2019302010043

桑乐开

第三次作业

2022 年 4 月 9 日

目录

1 习题 6.3

使用 example6.9 中的方法，设置重复次数为 m=1000，分别设置样本量 n 为 10，20，30，40，50。

对每个 j=1,2,...,m，生成一个样本量 n 的随机样本 $X^{(j)}$，并基于第 j 个样本计算检验统计量 T_j^*，然后根据检验统计量判断在显著性水平 α 下接受还是拒绝原假设。若拒绝原假设则 I_j=1，否则 I_j=0.

计算显著的检验比例 $\bar{I}$，即为检验的功效的估计。

将检验结果分别以不同的曲线表示，并给予不同图例区分，得到结果如下：

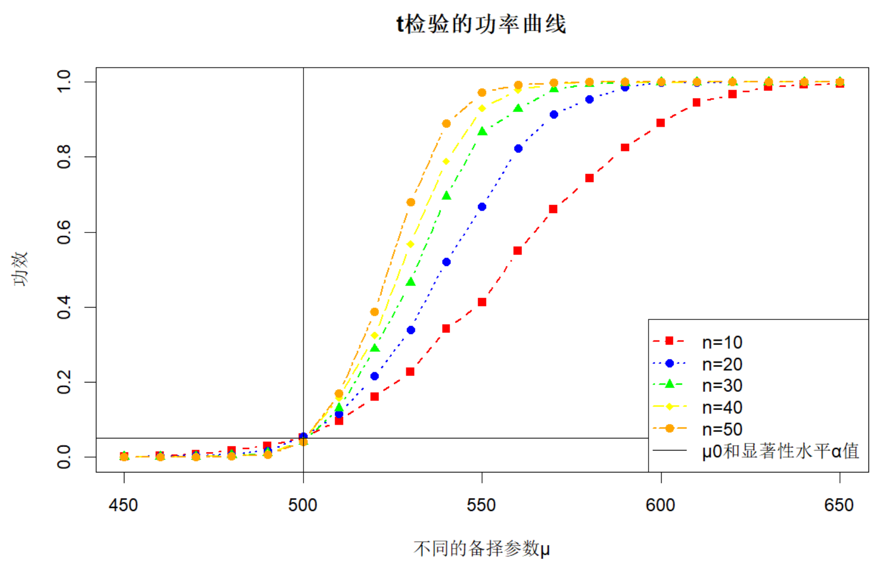

图 1: t 检验功效曲线图像

根据图像显示，无论样本量取 10，20，...，50 中的任意一个，功效都在备择参数 μ 等于 μ_0 时接近显著性水平 0.05，且备择参数 μ 越大，显著性水平越大。

使用代码如下：

```
m <- 1000
mu0 <- 500
sigma <- 100
```

```r
mu <- c(seq(450, 650, 10)) #alternatives
M <- length(mu)
cols <- c('red','blue','green','yellow','orange')
png(filename='C:/Users/Lake/Desktop/R/Statistical Computing/hw3/pictures/6_3.png',
width=1200,height=800)
par(cex=2)
plot(0, 0,type='l',col='white',xlim=c(450,650),ylim=c(0,1),xlab='不同的备择参数 ',ylab='功效')

for (j in 1:5){
n <- j*10
power <- numeric(M)
for (i in 1:M) {
mu1 <- mu[i]
pvalues <- replicate(m, expr = {
#simulate under alternative mu1
x <- rnorm(n, mean = mu1, sd = sigma)
ttest <- t.test(x,
alternative = "greater", mu = mu0)
ttest$p.value } )
power[i] <- mean(pvalues <= .05)
}
lines(mu, power,type='b',lty=j+1,pch=j+14,col=cols[j],lwd=2)
}
abline(v = mu0, lty = 1)
abline(h = .05, lty = 1)
title('t检验的功率曲线')
legend('bottomright',c('n=10','n=20','n=30','n=40','n=50',' 0和显著性水平 值'),
col=c(cols,'black'),lty=c(2,3,4,5,6,1),pch=c(15,16,17,18,19,NaN),lwd=c(2,2,2,2,2,1))
dev.off()
```

