Capital agotado en 20 años



Ecuación de valor:

$$450000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

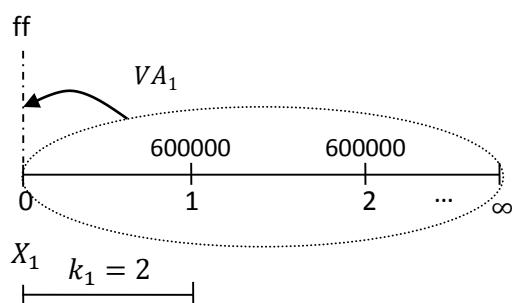
$$R = \frac{450000 \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{450000 \times \frac{14}{1200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{14}{1200}\right)^{-240}\right]}$$

$$R = \$5.595,84$$

10. En una localidad en que las inversiones tienen un rendimiento del 10% anual con capitalización semestral, alguien ofrece de venta un cine que tiene una utilidad anual promedio de los últimos años de \$ 600000. Si el edificio debe reconstruirse cada 20 años con un gasto de \$3'500000 y ha sido recientemente reconstruido, y las butacas deben remplazarse cada 8 años con un costo de \$ 750000. Determinar, de acuerdo con el rendimiento de las inversiones en la localidad cuánto puede ofrecerse por el cine suponiendo que las condiciones económicas permanecerán constantes.

Ingresos:



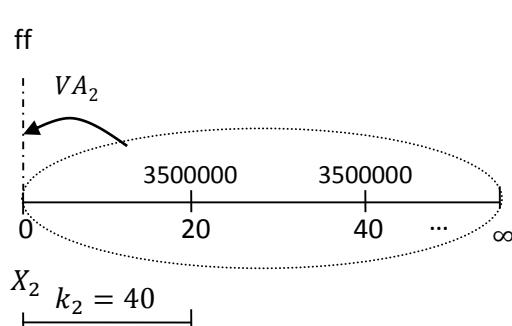
$$X_1 = VA_1$$

$$X_1 = \frac{W}{[(1 + i)^k - 1]}$$

$$X_1 = \frac{600000}{\left[\left(1 + \frac{10}{200}\right)^2 - 1\right]}$$

$$X_1 = \$ 5'853.658,54$$

Egresos por reconstrucción del edificio:



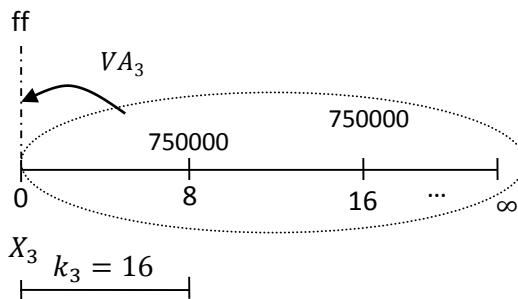
$$X_2 = VA_2$$

$$X_2 = \frac{W}{[(1 + i)^k - 1]}$$

$$X_2 = \frac{3'500.000}{\left[\left(1 + \frac{10}{200}\right)^{40} - 1\right]}$$

$$X_2 = \$ 579.471,28$$

Egresos por cambio de butacas:



$$X_3 = VA_3$$

$$X_3 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

$$X_3 = \frac{750.000}{\left[\left(1 + \frac{10}{200}\right)^{16} - 1\right]}$$

$$X_3 = \$ 634.048,62$$

Valor Actual del cine:

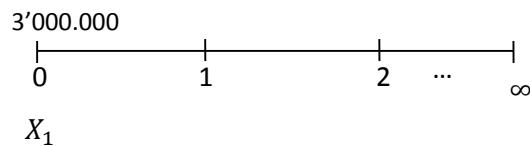
$$VA = X_1 - X_2 - X_3$$

$$VA = 5'853.658,54 - 579.471,28 - 634.048,62$$

$$VA = \$ 4'640.138,64$$

11. Se espera que el costo inicial de un embalse sea de \$3'000000. Se estima que el costo de mantenimiento anual sea de \$10000 por año; se requiere para cambio de compuertas y válvulas un desembolso adicional de \$35000 cada 5 años. Si se espera que el embalse dure para siempre. ¿Cuál será su costo capitalizado (Valor Actual) a una tasa de interés del 10% anual?

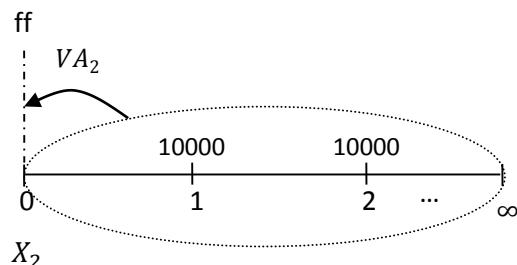
Costo inicial del embalse:



$$X_1 = 3'000.000$$

$$X_1 = \$ 3'000.000$$

Costos de mantenimiento:



$$X_2 = VA_2$$

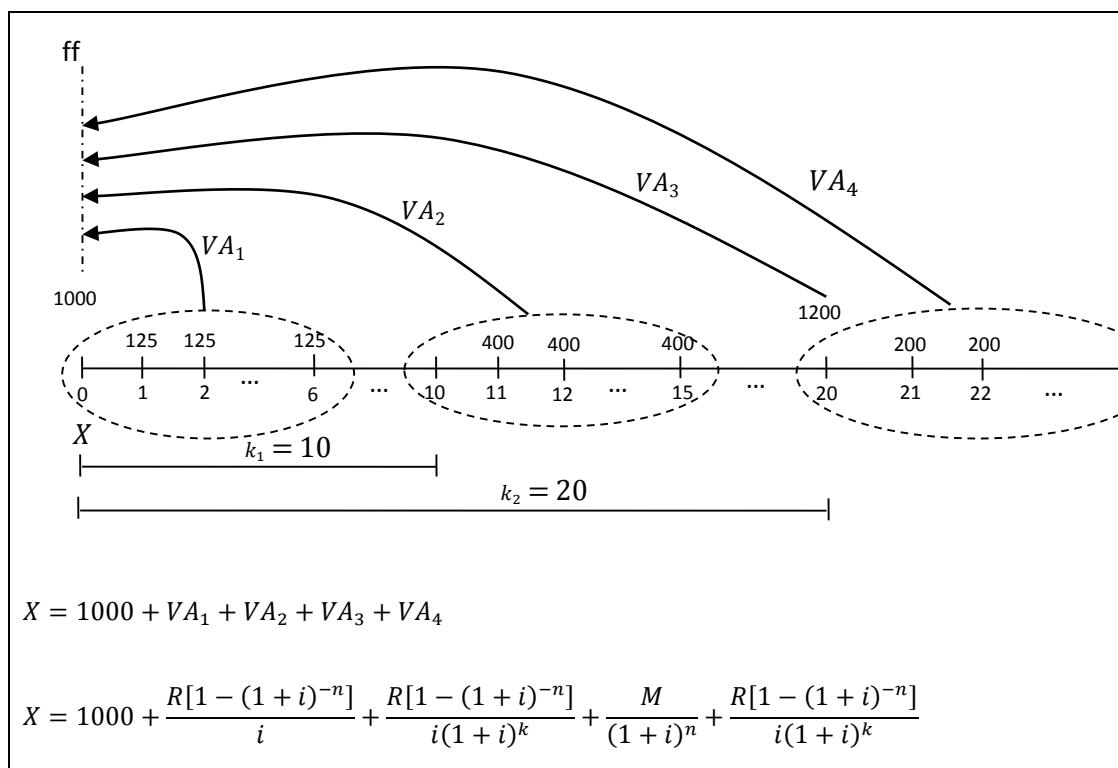
$$X_2 = \frac{R}{i}$$

$$X_2 = \frac{10000}{\frac{10}{100}}$$

$$X_2 = \$ 100.000,00$$

<p>Desembolso adicional quinquenal:</p> <p>$X_3 = VA_3$</p> $X_3 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$ $X_3 = \frac{35000}{\left[\left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 - 1\right]}$ $X_3 = \$ 57.329,12$	$X_3 = VA_3$ $X_3 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$ $X_3 = \frac{35000}{\left[\left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 - 1\right]}$ $X_3 = \$ 57.329,12$
<p>Valor Actual del embalse:</p> $VA = X_1 + X_2 + X_3$ $VA = 3'000.000 + 100.000 + 57329.12$ $VA = \$ 3'157.329,12$	

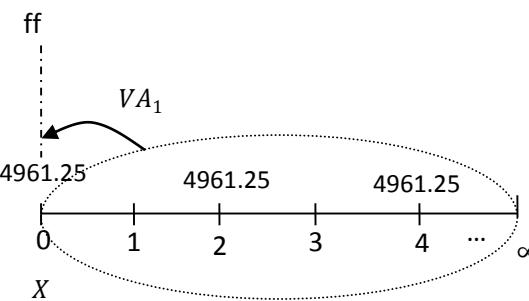
12. Los costos operativos mensuales de una empresa tienen un ciclo repetitivo de dos años y que se puede resumir de la siguiente manera: Se invierte inicialmente \$1000 y cada gasto mensual subsiguiente durante los próximos seis meses es igual a \$ 125 cada uno; posteriormente se invierte \$400 mensuales durante los próximos cinco meses haciendo el primer desembolso en el mes undécimo (11); finalmente se vuelve a invertir \$1200 en el vigésimo mes (20) y un gasto mensual de \$ 200 desde el mes 21 hasta el mes 24. Si este ciclo se repite infinitamente y se considera una tasa de rendimiento del 15% capitalizable mensualmente, determine los costos capitalizados de la empresa.



$$X = 1000 + \frac{125 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{-6} \right]}{\frac{15}{1200}} + \frac{400 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{-5} \right]}{\frac{15}{1200} \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{10}} + \frac{1200}{\left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{20}} + \frac{200 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{-4} \right]}{\frac{15}{1200} \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{20}}$$

$$X = 1000 + 718.25 + 1702.01 + 936.01 + 604.98$$

$$X = \$4.961,25$$



Ecuación de valor:

$$X = 4961.25 + VA_1$$

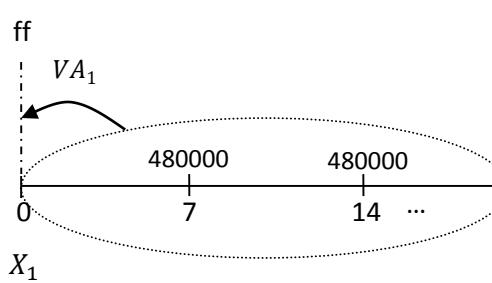
$$X = 4961.25 + \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

$$X = 4961.25 + \frac{4961.25}{\left[\left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{24} - 1 \right]}$$

$$X = \$19.244,35$$

13. Una industria recibe dos ofertas de cierto tipo de máquinas, ambas de igual rendimiento. La primera oferta es de \$ 480000 y las máquinas tienen una vida útil de 7 años; la segunda oferta es de \$ 600000 por máquinas que tienen una vida útil de 10 años. Si el rendimiento del dinero es del 6% efectivo, ¿Qué oferta es la más conveniente?.

Oferta I

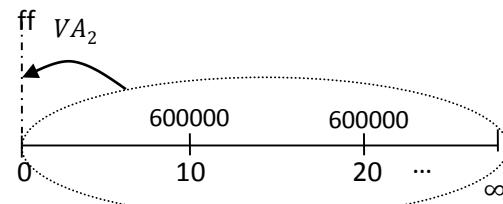


$$X_1 = VA_1$$

$$X_1 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{480000}{\left[\left(1 + \frac{6}{100} \right)^7 - 1 \right]}$$

$$X_1 = \$953.080,14$$

Oferta II



$$X_2 = VA_2$$

$$X_2 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{600000}{\left[\left(1 + \frac{6}{100} \right)^{10} - 1 \right]}$$

$$X_2 = \$758.679,58$$

Para la compra de máquinas, es más conveniente la segunda oferta.

14. La compañía XYZ utiliza baterías que cuestan \$ 30 con una vida útil de 2 años. Se ofrece otro modelo que cuesta \$ 40 con una vida probable de 3 años. Cuál de los dos modelos es mejor inversión sobre la base del 5%, cuál es máximo precio que la compañía XYZ puede pagar por el segundo modelo de tal forma que el costo capitalizado no exceda al modelo que tiene actualmente en uso.

<p>Oferta I</p> <p>The diagram shows a horizontal timeline with tick marks at 0, 2, 4, ..., infinity. A dashed vertical line labeled 'ff' (final payment) is at year 0. A solid vertical line labeled 'VA₁' is at year 2. A dotted oval encloses the years 2, 4, ..., infinity. The value '30' is written above the timeline between years 2 and 4.</p> $X_1 = VA_1$ $X_1 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{30}{\left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 - 1\right]}$ $X_1 = \$292,68$	<p>Oferta II</p> <p>The diagram shows a horizontal timeline with tick marks at 0, 3, 6, ..., infinity. A dashed vertical line labeled 'ff' (final payment) is at year 0. A solid vertical line labeled 'VA₂' is at year 3. A dotted oval encloses the years 3, 6, ..., infinity. The value '40' is written above the timeline between years 3 and 6.</p> $X_2 = VA_2$ $X_2 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{40}{\left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 - 1\right]}$ $X_2 = \$253,77$
Es más conveniente la segunda oferta.	
<p>Máximo precio a pagar:</p> $X_1 = X_2$ $X_1 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$ $292.68 = \frac{W}{\left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 - 1\right]}$	$W = 292.68 \left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 - 1 \right]$ $W = \$46,13$

15. Demuestre que el Costo adicional X para prolongar por b años la vida útil de un activo cuyo costo inicial C y que debe renovarse después de k años, considerando una tasa periódica i está dado por:

$$X = C \frac{[1 - (1 + i)^{-b}]}{[(1 + i)^k - 1]}$$

Demostración:

<p>Sea C el costo inicial del activo, entonces el costo capitalizado K del mismo, considerando que la renovación luego de k años es igual al Costo inicial con una tasa periódica i está dado por:</p> $K = \frac{C}{[1 - (1 + i)^{-k}]}$	<p>Por otro lado, el costo capitalizado K' incluyendo el costo adicional X para prolongar su vida útil en b años, con una tasa periódica i está dado por:</p> $K' = \frac{C + X}{[1 - (1 + i)^{-(k+b)}]}$
---	---

Igualando los costos capitalizados:

$$\begin{aligned} \frac{C}{[1 - (1 + i)^{-k}]} &= \frac{C + X}{[1 - (1 + i)^{-(k+b)}]} \\ X &= \frac{C[1 - (1 + i)^{-(k+b)}]}{[1 - (1 + i)^{-k}]} - C \\ X &= \frac{C[1 - (1 + i)^{-(k+b)}] - C[1 - (1 + i)^{-k}]}{[1 - (1 + i)^{-k}]} \\ X &= \frac{C\{[1 - (1 + i)^{-(k+b)}] - [1 - (1 + i)^{-k}]\}}{[1 - (1 + i)^{-k}]} \\ X &= \frac{C[1 - (1 + i)^{-(k+b)}] - 1 + (1 + i)^{-k}}{[1 - (1 + i)^{-k}]} \\ X &= \frac{C[(1 + i)^{-k} - (1 + i)^{-(k+b)}]}{[1 - (1 + i)^{-k}]} \\ X &= \frac{C(1 + i)^{-k}[1 - (1 + i)^{-b}]}{[1 - (1 + i)^{-k}]} \\ X &= \frac{C[1 - (1 + i)^{-b}]}{\frac{[1 - (1 + i)^{-k}]}{(1 + i)^{-k}}} \\ X &= \frac{C[1 - (1 + i)^{-b}]}{[(1 + i)^k - 1]} \end{aligned}$$

16. Las vigas utilizadas en cierta construcción cuestan \$ 2000 y duran 12 años, aplicándoles un tratamiento preservativo pueden durar 20 años. Cuánto debería pagarse por el tratamiento suponiendo intereses de 4%.

Costo inicial $C = 2000$
 Tiempo de renovación $k = 12$ años
 Tiempo de prolongación $b = 8$ años
 Tasa efectiva anual: $i = 4\%$
 Pago adicional $X = ?$

$$X = \frac{C[1 - (1 + i)^{-b}]}{[(1 + i)^k - 1]}$$

$$X = \frac{2000 \left[1 - \left(1 + \frac{4}{100} \right)^{-8} \right]}{\left[\left(1 + \frac{4}{100} \right)^{12} - 1 \right]} = \$ 896,16$$

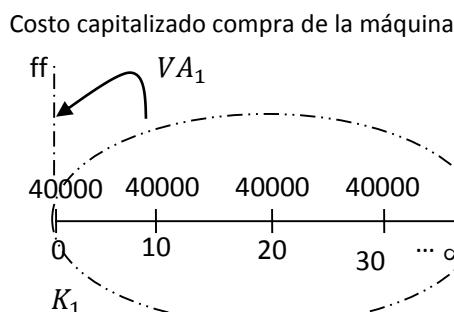
17. Las traviesas que usa, en una zona tropical, una compañía ferroviaria le cuesta \$ 120, cada una y deben remplazarse cada 5 años. Por medio de un tratamiento químico, puede prolongarse la vida de las traviesas en 4 años. Cuánto debe pagarse por el tratamiento químico considerando una tasa efectiva del 6%.

Costo inicial $C = 120$
 Tiempo de renovación $k = 5$ años
 Tiempo de prolongación $b = 4$ años
 Tasa efectiva anual: $i = 6\%$
 Pago adicional $X = ?$

$$X = \frac{C[1 - (1 + i)^{-b}]}{[(1 + i)^k - 1]}$$

$$X = \frac{120 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{100} \right)^{-4} \right]}{\left[\left(1 + \frac{6}{100} \right)^5 - 1 \right]} = \$ 73,76$$

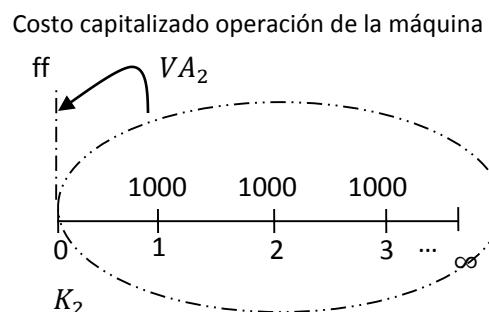
18. La compra de una máquina asciende a \$ 40000 y su operación a \$ 1000 anuales; la máquina tiene una vida útil de 10 años tiempo después habrá que renovarla con una máquina del mismo costo. Si la tasa periódica actual es del 10% determine el costo capitalizado de la máquina.



Como el Costo inicial es igual al costo de renovación:

$$K_1 = VA_1$$

$$K_1 = \frac{C}{[1 - (1 + i)^{-k}]} = \frac{40000}{\left[1 - \left(1 + \frac{10}{100} \right)^{-10} \right]} = 65.098,16$$



$$K_2 = VA_2$$

$$K_2 = \frac{R}{i} = \frac{1000}{\left(\frac{10}{100} \right)} = 10.000,00$$

Costo de capitalización total:

$$K = K_1 + K_2$$

$$K = 65098,16 + 10000 = \$ 75.018,16$$

19. Se espera que el nuevo puente tenga un costo inicial de \$25 millones, este puente deberá repavimentarse cada cinco años a un costo de \$ 1 millón, los costos anuales de operación e inspección se estiman en \$ 50000. Determine el costo capitalizado del puente considerando que el dinero rinde al 8%.

<p>Costo inicial del puente</p> <p>$K_1 = 25'000.000$</p> <p>Costo capitalizado del pavimento</p> <p>$K_2 = VA_2$</p> $K_2 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{1000000}{\left[\left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 - 1\right]}$ <p>$K_2 = 2'130.705,68$</p>	<p>Costo capitalizado de mantenimiento</p> <p>$K_3 = VA_3$</p> $K_3 = \frac{R}{i} = \frac{50000}{\frac{8}{100}} = 625000$ <p>$K_3 = 625.000,00$</p> <p>Costo capitalizado total</p> $K = K_1 + K_2 + K_3$ $K = 25'000.000 + 2'130.705,68 + 625.000$ <p>$K = 27'7555.705,68$</p>
--	--

20. Una presa para el control de inundaciones tiene un costo inicial de \$ 15 millones; las compuertas de control de flujo de la presa deben remplazarse cada 10 años a un costo de \$ 2 millones. Si la tasa de interés es 5% anual Cuál es el costo capitalizado de la presa.

<p>Costo inicial de la presa</p> <p>$K_1 = VA_1$</p> <p>Costo de capitalización total</p> $K = K_1 + K_2$ $K = 15'000.000 + 3'180.183.18$ <p>$K = \\$ 18'180.183,18$</p>	<p>Costo capitalizado del pavimento</p> <p>$K_2 = VA_2$</p> $K_2 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{2'000.000}{\left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} - 1\right]}$ <p>$K_2 = 3'180,183.18$</p>
--	---

9.10. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se requiere construir un fondo que permita disponer de una renta perpetua de \$ 500 mensuales, cuál debe ser el valor en el fondo si reconoce un rendimiento del 10% capitalizable mensualmente?

R: \$ 60.000,00

2. Al fallecer una persona deja un legado a un sanatorio estipulado así: \$ 400000 para la construcción y adquisición de equipos para la sección de terapia intensiva y \$ 2000 anuales para su funcionamiento a perpetuidad, con el 4 % efectivo anual, determine el valor actual del legado.

R: \$ 450.000,00

3. Qué cantidad es necesaria para patrocinar una serie de conferencias trimestrales que cuestan \$ 3500, si las mismas se llevarán a cabo al principio de cada trimestre y en forma indefinida, suponiendo intereses al 5% convertible trimestralmente.

R: \$ 283.500,00

4. Se vende una acción con dividendos esperados de \$ 300 anuales a perpetuidad, con el primer dividendo para dentro de 4 años, a pagarse mediante una serie de 12 pagos anuales empezando con el primer pago en 2 años. Cuál será el valor del pago anual si se considera intereses al 8%.

R: \$ 426,62

5. Encontrar el valor de la renta trimestral perpetua de un depósito de \$ 20000 si se empieza a pagar a luego de 3 años de haber realizado el depósito tomando el 8% capitalizable trimestralmente.

R: \$ 497,35

6. Una señora ofrece donar a perpetuidad \$ 100 mensuales a un orfanato. Cuál será el valor actual de su ofrecimiento si el primer pago lo realizará dentro de 5 meses con una tasa de 8% capitalizable mensualmente.

R: \$ 14.606,58

7. Una persona quiere construir un fondo para otorgar un premio anual de \$ 20000 en forma indefinida; para ello deposita el día de hoy \$ 150000 en una corporación que reconoce el 8% anual. Cuánto tiempo debe dejar en depósito el dinero antes de empezar la entrega del premio anual indefinido?

R: 7,64 años.

8. Se desea establecer un fondo perpetuo de becas para estudiantes de Auditoría, este fondo concederá una beca anual por la cantidad de \$3000 y a perpetuidad empezando dentro de 10 años. Para este fondo se hace una serie de 5 depósitos anuales con el primer depósito dentro de un año, luego de lo cual ya no se realiza más depósitos. Si el fondo gana intereses a la tasa del 12%. Cuál será el valor del depósito anual?

R: \$ 2.500,92

9. Genoveva está evaluando la posibilidad de comprar un equipo dental nuevo, tiene dos opciones la primera plantea pagar cuotas mensuales en \$200 a perpetuidad y adicionalmente pagos anuales de \$500 a perpetuidad. La segunda opción plantea pagos mensuales de \$200 cada mes durante los primeros cinco años, y luego pagos a perpetuidad de \$700 cada dos años. Considerando una tasa de interés del 12% anual capitalizable mensualmente, cual es la mejor opción en términos económicos.

R: Opción 1: \$ 23.942,44; Opción2: \$ 11.586,15; la segunda opción

10. Un colegio calcula que el nuevo edificio de la sociedad de alumnos requerirá \$ 1400 de mantenimiento al final de cada año por los próximos 10 años y posteriormente \$ 1000 al final de cada año, indefinidamente. Qué donativo se hace necesario para asegurar el mantenimiento del edificio, suponiendo intereses de 4%

R: \$ 28.244,36

11. Para mantener en buen estado las carreteras vecinales, la junta vecinal decide establecer un fondo para proveer las reparaciones futuras que se estiman en \$ 350000 cada 10 años. Hallar el valor del fondo con la tasa efectiva del 6%.

R: \$ 442.563,09

12. En una localidad en que las inversiones tienen un rendimiento del 8% anual, con capitalización semestral, alguien ofrece de venta un restaurante que tiene una utilidad anual promedio de \$ 60000. Si los costos anuales operación del negocio asumen a \$ 25000 y se debe renovar el mobiliario del restaurante cada 5 años a un costo de \$ 100000. Determinar, de acuerdo con el rendimiento de las inversiones en la localidad, cuánto puede ofrecerse por el restaurante suponiendo que las condiciones económicas permanecerán constantes.

R: \$ 220.694,21

13. Una entidad estatal puede usar el edificio A que requiere \$160000 cada año como costo de alquiler y \$ 100000 cada 5 años para reparaciones o, puede usar el edificio B que requiere \$158000 cada año como costo de alquiler y \$25000 cada 2 años para reparaciones. Suponiendo una tasa del 8% efectivo anual y que el edificio que se ocupe será por tiempo indefinido, ¿Cuál de los dos edificios le resulta más conveniente utilizar?

R: Edificio A: 2'213.070,57; Edificio B: 2'125.240,38; Edificio B

14. El eje de un torno cuesta \$15000 y tiene que ser remplazado cada tres años al mismo costo; otro que cuesta \$ 20000 será remplazado cada 6 años al mismo precio. Al 6% de interés cuál será la oferta más económica.

R: Oferta 1: \$ 93.527,45; Oferta B: 67.787,54; la segunda opción

15. Un silo sin tratamiento cuesta \$ 38500 y dura 15 años. Cuánto debería uno estar dispuesto a pagar adicionalmente por un silo tratado que dura 25 años, suponiendo intereses al 8% convertible trimestralmente.

R: \$ 9.234,30

16. Encuentre el valor actual del siguiente flujo de fondos: \$ 14000 el día de hoy, \$ 55000 a los 6 años y \$ 5000 anuales, al final de cada año de allí en adelante, si la tasa de interés es del 8%.

R: \$88.044,93

17. Repita el problema anterior considerando que la tasa de interés es el 8% anual capitalizable semestralmente.

R: \$86.624,71

18. Un viejo ex alumno de una universidad, desea establecer una beca permanente con su nombre. Piensa hacer donaciones de \$ 2000 anuales durante 10 años, empezando dentro de un año. Y dejar \$ 100000 adicionales cuando se muera. Si la tabla actuarial estima que el ex estudiante vivirá a lo sumo 15 años a partir de hoy, cuánto dinero podría concederse a cada uno de los cinco becarios dentro de un año después del fallecimiento del ex alumno y a perpetuidad si la tasa de interés es del 8% anual.

R: \$2.281,14

19. El costo inicial de una pequeña represa es de \$ 300000. El costo anual de mantenimiento se estima en \$ 10000 anuales y un sobre costo adicional de \$ 35000 cada 5 años. Si se supone que la represa tendrá una duración indefinida, cuál será el costo capitalizado a una tasa del 12% anual.

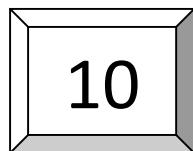
R: \$429.244,50

20. Una ciudad planea construir un nuevo estadio de fútbol con un costo de \$ 12 millones. El costo anual de mantenimiento se estima en \$ 25000, - valor considerado al principio de cada año - , además el césped artificial debe remplazarse cada 10 años a un costo de \$ 150000, la pintura tiene un costo de \$ 65000 y debe pintarse cada 5 años. Si la ciudad espera que el estadio dure indefinidamente cuál será el valor actual de la inversión, considere el rendimiento del dinero al 5% capitalizable trimestralmente.

R: \$12'979.245,05

TABLA DE CONTENIDOS

UNIDAD 10.- ANUALIDADES GENERALES.....	146
10.1. DEFINICIÓN.....	146
10.2. CLASIFICACIÓN	146
10.3. ANUALIDADES EQUIVALENTES	146
10.4. AGRUPAMIENTO Y DISTRIBUCIÓN DE LOS PAGOS.....	146
10.5. PAGO EQUIVALENTE.....	147
10.6. TASA EQUIVALENTE.....	147
10.7. VALOR FUTURO Y VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD GENERAL VENCIDA	148
10.8. PAGO PERIÓDICO DE UNA ANUALIDAD GENERAL VENCIDA.....	148
10.9. VALOR FUTURO Y VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD GENERAL ANTICIPADA.....	148
10.10. PAGO PERIÓDICO DE UNA ANUALIDAD GENERAL ANTICIPADA	149
10.11. PROBLEMAS RESUELTOS	150
10.12. PROBLEMAS PROPUESTOS	170
UNIDAD 11.- AMORTIZACIÓN	172
11.1. INTRODUCCIÓN	172
11.2. VALOR DEL PAGO PERIÓDICO.....	172
11.3. DERECHOS DEL ACREDITOR Y DEL DEUDOR.....	172
11.4. TABLA DE AMORTIZACIÓN	173
11.5. CONSIDERACIONES PARA LA ELABORACIÓN DE LA TABLA DE AMORTIZACIÓN	173
11.6. PROBLEMAS RESUELTOS	174
11.7. PROBLEMAS PROPUESTOS	184
UNIDAD 12.- FONDOS DE ACUMULACIÓN	186
12.1. INTRODUCCIÓN	186
12.2. VALOR DEL DEPÓSITO PERIÓDICO.....	186
12.3. VALOR EN EL FONDO LUEGO DE UN NÚMERO DE DEPÓSITOS REALIZADOS	186
12.4. TABLA DEL FONDO DE ACUMULACIÓN	186
12.5. CONSIDERACIONES PARA LA CREACIÓN DE LA TABLA DE ACUMULACIÓN	187
12.6. PROBLEMAS RESUELTOS	188
12.7. PROBLEMAS PROPUESTOS	196



ANUALIDADES GENERALES

10.1. DEFINICIÓN

Una Anualidad General, es una serie definida de pagos periódicos iguales, realizados al inicio o al final de cada período, tal que: el período de pago y la capitalización de intereses, no coinciden. (AYRES Jr, 1998).

10.2. CLASIFICACIÓN

De acuerdo con la fecha en que se realiza el pago, las anualidades generales pueden ser:

- Anualidades generales vencidas, cuando el pago se realiza al final de cada período.
- Anualidades generales anticipadas, cuando el pago se realiza al inicio de cada período.

10.3. ANUALIDADES EQUIVALENTES

Las anualidades generales deben transformarse en anualidades ordinarias, es decir en anualidades en que los períodos de pago y capitalización de intereses coincidan; existen dos métodos para transformar una anualidad general en una anualidad ordinaria (AYRES Jr, 1998):

- **El Criterio del Pago Equivalente:** que transforma al pago periódico dado en un pago que coincide con la capitalización de intereses dada.

En este texto se desarrollará el Criterio del Pago Equivalente para transformar las anualidades generales vencidas en anualidades ordinarias vencidas.

- **El criterio de la Tasa equivalente:** que transforma la tasa periódica dada en una tasa cuyo período de capitalización coincide con el período de pago.

El criterio de la Tasa Equivalente se puede aplicar en cualquier tipo de anualidad, sea esta anticipada o vencida.

10.4. AGRUPAMIENTO Y DISTRIBUCIÓN DE LOS PAGOS.

En el criterio del Pago Equivalente, las anualidades generales se presentan en dos grupos:

Grupo A:

Anualidades que presentan varios pagos por cada período de capitalización, a continuación se presentan dos ejemplos:

- ✓ Una anualidad con pagos mensuales y capitalización trimestral; entonces habrá tres pagos por cada período de capitalización.
- ✓ Una anualidad con pagos semestrales y capitalización anual; entonces habrá dos pagos por cada período de capitalización.

El pago equivalente agrupará a todos los pagos que se presentan en cada período de capitalización; por esta razón a este grupo se denomina **Agrupamiento**.

Grupo B:

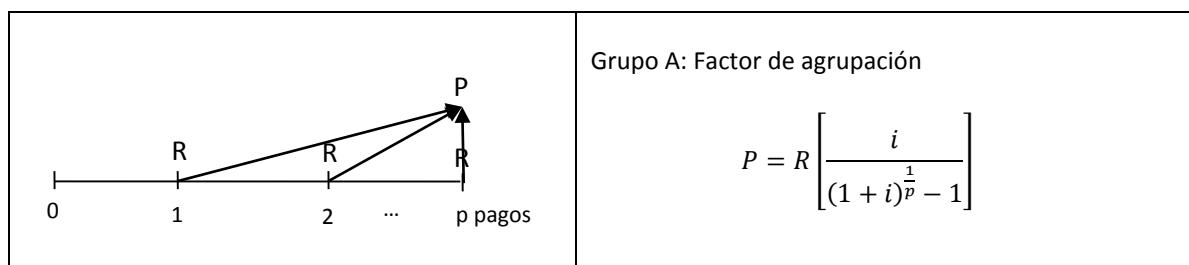
Anualidades que presentan un pago por varios períodos de capitalización, a continuación se presentan dos ejemplos:

- ✓ Una anualidad con pagos anuales y capitalización trimestral; entonces habrá tres pagos por cada período de capitalización.
- ✓ Una anualidad con pagos semestrales y capitalización mensual; entonces habrá dos pagos por cada período de capitalización.

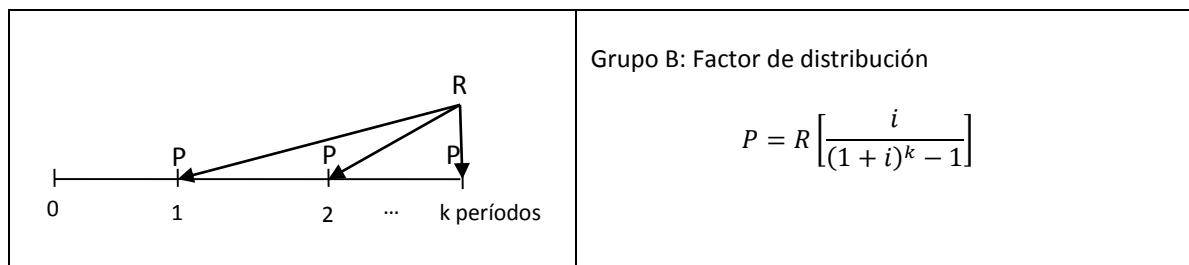
El pago equivalente distribuirá al pago periódico dado en cada período de capitalización; por esta razón a este grupo se denomina **Distribución**.

10.5. PAGO EQUIVALENTE.

A continuación se presentan dos esquemas gráficos en los que se describe a los grupos que generan el pago equivalente en las anualidades vencidas:

AGRUPAMIENTO

En este esquema se puede apreciar como varios pagos periódicos se agrupan en un pago equivalente que coincide con el período de capitalización.

DISTRIBUCIÓN

En este esquema se puede apreciar como el pago periódico R se distribuye en varios pagos equivalentes, uno para cada período de capitalización.

10.6. TASA EQUIVALENTE

Se transforma la anualidad general en anualidad ordinaria cambiando la tasa de interés dada por una tasa equivalente en la cual el nuevo período de capitalización coincide con el período de pago:

$$(1 + i)^m = (1 + i')^{m'}$$

Donde:

i, m : Tasa periódica y frecuencia de capitalización dadas
 i' : Tasa periódica equivalente
 m' : Frecuencia del pago periódico.

Al despejar i' (tasa equivalente) se tiene:

$$i' = (1 + i)^{m/m'} - 1$$

10.7. VALOR FUTURO Y VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD GENERAL VENCIDA

- El Valor Futuro o Monto de una Anualidad General Vencida en función del pago equivalente P esta dado por:

$$VF = \frac{P[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

- El Valor Actual o Valor Presente de una Anualidad General Vencida, en función del pago equivalente P está dado por:

$$VA = \frac{P[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

Tanto para el cálculo del Valor Futuro como del Valor Actual deberá tenerse presente el número de pagos de la anualidad equivalente.

- El Valor Futuro o Monto de una Anualidad General Vencida en función de la Tasa equivalente i' esta dado por:

$$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'}$$

- El Valor Actual o Valor Presente de una Anualidad General Vencida, en función la Tasa equivalente i' está dado por:

$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$$

10.8. PAGO PERIÓDICO DE UNA ANUALIDAD GENERAL VENCIDA

En primer lugar se encuentra el valor del pago equivalente P , sea en función del Valor Futuro o Valor Actual de la anualidad general y luego utilizando la expresión del factor de agrupación o del factor de agrupamiento se encuentra el valor del pago periódico R .

10.9. VALOR FUTURO Y VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD GENERAL ANTICIPADA

- El Valor Futuro o Monto de una Anualidad General Anticipada en función de la Tasa equivalente i' esta dado por:

$$VF = R \left[\frac{(1 + i')^{(n+1)} - 1}{i'} - 1 \right]$$

- El Valor Actual o Valor Presente de una Anualidad General Anticipada, en función la Tasa equivalente i' está dado por:

$$VA = R \left[\frac{1 - (1 + i')^{-(n-1)}}{i'} + 1 \right]$$

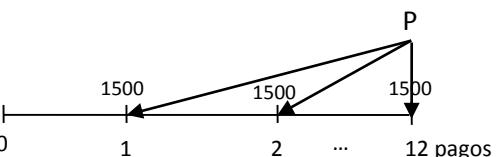
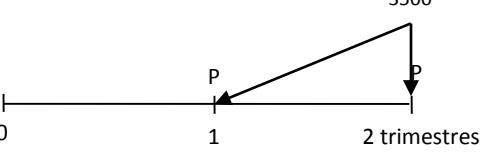
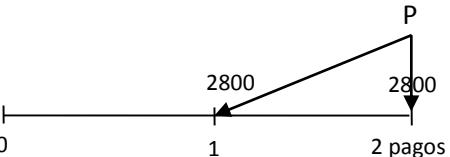
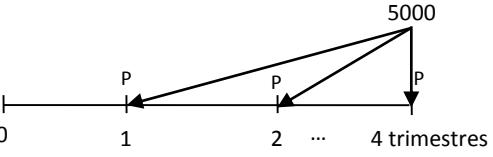
10.10. PAGO PERIÓDICO DE UNA ANUALIDAD GENERAL ANTICIPADA

El valor del pago periódico R de una anualidad general Anticipada, se determina utilizando las expresiones del Valor Futuro y del Valor Actual, tal como se hizo en el caso de las anualidades ordinarias.

10.11. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor del pago equivalente en las siguientes anualidades generales:

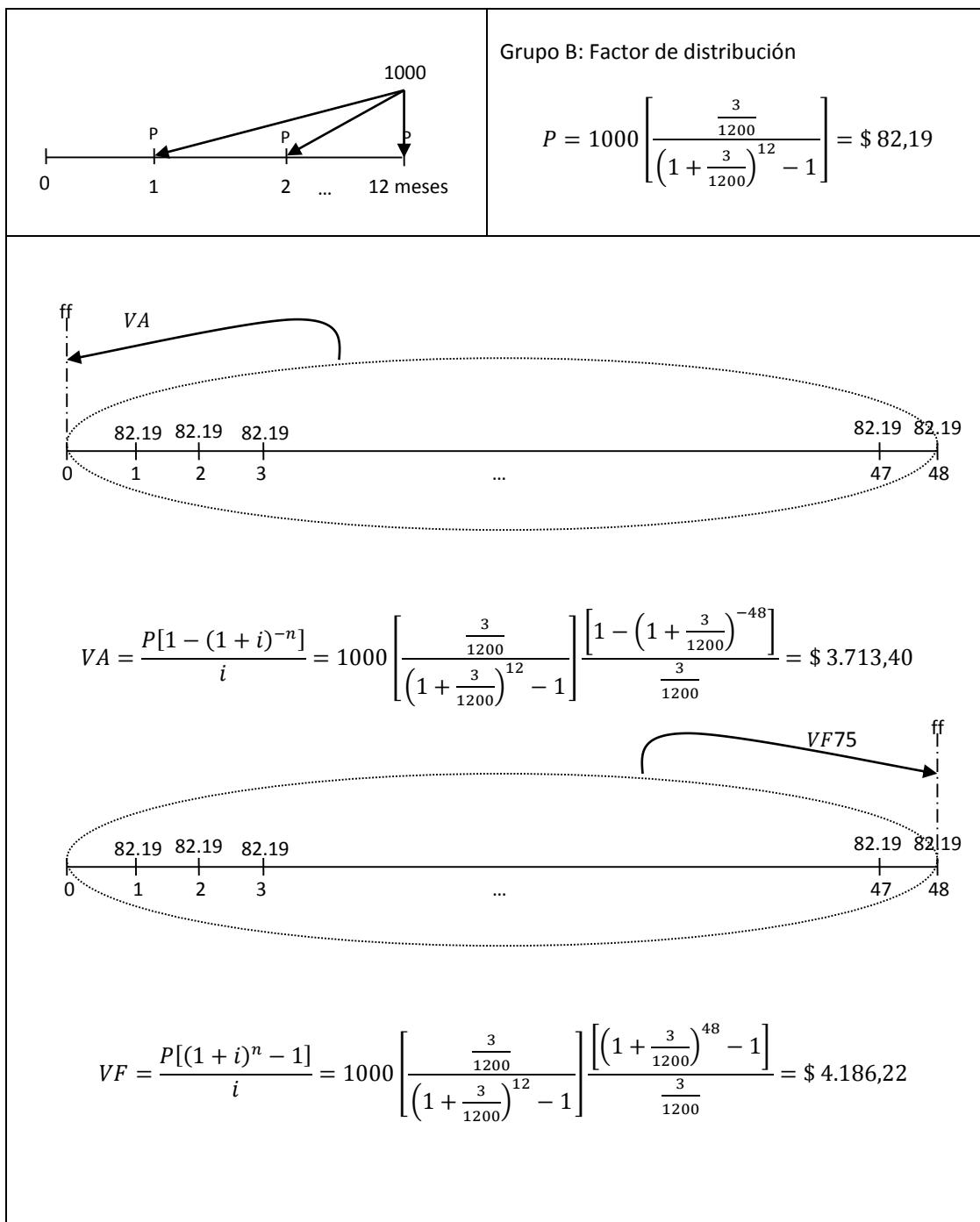
Caso	Renta	Período de pago	Tasa nominal	Capitalización
a	1500	mensual	3%	anual
b	3500	semestral	6%	trimestral
c	2800	trimestral	5%	semestral
d	5000	anual	10%	trimestral

	Grupo A: Factor de agrupación $P = 1500 \left[\frac{\frac{3}{100}}{(1 + \frac{3}{100})^{\frac{1}{12}} - 1} \right] = \$ 18.246,18$
	Grupo B: Factor de distribución $P = 3500 \left[\frac{\frac{6}{400}}{(1 + \frac{6}{400})^2 - 1} \right] = \$ 1.736,97$
	Grupo A: Factor de agrupación $P = 2800 \left[\frac{\frac{5}{200}}{(1 + \frac{5}{200})^{\frac{1}{2}} - 1} \right] = \$ 5.634,78$
	Grupo B: Factor de distribución $P = 5000 \left[\frac{\frac{10}{400}}{(1 + \frac{10}{400})^4 - 1} \right] = \$ 1.204,09$

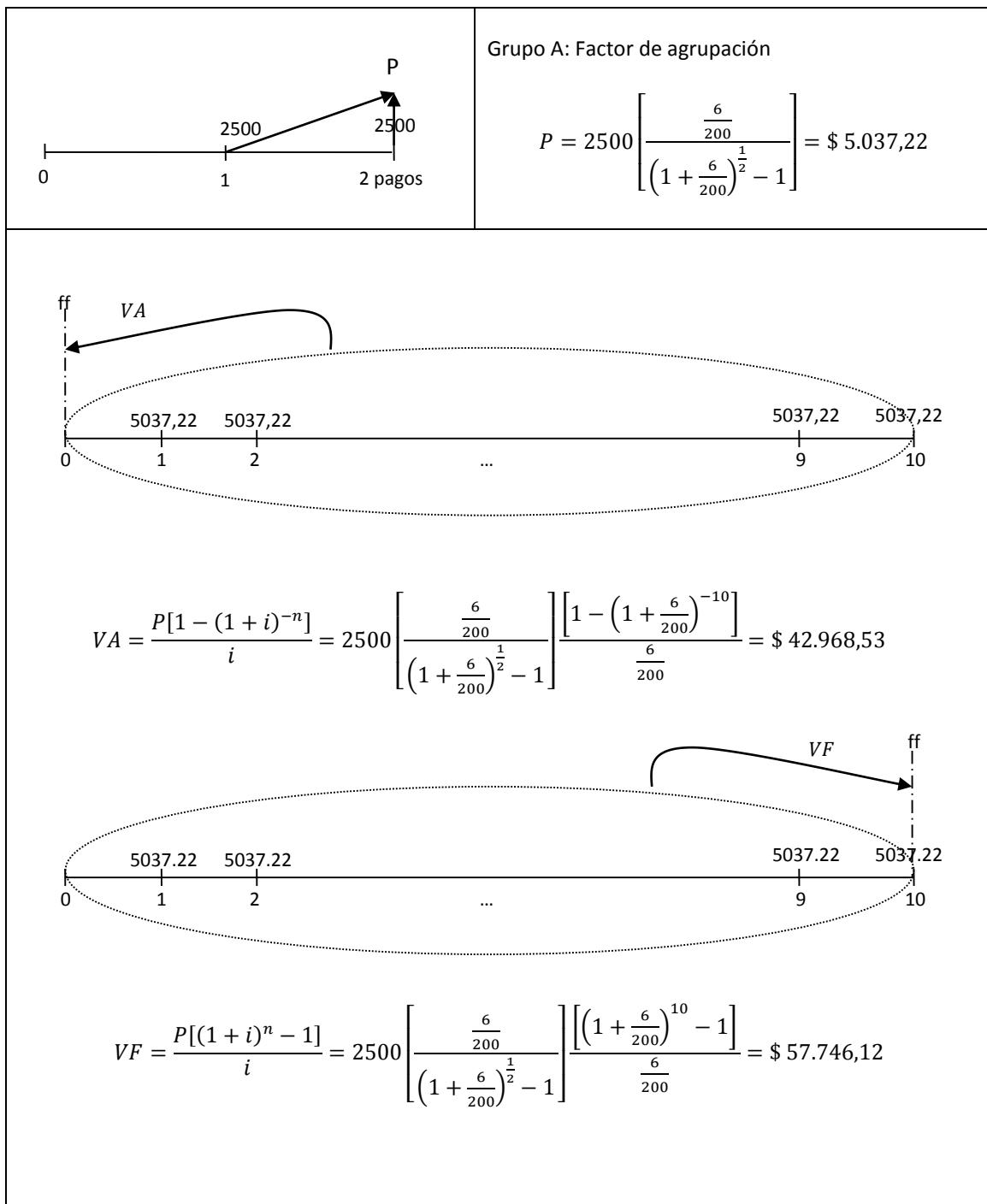
2. Aplicando el criterio del Pago Equivalente, calcular el Valor Actual y el Valor Futuro de las siguientes anualidades generales:

Caso	Renta	Período de pago	Plazo	Tasa nominal	Capitalización
a	1000	anual	4 años	3%	mensual
b	2500	trimestral	5 años	6%	semestral
c	3800	semestral	4 años	5%	trimestral
d	4500	mensual	5 años	10%	anual

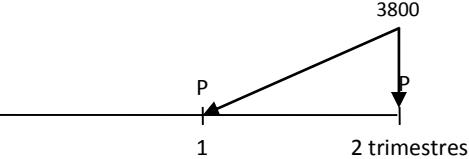
- a. Renta de \$ 1000 anuales a 4 años plazo, con una tasa del 3% capitalizable mensualmente



b. Renta de \$ 2500 trimestrales a 5 años plazo, con una tasa del 6% capitalizable semestralmente.

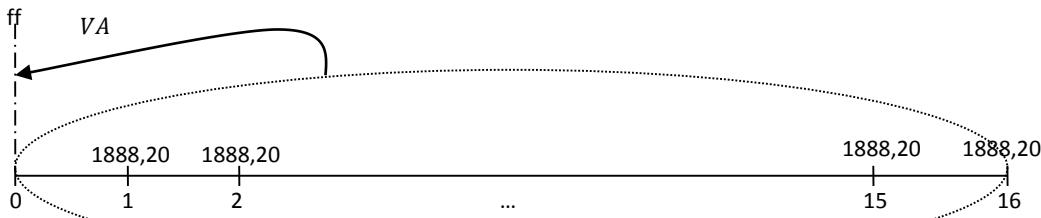


c. Renta de \$ 3800 semestrales a 4 años plazo, con una tasa del 5% capitalizable trimestralmente.

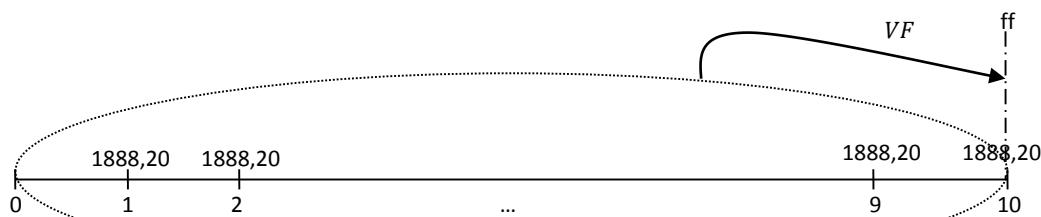


Grupo B: Factor de distribución

$$P = 3800 \left[\frac{\frac{5}{400}}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^2 - 1} \right] = \$1.888,20$$

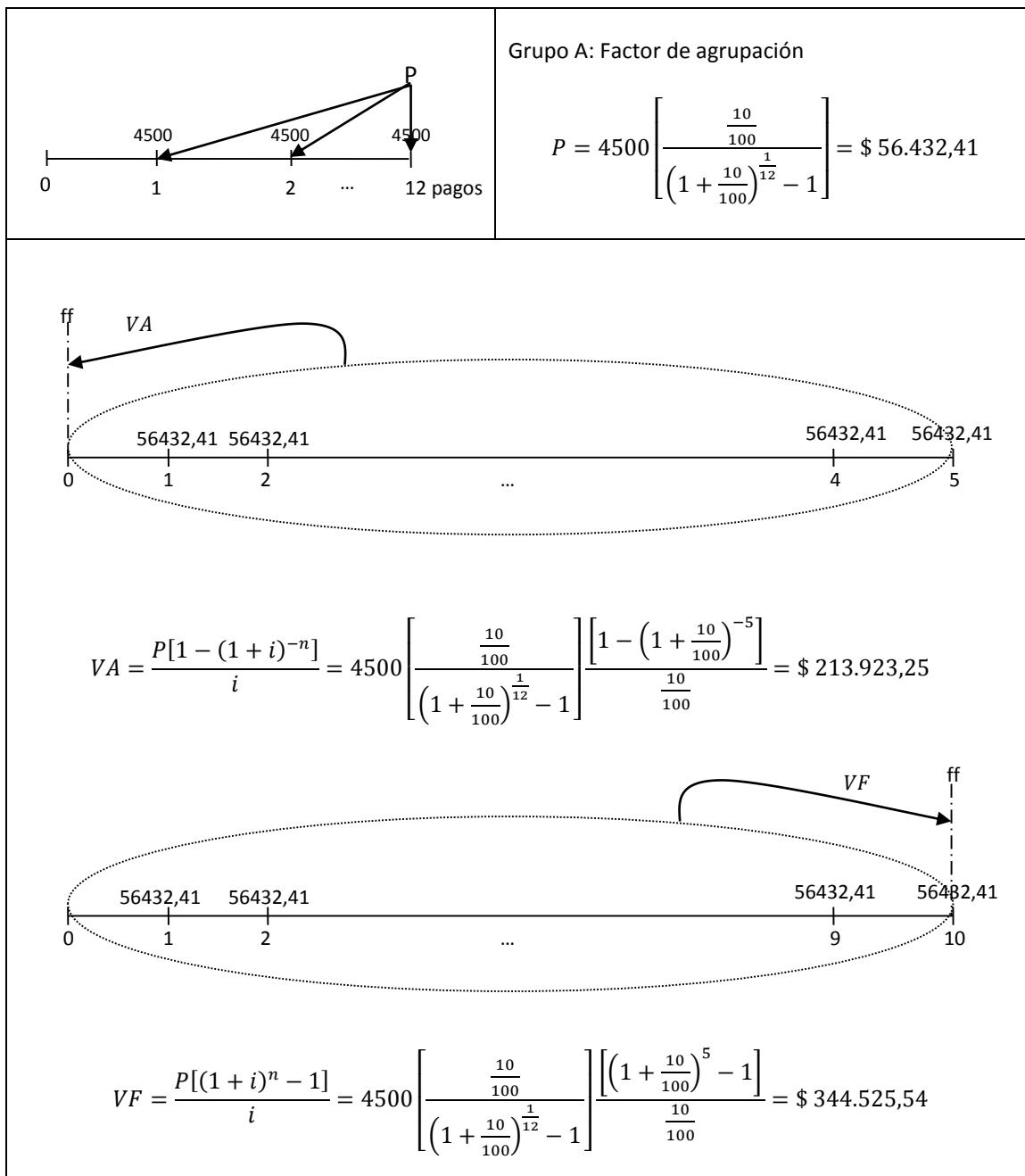


$$VA = \frac{P[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} = 3800 \left[\frac{\frac{5}{400}}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^2 - 1} \right] \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{-16}}{\frac{5}{400}} \right] = \$ 27,228,38$$



$$VF = \frac{P[(1+i)^n - 1]}{i} = 3800 \left[\frac{\frac{5}{400}}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^2 - 1} \right] \frac{\left[\left(1 + \frac{5}{400}\right)^{16} - 1\right]}{\frac{5}{400}} = \$ 33,215,61$$

- d. Renta de \$ 4500 mensuales a 5 años plazo, con una tasa del 10% capitalizable anualmente.



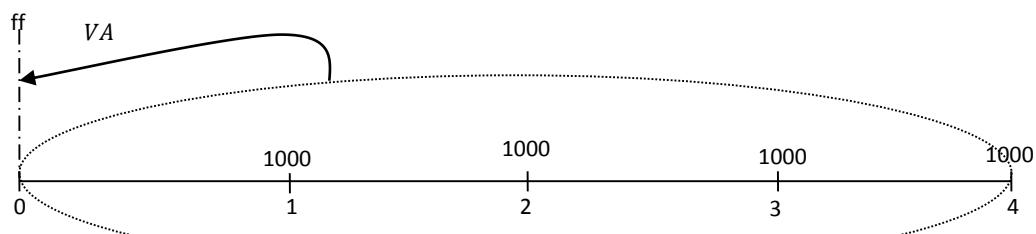
3. Aplicando el criterio de la Tasa Equivalente, calcular el Valor Actual y el Valor Futuro de las siguientes anualidades generales:

Sugerencia: Utilice las memorias de la calculadora para almacenar los cálculos parciales.

