

Лабораторная работа 3.7.1  
Скин-эффект в полом цилиндре

Кагарманов Радмир Б01-106

7 октября 2022 г.

**Цель работы:** исследование проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр.

**В работе используется:** генератор звуковой частоты, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас из диэлектрика, медный экран в виде трубки, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, осциллограф.

### Теоретические сведения

Связь между  $H_0$  и  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{H_0}{ch(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a sh(\alpha h)}, \quad (1)$$

где  $a = r$  - расстояние до оси системы,  $h$  - толщина стенки цилиндра.

Рассмотрим предельные случаи:

1. При малых частотах толщина скин-слоя превосходит толщину цилиндра  $\delta \gg h$ . Тогда  $|\alpha h| \approx 1$ ,  $sh\alpha h \approx \alpha h$  и

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i\frac{ah}{\delta^2}}. \quad (2)$$

Заметим, что величина  $ah/\delta^2$  в общей случае не мала, поскольку при  $h \ll a$  возможна ситуация  $h \ll \delta \ll a$ . Отношение модулей амплитуд здесь будет равно

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{ah}{\delta^2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}. \quad (3)$$

При этом колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол  $\psi$ , определяемый равенством  $tg \psi = \frac{ah}{\delta^2}$ .

2. При достаточно больших частотах толщина скин-слоя станет меньше толщины стенки:  $\delta \ll h$ . Тогда  $|ah| \gg 1$ , а также  $sh(ah) \approx ch(ah) \approx \frac{1}{2}e^{ah}$ . Выражение (1) переходит в

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha a} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta})}. \quad (4)$$

Поле внутри цилиндра по модулю в  $\frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}}$  раз меньше, чем снаружи, и запаздывает по фазе на