2 习题 6.4

设样本量 n=20，产生 n 个服从参数为 μ=0 和 σ=1 的对数正态分布的随机数 X_i，则有 lnX 服从 N(μ,σ^2)，记 Y=lnX

在参数 μ 和 σ 未知时，首先易证 σ^2 的一个无偏估计量为：

$$W^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2_{MLE}$$

其中由对数正态分布的性质，易证 σ^2 的最大似然估计为：

$$\hat{\sigma}^2_{MLE} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}(lnX_i - \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}lnX_i)^2$$

则易证：

$$\frac{n-1}{\sigma^2}W^2 \sim \chi^2(n-1)$$

为了估计 μ，构造如下检验统计量：

$$\frac{\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}lnX_i - \mu}{W/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

所以得到当 σ 未知时，参数 μ 的置信水平 1-α 的置信区间为：

$$[\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}lnX_i - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{W}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}lnX_i + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{W}{\sqrt{n}}]$$

其中 $t_{\alpha/2}$ 为 t 分布的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数。

计算得到置信水平为 95% 置信区间的估计值为：

[-0.6195, 0.1392]

可以看到真实参数 μ=0 在此置信区间内。

使用代码如下：

```r
n <- 20
mu <- 0
sigma <- 1
alpha <- 0.05
set.seed(1015)
x <- rlnorm(n,mu,sigma)
#n=20 样本量较小选择 t 分布估计
sigma2hat <- sum((log(x)-sum(log(x))/n)^2)/(n-1)
lb <- mean(log(x))-qt(alpha/2,n-1,lower.tail=F)*sqrt(
    sigma2hat/n)
rb <- mean(log(x))+qt(alpha/2,n-1,lower.tail=F)*sqrt(
    sigma2hat/n)
print(lb)
print(rb)
```

3 习题 6.5

对样本量 n=20 的服从 $\chi^2(2)$ 的随机数 $X_i, i=1,2,...,n$，计算其均值的 t 区间，由于：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

其中 S 为样本标准差：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

所以置信水平为 1-α 的置信区间为：

$$[\bar{X} - \frac{S \cdot t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{S \cdot t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}]$$

给定实验重复次数 m=10000，进行 m 次重复实验，并观察真实参数在所得置信区间内的次数 j，则置信区间覆盖真实参数的概率估计值为：

$$\hat{p} = \frac{j}{m}$$

通过实验模拟得到的结果如下：

$$\hat{p}_{ex6.5} = 0.919 \qquad \hat{p}_{em6.4} = 0.9509$$

根据结果可以看出，example6.4 的置信区间覆盖真实参数概率接近置信水平 0.95，而由于 exercise6.5 的数据非正态分布，因此覆盖概率不足 0.95

使用代码如下：

```
n <- 20
alpha <- .05
j <- 0
m <- 10000
set.seed(1015)
for (i in 1:m){
x <- rnorm(n, mean=0, sd=2)
UCL <- (n-1) * var(x) / qchisq(alpha, df=n-1)
if (UCL>4)
j <- j+1
}
print(j/m)

k <- 0
for (i in 1:m){
x <- rchisq(n,2)
```

```
        lb <- mean(x)-sqrt(var(x)/n)*qt(alpha/2,n-1,lower
            .tail = F)
        rb <- mean(x)+sqrt(var(x)/n)*qt(alpha/2,n-1,lower
            .tail = F)
        if (lb<2 & rb>2)
        k <- k+1
        }
        print(k/m)
```

4 习题 6.8

选取实验重复次数 m=10000，两个随机样本的样本量 $n_1 = n_2$，方差为 $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.5$，分别生成 n_i 个独立同分布服从 N(0,σ_i) 的随机数，然后重复 example6.16 的 Count Five 检验，若结果为拒绝原假设，则记录决策结果为 1，否则为 0。将实验重复 m 次，计算 m 次决策结果的均值，作为 Count Five 检验功效的估计。