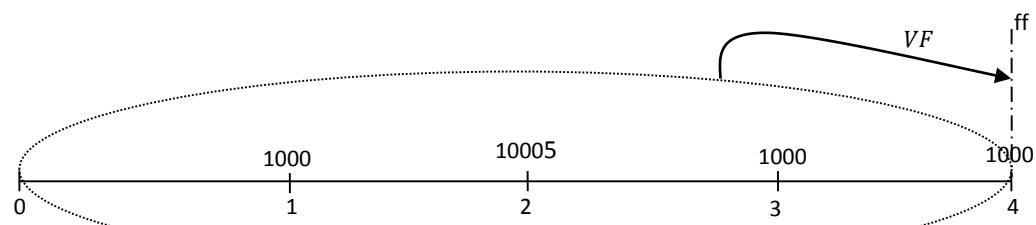
Caso	Renta	Período de pago	Plazo	Tasa nominal	Capitalización
a	1000	anual	4 años	3%	mensual
b	2500	trimestral	5 años	6%	semestral
c	3800	semestral	4 años	5%	trimestral
d	4500	mensual	5 años	10%	anual

- a. Renta de \$ 1000 anuales a 4 años plazo, con una tasa del 3% capitalizable mensualmente.

<p><i>Tasa nominal j = 3%</i> <i>Frecuencia de capitalización m = 12</i> <i>Frecuencia equivalente m' = 1</i></p> <p><i>tasa periódica i = $\frac{j}{m} = \frac{3}{1200}$</i></p>	<p>Tasa equivalente:</p> $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{3}{1200} \right)^{12/1} - 1 \right] \times 100 = 3,04\%$
--	---



$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'} = \frac{1000 \left[1 - \left(1 + \frac{3.04}{100} \right)^{-4} \right]}{\frac{3.04}{100}} = \$ 3.713,40$$



$$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'} = \frac{1000 \left[\left(1 + \frac{3.04}{100} \right)^4 - 1 \right]}{\frac{3.04}{100}} = \$ 4.186,22$$

b. Renta de \$ 2500 trimestrales a 5 años plazo, con una tasa del 6% capitalizable semestralmente.

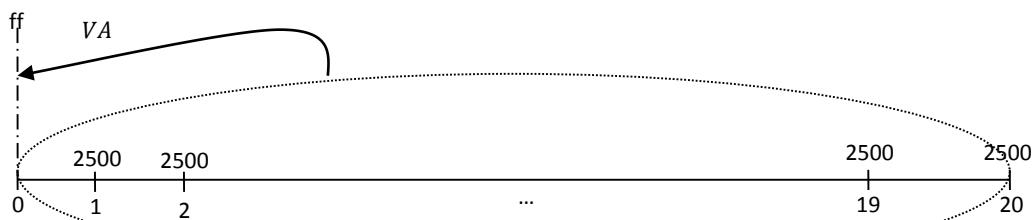
Tasa nominal $j = 6\%$
 Frecuencia de capitalización $m = 2$
 Frecuencia equivalente $m' = 4$

$$\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{6}{200}$$

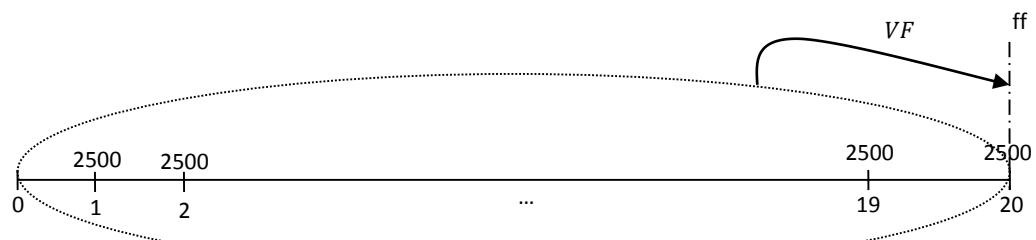
Tasa equivalente:

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{6}{200} \right)^{2/4} - 1 \right] \times 100 = 1,49\%$$



$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'} = \frac{2500 \left[1 - \left(1 + \frac{1.49}{100} \right)^{-20} \right]}{\frac{1.49}{100}} = \$ 42.968,53$$



$$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'} = \frac{2500 \left[\left(1 + \frac{1.49}{100} \right)^{20} - 1 \right]}{\frac{1.49}{100}} = \$ 57.746,12$$

c. Renta de \$ 3800 semestrales a 4 años plazo, con una tasa del 5% capitalizable trimestralmente.

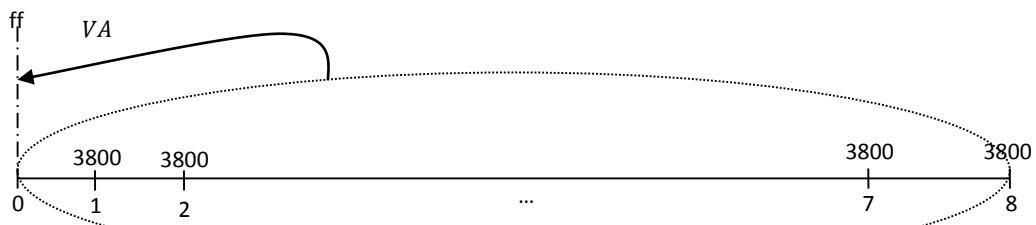
Tasa nominal $j = 5\%$
 Frecuencia de capitalización $m = 4$
 Frecuencia equivalente $m' = 2$

$$\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{6}{200}$$

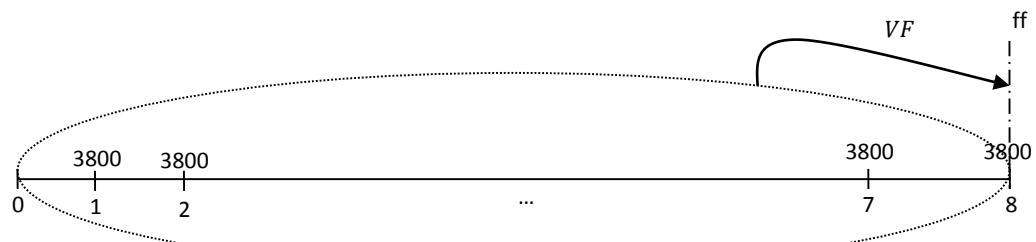
Tasa equivalente:

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{5}{400} \right)^{4/2} - 1 \right] \times 100 = 2,52\%$$



$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'} = \frac{3800 \left[1 - \left(1 + \frac{2,52}{100} \right)^{-8} \right]}{\frac{2,52}{100}} = \$ 27.228,38$$



$$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'} = \frac{3800 \left[\left(1 + \frac{2,52}{100} \right)^8 - 1 \right]}{\frac{2,52}{100}} = \$ 33.215,61$$

d. Renta de \$ 4500 mensuales a 5 años plazo, con una tasa del 10% capitalizable anualmente.

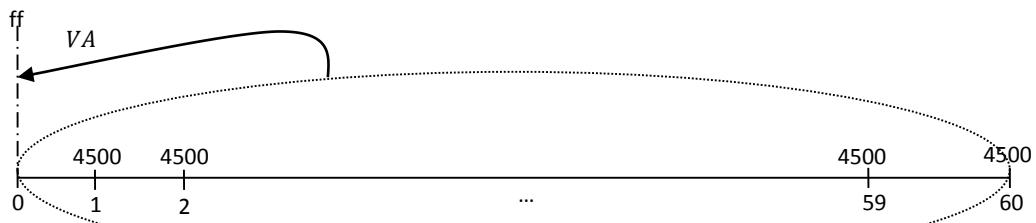
Tasa nominal $j = 10\%$
 Frecuencia de capitalización $m = 1$
 Frecuencia equivalente $m' = 12$

$$\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{10}{100}$$

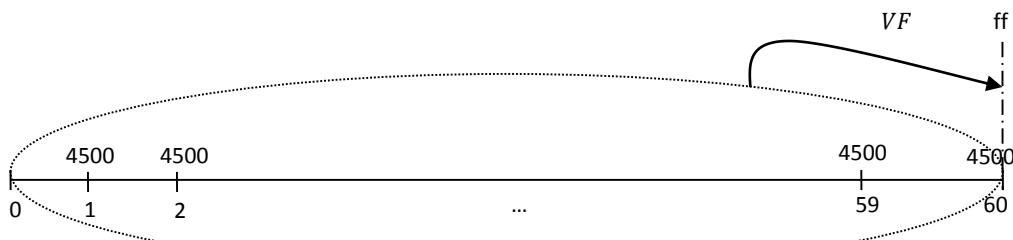
Tasa equivalente:

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{10}{100} \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] \times 100 = 0,80\%$$

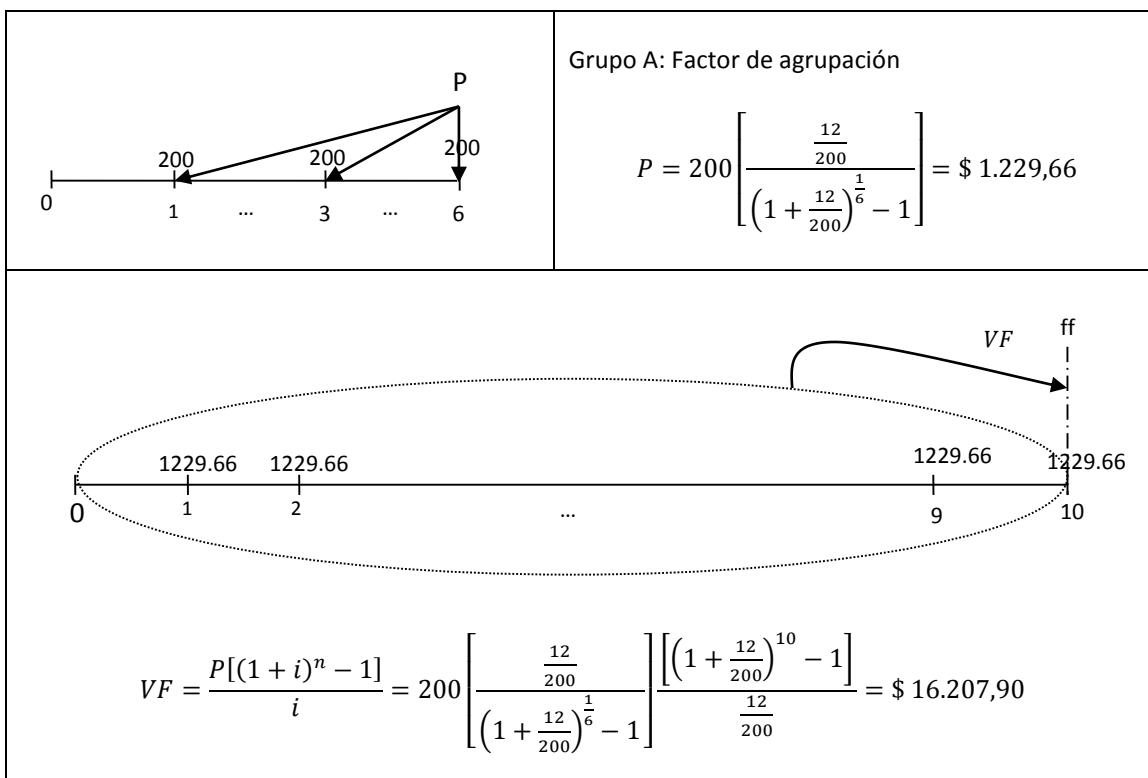


$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'} = \frac{4500 \left[1 - \left(1 + \frac{0.80}{100} \right)^{-60} \right]}{\frac{0.80}{100}} = \$ 213.923,25$$

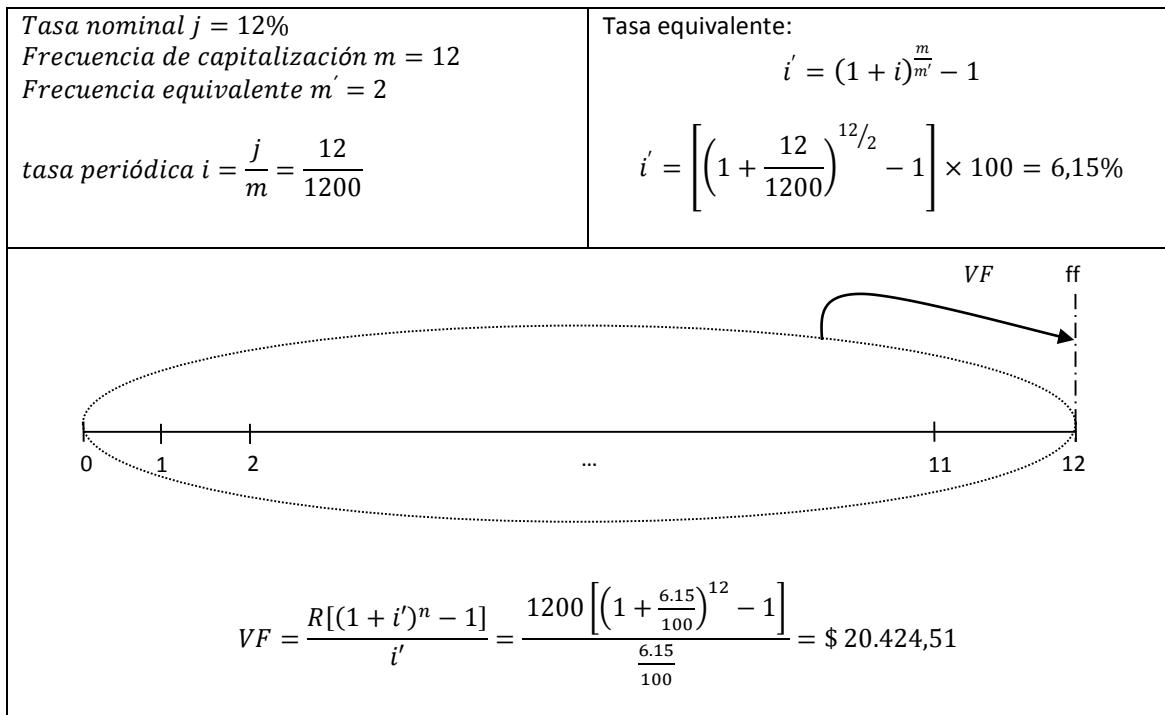


$$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'} = \frac{4500 \left[\left(1 + \frac{0.80}{100} \right)^{60} - 1 \right]}{\frac{0.80}{100}} = \$ 344.525,64$$

4. Juan deposita al final de cada mes \$ 200 en una cooperativa que reconoce el 12% anual capitalizable semestralmente, cuánto tendrá en su cuenta al final de 5 años?. Utilice el criterio del Pago equivalente.



5. Aplicando el criterio de la Tasa equivalente, determinar la cantidad acumulada por una serie de depósitos semestrales de \$ 1200 durante 6 años, en una cuenta que paga a sus ahorristas el 12% anual capitalizable mensualmente.



6. Cuál es el valor actual de un negocio por el cual el comprador entrega al momento de la compra \$ 50000 y firma 10 pagarés con vencimiento trimestral por \$ 1500 cada uno si la tasa de interés es el 8% capitalizable semestralmente?

 $P = 1500 \left[\frac{\frac{8}{200}}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right] = \$ 3.029,71$	Grupo A: Factor de agrupación $P = 1500 \left[\frac{\frac{8}{200}}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right] = \$ 3.029,71$
$X = 50000 + VA_1$ $X = 50000 + \frac{P[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$	$X = 50000 + 1500 \left[\frac{\frac{8}{200}}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right] \frac{1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-5}}{\frac{8}{200}}$ $X = 50000 + 13487.71$ $X = \$ 63.487,71$
Criterio de Tasa equivalente:	
<i>Tasa nominal j = 8%</i> <i>Frecuencia de capitalización m = 2</i> <i>Frecuencia equivalente m' = 4</i> $tasa periódica i = \frac{j}{m} = \frac{8}{200}$	Tasa equivalente: $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{\frac{2}{4}} - 1 \right] \times 100 = 1,98\%$
$X = 50000 + VA_1$ $X = 50000 + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$	$X = 50000 + 1500 \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{1.98}{100}\right)^{-10}\right]}{\frac{1.98}{100}}$ $X = 50000 + 13487.71$ $X = \$ 63.487,71$

7. Hallar el Monto o Valor Futuro y el Valor Actual de una serie de depósitos trimestrales por anticipado de \$ 1500 durante 5 años en una cuenta que reconoce el 12 % anual capitalizable mensualmente.

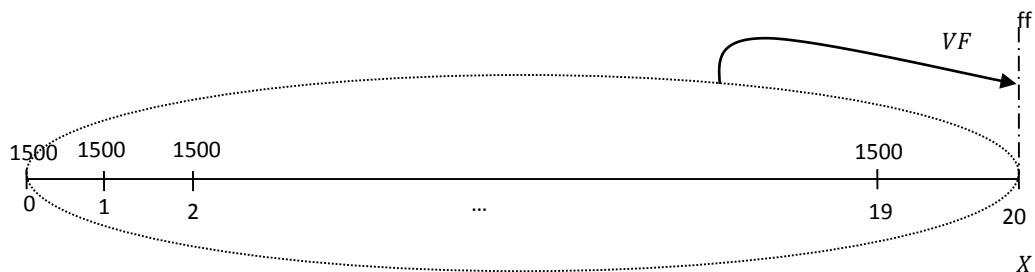
Tasa nominal $j = 12\%$
 Frecuencia de capitalización $m = 12$
 Frecuencia equivalente $m' = 4$

$$\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{12}{1200}$$

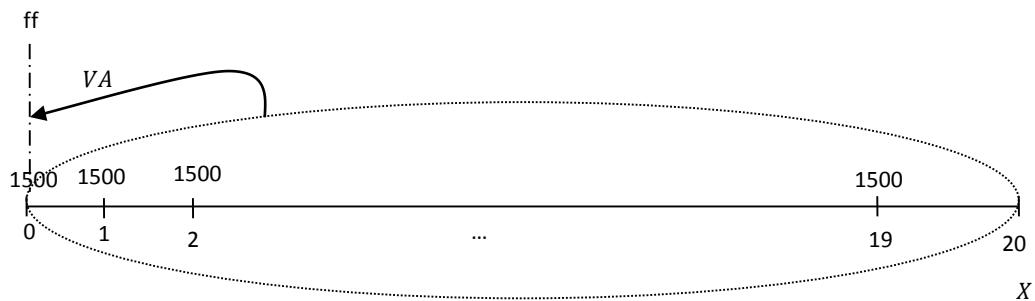
Tasa equivalente:

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{12/4} - 1 \right] \times 100 = 3,03\%$$

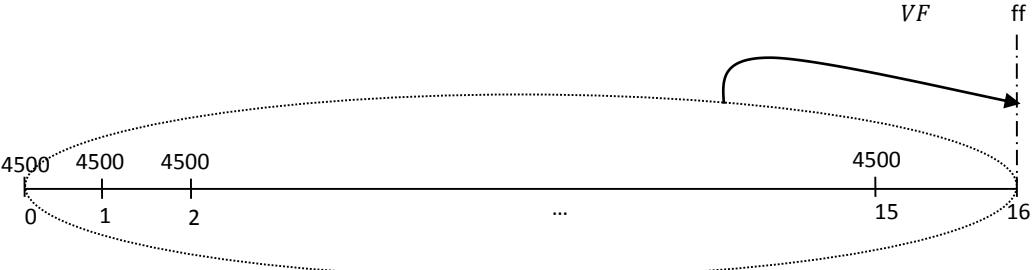
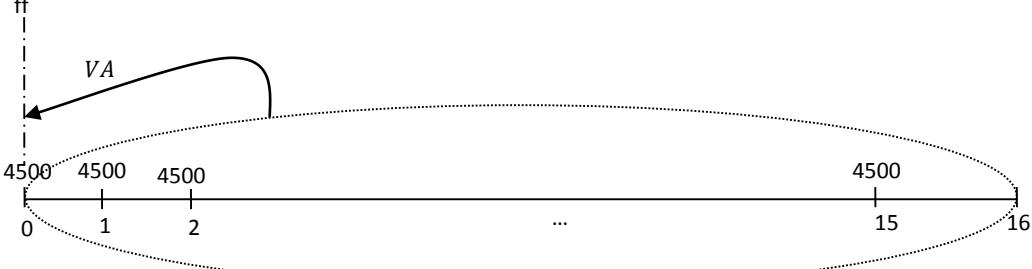


$$VF = R \left[\frac{(1 + i')^{(n+1)} - 1}{i'} - 1 \right] = 1500 \left[\frac{\left(1 + \frac{3.03}{100} \right)^{(20+1)} - 1}{\frac{3.03}{100}} - 1 \right] = \$ 41.654,24$$



$$VA = R \left[\frac{1 - (1 + i')^{-(n-1)}}{i'} + 1 \right] = 1500 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{3.03}{100} \right)^{-(20-1)}}{\frac{3.03}{100}} + 1 \right] = \$ 22.928,56$$

8. Hallar el Monto o valor Futuro y el Valor Actual de una serie de depósitos semestrales por anticipado de \$ 4500 durante 8 años en una cuenta que reconoce el 4 %.

<p>Tasa nominal $j = 4\%$ Frecuencia de capitalización $m = 1$ Frecuencia equivalente $m' = 2$</p> $\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{4}{100}$	<p>Tasa equivalente:</p> $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{4}{100} \right)^{1/2} - 1 \right] \times 100 = 1,98\%$
 $VF = R \left[\frac{(1 + i')^{(n+1)} - 1}{i'} - 1 \right] = 4500 \left[\frac{\left(1 + \frac{1.98}{100} \right)^{(16+1)} - 1}{\frac{1.98}{100}} - 1 \right] = \$ 85.407,75$	 $VA = R \left[\frac{1 - (1 + i')^{-(n-1)}}{i'} + 1 \right] = 4500 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{1.98}{100} \right)^{-(16-1)}}{\frac{1.98}{100}} + 1 \right] = \$ 62.406,60$

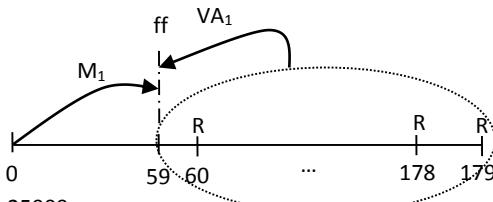
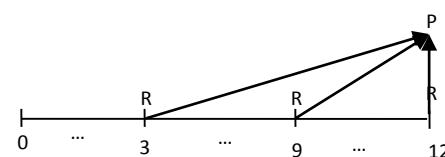
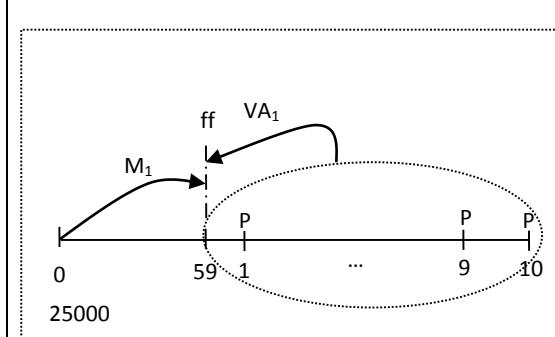
9. Qué depósito semestral deberá realizarse durante 8 años en una cuenta que paga el 12% para luego de ese tiempo disponer de \$ 5000?

<p>Criterio del Pago Equivalente:</p>	<p>Grupo A: Factor de agrupación</p> $P = R \left[\frac{\frac{12}{100}}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right]$
	$VF = \frac{P[(1+i)^n - 1]}{i}$ $5000 = R \left[\frac{\frac{12}{100}}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right] \left[\frac{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^8 - 1}{\frac{12}{100}} \right]$ $R = 5000 \left[\frac{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^8 - 1} \right] = \$ 197,50$
<p>Criterio de la Tasa Equivalente:</p> <p>Tasa nominal $j = 12\%$ Frecuencia de capitalización $m = 1$ Frecuencia equivalente $m' = 2$</p> $\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{12}{100}$	<p>Tasa equivalente:</p> $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{12}{100}\right)^{1/2} - 1 \right] \times 100 = 5,83\%$
	$VF = \frac{R[(1+i')^n - 1]}{i'}$ $5000 = \frac{R \left[\left(1 + \frac{5.83}{100}\right)^{16} - 1 \right]}{\frac{5.83}{100}}$ $R = \frac{5000 \times \frac{5.83}{100}}{\left[\left(1 + \frac{5.83}{100}\right)^{16} - 1 \right]} = \$ 197,50$

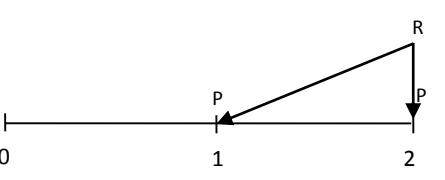
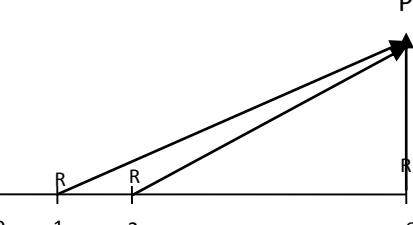
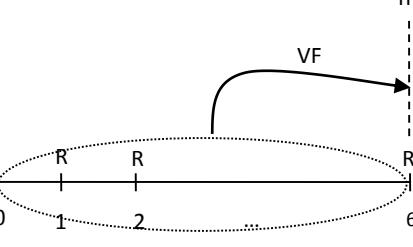
10. El día de hoy se invierten \$ 15000 en una cuenta que reconoce el 8% capitalizable semestralmente, cuál será el valor del retiro anual que se podrá realizar luego de 1 año, durante 5 años?

Criterio del Pago Equivalente:	
 $P = R \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right]$	Grupo A: Factor de distribución
 $V_A = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$ $15000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$	$\frac{15000 \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]} = R$ $\frac{15000 \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]} = \frac{P[(1+i)^k - 1]}{i}$ $P = 15000 \left[\frac{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 - 1}{1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-10}} \right]$ $P = \$ 3.772,70$
Criterio de la Tasa Equivalente:	
$Tasa\ nominal\ j = 8\%$ $Frecuencia\ de\ capitalización\ m = 2$ $Frecuencia\ equivalente\ m' = 1$ $tasa\ periódica\ i = \frac{j}{m} = \frac{8}{200}$	Tasa equivalente: $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{2/1} - 1 \right] \times 100 = 8,16\%$
	$V_A = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$ $15000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8.16}{100}\right)^{-5} \right]}{\frac{8.16}{100}}$ $R = \frac{15000 \times \frac{8.16}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{8.16}{100}\right)^{-5} \right]} = \$ 3.772,70$

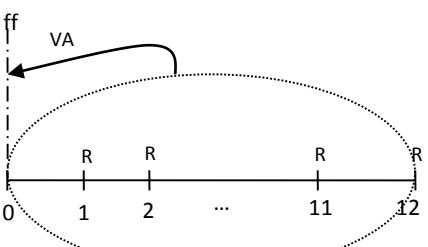
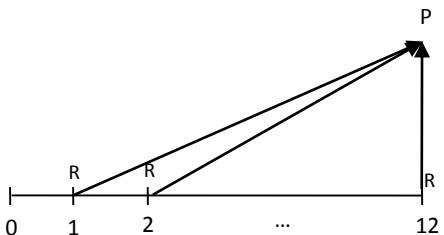
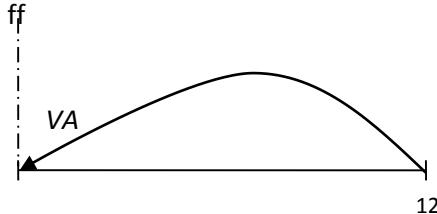
11. El día de hoy se invierte \$ 25000 al 8% efectivo anual para proporcionar a Pedro una renta mensual durante 10 años, recibiendo el primer pago dentro de 5 años; hallar el valor del pago mensual.

Criterio de la Tasa Equivalente	
<p>Tasa nominal $j = 8\%$ Frecuencia de capitalización $m = 1$ Frecuencia equivalente $m' = 12$</p> <p>tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{8}{100}$</p>	<p>Tasa equivalente:</p> $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{8}{100} \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] \times 100 = 0,64\%$
	$M_1 = VA_1$ $C(1+i)^n(1+rt) = \frac{R[1-(1+i')^{-n}]}{i'}$ $R = \frac{C(1+i)^n(1+rt)i'}{[1-(1+i')^{-n}]}$ $R = \frac{25000 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^4 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{11}{12}\right) \times \frac{0.64}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{0.64}{100}\right)^{-120}\right]}$ $R = \$ 437,56$
Criterio del pago Equivalente	
	<p>Grupo A: Factor de agrupación</p> $P = R \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right]$
	$M_1 = VA_1$ $C(1+i)^n(1+rt) = R \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right] \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]$ $C(1+i)^n(1+rt) = R \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^k - 1} \right]$ $R = \frac{C(1+i)^n(1+rt) \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right]}{[1 - (1+i)^{-n}]}$ $R = \frac{25000 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^4 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{11}{12}\right) \times \left[\left(1 + \frac{8}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1\right]}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{-10}\right]}$ $R = \$ 437,56$

12. Con intereses al 6% convertible semestralmente, sustituir pagos de \$ 8000 al final de cada año por pagos equivalentes al final de cada mes.

Pago equivalente: Anual - semestral 	Grupo B: Factor de distribución $P = 8000 \left[\frac{\frac{6}{200}}{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^2 - 1} \right] = \$ 3.940,89$
Pago equivalente: Semestral – mensual, con capitalización semestral. 	Grupo B: Factor de agrupación $P = R \left[\frac{i}{\left(1 + i\right)^k - 1} \right]$ $8000 \left[\frac{\frac{6}{200}}{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^2 - 1} \right] = R \left[\frac{\frac{6}{200}}{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^6 - 1} \right]$ $R = 8000 \frac{\left[\left(1 + \frac{6}{200}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 \right]}{\left[\left(1 + \frac{6}{200}\right)^2 - 1 \right]} = \$ 648,75$
Tasa equivalente: semestral - mensual  $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{6}{200}\right)^{\frac{2}{12}} - 1 \right] \times 100 \approx 0,49\%$	$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'}$ $3940,89 = \frac{R \left[\left(1 + \frac{0,49}{100}\right)^6 - 1 \right]}{\frac{0,49}{100}}$ $R = \frac{3940,89 \times \frac{0,49}{100}}{\left[\left(1 + \frac{0,49}{100}\right)^6 - 1 \right]} = \$ 648,75$

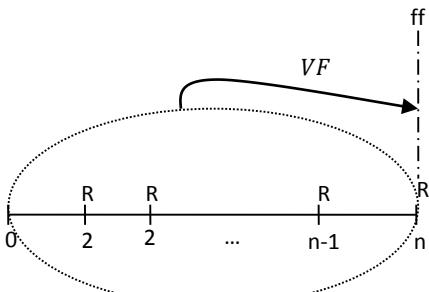
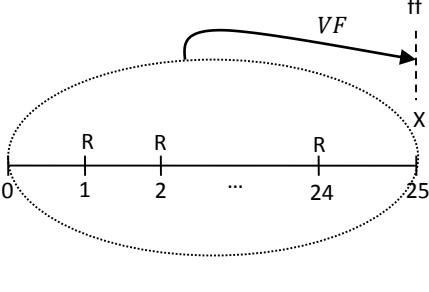
13. Una deuda de \$ 20000 debe amortizarse con 12 pagos mensuales vencidos. Aplicando el criterio de la tasa equivalente hallar el valor de estos pagos a la tasa efectiva del 8%.

Criterio de la tasa equivalente:	
<p>Tasa nominal $j = 8\%$ Frecuencia de capitalización $m = 1$ Frecuencia equivalente $m' = 12$ tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{8}{100}$</p>	$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{8}{100} \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] \times 100 = 0,64\%$
	$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$ $20000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{0,64}{100} \right)^{-12} \right]}{\frac{0,64}{100}}$ $R = \frac{20000 \times \frac{0,64}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{0,64}{100} \right)^{-12} \right]} = \$ 1.737,19$
Criterio del pago equivalente:	
	<p>Factor de agrupación</p> $P = R \left[\frac{i}{(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1} \right]$
 <p>$VA = 20000$ $P(1 + i)^{-1} = 20000$ $P = 20000(1 + i)^1$</p>	$R \left[\frac{i}{(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1} \right] = 20000(1 + i)^1$ $R = \frac{20000(1 + i)^1}{i} \left[(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right]$ $R = \frac{20000 \left(1 + \frac{8}{100} \right)^1 \left[\left(1 + \frac{8}{100} \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right]}{\frac{8}{100}}$ $R = \$ 1.737,19$

14. Con intereses al 8% capitalizable trimestralmente, qué pagos iguales, hechos al final de cada semestre, por 10 años amortizarán una deuda de \$ 15000; aplique el criterio del pago equivalente y compruebe el resultado mediante el criterio de la tasa equivalente.

	Grupo B: Factor de Distribución $P = R \left[\frac{\frac{8}{400}}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^2 - 1} \right]$
	$VA = \frac{P[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$ $15000 = R \left[\frac{\frac{8}{400}}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^2 - 1} \right] \frac{1 - \left(1 + \frac{8}{400}\right)^{-40}}{\frac{8}{400}}$ $R = \frac{15000 \left[\left(1 + \frac{8}{400}\right)^2 - 1 \right]}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{400}\right)^{-40} \right]} = \$ 1.107,64$
<i>Tasa nominal $j = 8\%$ Frecuencia de capitalización $m = 4$ Frecuencia equivalente $m' = 2$</i> $tasa periódica i = \frac{j}{m} = \frac{8}{400}$	<i>Tasa equivalente:</i> $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{8}{400}\right)^2 - 1 \right] \times 100 = 4,04\%$
	$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$ $15000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{4.04}{100}\right)^{-20} \right]}{\frac{4.04}{100}}$ $R = \frac{15000 \times \frac{4.04}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{4.04}{100}\right)^{-20} \right]} = \$ 1.107,64$

15. Una persona puede ahorrar \$ 500 trimestrales e invertirlos al 5% semestralmente, aplicando el criterio de la tasa equivalente hallar el número de depósitos completos y el pago final junto con el último pago con el objeto de tener \$ 15000 en el fondo.

<p>Tasa nominal $j = 5\%$ <i>Frecuencia de capitalización</i> $m = 2$ <i>Frecuencia equivalente</i> $m' = 4$</p> $\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{5}{200}$	<p>Tasa equivalente:</p> $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{5}{200} \right)^{\frac{2}{4}} - 1 \right] \times 100 = 1,24\%$
	$n = \frac{\log \left[\frac{Vf \times i}{R} + 1 \right]}{\log(1 + i)}$ $n = \frac{\log \left[\frac{15000 \times \frac{1.24}{100}}{500} + 1 \right]}{\log \left(1 + \frac{1.24}{100} \right)} = 25,66 \text{ pagos}$
	$Vf + x = 15000$ $\frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'} + x = 15000$ $\frac{500 \left[\left(1 + \frac{1.24}{100} \right)^{25} - 1 \right]}{\frac{1.24}{100}} + x = 15000$ $14553,69 + x = 15000$ $x = \$ 446,31$

10.12. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Comprobar el valor del pago equivalente y la tasa equivalente de cada una de las siguientes anualidades generales:

Caso	Pago	Intervalo de pago	Tasa de interés	Pago equivalente	Tasa equivalente
a	\$ 500	6 meses	5% convertible trimestral	\$ 248,45	2,52%
b	\$1000	1 año	3% convertible mensual	\$ 82,19	3,04%
c	\$ 250	1 mes	5% convertible semestral	\$ 1.515,55	0,41%
d	\$800	3 meses	6% efectivo anual	\$ 3.271,13	1,47%

2. Encontrar el monto y el valor actual de 10 pagos trimestrales de \$1500, si la tasa de interés es del 25% capitalizable cada mes.

R: \$ 20.128,65; \$ 10.843,49

3. Una compañía deposita \$ 1000 al final de cada mes en un fondo de depreciación que gana un interés del 8% capitalizable cada semestre. ¿Cuánto habrá en el fondo al término de 2 años?

R: \$ 25.900,19

4. Halar el valor de contado de un equipo industrial que se lo ha pagado mediante 12 cuotas trimestrales de \$ 450 con una tasa de interés del 5.2% capitalizable mensualmente.

R: \$ 4.968,33

5. El Banco Nacional de Crédito Rural otorga un préstamo a un grupo de campesinos bajo la siguiente forma de pago: \$ 4500 trimestral durante 5 años, debiéndose dar el primer pago dentro de 2 años. Aplicando el criterio de la tasa equivalente encuentre el valor del préstamo, si la tasa de interés es del 12% con capitalización mensual.

R: \$ 54.173,27

6. Un automóvil cuyo precio de contado es de \$ 63000 es vendido con \$ 6300 de enganche y el saldo insoluto a pagar en 24 mensualidades, con una tasa de interés del 30% anual capitalizable cada semestre. Encuentre el valor de los pagos mensuales.

R: \$ 3.120,29

7. Martín compra una casa en \$ 234000 a 20 años de plazo, dando un enganche del 5% del precio de contado y el saldo en pagos mensuales con el 14% de interés capitalizable cada año. Hallar el valor del pago mensual.

R: \$ 2.632,12

8. Sofía compra un automóvil usado valuado en 13,400 dólares. Paga 3400 dólares de cuota inicial y acuerda pagar 1000 dólares al final de cada mes; aplicando el criterio del pago equivalente hallar el número de pagos completos y el pago final, un mes después del último pago, si la tasa de interés es del 14% capitalizable cada trimestralmente.

R: 10 pagos completos, pago adicional de \$ 687, 61 (un mes más tarde).

9. Suponiendo una tasa de interés del 9% convertible cada trimestre, ¿qué depósitos iguales hechos al final de cada semestre, durante 4 años y 6 meses, acumularán \$ 50000?

R: \$ 4.619,11

10. Una secretaria deposita cada mes \$ 180 de su sueldo en una cuenta de ahorros que paga el 12% capitalizable trimestralmente. Cuántos depósitos y cuál es el valor del depósito adicional, realizado junto con el último depósito, debe hacer para reunir \$ 2800?

R: n = 14; \$ 111,21

11. Un vehículo cuyo valor de contado es de \$ 25000 se vende con un pago inicial de \$ 10000 y el saldo en pagos mensuales de \$ 1800. Si la tasa de interés cargada es del 8% capitalizable cada semestre, encuentre el número de pagos completos necesarios, y el pago adicional junto con el último pago para saldar la deuda.

R: n = 8; 1.070,38

12. Se conviene en pagar una deuda con abonos de \$ 1700, a comienzos de cada trimestre, durante 4 años. Hallar el valor de la deuda con la tasa del 30% capitalizable cada mes.

R: \$ 16.531,50

13. La compañía Pichincha desea acumular \$ 100000 en un Fondo de Acumulación, al término de 7 años. ¿Qué depósito hecho al inicio de cada semestre es necesario, si el fondo paga el 5% capitalizable cada año?

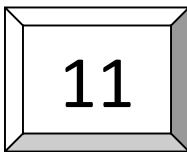
R: \$ 5.919,90

14. Se puede comprar un computador que cuesta \$ 1070 mediante 18 pagos mensuales comenzando con el primer pago al momento de la compra; determine el valor del pago si se aplica una tasa de interés del 8% capitalizable trimestralmente.

R: \$ 62,84

15. Cuántos depósitos semestrales de \$ 15000, realizados al principio de cada semestre y con que pago adicional junto con el último depósito, serán necesarios para obtener un monto de \$ 200000 si el dinero se deposita en una cuenta que paga el 12% capitalizable cada mes?

R: n = 10; \$ 870,93



AMORTIZACIÓN

11.1. INTRODUCCIÓN

Un compromiso financiero, adquirido el día de hoy, va a ser cubierto por una serie de pagos periódicos que se desglosan en dos partes:

- ❖ Una parte cubre el interés vencido de la deuda en ese período.
- ❖ La parte restante se convierte en abono al capital.

Es decir: la deuda contraída se extingue mediante una serie definida de pagos periódicos iguales; en cada uno de estos pagos, se descuenta el valor del interés periódico vencido y la parte sobrante se abona el capital (CISSELL, CISSELL, & FLASPOHLER, 1996); este proceso se denomina **Amortización**.

11.2. VALOR DEL PAGO PERIÓDICO

Por tratarse de una anualidad del tipo ordinaria y vencida, el valor del pago periódico se lo determina como:

$$R = \frac{VA \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

Donde:

R: Pago periódico,

VA: Valor actual de la anualidad (Valor de la deuda el día de hoy),

i: Tasa periódica, (tasa nominal anual ÷ frecuencia de capitalización),

n: Número de pagos.

Si el sistema de amortización está diseñado con pagos anticipados o diferidos, el valor del pago periódico se determinará con las expresiones de cálculo de la Renta para este tipo de anualidades (PORTUS Govinden, 1985), entonces:

Para anualidades Anticipadas:

$$R = \frac{VA}{\left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]}$$

Para anualidades Diferidas:

$$R = \frac{VA \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

Donde *k* es el período de gracia.

11.3. DERECHOS DEL ACREDITADOR Y DEL DEUDOR

Los derechos que el acreedor, o el saldo insoluto que tiene sobre la deuda, luego de haber realizado, un número determinado de pagos (*k*); es el Valor actual de la deuda tomando en cuenta los pagos que faltan por hacer, entonces este valor, para el caso de las anualidades vencidas será:

$$VA_k = \frac{R[1 - (1 + i)^{-(n-k)}]}{i}$$

11.4. TABLA DE AMORTIZACIÓN

La tabla de amortización, es un registro numérico de la historia del préstamo; en esta tabla se indica, período a período, los pagos realizados, el desglose para el cubrimiento de los intereses, el abono al capital y el saldo insoluto; es decir, el valor de la deuda luego de haber realizado el pago (MORA Zambrano, 2010).

La tabla de amortización, tiene tantos períodos como pagos se deben realizar, dispone de la siguiente estructura:

Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés Periódico Vencido	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago

11.5. CONSIDERACIONES PARA LA ELABORACIÓN DE LA TABLA DE AMORTIZACIÓN

- ✓ El Saldo Insoluto Antes del Pago (*SIAP*) para el primer pago, es el valor de la deuda al inicio de la transacción.
- ✓ El interés periódico vencido (*IPV*), se determina multiplicando el saldo insoluto antes del pago, por la tasa periódica de interés, es decir:

$$IPV = SIAP \times i$$

- ✓ El pago periódico es el valor *R*, es un valor constante, para todo el proceso de amortización.
- ✓ El abono al capital (*AC*) es la diferencia entre el pago periódico y el interés vencido, es decir:

$$AC = R - IPV$$

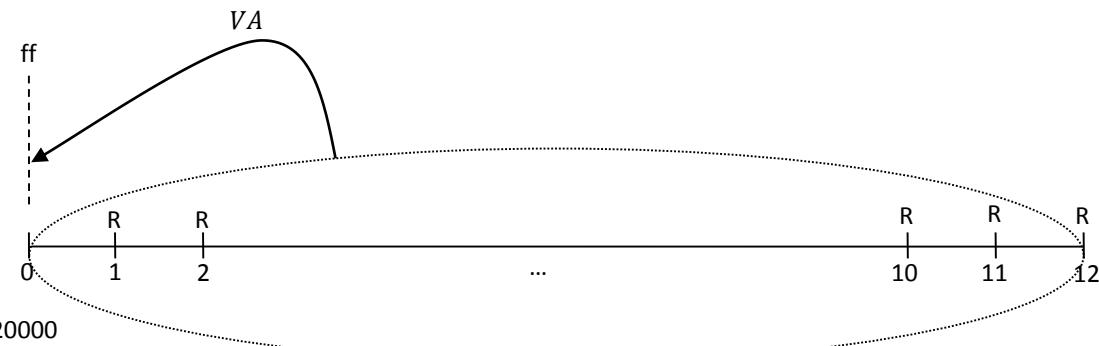
- ✓ El Saldo Insoluto Despues del Pago (*SIDP*), es la diferencia entre el saldo insoluto antes del pago y el Abono al capital, es decir:

$$SIDP = SIAP - AC$$

- ✓ El saldo insoluto antes de un pago, es igual al saldo insoluto de la deuda una vez realizado el pago anterior (efecto zeta).
- ✓ El saldo insoluto después del último pago, es igual a cero; con lo cual se habrá extinguido la deuda.

11.6. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una deuda de \$ 20000 debe amortizarse con 12 pagos mensuales vencidos. Hallar el valor de éstos, a la tasa efectiva del 8% capitalizable mensualmente y elaborar un cuadro de amortización correspondiente.



Ecuación de Valor:

$$20000 = VA$$

$$20000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

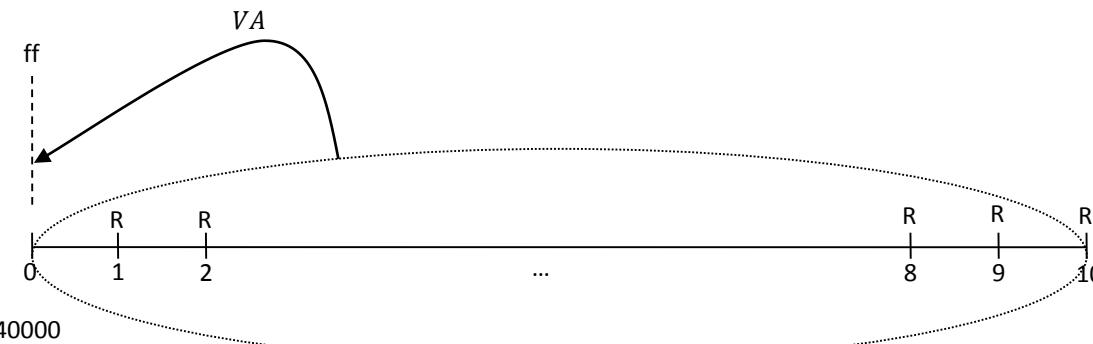
$$R = \frac{20000 \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{20000 \times \frac{8}{1200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{-12}\right]}$$

$$R = \$ 1.739,77$$

Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago
1	20 000,00	133,33	1 739,77	1 606,44	18 393,56
2	18 393,56	122,62	1 739,77	1 617,14	16 776,42
3	16 776,42	111,84	1 739,77	1 627,93	15 148,49
4	15 148,49	100,99	1 739,77	1 638,78	13 509,72
5	13 509,72	90,06	1 739,77	1 649,70	11 860,01
6	11 860,01	79,07	1 739,77	1 660,70	10 199,31
7	10 199,31	68,00	1 739,77	1 671,77	8 527,54
8	8 527,54	56,85	1 739,77	1 682,92	6 844,62
9	6 844,62	45,63	1 739,77	1 694,14	5 150,48
10	5 150,48	34,34	1 739,77	1 705,43	3 445,05
11	3 445,05	22,97	1 739,77	1 716,80	1 728,25
12	1 728,25	11,52	1 739,77	1 728,25	(0,00)

2. Una empresa consignó un préstamo de \$ 40000, amortizable en pagos semestrales iguales en cinco años, con una tasa de interés de 10% anual capitalizable semestralmente. Calcular la cuota semestral y elaborar la tabla de amortización correspondiente.



Ecuación de Valor:

$$40000 = VA$$

$$40000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

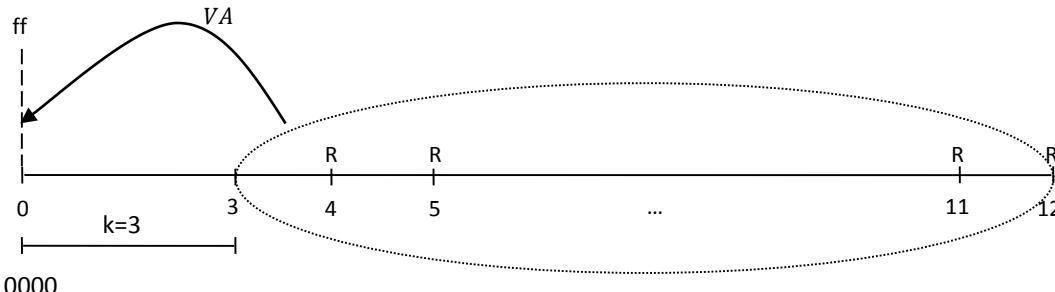
$$R = \frac{40000 \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{40000 \times \frac{10}{200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{10}{200}\right)^{-10}\right]}$$

$$R = \$ 5.180,18$$

Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago
1	40 000,00	2 000,00	5 180,18	3 180,18	36 819,82
2	36 819,82	1 840,99	5 180,18	3 339,19	33 480,62
3	33 480,62	1 674,03	5 180,18	3 506,15	29 974,47
4	29 974,47	1 498,72	5 180,18	3 681,46	26 293,01
5	26 293,01	1 314,65	5 180,18	3 865,53	22 427,48
6	22 427,48	1 121,37	5 180,18	4 058,81	18 368,67
7	18 368,67	918,43	5 180,18	4 261,75	14 106,92
8	14 106,92	705,35	5 180,18	4 474,84	9 632,09
9	9 632,09	481,60	5 180,18	4 698,58	4 933,51
10	4 933,51	246,68	5 180,18	4 933,51	0,00

3. Se adquiere un préstamo por la suma de \$ 10000, pagadero en 3 años mediante cuotas trimestrales al 6% capitalizable trimestralmente. Elaborar la tabla de amortización tomando en cuenta que la primera cuota se paga en el inicio del cuarto trimestre.



Ecuación de Valor:

$$VA = 10000$$

$$\frac{R \times [1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} = 10000$$

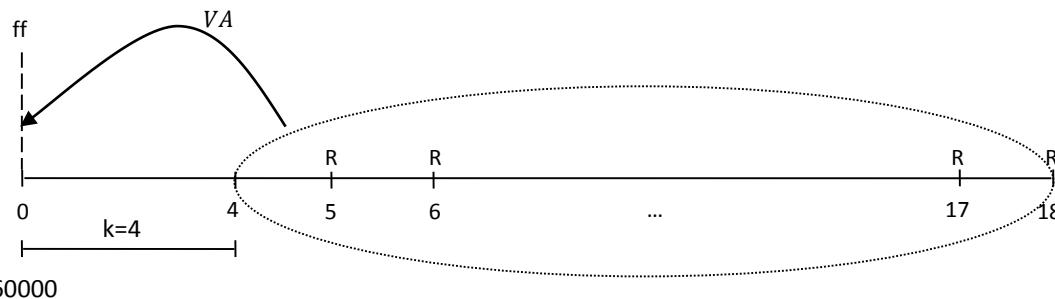
$$R = \frac{10000 \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{10000 \times \frac{6}{400} \times \left(1 + \frac{6}{400}\right)^3}{\left[1 - \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{-9}\right]}$$

$$R = \$ 1.250,73$$

Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago
1	10 000,00	150,00	-	(150,00)	10 150,00
2	10 150,00	152,25	-	(152,25)	10 302,25
3	10 302,25	154,53	-	(154,53)	10 456,78
4	10 456,78	156,85	1 250,73	1 093,88	9 362,90
5	9 362,90	140,44	1 250,73	1 110,29	8 252,61
6	8 252,61	123,79	1 250,73	1 126,94	7 125,67
7	7 125,67	106,88	1 250,73	1 143,85	5 981,82
8	5 981,82	89,73	1 250,73	1 161,01	4 820,81
9	4 820,81	72,31	1 250,73	1 178,42	3 642,39
10	3 642,39	54,64	1 250,73	1 196,10	2 446,29
11	2 446,29	36,69	1 250,73	1 214,04	1 232,25
12	1 232,25	18,48	1 250,73	1 232,25	-

4. Se debe pagar una deuda de \$ 60000 en 18 meses, con el siguiente plan de pagos: cuotas mensuales iguales con una tasa de interés del 15%, capitalizable mensualmente pagaderas a partir del quinto mes. Determine el valor del pago periódico y construya la tabla de amortización hasta cancelar la deuda.



Ecuación de Valor:

$$VA = 60000$$

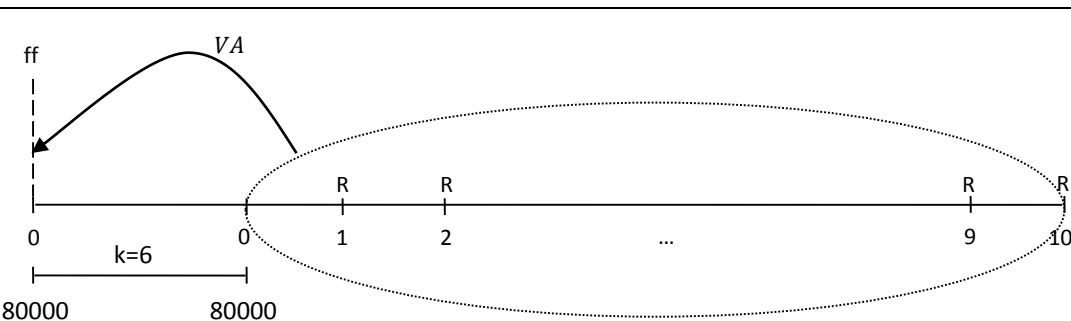
$$\frac{R \times [1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} = 60000$$

$$R = \frac{60000 \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]} = \frac{60000 \times \frac{15}{1200} \times \left(1 + \frac{15}{1200}\right)^4}{\left[1 - \left(1 + \frac{15}{1200}\right)^{-14}\right]}$$

$$R = \$ 4.937,67$$

Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago
1	60 000,00	750,00	-	(750,00)	60 750,00
2	60 750,00	759,38	-	(759,38)	61 509,38
3	61 509,38	768,87	-	(768,87)	62 278,24
4	62 278,24	778,48	-	(778,48)	63 056,72
5	63 056,72	788,21	4 937,67	4 149,46	58 907,26
6	58 907,26	736,34	4 937,67	4 201,32	54 705,94
7	54 705,94	683,82	4 937,67	4 253,84	50 452,10
8	50 452,10	630,65	4 937,67	4 307,01	46 145,08
9	46 145,08	576,81	4 937,67	4 360,85	41 784,23
10	41 784,23	522,30	4 937,67	4 415,36	37 368,87
11	37 368,87	467,11	4 937,67	4 470,55	32 898,31
12	32 898,31	411,23	4 937,67	4 526,44	28 371,88
13	28 371,88	354,65	4 937,67	4 583,02	23 788,86
14	23 788,86	297,36	4 937,67	4 640,30	19 148,55
15	19 148,55	239,36	4 937,67	4 698,31	14 450,25
16	14 450,25	180,63	4 937,67	4 757,04	9 693,21
17	9 693,21	121,17	4 937,67	4 816,50	4 876,71
18	4 876,71	60,96	4 937,67	4 876,71	-

5. Un banco concede un préstamo de \$ 80000, a un plazo de 8 años, en los cuales 3 son de gracia, donde se pagan solo intereses, en los 5 años restantes se hacen abonos constante a capital, si la tasa de interés es del 10%, capitalizable semestralmente; encontrar el valor de la cuota trimestral y construir la tabla de amortización.



