Лабораторная работа 3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Кагарманов Радмир Б01-106

28 ноября 2022 г.

Цель работы: Изучить спектры электрических сигналов.

В работе используетя: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье.

Теория

Разложение сложных сигналов на периодические колебания Метод для описания сигналов. Для него используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье.*

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)\right] \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n) \tag{2}$$

Если сигнал четен относительно $t = 0$, так что $f(t) = f(-t)$ в тригонометрической записи остаются только косинусные члены. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos(n\Omega_1 t)\,dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin(n\Omega_1 t)\,dt \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \psi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n} \tag{4}$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов Введем некоторые величины:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0\cos(n\Omega_1 t)\,dt = 2V_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\Omega_1\tau/2)}{n\Omega_1\tau/2} \sim \frac{\sin x}{x} \tag{5}$$

Здесь V_0 - амплитуда сигнала.

Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть у нас τ кратно T. Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедится при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1 \tag{6}$$

Периодическая последовательность цугов Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t)\cdot\cos(n\Omega_1 t)\,dt = V_0\frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}}\right) \tag{7}$$

Амплитудно-модулированные колебания Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0\left[1 + m\cos\Omega t\right]\cos\omega_0 t \tag{8}$$

Коэффициентом m называется *глубина модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \tag{9}$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (9) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0\cos\omega_0 t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0 + \Omega)\,t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0 - \Omega)\,t \tag{10}$$

Обработка результатов

1.