下面进行 F 检验：设 S_1^2, S_2^2 分别为两个随机样本的样本方差，则可以证明：

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

因此为了检验:

$$H_0 : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1, \qquad H_1 : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \neq 1$$

我们构造检验统计量:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

置信水平为 $1-\alpha$ 的拒绝域为：

$$\{F \leq F_{\alpha/2}(n_1, n_2) \text{ 或者 } F \geq F_{1-\alpha/2}(n_1, n_2)\}$$

其中 F_α 为 F 分布的下 α 分位点。

因此对生成的样本，计算其 F 统计量，并判断是否拒绝原假设，若结果为拒绝原假设，则记录决策结果为 1，否则为 0。将实验重复 m 次，计算 m 次决策结果的均值，作为 F 检验功效的估计。

按照题目给定置信水平 $\alpha = 0.055$，分别取样本量 $n_1 = n_2 = 20$ 作为小样本实验，$n_1 = n_2 = 50$ 作为中等样本检验，$n_1 = n_2 = 200$ 作为大样本检验，得到检验功效结果如下：

检验方法	$n_1 = n_2 = 20$	$n_1 = n_2 = 50$	$n_1 = n_2 = 200$
Count Five 检验	0.3098	0.6553	0.9460
F 检验	0.4184	0.8185	0.9999

表 1: Count Five 和 F 检验在不同样本量下的检验功效估计表

根据上表可以看出，当样本数据具有正态性的时候，无论是小样本、中等样本、还是大样本，F 检验都比 Count Five 检验具有更高的功效。并且对于两种检验方法，都有样本数量越大，检验的功效越高。

使用代码如下：

```r
count5test <- function(x, y) {
X <- x - mean(x)
Y <- y - mean(y)
outx <- sum(X > max(Y)) + sum(X < min(Y))
outy <- sum(Y > max(X)) + sum(Y < min(X))
#return 1 (reject) or 0 (do not reject H0)
return(as.integer(max(c(outx, outy)) > 5))
}
#generate samples under H1 to estimate power
sigma1 <- 1
sigma2 <- 1.5
m <- 10000
n1 <- n2 <- 20
#set.seed(1015)
power <- mean(replicate(m, expr={
x <- rnorm(n1, 0, sigma1)
y <- rnorm(n2, 0, sigma2)
count5test(x, y)
}))
print(power)

#生成随机数
#set.seed(1015)
alpha <- 0.055
```

```r
power2 <- numeric(m)
for (i in 1:m){
x <- rnorm(n1, 0, sigma1)
y <- rnorm(n2, 0, sigma2)

#进行 F 检验
re <- var.test(x, y)
lb <- qf((alpha)/2,n1-1,n2-1)
rb <- qf(1-(alpha)/2,n1-1,n2-1)
if (re$statistic>rb|re$statistic<lb){
power2[i] <- 1
}
}
print(mean(power2))
```

5 习题 6.9

给定实验重复次数为 m=1000，样本量为 n=20，设对数正态分布的参数为 $\mu = 0, \sigma = 1$，生成 n 个服从对数正态分布的随机数，并排序获得顺序统计量 $x_{(i)}$，然后计算 Gini Ratio 的估计值：

$$\hat{G} = \frac{1}{n^2\bar{x}}\Sigma_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_{(i)}$$