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}}. \quad (5)$$

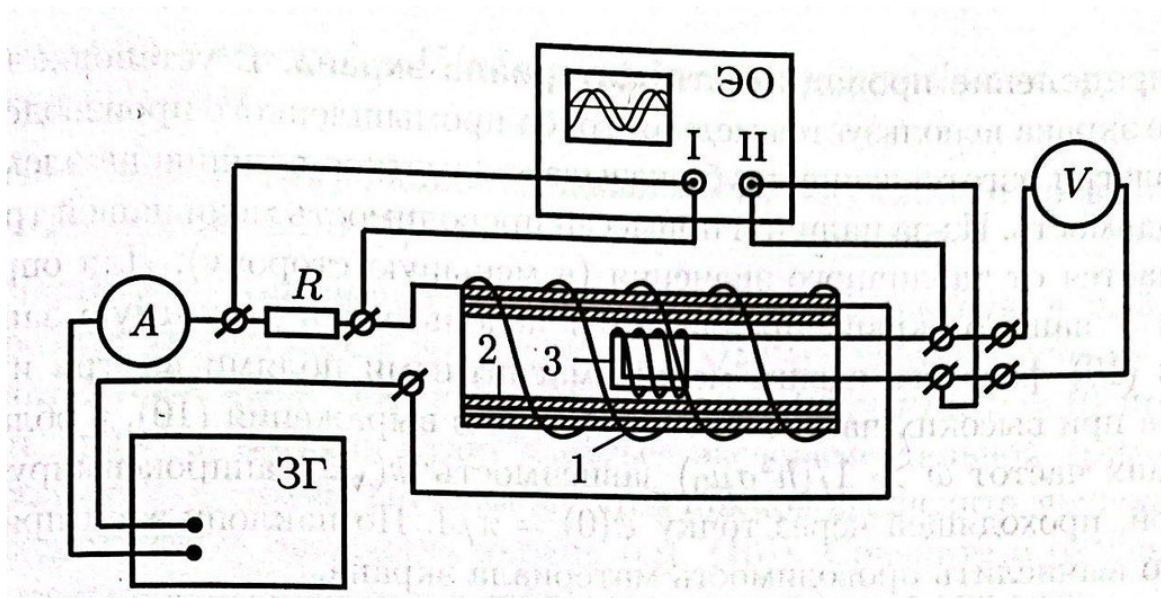


Рис. 1: Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки для исследования проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр изображена на рис.1. Переменное поле создаётся с помощью соленоида, намотанного на полый цилиндрический каркас 1 из поливинилхлорида, который подключается к генератору звуковой частоты. Внутри соленоида расположен медный цилиндрический экран 2. Для измерения магнитного поля внутри экрана используется измерительная катушка 3. Действующее значение переменного тока в цепи соленоида измеряется амперметром  $A$ , а действующее значение напряжения на измерительной катушке измеряет вольтметр  $V$ . Для измерения сдвига фаз между током в цепи соленоида и напряжением на измерительной катушке используется двухканальный осциллограф. На вход одного канала подаётся напряжение с резистора  $R$ , которое пропорционально току, а на вход второго канала - напряжение с измерительной катушки.

### Измерение отношения амплитуд магнитного поля внутри и вне экрана.

С помощью вольтметра  $V$  измеряется действующее значение ЭДС индукции, которая возникает в измерительной катушке, находящейся в переменном магнитном поле  $H_1 e^{i\omega t}$ . Комплексная амплитуда ЭДС индукции в измерительной катушке равна

$$U = -SN \frac{dB_1(t)}{dt} = -i\omega\mu_0 SN H_1 e^{i\omega t},$$

где  $SN$  - произведение площади витка на число витков измерительной катушки. Показания вольтметра, измеряющего это напряжение:

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 |H_1|.$$

Видно, что модуль амплитуды магнитного поля внутри экрана  $|H_1|$  пропорционален  $U$  и обратно пропорционален частоте сигнала  $\nu = \omega/2\pi$ :

$$|H_1| \propto \frac{U}{\nu}.$$

При этом поле вне экрана  $|H_0|$  пропорционально току  $I$  в цепи соленоида, измеряемому амперметром  $A$ :

$$|H_0| \propto I.$$

Следовательно,

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \text{const} \cdot \frac{U}{\nu I}. \quad (6)$$

Таким образом, отношение амплитуд магнитных полей снаружи и вне экрана (коэффициент ослабления) может быть измерено по отношению  $U/\nu I$  при разных частотах. Незвестная константа в соотношении (6) может быть определена по измерениям при малых частотах  $\nu \rightarrow 0$ , когда согласно (3)  $|H_1|/|H_0| \rightarrow 1$ .

## Обработка результатов

1. Построим график  $\frac{1}{\xi^2} = f(\nu^2) \propto \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2$ . Аппроксимируем и найдём проводимость  $\sigma$ .