Ecuación de Valor:

$$VA = 80000$$

$$\frac{R \times [1 - (1 + i)^{-n}]}{i} = 80000$$

$$R = \frac{80000 \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

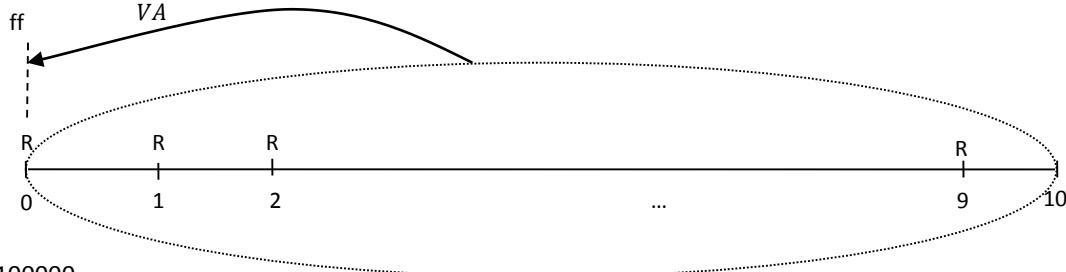
$$R = \frac{80000 \times \frac{10}{200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{10}{200}\right)^{-10}\right]}$$

$$R = \$ 10.360,37$$

Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago
1	80 000,00	4 000,00	4 000,00	-	80 000,00
2	80 000,00	4 000,00	4 000,00	-	80 000,00
3	80 000,00	4 000,00	4 000,00	-	80 000,00
4	80 000,00	4 000,00	4 000,00	-	80 000,00
5	80 000,00	4 000,00	4 000,00	-	80 000,00
6	80 000,00	4 000,00	4 000,00	-	80 000,00
7	80 000,00	4 000,00	10 360,37	6 360,37	73 639,63
8	73 639,63	3 681,98	10 360,37	6 678,38	66 961,25
9	66 961,25	3 348,06	10 360,37	7 012,30	59 948,95
10	59 948,95	2 997,45	10 360,37	7 362,92	52 586,03
11	52 586,03	2 629,30	10 360,37	7 731,06	44 854,96
12	44 854,96	2 242,75	10 360,37	8 117,62	36 737,35
13	36 737,35	1 836,87	10 360,37	8 523,50	28 213,85
14	28 213,85	1 410,69	10 360,37	8 949,67	19 264,17
15	19 264,17	963,21	10 360,37	9 397,16	9 867,02
16	9 867,02	493,35	10 360,37	9 867,02	0,00

Nota.- Si en los primeros seis períodos se cancela los intereses vencidos, entonces, al inicio de los pagos el valor de la deuda será igual al capital inicial.

6. Un banco concede un préstamo de \$ 100000, a un plazo de 5 años, con pagos semestrales anticipados, e iguales con un interés del 8% capitalizable semestralmente; encontrar el valor de la cuota semestral y construir la tabla de amortización.



Ecuación de Valor:

$$VA = 100000$$

$$R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] = 100000$$

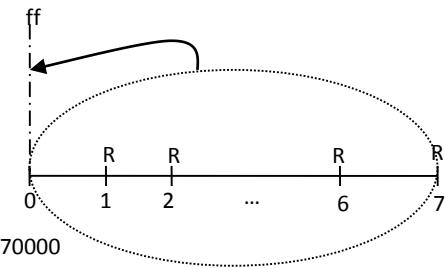
$$R = \frac{100000}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]}$$

$$R = \frac{100000}{\left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-(10-1)}}{\frac{8}{200}} + 1 \right]}$$

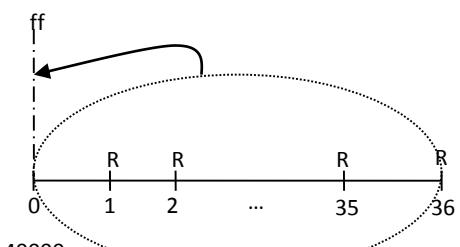
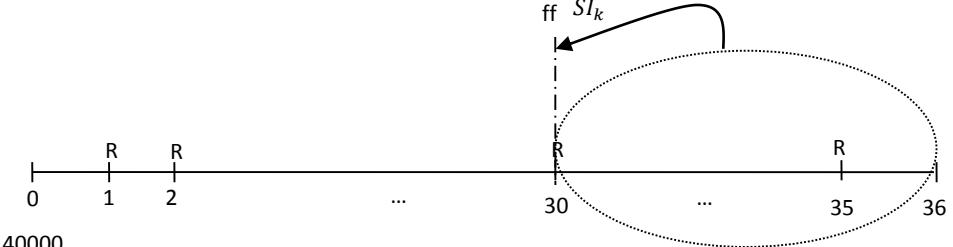
$$R = \$ 11.854,90$$

Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago
1	100 000,00		11 854,90	11 854,90	88 145,10
2	88 145,10	3 525,80	11 854,90	8 329,09	79 816,01
3	79 816,01	3 192,64	11 854,90	8 662,26	71 153,75
4	71 153,75	2 846,15	11 854,90	9 008,75	62 145,00
5	62 145,00	2 485,80	11 854,90	9 369,10	52 775,90
6	52 775,90	2 111,04	11 854,90	9 743,86	43 032,04
7	43 032,04	1 721,28	11 854,90	10 133,62	32 898,42
8	32 898,42	1 315,94	11 854,90	10 538,96	22 359,46
9	22 359,46	894,38	11 854,90	10 960,52	11 398,94
10	11 398,94	455,96	11 854,90	11 398,94	0,00

7. Un banco concede un préstamo de \$ 70000, a un plazo de 7 años para cancelar con pagos anuales iguales; si la tasa de interés es del 10% capitalizable semestralmente, determine el valor del pago anual y elabore la tabla de amortización.

<p><i>Tasa nominal $j = 10\%$</i> <i>Frecuencia de capitalización $m = 2$</i> <i>Frecuencia equivalente $m' = 1$</i></p> $\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{10}{200}$	<p>Tasa equivalente:</p> $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{10}{200} \right)^{2/1} - 1 \right] \times 100 = 10.25\%$																																															
	$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$ $70000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{10.25}{100} \right)^{-7} \right]}{\frac{10.25}{100}}$ $R = \frac{70000 \times \frac{10.25}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{10.25}{100} \right)^{-7} \right]}$ $R = \$ 14.496,94$																																															
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr style="background-color: #cccccc;"> <th style="text-align: center;">Períodos</th> <th style="text-align: center;">Saldo Insoluto antes del pago</th> <th style="text-align: center;">Interés</th> <th style="text-align: center;">Pago periódico</th> <th style="text-align: center;">Abono al Capital</th> <th style="text-align: center;">Saldo Insoluto después del pago</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">70.000,00</td><td style="text-align: center;">7.175,00</td><td style="text-align: center;">14.496,94</td><td style="text-align: center;">7.321,94</td><td style="text-align: center;">62.678,06</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">62.678,06</td><td style="text-align: center;">6.424,50</td><td style="text-align: center;">14.496,94</td><td style="text-align: center;">8.072,44</td><td style="text-align: center;">54.605,62</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">54.605,62</td><td style="text-align: center;">5.597,08</td><td style="text-align: center;">14.496,94</td><td style="text-align: center;">8.899,86</td><td style="text-align: center;">45.705,76</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">45.705,76</td><td style="text-align: center;">4.684,84</td><td style="text-align: center;">14.496,94</td><td style="text-align: center;">9.812,10</td><td style="text-align: center;">35.893,66</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">35.893,66</td><td style="text-align: center;">3.679,10</td><td style="text-align: center;">14.496,94</td><td style="text-align: center;">10.817,84</td><td style="text-align: center;">25.075,82</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">25.075,82</td><td style="text-align: center;">2.570,27</td><td style="text-align: center;">14.496,94</td><td style="text-align: center;">11.926,67</td><td style="text-align: center;">13.149,15</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">13.149,15</td><td style="text-align: center;">1.347,79</td><td style="text-align: center;">14.496,94</td><td style="text-align: center;">13.149,15</td><td style="text-align: center;">(0,00)</td></tr> </tbody> </table>	Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago	1	70.000,00	7.175,00	14.496,94	7.321,94	62.678,06	2	62.678,06	6.424,50	14.496,94	8.072,44	54.605,62	3	54.605,62	5.597,08	14.496,94	8.899,86	45.705,76	4	45.705,76	4.684,84	14.496,94	9.812,10	35.893,66	5	35.893,66	3.679,10	14.496,94	10.817,84	25.075,82	6	25.075,82	2.570,27	14.496,94	11.926,67	13.149,15	7	13.149,15	1.347,79	14.496,94	13.149,15	(0,00)
Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago																																											
1	70.000,00	7.175,00	14.496,94	7.321,94	62.678,06																																											
2	62.678,06	6.424,50	14.496,94	8.072,44	54.605,62																																											
3	54.605,62	5.597,08	14.496,94	8.899,86	45.705,76																																											
4	45.705,76	4.684,84	14.496,94	9.812,10	35.893,66																																											
5	35.893,66	3.679,10	14.496,94	10.817,84	25.075,82																																											
6	25.075,82	2.570,27	14.496,94	11.926,67	13.149,15																																											
7	13.149,15	1.347,79	14.496,94	13.149,15	(0,00)																																											

8. Martha adquiere una casa en \$ 40000 a pagar en 3 años plazo, mediante cuotas mensuales con una tasa de interés del 8% anual capitalizable trimestralmente; por el método de la tasa equivalente, calcular el valor del pago periódico y elaborar la tabla de amortización para los últimos seis meses.

<p><i>Tasa nominal $j = 8\%$</i> <i>Frecuencia de capitalización $m = 4$</i> <i>Frecuencia equivalente $m' = 12$</i></p> $\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{8}{400}$	<p>Tasa equivalente:</p> $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{8}{400} \right)^{4/12} - 1 \right] \times 100 = 0.66\%$																																																
	$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$ $40000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{0.66}{100} \right)^{-36} \right]}{\frac{0.66}{100}}$ $R = \frac{40000 \times \frac{0.66}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{0.66}{100} \right)^{-36} \right]} = \$1.252,48$																																																
	$SI_k = \frac{R[1 - (1 + i)^{-(n-k)}]}{i} = \frac{1252.48 \left[1 - \left(1 + \frac{0.66}{100} \right)^{-(36-30)} \right]}{\frac{0.66}{100}} = \$ 7.343,73$																																																
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">Período</th> <th style="text-align: center;">Saldo Insoluto antes del pago</th> <th style="text-align: center;">Interés</th> <th style="text-align: center;">Pago periódico</th> <th style="text-align: center;">Abono al Capital</th> <th style="text-align: center;">Saldo Insoluto después del pago</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">30</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">7 343,73</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">31</td> <td style="text-align: center;">7 343,73</td> <td style="text-align: center;">48,64</td> <td style="text-align: center;">1 252,48</td> <td style="text-align: center;">1 203,85</td> <td style="text-align: center;">6 139,88</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">32</td> <td style="text-align: center;">6 139,88</td> <td style="text-align: center;">40,66</td> <td style="text-align: center;">1 252,48</td> <td style="text-align: center;">1 211,82</td> <td style="text-align: center;">4 928,06</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">33</td> <td style="text-align: center;">4 928,06</td> <td style="text-align: center;">32,64</td> <td style="text-align: center;">1 252,48</td> <td style="text-align: center;">1 219,84</td> <td style="text-align: center;">3 708,22</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">34</td> <td style="text-align: center;">3 708,22</td> <td style="text-align: center;">24,56</td> <td style="text-align: center;">1 252,48</td> <td style="text-align: center;">1 227,92</td> <td style="text-align: center;">2 480,30</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">35</td> <td style="text-align: center;">2 480,30</td> <td style="text-align: center;">16,43</td> <td style="text-align: center;">1 252,48</td> <td style="text-align: center;">1 236,06</td> <td style="text-align: center;">1 244,24</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">36</td> <td style="text-align: center;">1 244,24</td> <td style="text-align: center;">8,24</td> <td style="text-align: center;">1 252,48</td> <td style="text-align: center;">1 244,24</td> <td style="text-align: center;">0,00</td> </tr> </tbody> </table>	Período	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago	30					7 343,73	31	7 343,73	48,64	1 252,48	1 203,85	6 139,88	32	6 139,88	40,66	1 252,48	1 211,82	4 928,06	33	4 928,06	32,64	1 252,48	1 219,84	3 708,22	34	3 708,22	24,56	1 252,48	1 227,92	2 480,30	35	2 480,30	16,43	1 252,48	1 236,06	1 244,24	36	1 244,24	8,24	1 252,48	1 244,24	0,00	
Período	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago																																												
30					7 343,73																																												
31	7 343,73	48,64	1 252,48	1 203,85	6 139,88																																												
32	6 139,88	40,66	1 252,48	1 211,82	4 928,06																																												
33	4 928,06	32,64	1 252,48	1 219,84	3 708,22																																												
34	3 708,22	24,56	1 252,48	1 227,92	2 480,30																																												
35	2 480,30	16,43	1 252,48	1 236,06	1 244,24																																												
36	1 244,24	8,24	1 252,48	1 244,24	0,00																																												

9. El día de hoy se adquiere una deuda de \$ 80000, para ser pagada mediante un sistema de amortización de cuotas mensuales iguales, durante 5 años. Si se considera un rendimiento del 10% anual, capitalizable mensualmente:

- Calcular el pago periódico mensual.
- Construir la tabla de amortización para los 3 primeros meses.
- Determinar los derechos del acreedor luego del pago N° 57
- Construir la tabla para los tres últimos pagos.

	$80000 = VA$ $80000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$ $R = \frac{80000 \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$ $R = \frac{80000 \times \frac{10}{1200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{-60}\right]}$ $R = \$ 1.699,76$																																																					
	$SI_k = \frac{R[1 - (1 + i)^{-(n-k)}]}{i}$ $SI_{57} = \frac{1699.76 \left[1 - \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{-(60-57)}\right]}{\frac{10}{1200}}$ $SI_{57} = \$ 5.015,47$																																																					
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr style="background-color: #d9e1f2;"> <th style="text-align: center;">Períodos</th> <th style="text-align: center;">Saldo Insoluto antes del pago</th> <th style="text-align: center;">Interés</th> <th style="text-align: center;">Pago periódico</th> <th style="text-align: center;">Abono al Capital</th> <th style="text-align: center;">Saldo Insoluto después del pago</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">80.000,00</td><td style="text-align: center;">666,67</td><td style="text-align: center;">1.699,76</td><td style="text-align: center;">1.033,10</td><td style="text-align: center;">78.966,90</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">78.966,90</td><td style="text-align: center;">658,06</td><td style="text-align: center;">1.699,76</td><td style="text-align: center;">1.041,71</td><td style="text-align: center;">77.925,20</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">77.925,20</td><td style="text-align: center;">649,38</td><td style="text-align: center;">1.699,76</td><td style="text-align: center;">1.050,39</td><td style="text-align: center;">76.874,81</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">...</td><td style="text-align: center;">....</td><td style="text-align: center;">...</td><td style="text-align: center;">...</td><td style="text-align: center;">...</td><td style="text-align: center;">...</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">57</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: center;">5.015,47</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">58</td><td style="text-align: center;">5.015,47</td><td style="text-align: center;">41,80</td><td style="text-align: center;">1.699,76</td><td style="text-align: center;">1.657,97</td><td style="text-align: center;">3.357,50</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">59</td><td style="text-align: center;">3.357,50</td><td style="text-align: center;">27,98</td><td style="text-align: center;">1.699,76</td><td style="text-align: center;">1.671,78</td><td style="text-align: center;">1.685,72</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">60</td><td style="text-align: center;">1.685,72</td><td style="text-align: center;">14,05</td><td style="text-align: center;">1.699,76</td><td style="text-align: center;">1.685,72</td><td style="text-align: center;">(0,00)</td></tr> </tbody> </table>	Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago	1	80.000,00	666,67	1.699,76	1.033,10	78.966,90	2	78.966,90	658,06	1.699,76	1.041,71	77.925,20	3	77.925,20	649,38	1.699,76	1.050,39	76.874,81	57					5.015,47	58	5.015,47	41,80	1.699,76	1.657,97	3.357,50	59	3.357,50	27,98	1.699,76	1.671,78	1.685,72	60	1.685,72	14,05	1.699,76	1.685,72	(0,00)
Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago																																																	
1	80.000,00	666,67	1.699,76	1.033,10	78.966,90																																																	
2	78.966,90	658,06	1.699,76	1.041,71	77.925,20																																																	
3	77.925,20	649,38	1.699,76	1.050,39	76.874,81																																																	
...																																																	
57					5.015,47																																																	
58	5.015,47	41,80	1.699,76	1.657,97	3.357,50																																																	
59	3.357,50	27,98	1.699,76	1.671,78	1.685,72																																																	
60	1.685,72	14,05	1.699,76	1.685,72	(0,00)																																																	

10. Una deuda de \$ 5000 se va a cancelar mediante el pago de 6 cuotas mensuales de \$ 916,72. ¿Qué tasa efectiva mensual se aplicará en el crédito?. Elaborar la tabla de amortización.

	$VA = 5000$ $n = 6$ $R = 916.72$ $m = 12$														
<p>Argumentos de función</p> <p>TASA</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">Nper</td> <td style="padding: 2px; text-align: right;">5</td> <td style="padding: 2px; text-align: right;">= 6</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Pago</td> <td style="padding: 2px; text-align: right;">-916,72</td> <td style="padding: 2px; text-align: right;">= -916,72</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Va</td> <td style="padding: 2px; text-align: right;">5000</td> <td style="padding: 2px; text-align: right;">= 5000</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Vf</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px; text-align: right;">= número</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">Tipo</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px; text-align: right;">= número</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-top: -10px;">= 0,027948034</p> <p>Devuelve la tasa de interés por período de un préstamo o una inversión. Por ejemplo, use 6%/4 para pagos trimestrales al 6% TPA.</p> <p style="margin-left: 20px;">Nper es el número total de períodos de pago de un préstamo o una inversión.</p> <p style="margin-top: 20px;">Resultado de la fórmula = 2,79%</p> <p style="margin-top: 10px; font-size: small;"> Ayuda sobre esta función Aceptar Cancelar </p>	Nper	5	= 6	Pago	-916,72	= -916,72	Va	5000	= 5000	Vf		= número	Tipo		= número
Nper	5	= 6													
Pago	-916,72	= -916,72													
Va	5000	= 5000													
Vf		= número													
Tipo		= número													

11.7. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Encuentre el valor del pago periódico y elabore la tabla de amortización para un préstamo de \$ 90000 que se cancelará en 4 años con cuotas trimestrales iguales, si la tasa de interés es del 8% capitalizable trimestralmente.

R: cuotas de \$ 6.628,51

2. Una empresa de servicios de informática obtiene un préstamo de \$ 30000 a tres años plazo con una tasa de interés del 17.5 % anual capitalizable trimestralmente, que pagará mediante cuotas trimestrales. Calcular la cuota trimestral y elaborar la tabla de amortización hasta la extinción de la deuda.

R: cuotas de \$ 3.266,50

3. Un préstamo de \$ 38000 y con interés de financiación del 3% mensual se debe cancelar con en un año con cuotas mensuales iguales pagándose la primera 3 meses después de concedido el préstamo. Construir la tabla de amortización.

R: cuotas de \$ 3.871,73

4. Una deuda de \$ 200000 se va a cancelar con 12 cuotas trimestrales iguales y una tasa de interés del 9% capitalizable trimestralmente. Elaborar la tabla de amortización si hay un período de gracia de 9 meses, considerando que los intereses que se causan en el período de gracia se abonan puntualmente en cada trimestre.

R: cuotas de \$ 20.529,10

5. Hallar el valor de la cuota semestral y elaborar una tabla para amortizar la suma de \$ 60000 en pagos semestrales iguales durante 6 años, con un período de gracia de 2 años, en el cual sólo se pagan intereses y una tasa el 12% capitalizable semestralmente.

R: cuotas de \$ 9.662,16

6. La empresa QBI Cía. Ltda. obtiene un préstamo de \$ 100000 a 10 años plazo para amortizarlo mediante pagos semestrales, el primero de los cuales debe hacerlo luego de haber transcurrido 6 meses. Si se considera una tasa del 14% anual capitalizable semestralmente, calcular el saldo insoluto luego de haber pagado la cuota 15 y construya la tabla de amortización para los últimos 5 pagos.

R: a) cuotas de \$ 9.439,29; b) saldo insoluto de \$ 38.702,96

7. Un préstamo de \$ 30000 se debe cancelar en 4 años con cuotas iguales a fin de mes. Si el interés de financiación es del 7% capitalizable mensualmente:

- Calcular el pago periódico mensual.
- Construir la tabla de amortización para los 3 primeros meses.
- Determinar los derechos del acreedor luego del pago N° 45.
- Construir la tabla para los tres últimos pagos.

R: a) cuotas de \$ 718,39; c) \$ 2.130,26

8. Una deuda de \$ 60000 se financia a 18 meses a una tasa de interés del 8% capitalizable mensualmente; luego de 6 meses, la tasa de interés se modifica al 7% capitalizable mensualmente; al cabo de 1 año, la tasa de interés varía al 9% capitalizable mensualmente. Encontrar el valor del pago periódico en cada variación de la tasa y elaborar la tabla de amortización correspondiente.

R: \$ 3.548,42; \$ 3.559,29; \$ 3.549,98

9. Calcular la tasa periódica como también la tasa nominal capitalizable trimestralmente, a la cual se está amortizando una deuda de \$ 30000 mediante cuotas trimestrales de \$ 1850 durante 5 años; construir la tabla de amortización correspondiente.

R: 2,09%; 8,34%

10. Un banco concede un préstamo de \$ 60000 a 4 años; a pagar en cuotas semestrales y con un interés del 12% capitalizable anualmente. Encuentre, por el método de la tasa equivalente, el valor de la cuota y elabore la tabla de amortización.

R: tasa $i' = 5,83\%$; cuota semestral de \$ 9.597,27

12

FONDOS DE ACUMULACIÓN

12.1. INTRODUCCIÓN

Con el fin de disponer de una cantidad de dinero a futuro, para inversiones o renovación de equipos, se crea un Fondo de Acumulación, mediante el ahorro periódico, de una cantidad de dinero, previamente determinada; en una entidad financiera que a su vez, reconoce con la misma frecuencia de los depósitos, el interés que ha ganado el Fondo (PORTUS Govinden, 1985).

Al final, luego de haber realizado el último depósito, junto con los intereses ganados, en el fondo existe la cantidad de dinero previamente establecida.

En otras palabras, la creación de un fondo de acumulación o, es un proceso inverso de la extinción de una deuda mediante pagos periódicos.

12.2. VALOR DEL DEPÓSITO PERIÓDICO

El valor del depósito periódico, que se debe realizar en un fondo de acumulación está dado por:

$$R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$$

Donde:

R: Depósito periódico,

VF: Valor futuro de la anualidad,

i: Tasa periódica,

n: Número de pagos.

12.3. VALOR EN EL FONDO LUEGO DE UN NÚMERO DE DEPÓSITOS REALIZADOS

Luego de haber realizado un número determinado de depósitos (*k*), es conveniente saber, cual es el valor acumulado en el Fondo; este valor, es igual al Valor Futuro de la anualidad, luego de haber realizado dicho número de depósitos, entonces (ALVAREZ Arango, 1995):

$$VF = \frac{R[(1 + i)^k - 1]}{i}$$

12.4. TABLA DEL FONDO DE ACUMULACIÓN

Al igual que el proceso de extinción de una deuda, se crea una tabla de registro del crecimiento del Fondo de Acumulación; en esta tabla, período a período, se van registrando los depósitos realizados, y el interés periódico que el Fondo ha ganado, al final del último período, queda registrado el valor previamente establecido (AYRES Jr, 1998); la estructura de la tabla del Fondo de Acumulación es la siguiente:

Períodos	Valor en el Fondo antes del depósito	Interés en el período	Depósito Periódico	Abono al Fondo en el período	Valor en el fondo después del depósito

El número de filas de la tabla, será igual al número de depósitos periódicos que se deben realizar, hasta la obtención del valor previamente establecido.

12.5. CONSIDERACIONES PARA LA CREACIÓN DE LA TABLA DE ACUMULACIÓN

- ✓ El Valor en el Fondo Antes del Depósito (*VFAD*) para el primero de los depósitos es cero.
- ✓ El interés periódico (*IP*), se determina multiplicando el saldo Antes del Depósito antes del pago, por la tasa periódica de interés, es decir:

$$IP = VFAD \times i$$

- ✓ El depósito periódico es el valor *R*, es un valor constante, para todo el proceso de acumulación.
- ✓ El abono al Fondo en el período (*AFP*) es la suma del depósito periódico con el interés periódico en el Fondo , es decir:

$$AFP = R + IP$$

- ✓ El Valor en el Fondo Después del Pago (*VFDD*), es la suma del Valor en el Fondo antes del Depósito y el Abono al Fondo en el período, es decir:

$$VFDD = VFAD + AFP$$

- ✓ El Valor en el Fondo antes de un depósito, es igual al Valor en el fondo después del depósito anterior (efecto zeta).
- ✓ El Valor en el Fondo después del último depósito, es igual al Valor Futuro con el cual queda creado el fondo.

12.6. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentre el valor del depósito periódico anual y construir una tabla para acumular \$ 6000 al término de los próximos cuatro años, en un Fondo de Acumulación que produce el 2.5 % efectivo.

$R = ?$ $VF = \$ 6000$ $t = 4 \text{ años}$ $j = 2.5\% \text{ anual}$ $m = 1$	$i = \frac{j\%}{m} = \frac{2.5\%}{1} = \frac{2.5}{100}$ $n = t \times m$ $n = 4 \times 1$ $n = 4$	Depósito periódico: $R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$ $R = \frac{6000 \times \frac{2.5}{100}}{\left[\left(1 + \frac{2.5}{100}\right)^4 - 1\right]} = \$1.444,91$																														
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="background-color: #e0e0e0;">Períodos</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Valor en el Fondo Antes del Depósito</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Interés Acreditado en el Período</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Depósito Periódico</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Valor Acumulado en el Período</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Valor en el Fondo Despues del Depósito</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>-</td><td>-</td><td>1 444,91</td><td>1 444,91</td><td>1 444,91</td></tr> <tr> <td>2</td><td>1 444,91</td><td>36,12</td><td>1 444,91</td><td>1 481,03</td><td>2 925,94</td></tr> <tr> <td>3</td><td>2 925,94</td><td>73,15</td><td>1 444,91</td><td>1 518,06</td><td>4 443,99</td></tr> <tr> <td>4</td><td>4 443,99</td><td>111,10</td><td>1 444,91</td><td>1 556,01</td><td>6 000,00</td></tr> </tbody> </table>			Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito	1	-	-	1 444,91	1 444,91	1 444,91	2	1 444,91	36,12	1 444,91	1 481,03	2 925,94	3	2 925,94	73,15	1 444,91	1 518,06	4 443,99	4	4 443,99	111,10	1 444,91	1 556,01	6 000,00
Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito																											
1	-	-	1 444,91	1 444,91	1 444,91																											
2	1 444,91	36,12	1 444,91	1 481,03	2 925,94																											
3	2 925,94	73,15	1 444,91	1 518,06	4 443,99																											
4	4 443,99	111,10	1 444,91	1 556,01	6 000,00																											

2. Calcular el valor del depósito anual necesario para acumular \$ 20000 en cinco años, considerando una tasa de interés de 13% anual; elaborar la tabla del Fondo de Acumulación correspondiente.

$R = ?$ $VF = \$ 20000$ $t = 5 \text{ años}$ $j = 13\% \text{ anual}$ $m = 1$	$i = \frac{j\%}{m} = \frac{13\%}{1} = \frac{13}{100}$ $n = t \times m$ $n = 5 \times 1$ $n = 5$	Depósito periódico: $R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$ $R = \frac{20000 \times \frac{13}{100}}{\left[\left(1 + \frac{13}{100}\right)^5 - 1\right]} = \$3.086,29$																																				
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="background-color: #e0e0e0;">Períodos</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Valor en el Fondo Antes del Depósito</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Interés Acreditado en el Período</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Depósito Periódico</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Valor Acumulado en el Período</th> <th style="background-color: #e0e0e0;">Valor en el Fondo Despues del Depósito</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>-</td><td>-</td><td>3 086,29</td><td>3 086,29</td><td>3 086,29</td></tr> <tr> <td>2</td><td>3 086,29</td><td>401,22</td><td>3 086,29</td><td>3 487,51</td><td>6 573,80</td></tr> <tr> <td>3</td><td>6 573,80</td><td>854,59</td><td>3 086,29</td><td>3 940,88</td><td>10 514,68</td></tr> <tr> <td>4</td><td>10 514,68</td><td>1 366,91</td><td>3 086,29</td><td>4 453,20</td><td>14 967,88</td></tr> <tr> <td>5</td><td>14 967,88</td><td>1 945,82</td><td>3 086,29</td><td>5 032,12</td><td>20 000,00</td></tr> </tbody> </table>			Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito	1	-	-	3 086,29	3 086,29	3 086,29	2	3 086,29	401,22	3 086,29	3 487,51	6 573,80	3	6 573,80	854,59	3 086,29	3 940,88	10 514,68	4	10 514,68	1 366,91	3 086,29	4 453,20	14 967,88	5	14 967,88	1 945,82	3 086,29	5 032,12	20 000,00
Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito																																	
1	-	-	3 086,29	3 086,29	3 086,29																																	
2	3 086,29	401,22	3 086,29	3 487,51	6 573,80																																	
3	6 573,80	854,59	3 086,29	3 940,88	10 514,68																																	
4	10 514,68	1 366,91	3 086,29	4 453,20	14 967,88																																	
5	14 967,88	1 945,82	3 086,29	5 032,12	20 000,00																																	

3. Una empresa desea acumular un fondo para reposición de activos por un valor de \$ 120000 durante 10 años en una entidad financiera que le reconoce una tasa del 14% anual capitalizable mensualmente; calcular el valor del depósito mensual, el valor en el fondo luego de realizar 115 depósitos y construir la tabla de Acumulación para los últimos 5 períodos.

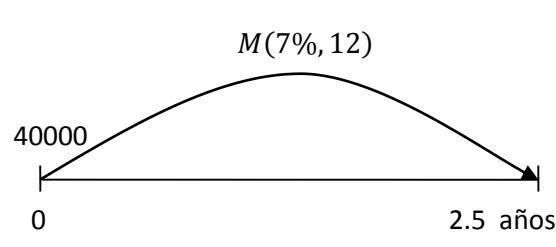
$n = t \times m$ $n = 3 \times 2$ $n = 6$ $i = \frac{j\%}{m} = \frac{14\%}{12} = \frac{14}{1200}$ $R = \$463,20$	$R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$ $R = \frac{120000 \times \frac{14}{1200}}{\left(1 + \frac{14}{1200}\right)^{120} - 1}$ $R = \$463,20$	$VF_k = \frac{R[(1 + i)^k - 1]}{i}$ $VF_k = \frac{463,20 \left[\left(1 + \frac{14}{1200}\right)^{115} - 1\right]}{\frac{14}{1200}}$ $VF_k = \$111.001,40$																																										
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="background-color: #d3d3d3;">Períodos</th> <th style="background-color: #d3d3d3;">Valor en el Fondo Antes del Depósito</th> <th style="background-color: #d3d3d3;">Interés Acreditado en el Período</th> <th style="background-color: #d3d3d3;">Depósito Periódico</th> <th style="background-color: #d3d3d3;">Valor Acumulado en el Período</th> <th style="background-color: #d3d3d3;">Valor en el Fondo Despues del Depósito</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>115</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>111 001,40</td></tr> <tr> <td>116</td><td>111 001,40</td><td>1 295,02</td><td>463,20</td><td>1 758,21</td><td>112 759,61</td></tr> <tr> <td>117</td><td>112 759,61</td><td>1 315,53</td><td>463,20</td><td>1 778,73</td><td>114 538,34</td></tr> <tr> <td>118</td><td>114 538,34</td><td>1 336,28</td><td>463,20</td><td>1 799,48</td><td>116 337,82</td></tr> <tr> <td>119</td><td>116 337,82</td><td>1 357,27</td><td>463,20</td><td>1 820,47</td><td>118 158,29</td></tr> <tr> <td>120</td><td>118 158,29</td><td>1 378,51</td><td>463,20</td><td>1 841,71</td><td>120 000,00</td></tr> </tbody> </table>			Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito	115					111 001,40	116	111 001,40	1 295,02	463,20	1 758,21	112 759,61	117	112 759,61	1 315,53	463,20	1 778,73	114 538,34	118	114 538,34	1 336,28	463,20	1 799,48	116 337,82	119	116 337,82	1 357,27	463,20	1 820,47	118 158,29	120	118 158,29	1 378,51	463,20	1 841,71	120 000,00
Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito																																							
115					111 001,40																																							
116	111 001,40	1 295,02	463,20	1 758,21	112 759,61																																							
117	112 759,61	1 315,53	463,20	1 778,73	114 538,34																																							
118	114 538,34	1 336,28	463,20	1 799,48	116 337,82																																							
119	116 337,82	1 357,27	463,20	1 820,47	118 158,29																																							
120	118 158,29	1 378,51	463,20	1 841,71	120 000,00																																							

4. Dos hermanos han decidido iniciar su propio negocio y para ello han obtenido un préstamo de \$10000 pagaderos en su totalidad dentro de dos años, con una tasa del 16% capitalizable semestralmente. Para pagar la deuda deciden constituir un fondo de amortización mediante depósitos mensuales vencidos a una tasa del 12% capitalizable mensualmente. Dada la información encuentre el valor del depósito mensual, el valor acumulado el fondo luego de 12 depósitos y construya la tabla del Fondo de Acumulación para el siguiente año.

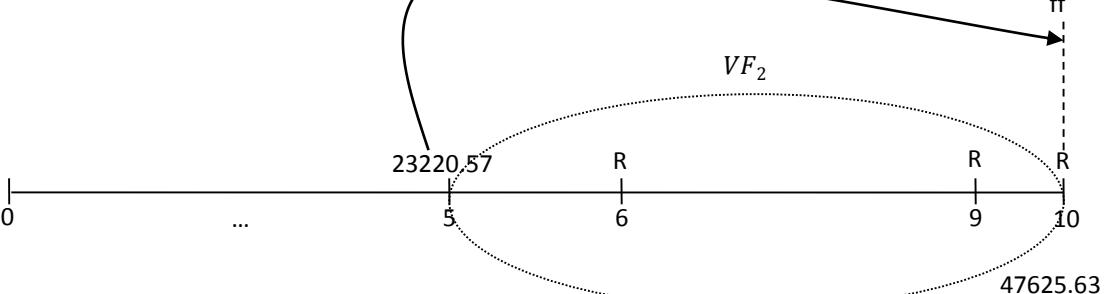
 $n = t \times m$ $n = 2 \times 3$ $n = 6$ $i = \frac{j\%}{m} = \frac{12\%}{12} = \frac{12}{1200}$	<p>Valor de la deuda a pagar en dos años:</p> $M = C(1 + i)^n$ $M = 10000 \left(1 + \frac{16}{200}\right)^4$ $M = \$ 13.604,89$ $R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$ $R = \frac{13604.89 \times \frac{12}{1200}}{\left[\left(1 + \frac{12}{1200}\right)^{24} - 1\right]}$ $R = \$ 504,38$ $VF_k = \frac{R[(1 + i)^k - 1]}{i}$ $VF_k = \frac{504.38 \left[\left(1 + \frac{12}{1200}\right)^{12} - 1\right]}{\frac{12}{1200}}$ $VF_k = \$ 6.396,81$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">Períodos</th><th style="text-align: center;">Valor en el Fondo Antes del Depósito</th><th style="text-align: center;">Interés Acreditado en el Período</th><th style="text-align: center;">Depósito Periódico</th><th style="text-align: center;">Valor Acumulado en el Período</th><th style="text-align: center;">Valor en el Fondo Despues del Depósito</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td style="text-align: center;">12</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: right;">6 396,81</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">13</td><td style="text-align: right;">6 396,81</td><td style="text-align: right;">63,97</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">568,35</td><td style="text-align: right;">6 965,16</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">14</td><td style="text-align: right;">6 965,16</td><td style="text-align: right;">69,65</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">574,03</td><td style="text-align: right;">7 539,19</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">15</td><td style="text-align: right;">7 539,19</td><td style="text-align: right;">75,39</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">579,77</td><td style="text-align: right;">8 118,96</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">16</td><td style="text-align: right;">8 118,96</td><td style="text-align: right;">81,19</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">585,57</td><td style="text-align: right;">8 704,53</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">17</td><td style="text-align: right;">8 704,53</td><td style="text-align: right;">87,05</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">591,43</td><td style="text-align: right;">9 295,96</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">18</td><td style="text-align: right;">9 295,96</td><td style="text-align: right;">92,96</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">597,34</td><td style="text-align: right;">9 893,30</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">19</td><td style="text-align: right;">9 893,30</td><td style="text-align: right;">98,93</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">603,31</td><td style="text-align: right;">10 496,61</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">20</td><td style="text-align: right;">10 496,61</td><td style="text-align: right;">104,97</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">609,35</td><td style="text-align: right;">11 105,96</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">21</td><td style="text-align: right;">11 105,96</td><td style="text-align: right;">111,06</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">615,44</td><td style="text-align: right;">11 721,40</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">22</td><td style="text-align: right;">11 721,40</td><td style="text-align: right;">117,21</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">621,59</td><td style="text-align: right;">12 342,99</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">23</td><td style="text-align: right;">12 342,99</td><td style="text-align: right;">123,43</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">627,81</td><td style="text-align: right;">12 970,80</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">24</td><td style="text-align: right;">12 970,80</td><td style="text-align: right;">129,71</td><td style="text-align: right;">504,38</td><td style="text-align: right;">634,09</td><td style="text-align: right;">13 604,89</td></tr> </tbody> </table>	Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito	12					6 396,81	13	6 396,81	63,97	504,38	568,35	6 965,16	14	6 965,16	69,65	504,38	574,03	7 539,19	15	7 539,19	75,39	504,38	579,77	8 118,96	16	8 118,96	81,19	504,38	585,57	8 704,53	17	8 704,53	87,05	504,38	591,43	9 295,96	18	9 295,96	92,96	504,38	597,34	9 893,30	19	9 893,30	98,93	504,38	603,31	10 496,61	20	10 496,61	104,97	504,38	609,35	11 105,96	21	11 105,96	111,06	504,38	615,44	11 721,40	22	11 721,40	117,21	504,38	621,59	12 342,99	23	12 342,99	123,43	504,38	627,81	12 970,80	24	12 970,80	129,71	504,38	634,09	13 604,89	
Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito																																																																																		
12					6 396,81																																																																																		
13	6 396,81	63,97	504,38	568,35	6 965,16																																																																																		
14	6 965,16	69,65	504,38	574,03	7 539,19																																																																																		
15	7 539,19	75,39	504,38	579,77	8 118,96																																																																																		
16	8 118,96	81,19	504,38	585,57	8 704,53																																																																																		
17	8 704,53	87,05	504,38	591,43	9 295,96																																																																																		
18	9 295,96	92,96	504,38	597,34	9 893,30																																																																																		
19	9 893,30	98,93	504,38	603,31	10 496,61																																																																																		
20	10 496,61	104,97	504,38	609,35	11 105,96																																																																																		
21	11 105,96	111,06	504,38	615,44	11 721,40																																																																																		
22	11 721,40	117,21	504,38	621,59	12 342,99																																																																																		
23	12 342,99	123,43	504,38	627,81	12 970,80																																																																																		
24	12 970,80	129,71	504,38	634,09	13 604,89																																																																																		

5. Un Centro de Capacitación pide un préstamo de \$ 40000 al 7% anual capitalizable mensualmente para la ampliación de unas aulas; para ello crea un fondo de acumulación con depósitos trimestrales tal que dentro de dos años y medio (momento en que tiene que cancelar la deuda junto con su interés) pueda cancelar el préstamo. Si la tasa del fondo es del 4% convertible trimestralmente determinar:

- a. El valor del depósito periódico y la tabla de acumulación para los primeros 5 trimestres.

 $M(7\%, 12)$	<p>Valor de la deuda a pagar en 2.5 años:</p> $M = C(1 + i)^n$ $M = 40000 \left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{30}$ $M = \$ 47.625,63$																																							
$n = t \times m$ $n = 2.5 \times 4$ $n = 10$ $i = \frac{j\%}{m} = \frac{4\%}{4} = \frac{4}{400}$	$R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$ $R = \frac{47625,63 \times \frac{4}{400}}{\left[\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{10} - 1\right]}$ $R = \$4.552,16$	$VF_k = \frac{R[(1 + i)^k - 1]}{i}$ $VF_k = \frac{4552,16 \left[\left(1 + \frac{4}{400}\right)^5 - 1\right]}{\frac{4}{400}}$ $VF_k = \$ 23.220,57$																																						
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="background-color: #d9e1f2;">Períodos</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Valor en el Fondo Antes del Depósito</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Interés Acreditado en el Período</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Depósito Periódico</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Valor Acumulado en el Período</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Valor en el Fondo Despues del Depósito</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>-</td><td>-</td><td>4 552,11</td><td>4 552,11</td><td>4 552,16</td></tr> <tr> <td>2</td><td>4 552,11</td><td>45,52</td><td>4 552,11</td><td>4 597,63</td><td>9 149,83</td></tr> <tr> <td>3</td><td>9 149,74</td><td>91,50</td><td>4 552,11</td><td>4 643,61</td><td>13 793,49</td></tr> <tr> <td>4</td><td>13 793,34</td><td>137,93</td><td>4 552,11</td><td>4 690,04</td><td>18 483,58</td></tr> <tr> <td>5</td><td>18 483,39</td><td>184,83</td><td>4 552,11</td><td>4 736,94</td><td>23 220,57</td></tr> </tbody> </table>					Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito	1	-	-	4 552,11	4 552,11	4 552,16	2	4 552,11	45,52	4 552,11	4 597,63	9 149,83	3	9 149,74	91,50	4 552,11	4 643,61	13 793,49	4	13 793,34	137,93	4 552,11	4 690,04	18 483,58	5	18 483,39	184,83	4 552,11	4 736,94	23 220,57
Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito																																			
1	-	-	4 552,11	4 552,11	4 552,16																																			
2	4 552,11	45,52	4 552,11	4 597,63	9 149,83																																			
3	9 149,74	91,50	4 552,11	4 643,61	13 793,49																																			
4	13 793,34	137,93	4 552,11	4 690,04	18 483,58																																			
5	18 483,39	184,83	4 552,11	4 736,94	23 220,57																																			

- b. Si al iniciar el sexto trimestre (finalizando el quinto trimestre) y para los demás períodos la tasa de interés sube al 5% capitalizable trimestralmente, encuentre el valor del nuevo pago periódico y construya la tabla de acumulación para los últimos cinco trimestres.



$$VF_1 + VF_2 = 47.625,63$$

$$C(1+i)^n + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = 47.625,63$$

$$23220,38 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^5 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{-5}\right]}{\frac{5}{400}} = 47.625,63$$

$$24708,34 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{-5}\right]}{\frac{5}{400}} = 47.625,63$$

$$R = \frac{22916,89 \times \frac{5}{400}}{\left[1 - \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{-5}\right]} = 4.470,24$$

Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
6	23.220,38	290,25	4.470,21	4.760,46	27.981,08
7	27.980,84	349,76	4.470,21	4.819,97	32.801,08
8	32.800,81	410,01	4.470,21	4.880,22	37.681,34
9	37.681,03	471,01	4.470,21	4.941,22	42.622,60
10	42.622,24	532,78	4.470,21	5.002,99	47.625,63

6. Una empresa obtiene un préstamo de \$ 50000 a 10 años, acordando pagar intereses del 5% al final de cada año y al mismo tiempo establecer un fondo de amortización para el pago del capital. Hallar:

- El costo anual de la deuda si el fondo paga un 3.5%
- Cuánto habrá en el fondo justamente después del 7o. depósito?
- Elabore la tabla de acumulación del fondo.

$i = \frac{j\%}{m} = \frac{3.5\%}{1} = \frac{3.5}{100}$ $n = t \times m$ $n = 10 \times 1$ $n = 10$	<p>a.- Costo Anual</p> <p>Depósito periódico:</p> $R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$ $R = \frac{50000 \times \frac{3.5}{100}}{\left[\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{10} - 1\right]}$ $R = \$ 4.262,07$	<p>b.- Fondo después del 7mo depósito</p> $VF_k = \frac{R[(1 + i)^k - 1]}{i}$ $VF_7 = \frac{4262.07 \left[\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^7 - 1\right]}{\frac{3.5}{100}}$ $VF_7 = \$ 33.156,37$																																																																		
<p>Interés anual:</p> $I = C \times r \times t$ $I = 50000 \times \frac{5}{100} \times 1$ $I = \$ 2.500,00$	<p>Costo anual de la deuda:</p> $\text{Costo anual} = \text{Depósito anual} + \text{Interés anual}$ $\text{Costo anual} = 4262,07 + 2500,00$ $\text{Costo anual} = \$ 6.762,07$																																																																			
c.- Tabla de amortización																																																																				
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center; background-color: #f2f2f2;">Períodos</th> <th style="text-align: center; background-color: #f2f2f2;">Valor en el Fondo Antes del Depósito</th> <th style="text-align: center; background-color: #f2f2f2;">Interés Acreditado en el Período</th> <th style="text-align: center; background-color: #f2f2f2;">Depósito Periódico</th> <th style="text-align: center; background-color: #f2f2f2;">Valor Acumulado en el Período</th> <th style="text-align: center; background-color: #f2f2f2;">Valor en el Fondo Despues del Depósito</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">149,17</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">4.411,24</td><td style="text-align: center;">8.673,31</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">8.673,31</td><td style="text-align: center;">303,57</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">4.565,63</td><td style="text-align: center;">13.238,94</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">13.238,94</td><td style="text-align: center;">463,36</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">4.725,43</td><td style="text-align: center;">17.964,37</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">17.964,37</td><td style="text-align: center;">628,75</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">4.890,82</td><td style="text-align: center;">22.855,20</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">22.855,20</td><td style="text-align: center;">799,93</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">5.062,00</td><td style="text-align: center;">27.917,20</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">27.917,20</td><td style="text-align: center;">977,10</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">5.239,17</td><td style="text-align: center;">33.156,37</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">33.156,37</td><td style="text-align: center;">1.160,47</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">5.422,54</td><td style="text-align: center;">38.578,91</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">38.578,91</td><td style="text-align: center;">1.350,26</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">5.612,33</td><td style="text-align: center;">44.191,24</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">44.191,24</td><td style="text-align: center;">1.546,69</td><td style="text-align: center;">4.262,07</td><td style="text-align: center;">5.808,76</td><td style="text-align: center;">50.000,00</td></tr> </tbody> </table>			Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito	1	-	-	4.262,07	4.262,07	4.262,07	2	4.262,07	149,17	4.262,07	4.411,24	8.673,31	3	8.673,31	303,57	4.262,07	4.565,63	13.238,94	4	13.238,94	463,36	4.262,07	4.725,43	17.964,37	5	17.964,37	628,75	4.262,07	4.890,82	22.855,20	6	22.855,20	799,93	4.262,07	5.062,00	27.917,20	7	27.917,20	977,10	4.262,07	5.239,17	33.156,37	8	33.156,37	1.160,47	4.262,07	5.422,54	38.578,91	9	38.578,91	1.350,26	4.262,07	5.612,33	44.191,24	10	44.191,24	1.546,69	4.262,07	5.808,76	50.000,00
Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito																																																															
1	-	-	4.262,07	4.262,07	4.262,07																																																															
2	4.262,07	149,17	4.262,07	4.411,24	8.673,31																																																															
3	8.673,31	303,57	4.262,07	4.565,63	13.238,94																																																															
4	13.238,94	463,36	4.262,07	4.725,43	17.964,37																																																															
5	17.964,37	628,75	4.262,07	4.890,82	22.855,20																																																															
6	22.855,20	799,93	4.262,07	5.062,00	27.917,20																																																															
7	27.917,20	977,10	4.262,07	5.239,17	33.156,37																																																															
8	33.156,37	1.160,47	4.262,07	5.422,54	38.578,91																																																															
9	38.578,91	1.350,26	4.262,07	5.612,33	44.191,24																																																															
10	44.191,24	1.546,69	4.262,07	5.808,76	50.000,00																																																															

7. Para cancelar una deuda de \$ 80000 a cinco años plazo se establecen reservas anuales en un fondo que abona el 6%; transcurrido dos años, el fondo eleva sus intereses al 7%. Hallar el valor de las reservas anuales y hacer un cuadro del fondo.

 80000	<p>Depósito periódico:</p> $R = \frac{VF \times i}{[(1+i)^n - 1]}$ $R = \frac{80000 \times \frac{6}{100}}{\left[\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 - 1 \right]}$ $R = \$ 14191.71$	<p>Depósito acumulado:</p> $VF_k = \frac{R[(1+i)^k - 1]}{i}$ $VF_2 = \frac{14191.71 \left[\left(1 + \frac{6}{100}\right)^2 - 1 \right]}{\frac{6}{100}}$ $VF_2 = \$ 29.234,93$																																				
 80000	$VF_1 + VF_2 = 80000$ $C(1+i)^n + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = 80000$ $29234.93 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^3 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{-3}\right]}{\frac{7}{100}} = 80000$ $35814.05 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{-3}\right]}{\frac{7}{100}} = 80000$ $R = \frac{44185.95 \times \frac{7}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{-3}\right]} = 13.744,12$	$VF_1 + VF_2 = 80000$ $C(1+i)^n + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = 80000$ $29234.93 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^3 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{-3}\right]}{\frac{7}{100}} = 80000$ $35814.05 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{-3}\right]}{\frac{7}{100}} = 80000$ $R = \frac{44185.95 \times \frac{7}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{-3}\right]} = 13.744,12$																																				
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">Períodos</th> <th style="text-align: center;">Valor en el Fondo Antes del Depósito</th> <th style="text-align: center;">Interés Acreditado en el Período</th> <th style="text-align: center;">Depósito Periódico</th> <th style="text-align: center;">Valor Acumulado en el Período</th> <th style="text-align: center;">Valor en el Fondo Despues del Depósito</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td><td></td><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">14.191,71</td><td style="text-align: center;">14.191,71</td><td style="text-align: center;">14.191,71</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">14.191,71</td><td style="text-align: center;">851,50</td><td style="text-align: center;">14.191,71</td><td style="text-align: center;">15.043,21</td><td style="text-align: center;">29.234,93</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">29.234,93</td><td style="text-align: center;">2.046,44</td><td style="text-align: center;">13.744,12</td><td style="text-align: center;">15.790,56</td><td style="text-align: center;">45.025,49</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">45.025,49</td><td style="text-align: center;">3.151,78</td><td style="text-align: center;">13.744,12</td><td style="text-align: center;">16.895,90</td><td style="text-align: center;">61.921,39</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">61.921,39</td><td style="text-align: center;">4.334,50</td><td style="text-align: center;">13.744,12</td><td style="text-align: center;">18.078,61</td><td style="text-align: center;">80.000,00</td></tr> </tbody> </table>			Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito	1		-	14.191,71	14.191,71	14.191,71	2	14.191,71	851,50	14.191,71	15.043,21	29.234,93	3	29.234,93	2.046,44	13.744,12	15.790,56	45.025,49	4	45.025,49	3.151,78	13.744,12	16.895,90	61.921,39	5	61.921,39	4.334,50	13.744,12	18.078,61	80.000,00
Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito																																	
1		-	14.191,71	14.191,71	14.191,71																																	
2	14.191,71	851,50	14.191,71	15.043,21	29.234,93																																	
3	29.234,93	2.046,44	13.744,12	15.790,56	45.025,49																																	
4	45.025,49	3.151,78	13.744,12	16.895,90	61.921,39																																	
5	61.921,39	4.334,50	13.744,12	18.078,61	80.000,00																																	

8. Determinar el depósito semestral por adelantado necesario para disponer dentro de 3 años de \$ 60000 si el fondo reconoce el 3% capitalizable mensualmente.

<p>Tasa nominal $j = 3\%$ Frecuencia de capitalización $m = 12$ Frecuencia equivalente $m' = 2$</p> $\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{3}{1200}$	<p>Tasa equivalente:</p> $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ $i' = \left[\left(1 + \frac{3}{1200} \right)^{12/2} - 1 \right] \times 100 = 1,51\%$																																																
	<p>Depósito periódico:</p> $R = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i')^{n+1}-1}{i'} \right]}$ $R = \frac{60000}{\left[\frac{\left(1 + \frac{1,51}{100} \right)^7 - 1}{\frac{1,51}{100}} \right]}$ $R = \$ 9.486,06$																																																
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="background-color: #d9e1f2;">Períodos</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Valor en el Fondo Antes del Depósito</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Interés Acreditado en el Período</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Depósito Periódico</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Valor Acumulado en el Período</th> <th style="background-color: #d9e1f2;">Valor en el Fondo Después del Depósito</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td></td><td>-</td><td>9.486,06</td><td>9.486,06</td><td>9.486,06</td></tr> <tr> <td>1</td><td>9.486,06</td><td>143,18</td><td>9.486,06</td><td>9.629,24</td><td>19.115,30</td></tr> <tr> <td>2</td><td>19.115,30</td><td>288,53</td><td>9.486,06</td><td>9.774,59</td><td>28.889,89</td></tr> <tr> <td>3</td><td>28.889,89</td><td>436,07</td><td>9.486,06</td><td>9.922,13</td><td>38.812,02</td></tr> <tr> <td>4</td><td>38.812,02</td><td>585,83</td><td>9.486,06</td><td>10.071,89</td><td>48.883,91</td></tr> <tr> <td>5</td><td>48.883,91</td><td>737,86</td><td>9.486,06</td><td>10.223,92</td><td>59.107,82</td></tr> <tr> <td>6</td><td>59.107,82</td><td>892,18</td><td></td><td>892,18</td><td>60.000,00</td></tr> </tbody> </table>		Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Después del Depósito	0		-	9.486,06	9.486,06	9.486,06	1	9.486,06	143,18	9.486,06	9.629,24	19.115,30	2	19.115,30	288,53	9.486,06	9.774,59	28.889,89	3	28.889,89	436,07	9.486,06	9.922,13	38.812,02	4	38.812,02	585,83	9.486,06	10.071,89	48.883,91	5	48.883,91	737,86	9.486,06	10.223,92	59.107,82	6	59.107,82	892,18		892,18	60.000,00
Períodos	Valor en el Fondo Antes del Depósito	Interés Acreditado en el Período	Depósito Periódico	Valor Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Después del Depósito																																												
0		-	9.486,06	9.486,06	9.486,06																																												
1	9.486,06	143,18	9.486,06	9.629,24	19.115,30																																												
2	19.115,30	288,53	9.486,06	9.774,59	28.889,89																																												
3	28.889,89	436,07	9.486,06	9.922,13	38.812,02																																												
4	38.812,02	585,83	9.486,06	10.071,89	48.883,91																																												
5	48.883,91	737,86	9.486,06	10.223,92	59.107,82																																												
6	59.107,82	892,18		892,18	60.000,00																																												

12.7. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Construir una tabla para acumular \$ 8000 mediante depósitos anuales iguales, al término de los próximos cinco años, en un fondo que produce el 3.2 % efectivo.