重复 m 次，并计算均值、中位数、十分位数，并画出密度直方图。

对于 (0,1) 上的均匀分布 U(0,1) 和参数 p=0.1 的伯努利分布 B(0.1)，重复上述操作，得到图像和结果如下：

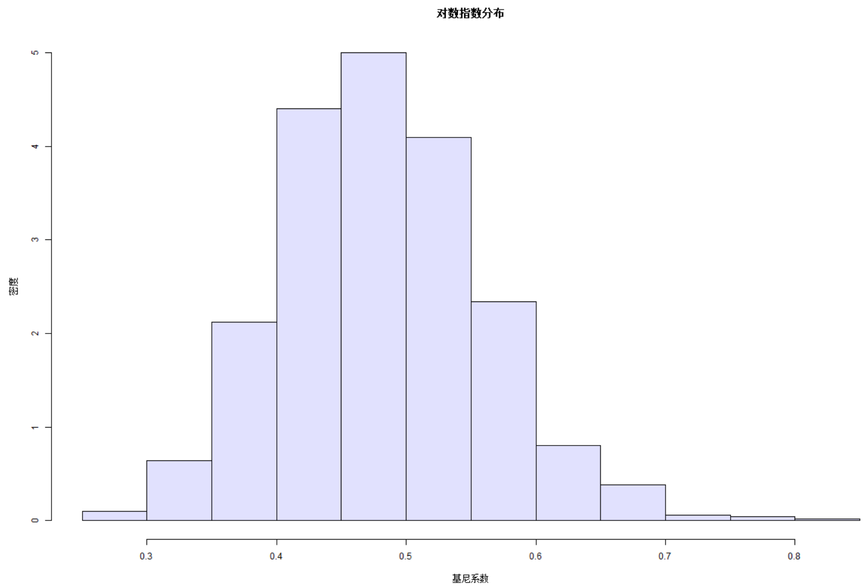

图 2: 对数正态分布 Gini Ratio 密度直方图

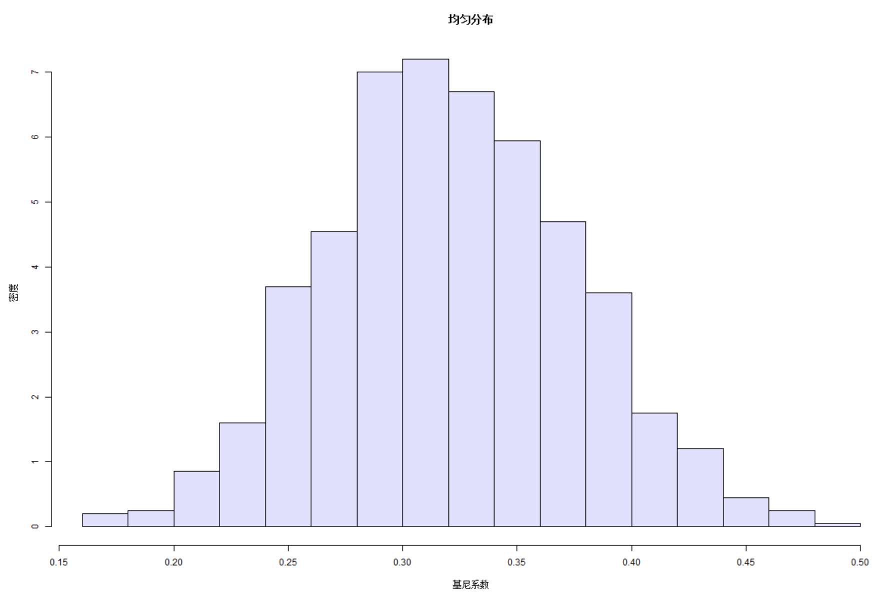

图 3: 均匀分布分布 Gini Ratio 密度直方图

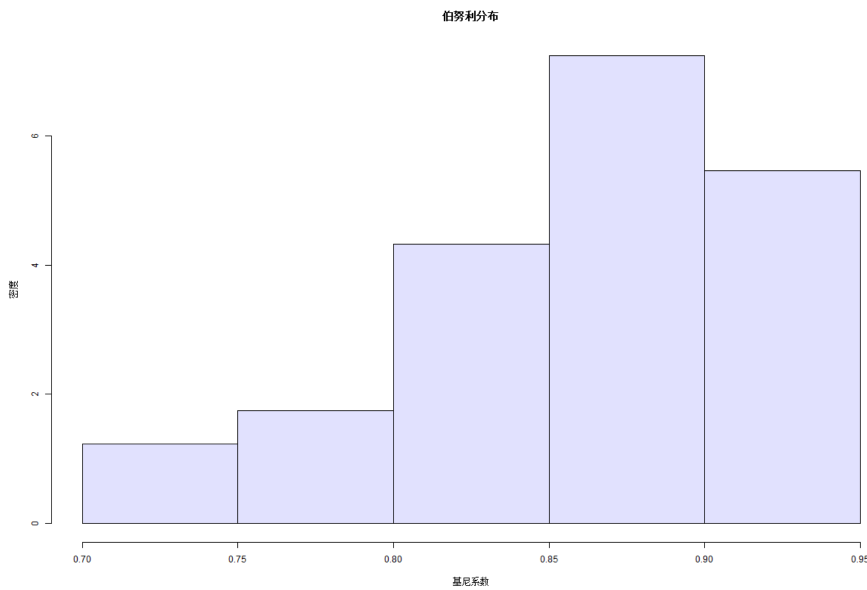

图 4: 伯努利分布 Gini Ratio 密度直方图

分布类型	均值	中位数
对数正态分布	0.4811	0.4787
均匀分布	0.3210	0.3192
伯努利分布	0.8842	0.9

表 2: 三种分布基尼系数估计的均值和中位数表

分布类型	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
对数正态分布	0.3875	0.4147	0.4354	0.4579	0.4787	0.4976	0.5202	0.5463	0.5797
均匀分布	0.2523	0.2733	0.2913	0.3046	0.3192	0.3335	0.3490	0.3689	0.3912
伯努利分布	0.80	0.85	0.85	0.90	0.90	0.90	0.90	0.95	0.95

表 3: 三种分布基尼系数估计的十分位数表

使用代码如下：

```r
m <- 1000
n <- 20
mu <- 0
sigma <- 1
p <- 0.1
Ghats <- numeric(m)
set.seed(1015)
for (k in 1:3){
par(cex=2.5)
png(filename=paste('C:/Users/Lake/Desktop/R/Statistical Computing/hw3/pictures/6_9_',k,'.png',sep=''),width=1200,height=800)
for (j in 1:m){
if (k == 1) x <- rlnorm(n,mu,sigma)
if (k == 2) x <- runif(n,0,1)
