

Машинное обучение, ФКН ВШЭ

Семинар №9

1 Градиентный бустинг

На лекциях обсуждался градиентный бустинг — один из самых мощных методов в машинном обучении. Он позволяет воспользоваться выразительной силой решающих деревьев и при этом контролировать их переобучение. Ниже мы пройдем по основным блокам градиентного бустинга и поймем, почему они устроены именно так.

Для начала вспомним основные принципы градиентного бустинга. Будем искать алгоритм, оптимизирующий некоторую дифференцируемую функцию потерь $L(y, z)$, в виде взвешенной суммы базовых алгоритмов:

$$a_N(x) = \sum_{n=0}^N \gamma_n b_n(x).$$

Как правило, веса γ_n не подбираются и полагаются равными единице (поскольку, как правило, в деревьях всё равно потом тщательно подбираются прогнозы в листьях), но пока будет рассматривать общий случай.

Идея бустинга заключается в последовательном построении алгоритмов, каждый из которых учитывает ошибки построенной до сих пор композиции:

$$\sum_{i=1}^{\ell} L(y_i, a_{N-1}(x_i) + \gamma_N b_N(x_i)) \rightarrow \min_{b_N, \gamma_N}$$

После выбора каких-нибудь простых γ_0 и $b_0(x)$ (например, для задачи регрессии можно положить $\gamma_0 = 1$ и $b_0(x) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} y_i$) все последующие базовые алгоритмы стараются **приблизить антиградиент функционала ошибки**, взятый в точках $z = a_{N-1}(x_i)$:

$$s_i = - \left. \frac{\partial L(y_i, z)}{\partial z} \right|_{z=a_{N-1}(x_i)}$$

При этом приближается антиградиент с точки зрения квадратичной функции потерь:

$$b_N(x) = \arg \min_{b \in \mathcal{A}} \sum_{i=1}^{\ell} (b(x_i) - s_i)^2$$

Подбор коэффициентов производится просто через задачу одномерной оптимизации:

$$\gamma_N = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{\ell} L(y_i, a_{N-1}(x_i) + \gamma b_N(x_i))$$

Обсудим теперь подробнее некоторые моменты.

§1.1 Почему градиентный бустинг устроен именно так?

Зачем сдвиги в бустинге считаются через производные функции потерь?

Почему нельзя использовать сдвиги вида $y_i - a_{N-1}(x_i)$? Казалось бы, если удастся хорошо приблизить эти отклонения с помощью $b_N(x)$, то будет выполнено $a_{N-1}(x_i) + b_N(x_i) \approx y_i$.

Мы решаем сложные задачи, в которых, скорее всего, ещё и не идеальные данные, есть шумы, выбросы и так далее. Это означает, что не стоит рассчитывать на получение непереобученной модели с нулевой ошибкой на обучающей выборке. Мы это понимаем, и поэтому через функцию потерь определяем, какие ошибки более приемлемы, чем другие. Если использовать сдвиги, равные разности правильного ответа и прогноза текущей композиции, то мы полностью игнорируем эти требования. Разберём несколько примеров.

Начнём с регрессии. Допустим, у нас несимметричная функция потерь, где мы сильнее штрафует за завышение прогноза:

$$L(y, z) = \frac{1}{2}(10[z \geq y] + [z < y])(y - z)^2. \quad (1.1)$$

Рассмотрим два объекта x_1 и x_2 с правильными ответами $y_1 = y_2 = 0$ и прогнозами текущей композиции $a_{N-1}(x_1) = 5$ и $a_{N-1}(x_2) = -5$. Если взять сдвиги, равные $y_i - a_{N-1}(x_i)$, то базовая модель будет пытаться одинаково скорректировать прогнозы на обоих объектах. Но, конечно, надо сильнее сконцентрироваться на коррекции прогноза на первом объекте, поскольку на нём штраф больше: $L(0, 5) = 125 > 12.5 = L(0, -5)$. Сдвиги, посчитанные через частные производные, лучше отражают приоритеты: $s_1 = -50$, $s_2 = 5$. При этом не страшно, что на первом объекте мы сделаем слишком большую корректировку — это будет исправлено с помощью веса γ_N базовой модели или с помощью других техник.