R: \$ 1.500,82

2. Para disponer de 50000 en cuatro años se va a construir un fondo de acumulación en una entidad financiera que reconoce el 10% capitalizable semestralmente; encuentre el valor del pago semestral y construya la tabla de acumulación correspondiente.

R: \$ 5.236,09

3. El dueño de una tienda de abarrotes piensa reunir en 8 años \$ 30000 para poder jubilarse, si el banco otorga un interés de 6% capitalizable semestralmente, encuentre el valor del depósito semestral que debe realizar, el valor en el fondo luego de realizar 13 depósitos y construya a tabla de amortización para los últimos 3 depósitos.

R: \$ 1.488,33; \$ 23.813,21

4. Lucía ha decidido emprender un negocio, con un préstamo de \$ 40000 el cual será pagado en su totalidad dentro de 4 años, con una tasa de interés del 12% capitalizable semestralmente. Para pagar la deuda decide constituir un fondo de amortización mediante depósitos trimestrales vencidos a una tasa de interés del 10% capitalizable trimestralmente; encuentre el valor del depósito periódico trimestral y elabore Tabla del fondo de acumulación correspondiente.

R: \$ 3.289,64

5. Para disponer de 50000 en cinco años se va a construir un fondo de acumulación en una entidad financiera que reconoce el 10%. Transcurridos 2 años se realiza un pago extra de \$ 10000. Encuentre el valor del pago periódico y construya la tabla de amortización correspondiente.

R: \$ 6.009,73

6. Para obtener \$ 100000 en 4 años, se van a realizar depósitos semestrales en un fondo financiero que reconoce el 8% con capitalización semestral, a partir del quinto período, la tasa de interés varía al 9% con capitalización semestral. Determinar el valor del depósito periódico para los primeros 4 semestres y el valor del depósito periódico para los siguientes semestres; elaborar la tabla del Fondo de Acumulación.

R: \$ 10.852,78; \$ 10.528,20

7. Un artesano necesita reemplazar cada tres años todas sus herramientas, cuyo valor es de \$ 10000 ¿Qué depósito semestral por adelantado debe hacer en un fondo que abona el 8% capitalizable semestral?; Construya la tabla de acumulación del fondo.

R: \$ 1.449,63

8. Se establece un fondo con depósitos de \$ 5000 semestrales en una entidad financiera que abona el 6% capitalizable trimestral, hallar el valor acumulado en tres años y elaborar el cuadro del fondo.

R: \$ 32.360,33

TABLA DE CONTENIDOS

UNIDAD 13.- GRADIENTE FINANCIERO	197
13.1. DEFINICIÓN.....	197
13.2. CLASIFICACIÓN	198
13.3. GRADIENTE ARITMÉTICO LINEAL O UNIFORME	198
13.4. VALOR ACTUAL Y VALOR FUTURO DEL GRADIENTE ARITMÉTICO.....	198
13.5. GRADIENTE GEOMÉTRICO O PORCENTUAL	203
13.6. VALOR ACTUAL Y VALOR FUTURO DEL GRADIENTE GEOMÉTRICO.....	203
13.7. PROBLEMAS RESUELTOS	205
13.8. PROBLEMAS PROPUESTOS	224
UNIDAD 14.- AMORTIZACIÓN VARIABLE	227
14.1. INTRODUCCIÓN	227
14.2. LA HERRAMIENTA BUSCAR OBJETIVO	227
14.3. APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA DE EXCEL: Buscar objetivo	229
14.4. PROBLEMAS RESUELTOS	230
14.5. PROBLEMAS PROPUESTOS	240
UNIDAD 15.- FONDOS DE ACUMULACIÓN VARIABLE	241
15.1. INTRODUCCIÓN	241
15.2. PROBLEMAS RESUELTOS	241
15.3. PROBLEMAS PROPUESTOS	250
UNIDAD 16.- DEPRECIACIÓN DE ACTIVOS.....	252
16.1. INTRODUCCIÓN	252
16.2. VARIABLES FINANCIERAS.....	252
16.3. DEPRECIACIÓN DEL ACTIVO	252
16.4. DEPRECIACIÓN PERIÓDICA.....	253
16.5. VALOR EN LIBROS	253
16.6. MÉTODOS DE DEPRECIACIÓN.....	253
16.7. MÉTODO DE DEPRECIACIÓN LINEAL	253
16.8. MÉTODO DE SUMA DE ENTEROS	255
16.9. MÉTODO DEL PORCENTAJE FIJO	256
16.10. PROBLEMAS RESUELTOS	258
16.11. PROBLEMAS PROPUESTOS	262

UNIDAD 17.- NEGOCIACIÓN DE BONOS.....	263
17.1. DEFINICIÓN.....	263
17.2. ELEMENTOS DE UN BONO (MORA Zambrano, 2010).....	264
17.3. VALOR DE REDENCIÓN DE UN BONO (MORA Zambrano, 2010).....	264
17.4. NÚMERO DE CUPONES Y VALOR DE CADA CUPÓN.....	265
17.5. PRECIO DE VENTA DE UN BONO	265
17.6. PRECIO DE VENTA DE UN BONO EN FECHA DE PAGO DE INTERESES	265
17.7. PRECIO DE VENTA DE UN BONO ENTRE FECHAS DE CUPÓN	266
17.8. PROBLEMAS RESUELTOS	267
17.9. PROBLEMAS PROPUESTOS	274
UNIDAD 18.- VALOR ACTUAL NETO Y TASA INTERNA DE RETORNO	276
18.1. INTRODUCCIÓN	276
18.2. EL FLUJO DE CAJA	276
18.3. VALOR ACTUAL NETO	276
18.4. LA TASA INTERNA DE RETORNO	277
18.5. PROBLEMAS RESUELTOS	278
18.6. PROBLEMAS PROPUESTOS	303

13

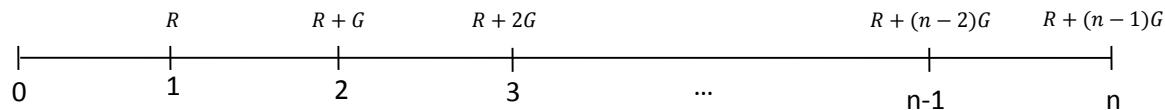
GRADIENTE FINANCIERO

13.1. DEFINICIÓN

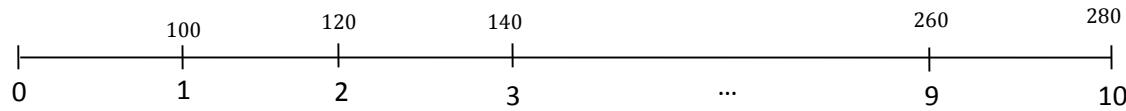
Se denomina Gradiente Financiero a una serie de pagos periódicos variables cuya variación se fundamenta en el principio matemático de las Progresiones Aritméticas y Geométricas; es decir que la variación puede ser lineal o porcentual, en forma creciente o decreciente (RAMIREZ Molinaires & GARCÍA Barbosa, 2009).

Gráficamente podemos indicar:

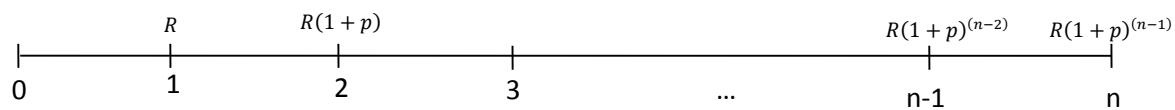
Gradiente aritmético, lineal o uniforme:



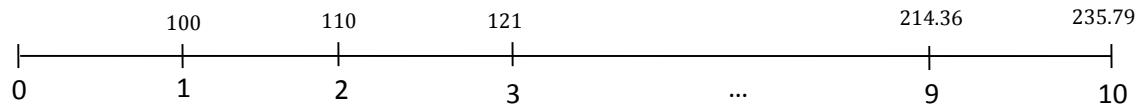
Si $R = 100, G = 20, n = 10$



Gradiente geométrico, porcentual o exponencial:



Si $R = 100, p = 10\%, n = 10$



Donde:

G : Gradiente aritmético o variación lineal o uniforme, expresado en unidades monetarias.

p : Gradiente geométrico o variación exponencial expresada en porcentaje.

13.2. CLASIFICACIÓN

De acuerdo con la fecha del pago, el Gradiente financiero puede ser:

1. Gradiente vencido si el pago periódico se realiza al final de cada período.
2. Gradiente anticipado, si el pago periódico se realiza al inicio de cada período.
3. Gradiente diferido: si el primer pago se realiza luego de que han transcurrido algunos períodos.
4. Gradiente perpetuo: si los pagos se realizan en forma indefinida.
5. Gradiente general: si el período de capitalización no coincide con el período de pago.

13.3. GRADIENTE ARITMÉTICO LINEAL O UNIFORME

El gradiente aritmético, lineal o uniforme es una serie de pagos variables, tales que, el valor de un pago cualquiera R_n se obtiene sumando una cantidad constante, llamada gradiente, al pago anterior; este valor se puede determinar con la siguiente expresión:

$$R_n = R + (n - 1)G$$

Donde:

R : Valor del primer pago o pago inicial.

n : Número de pagos que conforman el gradiente financiero.

G : Gradiente aritmético.

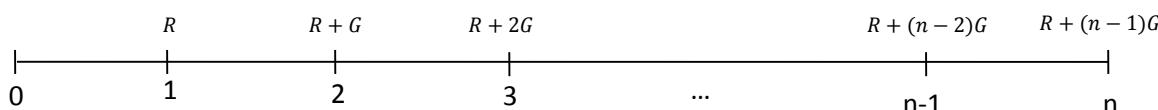
El valor de G es positivo cuando el Gradiente Financiero es creciente y negativo cuando el Gradiente Financiero es decreciente.

13.4. VALOR ACTUAL Y VALOR FUTURO DEL GRADIENTE ARITMÉTICO

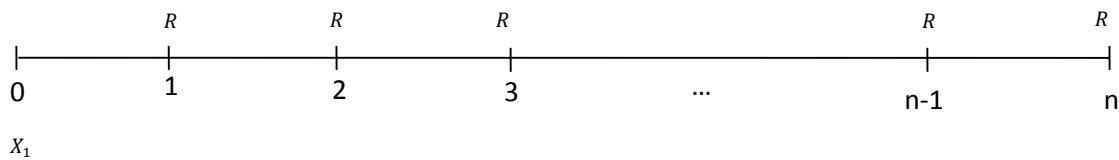
De cada uno de los gradientes se deberá determinar el Valor Actual o Valor Presente y el Valor Futuro; a continuación se obtienen las expresiones de cálculo correspondientes.

VALOR ACTUAL DEL GRADIENTE VENCIDO

Se tiene el siguiente gradiente aritmético con pagos vencidos:



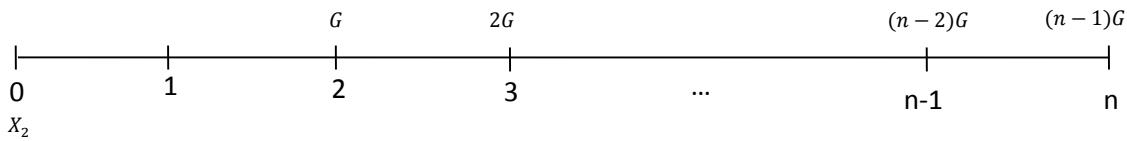
Al gradiente vencido se lo separa en dos partes: el primero de ellos formado por los pagos uniformes R , tal como se indica a continuación:



El Valor Actual X_1 de esta anualidad vencida está dado por:

$$X_1 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

La segunda parte está formada por el gradiente propiamente dicho, es decir:



El Valor Actual X_2 de esta anualidad vencida está dado por:

$$X_2 = G(1 + i)^{-2} + 2G(1 + i)^{-3} + \dots + (n - 2)G(1 + i)^{-(n-1)} + (n - 1)G(1 + i)^{-n}$$

Que se puede escribir como:

$$X_2 = G[(1 + i)^{-2} + 2(1 + i)^{-3} + \dots + (n - 2)(1 + i)^{-(n-1)} + (n - 1)(1 + i)^{-n}] \quad (1)$$

Factorizando el segundo miembro y simplificando se tiene:

$$X_2 = G(1 + i)^{-1}[(1 + i)^{-1} + 2(1 + i)^{-2} + \dots + (n - 2)(1 + i)^{-(n-2)} + (n - 1)(1 + i)^{-(n-1)}]$$

$$X_2(1 + i) = G[(1 + i)^{-1} + 2(1 + i)^{-2} + \dots + (n - 2)(1 + i)^{-(n-2)} + (n - 1)(1 + i)^{-(n-1)}]$$

$$X_2 + X_2i = G[(1 + i)^{-1} + 2(1 + i)^{-2} + \dots + (n - 2)(1 + i)^{-(n-2)} + (n - 1)(1 + i)^{-(n-1)}]$$

$$X_2i = G[(1 + i)^{-1} + 2(1 + i)^{-2} + \dots + (n - 2)(1 + i)^{-(n-2)} + (n - 1)(1 + i)^{-(n-1)}] - X_2 \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) y simplificando se obtiene ahora:

$$X_2i = G[(1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + \dots + (1 + i)^{-(n-2)} + (1 + i)^{-(n-1)} + (1 + i)^{-n} - n(1 + i)^{-n}]$$

Que se puede escribir de la siguiente manera:

$$X_2 = \frac{G}{i}[(1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + \dots + (1 + i)^{-(n-2)} + (1 + i)^{-(n-1)} + (1 + i)^{-n}] - \frac{Gn}{i(1+i)^n}$$

Los términos que se encuentran en el interior de corchete conforman la suma de términos de una progresión geométrica, entonces la expresión anterior se escribe:

$$X_2 = \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] - \frac{Gn}{(1+i)^n}$$

Finalmente:

$$X_2 = \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

Por lo anterior, el Valor Actual del Gradiente Aritmético vencido, está dado por:

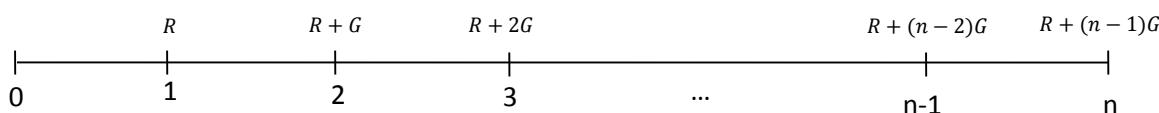
$$VA = X_1 + X_2$$

Es decir:

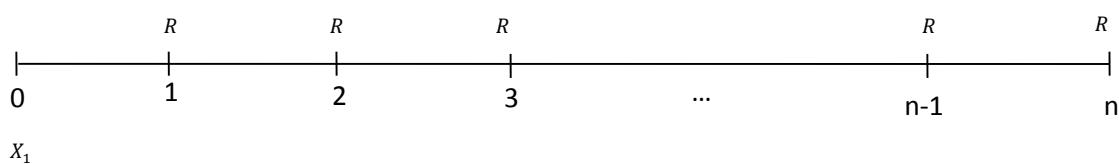
$$VA = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

VALOR FUTURO DEL GRADIENTE VENCIDO

Se tiene el siguiente gradiente aritmético con pagos vencidos:



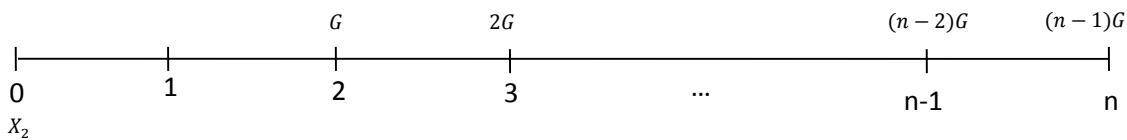
Al gradiente vencido se lo separa en dos partes: el primero de ellos formado por los pagos uniformes R , tal como se indica a continuación:



El Valor Futuro X_1 de esta anualidad vencida está dado por:

$$X_1 = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

La segunda parte está formada por el gradiente propiamente dicho, es decir:



El Valor Futuro X_2 de esta anualidad vencida está dado por:

$$X_2 = G(1+i)^{n-2} + 2G(1+i)^{n-3} + \cdots + (n-2)G(1+i) + (n-1)G$$

Que se puede escribir como:

$$X_2 = G[(1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \cdots + (n-2)(1+i) + (n-1)] \quad (1)$$

Factorizando el segundo miembro y simplificando se tiene:

$$X_2 = G(1+i)^{-1}[(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \cdots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i)]$$

$$X_2(1+i) = G[(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \cdots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i)]$$

$$X_2 + X_2 i = G[(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \cdots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i)]$$

$$X_2 i = G[(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \cdots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i)] - X_2 \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) y simplificando se obtiene ahora:

$$X_2 i = G[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) - (n-1)]$$

Que se puede escribir de la siguiente manera:

$$X_2 = \frac{G}{i}[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) + 1] - \frac{Gn}{i}$$

Los términos que se encuentran en el interior de corchete conforman la suma de términos de una progresión geométrica, entonces la expresión anterior se escribe:

$$X_2 = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{Gn}{i}$$

Finalmente:

$$X_2 = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

Por lo anterior, el Valor Futuro del Gradiente Aritmético vencido, está dado por:

$$VF = X_1 + X_2$$

Es decir:

$$VF = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

VALOR ACTUAL Y VALOR FUTURO DEL GRADIENTE ANTICIPADO

Cuando el pago inicial R se lo realiza al inicio de la transacción, el Valor Actual y el Valor Futuro del Gradiente Financiero se lo obtiene con las expresiones que a continuación se indican:

$$VA = R + (R + G) \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} - \frac{n-1}{(1+i)^{(n-1)}} \right]$$

$$VF = R(1+i)^n + (R + G) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1 \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1 - (n-1)(1+i) \right]$$

VALOR ACTUAL Y VALOR FUTURO DEL GRADIENTE DIFERIDO

Si el primer pago R se realiza luego de que han trascurrido k períodos, conocido como período de gracia, el cálculo del Valor Actual y Valor Futuro está dado por (RAMIREZ Molinares & GARCÍA Barbosa, 2009):

$$VA = \frac{\left[\frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right]}{(1+i)^k}$$

$$VF = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

VALOR ACTUAL DEL GRADIENTE FINANCIERO EN UNA PERPETUIDAD

Si el pago periódico es a perpetuidad, el gradiente financiero existe cuando es este es creciente; partiendo del Valor Actual del gradiente vencido se tiene:

$$VA = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

Para una perpetuidad, el Valor Actual está dado por:

$$VA = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right]$$

Que se puede escribir como:

$$VA = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n} \right] \right]$$

Recordando que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+i)^{-n} \approx 0$$

Finalmente se tiene:

$$VA = \frac{R}{i} + \frac{G}{i^2}$$

VALOR ACTUAL Y VALOR FUTURO GRADIENTE GENERAL:

Para la determinación del Valor Actual y del Valor Futuro en un gradiente General, es necesario previamente encontrar la tasa equivalente con un período de capitalización que coincida con el período de pago; luego se pueden utilizar las expresiones de cálculo determinadas en párrafos anteriores; a continuación se presentan las fórmulas para el cálculo del Valor Actual y Valor Futuro en términos de la tasa equivalente:

$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'} + \frac{G}{i'} \left[\frac{1 - (1 + i')^{-n}}{i'} - \frac{n}{(1 + i')^n} \right]$$

$$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'} + \frac{G}{i'} \left[\frac{(1 + i')^n - 1}{i'} - n \right]$$

Recordando que:

$$i' = \left[(1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100$$

13.5. GRADIENTE GEOMÉTRICO O PORCENTUAL

El gradiente geométrico, o porcentual es una serie de pagos variables, tales que, el valor de un pago cualquiera P se obtiene multiplicando una cantidad constante en términos porcentuales, llamada gradiente geométrico, al pago anterior; este valor se puede determinar con la siguiente expresión (RAMIREZ Molinares & GARCÍA Barbosa, 2009):

$$P_k = R(1 + p)^{k-1}$$

Donde:

R : Valor del primer pago o pago inicial.

n : Número de pagos que conforman el gradiente financiero.

p : Gradiente geométrico o porcentual.

k : Valor que representa el pago a buscar.

13.6. VALOR ACTUAL Y VALOR FUTURO DEL GRADIENTE GEOMÉTRICO

De cada uno de los gradientes se deberá determinar el Valor Actual o Valor Presente y el Valor Futuro; a continuación se establecen las expresiones de cálculo correspondientes:

GRADIENTE VENCIDO

$VA = R \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i} \right)^n}{i - p} \right] \quad si \ i \neq p$ $VA = \frac{nR}{1+i} \quad si \ i = p$	$VF = R \left[\frac{(1+i)^n - (1+p)^n}{i - p} \right] \quad si \ i \neq p$ $VF = nR(1+i)^{n-1} \quad si \ i = p$
--	--

GRADIENTE ANTICIPADO

Cuando el pago inicial R se lo realiza al inicio del gradiente geométrico es conveniente aislar al primer pago y trabajar como gradiente vencido.

GRADIENTE DIFERIDO

Si el primer pago R se realiza luego de que han transcurrido k períodos, conocido como período de gracia, el cálculo del Valor Actual se determina planteando una ecuación de valor con fecha focal al final del período de gracia; el valor futuro se lo determina como un gradiente vencido (RAMIREZ Molinares & GARCÍA Barbosa, 2009).

GRADIENTE PERPETUO

Si el pago periódico es a perpetuidad, el gradiente financiero existe cuando es creciente; entonces:

$$VA = \frac{R}{i - p} \quad \text{si } i > p$$

GRADIENTE GENERAL

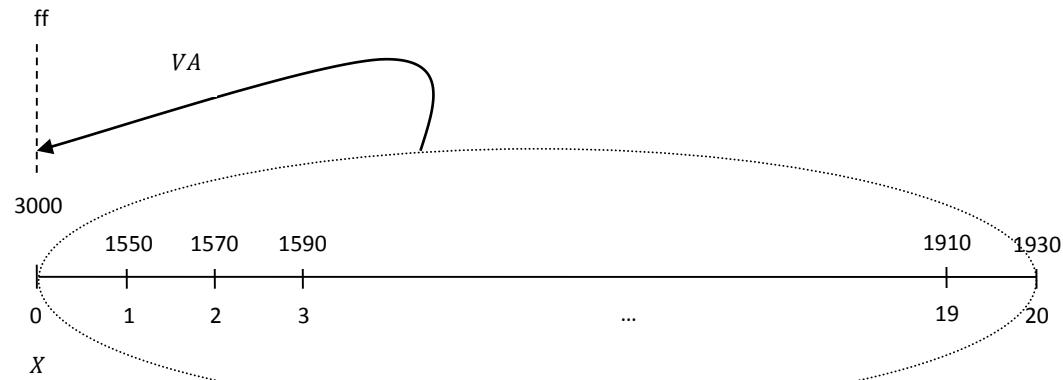
Para la determinación del Valor Actual y del Valor Futuro en un gradiente General, es decir en la serie de pagos en que el período de capitalización y el período de pago no coinciden, es necesario encontrar la tasa equivalente con un período de capitalización que coincida con el período de pago.

Para el caso del Gradiente geométrico vencido, en términos de la tasa equivalente se tiene:

$VA = R \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i'} \right)^n}{i' - p} \right] \quad \text{si } i' \neq p$	$VF = R \left[\frac{(1 + i')^n - (1 + p)^n}{i - p} \right] \quad \text{si } i' \neq p$
$VA = \frac{nR}{1 + i'} \quad \text{si } i' = p$	$VF = nR(1 + i)^{n-1} \quad \text{si } i' = p$

13.7. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentre el valor de las dos últimas cuotas y hallar el valor de contado de una máquina adquirida con el siguiente plan: cuota inicial de \$ 3000 y 20 pagos mensuales; \$ 1550 es el valor de la primera, \$ 1570 la segunda, \$ 1590 la tercera y así sucesivamente, sabiendo que la tasa de interés es el 12% capitalizable mensualmente.



$$R_n = R + (n - 1)G$$

$$R_{19} = 1550 + (19 - 1) \times 20$$

$$R_{19} = \$ 1910,00$$

$$R_{20} = 1550 + (20 - 1) \times 20$$

$$R_{20} = \$ 1930,00$$

$$X = 3000 + VA$$

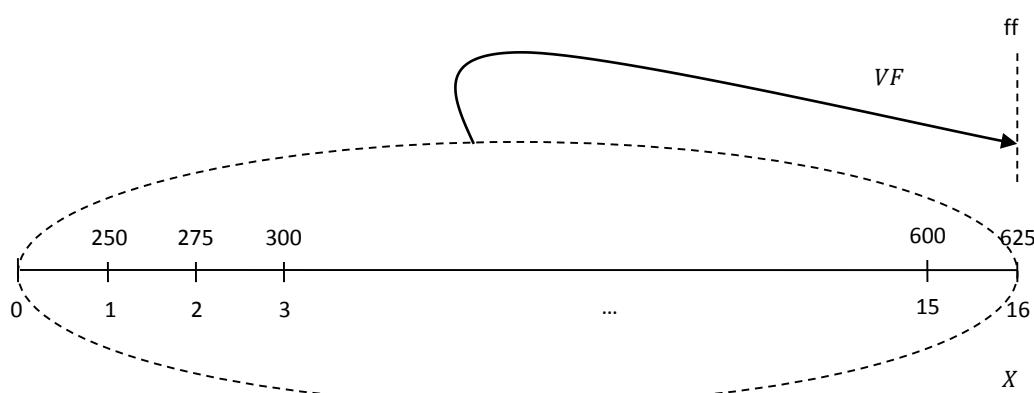
$$X = 3000 + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right]$$

$$X = 3000 + \frac{1550 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-20} \right]}{\frac{12}{1200}} + \frac{20}{\frac{12}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-20}}{\frac{12}{1200}} - \frac{20}{\left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{20}} \right]$$

$$X = 3000,00 + 27970,61 + 3309,33$$

$$X = \$ 34.279,94$$

2. Se va a depositar \$ 250 en tres meses, \$ 275 dentro de 6 meses \$300, dentro de 9 meses, y así sucesivamente hasta que hace el último depósito dentro de 4 años; encuentre el valor de los dos últimos depósitos y el valor acumulado en 4 años, si los depósitos ganan un interés del 8% capitalizable trimestralmente.



$$R_n = R + (n - 1)G$$

$$R_{15} = 250 + (15 - 1) \times 25$$

$$R_{15} = \$ 600,00$$

$$R_{16} = 250 + (16 - 1) \times 20$$

$$R_{16} = \$ 625,00$$

Ecuación de Valor:

$$X = VF$$

$$X = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} - n \right]$$

$$X = \frac{250 \left[\left(1 + \frac{8}{400} \right)^{16} - 1 \right]}{\frac{8}{400}} + \frac{25}{\frac{8}{400}} \left[\frac{\left(1 + \frac{8}{400} \right)^{16} - 1}{\frac{8}{400}} - 16 \right]$$

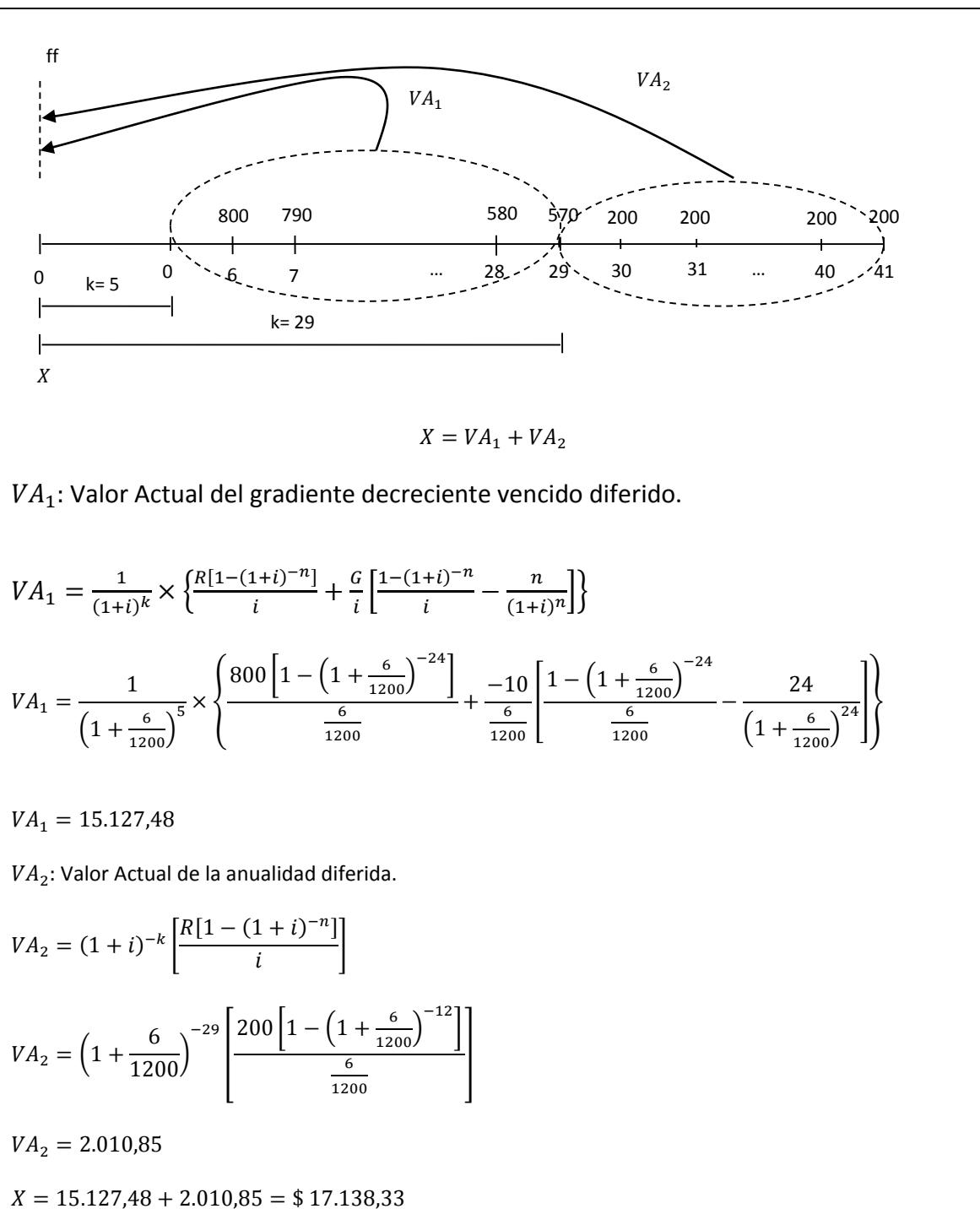
$$X = 4659.82 + 3299.11$$

$$X = \$ 7.958,93$$

3. Una serie de pagos mensuales se inicia hoy con un pago de \$ 500 y aumentará en una cantidad fija de dinero hasta llegar a \$ 1100 dentro de doce meses; a partir de allí disminuirá en otra suma fija de dinero hasta llegar a \$ 740 diez meses más tarde. Para una tasa de interés del 8% anual capitalizable mensualmente, hallar el Valor Actual de esta serie.

<p>Gradiente 1: Serie uniforme de 12 pagos crecientes:</p> $G_1 = \frac{1100 - 500}{12} = 50$	<p>Gradiente 2: Serie uniforme de 10 pagos decrecientes:</p> $G_2 = \frac{740 - 1100}{10} = -36$
<p>Ecuación de Valor:</p> $X = 500 + VA_1 + VA_2$ <p>VA_1: Valor Actual de la anualidad vencida con gradiente creciente.</p> $VA_1 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right]$ $VA_1 = \frac{550}{\frac{8}{1200}} \left[1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-12} \right] + \frac{50}{\frac{8}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-12}}{\frac{8}{1200}} - \frac{12}{\left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{12}} \right]$ $VA_1 = 6322.68 + 3115.83 = \$ 9.438,51$ <p>VA_2: Valor Actual de la anualidad vencida diferida con gradiente decreciente.</p> $VA_2 = (1 + i)^{-k} \left[\frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right] \right]$ $VA_2 = \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-12} \left[\frac{1064}{\frac{8}{1200}} \left[1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-10} \right] + \frac{-36}{\frac{8}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-10}}{\frac{8}{1200}} - \frac{10}{\left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{10}} \right] \right]$ $VA_2 = \$ 8.048,87$ $X = 500,00 + 9.438,51 + 8.048,87 = \$ 17.987,38$	

4. Determinar el valor de contado de un vehículo financiado con el siguiente plan: 24 cuotas mensuales de \$ 800, \$ 790, \$ 780 y así sucesivamente, sabiendo además que la primera cuota se debe pagar dentro de seis meses; y después de estas cuotas, doce pagos mensuales de \$ 200 cada uno. La tasa de interés es el 6% capitalizable mensualmente.



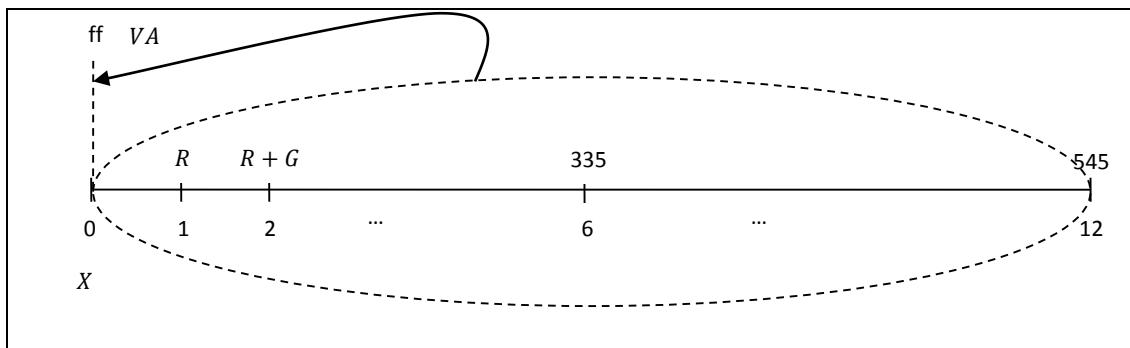
5. ¿Cuánto se debe consignar hoy en una corporación paga un interés del 10% capitalizable mensualmente, para atender una serie de gastos a perpetuidad si empezando el siguiente mes y con un valor de \$ 300 se incrementa \$ 10 mensualmente.

	$X = VA$ $X = \frac{R}{i} + \frac{G}{i^2}$ $X = \frac{300}{\left(\frac{10}{1200}\right)} + \frac{10}{\left(\frac{10}{1200}\right)^2}$ $X = \$ 180.000,00$
--	---

6. Qué interés nominal, capitalizable trimestralmente se reconoce a un depósito de \$ 800000 realizado hoy, si se pueden hacer retiros de \$ 500 dentro de 3 meses, \$ 520 dentro de seis meses y así sucesivamente de manera perpetua.

	$X = VA$ $800000 = \frac{500}{i} + \frac{20}{i^2}$ $800000 = \frac{500i + 20}{i^2}$ $800000i^2 - 500i - 20 = 0$ $40000i^2 - 25i - 1 = 0$
$40000i^2 - 25i - 1 = 0$ $a = 40000, b = -25, c = -1$ $i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $i = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(40000)(-1)}}{2(40000)}$	$i_1 = \frac{25 + 400,78}{2(40000)} = 0,53\%$ $i_2 = \frac{25 - 400,78}{2(40000)} = -0,47\%$ <p>No existen tasas negativas, entonces:</p> $i = 0,53\%$ $j = 0,53\% \times 4 = 2,13\%$

7. Un préstamo se debe cancelar con 12 cuotas mensuales así: la primera es de cierto valor, que mes a mes se incrementa en cierta cantidad constante; si se sabe que el valor de la cuota 6 es de \$ 335 y el valor de la cuota 12 es de \$ 545, encontrar el valor de la primera y segunda cuota al igual que el valor del préstamo si el interés de financiación es del 24 % capitalizable mensual.



Cálculo del Gradiente aritmético:

Tomando desde el 6to hasta el 12º término:

$$P = R + (n - 1)G$$

$$545 = 335 + 6G$$

$$G = \$ 35,00$$

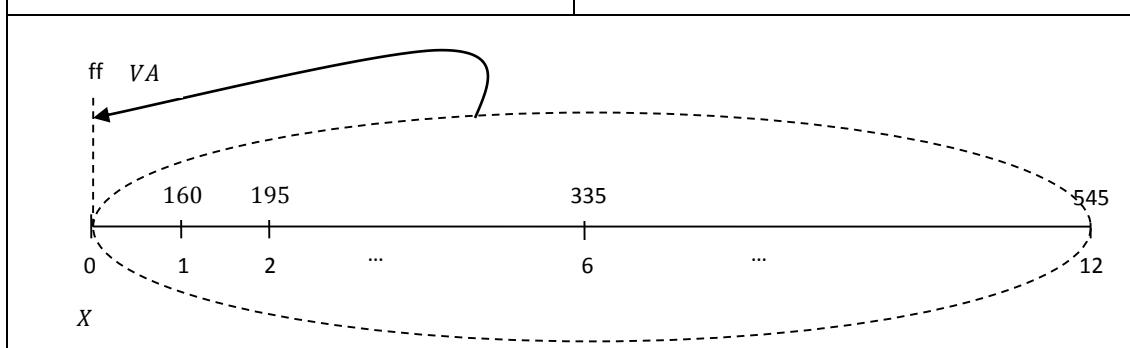
Cálculo del primer pago:

Tomando desde el 1º hasta el 6to término:

$$P = R + (n - 1)G$$

$$335 = R + (5)35$$

$$R = \$ 160,00$$



VA: Valor Actual de la anualidad vencida con gradiente creciente.

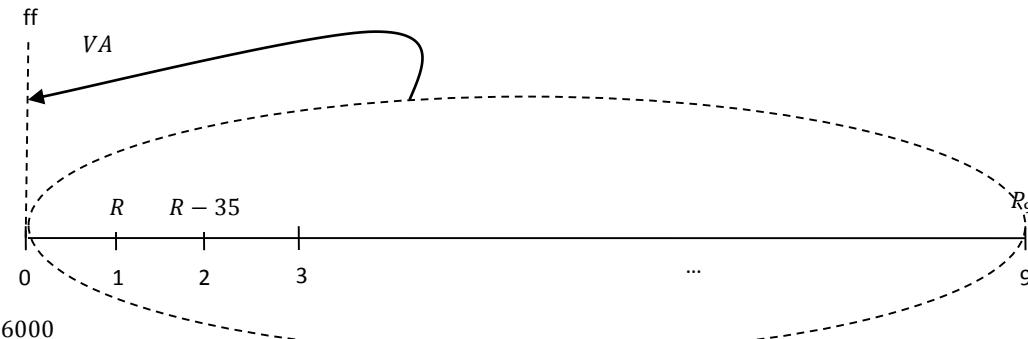
$$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right]$$

$$VA = \frac{160 \left[1 - \left(1 + \frac{24}{1200} \right)^{-12} \right]}{\frac{24}{1200}} + \frac{35}{\frac{24}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{24}{1200} \right)^{-12}}{\frac{24}{1200}} - \frac{12}{\left(1 + \frac{24}{1200} \right)^{12}} \right]$$

$$VA = 1.692,05 + 1.948,49$$

$$VA = \$ 3.640,55$$

8. Un artículo de contado vale \$ 7000, a plazos exigen de cuota inicial \$ 1000 y el resto para ser cancelados con 9 cuotas mensuales de tal manera que cada cuota decrezca en \$ 30 respecto de la anterior. Si el interés de financiación es del 12% anual capitalizable mensualmente encontrar el valor de la última cuota.



VA: Valor Actual de la anualidad vencida con gradiente creciente.

$$VA = 6.000,00$$

$$\frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right] = 6000$$

$$\frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-9} \right]}{\frac{12}{1200}} - \frac{35}{\frac{12}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-9}}{\frac{12}{1200}} - \frac{9}{\left(1 + \frac{12}{1200} \right)^9} \right] = 6000$$

$$\frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-9} \right]}{\frac{12}{1200}} - 1179,36 = 6000$$

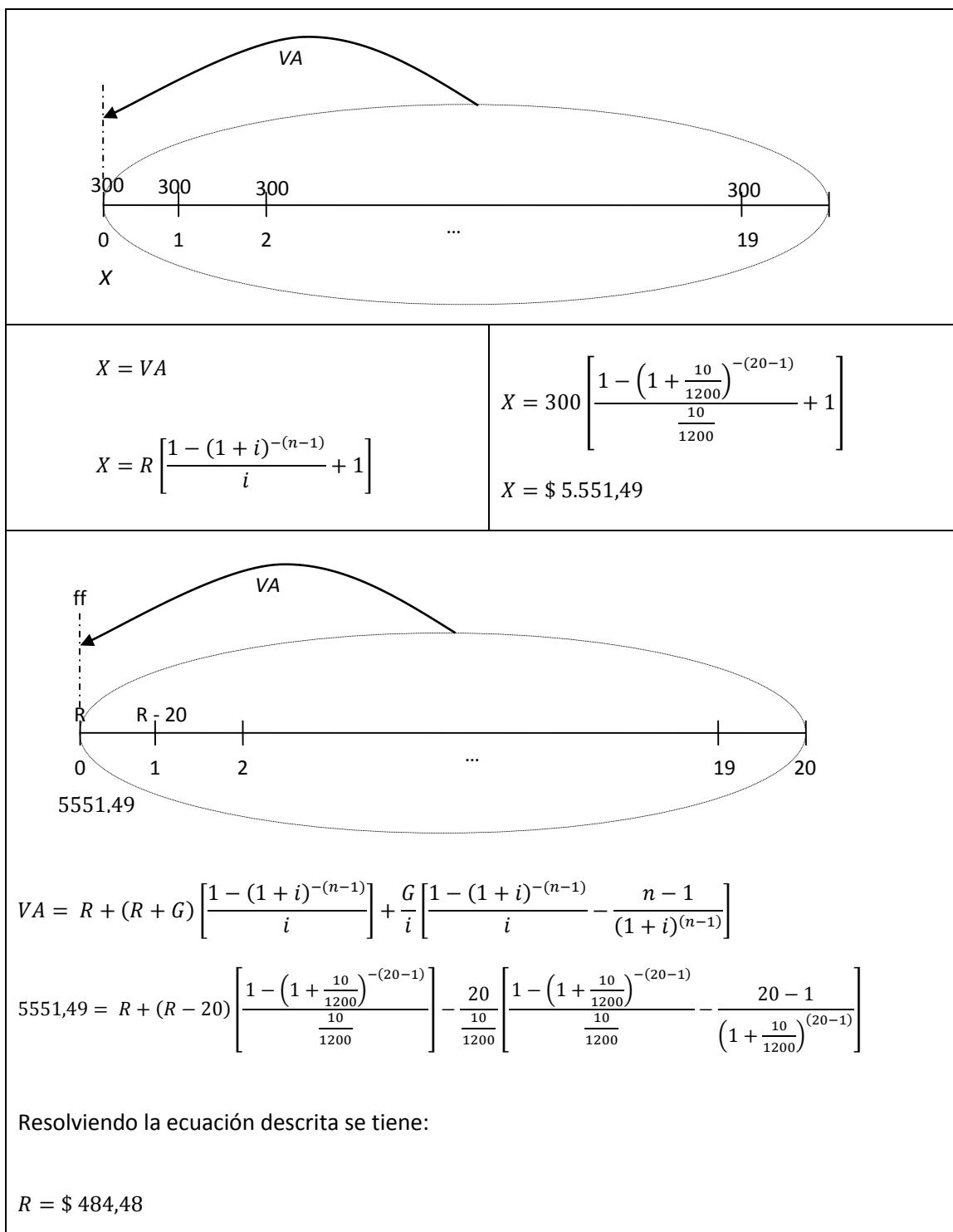
$$R = \frac{7179,36 \times \frac{12}{1200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-9} \right]} = \$ 838,12$$

$$P_k = R + (n - 1)G$$

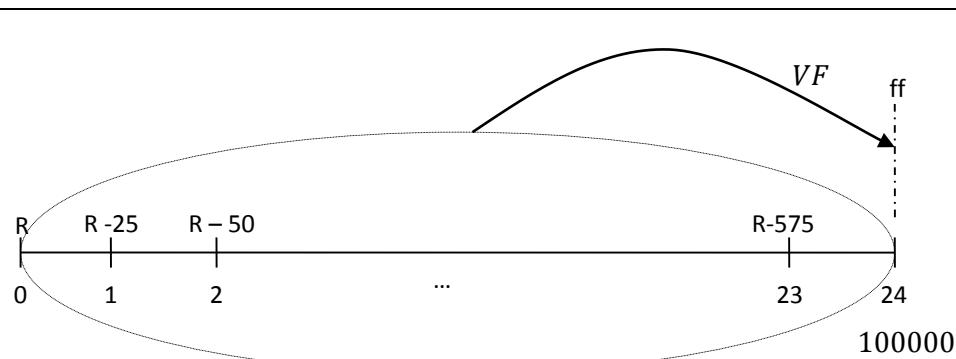
$$P_9 = 838,12 + (9 - 1)(-35)$$

$$P_9 = \$ 558,12$$

9. Un producto se debe cancelar en 20 cuotas mensuales iguales anticipadas de \$ 300 y un interés de financiación del 10% anual capitalizable mensualmente. Si desea cambiar esta forma de pago por 20 pagos variables que tengan forma de gradiente aritmético decreciente igual a \$ 20, hallar el valor del primer pago, si este se realiza de inmediato.



10. Dentro de seis años una empresa requiere renovar sus activos por un valor de \$ 100000; para lo cual es necesario establecer un fondo con depósitos trimestrales en una financiera que reconoce el 4% capitalizable trimestralmente, si el primer depósito se realiza el día de hoy y los siguientes depósitos decrecen en \$ 25, encuentre el valor del depósito inicial realizado este día.



VF : Valor futuro del gradiente aritmético decreciente anticipado.

$$VF = 100000$$

$$R(1+i)^n + (R+G) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1 \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1 - (n-1)(1+i) \right] = 100000$$

$$R \left(1 + \frac{4}{400}\right)^{24} + (R - 25) \left[\frac{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{24} - 1}{\frac{4}{400}} - 1 \right] - \frac{25}{\frac{4}{400}} \left[\frac{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{24} - 1}{\frac{4}{400}} - 1 - (24-1)\left(1 + \frac{4}{400}\right) \right] = 100000$$

Resolviendo la ecuación descrita se tiene:

$$R = \$ 3.946,23$$

GRADIENTE GEOMÉTRICO

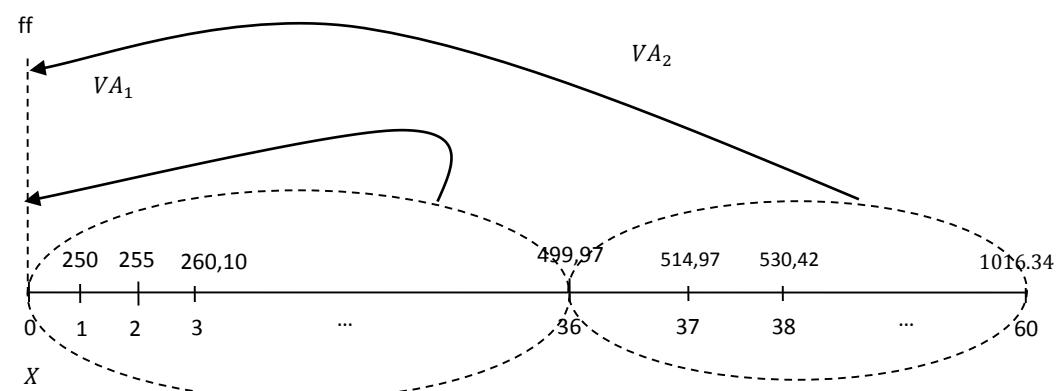
11. Encontrar Hallar el valor de un préstamo financiado al 10% convertible mensualmente que se debe pagar con 24 cuotas mensuales vencidas, siendo de \$ 1000 la primera y las demás los $\frac{4}{5}$ de la correspondiente cuota anterior. Hallar también el valor de las cuotas canceladas en los meses 23 y 24.

<p>Cálculo del gradiente porcentual</p> $R_n = R(1 + p)^{n-1}$ $800 = 1000(1 + p)^1$ $1 + p = \frac{800}{1000}$ $p = \frac{800}{1000} - 1$ $p = -20\%$	<p>Pago N° 23</p> $R_n = R(1 + p)^{n-1}$ $R_{23} = R \left(1 - \frac{20}{100}\right)^{22}$ $R_{23} = 1000 \left(1 - \frac{20}{100}\right)^{22}$ $R_{23} = \$7,38$	<p>Pago N° 24</p> $R_n = R(1 + p)^{n-1}$ $R_{24} = R \left(1 - \frac{20}{100}\right)^{23}$ $R_{24} = 1000 \left(1 - \frac{20}{100}\right)^{23}$ $R_{24} = \$5,90$
<p>Ecuación de valor:</p> $X = VA$ $X = R \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i}\right)^n}{i - p} \right] \quad \text{si } i \neq p$ $X = 1000 \left[\frac{1 - \left(\frac{1 - \frac{20}{100}}{1 + \frac{10}{1200}}\right)^{24}}{\frac{10}{1200} + \frac{20}{100}} \right]$ $X = \$ 4.781,43$		

12. Una persona decide ahorrar en una corporación que paga un interés del 4% capitalizable mensualmente los siguientes valores: \$ 1000 el primer mes, 900 el segundo mes, \$ 810 el tercer mes y así sucesivamente por espacio de dos años. Hallar la cantidad que tendrá acumulada al final de este tiempo.

<p>Cálculo del gradiente porcentual</p> $R_n = R(1 + p)^{n-1}$ $900 = 1000(1 + p)^1$ $1 + p = \frac{900}{1000}$ $p = \frac{900}{1000} - 1$ $p = -10\%$	<p>Ecuación de valor:</p> $X = VF$ $X = R \left[\frac{(1 + i)^n - (1 + p)^n}{i - p} \right] \quad \text{si } i \neq p$ $X = 1000 \left[\frac{\left(1 + \frac{4}{1200}\right)^{24} - \left(1 - \frac{10}{100}\right)^{24}}{\frac{4}{1200} + \frac{10}{100}} \right]$ $X = \$ 9.710,10$

13. Un artículo se compraría a crédito mediante cuotas mensuales variables durante cinco años; \$ 250 es el valor de la primera cuota y de allí en adelante aumentarían en el 2% cada mes, hasta finales del tercer año y a partir de esa fecha aumentarían en el 3% cada mes. Se desea pagar mediante dos pagos iguales, el primero hoy y el otro dentro de 3 años. Determinar el valor de los pagos si la tasa de interés es del 10% convertible mensualmente.



VA_1 : Valor Actual del gradiente geométrico creciente vencido.

VA_2 : Valor Actual del gradiente geométrico creciente diferido.

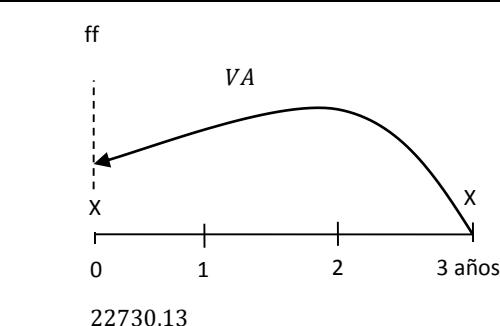
$$X = VA_1 + VA_2$$

$$X = R \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i} \right)^n}{i - p} \right] + \frac{R}{(1+i)^k} \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i} \right)^n}{i - p} \right] \quad \text{si } i \neq p$$

$$X = 250 \left[\frac{1 - \left(\frac{1+\frac{2}{100}}{1+\frac{10}{1200}} \right)^{36}}{\frac{10}{1200} - \frac{2}{100}} \right] + \frac{514.97}{\left(1 + \frac{10}{1200} \right)^{36}} \left[\frac{1 - \left(\frac{1+\frac{3}{100}}{1+\frac{10}{1200}} \right)^{24}}{\frac{10}{1200} - \frac{3}{100}} \right]$$

$$X = 10994,26 + 11735,87$$

$$X = \$ 22.730,13$$



Ecuación de valor:

$$X + VA = 22.730,13$$

$$X + \frac{M}{(1+i)^n} = 22730,13$$

$$X + \frac{X}{\left(1 + \frac{10}{1200} \right)^{36}} = 22730,13$$

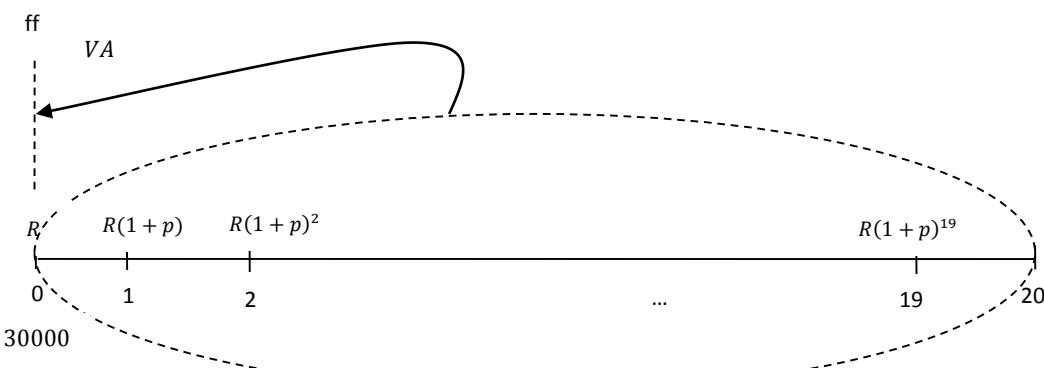
$$X \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{1200} \right)^{36}} \right] = 22730,13$$

$$X = \frac{22730,13}{\left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{1200} \right)^{36}} \right]}$$

$$X = \$ 13.050,25$$

Dos pagos iguales de \$ 13.050,25

14. Una entidad financiera presta a un cliente \$ 30000, con un interés del 8% capitalizable trimestralmente. El deudor tiene un plazo de 5 años para amortizar la deuda, mediante pagos trimestrales, suponiendo que la primera cuota es con pago de inmediato y que se estipula un reajuste trimestral del 2%, Cuál debe ser el valor de la primera cuota, para cancelar la deuda?