$$a = 45 \text{ мм} - \text{диаметр цилиндра}$$

$$h = 1,5 \text{ мм} - \text{толщина стенки цилиндра}$$

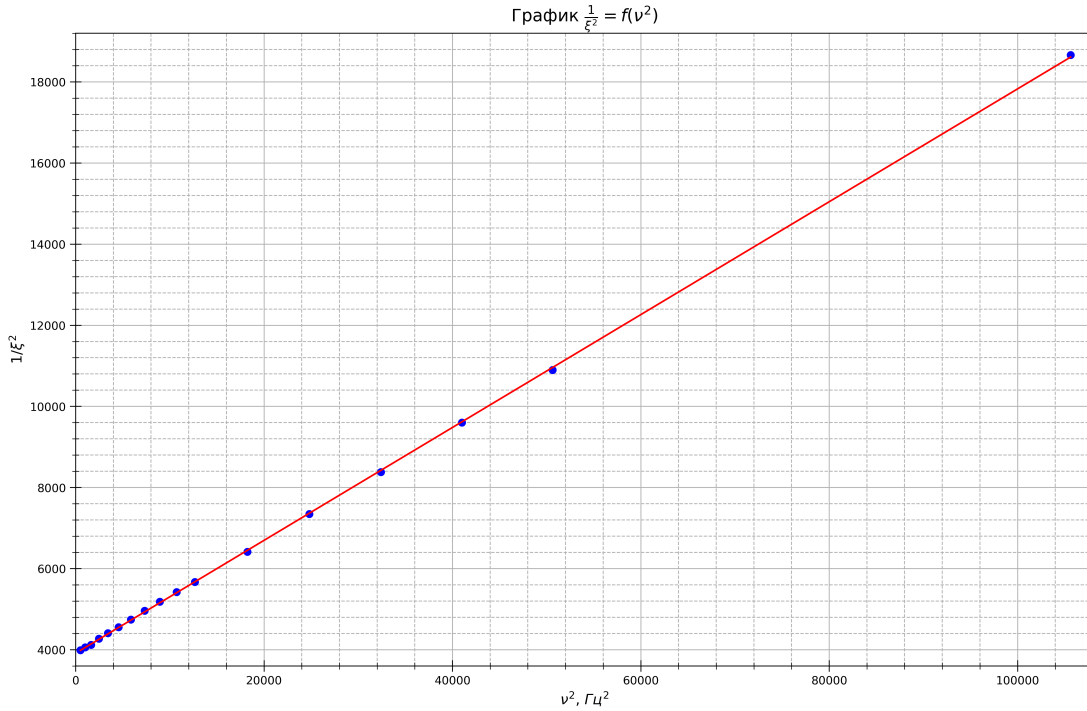


Рис. 2: График  $\frac{1}{\xi^2} = f(\nu^2)$

При подсчёте получаем  $\sigma_1 = (4,20 \pm 0,02) \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$ .

2. Построим график зависимости фазового сдвига от частоты в координатах  $\tan \psi(\nu)$ . Через точку  $(\psi = \pi/4, \nu = 0)$  проведём прямую, которая будет касаться экспериментальной кривой при больших частотах. По наклону этой прямой вычислим значение проводимости меди. Учтём, что присутствует дополнительный сдвиг фаз  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\tan \psi = \frac{ah}{\delta^2} = \frac{1}{2}ah\sigma\mu_0\omega \quad (7)$$