Обсудим теперь обучение на абсолютную ошибку $L(y, z) = |y - z|$. Вычислим для неё сдвиги:

$$s_i = - \left. \frac{\partial |y_i - z|}{\partial z} \right|_{z=a_{N-1}(x_i)} = \text{sign}(y_i - z) \Big|_{z=a_{N-1}(x_i)} = \text{sign}(y_i - a_{N-1}(x_i))$$

И это снова более логично, чем обучение на $y_i - a_{N-1}(x_i)$! Мы знаем, что с точки зрения квадратичной ошибки даже небольшое уменьшение серьёзной ошибки оказывается лучше, чем доведение небольшой ошибки до нуля:

$$L(0, 1000) - L(0, 999) = 1999 > 1 = L(0, 1) - L(0, 0).$$

Поэтому для квадратичной ошибки разумно использовать сдвиги $y_i - a_{N-1}(x_i)$, поскольку чем больше отклонение от правильного ответа, тем больше штраф и тем

сильнее надо корректировать прогнозы. У абсолютной ошибки такого свойства нет, изменения штрафа не зависят от отклонения прогноза от факта. Поэтому независимо от того, на каком объекте мы приблизим прогноз к правильному ответу на единицу, средняя абсолютная ошибка улучшится на одну и ту же величину. У нас как раз получилось, что сдвиги на всех объектах одинаковы по модулю и отличаются лишь знаком — это соответствует описанному выше свойству абсолютной ошибки.

Перейдём к классификации. Если у нас два класса ($\mathbb{Y} = \{-1, +1\}$), и сама композиция также возвращает прогноз из \mathbb{Y} , то отклонения всегда будут принимать значения из небольшого множества: $|y_i - a_{N-1}(x_i)| \in \{0, +2\}$. Получается, что если модель уже выдаёт правильный ответ, то сдвиги будут равны нулю, и никакие модификации для этого объекта вноситься не будут. Разумеется, это нас не устраивает — как правило, функции потерь в классификации стараются максимизировать отступ (или хотя бы довести его до определённого положительного значения), а полученные нами сдвиги никак не зависят от отступа.

Чтобы это исправить, договоримся, что наша композиция $a_N(x)$ будет выдавать вещественные числа, и по смыслу они будут являться оценками *логита*, то есть логарифма отношения вероятности положительного класса к вероятности отрицательного класса:

$$a_N(x) = \log \frac{p(y = +1 | x)}{1 - p(y = +1 | x)}$$

Если выразить отсюда вероятность, то получится

$$p(y = +1 | x) = \sigma(a_N(x)) = \frac{1}{1 + \exp(-a_N(x))}$$

То есть сигмоида от модели будет оценивать вероятность положительного класса. Эту же идею мы использовали при обучении линейных классификаторов — там скалярное произведение как раз оценивало логиты. С таким подходом обучение на $y_i - a_{N-1}(x_i)$ выглядит ещё менее логичным, поскольку в этом случае мы будем пытаться уменьшить отступ там, где он большой положительный, то есть по сути будем запрещать модели быть уверенной в своём ответе.

В завершение посчитаем сдвиги для *логистической функции потерь*: $L(y, z) = \log(1 + \exp(-yz))$. Для этого вспомним, что логистическая функция потерь выражается через сигмоиду $\sigma(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$ следующим образом:

$$L(y, z) = \log \left(\frac{1}{\sigma(yz)} \right) = -\log \sigma(yz)$$

Далее, пользуясь формулой для производной сигмоиды $\sigma'(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x))$, получаем

$$\begin{aligned} s_i &= \left. \frac{\partial \log \sigma(y_i z)}{\partial z} \right|_{z=a_{N-1}(x_i)} = \frac{1}{\sigma(y_i z)} \sigma(y_i z)(1 - \sigma(y_i z)) y_i \Big|_{z=a_{N-1}(x_i)} = \\ &= (1 - \sigma(y_i a_{N-1}(x_i))) y_i = \frac{y_i}{1 + \exp(y_i a_{N-1}(x_i))}. \end{aligned}$$

Заметим, что чем больше отступ, тем меньше будут сдвиги по модулю.

Почему базовая модель приближает сдвиги по MSE, а не по исходной функции потерь? Казалось бы, надо везде, где можно, использовать исходную функцию потерь, в том числе и для обучения базовой модели:

$$\sum_{i=1}^{\ell} L(s_i, b_N(x_i)) \rightarrow \min_{b_N}$$

Функция потерь задаёт штрафы для прогнозов моделей. При этом сдвиги s_i уже содержат в себе информацию о том, в какую сторону и как сильно надо корректировать прогнозы композиции, и будет разумно аппроксимировать их с одинаковой важностью для всех объектов. Если же и здесь использовать исходную функцию потерь, то иногда можно получить странные эффекты.