VA: Valor actual del gradiente geométrico creciente vencido ($n = 19$)

Tasa periódica:

$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = 2\%; \quad p = 2\%$$

Ecuación de valor:

$$30000 - R = VA$$

$$30000 - R = \frac{nR}{1+i} \quad \text{si } i = p$$

$$30000 = R + \frac{nR}{1+i}$$

Reemplazando con los valores del problema se tiene:

$$30000 = R + \frac{nR(1+p)}{1+i}$$

Tomando en cuenta que $i = p$

$$30000 = R + nR$$

$$30000 = R(1+n)$$

$$R = \frac{30000}{(1+n)}$$

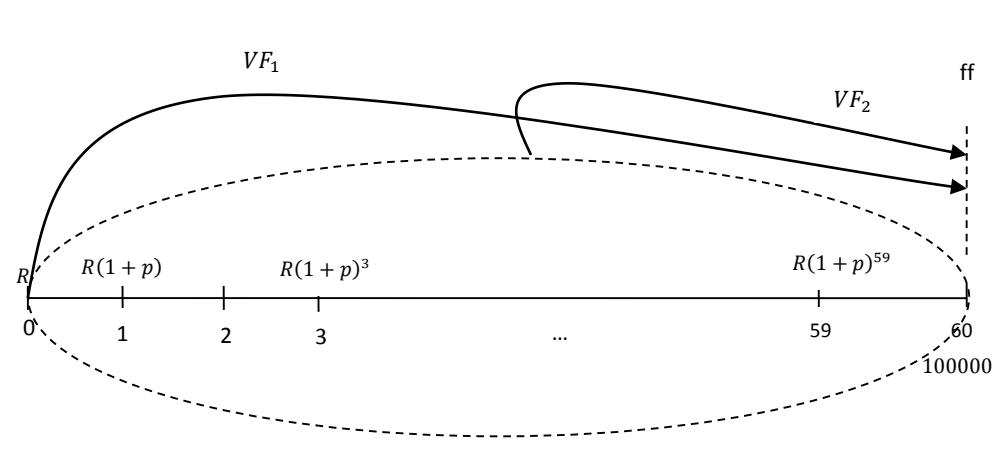
$$R = \frac{30000}{1+20}$$

$$R = \$1.528,47$$

15. El día de hoy se adquiere una deuda de \$ 40000 a 5 años plazo, pagadera en cuotas semestrales que aumentan cada semestre en 3%; si se sabe que el primer pago se realizará dentro de 18 meses y que la tasa de interés aplicada es el 6% capitalizable semestralmente, calcular el valor del primer pago.

<p>VA: Valor Actual del gradiente geométrico creciente diferido ($k = 2$)</p>	
<p>Tasa periódica:</p> $i = \frac{j}{m} = \frac{6\%}{2} = 3\%; \quad p = 3\%$ <p>Ecuación de valor:</p> $40000 = VA$ $40000 = \frac{nR}{(1+i)(1+i)^k} \quad \text{si } i = p$ $40000 = \frac{nR}{(1+i)^{k+1}}$	$40000 = \frac{nR}{(1+i)^{k+1}}$ $R = \frac{40000 \times (1+i)^{k+1}}{n}$ $R = \frac{40000 \times \left(1 + \frac{6}{200}\right)^{2+1}}{8}$ $R = \$ 5.463,64$

16. Diez estudiantes recién ingresados piensan asociarse y crear un fondo de ahorros mensuales de tal forma que al culminar sus 5 años de estudio posean un capital de \$100000 con el propósito de fundar su propia empresa. Sus ingresos les permiten incrementar el ahorro mensual en 2% y la entidad financiera les ofrece un interés 6% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuánto deberá ser el ahorro mensual inicial de cada uno de los estudiantes, si los depósitos se realizan al inicio de cada período?



VF_1 : Valor futuro del pago único inicial

VF_2 : Valor futuro del gradiente geométrico creciente vencido.

$$VF_1 + VF_2 = 100000$$

$$R(1+i)^n + R(1+p) \left[\frac{(1+i)^n - (1+p)^n}{i-p} \right] (1+i) = 100000$$

$$R(1+i)^{60} + R(1+p) \left[\frac{(1+i)^{59} - (1+p)^{59}}{i-p} \right] (1+i) = 100000$$

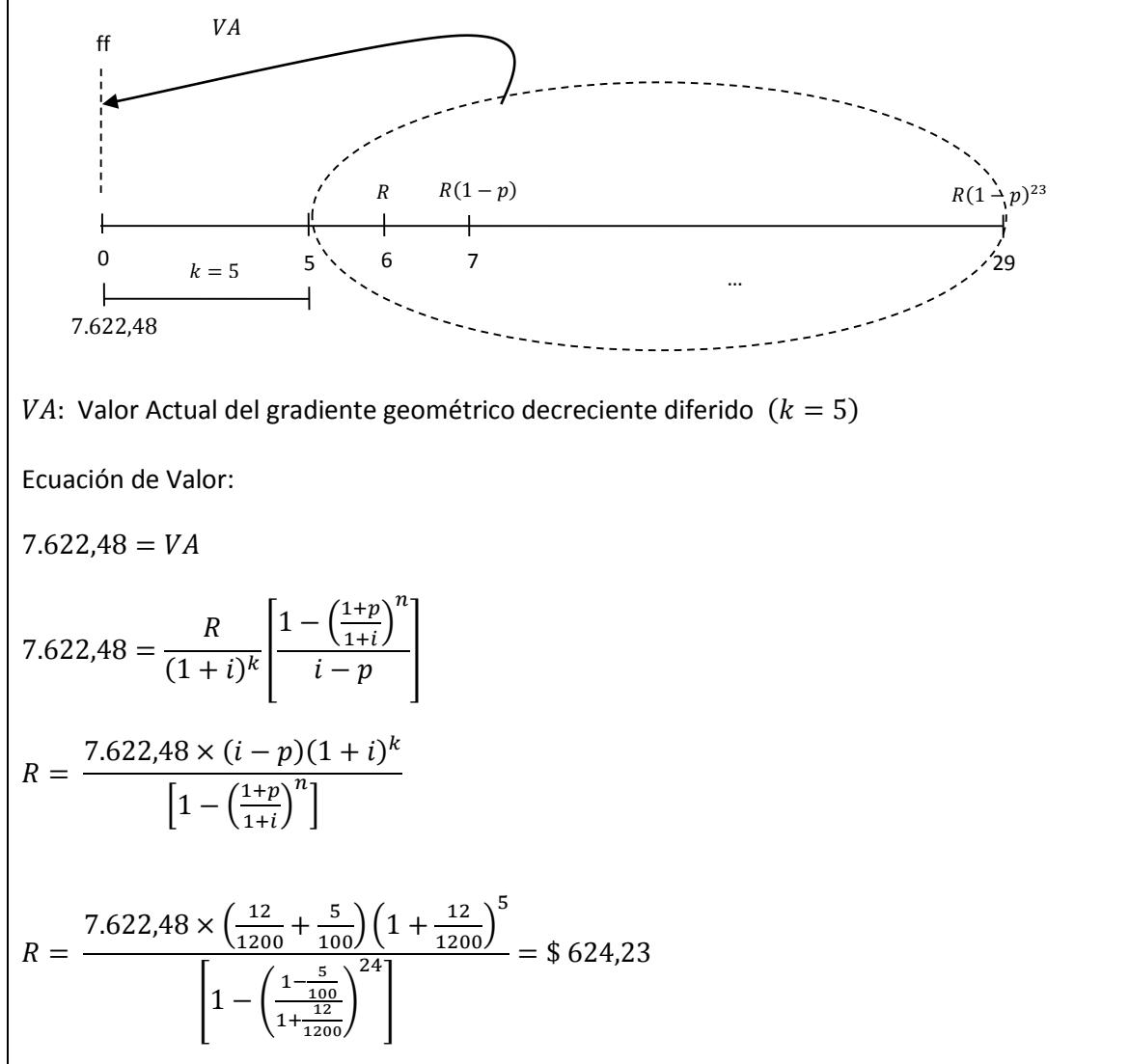
$$R(1+i) \left[(1+i)^{59} + \frac{(1+p)}{(i-p)} [(1+i)^{59} - (1+p)^{59}] \right] = 100000$$

$$R = \frac{100000}{\left(1 + \frac{6}{1200}\right) \left[\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{59} + \frac{\left(1 + \frac{2}{100}\right)}{\left(\frac{6}{1200} - \frac{2}{100}\right)} \left[\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{59} - \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{59} \right] \right]} = 772,46$$

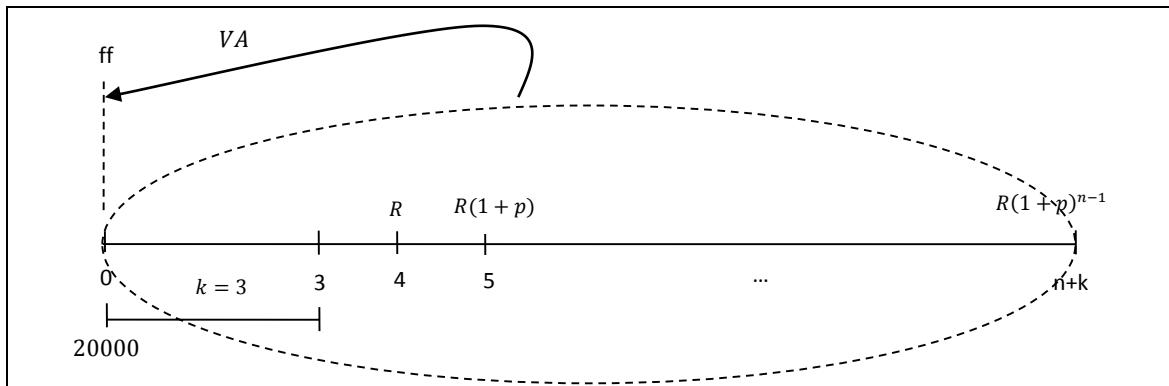
Cada estudiante deberá hacer un depósito inicial de \$ 77,25

17. Sustituir una obligación que consta de tres pagarés así: \$ 2000 para dentro de tres meses; \$ 2850 para dentro de 9 meses y \$ 3200 para dentro de un año y medio, todos con un interés del 6 % capitalizable trimestralmente, por su equivalente en cuotas mensuales que disminuyan en el 5% cada mes, debiendo pagarse en 24 cuotas, la primera después de 6 meses; sabiendo que para este caso se cobrará un interés del 12% convertible mensualmente.

<p>Ecuación de valor:</p> $X = VA_1 + VA_2 + VA_3$	$X = \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n}$ $X = \frac{2000}{\left(1+\frac{6}{400}\right)^1} + \frac{2850}{\left(1+\frac{6}{400}\right)^3} + \frac{3200}{\left(1+\frac{6}{400}\right)^6}$ $X = 1970,44 + 2.725,50 + 2.926,54$ $X = \$ 7.622,48$
--	---



18. Si se deposita hoy \$ 20000 en una corporación que reconoce el 8% capitalizable trimestralmente, cuantos retiros trimestrales se podrán hacer de tal manera que cada retiro sea el 4% mayor que el retiro anterior, si se sabe que el valor del primer retiro es de \$ 1000 y se lo realizará luego de 1 año. Determine además el valor del retiro adicional realizado con el último retiro de manera que el fondo se liquide.



VA: Valor Actual del gradiente geométrico decreciente diferido ($k = 5$)

Ecuación de Valor:

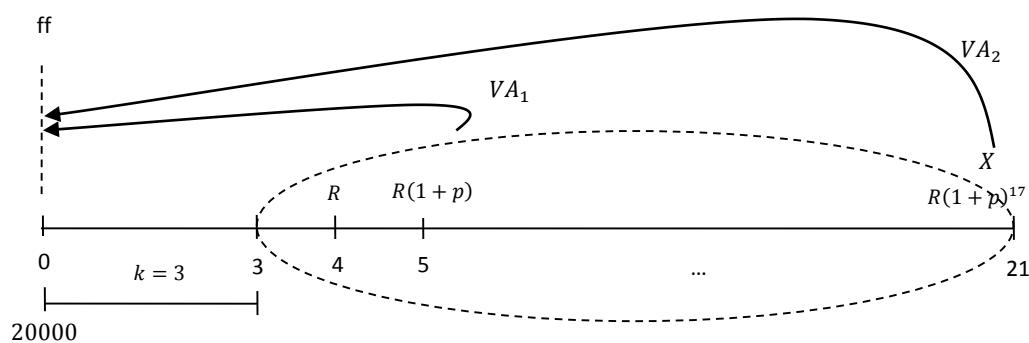
$$20000 = VA$$

$$20000 = \frac{R}{(1+i)^k} \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i}\right)^n}{i-p} \right]$$

$$n = \frac{\log \left[1 - \frac{20000 \times (1+i)^k (i-p)}{R} \right]}{\log \left[\frac{1+p}{1+i} \right]}$$

$$n = \frac{\log \left[1 - \frac{20000 \times (1+\frac{8}{400})^3 (\frac{8}{400} - \frac{4}{100})}{1000} \right]}{\log \left[\frac{1 + \frac{4}{100}}{1 + \frac{8}{400}} \right]}$$

$n = 18.22 \rightarrow 18$ pagos completos



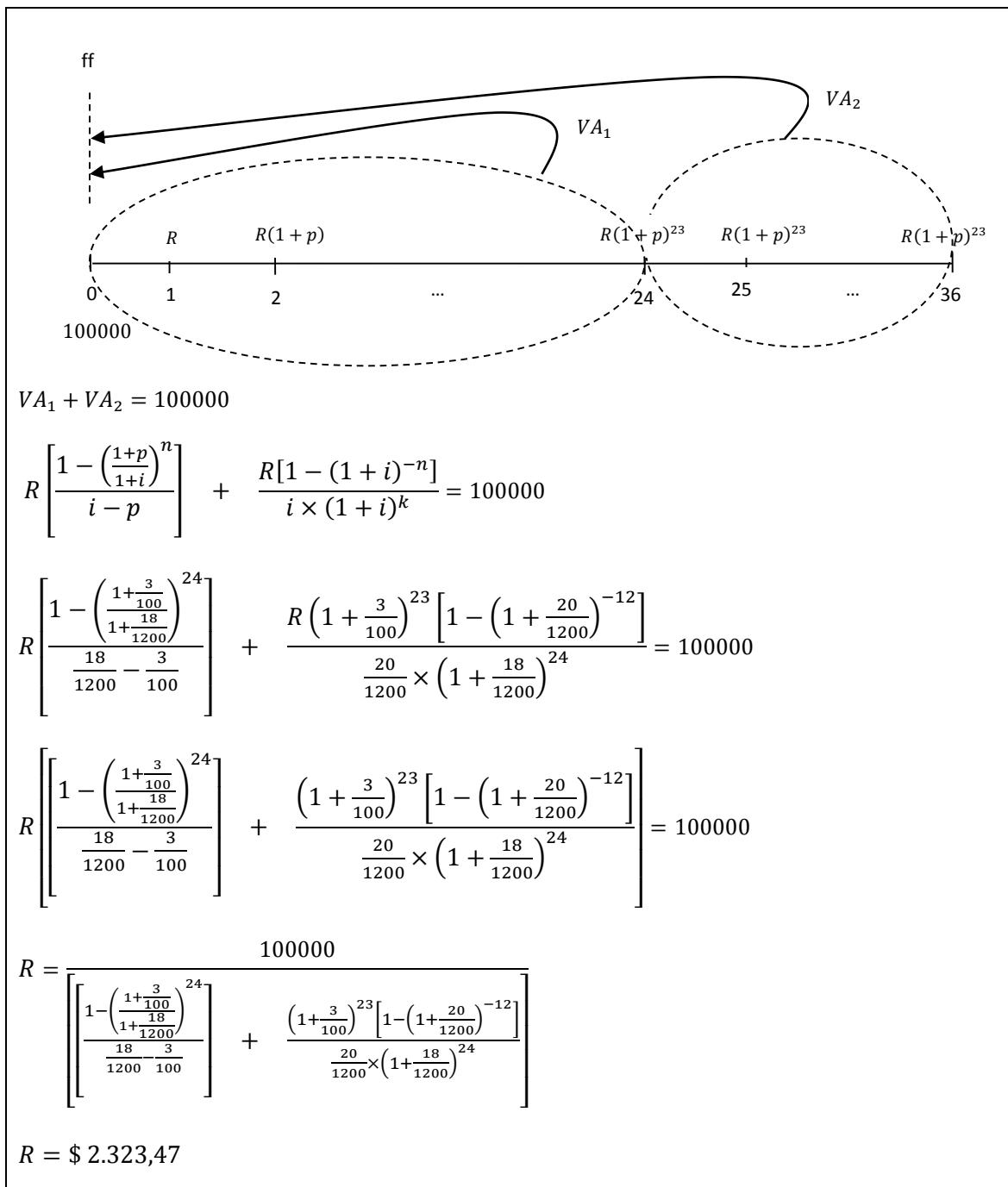
$$VA_1 + VA_2 = 20000$$

$$\frac{R}{(1+i)^k} \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i}\right)^n}{i-p} \right] + \frac{M}{(1+i)^n} = 20000$$

$$\frac{1000}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^3} \left[\frac{1 - \left(\frac{1 + \frac{4}{100}}{1 + \frac{8}{400}}\right)^{18}}{\frac{8}{400} - \frac{4}{100}} \right] + \frac{X}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{21}} = 20000$$

$$X = \$ 434,81$$

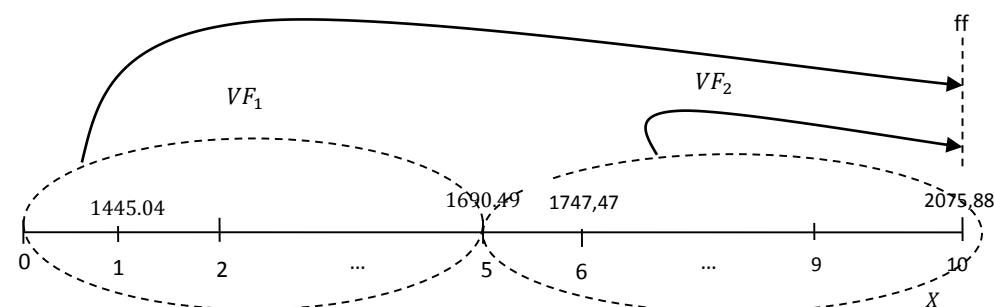
19. El día de hoy se contrae una deuda de \$ 100000 que se cancelará en tres años con cuotas mensuales vencidas que aumentan en el 3% cada mes hasta el final del segundo año y de allí en adelante permanezcan constantes. Si la tasa de interés será del 18% convertible mensualmente durante los dos primeros años y del 20% anual capitalizable mensualmente, de allí en adelante; encuentre el valor de la primera cuota.



20. Un profesional recién egresado de la universidad se vincula a una empresa donde empieza devengando un salario de \$ 1150 mensuales el primer año; la empresa le garantiza un aumento anual del 4% y este empleado decide ahorrar cada mes la décima parte de su salario mensual en una institución bancaria que paga el 10 % capitalizable mensualmente durante los cinco primeros años y el 12% convertible mensualmente de allí en adelante, ¿Cuánto tendrá ahorrado este profesional al cabo de diez años?

Nota preliminar: El ahorro mensual, al final de cada año genera un valor acumulado, el valor futuro de esta anualidad vencida, se ha determinado para cada año utilizando el programa Excel y se indica en la siguiente tabla:

Año	Ahorro	Tasa	núm. pagos	Valor futuro	Año	Ahorro	Tasa	núm. pagos	Valor futuro
1	115,00	0,83%	12	\$ 1.445,04	6	139,92	1,00%	12	\$ 1.774,47
2	119,60	0,83%	12	\$ 1.502,84	7	145,51	1,00%	12	\$ 1.845,45
3	124,38	0,83%	12	\$ 1.562,96	8	151,33	1,00%	12	\$ 1.919,27
4	129,36	0,83%	12	\$ 1.625,47	9	157,39	1,00%	12	\$ 1.996,04
5	134,53	0,83%	12	\$ 1.690,49	10	163,68	1,00%	12	\$ 2.075,88



Tasa equivalente (anual) $j = 10\%, \text{ mensual}$

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{10}{1200} \right)^{12/1} - 1 \right] \times 100 = 10.47\%$$

Tasa equivalente (anual) $j = 12\%, \text{ mensual}$

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{12/1} - 1 \right] \times 100 = 12.68\%$$

VF_1 : Valor futuro del gradiente geométrico al 10.47%

VF_2 : Valor futuro del gradiente geométrico al 12.68%.

$$X = VF_1 + VF_2$$

$$X = R \left[\frac{(1+i)^n - (1+p)^n}{i-p} \right] (1+i)^n + R \left[\frac{(1+i)^n - (1+p)^n}{i-p} \right]$$

$$X = 1445.04 \left[\frac{\left(1 + \frac{10.47}{100} \right)^5 - \left(1 + \frac{4}{100} \right)^5}{\frac{10.47}{100} - \frac{4}{100}} \right] \left(1 + \frac{12.68}{100} \right)^5 + 1774.47 \left[\frac{\left(1 + \frac{12.68}{100} \right)^5 - \left(1 + \frac{4}{100} \right)^5}{\frac{12.68}{100} - \frac{4}{100}} \right]$$

$$X = 17389.20 + 12263.29$$

$$X = \$ 29.652,49$$

13.8. PROBLEMAS PROPUESTOS

GRADIENTE ARITMÉTICO

1. Una empresa produce 6000 unidades de un artículo al año. El precio por unidad es de \$ 12.50 el primer año, de \$ 13.00 en el segundo año, de \$ 13.50 en el tercer año y así sucesivamente. El costo por unidad del artículo es de \$ 8.00, y la empresa invierte anualmente la cuarta parte de las utilidades en una institución que paga el 3%. ¿Cuánto tendrá ahorrado la empresa al cabo de nueve años?

R: \$ 97.551,72

2. Una fábrica tiene costos fijos de \$ 600 mensuales y costos variables de \$ 15 por unidad. Durante los primeros 6 meses no hay producción porque este tiempo se dedicará a pruebas y ajustes. En el mes 7 se iniciará la producción con 300 unidades y cada mes la producción aumentará en 200 unidades hasta llegar al tope de 2500 al mes. Si se espera vender la fábrica al final de 2 años, calcular el valor actual del costo de producción, suponga una tasa del 12% capitalizable mensualmente.

R: \$ 413.325,85

3. Un producto de contado vale \$ 80000. A plazos financian el 70% del valor de contado el cual se debe pagar así: 10 cuotas mensuales, la primera de \$ 3000, la segunda de \$ 3200 y así sucesivamente. Si la primera cuota se paga 4 meses después de entregada la cuota inicial y además se pagan dos cuotas extras iguales en los meses 6 y 9, hallar el valor de estas cuotas extras si el interés de financiación es del 8% capitalizable mensualmente.

R: \$ 9.561,43

4. Dentro de un año se debe cancelar \$ 5000 como cuota inicial de un apartamento; para tal fin se efectúan depósitos mensuales empezando hoy con un ahorro de \$ 400. Cuál debe ser el incremento constante en las cuotas posteriores si por los depósitos reconocen un interés del 18% capitalizable mensualmente?.

R: \$ 10,01

5. Dentro de presupuesto que el señor Arteaga tiene para el próximo año, espera ahorrar al final de cada trimestre \$ 1700 e incrementar periódicamente dicha suma en \$300. ¿Cuánto tendrá ahorrado al final del año el señor Arteaga, si el banco le ofrece un interés del 4.5% capitalizable trimestral?.

R: \$ 8.729,15

6. Un préstamo se debe cancelar a 5 años y un interés de financiación del 8% capitalizable semestralmente. Si las cuotas son mensuales e iguales dentro de cada semestre pero, semestre a semestre decrecen en \$ 150, encontrar el valor de la primera cuota si el préstamo era de \$ 30000.

R: Pago Equivalente mensual: \$ 709,16; valor equivalente mensual del gradiente: \$ -24,59

7. Se requieren dentro de 4 años \$ 48000; para este objetivo se construirá un fondo mediante cuotas trimestrales iguales dentro de cada año, pero, año tras año crecen en \$ 400. Si el fondo reconoce el 8% capitalizable trimestralmente, encontrar el valor de la cuota trimestral para el primer año, tomando en cuenta que los depósitos son anticipados.

R: \$ 1.964,25

8. ¿Qué depósito inicial se debe realizar el día de hoy en un banco que reconoce el 4% capitalizable mensualmente y luego, al final del primer mes un depósito de \$ 150 que aumenta cada mes en \$ 10 para que pueda comprar después de 3 años, un activo que hoy cuesta \$ 18.000 y que aumenta de valor en 1% mensual.

R: \$ 11.959,78

9. Una máquina produce una utilidad de 10000 durante el primer año, sin embargo, la utilidad de la máquina disminuye \$ 350 cada año debido al desgaste. Calcular el total de las ganancias suponiendo que la máquina va a trabajar por 10 años. La tasa de interés es el 5%.

R: \$ 107.733,68

10. Determinar el valor de contado de un activo que se adquiere así: una cuota inicial de \$ 450; 18 cuotas mensuales iguales de \$ 400 cada una, y luego cuotas mensuales de \$ 150 la primera, \$ 160 la segunda, \$ 170 la tercera y así sucesivamente hasta finales del cuarto año; finalmente, seis meses después de la última de estas cuotas, un pago equivalente al 15% del valor de contado; la tasa de interés es del 12% nominal capitalizable mensualmente.

R: \$ 12.802,98

GRADIENTE GEOMÉTRICO

11. Un empleado abre una cuenta de ahorros hoy con \$ 250 y dentro de tres meses empieza a hacer depósitos trimestrales de \$ 40, \$ 42, \$ 44,10, \$ 46,31, y así sucesivamente. Si la cuenta de ahorros paga el 6% capitalizable trimestralmente, hallar la cantidad acumulada que el empleado tendrá en su cuenta dentro de tres años.

R: \$ 984,89

12. Se necesita reponer una máquina dentro de 5 años y se estima que su precio en dicho momento será \$ 3000. Con tal fin se desea crear un fondo en una corporación que pagará un interés del 6% capitalizable semestralmente. Hallar el valor del depósito que se debe efectuar dentro de seis meses si los depósitos se incrementan en 1.5% con respecto al depósito anterior; encuentre además el valor de los pagos 5 y 8.

R: \$ 245,40; \$ 260,46; \$ 272,35

13. Hallar el valor de contado de un artículo que, financiado, puede adquirirse así: una cuota inicial equivalente al 30% del valor de contado y el resto a 15 meses con cuotas que aumenten cada mes en el 2%, sabiendo que la primera será de \$ 230 y la tasa de interés será del 24% capitalizable mensualmente.

R: \$4.831,93

14. Se va a financiar una deuda de \$ 50000 por medio de 36 cuotas mensuales que crecen el 1.18% cada mes, y una cuota extraordinaria por valor de \$ 3000 en el mes 24. Si la tasa de interés es del 9 % capitalizable mensualmente, calcule el valor de la primera cuota.

R: \$ 1232,46

15. Luis adquiere el día de hoy un crédito por \$ 60000 a pagar en tres años con cuotas trimestrales que aumenten en el 2% cada trimestre hasta el final del segundo año y de allí en adelante permanezcan constantes; si la tasa de interés será del 9% capitalizable trimestralmente, encuentre el valor de la primera cuota a pagar exactamente dentro de un año.

R: \$ 5.265,05

16. Se ofrece la administración de un restaurante durante un año y se garantiza que comprarán exactamente 6000 almuerzos mensuales durante ese año, a razón de \$ 5 cada uno, pagaderos en un solo pago en al final del año sin intereses: La persona calcula que el costo de los insumos de cada almuerzo será de \$ 2 los cuales deberán ser adquiridos y pagados al principio de cada mes y su valor aumentará cada mes un 5%; por otro lado, el costo mensual de mano de obra se considera estable en \$ 6500 mensuales y además, se requerirá una inversión inicial de \$ 10000 para la adecuación del restaurante. Suponiendo un interés mensual del 10% conveniente mensualmente. Calcular cuál será el valor de su ganancia.

R: \$ 77.320,55

17. Una fábrica debe importar 80 toneladas mensuales de materia prima pagándola al principio de cada mes a razón de 200 US\$ la tonelada, con un incremento del costo mensual de 1.25% con relación al precio anterior; hallar el valor total de las importaciones de la fábrica en el transcurso de un año. Suponga una tasa del 8% anual capitalizable mensualmente.

R: \$ 198.238,96

18. Una deuda se debe cancelar con 18 cuotas mensuales tales que cada cuota decrece en el 1,24% respecto de la cuota anterior; si el interés de financiación es del 10% anual capitalizable mensualmente y el valor de la primera cuota es de \$ 400:

- Encuentre el valor del préstamo.
- Hallar el saldo insoluto una vez cancelada la cuota 10
- Si al pagar la cuota 10 se solicita refinanciar el saldo existente en dicho momento para cancelarlo con 4 cuotas trimestrales, la primera de inmediato, con un interés del 10% anual capitalizable trimestralmente determine el valor de la nueva cuota.

R: a) \$ 6.019,39; b) 2.607,76; c) \$ 676,28

19. Se necesita pedir un préstamo para la compra de un vehículo que vale \$ 25000; se plantea realizar pagos semestrales crecientes al 5% durante 5 años; la Corporación Financiera aplica un interés del 10% capitalizable semestralmente. Encuentre el valor de la primera y la última cuota del préstamo?

R: \$ 2.625,00; \$ 4.072,24

20. Una empresa vende cada mes 500 unidades de su producto a un precio de \$100 por unidad durante el primer año, a \$110 por unidad durante el segundo año, a \$121 por unidad durante el tercer año y así sucesivamente. La empresa deposita la décima parte de su ingreso mensual en una corporación financiera que paga el 6% capitalizable mensualmente. Hallar el valor total que la empresa tendrá acumulado al cabo de siete años.

R:\$ 689.405,68

14

AMORTIZACIÓN VARIABLE

14.1. INTRODUCCIÓN

En la Unidad XI se revisaron los conceptos y técnicas para el proceso financiero de la extinción de una deuda mediante pagos periódicos iguales; se establecieron también los procesos de cálculo para los casos en que se presentaba alguna modificación en la tasa periódica.

En este capítulo se van a plantear modelos para extinción de deudas mediante el proceso financiero de amortización en condiciones variables, con variaciones de diversa índole, tales como: variación en la tasa y variación en el valor de las cuotas.

La solución matemática, realizada manualmente resulta una tarea excesivamente laboriosa, lo que conllevaría una cantidad de tiempo considerable; por tal razón se va a aplicar el uso de la herramienta Informática **"BUSCAR OBJETIVO"** que se encuentra dentro del programa de Hoja electrónica de cálculo Excel.

14.2. LA HERRAMIENTA BUSCAR OBJETIVO

La herramienta Buscar objetivo es una aplicación de la hoja electrónica de cálculo Excel que devuelve un valor, por ejemplo: el valor del pago periódico que permite cumplir con algún objetivo previamente establecido, por ejemplo la extinción de la deuda (MICROSOFT Office, 1994).

El uso de esta herramienta requiere previamente la elaboración en Excel de la Tabla de Amortización, enlazando las celdas de tal manera que la herramienta busque el valor que permita, en el caso de la extinción de una deuda, cumplir con el objetivo: “el saldo después del último pago sea igual cero”.

En la siguiente imagen se puede apreciar la construcción de la tabla de Amortización en una Hoja de cálculo del Programa Excel, nótese que se ha agregado la Columna Tasa de interés:

	A Período	B Saldo Insoluto antes del pago	C Tasa de interés	D Interés periódico vencido	E Pago periódico	F Abono al Capital	G Saldo insoluto después del pago	H
1								
2	1							
3	2							
4	3							
5	4							
6	5							
7	6							
8	7							
9	8							
10								
11								

En seguida se procede a ingresar la información disponible; por ejemplo:

- ✓ El valor de la deuda, deberá ubicarse en la celda correspondiente al Saldo Insoluto antes del primer pago.
- ✓ La tasa de Interés, en cada una de las celdas de la columna correspondiente.
- ✓ Las fórmulas de cálculo en las respectivas columnas.

De esta manera, la estructura interna de la tabla deberá quedar de esta manera:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Período	Saldo Insoluto antes del pago	Tasa de interés	Interés periódico vencido	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo insoluto después del pago	
2	1	DEUDA	i %	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2	
3	2	=G2	i %	=B3*C3	=E2	=E3-D3	=B3-F3	
4	3	=G3	i %	=B4*C4	=E3	=E4-D4	=B4-F4	
5	4	=G4	i %	=B5*C5	=E4	=E5-D5	=B5-F5	
6	5	=G5	i %	=B2*C6	=E5	=E6-D6	=B6-F6	
7	6	=G6	i %	=B2*C7	=E6	=E7-D7	=B7-F7	
8	7	=G7	i %	=B2*C8	=E7	=E8-D8	=B8-F8	
9	8	=G8	i %	=B2*C9	=E8	=E9-D9	=B9-F9	
10								
11								
12								

Debe tomar en cuenta que el valor del pago (Celda E2, resaltada) no se conoce y es lo que se debe encontrar; además los pagos son iguales.

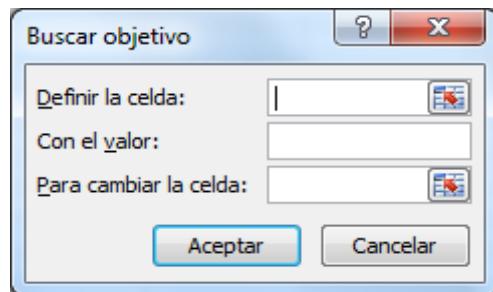
Si por ejemplo se trata de una deuda de \$ 40000, al 5% a pagar en 8 años se tendrá:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Período	Saldo Insoluto antes del pago	Tasa de interés	Interés periódico vencido	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo insoluto después del pago	
2	1	40,000.00	5%	2,000.00		-2,000.00	42,000.00	
3	2	42,000.00	5%	2,100.00	0	-2,100.00	44,100.00	
4	3	44,100.00	5%	2,205.00	0	-2,205.00	46,305.00	
5	4	46,305.00	5%	2,315.25	0	-2,315.25	48,620.25	
6	5	48,620.25	5%	2,431.01	0	-2,431.01	51,051.26	
7	6	51,051.26	5%	2,552.56	0	-2,552.56	53,603.83	
8	7	53,603.83	5%	2,680.19	0	-2,680.19	56,284.02	
9	8	56,284.02	5%	2,814.20	0	-2,814.20	59,098.22	
10								
11								

Un vez que la tabla se ha elaborado, entonces se puede aplicar la herramienta Buscar objetivo, la misma que se la activa:

- Pestaña Datos, Grupo Herramienta de datos, opción Análisis y si, Buscar objetivo (versión 2010).
- Pestaña Datos, Grupo Herramienta de datos, opción Análisis de hipótesis, Buscar objetivo (versión 2013)

Con cualquiera de las dos opciones, se desplegará la siguiente tarjeta:



14.3. APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA DE EXCEL: Buscar objetivo

Aplicando la herramienta Buscar objetivo en el ejemplo propuesto se tiene:

A	B	C	D	E	F	G	H
1	Período	Saldo Insoluto antes del pago	Tasa de interés	Interés periódico vencido	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo insoluto después del pago
2	1	40,000.00	5%	2,000.00	0	-2,000.00	42,000.00
3	2	42,000.00	5%	2,100.00	0	-2,100.00	44,100.00
4	3	44,100.00	5%	2,205.00	0	-2,205.00	46,305.00
5	4	46,305.00	5%	2,315.25	0	-2,315.25	48,620.25
6	5	48,620.25	5%	2,431.01	0	-2,431.01	51,051.26
7	6	51,051.26	5%	2,552.56	0	-2,552.56	53,603.83
8	7	53,603.83	5%	2,680.19	0	-2,680.19	56,284.02
9	8	56,284.02	5%	2,814.20	0	-2,814.20	59,098.22
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							

Los resultados parciales, obtenidos antes de aplicar la Herramienta Buscar objetivo, tienen la siguiente interpretación:

“No se ha realizado pago alguno de la deuda de \$ 40000; de manera que al vencimiento de la misma (luego de 8 años) el valor de la deuda es de \$ 59098,22.”

Los campos de la tarjeta Buscar objetivos se llenan de la siguiente manera:

- ✓ **Definir la celda:** en este campo se ubica el valor de la celda que contiene el Saldo insoluto después del pago; en este caso es la celda G9.
- ✓ **Con el valor:** en este campo debe ingresar el valor cero (por medio del teclado), puesto que ese es el objetivo: Que el valor de la deuda, luego del último pago es igual a cero.

- ✓ **Para cambiar la celda:** En este campo se colocará la celda cambiante, es decir aquella celda que en la que el programa ensaye diferentes valores hasta encontrar el valor adecuado. Para el ejemplo se tomará como celda cambiante la celda que registra el pago (valor desconocido).

Una vez que se han llenado los campos al dar clic en el botón Aceptar el Excel, desarrollará en forma instantánea varias iteraciones hasta encontrar el resultado; esta operación se lleva a cabo en contados segundos. (BACA Currea, 2002)

El resultado obtenido en el ejemplo es: \$ 6188,87.

14.4. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Elaborar una tabla para amortizar la suma de \$ 30000 en 12 pagos periódicos uniformes con una tasa de 3% para los primeros 3 períodos, de 3.5% para los siguientes tres períodos, y de 4% para los siguientes 3 períodos y del 2% para los 3 últimos períodos.

Solución:

En una Hoja de Cálculo del programa Excel desarrolle la tabla que se indica:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	30.000,00	3,00%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	3,00%	=B3*C3	=E2	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	3,00%	=B4*C4	=E3	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	3,50%	=B5*C5	=E4	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	3,50%	=B6*C6	=E5	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	3,50%	=B7*C7	=E6	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	4,00%	=B8*C8	=E7	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	4,00%	=B9*C9	=E8	=E9-D9	=B9-F9
10	9	=G9	4,00%	=B10*C10	=E9	=E10-D10	=B10-F10
11	10	=G10	2,00%	=B11*C11	=E10	=E11-D11	=B11-F11
12	11	=G11	2,00%	=B12*C12	=E11	=E12-D12	=B12-F12
13	12	=G12	2,00%	=B2*C2	=E12	=E2-D2	=B2-F2

Tenga en cuenta las siguientes observaciones:

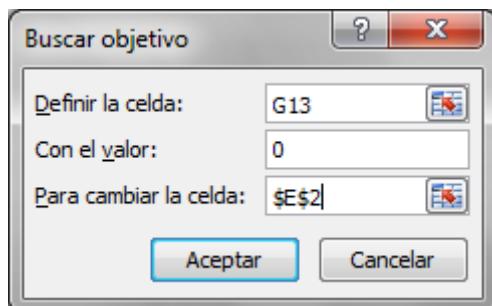
- ✓ Las fórmulas de cálculo son las mismas que se utilizan en el proceso de amortización.
- ✓ La celda del primer pago periódico, desconocido, está vacía; las fórmulas de los demás pagos están relacionados con el primero dando así a entender que los pagos son iguales.

Al final deberá obtener la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	30.000,00	3,00%	900,00		-900,00	30.900,00
3	2	30.900,00	3,00%	927,00	-	-927,00	31.827,00
4	3	31.827,00	3,00%	954,81	-	-954,81	32.781,81
5	4	32.781,81	3,50%	1.147,36	-	-1147,36	33.929,17
6	5	33.929,17	3,50%	1.187,52	-	-1187,52	35.116,69
7	6	35.116,69	3,50%	1.229,08	-	-1229,08	36.345,78
8	7	36.345,78	4,00%	1.453,83	-	-1453,83	37.799,61
9	8	37.799,61	4,00%	1.511,98	-	-1511,98	39.311,59
10	9	39.311,59	4,00%	1.572,46	-	-1572,46	40.884,06
11	10	40.884,06	2,00%	817,68	-	-817,68	41.701,74
12	11	41.701,74	2,00%	834,03	-	-834,03	42.535,77
13	12	42.535,77	2,00%	850,72	-	-850,72	43.386,49

Una interpretación particular de la tabla es la siguiente: "Al no haber realizado ningún pago, la deuda de \$ 30.000,00 ha crecido hasta \$ 43.386,49."

Mediante la herramienta "Buscar Objetivo" se puede encontrar el valor del pago periódico que liquide la deuda, tal como se indica en la siguiente ventana:



Tome en cuenta:

- ✓ La Herramienta Buscar Objetivo se encuentra en la opción Análisis y si ... de la sección Herramientas de datos, en la pestaña Datos.
- ✓ Dado que el objetivo es hallar el valor del pago periódico, para extinguir la deuda entonces al final del pago N° 12, el valor de la deuda debe ser cero; en la herramienta "Buscar objetivo" se debe llenar la información de los campos:
 - ❖ Definir la celda: G29 (celda que contiene el saldo de la deuda después del pago N° 12).
 - ❖ Con el Valor:0
 - ❖ Para cambiar la celda: E18 (valor del pago periódico a realizar).

Luego de dar un clic en el botón Aceptar, la tabla va cambiando hasta que se obtiene el valor del pago que cumpla con el objetivo, es decir:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	30.000,00	3,00%	900,00	3.061,47	2161,47	27.838,53
3	2	27.838,53	3,00%	835,16	3.061,47	2226,31	25.612,22
4	3	25.612,22	3,00%	768,37	3.061,47	2293,10	23.319,12
5	4	23.319,12	3,50%	816,17	3.061,47	2245,30	21.073,82
6	5	21.073,82	3,50%	737,58	3.061,47	2323,88	18.749,94
7	6	18.749,94	3,50%	656,25	3.061,47	2405,22	16.344,72
8	7	16.344,72	4,00%	653,79	3.061,47	2407,68	13.937,04
9	8	13.937,04	4,00%	557,48	3.061,47	2503,99	11.433,06
10	9	11.433,06	4,00%	457,32	3.061,47	2604,14	8.828,91
11	10	8.828,91	2,00%	176,58	3.061,47	2884,89	5.944,02
12	11	5.944,02	2,00%	118,88	3.061,47	2942,59	3.001,44
13	12	3.001,44	2,00%	60,03	3.061,47	3001,44	0,00

El valor del pago periódico a realizar para extinguir la deuda es de **\$ 3.061,47**

2. Elaborar una tabla para amortizar la suma de \$ 10000 en pagos mensuales iguales por 18 meses, si se cobra una tasa durante los 8 primeros meses 2.5% periódico mensual, de ahí en adelante sube en 0.3%. El deudor solicita que el período 1 y el período 8 sean de gracia y ofrece un pago extra de 1000 en el período 12.

Solución: En una Hoja de Cálculo del programa Excel desarrolle la tabla que se indica:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	10.000,00	=2,5%	=B2*C2	0,00	=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	=2,5%	=B3*C3		=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	=2,5%	=B4*C4	=E3	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	=2,5%	=B5*C5	=E3	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	=2,5%	=B6*C6	=E3	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	=2,5%	=B7*C7	=E3	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	=2,5%	=B8*C8	=E3	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	=2,5%	=B9*C9	0,00	=E9-D9	=B9-F9
10	9	=G9	=C9+0,3%	=B10*C10	=E3	=E10-D10	=B10-F10
11	10	=G10	=C10+0,3%	=B11*C11	=E3	=E11-D11	=B11-F11
12	11	=G11	=C11+0,3%	=B12*C12	=E3	=E12-D12	=B12-F12
13	12	=G12	=C12+0,3%	=B13*C13	=E3+1000	=E13-D13	=B13-F13
14	13	=G13	=C13+0,3%	=B14*C14	=E3	=E14-D14	=B14-F14
15	14	=G14	=C14+0,3%	=B15*C15	=E3	=E15-D15	=B15-F15
16	15	=G15	=C15+0,3%	=B16*C16	=E3	=E16-D16	=B16-F16
17	16	=G16	=C16+0,3%	=B17*C17	=E3	=E17-D17	=B17-F17
18	17	=G17	=C17+0,3%	=B18*C18	=E3	=E18-D18	=B18-F18
19	18	=G18	=C18+0,3%	=B19*C19	=E3	=E19-D19	=B19-F19

Obteniéndose el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Despues del Pago
2	1	10.000,00	2,50%	250,00	0,00	-250,00	10.250,00
3	2	10.250,00	2,50%	256,25		-256,25	10.506,25
4	3	10.506,25	2,50%	262,66	-	-262,66	10.768,91
5	4	10.768,91	2,50%	269,22	-	-269,22	11.038,13
6	5	11.038,13	2,50%	275,95	-	-275,95	11.314,08
7	6	11.314,08	2,50%	282,85	-	-282,85	11.596,93
8	7	11.596,93	2,50%	289,92	-	-289,92	11.886,86
9	8	11.886,86	2,50%	297,17	0,00	-297,17	12.184,03
10	9	12.184,03	2,80%	341,15	-	-341,15	12.525,18
11	10	12.525,18	3,10%	388,28	-	-388,28	12.913,46
12	11	12.913,46	3,40%	439,06	-	-439,06	13.352,52
13	12	13.352,52	3,70%	494,04	1.000,00	505,96	12.846,56
14	13	12.846,56	4,00%	513,86	-	-513,86	13.360,43
15	14	13.360,43	4,30%	574,50	-	-574,50	13.934,92
16	15	13.934,92	4,60%	641,01	-	-641,01	14.575,93
17	16	14.575,93	4,90%	714,22	-	-714,22	15.290,15
18	17	15.290,15	5,20%	795,09	-	-795,09	16.085,24
19	18	16.085,24	5,50%	884,69	-	-884,69	16.969,93

Al aplicar la herramienta Buscar Objetivo se encuentra el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Despues del Pago
2	1	10.000,00	2,50%	250,00	0,00	-250,00	10.250,00
3	2	10.250,00	2,50%	256,25	763,94	507,69	9.742,31
4	3	9.742,31	2,50%	243,56	763,94	520,38	9.221,93
5	4	9.221,93	2,50%	230,55	763,94	533,39	8.688,54
6	5	8.688,54	2,50%	217,21	763,94	546,72	8.141,82
7	6	8.141,82	2,50%	203,55	763,94	560,39	7.581,43
8	7	7.581,43	2,50%	189,54	763,94	574,40	7.007,02
9	8	7.007,02	2,50%	175,18	0,00	-175,18	7.182,20
10	9	7.182,20	2,80%	201,10	763,94	562,84	6.619,36
11	10	6.619,36	3,10%	205,20	763,94	558,74	6.060,63
12	11	6.060,63	3,40%	206,06	763,94	557,88	5.502,75
13	12	5.502,75	3,70%	203,60	1.763,94	1560,34	3.942,41
14	13	3.942,41	4,00%	157,70	763,94	606,24	3.336,17
15	14	3.336,17	4,30%	143,46	763,94	620,48	2.715,69
16	15	2.715,69	4,60%	124,92	763,94	639,02	2.076,68
17	16	2.076,68	4,90%	101,76	763,94	662,18	1.414,50
18	17	1.414,50	5,20%	73,55	763,94	690,38	724,11
19	18	724,11	5,50%	39,83	763,94	724,11	0,00

3. Cuál puede ser el préstamo máximo que se le puede conceder a una persona que dice que puede pagar mensualmente \$ 600 durante 15 meses y que en el mes 12 además de la cuota ordinaria de \$ 600 puede pagar una cuota extraordinaria de \$ 1500. Suponga una tasa del 3.5% periódica mensual.

Preparar en una hoja de cálculo del programa Excel la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Despues del Pago
2	1		3,50%	=B2*C2	600,00	=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	3,50%	=B3*C3	600,00	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	3,50%	=B4*C4	600,00	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	3,50%	=B5*C5	600,00	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	3,50%	=B6*C6	600,00	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	3,50%	=B7*C7	600,00	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	3,50%	=B8*C8	600,00	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	3,50%	=B9*C9	600,00	=E9-D9	=B9-F9
10	9	=G9	3,50%	=B10*C10	600,00	=E10-D10	=B10-F10
11	10	=G10	3,50%	=B11*C11	600,00	=E11-D11	=B11-F11
12	11	=G11	3,50%	=B12*C12	600,00	=E12-D12	=B12-F12
13	12	=G12	3,50%	=B13*C13	2100,00	=E13-D13	=B13-F13
14	13	=G13	3,50%	=B14*C14	600,00	=E14-D14	=B14-F14
15	14	=G14	3,50%	=B15*C15	600,00	=E15-D15	=B15-F15
16	15	=G15	3,50%	=B16*C16	600,00	=E16-D16	=B16-F16

Obteniéndose el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Despues del Pago
2	1		3,50%	0,00	600,00	600,00	-600,00
3	2	-600,00	3,50%	-21,00	600,00	621,00	-1.221,00
4	3	-1.221,00	3,50%	-42,74	600,00	642,74	-1.863,74
5	4	-1.863,74	3,50%	-65,23	600,00	665,23	-2.528,97
6	5	-2.528,97	3,50%	-88,51	600,00	688,51	-3.217,48
7	6	-3.217,48	3,50%	-112,61	600,00	712,61	-3.930,09
8	7	-3.930,09	3,50%	-137,55	600,00	737,55	-4.667,64
9	8	-4.667,64	3,50%	-163,37	600,00	763,37	-5.431,01
10	9	-5.431,01	3,50%	-190,09	600,00	790,09	-6.221,10
11	10	-6.221,10	3,50%	-217,74	600,00	817,74	-7.038,84
12	11	-7.038,84	3,50%	-246,36	600,00	846,36	-7.885,20
13	12	-7.885,20	3,50%	-275,98	2.100,00	2.375,98	-10.261,18
14	13	-10.261,18	3,50%	-359,14	600,00	959,14	-11.220,32
15	14	-11.220,32	3,50%	-392,71	600,00	992,71	-12.213,03
16	15	-12.213,03	3,50%	-427,46	600,00	1.027,46	-13.240,49

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, tomando en cuenta el objetivo de siempre: extinguir la deuda y como Celda cambiante la celda correspondiente al valor del préstamo se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Despues del Pago
2	1	7.903,12	3,50%	276,61	600,00	323,39	7.579,73
3	2	7.579,73	3,50%	265,29	600,00	334,71	7.245,02
4	3	7.245,02	3,50%	253,58	600,00	346,42	6.898,60
5	4	6.898,60	3,50%	241,45	600,00	358,55	6.540,05
6	5	6.540,05	3,50%	228,90	600,00	371,10	6.168,95
7	6	6.168,95	3,50%	215,91	600,00	384,09	5.784,86
8	7	5.784,86	3,50%	202,47	600,00	397,53	5.387,33
9	8	5.387,33	3,50%	188,56	600,00	411,44	4.975,89
10	9	4.975,89	3,50%	174,16	600,00	425,84	4.550,05
11	10	4.550,05	3,50%	159,25	600,00	440,75	4.109,30
12	11	4.109,30	3,50%	143,83	600,00	456,17	3.653,12
13	12	3.653,12	3,50%	127,86	2.100,00	1.972,14	1.680,98
14	13	1.680,98	3,50%	58,83	600,00	541,17	1.139,82
15	14	1.139,82	3,50%	39,89	600,00	560,11	579,71
16	15	579,71	3,50%	20,29	600,00	579,71	0,00

4. Un banco le presta a un cliente \$ 100000 con un interés del 12% capitalizable trimestralmente, el deudor tiene un plazo de 4 años para amortizar la deuda mediante pagos trimestrales; el primer pago vence dentro de tres meses y de ahí en adelante cada pago se aumentará en un 2% trimestral durante 1 año, de tal manera que a partir del año, y hasta la total liquidación de la deuda, los pagos se mantendrán del mismo valor que el pago número 4. Calcule el valor de los pagos trimestrales.

Preparar en una hoja de cálculo del programa Excel, a partir de la celda A1, la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Despues del Pago
2	1	100 000,00	3%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	3%	=B3*C3	=E2*1.02	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	3%	=B4*C4	=E3*1.02	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	3%	=B5*C5	=E4*1.02	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	3%	=B6*C6	=E5	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	3%	=B7*C7	=E6	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	3%	=B8*C8	=E7	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	3%	=B9*C9	=E8	=E9-D9	=B9-F9
10	9	=G9	3%	=B10*C10	=E9	=E10-D10	=B10-F10
11	10	=G10	3%	=B11*C11	=E10	=E11-D11	=B11-F11
12	11	=G11	3%	=B12*C12	=E11	=E12-D12	=B12-F12
13	12	=G12	3%	=B13*C13	=E12	=E13-D13	=B13-F13

Obteniéndose el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	100 000,00	3%	3 000,00		(3 000,00)	103 000,00
3	2	103 000,00	3%	3 090,00	-	(3 090,00)	106 090,00
4	3	106 090,00	3%	3 182,70	-	(3 182,70)	109 272,70
5	4	109 272,70	3%	3 278,18	-	(3 278,18)	112 550,88
6	5	112 550,88	3%	3 376,53	-	(3 376,53)	115 927,41
7	6	115 927,41	3%	3 477,82	-	(3 477,82)	119 405,23
8	7	119 405,23	3%	3 582,16	-	(3 582,16)	122 987,39
9	8	122 987,39	3%	3 689,62	-	(3 689,62)	126 677,01
10	9	126 677,01	3%	3 800,31	-	(3 800,31)	130 477,32
11	10	130 477,32	3%	3 914,32	-	(3 914,32)	134 391,64
12	11	134 391,64	3%	4 031,75	-	(4 031,75)	138 423,39
13	12	138 423,39	3%	4 152,70	-	(4 152,70)	142 576,09

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, tomando en cuenta el objetivo de siempre: extinguir la deuda y como Celda cambiante la celda correspondiente al valor del Pago periódico en el primer período (celda E2) se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	100 000,00	3%	3 000,00	9 573,08	6 573,08	93 426,92
3	2	93 426,92	3%	2 802,81	9 764,54	6 961,73	86 465,19
4	3	86 465,19	3%	2 593,96	9 959,83	7 365,88	79 099,31
5	4	79 099,31	3%	2 372,98	10 159,03	7 786,05	71 313,26
6	5	71 313,26	3%	2 139,40	10 159,03	8 019,63	63 293,63
7	6	63 293,63	3%	1 898,81	10 159,03	8 260,22	55 033,41
8	7	55 033,41	3%	1 651,00	10 159,03	8 508,03	46 525,38
9	8	46 525,38	3%	1 395,76	10 159,03	8 763,27	37 762,11
10	9	37 762,11	3%	1 132,86	10 159,03	9 026,17	28 735,95
11	10	28 735,95	3%	862,08	10 159,03	9 296,95	19 438,99
12	11	19 438,99	3%	583,17	10 159,03	9 575,86	9 863,14
13	12	9 863,14	3%	295,89	10 159,03	9 863,14	(0,00)

5. Elaborar la tabla de amortización para una deuda de \$ 2500 que se va a liquidar en 8 pagos mensuales, con el 12% de interés capitalizable cada mes, si los pagos se incrementan en \$ 40 cada mes.