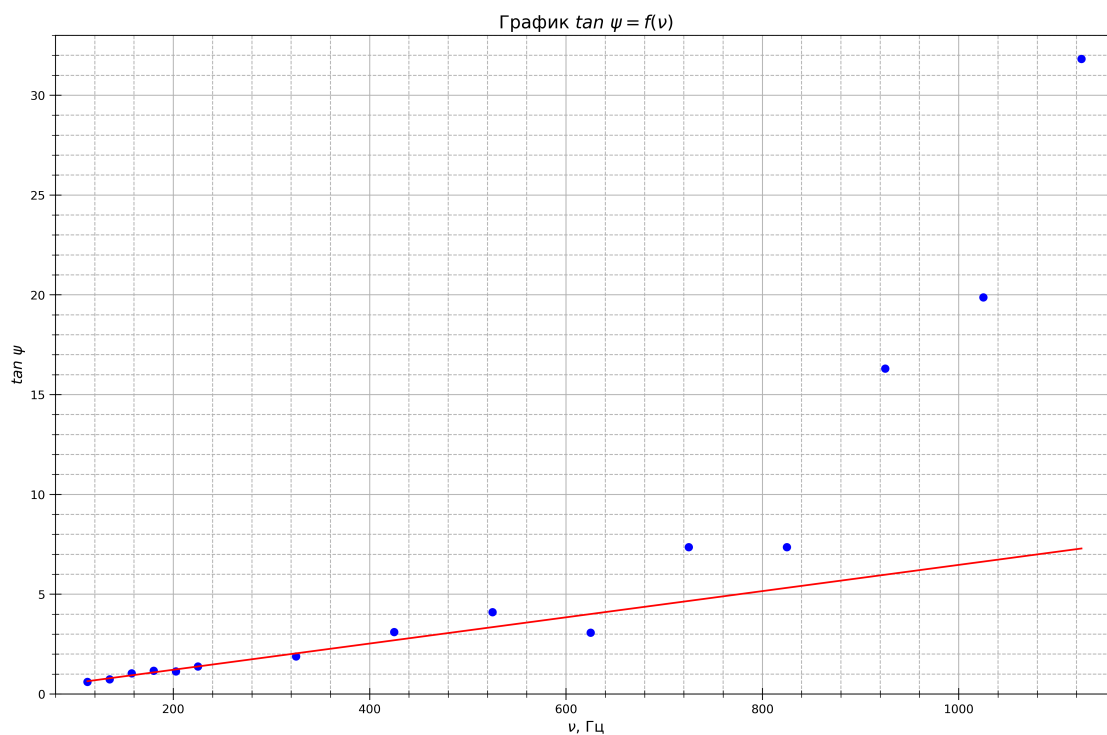


Рис. 3: График  $\tan \psi = f(\nu)$

Проводимость получается  $\sigma_2 = 4,92 \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$ .

3. Построим график  $\psi - \frac{\pi}{4} = f(\sqrt{\nu})$ . Проведём прямую через начало координат, которая будет касаться экспериментальной кривой при больших частотах.

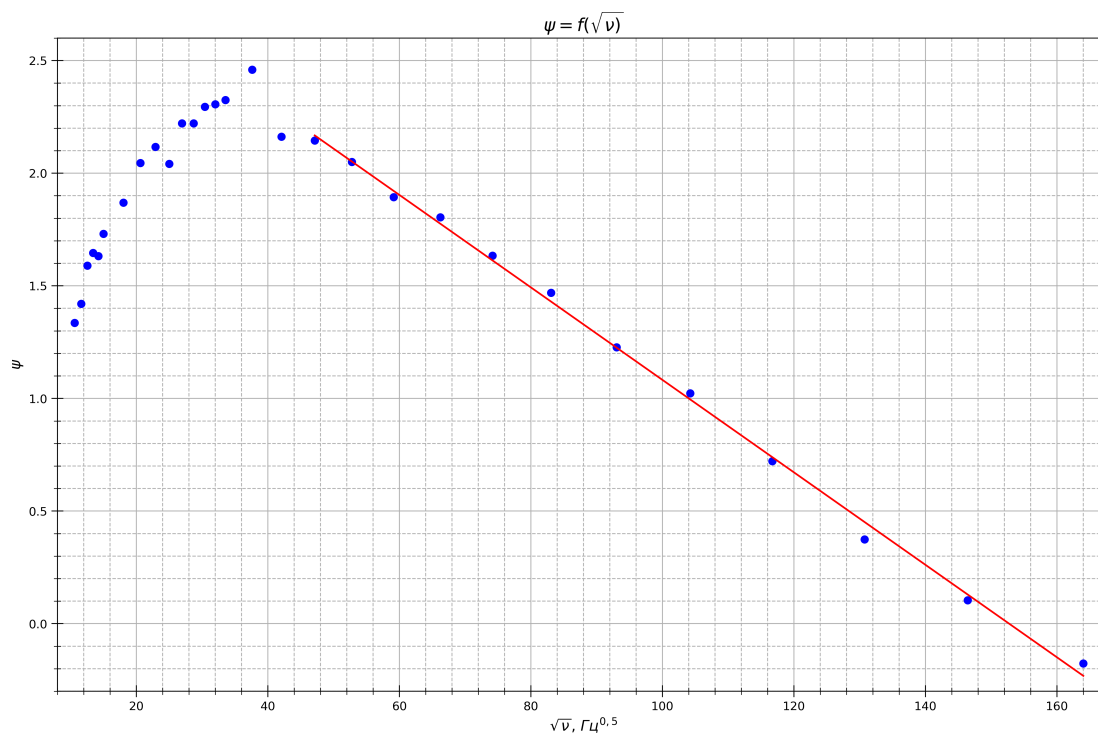


Рис. 4: График  $\psi = f(\sqrt{\nu})$

Проводимость равна  $\sigma_3 = (4,75 \pm 0,06) \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{М}}$ .