Вернёмся к несимметричной функции потерь (1.1). У нас было два объекта с правильными ответами $y_1 = y_2 = 0$, прогнозами текущей композиции $a_{N-1}(x_1) = 5$ и $a_{N-1}(x_2) = -5$ и сдвигами $s_1 = -50$, $s_2 = 5$. Наша функция потерь будет сильнее поощрять алгоритмы, которые выдадут на первом объекте корректировку сильнее -50 , а на втором объекте — до 5. Но это не имеет никакого смысла, поскольку дерево лишь должно выучить, уменьшаем или увеличиваем мы выход композиции на каждом объекте, и изменение на первом объекте должно быть больше относительно изменения на втором объекте.

В случае с классификацией всё ещё хуже. Например, если мы работаем с логистической функцией потерь, то при обучении одной модели на классы она имеет смысл правдоподобия, а также заставляет модель корректно оценивать вероятности классов. Если же в неё вместо правильных классов подставить сдвиги, то оптимизационную задачу будет достаточно сложно проинтерпретировать.

Заметим, что в то же время существуют способы сильнее учитывать исходную функцию потерь в процессе обучения базовых моделей — мы разберём их, когда будем обсуждать XGBoost и связанные с ним модификации классического алгоритма.

Отметим также, что минимизация MSE имеет смысл в бустинге по ещё одной причине. Распишем этот функционал:

$$\sum_{i=1}^{\ell} (b_N(x_i) - s_i)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} (b_N^2(x_i) - 2s_i b_N(x_i) + s_i^2).$$

Последнее слагаемое не зависит от модели и поэтому никак не повлияет на решение оптимизационной задачи. Остаются два слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{\ell} (b_N^2(x_i) - 2s_i b_N(x_i)) = \sum_{i=1}^{\ell} b_N^2(x_i) - 2\|s\| \|b_N(x)\| \cos(s, b_N(x)) \rightarrow \min_{b_N},$$

где $\|s\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} s_i^2}$, $\|b_N(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} b_N^2(x_i)}$, $\cos(s, b_N(x))$ — косинус угла между соответствующими векторами. Получается, что мы (с некоторыми оговорками) требуем от модели, чтобы она угадала направление корректировки прогнозов на всей обучающей выборке.

Почему нельзя просто обучить одно глубокое решающее дерево? Понятно, что если делать это неаккуратно, то дерево переобучится, но наверняка ведь можно контролировать это?

Действительно, так можно делать. Но как контролировать переобучение? Можно ограничить глубину дерева или минимальное число объектов в листе, но это слишком просто — не факт, что эти критерии гарантируют хороший результат на тестовой выборке. Это означает, что **во время построения надо контролировать ошибку на тесте**, и с учётом неё принимать решение об остановке построения дерева в каждой вершине. Более того, из-за жадной природы алгоритм построения дерева может выбирать **некорректные разбиения в начале** — если мы поймём, что именно из-за них случается переобучение, может потребоваться радикально перестраивать дерево. В итоге получится громоздкий и трудоёмкий алгоритм.

Бустинг же позволяет балансировать между сложностью и качеством итоговой модели. На каждом шаге он **строит очень небольшие деревья, которые не могут привести к сильной подгонке под обучающую выборку**. При этом после добавления каждого дерева, как правило, проверяется ошибка на тестовых данных, и если начинается переобучение, то процедура построения композиции прекращается.

Можно ли задействовать идеи из модификаций градиентного спуска? Да, можно! Далее в курсе мы разберём, как можно задействовать вторые производные функции потерь для имитации оптимизации второго порядка. Но также можно использовать и другие подходы — например, из метода инерции.

В работе [1] предлагается адаптировать ускоренный метод инерции Нестерова (Nesterov momentum). Разберём сначала этот метод. Напомним, что обычный метод инерции устроен так:

$$\begin{aligned} h_0 &= 0; \\ h_k &= \alpha h_{k-1} + \eta_k \nabla_w Q(w^{(k-1)}); \\ w^{(k)} &= w^{(k-1)} - h_k. \end{aligned}$$

Заметим, что мы ещё до вычисления h_k знаем, что сдвинемся в направлении h_{k-1} , немного скорректированным на антиградиент функционала ошибки в точке $w^{(k-1)}$. Воспользуемся этим наблюдением и **сначала сдвинемся по h_{k-1} , а затем вычислим антиградиент уже в этой точке и шагнём по нему**:

$$\begin{aligned} h_0 &= 0; \\ h_k &= \alpha h_{k-1} + \eta_k \nabla_w Q(w^{(k-1)} - \alpha h_{k-1}); \\ w^{(k)} &= w^{(k-1)} - h_k. \end{aligned}$$