Preparar en una hoja de cálculo del programa Excel, a partir de la celda A1, la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Despues del Pago
2	1	2 500,00	1,00%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	1,00%	=B3*C3	=E2+40	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	1,00%	=B4*C4	=E3+40	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	1,00%	=B5*C5	=E4+40	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	1,00%	=B6*C6	=E5+40	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	1,00%	=B7*C7	=E6+40	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	1,00%	=B8*C8	=E7+40	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	1,00%	=B9*C9	=E8+40	=E9-D9	=B9-F9

Obteniéndose el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Despues del Pago
2	1	2 500,00	1,00%	25,00		(25,00)	2 525,00
3	2	2 525,00	1,00%	25,25	40,00	14,75	2 510,25
4	3	2 510,25	1,00%	25,10	80,00	54,90	2 455,35
5	4	2 455,35	1,00%	24,55	120,00	95,45	2 359,91
6	5	2 359,91	1,00%	23,60	160,00	136,40	2 223,51
7	6	2 223,51	1,00%	22,24	200,00	177,76	2 045,74
8	7	2 045,74	1,00%	20,46	240,00	219,54	1 826,20
9	8	1 826,20	1,00%	18,26	280,00	261,74	1 564,46

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, como Celda cambiante la celda correspondiente al valor del Pago periódico en el primer período (celda E2) se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Despues del Pago
2	1	2 500,00	1,00%	25,00	188,82	163,82	2 336,18
3	2	2 336,18	1,00%	23,36	228,82	205,45	2 130,73
4	3	2 130,73	1,00%	21,31	268,82	247,51	1 883,22
5	4	1 883,22	1,00%	18,83	308,82	289,98	1 593,24
6	5	1 593,24	1,00%	15,93	348,82	332,88	1 260,36
7	6	1 260,36	1,00%	12,60	388,82	376,21	884,15
8	7	884,15	1,00%	8,84	428,82	419,97	464,17
9	8	464,17	1,00%	4,64	468,82	464,17	(0,00)

6. Resuelva el ejercicio anterior si los pagos decrecen en \$ 40 de un mes a otro.

Preparar en una hoja de cálculo del programa Excel, a partir de la celda A1, la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	2 500,00	1,00%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	1,00%	=B3*C3	=E2-40	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	1,00%	=B4*C4	=E3-40	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	1,00%	=B5*C5	=E4-40	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	1,00%	=B6*C6	=E5-40	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	1,00%	=B7*C7	=E6-40	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	1,00%	=B8*C8	=E7-40	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	1,00%	=B9*C9	=E8-40	=E9-D9	=B9-F9

Obteniéndose el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	2 500,00	1,00%	25,00		25,00)	2 525,00
3	2	2 525,00	1,00%	25,25	(40,00)	(65,25)	2 590,25
4	3	2 590,25	1,00%	25,90	(80,00)	(105,90)	2 696,15
5	4	2 696,15	1,00%	26,96	(120,00)	(146,96)	2 843,11
6	5	2 843,11	1,00%	28,43	(160,00)	(188,43)	3 031,55
7	6	3 031,55	1,00%	30,32	(200,00)	(230,32)	3 261,86
8	7	3 261,86	1,00%	32,62	(240,00)	(272,62)	3 534,48
9	8	3 534,48	1,00%	35,34	(280,00)	(315,34)	3 849,82

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, como Celda cambiante la celda correspondiente al valor del Pago periódico en el primer período (celda E2) se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	2 500,00	1,00%	25,00	464,64	439,64	2 060,36
3	2	2 060,36	1,00%	20,60	424,64	404,03	1 656,33
4	3	1 656,33	1,00%	16,56	384,64	368,07	1 288,26
5	4	1 288,26	1,00%	12,88	344,64	331,75	956,50
6	5	956,50	1,00%	9,57	304,64	295,07	661,43
7	6	661,43	1,00%	6,61	264,64	258,02	403,41
8	7	403,41	1,00%	4,03	224,64	220,60	182,81
9	8	182,81	1,00%	1,83	184,64	182,81	-

7. Elaborar una tabla para amortizar \$ 50000 en 2 años y 6 meses mediante pagos semestrales vencidos y crecientes en un 10%. La tasa de interés es del 8% anual capitalizable semestralmente.

Se prepara en una hoja de cálculo del programa Excel, a partir de la celda A1, la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	5000	2,00%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	2,00%	=B3*C3	=E2*1.10	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	2,00%	=B4*C4	=E3*1.10	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	2,00%	=B5*C5	=E4*1.10	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	2,00%	=B6*C6	=E5*1.10	=E6-D6	=B6-F6

Obteniéndose el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	5 000,00	2,00%	100,00		(100,00)	5 100,00
3	2	5 100,00	2,00%	102,00	-	(102,00)	5 202,00
4	3	5 202,00	2,00%	104,04	-	(104,04)	5 306,04
5	4	5 306,04	2,00%	106,12	-	(106,12)	5 412,16
6	5	5 412,16	2,00%	108,24	-	(108,24)	5 520,40

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, como Celda cambiante la celda correspondiente al valor del Pago periódico en el primer período (celda E2) se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Saldo Insoluto Antes del Pago	Tasa de Interés	Interés Periódico Vencido	Pago Periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto Después del Pago
2	1	5 000,00	2,00%	100,00	872,05	772,05	4 227,95
3	2	4 227,95	2,00%	84,56	959,26	874,70	3 353,25
4	3	3 353,25	2,00%	67,07	1 055,18	988,12	2 365,13
5	4	2 365,13	2,00%	47,30	1 160,70	1 113,40	1 251,74
6	5	1 251,74	2,00%	25,03	1 276,77	1 251,74	-

14.5. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una imprenta se vende en \$ 385000. El comprador da un enganche de \$ 85000 y se compromete a pagar el saldo en un año, con pagos mensuales iguales más 3 pagos extraordinarios de \$ 50000 cada uno al final de cada cuatrimestre. Si la tasa de interés es del 9% capitalizable mensualmente, hallar el valor de los pagos mensuales y elaborar la tabla de amortización.

R: \$ 13.875,19

2. Se va a amortizar una deuda de \$ 12500 en un año mediante pagos mensuales vencidos de \$ A cada uno más 2 pagos extraordinarios de \$ 4A cada uno, al final de cada semestre. Si la tasa de interés es el 36% capitalizable mensualmente, encontrar el valor de los pagos normales y el de los pagos extraordinarios; finalmente construir la tabla de amortización.

R: \$ 775,94; \$ 3.879,71

3. Un comerciante renta por 5 años una bodega, el contrato de arrendamiento estipula: "durante el primer año se pagará una renta semestral vencida de \$ 24000; el segundo año la renta semestral vencida será de \$ 27600; el tercer año será de \$ 33120 cada semestre vencido y en el cuarto y quinto años será de \$ 41400 semestrales". Si el costo promedio del dinero es del 12% capitalizable cada semestre, encuentre el Valor Actual de la renta de la bodega.

R: \$ 280.889,18

4. José acaba de abrir un almacén y en el primer mes de operaciones tuvo ventas por \$ 6420, sin embargo, estima que sus ventas, a partir del segundo mes, se incrementarán con un gradiente de \$ 3000 mensuales. Hallar el valor presente de sus ventas en los primeros 8 meses, suponiendo una tasa de interés del 10% capitalizable cada mes.

R: \$ 129.414,41

5. Cuánto dinero deberá depositarse inicialmente en una cuenta de ahorros que paga el 24% anual con capitalización trimestral, para proporcionar suficiente dinero para 6 retiros trimestrales que comienzan con \$ 10000 y disminuyen \$ 600 cada trimestre, tomando en cuenta que la tasa sube 0.5% cada trimestre durante los 3 primeros trimestres y luego baja 0.75% cada uno de los tres últimos trimestres.

R: \$ 41.983,46

6. Una persona desea comprar una casa a un costo de \$ 270000 ofrece un pago inmediato de \$70000 y el resto lo va a pagar mediante una amortización semestral de 3 años. ¿Cuál debe ser el valor del primer pago si cada uno de los pagos siguientes puede decrecer en \$ 6400? La tasa de interés es del 12% capitalizable semestral, decreciente en 0.05%.

R: 42.064,24

7. Al comprar una casa se queda debiendo \$ 15000, para cancelar en 1 año con cuotas mensuales iguales y cuotas trimestrales iguales. Si las cuotas trimestrales son el 10% más que las cuotas mensuales; halle el valor de las cuotas a pagar para un interés inicial del 2% inicial con incrementos del 0.09% cada mes, durante 6 meses y luego decrecientes en 0.05% para los seis últimos meses.

R: \$ 1.392,77; \$ 1.532,04

15

FONDOS DE ACUMULACIÓN VARIABLE

15.1. INTRODUCCIÓN

Al igual que en la unidad XIV: Amortización Variable, en esta Unidad se va a aplicar la herramienta Buscar Objetivo para la construcción de modelos financieros de acumulación variable; se presenta a continuación un grupo de problemas resueltos y, como parte del proceso de aprendizaje, se incluye una selección de problemas propuestos que permitirán desarrollar destrezas en el manejo de esta herramienta de Excel (BACA Currea, 2002).

15.2. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor del depósito anual necesario para acumular \$ 20000 en cuatro años, considerando una tasa de interés de 13% anual, decreciente en 1% cada año. elaborar la tabla de fondo de valor futuro correspondiente.

A partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel ingrese la siguiente información; tome en cuenta que las fórmulas son las mismas que se utilizan para la construcción de la tabla de un Fondo de Acumulación.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	13%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	12%	=B3*C3	=E2	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	11%	=B4*C4	=E3	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	10%	=B5*C5	=E4	=D5+E5	=B5+F5

Al final de esta actividad deberá tener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	-	13%	-		-	-
3	2	-	12%	-	-	-	-
4	3	-	11%	-	-	-	-
5	4	-	10%	-	-	-	-

Con la herramienta Buscar Objetivo, tal como se indica, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	-	13%	-	4 265,74	4 265,74	4 265,74
3	2	4 265,74	12%	511,89	4 265,74	4 777,63	9 043,37
4	3	9 043,37	11%	994,77	4 265,74	5 260,51	14 303,87
5	4	14 303,87	10%	1 430,39	4 265,74	5 696,13	20 000,00

2. Para disponer de 50000 en cinco años se va a construir un fondo de acumulación en una entidad financiera que reconoce el 10%. Encuentre el valor del pago anual y construya la tabla de amortización correspondiente; tome en cuenta que el segundo depósito debe ser el doble del primero, el tercer pago es igual al primero y el cuarto y quinto pago es el doble del tercero.

A partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	10%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	10%	=B3*C3	=2*E2	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	10%	=B4*C4	=E2	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	10%	=B5*C5	=2*E4	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	10%	=B6*C6	=2*E4	=D6+E6	=B6+F6

Al final de esta actividad deberá tener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	10%	-		-	-
3	2	-	10%	-	-	-	-
4	3	-	10%	-	-	-	-
5	4	-	10%	-	-	-	-
6	5	-	10%	-	-	-	-

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G6, con el valor de 50000 para cambiar la celda E2:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	10%	-	5 243,23	5 243,23	5 243,23
3	2	5 243,23	10%	524,32	10 486,47	11 010,79	16 254,02
4	3	16 254,02	10%	1 625,40	5 243,23	6 868,64	23 122,66
5	4	23 122,66	10%	2 312,27	10 486,47	12 798,73	35 921,39
6	5	35 921,39	10%	3 592,14	10 486,47	14 078,61	50 000,00

3. Una señora, mediante depósitos mensuales, desea acumular \$ 8500 al cabo de 8 meses. Si la tasa es del 8% capitalizable mensualmente, ¿cuál debe ser el valor del primer depósito si cada uno de los siguientes depósitos puede aumentar en \$ 80?

A partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel ingrese la siguiente información

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	0,67%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	0,67%	=B3*C3	=E2+80	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	0,67%	=B4*C4	=E3+80	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	0,67%	=B5*C5	=E4+80	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	0,67%	=B6*C6	=E5+80	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	0,67%	=B7*C7	=E6+80	=D7+E7	=B7+F7
8	7	=G7	0,67%	=B8*C8	=E8+80	=D8+E8	=B8+F8
9	8	=G8	0,67%	=B9*C9	=E9+80	=D9+E9	=B9+F9

Al final de esta actividad deberá tener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	-	0,67%	-		-	-
3	2	-	0,67%	-	80,00	80,00	80,00
4	3	80,00	0,67%	0,53	160,00	160,53	240,53
5	4	240,53	0,67%	1,60	240,00	241,60	482,14
6	5	482,14	0,67%	3,21	320,00	323,21	805,35
7	6	805,35	0,67%	5,37	400,00	405,37	1 210,72
8	7	1 210,72	0,67%	8,07	480,00	488,07	1 698,79
9	8	1 698,79	0,67%	11,33	560,00	571,33	2 270,12

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G9, con el valor de 8500 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	0,67%	-	760,75	760,75	760,75
3	2	760,75	0,67%	5,07	840,75	845,82	1 606,56
4	3	1 606,56	0,67%	10,71	920,75	931,46	2 538,02
5	4	2 538,02	0,67%	16,92	1 000,75	1 017,67	3 555,69
6	5	3 555,69	0,67%	23,70	1 080,75	1 104,45	4 660,14
7	6	4 660,14	0,67%	31,07	1 160,75	1 191,81	5 851,95
8	7	5 851,95	0,67%	39,01	1 240,75	1 279,76	7 131,71
9	8	7 131,71	0,67%	47,54	1 320,75	1 368,29	8 500,00

4. Para jubilarse, Juan está planeando la construcción de un fondo que le entregará \$ 40000 dentro de 7 años, el fondo se construirá mediante depósitos anuales crecientes en el 8%; Cuál será el valor del depósito anual si se establece una tasa del 6% efectivo anual?

A partir de la celda A1, de la Hoja de cálculo del Programa Excel ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	6,00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	6,00%	=B3*C3	=1.08*E2	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	6,00%	=B4*C4	=1.08*E3	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	6,00%	=B5*C5	=1.08*E4	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	6,00%	=B6*C6	=1.08*E5	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	6,00%	=B7*C7	=1.08*E6	=D7+E7	=B7+F7
8	7	=G7	6,00%	=B8*C8	=1.08*E7	=D8+E8	=B8+F8

Al final de esta actividad deberá tener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	6,00%	-		-	-
3	2	-	6,00%	-	-	-	-
4	3	-	6,00%	-	-	-	-
5	4	-	6,00%	-	-	-	-
6	5	-	6,00%	-	-	-	-
7	6	-	6,00%	-	-	-	-
8	7	-	6,00%	-	-	-	-

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G8, con el valor de 40000 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	6,00%	-	3 806,01	3 806,01	3 806,01
3	2	3 806,01	6,00%	228,36	4 110,49	4 338,85	8 144,86
4	3	8 144,86	6,00%	488,69	4 439,33	4 928,02	13 072,87
5	4	13 072,87	6,00%	784,37	4 794,47	5 578,85	18 651,72
6	5	18 651,72	6,00%	1 119,10	5 178,03	6 297,13	24 948,86
7	6	24 948,86	6,00%	1 496,93	5 592,27	7 089,21	32 038,06
8	7	32 038,06	6,00%	1 922,28	6 039,66	7 961,94	40 000,00

5. El gerente de producción de una aceitera está pensando en crear un fondo de acumulación con depósitos decrecientes en 10% para poder renovar una máquina cuyo costo dentro de 5 años será de 150000; el fondo a construir reconoce el 5% de interés efectivo anual. Encuentre el valor de los depósitos anuales y construya el fondo de acumulación correspondiente.

A partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel ingrese la siguiente información

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Después del Depósito
2	1	0	5,00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	5,00%	=B3*C3	=0.9*E3	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	5,00%	=B4*C4	=0.9*E4	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	5,00%	=B5*C5	=0.9*E5	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	5,00%	=B6*C6	=0.9*E6	=D6+E6	=B6+F6

Al final de esta actividad deberá tener el siguiente resultado:

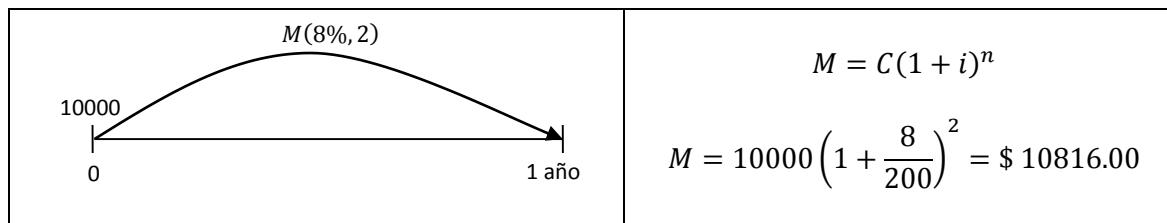
	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Después del Depósito
2	1	0	5,00%	-		-	-
3	2	-	5,00%	-	-	-	-
4	3	-	5,00%	-	-	-	-
5	4	-	5,00%	-	-	-	-
6	5	-	5,00%	-	-	-	-

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G6, con el valor de 150000 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Después del Depósito
2	1	0	5,00%	-	32 808,80	32 808,80	32 808,80
3	2	32 808,80	5,00%	1 640,44	29 527,92	31 168,36	63 977,17
4	3	63 977,17	5,00%	3 198,86	26 575,13	29 773,99	93 751,15
5	4	93 751,15	5,00%	4 687,56	23 917,62	28 605,17	122 356,33
6	5	122 356,33	5,00%	6 117,82	21 525,86	27 643,67	150 000,00

6. Cristina y Anita han decidido iniciar su propio negocio y para ello han realizado un préstamo de \$10000 pagaderos en su totalidad dentro de un año, con una tasa del 8 % capitalizable semestralmente. Para pagar la deuda deciden constituir un fondo de amortización mediante depósitos mensuales vencidos a una tasa del 24% capitalizable mensualmente, junto con depósitos trimestrales equivalentes al doble de la cuota mensual. Encuentre el valor de los depósitos periódicos y construya la tabla de acumulación correspondiente.

En primer lugar se determina el valor del préstamo dentro de un año:



Luego, a partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	2,00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	2,00%	=B3*C3	=E2	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	2,00%	=B4*C4	=E3+2*E3	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	2,00%	=B5*C5	=E3	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	2,00%	=B6*C6	=E5	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	2,00%	=B7*C7	=E6+2*E6	=D7+E7	=B7+F7
8	7	=G7	2,00%	=B8*C8	=E6	=D8+E8	=B8+F8
9	8	=G8	2,00%	=B9*C9	=E8	=D9+E9	=B9+F9
10	9	=G9	2,00%	=B10*C10	=E9+2*E9	=D10+E10	=B10+F10
11	10	=G10	2,00%	=B11*C11	=E9	=D11+E11	=B11+F11
12	11	=G11	2,00%	=B12*C12	=E11	=D12+E12	=B12+F12
13	12	=G12	2,00%	=B13*C13	=E12+2*E12	=D13+E13	=B13+F13

Al final de esta actividad deberá tener el siguiente resultado:

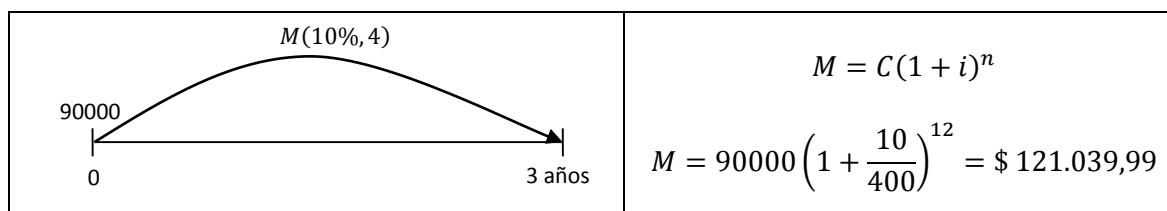
	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	2,00%	-		-	-
3	2	-	2,00%	-	-	-	-
4	3	-	2,00%	-	-	-	-
5	4	-	2,00%	-	-	-	-
6	5	-	2,00%	-	-	-	-
7	6	-	2,00%	-	-	-	-
8	7	-	2,00%	-	-	-	-
9	8	-	2,00%	-	-	-	-
10	9	-	2,00%	-	-	-	-
11	10	-	2,00%	-	-	-	-
12	11	-	2,00%	-	-	-	-
13	12	-	2,00%	-	-	-	-

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G13, con el valor de 10816 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	2,00%	-	487,71	487,71	487,71
3	2	487,71	2,00%	9,75	487,71	497,47	985,18
4	3	985,18	2,00%	19,70	1 463,14	1 482,84	2 468,02
5	4	2 468,02	2,00%	49,36	487,71	537,07	3 005,09
6	5	3 005,09	2,00%	60,10	487,71	547,81	3 552,91
7	6	3 552,91	2,00%	71,06	1 463,14	1 534,19	5 087,10
8	7	5 087,10	2,00%	101,74	487,71	589,45	5 676,55
9	8	5 676,55	2,00%	113,53	487,71	601,24	6 277,80
10	9	6 277,80	2,00%	125,56	1 463,14	1 588,69	7 866,49
11	10	7 866,49	2,00%	157,33	487,71	645,04	8 511,53
12	11	8 511,53	2,00%	170,23	487,71	657,94	9 169,47
13	12	9 169,47	2,00%	183,39	1 463,14	1 646,53	10 816,00

7. Adriana ha decidido emprender un negocio, para lo cual ha recibido un préstamo de \$ 90000 de parte de un banco de la localidad, el cual será pagado en su totalidad dentro de 3 años, con una tasa de interés del 10% capitalizable trimestralmente. Para pagar la deuda decide constituir un fondo de acumulación mediante depósitos semestrales vencidos a una tasa de interés del 8 % capitalizable semestralmente, Elabore tabla del fondo de acumulación, considerando que los depósitos son decrecientes en \$ 2000.

En primer lugar se determina el valor del préstamo dentro de tres años:



Luego, a partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	4,00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	4,00%	=B3*C3	=E2-2000	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	4,00%	=B4*C4	=E3-2000	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	4,00%	=B5*C5	=E4-2000	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	4,00%	=B6*C6	=E5-2000	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	4,00%	=B7*C7	=E6-2000	=D7+E7	=B7+F7

Al final de esta actividad deberá tener el siguiente resultado:

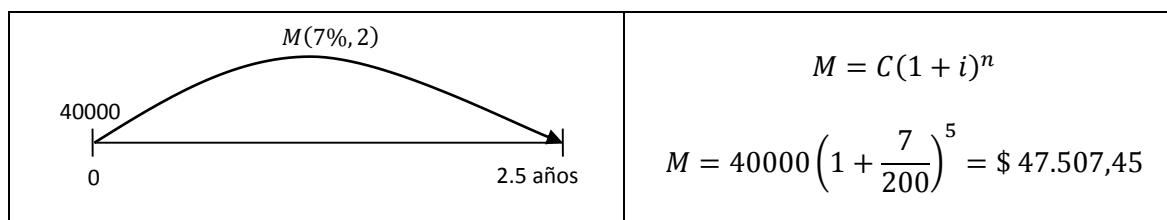
	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	4,00%	-		-	-
3	2	-	4,00%	-	(2 000,00)	(2 000,00)	(2 000,00)
4	3	(2 000,00)	4,00%	(80,00)	(4 000,00)	(4 080,00)	(6 080,00)
5	4	(6 080,00)	4,00%	(243,20)	(6 000,00)	(6 243,20)	(12 323,20)
6	5	(12 323,20)	4,00%	(492,93)	(8 000,00)	(8 492,93)	(20 816,13)
7	6	(20 816,13)	4,00%	(832,65)	(10 000,00)	(10 832,65)	(31 648,77)

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G7, con el valor de 121.039,99 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1		4.00%	-	23,019.65	23,019.65	23,019.65
3	2	23,019.65	4.00%	920.79	21,019.65	21,940.43	44,960.08
4	3	44,960.08	4.00%	1,798.40	19,019.65	20,818.05	65,778.13
5	4	65,778.13	4.00%	2,631.13	17,019.65	19,650.77	85,428.91
6	5	85,428.91	4.00%	3,417.16	15,019.65	18,436.80	103,865.71
7	6	103,865.71	4.00%	4,154.63	13,019.65	17,174.28	121,039.99

8. Un empresario solicita un préstamo por un valor de \$ 40000 al 7% capitalizable semestralmente. Luego, crea un fondo de amortización para que dentro de dos años y medio (momento en que tiene que cancelar la deuda junto con su interés) pueda cancelar el préstamo. En el Fondo de acumulación se compromete a ingresar cada trimestre un depósito variable creciente en 5% del anterior. Si la tasa del Fondo es del 16% capitalizable trimestral, con decrementos del 0.02%, calcular el valor de los depósitos que deben hacerse en el fondo de acumulación.

En primer lugar se determina el valor del préstamo dentro de 2.5 años:



Luego, a partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	4,00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	3,98%	=B3*C3	=1.05*E2	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	3,96%	=B4*C4	=1.05*E3	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	3,94%	=B5*C5	=1.05*E4	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	3,92%	=B6*C6	=1.05*E5	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	3,90%	=B7*C7	=1.05*E6	=D7+E7	=B7+F7
8	7	=G7	3,88%	=B8*C8	=1.05*E7	=D8+E8	=B8+F8
9	8	=G8	3,86%	=B9*C9	=1.05*E8	=D9+E9	=B9+F9
10	9	=G9	3,84%	=B10*C10	=1.05*E9	=D10+E10	=B10+F10
11	10	=G10	3,82%	=B11*C11	=1.05*E10	=D11+E11	=B11+F11

Al final de esta actividad deberá tener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	4,00%	-		-	-
3	2	-	3,98%	-	-	-	-
4	3	-	3,96%	-	-	-	-
5	4	-	3,94%	-	-	-	-
6	5	-	3,92%	-	-	-	-
7	6	-	3,90%	-	-	-	-
8	7	-	3,88%	-	-	-	-
9	8	-	3,86%	-	-	-	-
10	9	-	3,84%	-	-	-	-
11	10	-	3,82%	-	-	-	-

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G11, con el valor de 47507.45 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	Valor en el Fondo antes del Depósito	Tasa de interés	Interés Periódico Acreditado	Depósito periódico	Acumulado en el Período	Valor en el Fondo Despues del Depósito
2	1	0	4,00%	-	3 213,24	3 213,24	3 213,24
3	2	3 213,24	3,98%	127,89	3 373,90	3 501,79	6 715,02
4	3	6 715,02	3,96%	265,91	3 542,59	3 808,51	10 523,53
5	4	10 523,53	3,94%	414,63	3 719,72	4 134,35	14 657,88
6	5	14 657,88	3,92%	574,59	3 905,71	4 480,30	19 138,18
7	6	19 138,18	3,90%	746,39	4 101,00	4 847,39	23 985,57
8	7	23 985,57	3,88%	930,64	4 306,05	5 236,69	29 222,25
9	8	29 222,25	3,86%	1 127,98	4 521,35	5 649,33	34 871,58
10	9	34 871,58	3,84%	1 339,07	4 747,42	6 086,48	40 958,07
11	10	40 958,07	3,82%	1 564,60	4 984,79	6 549,38	47 507,45

15.3. PROBLEMAS PROPUESTOS

- El Sr. Maldonado pide prestado a una institución financiera \$30000 que va a cancelar mediante pagos semestrales constantes durante 2 años; pero en el último semestre para cancelar dicha deuda realiza un pago adicional X . Los pagos semestrales constantes son de \$2500 y la tasa de interés es el 12% anual capitalizable semestralmente. Al mismo tiempo para conseguir esta cantidad adicional X abre una cuenta de ahorros con la misma institución en el que se compromete a ingresar cada trimestre una misma cantidad, pero incrementándola en \$ 200 trimestrales; si la tasa, capitalizable trimestralmente, que otorgan en dicha cuenta de ahorros es del 8% el primer año y del 6% en el segundo año, calcular cuál es el valor de dichos ahorros trimestrales.

R: \$ 2.499,85

- El Fondo de Solidaridad (FS) recibe un crédito por \$ 600000 de un organismo internacional de los cuales el 40% es no reembolsable y el saldo restante debe ser cancelado dentro de 10 años con una tasa de interés del 8% efectivo anual. Por tal motivo, el FS decide crear una cuenta de acumulación que paga el 12% efectivo anual para cancelar el valor adeudado. Haciendo depósitos anuales iguales y dos depósitos extraordinarios (adicionales al pago anual) de \$100000 cada uno en el año 4 y en el año 7. Determine el valor de los depósitos anuales y construya la tabla de acumulación correspondiente.

R: \$ 25.035,30

- La utilidad que genera una empresa va creciendo el 1% mensualmente. Si el 40% de la misma es depositada en una cuenta de inversión que paga el 5% capitalizable mensualmente durante 12 meses y adicionalmente se hacen depósitos extraordinarios de \$300 cada trimestre; Determine el valor de la utilidad en el primer mes si al final del año en la cuenta de ahorro existen \$12570

R: \$ 2.287,46

- Los estudiantes de Auditoría desean realizar una gira de fin de carrera. Han llegado a un acuerdo con una agencia de viajes la cual va a congelar el valor de la totalidad del contrato en \$ 60000, los cuales deberán ser cancelados dentro de 2 años. Para conseguir esta cantidad realizan depósitos trimestrales que crecen en \$ 1500 cada año. Si la tasa de la localidad es del 12% anual capitalizable trimestralmente, elabore la tabla del Fondo de Acumulación.

R: \$ 1.729,94

- En un Fondo de Acumulación se han venido realizando depósitos vencidos cada trimestre, los cuales disminuyen en 20%, con la finalidad de acumular cierta cantidad de dinero en un periodo de dos años una tasa de 10% anual, capitalizable trimestralmente; el dinero acumulado permitirá renovar los activos de una empresa estimados en \$ 25000. Encontrar el valor del depósito inicial.

R: primer depósito de \$ 5.353,93

- La Fundación Nueva Vida consigue un préstamo de \$100000 a una organización internacional; el préstamo es reembolsable en un 40% dentro de 4 años con una tasa de interés del 2%; bajo estas condiciones la Fundación decide construir un fondo que paga el 4%. Determine el valor de los depósitos anuales que debe hacer si se toma en cuenta una gradiente positiva del 5% y construya la tabla de acumulación correspondiente.

R: \$ 9.485,10

7. Se desea establecer un fondo perpetuo de becas para estudiantes de Administración, este fondo concederá una beca anual por la cantidad de \$10000 y a perpetuidad empezando dentro de 10 años. Para este fondo se hace un primer depósito dentro de un año, y disminuirlo anualmente en un 15% con respecto al inmediato anterior, hasta el año 7, luego de lo cual ya no se realiza más depósitos. Si el dinero rinde al 8%, construya la tabla de acumulación correspondiente.

R: \$ 17.691,40

16

DEPRECIACIÓN DE ACTIVOS

16.1. INTRODUCCIÓN

Los activos fijos que conforman el patrimonio de una empresa, tales como: maquinaria, vehículos, edificios y demás bienes muebles, día a día pierden su valor; esta pérdida se conoce como depreciación de activos (PORTUS Govinden, 1985).

La depreciación de los activos se produce por el desgaste normal, el uso y actualmente consideraciones de carácter tecnológico.

16.2. VARIABLES FINANCIERAS

Las variables financieras, que intervienen en la depreciación de un activo son:

✓ **El costo inicial del activo**

Valor del mismo, en el momento de la compra o adquisición; este valor se lo conoce también, como capital inicial, se lo representa con ***C₀***.

✓ **La Vida Útil**

Es el tiempo, o el número de unidades de producción, dentro del cual el activo prestará servicios en condiciones normales de operación; después de este tiempo o una vez superadas las unidades de producción previstas, el activo requerirá de mayores gastos de mantenimiento y reparación; cuando la vida útil está expresada en unidades de tiempo, se considera al año como unidad de depreciación, al número de años de vida útil se lo representa con ***n***.

La determinación de la vida útil se lo realiza mediante estimación, tomando en cuenta: experiencias anteriores, futuros volúmenes de producción, etc. Normalmente, los catálogos y manuales de operación de maquinaria, traen consigo cierta información relacionada con la vida útil del activo adquirido.

✓ **El Valor de Salvamento**

Representado con la letra ***S***, es el valor estimado del activo, una vez que este ha cumplido su vida útil, es decir: el valor que podríamos recuperar mediante la venta del activo; este valor es estimado, al igual que la vida útil (PORTUS Govinden, 1985).

Para estimar este valor hay que tomar en cuenta el estado en que se encontrará el activo, como también, el desarrollo tecnológico mundial; es conveniente en muchas ocasiones, considerar que el valor de salvamento del activo es cero; de esta manera cualquier valor que se recupere, por venta del mismo, será considerado como ingreso extra.

16.3. DEPRECIACIÓN DEL ACTIVO

La depreciación del activo, o valor depreciado del mismo, es la diferencia entre el costo inicial del activo, y el valor de salvamento estimado; si se representa con ***D*** a la depreciación del activo, se tiene:

$$D = Co - S$$

La reposición del activo, consiste en recuperar el valor depreciado del mismo y, junto con el valor de salvamento, disponer de los fondos económicos necesarios para la renovación del activo (PORTUS Govinden, 1985).

16.4. DEPRECIACIÓN PERIÓDICA

Es el valor que el activo pierde, en cada uno de los períodos que conforman la vida útil; según el método de cálculo la depreciación periódica puede ser uniforme o diferente en cada período, esta depreciación periódica conforma una gradiante cuyo máximo valor es el valor del activo en el momento de la compra, y su mínimo valor el valor de salvamento; a la depreciación periódica se la representa con **Dp**.

16.5. VALOR EN LIBROS

Es la diferencia, en cada uno de los períodos del activo, del valor del activo y la depreciación periódica; en el período inicial el valor en libros del activo es igual al valor de la compra, o adquisición; mientras que, el valor en libros del activo luego de haber cumplido su vida útil, es igual al valor de salvamento (PORTUS Govinden, 1985).

16.6. MÉTODOS DE DEPRECIACIÓN

DEPRECIACIÓN CONTABLE	DEPRECIACIÓN ECONÓMICA
Se aplican de acuerdo con la legislación contable vigente.	Determina el valor de la depreciación que remunere el capital invertido en los activos y genera fondos suficientes para su reposición.
<ul style="list-style-type: none"> ➤ Son simples de aplicar. ➤ No toma en cuenta los costos financieros de los activos ni la inflación. ➤ Asume arbitrariamente la vida útil del activo. ➤ No reflejan la realidad económica de la empresa. ➤ No son aconsejables para la toma de decisiones económicas. 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Son relativamente complicados de aplicar. ➤ Toma en cuenta los costos capitalizados del activo y la inflación. ➤ Estiman con porcesos estadísticos la vida útil del activo. ➤ Reflejan la realidad económica de la empresa. ➤ Son aconsejables en la toma de decisiones empresariales.

16.7. MÉTODO DE DEPRECIACIÓN LINEAL

Este método considera que, la depreciación periódica del activo, es la misma en todos y cada uno de los períodos del mismo; entonces, la depreciación periódica está dado por:

$$Dp = \frac{Co - S}{n}$$

Como el nombre lo indica, en este método la depreciación periódica es la misma para todos los períodos; un registro numérico de la depreciación del activo, período a período, es una tabla denominada Tabla de Depreciación, en esta tabla se resalta, en la última columna el Valor en Libros, la estructura de la tabla es la siguiente:

TABLA DE DEPRECIACIÓN			
Período	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0			
1			
2			
3			
...			
n			

Nótese que la tabla, inicia en el renglón “cero”; que corresponde al momento de la compra, o adquisición del período; si en un sistema cartesiano, se representa en el eje horizontal la vida útil del activo, y en el eje vertical, el Valor en libros correspondiente, se obtendrá un gráfico tal como el que se indica:

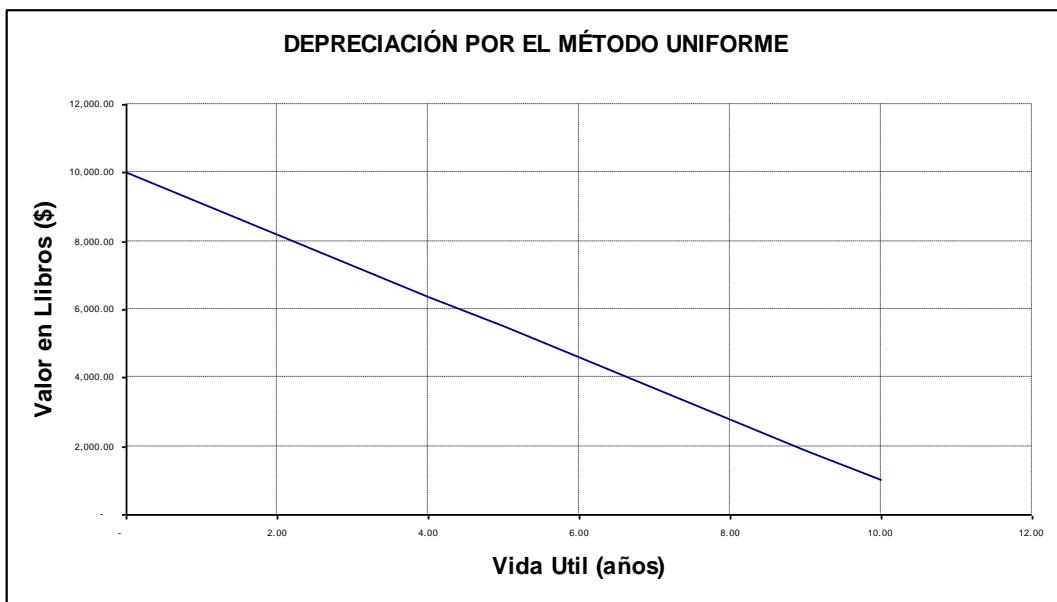


Figura 3

En el gráfico, se puede observar que al momento de la compra (período 0), el Valor en Libros del Activo es el valor de la compra; mientras tanto, el Valor en Libros del Activo, una vez que ha cumplido su vida útil, es igual al valor de Salvamento.

Este método es el más difundido, quizás por su facilidad en el cálculo, sin embargo es el método que menos se acerca a la realidad, puesto que, difícilmente la depreciación se comporta en forma lineal, o uniforme.

16.8. MÉTODO DE SUMA DE ENTEROS

A diferencia del método anterior, el método de Suma de Enteros, considera que la depreciación no es la misma en todos los períodos; considera que la depreciación es mayor en los primeros períodos de vida útil del activo, es decir: **la depreciación por el método de suma de enteros es decreciente**; en este método, el valor de la depreciación periódica del activo es una fracción del valor de la depreciación del activo, es decir (PORTUS Govinden, 1985):

$$D_p = \frac{a}{b} \times D$$

Para determinar la fracción, se debe tomar en cuenta:

El numerador (**a**) es, para cada período, el término de la sucesión: n, n-1, n-2 ... 2, 1; es decir: una sucesión decreciente, formada por los términos que conforman la vida útil del activo.

El denominador de la fracción (**b**) es el resultado de:

$$b = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Es decir: la suma de los números que representan los períodos de vida útil del activo; de allí el nombre del método. "Suma de enteros".

Esta suma se puede calcular directamente, mediante la fórmula que suma los términos de una progresión aritmética; entonces:

$$b = \frac{n}{2}(1 + n)$$

Para el cálculo de la depreciación periódica del activo, y del Valor en libros de cada uno de los períodos, es conveniente ir tabulando los valores en una tabla que disponga de la siguiente estructura:

TABLA DE DEPRECIACIÓN				
Período	Fracción	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0				
1				
2				
3				
...				
n				

Al igual que en el método anterior, nótese que la tabla inicia en el renglón "cero", que corresponde al momento de la compra, o adquisición del período; ahora, nuevamente, si en un sistema cartesiano se representa en el eje horizontal la vida útil del activo, y en el eje vertical el Valor en libros correspondiente, se obtendrá un gráfico tal como el que se indica:

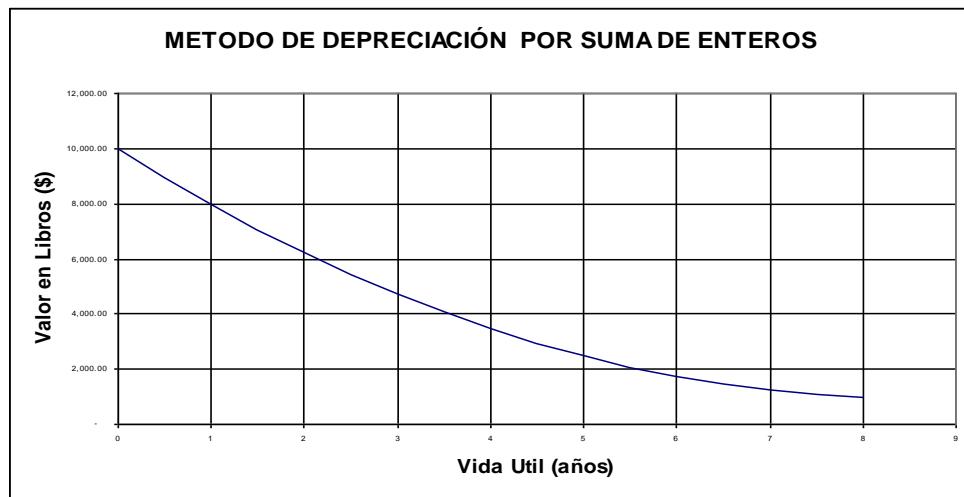


Figura 4

En el gráfico se puede observar, que al momento de la compra (período 0), el Valor en Libros del Activo es el valor de la compra; mientras tanto que el Valor en Libros del activo, una vez que ha cumplido su vida útil es igual al valor de Salvamento.

16.9. MÉTODO DEL PORCENTAJE FIJO

Este método, considera que la depreciación del activo es mayor en los primeros períodos de vida útil del mismo; la depreciación periódica es un porcentaje del Valor en Libros del activo determinado en el período anterior; es decir (PORTUS Govinden, 1985):

$$Dp(n) = r \times \text{Valor en libros del período anterior}$$

Para determinar el porcentaje de depreciación del activo (r), se toma en cuenta que: al final del último período, el Valor en libros es igual al valor de salvamento, entonces:

$$Co(1 - r)^n = S$$

Donde r es el porcentaje fijo de depreciación; despejando (r) se tiene:

$$r = \left[1 - \sqrt[n]{\frac{S}{Co}} \right] \times 100$$

El valor de salvamento S no puede ser cero, si esto ocurriese deberá tomar como valor del Salvamento el de 1 unidad monetaria. ($S = 1$)

Una vez determinado el porcentaje fijo de depreciación del activo, se debe calcular el valor de la depreciación, en cada período, como también el Valor en libros, es conveniente que estos cálculos se los realice tabulándolos de la siguiente manera:

TABLA DE DEPRECIACIÓN			
Período	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0			
1			
2			
3			
...			
n			

Con los datos de la vida útil, y el valor en libros para cada período, se podrá graficar en un sistema cartesiano, tal como se indica:

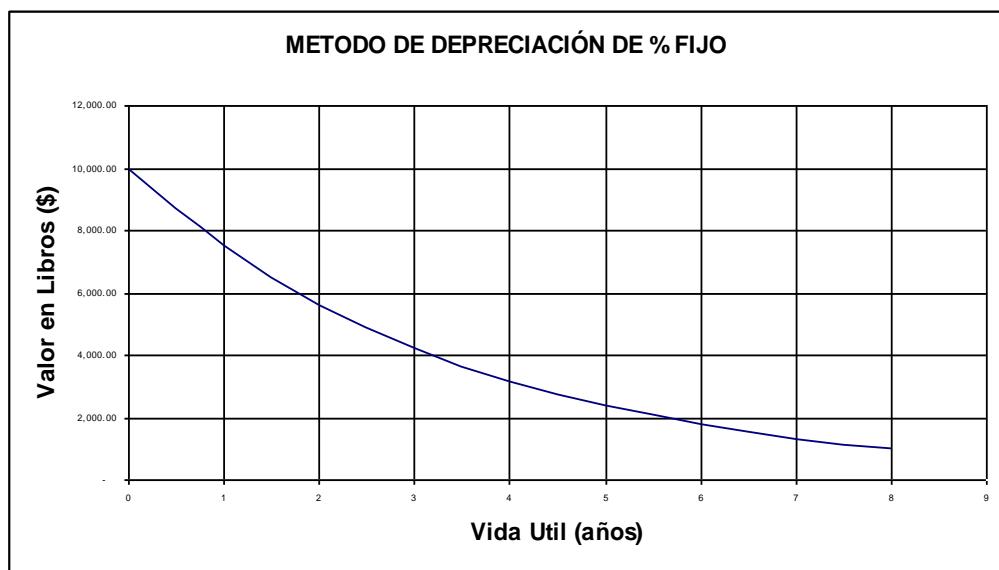


Figura 5

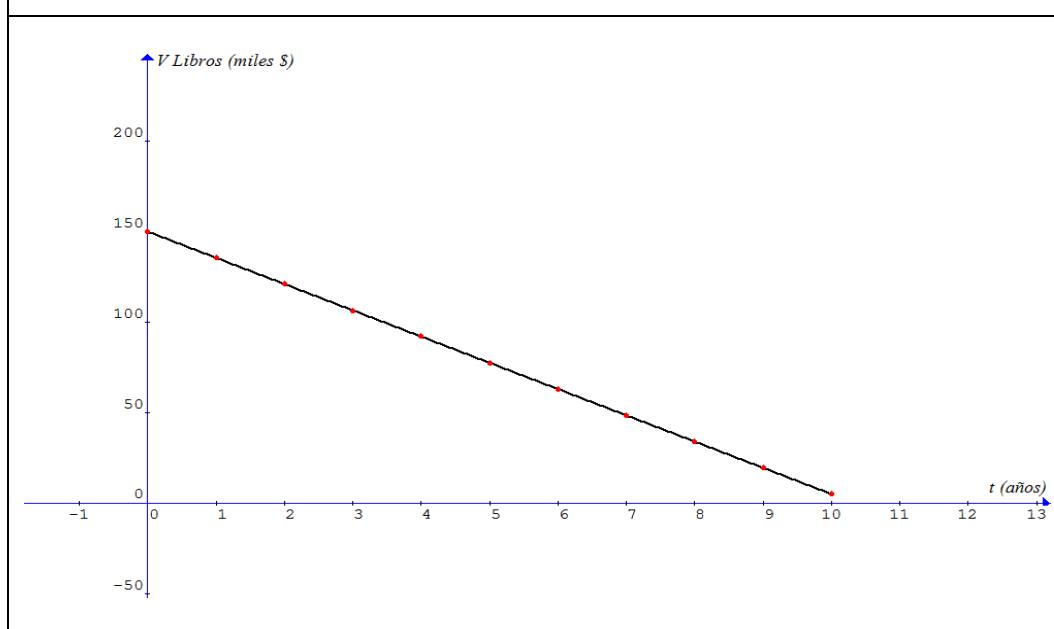
En el gráfico se puede observar que al momento de la compra (período 0), el Valor en Libros del Activo es el valor de la compra; mientras tanto que, el Valor en Libros del activo, una vez que ha cumplido su vida útil, es igual al valor de Salvamento.

16.10. PROBLEMAS RESUELTOS

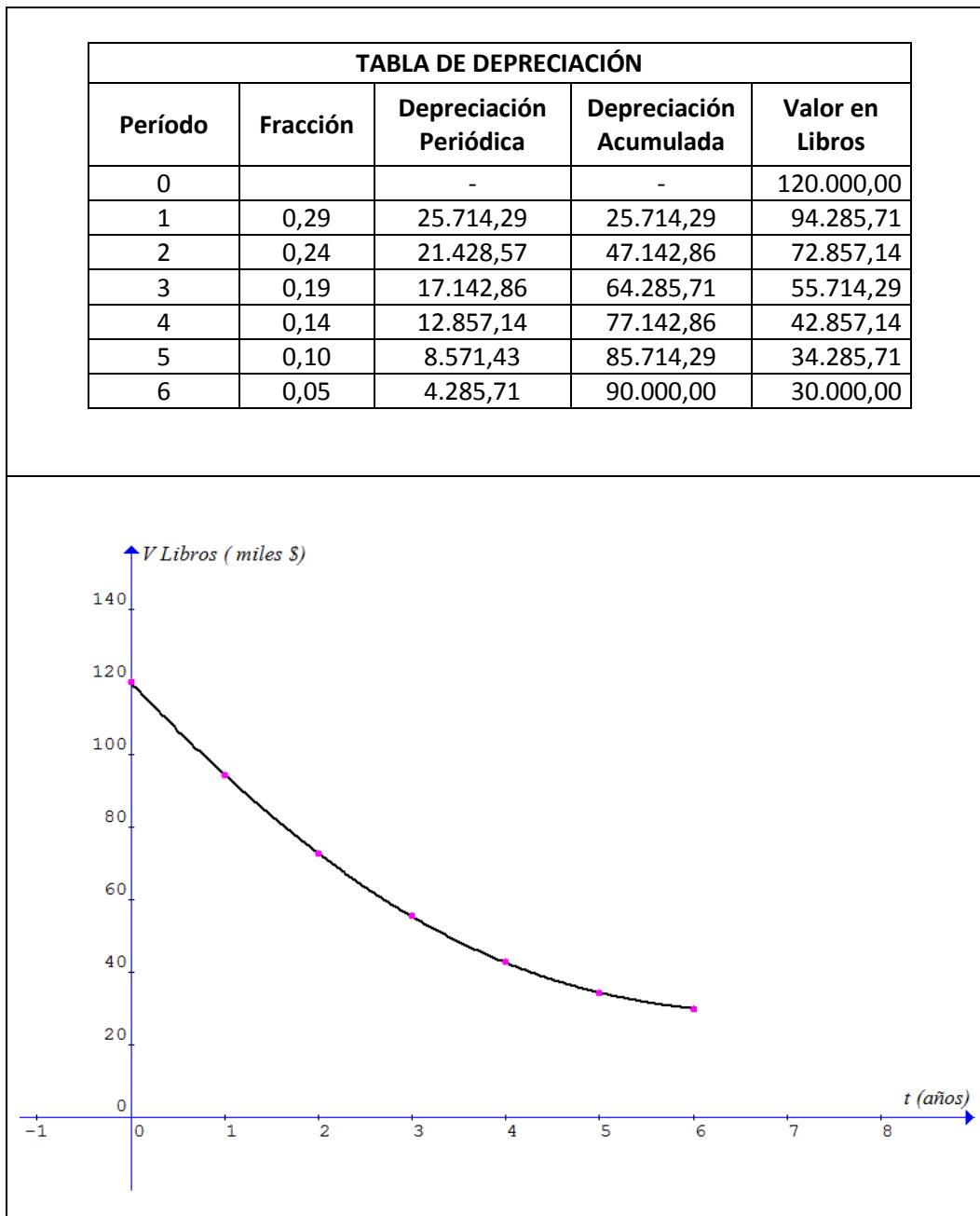
1. A un motor con un costo de \$ 150000 se ha estimado un valor de salvamento de 5000 y una vida probable de 10 años. Determinar por el método de Depreciación Uniforme el valor de la depreciación anual y el Valor en libros para todos los períodos de vida útil del activo.

$Co = 150000$	$Dp = \frac{Co - S}{n}$
$S = 5000$	$Dp = \frac{150000 - 5000}{10}$
$t = 10 \text{ años}$	$Dp = \$ 14500$

TABLA DE DEPRECIACIÓN			
Período	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en libros
-	-	-	150.000,00
1	14.500,00	14.500,00	135.500,00
2	14.500,00	29.000,00	121.000,00
3	14.500,00	43.500,00	106.500,00
4	14.500,00	58.000,00	92.000,00
5	14.500,00	72.500,00	77.500,00
6	14.500,00	87.000,00	63.000,00
7	14.500,00	101.500,00	48.500,00
8	14.500,00	116.000,00	34.000,00
9	14.500,00	130.500,00	19.500,00
10	14.500,00	145.000,00	5.000,00



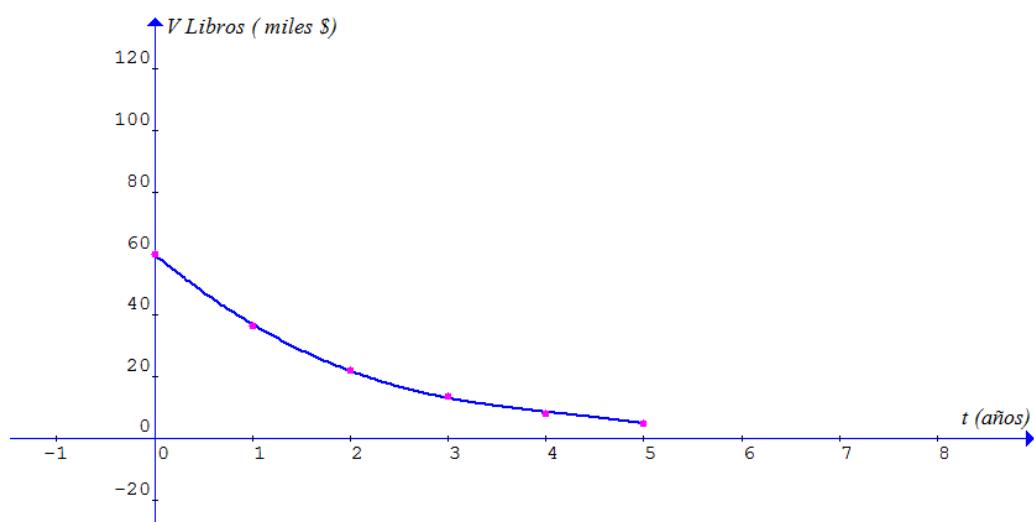
2. Una máquina tiene un costo inicial de \$120000 una vida útil de 6 años y un valor de salvamento de \$30000. Elaborar un cuadro de depreciación aplicando el método de la suma de enteros.



3. Una máquina tiene un valor de \$60000 y debe depreciarse hasta \$5000 en 5 años. Hallar el porcentaje fijo de depreciación y hacer el cuadro de depreciación.