4. Построим график  $\frac{L_{\max}-L}{L-L_{\min}} = f(\nu^2)$ . По угловому коэффициенту найдём  $\sigma$  меди.  
 $\frac{L_{\max}-L}{L-L_{\min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2$ .

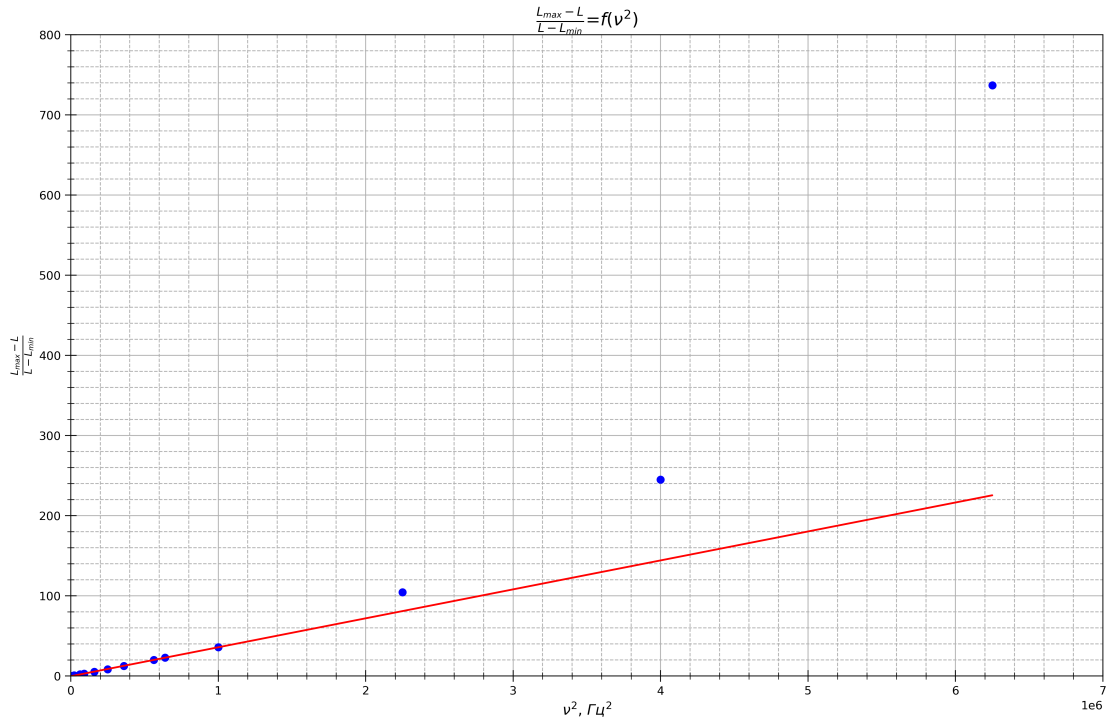


Рис. 5: График  $\frac{L_{\max}-L}{L-L_{\min}} = f(\nu^2)$

Проводимость меди равна  $\sigma_4 = (4,51 \pm 0,03) \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{М}}$ .

**Вывод:** в данной лабораторной работе мы исследовали проникновение переменного магнитного поля в медный цилиндр и вычислили проводимость меди с помощью четырёх способов.  $\sigma_1 = (4,20 \pm 0,02) \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{М}}$ ,  $\sigma_2 = 4,92 \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{М}}$ ,  $\sigma_3 = (4,75 \pm 0,06) \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{М}}$ ,  $\sigma_4 = (4,51 \pm 0,03) \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{М}}$ . Результаты получились близки к табличному значению  $\sigma = 5 \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{М}}$ . Наиболее точное значение было найдено вторым способом.