Теперь перенесём этот метод на градиентный бустинг. Помимо самой композиции $a_N(x)$ будем теперь строить «инерционную» модель $h_N(x)$, которая будет как бы накапливать антиградиенты. В начале инициализируем её так же, как и саму композицию: $h_0(x) = a_0(x) = b_0(x)$. Допустим, мы сделали $N - 1$ шаг градиентного бустинга и построили $a_{N-1}(x)$ и $h_{N-1}(x)$. Базовая модель $b_N(x)$ должна аппроксимировать антиградиент — значит, теперь будем обучать её на сдвиги вида

$$s_i = - \left. \frac{\partial L(y_i, z)}{\partial z} \right|_{z=a_{N-1}(x_i) + \alpha h_{N-1}(x_i)}$$

Видно, что здесь в качестве обучаемых параметров у нас выступают выходы уже построенной композиции $a_{N-1}(x_i)$, а в качестве инерции — выходы функции $h_{N-1}(x_i)$.

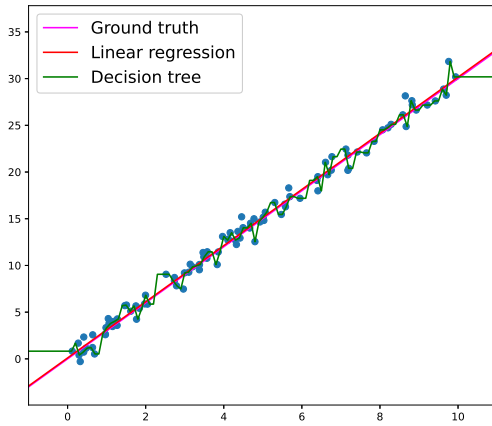


Рис. 1. Прогнозы моделей на обучении.

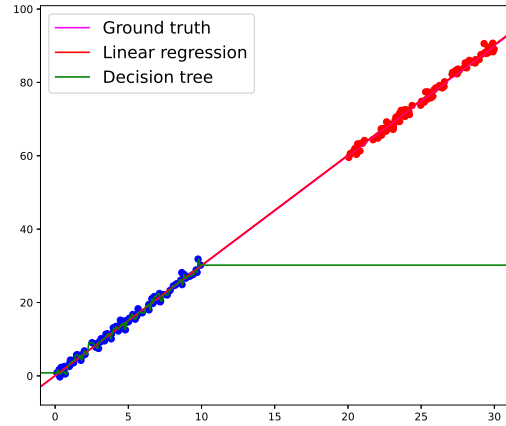


Рис. 2. Прогнозы моделей на полных данных.

Теперь мы можем обновить инерционную функцию и саму композицию:

$$\begin{aligned} h_N(x) &= \alpha h_{N-1}(x) + \eta b_N(x); \\ a_N(x) &= a_{N-1}(x) + h_N(x). \end{aligned}$$

В статье используется немного модифицированная версия, где параметр α меняется в зависимости от номера итерации и влияет также на длину шага η . Помимо этого отмечается, что указанные формулы работают не лучшим образом, поскольку в инерционной функции накапливается ошибка, связанная с неточным приближением антиградиента базовыми функциями. Это исправляется усложнённой процедурой построения инерционной функции — но это детали, а главное, что идеи из оптимизации действительно удаётся перенести и на градиентный бустинг, что открывает большой простор для улучшений.

Если градиентный бустинг такой мощный, то зачем нужны другие модели?

Прежде всего, бустинг может не очень хорошо работать на малых выборках и в случаях, когда признаков очень много. Но есть ещё один нюанс — бустинг над деревьями не умеет экстраполировать. Рассмотрим пример.

Пусть объекты описываются одним признаком, а зависимость между этим признаком и целевой переменной действительно линейная: $y(x) = ax + \varepsilon$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. В обучающей выборке признак принимает значения из отрезка $[0, 10]$. Обучим линейную модель и решающее дерево, результат показан на рис. 1.