$C_0 = 60000$	$r = \left[1 - \sqrt[n]{\frac{S}{C_0}} \right] \times 100$
$S = 5000$	
$t = 5 \text{ años}$	$r = \left[1 - \sqrt[5]{\frac{5000}{60000}} \right] \times 100 = 39.16\%$

TABLA DE DEPRECIACIÓN			
Período	Depreciación Periódica	Depreciación A	Valor en libros
0	-	-	60.000,00
1	23.498,14	23.498,14	36.501,86
2	14.295,43	37.793,57	22.206,43
3	8.696,83	46.490,40	13.509,60
4	5.290,84	51.781,24	8.218,76
5	3.218,76	55.000,00	5.000,00



4. Por el método de suma de dígitos y luego por el método uniforme, construya una tabla de depreciación para un activo cuyo costo inicial es de \$ 40000 si se estima una vida útil de 5 años; considere que no hay valor de salvamento.

Método de Suma de dígitos:

TABLA DE DEPRECIACIÓN				
Período	Fracción	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0		-	-	40,000.00
1	0.33	13,333.33	13,333.33	26,666.67
2	0.27	10,666.67	24,000.00	16,000.00
3	0.20	8,000.00	32,000.00	8,000.00
4	0.13	5,333.33	37,333.33	2,666.67
5	0.07	2,666.67	40,000.00	0.00

Método Uniforme:

TABLA DE DEPRECIACIÓN			
Período	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0	-	-	40,000.00
1	8,000.00	8,000.00	32,000.00
2	8,000.00	16,000.00	24,000.00
3	8,000.00	24,000.00	16,000.00
4	8,000.00	32,000.00	8,000.00
5	8,000.00	40,000.00	0,00

5. Un equipo industrial con un costo inicial de \$80000, valor de salvamento de \$10000 y vida útil 7 años se deprecia utilizando el método del Porcentaje fijo. Construir la tabla de depreciación para todos los períodos de vida útil del activo.

Cálculo del porcentaje fijo

$$r = \left[1 - \sqrt[n]{\frac{S}{Co}} \right] \times 100$$

$$r = \left[1 - \sqrt[7]{\frac{10000}{80000}} \right] \times 100$$

$$r = 25,70\%$$

TABLA DE DEPRECIACIÓN			
Período	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0	-	-	80,000.00
1	20,560.23	20,560.23	59,439.77
2	15,276.19	35,836.42	44,163.58
3	11,350.17	47,186.59	32,813.41
4	8,433.14	55,619.73	24,380.27
5	6,265.80	61,885.53	18,114.47
6	4,655.47	66,541.00	13,459.00
7	3,459.00	70,000.00	10,000.00

16.11. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un equipo eléctrico costó \$ 50000 y tiene especificación de 7 años de vida útil al final de los cuales no tiene ningún valor, por lo cual se deberá reemplazar por otro de igual valor; Calcular el por el método de depreciación uniforme, el valor de la depreciación periódica y elabore la tabla de depreciación para todos los períodos de la vida útil.

a. R: \$ 7.142,86
b.

2. Una máquina que tiene un valor de \$140000 y un valor de salvamento de \$40000 debe depreciarse en 15 años por el método uniforme. Hallar la depreciación anual y el valor en libros al final del décimo año.

R: \$ 6.666,67; \$ 73.333,33

3. Las instalaciones de una industria cuestan \$250000, tiene una vida útil de 10 años y se su valor de salvamento se estima en \$ 45000. Elaborar un cuadro de depreciación aplicando el método de la suma de enteros.

R: \$ 37.272,73; \$ 33.545,45;...

4. Un equipo tiene un costo de \$60000 y una vida útil de 4 años, desarrollar el cuadro de depreciación aplicando el método de la suma de enteros considerando que no existe valor de salvamento.

R: \$ 24.000,00; 18.000,00;...

5. Por el método del porcentaje fijo, calcular el Valor en Libros para todos los períodos de una máquina cuyo costo inicial es de \$ 40000 si se estima una vida útil de 5 años luego del cual su valor de salvamento será de \$ 1000.

R: 52.18%; \$ 20.872,95; \$ 9.980,95;...

6. Un equipo tiene un valor inicial de \$30000 y un valor de salvamento de \$2000, se deprecia anualmente el 25.98%; por el método del Porcentaje fijo indique en cuántos años se estimó la vida útil del equipo y construya la tabla de depreciación del activo.

R: 9 años.

17

NEGOCIACIÓN DE BONOS

17.1. DEFINICIÓN

Un bono es un documento financiero que registra la promesa de pago de una cantidad de dinero en una fecha futura determinada, junto con los respectivos intereses que en forma periódica dicha cantidad de dinero va generando (AYRES Jr, 1998)

Como ejemplos de bonos podemos citar los siguientes:

- Los emitidos por el Gobierno Nacional para la construcción de la obra pública.
- Los emitidos por el gobierno Nacional para liquidación por el retiro voluntario de los funcionarios públicos.

El valor del pago a realizarse en la fecha futura señalada recibe el nombre de **Valor de Redención** del bono; constituye dentro de la terminología de la Matemática Financiera, un pago único a la fecha de redención.

Los intereses periódicos que genera el Bono reciben el nombre de **Cupones o Desprendibles**, y se efectivizan al vencimiento de cada período, entonces: los cupones de un bono forman una Anualidad Cierta Ordinaria y Vencida.

Los Bonos son documentos financieros negociables en el mercado bursátil en cualquier fecha, para lo cual, es necesario establecer un precio de compra o venta del mismo; el poseedor de este documento se llama tenedor del bono y cuando este es vendido, el comprador adquiere los derechos sobre los cupones que faltan por cobrar y el valor de redención del mismo (MORA Zambrano, 2010).

El esquema financiero de un bono es el siguiente:



En este esquema, el lector podrá notar que los cupones (C) son los pagos periódicos de la anualidad, y el Valor de Redención (Vr) el pago único.

17.2. ELEMENTOS DE UN BONO (MORA Zambrano, 2010)

Un bono consta de:

Valor Nominal: Es el valor que se convierte en pago único en la fecha de vencimiento del bono; permite determinar el valor de redención del mismo, como se verá más adelante; el valor nominal (Vn), en la mayoría de los casos, es un valor múltiplo de 100.

Fecha de emisión: Es la fecha en la cual se suscribe el bono, junto con la fecha de vencimiento, permite determinar el número de períodos o cupones que conforman el bono.

Fecha de vencimiento: Es la fecha en la cual el tenedor del bono recibe el Valor de redención; en esta fecha, deberán haberse cumplido el pago de todos los cupones; junto con la fecha de emisión del bono, se puede determinar el tiempo de duración del bono.

Tasa Nominal: Es la tasa de interés, expresado en porcentaje, que permite calcular el valor de los cupones, como siempre, la tasa de interés se representa con (j).

Capitalización: Normalmente, los bonos presentan capitalización semestral, indicando además, que los cupones se pagan semestralmente; con lo que se confirma el criterio que los cupones conforman una Anualidad Cierta Ordinaria y Vencida. La capitalización semestral se manifiesta mediante la presencia de dos letras juntas, que representan los meses que conforman el semestre, veamos:

- **EJ** significa, que el pago de cupones se realiza al final del mes de enero, y al final del mes de julio.
- **MS** significa, que el pago de intereses se realiza al final del mes de marzo, y al final del mes de septiembre.

17.3. VALOR DE REDENCIÓN DE UN BONO (MORA Zambrano, 2010)

Es el valor que debe pagarse al tenedor del bono a la fecha de vencimiento; en la mayoría de los casos, el valor de redención del bono (VR), es el mismo que el valor nominal (Vn); esto es un bono a la par; sin embargo, el **valor de redención puede ser mayor o menor que el valor nominal**.

Cuando el Valor de redención del bono es mayor que el valor nominal, se define como Bono con premio; esta diferencia por exceso, se presenta mediante valores tales como: 102, 105, 110, etc. que quieren decir que el Valor de Redención del bono es: el 2%, el 5% o el 10% mayor que el nominal, respectivamente.

Cuando el Valor de redención del bono es menor que el valor nominal, se dice que es un bono con descuento; esta diferencia por defecto, se presenta mediante valores tales como: 95, 98, 99 que quiere decir que el valor de Redención del bono es: el 5%, el 2% o el 1% menor que el nominal, respectivamente.

Resumiendo:

- ✓ $VR = Vn \rightarrow$ Bono a la par
- ✓ $VR > Vn \rightarrow$ Bono con premio
- ✓ $VR < Vn \rightarrow$ Bono con descuento

17.4. NÚMERO DE CUPONES Y VALOR DE CADA CUPÓN

El número de cupones (***n***) está dado por el producto del tiempo, en años, que dura el bono, por la frecuencia de capitalización, es decir:

$$n = t \times m$$

El valor de cada cupón (***C***) está dado por el producto del valor nominal por la tasa periódica, es decir:

$$C = Vn \times i$$

Recordando además que la tasa periódica es el cociente entre la tasa nominal (***j***) y la frecuencia de capitalización (***m*** = 2, dado que es capitalización semestral).

17.5. PRECIO DE VENTA DE UN BONO

Siendo los bonos documentos negociables en el mercado bursátil, es necesario determinar el precio de un bono al momento de su negociación; tomando en cuenta que, al momento de la compra venta del bono, el nuevo tenedor es el beneficiario de todos los cupones que faltan por cobrar, como también del valor de redención del mismo (MORA Zambrano, 2010).

Cuando la negociación se presenta, aparece en escena una nueva tasa que es a la cual se realizará los cálculos para determinar el precio del bono; esta tasa, representada por (***r***), se la conoce como tasa de reddituabilidad (RODRÍGUEZ & GARCÍA Fronti, 2002).

La tasa de reddituabilidad es periódica, entonces deberá tomarse en cuenta esta situación, es decir:

$$r = \frac{\text{redituabilidad \%}}{m = 2}$$

El Precio de un bono depende de cuando se lo negocia, entonces se puede establecer dos alternativas:

17.6. PRECIO DE VENTA DE UN BONO EN FECHA DE PAGO DE INTERESES

En esta alternativa, la negociación o compra venta del bono, se realiza precisamente en fecha de pago de cupón; el precio de venta del bono, representado por (***P***), será la suma del Valor Actual de la anualidad que conforman los cupones (***VA₁***), y el Valor actual del Valor de Redención (***VA₂***) del bono, considerado como pago único; es decir:

$$P = VA_1 + VA_2$$

Es decir:

$$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

Si el precio de venta de un bono es mayor que el Valor de Redención, se dice que el bono es negociado con premio; si el precio de compraventa del bono es menor que el Valor de Redención, entonces se dice que el bono es comprado con descuento.

17.7. PRECIO DE VENTA DE UN BONO ENTRE FECHAS DE CUPÓN

Cuando el bono se lo adquiere entre fechas de cupón, el precio de compra se lo determina aplicando la regla comercial para Valor Actual, es decir:

Se calcula el precio del bono para el período de pago de cupón anterior al de la fecha de pago, y luego se proyecta a interés simple para el número de días entre la fecha focal y la fecha de pago, la tasa de interés para este cálculo es la redituabilidad.

Cuando el Bono se negocia entre fechas de pagos de interés, al precio obtenido se lo denomina **precio del Bono Sucio**; La forma de limpiar el Bono es reintegrando, por parte de vendedor al comprador, el valor proporcional del último cupón, repartido de acuerdo al número de días transcurridos entre el último pago de intereses y la fecha de compra; a este valor se conoce como **Redituabilidad** del último cupón.

Entonces, resulta necesario calcular la redituabilidad, es decir:

Sea:

R : Redituabilidad del último cupón.

t : Tiempo en días transcurrido entre la fecha de pago de intereses y la fecha de negociación.

C : Valor del cupón.

La redituabilidad del último cupón está dado por:

$$R = \frac{C \times t}{180}$$

Entonces se tiene ahora:

$$\text{Precio del Bono Limpio} = \text{Valor del Bono Sucio} - \text{Redituabilidad}$$

17.8. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcule el valor de redención, el número de cupones y el valor de cada cupón de un bono de \$ 10000, 15 % MS suscrito el 20 de marzo del 2012, redimible a la par el 20 de marzo del 2030.

 10000												
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Valor de redención:</td> <td style="padding: 5px;">Número de cupones:</td> <td style="padding: 5px;">Valor del cupón:</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$VR = Vn$</td> <td style="padding: 5px;">$n = t \times m$</td> <td style="padding: 5px;">$C = Vn \times i$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$VR = \\$ 10.000,00$</td> <td style="padding: 5px;">$n = 18 \times 2$</td> <td style="padding: 5px;">$C = 10000 \times \frac{15}{200}$</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 5px;">$n = 36$</td> <td style="padding: 5px;">$C = \\$ 750,00$</td> </tr> </table>	Valor de redención:	Número de cupones:	Valor del cupón:	$VR = Vn$	$n = t \times m$	$C = Vn \times i$	$VR = \$ 10.000,00$	$n = 18 \times 2$	$C = 10000 \times \frac{15}{200}$		$n = 36$	$C = \$ 750,00$
Valor de redención:	Número de cupones:	Valor del cupón:										
$VR = Vn$	$n = t \times m$	$C = Vn \times i$										
$VR = \$ 10.000,00$	$n = 18 \times 2$	$C = 10000 \times \frac{15}{200}$										
	$n = 36$	$C = \$ 750,00$										

2. Encuentre el precio de venta de un Bono con Valor nominal \$ 500, redimible a la par en 15 años, al 4% semestral de interés con redituabilidad del 5% semestral

 500		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> $C = Vn \times i$ $C = 500 \times \frac{4}{200} = 10$ $VR = Vn = \\$ 500,00 \text{ (a la par)}$ </td> <td style="padding: 5px;"> $P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$ $P = \frac{10 \left[1 - \left(1 + \frac{5}{200} \right)^{-30} \right]}{\frac{5}{200}} + \frac{500}{\left(1 + \frac{5}{200} \right)^{30}}$ $P = 209,30 + 238,37$ $P = \\$ 447,67 \text{ Bono comprado con descuento o castigo}$ </td> </tr> </table>	$C = Vn \times i$ $C = 500 \times \frac{4}{200} = 10$ $VR = Vn = \$ 500,00 \text{ (a la par)}$	$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$ $P = \frac{10 \left[1 - \left(1 + \frac{5}{200} \right)^{-30} \right]}{\frac{5}{200}} + \frac{500}{\left(1 + \frac{5}{200} \right)^{30}}$ $P = 209,30 + 238,37$ $P = \$ 447,67 \text{ Bono comprado con descuento o castigo}$
$C = Vn \times i$ $C = 500 \times \frac{4}{200} = 10$ $VR = Vn = \$ 500,00 \text{ (a la par)}$	$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$ $P = \frac{10 \left[1 - \left(1 + \frac{5}{200} \right)^{-30} \right]}{\frac{5}{200}} + \frac{500}{\left(1 + \frac{5}{200} \right)^{30}}$ $P = 209,30 + 238,37$ $P = \$ 447,67 \text{ Bono comprado con descuento o castigo}$	

3. Calcule el precio que se puede pagar por un bono de \$ 10000 al 13% FA, redimible a 102 después de 10 años, si se desea un rendimiento del 12% capitalizable semestralmente.

	$C = Vn \times i$ $C = 10000 \times \frac{13}{200} = 650$ $VR = 1.02Vn$ $VR = 1.02 \times 10000$ $VR = \$ 10.200,00$	$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$ $P = \frac{650 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{200} \right)^{-20} \right]}{\frac{12}{200}} + \frac{10200}{\left(1 + \frac{12}{200} \right)^{20}}$ $P = 7455.45 + 3180.41$ $P = \$ 10.635,86 \text{ Bono comprado con premio.}$
--	--	--

4. Encuentre el precio de venta de un Bono con Valor nominal de \$ 1000 redimible a la par el 30 de diciembre de 2016 con pago de interés 4% JD, con fecha de compra el 30 de junio de 2005 que reditúa el 5% semestral.

	$C = Vn \times i$ $C = 1000 \times \frac{4}{200} = 20$ $VR = Vn = \$ 1.000,00 \text{ (a la par)}$	$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$ $P = \frac{20 \left[1 - \left(1 + \frac{5}{200} \right)^{-23} \right]}{\frac{5}{200}} + \frac{1000}{\left(1 + \frac{5}{200} \right)^{23}}$ $P = 346.64 + 566.70$ $P = \$ 913,34 \text{ Bono comprado con descuento o castigo.}$
--	---	---

5. El 1 de enero del 2000 un inversionista compró un bono de \$ 100000 al 6% EJ, redimible a 105 el 1 de julio del 2009. Calcule el precio que pagó por este bono si la tasa de redituabilidad se establece en el 4%, capitalizable semestralmente.

 $C = Vn \times i$ $C = 100000 \times \frac{6}{200} = 3000$ $VR = 1.05 \times Vn$ (con premio) $VR = 1.05 \times 100000$ $VR = \$ 105.000,00$	$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$ $P = \frac{3000 \left[1 - \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{-19}\right]}{\frac{4}{200}} + \frac{105000}{\left(1 + \frac{4}{200}\right)^{19}}$ $P = 47035.39 + 72075.23$ $P = \$ 119.110,62$ Bono comprado con premio.
--	---

6. Un bono de \$ 30000, 4 % MS, es redimible el 1 de septiembre de 2020 a 103. Hallar el precio de compra el 1 de septiembre de 2012, considere una tasa de redituabilidad del 6% capitalizable semestralmente.

 $C = Vn \times i$ $C = 30000 \times \frac{4}{200} = 600$ $VR = 1.03 \times Vn$ (con premio) $VR = 1.03 \times 30000$ $VR = \$ 30.900,00$	$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$ $P = \frac{600 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{200}\right)^{-16}\right]}{\frac{6}{200}} + \frac{30900}{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^{16}}$ $P = 7536.66 + 19255.86$ $P = \$ 26.792,52$ Bono comprado con castigo.
--	--

7. Halle el precio de venta de un bono de \$ 5000 al 12 % MS, redimible a la par el 21 de septiembre del año 2015, si se negocia el 21 de marzo de 2000 a una tasa de rendimiento del 15% anual capitalizable semestralmente; indique si la negociación es con premio o con castigo.

		VR					
	C	C	C		C	C	C
0	1	2	3	...	29	30	31
21-mar-00							21-sep-15
5000							
$C = Vn \times i$				$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$			
$C = 5000 \times \frac{12}{200} = 300$				$P = \frac{300 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{200} \right)^{-31} \right]}{\frac{15}{200}} + \frac{5000}{\left(1 + \frac{15}{200} \right)^{31}}$			
$VR = Vn$ (a la par)				$P = 3574.99 + 531.26$			
$VR = \$ 5.000,00$							
				$P = \$ 4.106,25$ Bono comprado con castigo.			

8. Calcule el precio de un bono (sucio y limpio) de \$ 2000 al 22 % MN, redimible a la par el 30 de noviembre de 2023, si se compra el 15 de febrero de 2007 con un rendimiento del 21% anual capitalizable semestralmente.

		2000					
	C	C	C		C	C	C
0	15-feb-07	1	2	...	29	30	34
P'	P						
30-nov-06							30-nov-23
$C = Vn \times i$				$P' = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$			
$C = 2000 \times \frac{22}{200} = 220$				$P' = \frac{220 \left[1 - \left(1 + \frac{21}{200} \right)^{-34} \right]}{\frac{21}{200}} + \frac{2000}{\left(1 + \frac{21}{200} \right)^{34}}$			
$VR = Vn$ (a la par)				$P' = 2024.94 + 67.10$			
$VR = \$ 2.000,00$							
				$P' = \$ 2.092,04$			

<p>$t = 77 \text{ días}$</p> $P = P'(1 + rt)$ $P = 2092.04 \left(1 + \frac{21}{100} \times \frac{77}{360}\right)$ $P = 2186.01 \text{ (precio bono sucio)}$	<p>Redituabilidad del cupón:</p> $\text{Redituabilidad} = \frac{C \times t}{180}$ $\text{Redituabilidad} = \frac{220 \times 77}{180} = 94.11$ <p>Precio bono limpio:</p> $P = 2.186,01 - 94.11 = \$ 2.091,90$
--	---

9. Un bono de \$ 10000, 5% EJ, redimible a 105 el 1 de enero de 2025 se compra el 20 de septiembre de 2012 esperando un rendimiento del 6% convertible semestralmente. Hallar el precio del bono sucio, el interés redituable y el precio del bono limpio.

 $C = Vn \times i$ $C = 10000 \times \frac{5}{200} = 250$ $VR = \frac{105}{100}Vn \text{ (con premio)}$ $VR = \$ 10.500,00$	$P' = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$ $P' = \frac{250 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{200} \right)^{-25} \right]}{\frac{6}{200}}$ $+ \frac{10500}{\left(1 + \frac{6}{200} \right)^{25}}$ $P' = 4353.29 + 5014.86$ $P' = \$ 9.368,15$
 $t = 81 \text{ días}$ $P = P'(1 + rt)$ $P = 9368.15 \left(1 + \frac{6}{100} \times \frac{81}{360} \right)$ $P = \$ 9.494,62 \text{ (precio bono sucio)}$	Redituabilidad del cupón: $\text{Redituabilidad} = \frac{C \times t}{180}$ $\text{Redituabilidad} = \frac{250 \times 81}{180} = 112.50$ Precio bono limpio: $P = 9.494,62 - 112.50 = \$ 9.382,12$

10. Un bono de \$ 5000 al 6% EJ, redimible a 92 el 1 de enero del 2021, se lo vende el 10 de marzo de 2009 con una redituabilidad del 8% capitalizable semestralmente. Encuentre el precio del bono sucio y del bono limpio.

$C = Vn \times i$ $C = 5000 \times \frac{6}{200} = 150$ $VR = \frac{92}{100} Vn$ (con descuento) $VR = \$ 4.600,00$	$P' = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$ $P' = \frac{150 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200} \right)^{-24} \right]}{\frac{8}{200}} + \frac{4600}{\left(1 + \frac{8}{200} \right)^{24}}$ $P' = 2287.04 + 1794.56$ $P' = \$ 4.081,60$
$t = 68$ días $P = P'(1 + rt)$ $P = 4081.60 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{68}{360} \right)$ $P = 4.143,28$ (precio bono sucio)	Redituabilidad del cupón: $\text{Redituabilidad} = \frac{C \times t}{180}$ $\text{Redituabilidad} = \frac{150 \times 68}{180} = 56.67$ Precio bono limpio: $P = 4.143,28 - 56.67 = \$ 4.086,61$

17.9. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El 1 de enero del 2000 un inversionista compró un bono de \$ 40000 al 20% EJ, redimible a la par el 1 de julio del 2009. Determinar el precio de venta del bono si se aplica una tasa de redituabilidad del 18% capitalizable semestralmente.

R: \$ 43.850,05 (bono comprado con premio).

2. Encuentre el precio de venta de un bono con un valor nominal de \$ 3000, redimible a 102 en 20 años, al 4% semestral de interés con redituabilidad del 3% semestral.

R: \$ 3.481,81 (bono comprado con premio).

3. Calcular el precio de venta de un bono cuyo valor nominal es \$ 2500, si es redimible a 97 en 10 años, al 6% semestral de interés con redituabilidad del 8% semestral.

R: \$ 2.126,01 (bono comprado con descuento).

4. Un bono de \$ 3500, 4%, JD, redimible el 1 de diciembre de 2016, a la par, es comprado el 1 de diciembre de 2004 para que reditúe el 5% convertible semestralmente, hallar el precio de compra del bono e indique el tipo de negociación del mismo.

R: \$ 3.187,01 (bono comprado con descuento).

5. Un bono de \$ 35000 al 21% MN, redimible a la 99 el 15 de noviembre del año 2019, se vende el 15 de mayo de 2014 con una tasa de rendimiento del 20% anual capitalizable semestralmente, calcular el precio del bono e indicar el respectivo tipo de negociación

R: \$ 36.013,96 (bono comprado con premio)

6. Encuentre el precio de venta de un bono (sucio y limpio) con Valor nominal de \$ 4000 redimible a la par el 1 de noviembre de 2018 con pago de interés 4% MN, con fecha de compra el 22 de septiembre de 2002 que reditúa el 5% semestral.

R: \$ 3.625,25 (sucio); \$ 3.561,25 (limpio).

7. El 20 de noviembre de 2012 se compra un bono un bono de \$ 10000 al 13% FA, redimible a 102 el 31 de agosto de 2020, si se desea un rendimiento del 12% capitalizable semestralmente cual es el precio que se debe pagar por el bono?

R: \$ 10.577,29 (bono limpio).

8. Un bono de \$ 5000, al 3% con pagos de intereses el 1 de febrero y el 1 de agosto es redimible a 103 el 1 de febrero de 2018. Hallar el valor de compra que reditúe el 5% convertible semestralmente si se compra el 1 de junio de 2012.

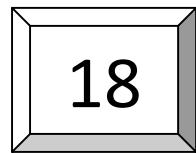
R:\$ 4.675,93 (bono sucio); \$ 4.625,51 (bono limpio).

9. Hallar el precio de compra (sucio y limpio) de un bono de \$ 7500 al 14% EJ, redimible a la par el 1 de julio del 2019, si se compra el 18 de abril de 2004, a fin de que reditúe 13% anual capitalizable semestralmente.

R: \$ 8.306,83 (bono sucio); 7.991,83 (bono limpio).

10. El 8 de junio de 2013 se compra un bono con valor nominal de \$ 12000 al 11.5 % AO, redimible a 98 el 1 de octubre del 2019, con una tasa de redituabilidad de 12.8 % anual capitalizable semestralmente; encontrar el precio del bono sucio y el precio del bono limpio.

R: \$ 11.489,43 (bono sucio); 11.228,76 (bono limpio).



VALOR ACTUAL NETO Y TASA INTERNA DE RETORNO

18.1. INTRODUCCIÓN

La Ingeniería Económica es una serie de técnicas matemáticas, basadas en los fundamentos de la Matemática Financiera, que permite la evaluación económica de proyectos, con la finalidad de escoger la alternativa más conveniente para los intereses de la comunidad (BLANK & Anthony, 1983); bajo este contexto, existen dos criterios que permiten la selección de la alternativa más conveniente: **El Valor Actual Neto y la Tasa Interna de Retorno**; dentro de este tema, se ha desarrollado una aplicación informática en hoja electrónica EXCEL para el cálculo de estos dos elementos financieros (BACA Currea, 2002).

18.2. EL FLUJO DE CAJA

El flujo de caja, es un registro numérico de los ingresos y egresos de dinero que ocurren durante la vida de un proyecto; se consideran ingresos a las ventas, utilidades o ganancias y egresos a los desembolsos, costos de operación y gastos corrientes (GRANT, Grant, & LEAVENWORTH, 1985).

En cada uno de los períodos de vida del proyecto, se debe establecer el flujo de caja neto (**FNC**) como la diferencia entre los ingresos y egresos ocurridos en ese período (GARCÍA González, 2001).

18.3. VALOR ACTUAL NETO

El Valor Actual Neto (VAN) de una inversión, es la suma del Valor Actual de cada uno de los flujos de caja de los períodos de la inversión, tomando como fecha focal el inicio del proyecto; recordando que el Valor Actual para un número determinado (n) de períodos, está dado por (VEGA O, 1983):

$$VA = M(1 + i)^{-n}$$

El **Valor Actual Neto** de una inversión, con n períodos está dado por:

$$VAN = -\text{Inversión inicial} + \sum_{k=1}^n FNC(1 + i)^{-k}$$

El Valor Actual Neto puede ser positivo o negativo; si el Valor Actual Neto a una tasa de mercado (*i*) dada es positiva, entonces la inversión es rentable; si el Valor Actual Neto es negativo, entonces no es conveniente realizar dicha inversión.

Si se presentan varias alternativas de inversión, todas ellas con el mismo número de períodos, la alternativa más conveniente es aquella que presenta el Valor Actual Neto más alto (VEGA O, 1983).

Si las alternativas de inversión tienen diferentes períodos de duración, hay que tomar en cuenta lo siguiente:

1. Se deberá calcular el Valor Actual Neto, de todas las alternativas, para un número de períodos igual al mínimo común múltiplo de los periodos.
2. Se deberá establecer un ciclo periódico de flujos de caja, para igualar el tiempo de duración de todas las alternativas; es decir: si se presentan dos alternativas con 2 y 3 períodos respectivamente, el número de períodos a ser analizados será 6 (mínimo común múltiplo entre 2 y 3), por lo que, en la primera alternativa tendrá tres ciclos periódicos de flujo de caja, y la segunda alternativa tendrá dos ciclos periódicos de flujo de caja.
3. La alternativa más conveniente será aquella que presente el Valor Actual Neto más alto.

18.4. LA TASA INTERNA DE RETORNO

La *Tasa Interna de Retorno* es el porcentaje, en el cual los ingresos o ganancias se igualan a los egresos o desembolsos; en otras palabras, la Tasa Interna de Retorno, o tasa de rendimiento (i) es el porcentaje en el que el Valor Actual Neto es igual a cero, es decir (SEPÚLVEDA, SOUDER, & GOTTFRIED, 1984):

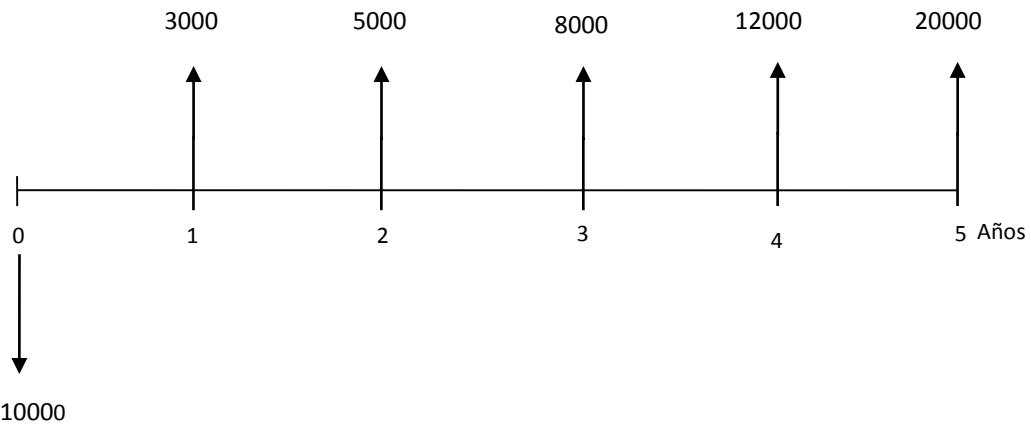
$$TIR = -\text{Inversión} + \sum_{k=1}^n FNC_k (1+i)^{-k} = 0$$

Si la Tasa Interna de Retorno es mayor que la tasa de mercado, entonces, la inversión es rentable, si la Tasa Interna de Retorno es menor que la tasa periódica de mercado, entonces, la inversión no es conveniente.

18.5. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor presente neto de un negocio si se invierte \$10000 y se recibe neto anualmente \$3000, \$ 5000, \$ 8000, \$ 12000, y \$ 20000; si la tasa efectiva de descuento estuvo al 9 %.

Flujo de Caja:



$$VAN = -I \text{ Inicial} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -10000 + VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 + VA_5$$

$$VAN = -10000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4} + \frac{M_5}{(1+i)^5}$$

$$VAN = -10000 + \frac{3000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^1} + \frac{5000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^2} + \frac{8000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^3} + \frac{12000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^4} + \frac{20000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^5}$$

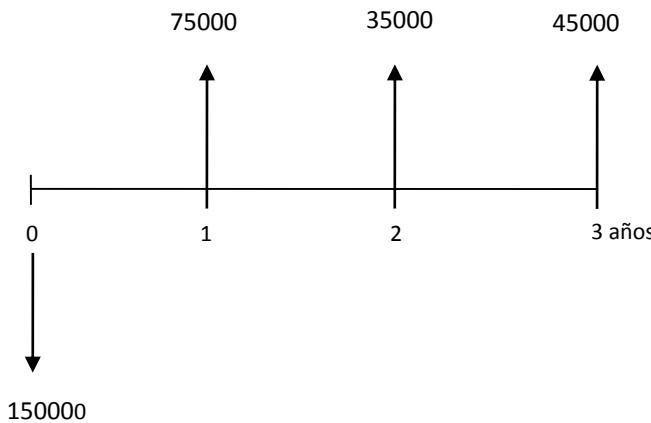
$$VAN = \$ 24.637,89$$

Utilizando el programa Excel se tiene:

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0	10.000,00		-10.000,00	-10.000,00
1		3.000,00	3.000,00	2.752,29
2		5.000,00	5.000,00	4.208,40
3		8.000,00	8.000,00	6.177,47
4		12.000,00	12.000,00	8.501,10
5		20.000,00	20.000,00	12.998,63
Valor Actual Neto (VAN):				24.637,89

2. Un proyecto agrícola estima el siguiente flujo de dinero: aporte inicial \$ 150000, ingresos anuales por \$ 75000, 35000 y 45000; si la tasa de mercado está al 8.5% anual, encuentre el Valor Actual Neto del proyecto.

Flujo de Caja:



$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -150000 + VA_1 + VA_2 + VA_3$$

$$VAN = -150000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3}$$

$$VAN = -150000 + \frac{75000}{\left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^1} + \frac{35000}{\left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^2} + \frac{45000}{\left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^3}$$

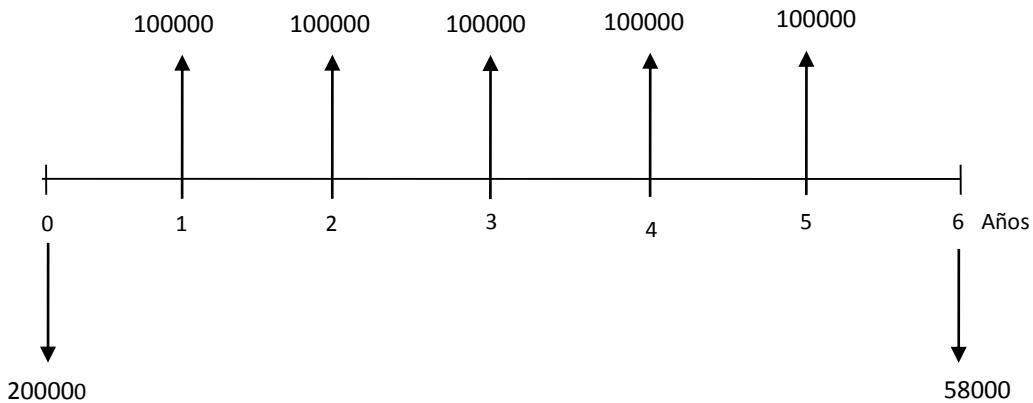
$$VAN = \$ - 15.913,78$$

Utilizando el programa Excel se tiene:

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0	150.000,00		-150.000,00	-150.000,00
1		75.000,00	75.000,00	69.124,42
2		35.000,00	35.000,00	29.730,94
3		45.000,00	45.000,00	35.230,86
Valor Actual Neto (VAN):				-15.913,78

3. El costo de una mina es \$ 200000 y se recibe utilidades durante 5 años por 100000 y luego para liquidar activos y personal en el sexto año se debe hacer un desembolso de \$ 58000. Cuál es el Valor Actual Neto de la inversión considerando una tasa de descuento de 9.2%.

Flujo de Caja:



$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -200000 + VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 + VA_5 - VA_6$$

$$VAN = -200000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4} + \frac{M_5}{(1+i)^5} - \frac{M_6}{(1+i)^6}$$

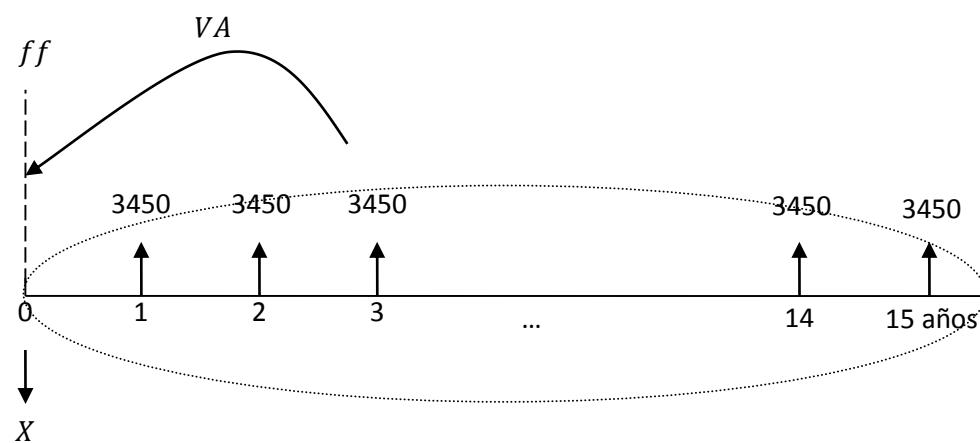
$$VAN = -200000 + \frac{100000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^1} + \frac{100000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^2} + \frac{100000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^3} + \frac{100000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^4} + \frac{100000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^5} - \frac{58000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^6}$$

$$VAN = \$ 152.749,80$$

Utilizando el programa se tiene:

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0	200.000,00		-200.000,00	-200.000,00
1		100.000,00	100.000,00	91.575,09
2		100.000,00	100.000,00	83.859,97
3		100.000,00	100.000,00	76.794,85
4		100.000,00	100.000,00	70.324,95
5		100.000,00	100.000,00	64.400,14
6	58.000,00		-58.000,00	-34.205,20
Valor Actual Neto (VAN):				152.749,80

4. Un inversionista, está considerando la compra de una suite para alquilar: El exceso de los ingresos sobre los egresos se estima en \$3450 al año, durante 15 años. ¿A qué precio de esta propiedad, recobraría un inversionista, justamente su inversión, con una tasa de rendimiento del 10%?



VA: Valor Actual de la anualidad vencida

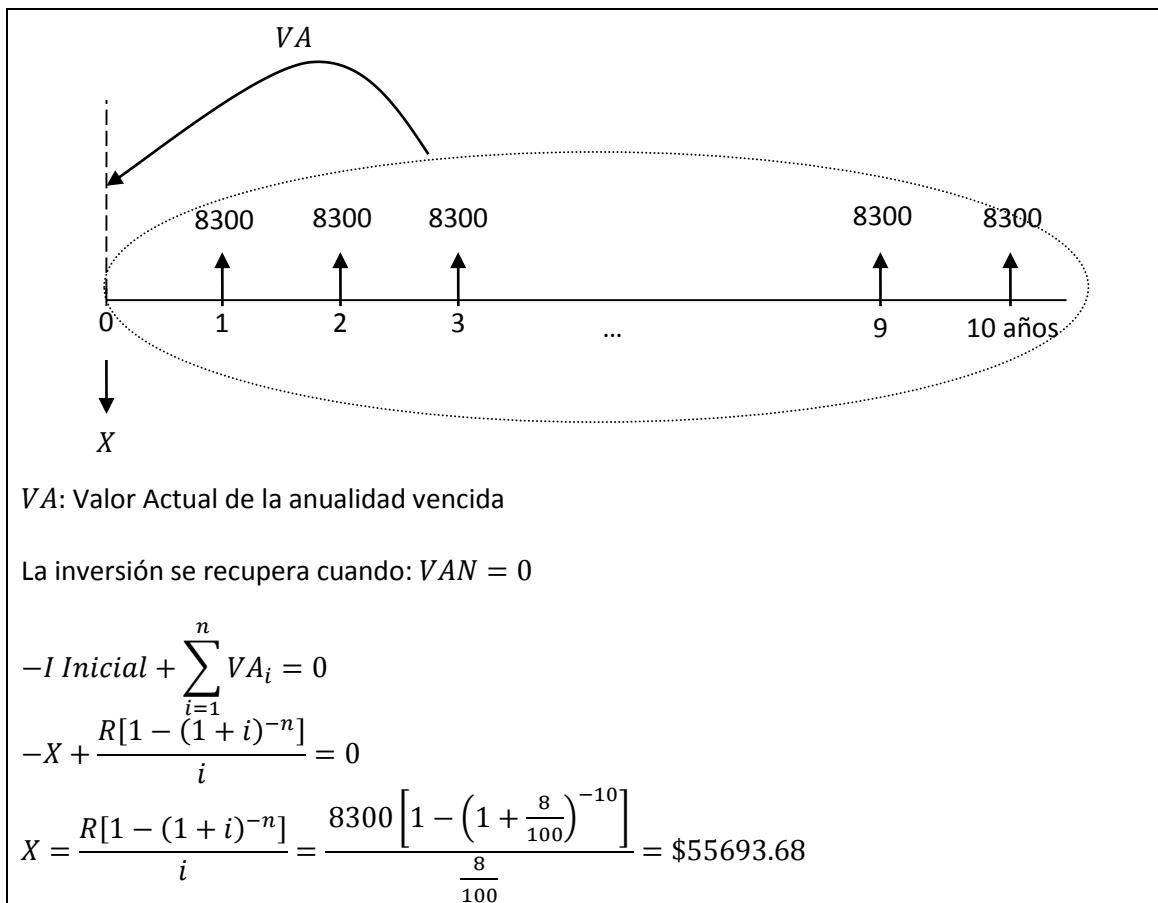
La inversión se recupera cuando: $VAN = 0$

$$\begin{aligned}
 -I \text{ Inicial} + \sum_{i=1}^n VA_i &= 0 \\
 -X + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} &= 0 \\
 X &= \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = \frac{3450 \left[1 - \left(1 + \frac{10}{100} \right)^{-15} \right]}{\frac{10}{100}} = \$26.240,97
 \end{aligned}$$

Comprobando con el programa:

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0				-
1		3 450,00	3 450,00	3 136,36
2		3 450,00	3 450,00	2 851,24
3		3 450,00	3 450,00	2 592,04
4		3 450,00	3 450,00	2 356,40
5		3 450,00	3 450,00	2 142,18
6		3 450,00	3 450,00	1 947,44
7		3 450,00	3 450,00	1 770,40
8		3 450,00	3 450,00	1 609,45
9		3 450,00	3 450,00	1 463,14
10		3 450,00	3 450,00	1 330,12
11		3 450,00	3 450,00	1 209,20
12		3 450,00	3 450,00	1 099,28
13		3 450,00	3 450,00	999,34
14		3 450,00	3 450,00	908,49
15		3 450,00	3 450,00	825,90
Valor Actual Neto (VAN):				26 240,97

5. Un inversionista está considerando la compra de un edificio de departamentos que se ofrece en venta por \$ 90000, debido a su proximidad a una universidad local, se espera que el edificio esté siempre ocupado. Los ingresos anuales se estiman en \$ 10800 y los egresos por mantenimiento se estiman en \$ 2500; el inversionista estima que la propiedad se puede vender en \$ 65000 al final de 10 años. Usando una tasa del 8%, determine si el inversionista debe pagar \$ 90000 por la propiedad.

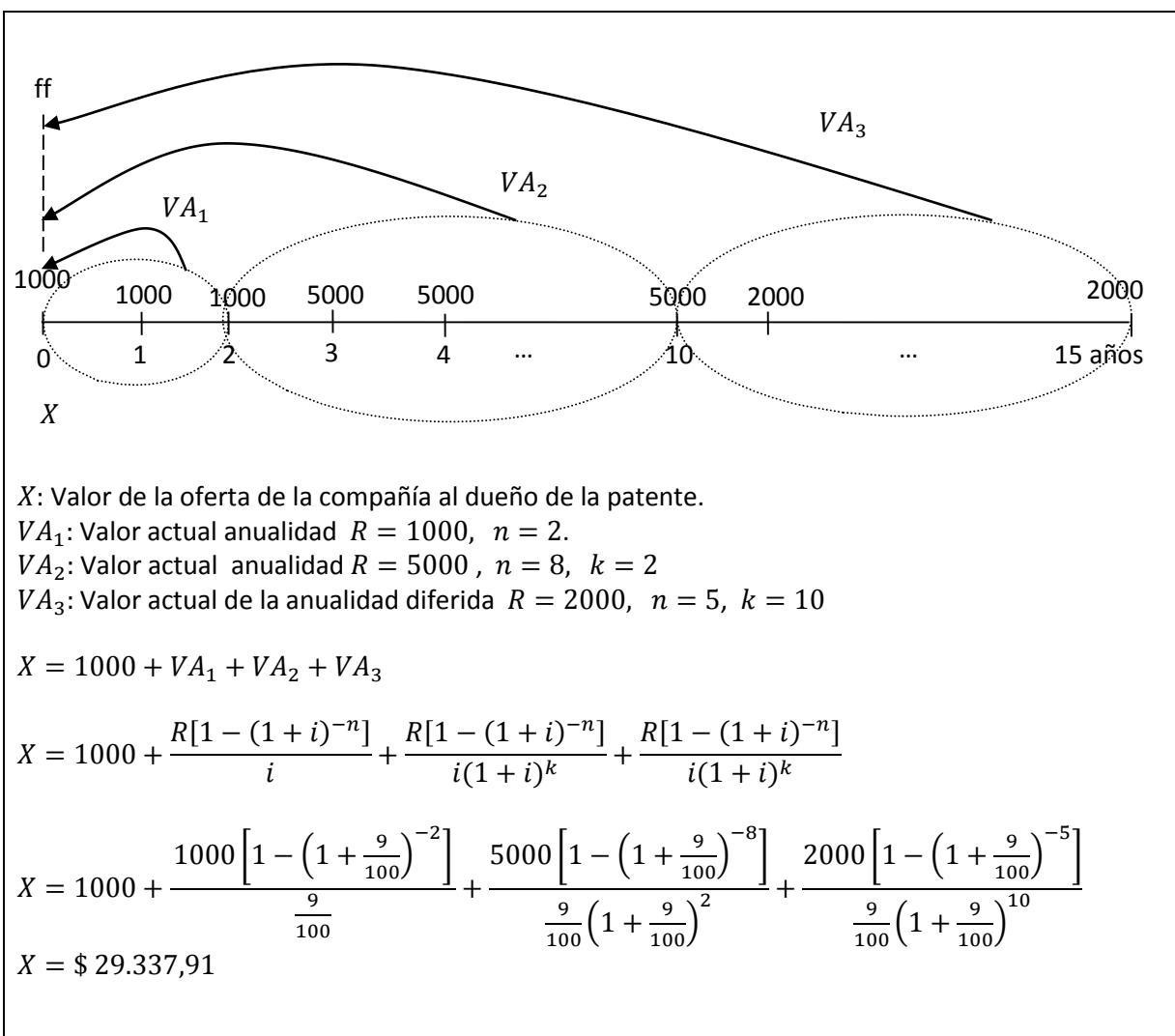


Comprobando con el programa:

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0			-	-
1	2 500,00	10 800,00	8 300,00	7 685,19
2	2 500,00	10 800,00	8 300,00	7 115,91
3	2 500,00	10 800,00	8 300,00	6 588,81
4	2 500,00	10 800,00	8 300,00	6 100,75
5	2 500,00	10 800,00	8 300,00	5 648,84
6	2 500,00	10 800,00	8 300,00	5 230,41
7	2 500,00	10 800,00	8 300,00	4 842,97
8	2 500,00	10 800,00	8 300,00	4 484,23
9	2 500,00	10 800,00	8 300,00	4 152,07
10	2 500,00	75 800,00	73 300,00	33 952,08
Valor Actual Neto (VAN):				85 801,25

Conclusión: No debe pagar \$ 90.000,00; el valor Máximo a pagar debe ser \$ 85 801,25

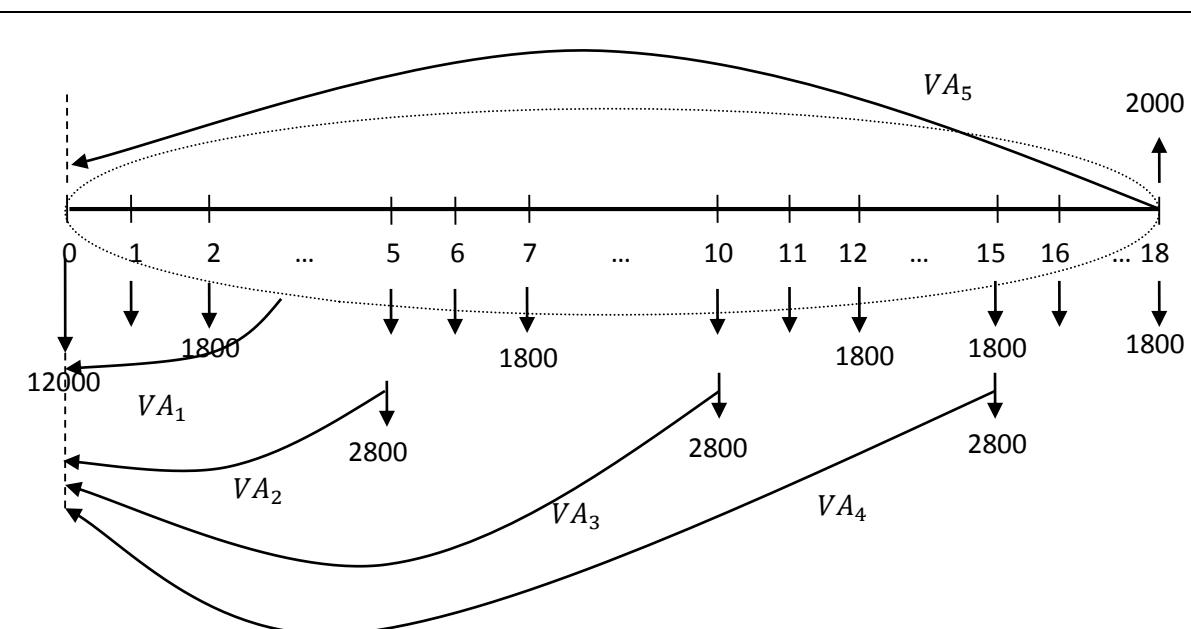
6. El propietario de una patente ha hecho un contrato con la empresa a la que otorga el derecho exclusivo de la misma. La compañía ha acordado pagarle \$ 1000 al año al final de cada uno de los primeros 4 años, durante el período que se desarrolla un mercado para el invento, \$ 5000 al final de cada año, durante los 8 años siguientes, y \$ 2000 al final de cada año durante 5 años finales de los 17 años de vida de la patente. Si la compañía deseara comprar de inmediato la patente, y quedaran 15 años de vigencia al contrato, ¿Cuál será la máxima oferta que la compañía podría permitirse hacer al propietario en este momento, si se requiere una tasa de descuento del 9% sobre tales inversiones?



Comprobación de los datos con el programa Excel:

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0		1 000,00	1 000,00	1 000,00
1		1 000,00	1 000,00	917,43
2		1 000,00	1 000,00	841,68
3		5 000,00	5 000,00	3 860,92
4		5 000,00	5 000,00	3 542,13
5		5 000,00	5 000,00	3 249,66
6		5 000,00	5 000,00	2 981,34
7		5 000,00	5 000,00	2 735,17
8		5 000,00	5 000,00	2 509,33
9		5 000,00	5 000,00	2 302,14
10		5 000,00	5 000,00	2 112,05
11		2 000,00	2 000,00	775,07
12		2 000,00	2 000,00	711,07
13		2 000,00	2 000,00	652,36
14		2 000,00	2 000,00	598,49
15		2 000,00	2 000,00	549,08
Valor Actual Neto (VAN):				29 337,91

7. Una compañía compra una máquina por \$ 12000 con un valor de salvamento esperado de \$ 2000, los gastos de operación de la máquina serán de \$ 1800 por año; además, necesita una revisión general importante cada cinco años, con un costo de \$2800. ¿Cuál es el costo presente equivalente de la máquina si tiene una vida útil de 18 años y la tasa de descuento es 6% anual?



VA_1 : Valor actual de la anualidad $R = 18000$, $n = 18$.

VA_2 : Valor del desembolso único de 2800 en $n = 5$ años.

VA_3 : Valor del desembolso único de 2800 en $n = 10$ años.

VA_4 : Valor del desembolso único de 2800 en $n = 15$ años.

VA_5 : Valor actual del ingreso único de \$ 2000 en $n = 18$ años.

$$VA = -12000 - VA_1 - VA_2 - VA_3 - VA_4 + VA_5$$

$$VA = -12000 - \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} - \frac{M}{(1+i)^n} - \frac{M}{(1+i)^n} - \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$VA = -12000 - \frac{1800 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{100} \right)^{-18} \right]}{\frac{6}{100}} - \frac{2800}{\left(1 + \frac{6}{100} \right)^5} - \frac{2800}{\left(1 + \frac{6}{100} \right)^{10}} - \frac{2800}{\left(1 + \frac{6}{100} \right)^{15}} + \frac{2000}{\left(1 + \frac{6}{100} \right)^{18}}$$

$$VA = -12000 - 19489.69 - 2092.32 - 1563.51 - 1168.34 + 700.69$$

$$VA = \$ - 35.613,17$$

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0	12 000,00		-12 000,00	-12 000,00
1	1 800,00		-1 800,00	-1 698,11
2	1 800,00		-1 800,00	-1 601,99
3	1 800,00		-1 800,00	-1 511,31
4	1 800,00		-1 800,00	-1 425,77
5	4 600,00		-4 600,00	-3 437,39
6	1 800,00		-1 800,00	-1 268,93
7	1 800,00		-1 800,00	-1 197,10
8	1 800,00		-1 800,00	-1 129,34
9	1 800,00		-1 800,00	-1 065,42
10	4 600,00		-4 600,00	-2 568,62
11	1 800,00		-1 800,00	-948,22
12	1 800,00		-1 800,00	-894,54
13	1 800,00		-1 800,00	-843,91
14	1 800,00		-1 800,00	-796,14
15	4 600,00		-4 600,00	-1 919,42
16	1 800,00		-1 800,00	-708,56
17	1 800,00		-1 800,00	-668,46
18	1 800,00	2 000,00	200,00	70,07
Valor Actual Neto (VAN):				-35 613,17

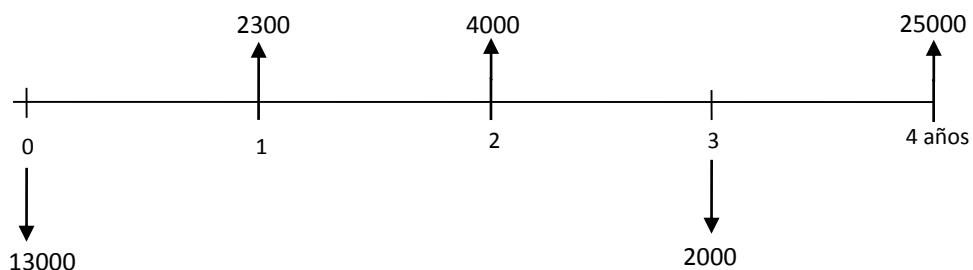
8. Se tienen dos proyectos de inversión:

Proyecto A: \$ -13000, \$ 2300, \$ 4000, \$ -2000, y \$ 25000.

Proyecto B: \$ -16000, \$ -2000, \$ 5000, \$ 6000, y \$ 25000.

Cuál de los dos proyectos es más rentable si se considera una tasa de mercado del 7%.

Proyecto A:



$$VAN = -I \text{ Inicial} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -13000 + VA_1 + VA_2 - VA_3 + VA_4$$

$$VAN = -13000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} - \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4}$$

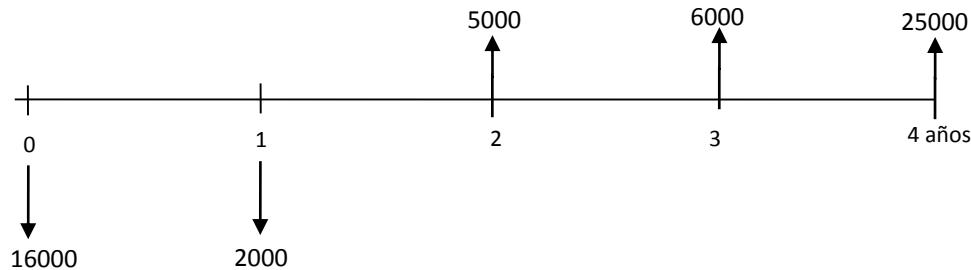
$$VAN = -13000 + \frac{2300}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^1} + \frac{4000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2} - \frac{2000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^3} + \frac{25000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^4}$$

$$VAN = \$ 10.083,07$$

Comprobación con el programa:

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0	13 000,00		-13 000,00	-13 000,00
1		2 300,00	2 300,00	2 149,53
2		4 000,00	4 000,00	3 493,75
3	2 000,00		-2 000,00	-1 632,60
4		25 000,00	25 000,00	19 072,38
Valor Actual Neto (VAN):				10 083,07

Proyecto B:



$$VAN = -I \text{ Inicial} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -16000 - VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4$$

$$VAN = -16000 - \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4}$$

$$VAN = -16000 - \frac{2000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^1} + \frac{5000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2} + \frac{6000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^3} + \frac{25000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^4}$$

$$VAN = \$ 10.468,20$$

Comprobación con el programa:

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0	16 000,00		-16 000,00	-16 000,00
1	2 000,00		-2 000,00	-1 869,16
2		5 000,00	5 000,00	4 367,19
3		6 000,00	6 000,00	4 897,79
4		25 000,00	25 000,00	19 072,38
Valor Actual Neto (VAN):				10 468,20

Decisión:

De acuerdo con el Valor Actual neto obtenido en cada uno de los proyectos, se determina que el Proyecto B es más rentable dado que el $VAN_B > VAN_A$

9. Considere los dos siguientes planes de inversión:

Plan A, tiene un costo inicial de \$ 25000 y requiere inversiones adicionales de \$ 5000 al final del tercer mes y de \$ 8000 al final del séptimo mes. Este plan tiene 12 meses de vida y produce \$ 10000 mensuales de ingresos a partir del primer mes.

Plan B, tiene un costo inicial de \$ 20000 y requiere una inversión adicional de \$10000 al final del octavo mes. Durante sus 12 meses de vida, este plan produce \$ 8000 mensuales de ingresos, \$ 12000 al término del proyecto.

Suponiendo una tasa de descuento del 36% anual capitalizable mensualmente, determine cuál de los dos planes es más conveniente.

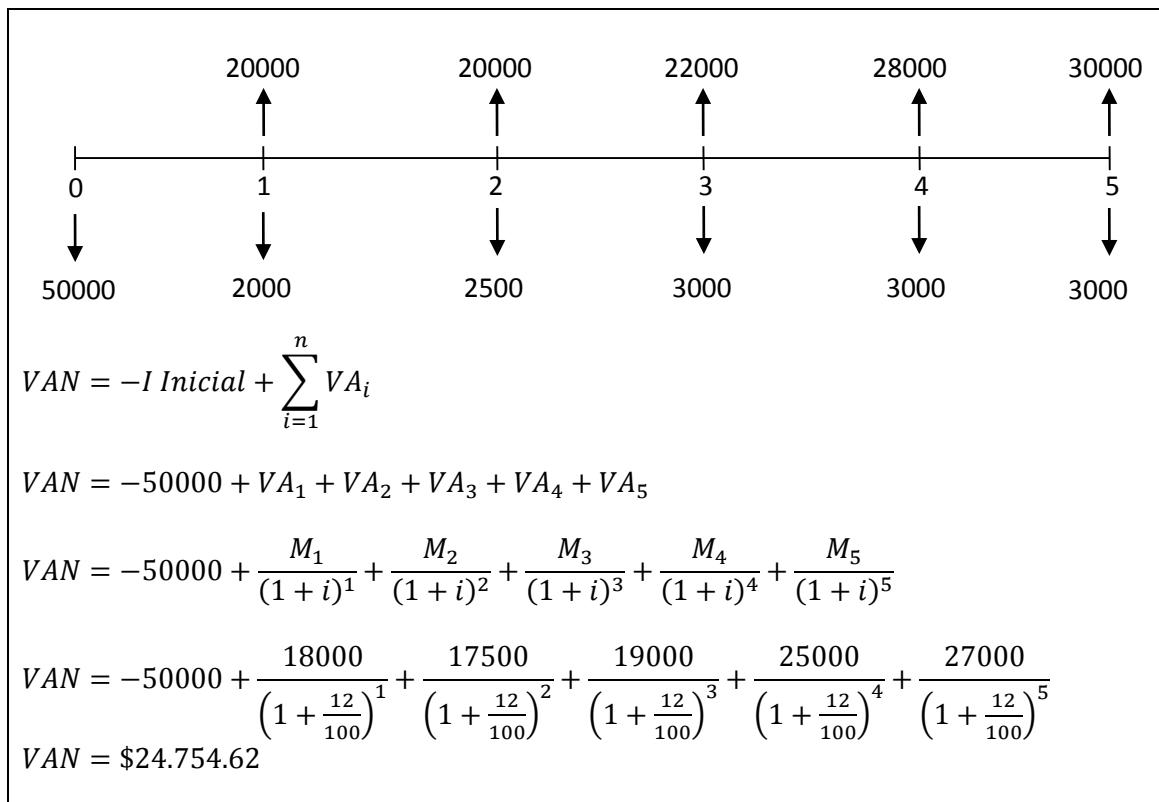
Con el programa Excel se determina el Valor Actual Neto para cada una de las alternativas:

n	ALTERNATIVA PLAN A			ALTERNATIVA PLAN B		
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual
0	25 000,00	-	-25 000,00	20 000,00	-	-20 000,00
1	-	10 000,00	9 708,74	-	8 000,00	7 766,99
2	-	10 000,00	9 425,96	-	8 000,00	7 540,77
3	5 000,00	10 000,00	4 575,71	-	8 000,00	7 321,13
4	-	10 000,00	8 884,87	-	8 000,00	7 107,90
5	-	10 000,00	8 626,09	-	8 000,00	6 900,87
6	-	10 000,00	8 374,84	-	8 000,00	6 699,87
7	8 000,00	10 000,00	1 626,18	-	8 000,00	6 504,73
8	-	10 000,00	7 894,09	10 000,00	8 000,00	-1 578,82
9	-	10 000,00	7 664,17	-	8 000,00	6 131,33
10	-	10 000,00	7 440,94	-	8 000,00	5 952,75
11	-	10 000,00	7 224,21	-	8 000,00	5 779,37
12	-	10 000,00	7 013,80	-	12 000,00	8 416,56
Valor Actual Neto (VAN):			63 459,60	Valor Actual Neto (VAN):		54 543,46

La alternativa más conveniente es aquella que presenta el mayor Valor Actual Neto, entonces se debe tomar como alternativa la del Plan A.

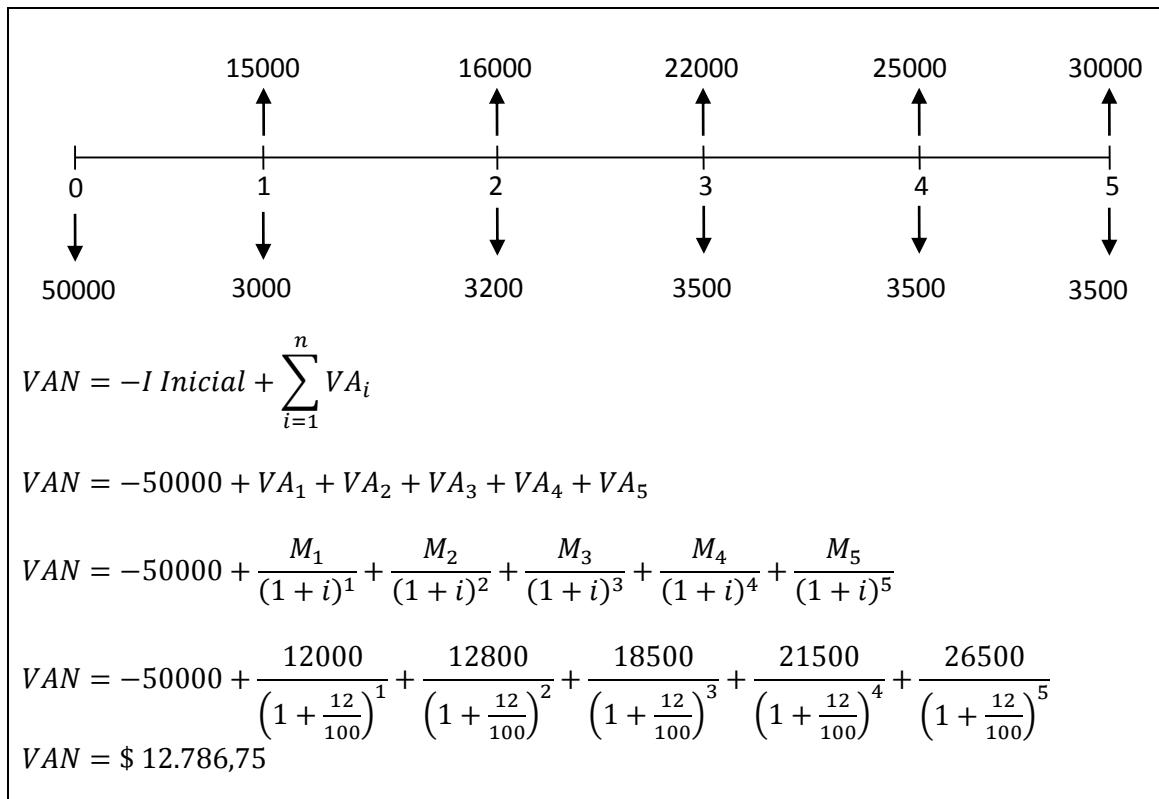
10. A la fecha, la tasa de descuento es igual al 12%; los ingresos y egresos estimados de dos alternativas de un proyecto se dan en la siguiente tabla. Calcular el VAN y decidir cuál es la alternativa más conveniente; el proyecto dura cinco años.

ALTERNATIVA A	0	1	2	3	4	5
INGRESOS		20000	20000	22000	28000	30000
EGRESOS	50000	2000	2500	3000	3000	3000



Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0	50 000,00		-50 000,00	-50 000,00
1	2 000,00	20 000,00	18 000,00	16 071,43
2	2 500,00	20 000,00	17 500,00	13 950,89
3	3 000,00	22 000,00	19 000,00	13 523,82
4	3 000,00	28 000,00	25 000,00	15 887,95
5	3 000,00	30 000,00	27 000,00	15 320,53
Valor Actual Neto (VAN):				24 754,62

ALTERNATIVA B	0	1	2	3	4	5
INGRESOS		15000	16000	22000	25000	30000
EGRESOS	50000	3000	3200	3500	3500	3500



Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja	V Actual
0	50 000,00		-50 000,00	-50 000,00
1	3 000,00	15 000,00	12 000,00	10 714,29
2	3 200,00	16 000,00	12 800,00	10 204,08
3	3 500,00	22 000,00	18 500,00	13 167,93
4	3 500,00	25 000,00	21 500,00	13 663,64
5	3 500,00	30 000,00	26 500,00	15 036,81
Valor Actual Neto (VAN):				12 786,75

Dados los resultados, se observa que la primera alternativa presenta el VAN más alto, entonces la primera alternativa es la más conveniente.

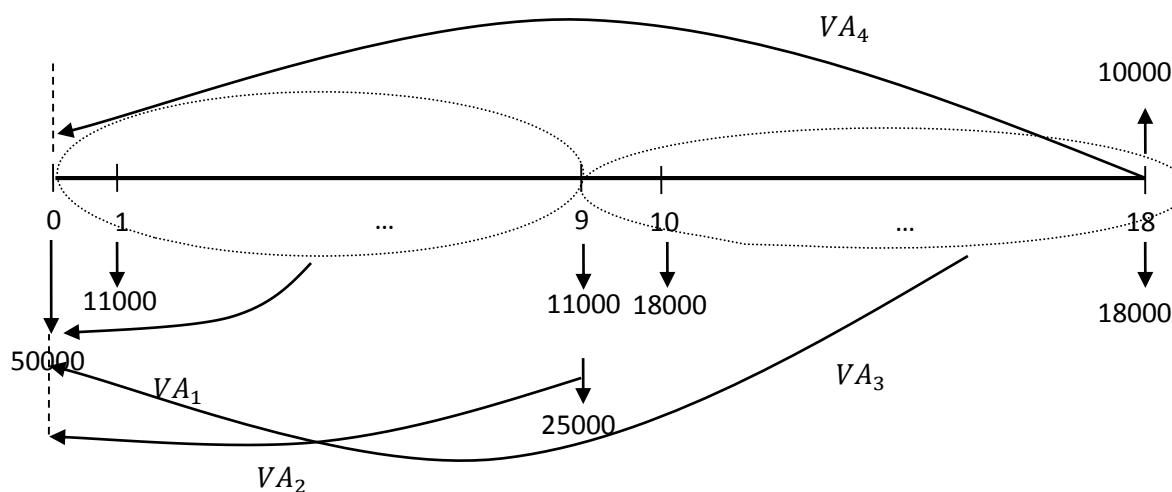
11. Están bajo consideraciones, dos planes para proporcionar ciertas instalaciones a una compañía estatal de servicios públicos. Cada plan está diseñado para proporcionar capacidad suficiente durante los próximos 18 años, para satisfacer el incremento de carga esperado durante ese período. Independientemente del plan que se elija ahora, se prevé que las instalaciones deberán retirarse al final de 18 años y serán repuestas para una nueva planta de un tipo distinto.

El plan A: requiere una inversión inicial de \$ 50000. Posteriormente se hará una inversión de \$ 25000, al final de 9 años; durante los primeros 9 años, los egresos anuales serán de \$ 11000; durante los últimos nueve años serán de \$ 18000. Habrá un valor de rescate de \$ 10000 al final de los 18 años.

El Plan B: requiere una inversión inicial de \$ 30000. Posteriormente se hará una inversión de \$ 30000, al final de 6 años; y, una inversión de \$ 20000 al final de 12 años. Durante los primeros 6 años, los egresos anuales serán de \$ 8000; durante los segundos seis años, de \$ 16000; durante los 6 años finales, de \$ 25000. No habrá valor de rescate al final de los 18 años.

Usando una tasa de descuento del 9%; compare los valores presentes de los egresos netos de ambos planes.

PLAN A



VA_1 : Valor actual de la anualidad vencida $R = 11000$, $n = 9$

VA_2 : Valor actual del desembolso único de 25000 en $n = 9$ años.

VA_3 : Valor actual de la anualidad diferida $R = 18000$, $n = 9$, $k = 9$.

VA_4 : Valor actual del desembolso único de 10000 en $n = 18$ años.

$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -50000 - VA_1 - VA_2 - VA_3 + VA_4$$

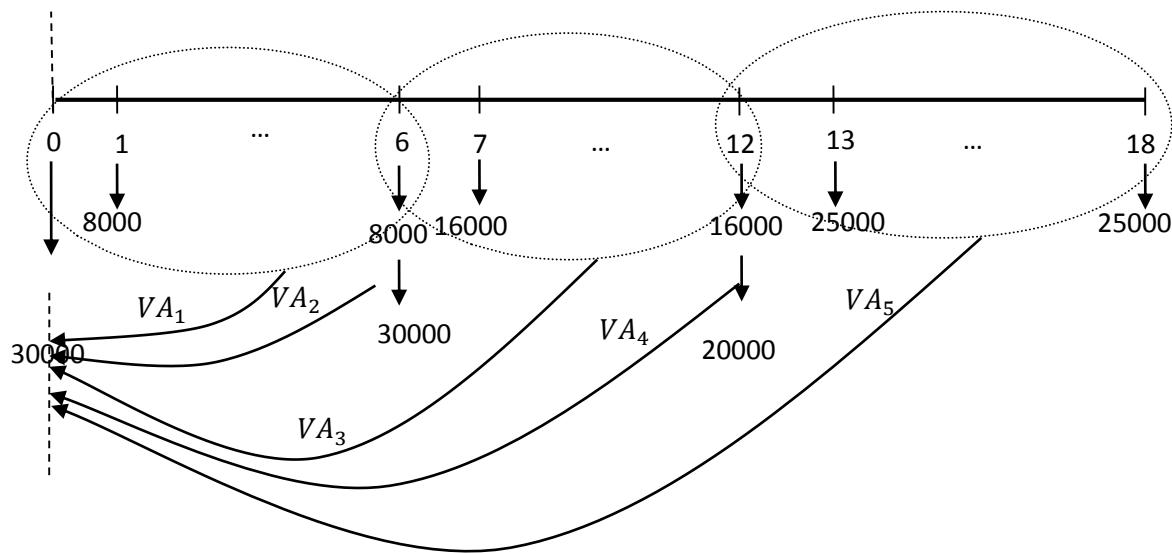
$$VAN = -50000 - \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} - \frac{M}{(1 + i)^n} - \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i(1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n}$$

$$VAN = -50000 - \frac{11000 \left[1 - \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{-9} \right]}{\frac{9}{100}} - \frac{25000}{\left(1 + \frac{9}{100} \right)^9} - \frac{18000 \left[1 - \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{-9} \right]}{\frac{9}{100} \left(1 + \frac{9}{100} \right)^9} + \frac{10000}{\left(1 + \frac{9}{100} \right)^{18}}$$

$$VAN = -50000 - 65947.72 - 11510.69 - 49686.81 + 2119.94$$

$$VAN = \$ - 175.025,28$$

PLAN B



VA₁: Valor actual de la anualidad vencida $R = 8000$, $n = 6$

VA₂: Valor actual del desembolso único de 30000 en $n = 9$ años.

VA₃: Valor actual de la anualidad diferida $R = 16000$, $n = 6$ $k = 6$.

VA₄: Valor actual del desembolso único de 20000 en $n = 12$ años.

VA₅: Valor actual de la anualidad diferida $R = 25000$, $n = 6$ $k = 12$.

$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -30000 - VA_1 - VA_2 - VA_3 - VA_4 + VA_5$$

$$VAN = -30000 - \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} - \frac{M}{(1 + i)^n} - \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i(1 + i)^k} - \frac{M}{(1 + i)^n} - \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i(1 + i)^k}$$

$$VAN = \left[-30 - \frac{8 \left[1 - \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{-6} \right]}{\frac{9}{100}} - \frac{30}{\left(1 + \frac{9}{100} \right)^6} - \frac{16 \left[1 - \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{-6} \right]}{\frac{9}{100} \left(1 + \frac{9}{100} \right)^6} - \frac{20}{\left(1 + \frac{9}{100} \right)^{12}} - \frac{25 \left[1 - \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{-6} \right]}{\frac{9}{100} \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{12}} \right] \times 1000$$

$$VAN = -30000 - 35887.35 - 17888.02 - 42796.91 - 7110.69 - 39872.49$$

$$VAN = \$ - 173.555,46$$

ALTERNATIVA	VALOR ACTUAL NETO
PLAN A	\$-175.025,28
PLAN B	\$-173.555,46
CONCLUSIÓN: El plan B tiene un menor desembolso, este debe recomendarse.	

Comprobación de los resultados utilizando el Programa Excel:

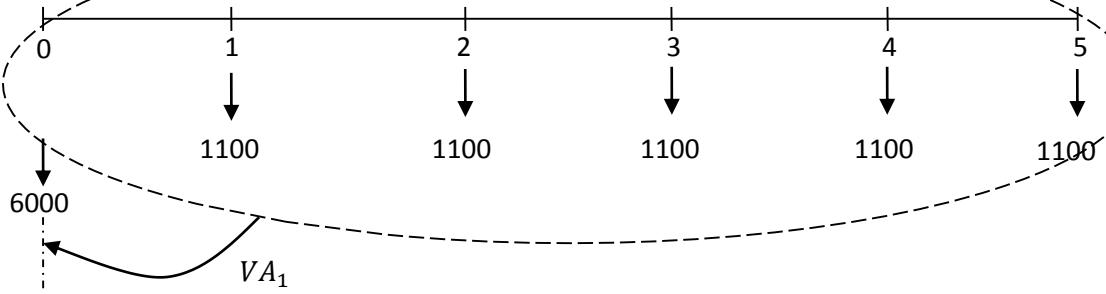
ALTERNATIVA		PLAN A	PLAN B	Equivalente	Tasa de descuento:	9,00%
Número de períodos (n):		18	18	18		
n	ALTERNATIVA PLAN A			ALTERNATIVA PLAN B		
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual
0	50 000,00	-	-50 000,00	30 000,00	-	-30 000,00
1	11 000,00	-	-10 091,74	8 000,00	-	-7 339,45
2	11 000,00	-	-9 258,48	8 000,00	-	-6 733,44
3	11 000,00	-	-8 494,02	8 000,00	-	-6 177,47
4	11 000,00	-	-7 792,68	8 000,00	-	-5 667,40
5	11 000,00	-	-7 149,25	8 000,00	-	-5 199,45
6	11 000,00	-	-6 558,94	38 000,00	-	-22 658,16
7	11 000,00	-	-6 017,38	16 000,00	-	-8 752,55
8	11 000,00	-	-5 520,53	16 000,00	-	-8 029,86
9	36 000,00	-	-16 575,40	16 000,00	-	-7 366,84
10	18 000,00	-	-7 603,39	16 000,00	-	-6 758,57
11	18 000,00	-	-6 975,59	16 000,00	-	-6 200,53
12	18 000,00	-	-6 399,63	36 000,00	-	-12 799,25
13	18 000,00	-	-5 871,22	25 000,00	-	-8 154,47
14	18 000,00	-	-5 386,44	25 000,00	-	-7 481,16
15	18 000,00	-	-4 941,68	25 000,00	-	-6 863,45
16	18 000,00	-	-4 533,66	25 000,00	-	-6 296,74
17	18 000,00	-	-4 159,32	25 000,00	-	-5 776,83
18	18 000,00	10 000,00	-1 695,95	25 000,00	-	-5 299,84
Valor Actual Neto (VAN):		-175 025,28		Valor Actual Neto (VAN):	-173 555,47	

12. Una compañía constructora, debe levantar un edificio temporal para oficinas en el sitio de la construcción. Se proponen dos planes diferentes para la calefacción de este edificio. Se puede usar gas embotellado para horno tipo piso, o radiadores eléctricos que pueden ser instalados en las paredes y en el techo. Se estima que el edificio se usará 5 años antes de desmantelarlo.

La instalación de gas, requerirá una inversión de \$ 6000. Se cree que su valor de salvamento será de cero al final de los 5 años. El costo anual de combustible y mantenimiento se estima en \$ 1100.

La instalación de los radiadores eléctricos requerirá una inversión de \$ 8000; su valor de rescate estimado es de \$ 1000; el costo anual estimado de energía y mantenimiento es de \$ 700. La elección de la instalación eléctrica, causará un pago adicional por impuesto sobre la renta estimado en \$ 100 al año. Compare los valores presentes de los costos de estas alternativas, usando una tasa periódica del 10%.

GAS EMBOTELLADO



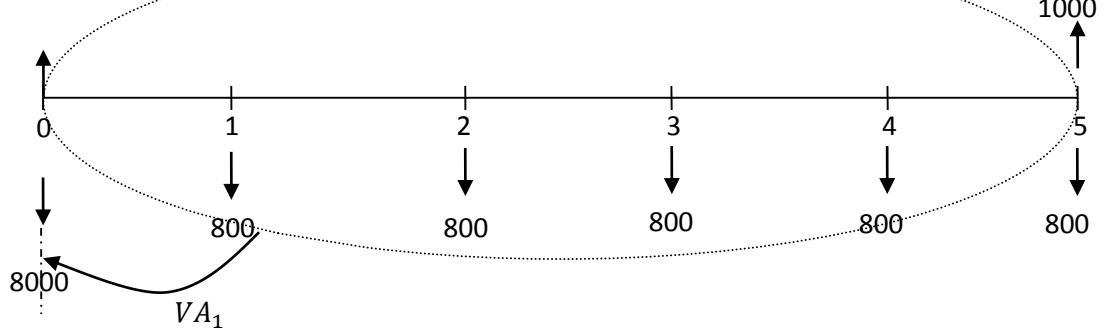
VA_1 : Valor actual de la anualidad vencida $R = 1100$, $n = 5$

$$VAN = -6000 - VA_1$$

$$\begin{aligned} VAN &= -6000 - \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} \\ VAN &= -6000 - \frac{1100 \left[1 - \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{-5}\right]}{\frac{10}{100}} \end{aligned}$$

$$VAN = \$ - 10.169.87$$

ELECTRICIDAD



VA_1 : Valor actual de la anualidad vencida $R = 800$, $n = 5$

$$VAN = -8000 - VA_1 + VA_2$$

$$\begin{aligned} VAN &= -8000 - \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} + M(1 + i)^{-n} \\ VAN &= -8000 - \frac{800 \left[1 - \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{-5}\right]}{\frac{10}{100}} + 1000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{-5} \\ VAN &= \$ - 10.411,71 \end{aligned}$$

ALTERNATIVA		GAS	ELECTRICIDAD	Equivalente	Tasa de descuento:	10,00%
Número de períodos (n):		5	5	5		
Período	ALTERNATIVA GAS			ALTERNATIVA ELECTRICIDAD		
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual
0	6 000,00	-	-6 000,00	8 000,00	-	-8 000,00
1	1 100,00	-	-1 000,00	800,00	-	-727,27
2	1 100,00	-	-909,09	800,00	-	-661,16
3	1 100,00	-	-826,45	800,00	-	-601,05
4	1 100,00	-	-751,31	800,00	-	-546,41
5	1 100,00	-	-683,01	800,00	1000,00	-124,18
Valor Actual Neto (VAN):		-10 169,87		Valor Actual Neto (VAN):		-10 411,71

13. Se están considerando dos sistemas alternativos de abastecimientos de agua para una pequeña comunidad. Compare los valores presentes de los costos de 20 años de servicio usando una tasa i de 11%.

El sistema A: requiere una inversión inicial de \$ 58.000, con reposición de ciertos elementos al final de 10 años a un costo estimado de \$ 16.000. Los costos anuales de operación y mantenimiento serán de \$ 12.000 el primer año y se espera que aumente en \$ 500 cada año y posterior.

El sistema B: requiere una inversión inicial de \$ 72.000 y se espera que dure los 20 años completos sin reposiciones de importancia; los egresos anuales se espera que sean \$ 10.000 el primer año y que aumenten \$ 350 cada año posterior. Ninguno de los sistemas tendrá valor residual neto, al final de período de 20 años.

Como las alternativas presentan diferentes períodos (10 y 20 años); se desarrolla el flujo de caja para un período común equivalente que es el mínimo común múltiplo entre 10 y 20.

Utilizando el programa de Excel se tienen los siguientes resultados:

ALTERNATIVA		A	B	Equivalente	Tasa de descuento:	11,00%
Número de períodos (n):	20	20	20			
Período	ALTERNATIVA A			ALTERNATIVA B		
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual
0	58 000,00	-	-58 000,00	72 000,00	-	-72 000,00
1	12 000,00	-	-10 810,81	10 000,00	-	-9 009,01
2	12 500,00	-	-10 145,28	10 350,00	-	-8 400,29
3	13 000,00	-	-9 505,49	10 700,00	-	-7 823,75
4	13 500,00	-	-8 892,87	11 050,00	-	-7 278,98
5	14 000,00	-	-8 308,32	11 400,00	-	-6 765,35
6	14 500,00	-	-7 752,29	11 750,00	-	-6 282,03
7	15 000,00	-	-7 224,88	12 100,00	-	-5 828,07
8	15 500,00	-	-6 725,86	12 450,00	-	-5 402,38
9	16 000,00	-	-6 254,80	12 800,00	-	-5 003,84
10	32 500,00	-	-11 446,00	13 150,00	-	-4 631,23
11	17 000,00	-	-5 393,82	13 500,00	-	-4 283,32
12	17 500,00	-	-5 002,21	13 850,00	-	-3 958,90
13	18 000,00	-	-4 635,26	14 200,00	-	-3 656,70
14	18 500,00	-	-4 291,90	14 550,00	-	-3 375,52
15	19 000,00	-	-3 971,08	14 900,00	-	-3 114,16
16	19 500,00	-	-3 671,70	15 250,00	-	-2 871,46
17	20 000,00	-	-3 392,65	15 600,00	-	-2 646,27
18	20 500,00	-	-3 132,85	15 950,00	-	-2 437,51
19	21 000,00	-	-2 891,23	16 300,00	-	-2 244,15
20	21 500,00	-	-2 666,73	16 650,00	-	-2 065,16
Valor Actual Neto (VAN):		-184 116,03	Valor Actual Neto (VAN):		-169 078,08	

14. Se están considerando dos tipos posibles de acabado de superficies de carreteras, con estimaciones de su costo por kilómetro como sigue:

Rubro	Tipo X	Tipo Y
Costo Inicial	\$ 36000	\$ 44000
Período de duración del recubrimiento	10 años	15 años
Costo de recubrimiento	\$ 18000	\$ 24000
Costo anual promedio de mantenimiento	\$3400	\$ 1800

Los recubrimientos periódicos implican, la reposición de la superficie de uso solamente, no la base o terreno de asiento. Compare estas alternativas considerando el Valor Presente Neto del costo de 30 años de servicio. Suponga un valor de rescate terminal de cero para ambos tipos de superficie usando $i = 9\%$.

ALTERNATIVA		TIPO X	TIPO Y	Equivalente	Tasa de descuento:	9,00%
Número de períodos (n):		10	15	30		
Período	ALTERNATIVA TIPO X			ALTERNATIVA TIPO Y		
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual
0	36 000,00	-	-36 000,00	44 000,00	-	-44 000,00
1	3 400,00	-	-3 119,27	1 800,00	-	-1 651,38
2	3 400,00	-	-2 861,71	1 800,00	-	-1 515,02
3	3 400,00	-	-2 625,42	1 800,00	-	-1 389,93
4	3 400,00	-	-2 408,65	1 800,00	-	-1 275,17
5	3 400,00	-	-2 209,77	1 800,00	-	-1 169,88
6	3 400,00	-	-2 027,31	1 800,00	-	-1 073,28
7	3 400,00	-	-1 859,92	1 800,00	-	-984,66
8	3 400,00	-	-1 706,35	1 800,00	-	-903,36
9	3 400,00	-	-1 565,45	1 800,00	-	-828,77
10	21 400,00	-	-9 039,59	1 800,00	-	-760,34
11	3 400,00	-	-1 317,61	1 800,00	-	-697,56
12	3 400,00	-	-1 208,82	1 800,00	-	-639,96
13	3 400,00	-	-1 109,01	1 800,00	-	-587,12
14	3 400,00	-	-1 017,44	1 800,00	-	-538,64
15	3 400,00	-	-933,43	25 800,00	-	-7 083,08
16	3 400,00	-	-856,36	1 800,00	-	-453,37
17	3 400,00	-	-785,65	1 800,00	-	-415,93
18	3 400,00	-	-720,78	1 800,00	-	-381,59
19	3 400,00	-	-661,26	1 800,00	-	-350,08
20	21 400,00	-	-3 818,42	1 800,00	-	-321,18
21	3 400,00	-	-556,57	1 800,00	-	-294,66
22	3 400,00	-	-510,62	1 800,00	-	-270,33
23	3 400,00	-	-468,46	1 800,00	-	-248,01
24	3 400,00	-	-429,78	1 800,00	-	-227,53
25	3 400,00	-	-394,29	1 800,00	-	-208,74
26	3 400,00	-	-361,73	1 800,00	-	-191,51
27	3 400,00	-	-331,87	1 800,00	-	-175,69
28	3 400,00	-	-304,46	1 800,00	-	-161,19
29	3 400,00	-	-279,33	1 800,00	-	-147,88
30	3 400,00	-	-256,26	1 800,00	-	-135,67
Valor Actual Neto (VAN):		-81 745,57	Valor Actual Neto (VAN):	-69 081,49		

15. Calcular la TIR para el flujo de fondos: -\$50000, \$ 5000, \$ 6000, \$ 20000, \$ 20000 y \$ 3000.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	50 000,00		-50 000,00
1		5 000,00	5 000,00
2		6 000,00	6 000,00
3		20 000,00	20 000,00
4		20 000,00	20 000,00
5		3 000,00	3 000,00

$$TIR = 2.46\%$$

16. El señor Pérez compró una máquina por \$ 17200, la cual le produce 10000 mensuales y espera venderlo al cabo de un año por \$ 15000. Encuentre la tasa interna de retorno.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	17 200,00		-17 200,00
1		10 000,00	10 000,00
2		10 000,00	10 000,00
3		10 000,00	10 000,00
4		10 000,00	10 000,00
5		10 000,00	10 000,00
6		10 000,00	10 000,00
7		10 000,00	10 000,00
8		10 000,00	10 000,00
9		10 000,00	10 000,00
10		10 000,00	10 000,00
11		10 000,00	10 000,00
12		25 000,00	25 000,00

$$TIR = 58.11\%$$

17. Una persona compra un negocio por \$ 20000, para ponerlo en funcionamiento debe invertir \$ 2000 dentro de un mes. Se espera que el negocio produzca \$ 1000 mensuales a partir del primer mes y durante 11 meses más. Al final de los cuales vende el negocio en \$ 21000. Calcular la TIR.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	20 000,00		-20 000,00
1	2 000,00		-2 000,00
2		1 000,00	1 000,00
3		1 000,00	1 000,00
4		1 000,00	1 000,00
5		1 000,00	1 000,00
6		1 000,00	1 000,00
7		1 000,00	1 000,00
8		1 000,00	1 000,00
9		1 000,00	1 000,00
10		1 000,00	1 000,00
11		1 000,00	1 000,00
12		22 000,00	22 000,00

$$TIR = 3.81\%$$

18. Un ciudadano compró un departamento por \$ 100000, los gastos de escritura y comisión fueron de \$ 20000; espera venderlo dentro de 6 años por \$ 130000. Los ingresos y egresos durante ese tiempo fueron:

Año	Ingresos	Egresos
1	15000	1000
2	15000	1800
3	15000	2500
4	15000	1700
5	15000	1800
6	15000	2500

Si la tasa del mercado al momento de la venta es 9.5%; mediante la TIR, determinar si este ciudadano hizo un buen negocio.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
-	120 000,00		-120 000,00
1,00	1 000,00	15 000,00	14 000,00
2,00	1 800,00	15 000,00	13 200,00
3,00	2 500,00	15 000,00	12 500,00
4,00	1 700,00	15 000,00	13 300,00
5,00	1 800,00	15 000,00	13 200,00
6,00	2 500,00	145 000,00	142 500,00

$TIR = 12.01\%$; Como la TIR obtenida es mayor que la tasa de descuento dada, se concluye que el ciudadano hizo un buen negocio.

19. Se compra un autobús en \$ 720000, los costos de operación y mantenimiento son de \$ 10000 cada año durante los seis años; a partir del séptimo hasta el décimo segundo año los costos de se incrementan en el 10% con respecto al año anterior; los ingresos son de \$ 25000 anuales y al final se vende en \$ 675000 cuando i es 2.25%. Encontrar la TIR y determinar la factibilidad.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	720 000,00		-720 000,00
1	10 000,00	25 000,00	15 000,00
2	10 000,00	25 000,00	15 000,00
3	10 000,00	25 000,00	15 000,00
4	10 000,00	25 000,00	15 000,00
5	10 000,00	25 000,00	15 000,00
6	10 000,00	25 000,00	15 000,00
7	11 000,00	25 000,00	14 000,00
8	12 100,00	25 000,00	12 900,00
9	13 310,00	25 000,00	11 690,00
10	14 641,00	25 000,00	10 359,00
11	16 105,10	25 000,00	8 894,90
12	17 715,61	700 000,00	682 284,39

$TIR = 1.33\%$, No se hizo un buen negocio.

20. Una máquina tiene un costo inicial de \$ 1100 y una vida útil de 6 años, al cabo de los cuales su valor de salvamento es de \$100. Los costos de operación y mantenimiento son de \$ 30 al año y se espera que los ingresos por el aprovechamiento de la máquina asciendan a \$ 300 al año ¿Cuál es la TIR de este proyecto de inversión?

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	1 100,00		-1 100,00
1	30,00	300,00	270,00
2	30,00	300,00	270,00
3	30,00	300,00	270,00
4	30,00	300,00	270,00
5	30,00	300,00	270,00
6	30,00	400,00	370,00

$$TIR = 13.86\%$$

21. Un inversionista de bienes, compra una propiedad en \$ 6000 y la vende 17 años más tarde por \$ 21000. Los impuestos sobre la propiedad fueron \$ 80 el primer año, \$ 90 el segundo y \$ 10 más cada año hasta que fue vendida; ¿Cuál es la tasa de retorno de la inversión?.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	6 000,00		-6 000,00
1	80,00		-80,00
2	90,00		-90,00
3	100,00		-100,00
4	110,00		-110,00
5	120,00		-120,00
6	130,00		-130,00
7	140,00		-140,00
8	150,00		-150,00
9	160,00		-160,00
10	170,00		-170,00
11	180,00		-180,00
12	190,00		-190,00
13	200,00		-200,00
14	210,00		-210,00
15	220,00		-220,00
16	230,00		-230,00
17	240,00	21 000,00	20 760,00

$$TIR = 6.24\%$$

22. Si los impuestos sobre la propiedad en el problema anterior, aumentaron \$ 10 por año durante los primeros 10 años, y luego \$ 20 por año de allí en adelante, cuál es la tasa de retorno de la inversión?

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	6 000,00		-6 000,00
1	80,00		-80,00
2	90,00		-90,00
3	100,00		-100,00
4	110,00		-110,00
5	120,00		-120,00
6	130,00		-130,00
7	140,00		-140,00
8	150,00		-150,00
9	160,00		-160,00
10	170,00		-170,00
11	190,00		-190,00
12	210,00		-210,00
13	230,00		-230,00
14	250,00		-250,00
15	270,00		-270,00
16	290,00		-290,00
17	310,00	21 000,00	20 690,00

$$TIR = 6.14\%$$

23. Una familia compró una casa vieja por \$ 25000, con la idea de hacerla mejoras y luego venderla para negocio. En el primer año en que compraron la casa, gastaron \$ 5000 en mejoras, en el segundo, gastaron \$ 1000 y \$ 800 en el tercero; además, pagaron impuestos sobre la propiedad de \$ 500 anuales durante los tres años, vendiéndose al finalmente en \$ 35.000. Qué tasa de retorno obtuvieron en la inversión?

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	25 000,00		-25 000,00
1	5 500,00		-5 500,00
2	1 500,00		-1 500,00
3	1 300,00	35 000,00	33 700,00

$$TIR = 1.91\%$$

24. Hace cinco años, una persona compró un pequeño edificio de oficinas a un costo de \$ 100000. Los ingresos por renta del edificio excedieron sus egresos, incluyendo sus pagos de impuesto sobre la renta sobre el ingreso gravable, en las siguientes cantidades:

Año	1	2	3	4	5
Cantidad	9500	10000	10500	11000	11500

Esta persona acaba de vender el edificio en \$ 120000, pero tiene que pagar \$ 12500 de impuestos por ganancias de capital, con lo cual, su recuperación neta es \$ 107500. ¿Qué tasa de rendimiento después del impuesto sobre la renta, obtuvo esta persona en su inversión original?

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	100 000,00		-100 000,00
1		9 500,00	9 500,00
2		10 000,00	10 000,00
3		10 500,00	10 500,00
4		11 000,00	11 000,00
5		119 000,00	119 000,00

$$TIR = 11.58\%$$

25. Una empresa proporciona los siguientes datos para analizar si su inversión es rentable: Inversión: \$100000; ingreso mensual por renta promedio: \$ 30000; costo anual de operación \$ 2500, si se espera recuperar su inversión en cinco años calcular la tasa interna de retorno de la inversión.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	100 000,00		-100 000,00
1	2 500,00	30 000,00	27 500,00
2	2 500,00	30 000,00	27 500,00
3	2 500,00	30 000,00	27 500,00
4	2 500,00	30 000,00	27 500,00
5	2 500,00	30 000,00	27 500,00

$$TIR = 11.65\%$$

26. Una empresa requiere hacer una inversión de \$ 150000, y proyecta los siguientes datos: Ingreso anual por ventas \$ 32000; costo anual de operación \$ 7000. Calcular la Tasa Interna de Retorno de la inversión, si esta está programada para 10 años; indique si la inversión es rentable si el costo del dinero está representado con una tasa del 16%.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	150 000,00		-150 000,00
1	7 000,00	32 000,00	25 000,00
2	7 000,00	32 000,00	25 000,00
3	7 000,00	32 000,00	25 000,00
4	7 000,00	32 000,00	25 000,00
5	7 000,00	32 000,00	25 000,00
6	7 000,00	32 000,00	25 000,00
7	7 000,00	32 000,00	25 000,00
8	7 000,00	32 000,00	25 000,00
9	7 000,00	32 000,00	25 000,00
10	7 000,00	32 000,00	25 000,00

$$TIR = 10.56\%, \text{ No es rentable.}$$

18.6. PROBLEMAS PROPUESTOS

VALOR ACTUAL NETO

1. Encuentre el Valor Actual Neto del siguiente flujo de caja: Desembolso inicial \$ 150000; \$ 35000; \$ 35000; \$ 120000 si la tasa de mercado está al 8.5%.

R: \$ 5.937,97

2. Cuál es el Valor Actual Neto de los flujos anuales que se indica: \$ -200000; 0; 0; 0; 0; \$ 80000; \$ 80000; \$ 80000; \$ 20000; \$ 20000; \$ 20000. Considere la tasa de mercado en el 4.5%.

R: \$ 67.300,91

3. Se compra un negocio en \$ 250000 y se recibe utilidades durante 6 años por \$ 80000 y luego para liquidar activos y personal, al sexto año, se debe pagar \$ 35000. Cuál es el Valor Actual Neto si la tasa de descuento está al 18%.

R: \$ 16.843,10

4. Se compra una casa en \$ 350000 y se renta un mes más tarde por \$ 5000 mensuales; al final del año se vende la casa en \$ 400000, cuál es el Valor actual neto de la inversión si la tasa de descuento es el 12% capitalizable mensualmente.

R: \$ 68.957,51

5. Una empresa durante un año tiene egresos mensuales de \$ 1500 e ingresos trimestrales de \$ 8500; si la tasa de mercado es de 9% efectivo y tuvo un egreso inicial de \$ 50000, cuál es el Valor Actual Neto de la transacción?

R: \$ 2.826,43

6. Se consideran dos alternativas en un proyecto de inversión:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4
Alternativa A	-1500	2300	4000	-2000	3000
Alternativa B	-1700	-2000	5000	6000	2000

Si la tasa de mercado es de 6.5% Cual de las alternativas se debe seleccionar para realizar el proyecto de inversión?

R: VAN (A): \$ 4.862,53; VAN (B): 7.352,10; Alternativa B.

7. A una empresa se le plantea dos alternativas de inversión, que suponen un desembolso y los flujos netos de caja indicados en el siguiente cuadro:

Proyecto de inversión	Desembolso inicial	FLUJOS NETOS DE CAJA			
		Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Inversión A	10000	5000	4000	5000	2000
Inversión B	14000	3000	-1000	6000	2800

Calcular cuál de estas inversiones es más rentable según el criterio del Valor Actual Neto de cada una de las inversiones, si el interés es del 8%,

R: \$ VAN (A): 3.498,21; VAN (B): \$ -3.453,81 Alternativa A.

8. La señora López quiere comenzar un negocio de confección de ropa deportiva, para ello necesita comprar varias máquinas, que representan un importe de \$19000, además, debe adquirir materia prima (hilo, tela, botones, etc.) por un total de \$3000. Para financiar esta inversión tiene que pedir un préstamo a una entidad financiera, la entidad financiera sólo le dará el préstamo si el proyecto resulta rentable económicamente; se cree que podrá tener ingresos anuales durante 4 años por \$ 10000 y que la empresa se liquidará al final del cuarto año, con el valor de los activos en este momento de \$ 3500; considerando una tasa de descuento del 5% encuentre el Valor Actual Neto y establezca la factibilidad del proyecto.

R: \$ 16.338,96 (proyecto factible a la tasa de descuento indicada)

9. Una empresa se plantea la adquisición de una máquina que tiene una vida útil de 4 años. La inversión supone desembolsar inicialmente \$5000, y \$ 600 anuales por mantenimiento; de la misma se van a derivar ingresos de \$ 1800 cada año. Sabiendo que el valor residual de la máquina es de \$ 400 y la tasa de descuento es del 5%, calcular el VAN de la inversión y determinar si el negocio es rentable.

R: \$ - 415,78 (negocio no rentable a la tasa de descuento indicada).

10. En una empresa se plantean dos proyectos de inversión (Alfa y Omega). El proyecto Alfa supone invertir inicialmente \$ 125.000, esperándose obtener en 5 años un flujo neto anual de \$ 30000. El proyecto Omega supone la misma inversión inicial, pero flujos que se esperan en los cinco años de su vida son: \$ 24000 el primer año, \$ 28000 el segundo, \$ 32000 el tercero, \$ 36000 el cuarto y \$ 40.000 el quinto año. Siendo la tasa de inversión de 8% ¿qué inversión de las dos es más aconsejable valorándolas por el método del VAN.

R: VAN ALFA \$ 94.781,30; VAN OMEGA \$ 100.314,74; Proyecto Omega.

11. Sean dos proyectos de inversión:

Proyecto 1: Desembolso inicial de \$ 250000, con rentas anuales de \$ 50000 durante 10 años.

Proyecto 2: Desembolso inicial de \$ 320000, con rentas anuales de 60000, durante 10 años.

Se pide seleccionar el mejor proyecto de inversión tomando en cuenta una tasa de inversión del 10%.

R: VAN (1): \$ 57.228,36; VAN (2) \$ 48.674,03; Proyecto 1.

12. Una empresa conservera tiene que decidir cuál de estas dos cadenas de envasado instalar, la que ofrece el fabricante X exige un desembolso inicial de \$60000 y los flujos de caja netos que se prevén en los próximos cuatro años son \$12000 el primer año, \$18000 el segundo año, \$ 20000 el tercero y \$ 24000 el cuarto. La que ofrece el fabricante Y requiere un desembolso inicial de \$80000 y los flujos de caja netos previsibles en los próximos cuatro años son de \$ 16000, \$ 24000, \$ 28000, y \$ 30000 respectivamente. Si la tasa de mercado es del 4.5% determine mediante el VAN cual es, para la empresa, la alternativa más conveniente?

R: VAN (X): \$ 5.617,80; VAN (Y): \$ 6.981,67; Fabricante Y

13. Una empresa de servicios turísticos está revisando incluir una nueva oferta de rutas turísticas combinando deportes de aventura con estancias en casas rurales, pero al principio únicamente lanzará una de ellas al mercado, la empresa desea saber, considerando una vida útil de 3 años para cada uno de los proyectos, cuál es la que tendría que lanzar antes al mercado. Para cada una de las actividades se registra en la tabla siguiente, el desembolso inicial, así como los ingresos y gastos de los 3 años de vida útil.

PERÍODO	DEPORTES DE AVENTURA		ESTANCIAS EN CASAS RURALES	
	DESEMBOLSOS	INGRESOS	DESEMBOLSOS	INGRESOS
0	10000		9600	
1	2000	30000	6800	16000
2	2600	16000	5040	24000
3	4600	14000	3000	20000

Con una tasa de descuento del 5% cuál de las alternativas debería optar la empresa de servicios turísticos?

R: VAN (Aventura): \$36.940,94; VAN (Estancia): \$ 31.044,42; Alternativa Deportes de Aventura

TASA INTERNA DE RETORNO

14. Dado el siguiente flujo de caja: Desembolso inicial de \$ 100000 e ingresos anuales de 80000; 30000; 20000; 15000; 2000 determine la Tasa interna de retorno.

R: 25,19%

15. Se invierte en un negocio \$ 175000 y se obtiene utilidades anuales de \$ 40000 durante 8 años, encuentre la tasa interna de retorno.

R: 15,78%

16. Calcular la tasa interna de retorno de un negocio cuya inversión inicial es de \$ 185000 y produce utilidades de \$ 25000 anuales a perpetuidad.

R: 12,15%.

17. Un proyecto de inversión se presenta en dos alternativas:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4
Alternativa A	-70000	30000	30000	30000	10000
Alternativa B	-70000	10000	20000	60000	10000

De acuerdo con el criterio de la Tasa Interna de Retorno y con una tasa de descuento del 15%, cuál de las dos alternativas es más conveniente?

R: TIR (alternativa A) 18,32%; TIR (Alternativa B) 14,36%; Alternativa A.

18. Un proyecto de inversión a fin de cada año proporcionó las siguientes utilidades: \$ 3000, \$5000, \$ 2000, \$ 4000, \$ 10000. Si la TIR fue del 8%, determine el valor de la inversión inicial.

R: \$ 18.398,09

19. Determine la tasa interna de retorno de un negocio de explotación minera cuya inversión inicial es de \$ 500000; y luego es posible recibir utilidades anuales durante 8 años por \$ 120000, y finalmente, un año después de recibir la última utilidad, para liquidar debe pagarse \$ 32000.

R: 16,81%

20. Se compra una máquina por \$ 250000, la cual produce utilidades por \$ 65000 anuales durante 10 años de vida útil, los costos de mantenimiento de la máquina representan \$ 2500 anuales y finalmente el valor de salvamento de la máquina luego de cumplir con la vida útil, es de \$ 35000. Encuentre la Tasa Interna de Retorno de esta inversión.

R: 22%

21. Una empresa de construcciones compra acciones en “Cementos del Valle” mediante una inversión inicial de \$ 850000, produciendo una utilidad anual de \$ 150000; al final de 10 años liquida las acciones recibiendo \$1185000, cuál es el valor de la TIR.

R: 19,22%

22. Un ciudadano compró un departamento por \$ 210000 y lo vende luego de un año en \$300000; si por mantenimiento debe pagar \$ 3500 cada trimestre vencido y recibe como alquiler por adelantado \$ 10000 mensuales cuál es la Tasa interna de retorno de la inversión?

R: 6,97%

BIBLIOGRAFÍA

- ALVAREZ Arango Alberto, Matemáticas Financieras, Editorial Mc Graw Hill, Bogotá 1995.
- AYRES Jr. Frank, Matemáticas Financieras, Editorial Mc Graw Hill, Mexico 1998.
- BACA Currea Guillermo, Excel y la Calculadora financiera aplicados a la Ingeniería Económica, Fondo Educativo Panamericano, Bogotá 2002.
- BLANK Leland, TARQUIN Anthony, Ingeniería Económica, Editorial Mc Graw Hill, México 1983.
- CISSELL Robert, CISSELL Helen, FLASPOHLER David, Matemáticas Financieras, Editorial CECSA, México 1996.
- GARCÍA González Enrique, Matemática Financiera, Mc Graw Hil, Mexico 2001.
- GRANT Eugene, GRANT W, LEAVENWORTH Richard, Principios de Ingeniería Económica, Editorial Continental, México 1995.
- MASSÉ, Pierre, La elección de las inversiones. Wikipedia, 1963
- MICROSOFT Office, Manual de Usuario Microsoft EXCEL, Microsoft Corporation, USA 1994.
- MORA Zambrano Armando, Matemática Financiera, Editorial Enfoque, Colombia 2010.
- PORTUS Govinden Lincoyán, Matemáticas Financieras, Editorial Mc Graw Hill, Mexico 1985.
- RODRÍGUEZ Mariano, & GARCÍA Fronti Javier, ABC de Acciones y Bonos con Microsoft Excel, Omicron System SA, Buenos Aires 2002.
- SEPULVEDA J, SOUDER W, GOTTFRIED B, Ingeniería Económica, Serie de Compendios Schaum's, Editorial Mc Graw Hill, México 1984.
- SPIEGEL Murray R, Algebra superior, Serie de Compendios Schaum's, Mc Graw Hill, Mexico 1990.
- VEGA O Celio, Ingeniería Económica, Ediciones Gráficas Mediavilla, Quito 1983.

Webgrafía

<http://csh.itz.uam.mx/cursos/gerardo/uam/matefin/amortización.pdf>. (2015).

<http://www.monografias.com/trabajos29/matematicas-financieras-intro/matematicas-financieras-intro.shtml>. (2015).

<http://www.economia.so/2013/10/dinero>. (2013).

Anexo N° 1.- NÚMERO DE CADA DÍA DEL AÑO A PARTIR DEL 1 DE ENERO												
Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	
1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	
2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	
3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	
4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	
5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	
6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	
7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	
8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	
9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	
10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	
11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	
12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	
13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	
14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	
15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	
16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	
17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	
18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	
19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	
20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	
21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	
22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	
23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	
24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	
25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	
26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	
27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	
28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	
29	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	
30	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	
31	90	151	212	243	304	365	

Acerca del autor:



Daniel Herrera Aráuz, Quito (1960), realizó sus estudios secundarios en el Colegio Nacional Mejía, es Ingeniero Civil y Magíster en Docencia Matemática, Título y Grado otorgados por la Universidad Central del Ecuador; además tiene un Diplomado Superior en Gestión de Proyectos otorgado por la Facultad de Ciencias Económicas de la misma Universidad.

Desde 1979 ha desempeñado la cátedra de Matemática a nivel de enseñanza media y superior; desde 1993 es profesor de Matemática Financiera y Estadística en la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central del Ecuador.

- ☞ Profesor de Matemática Aplicada y Estadística en la Dirección de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central del Ecuador.
- ☞ Profesor de Matemática Financiera y Estadística en el Instituto de Altos Estudios Nacionales (IAEN).
- ☞ Profesor de Matemática Aplicada, Estadística y Matemática Financiera en la Dirección General de Posgrados de la Universidad Tecnológica Equinoccial.
- ☞ Instructor de Excel y Tablas Dinámicas en el Centro de Educación Continua de la Escuela Politécnica Nacional.
- ☞ Instructor de SPSS en el Centro de Educación Continua de la Universidad Tecnológica Equinoccial.

Comentarios: danielherrera_1960@hotmail.com
www.cedicaped.com

Pedidos a: 0992745563; 022801667; 023444480

ISBN: 978-9942-21-782-0

A standard 1D barcode representing the ISBN number 978-9942-21-782-0. Below the barcode, the numbers 9 789942 217820 are printed.