Вполне может оказаться, что на новых данных закономерность будет такой же, но при этом признаки будут принимать значения, не встречавшиеся на обучающей выборке. Например, в нашем случае новые данные могут иметь значения признака из отрезка $[20, 30]$. Поведение моделей показано на рис. 2. Видно, что деревья плохо подходят для экстраполяции. При этом ситуация с изменением распределения признаков вполне может встретиться на практике, и это иногда решается как раз

с помощью комбинирования линейных моделей и градиентного бустинга (который обучается для корректировки прогнозов линейной модели).

§1.2 Сложность обучения бустинга

Чтобы закрепить понимание градиентного бустинга, посчитаем сложность обучения и применения для него.

Задача 1.1. Дана выборка из ℓ объектов, описываемых d признаками. Приведите временную асимптотику обучения и построения прогнозов для композиции вида $a_N(x) = \sum_{n=0}^N b_n(x)$ над решающими деревьями b_n глубины не более, чем D .

Решение. Для обучения нам необходимо обучить N деревьев, поэтому асимптотика будет $N * T_{tree}$, где T_{tree} - сложность построения одного решающего дерева. При построении одного дерева рассмотрим сложность нахождения оптимального разбиения в одной вершине. Рассмотрим сколько времени тратиться на построение одного уровня в решающем дереве. Обозначим за ℓ_j^i - количество объектов из обучающей выборки, доходящих до вершины j на i -том уровне (см. Рис. 3).

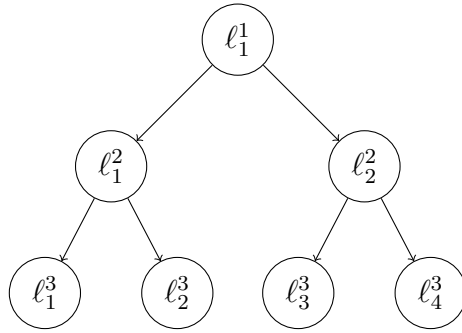


Рис. 3. Количество объектов из обучающей выборки, доходящих до каждой из вершин

Нам нужно проверить d признаков по $\ell_j^i - 1$ порогу. Подсчёт метрики качества разбиения занимает $O(\ell_j^i)$ времени. Однако можно реализовать *оптимальный* алгоритм с преподсчитанными статистиками, который для каждого признака сможет вычислить метрику *сразу по всем* $\ell_j^i - 1$ порогам за $O(\ell_j^i)$ времени. Следовательно, для одной вершины требуется $d * O(\ell_j^i) = O(d\ell_j^i)$ времени.

Понятно, что $\ell_1^1 = \ell$, поскольку это самая верхняя вершина. Далее, для любого i, j верно, что $\ell_j^i = \ell_{2j-1}^{i+1} + \ell_{2j}^{i+1}$ по принципу сохранения стоков-истоков (число объектов, исходящих из одной вершины до её детей, равна числу объектов, входящих в эту вершину). Из этого следует, что в сумме на одном уровне будет всего ℓ

объектов, $\forall i : \sum_{j=1}^{2^i} \ell_j^i = \ell$. А значит, на построение одного уровня в решающем дереве

нам нужно всего $\sum_{j=1}^{2^i} O(d\ell_j^i) = O(d\ell)$, а уровней всего D . Следовательно на построение

одного дерева необходимо $T_{tree} = O(Dd\ell)$ времени. У нас N деревьев, следовательно общее время на построение всех деревьев, а значит и на всё обучение: $O(NDd\ell)$

На стадии построения прогноза для объекта x он «пропускается» через дерево от корня к листьям, тем самым проходя путь из не более чем D внутренних вершин,

в каждой из которых происходит проверка предиката за константное время. Отсюда имеем асимптотику для построения прогноза композиции — $O(ND)$. ■

Что будет быстрее — бэггинг или бустинг? Чёткого ответа нет. С одной стороны, в бустинге используются неглубокие деревья. Поскольку обучение градиентного бустинга является «направленным», есть шанс, что ему потребуется меньшее по сравнению со случайным лесом количество базовых алгоритмов для достижения того же качества композиции. С другой стороны, обучение разных базовых моделей в бэггинге никак не связано, поэтому можно строить все модели параллельно. В бустинге такого преимущества нет — мы не можем обучать N -е дерево, пока не построим все предыдущие. Как правило, в бустинге распараллеливают только выбор лучших предикатов, но это можно сделать и в бэггинге.

Список литературы

- [1] *Lu, Haihao and Karimireddy, Sai Praneeth and Ponomareva, Natalia and Mirrokni, Vahab* (2020). Accelerating Gradient Boosting Machines. // Proceedings of the Twenty Third International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, 516–526.