if (k == 3) x <- sample(c(0,1),n,replace = T,prob=c(1-p,p))
xi <- sort(x)
Ghats[j] <- 0
for (i in 1:n){
Ghats[j] <- Ghats[j] + (2*i-n-1)*xi[i]
}
Ghats[j] <- Ghats[j]/(n^2*mean(xi))
}
Ghats <- Ghats[!is.nan(Ghats)]
print('均值')
print(mean(Ghats,na.rm = T))
print('中位数')
print(median(Ghats,na.rm = T))
print('十分位数')
print(quantile(Ghats,seq(0.1,0.9,0.1),na.rm = T))
bars <- 15
names <- c('对数指数分布','均匀分布','伯努利分布')
if (k==3) bars <- 8
hist(Ghats,breaks=bars,  freq=F,
```

```
col=rgb(0,0,245,30,maxColorValue =255),xlab = '基尼系数',
    ylab = '密度',main = names[k])
dev.off()
}
```

6 习题 6.A

给定样本数 n=20，实验重复次数 m=10000，生成独立同分布服从 $\chi^2(1)$ 的 n 个随机数 x_i，对原假设和备择假设：

$$H_0 : \mu = \mu_0, \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

以显著性水平 $\alpha = 0.05$ 进行 t 检验，并记录 t 检验得到的 p 值。将实验重复 m 次，计算 p 的均值作为经验 I 型错误率的估计值，并与显著性水平作比较。
对服从均匀分布 U(0,2) 和指数分布 E(1) 的样本，重复上述操作，最终得到模拟结果如下表所示：

分布类型	显著性水平 α	卡方分布 $\chi^2(1)$	均匀分布 U(0,2)	指数分布 E(1)
经验 I 型错误率	0.05	0.1068	0.0512	0.0805

表 4: 三种分布经验 I 型错误率表

根据上表可以看出，当样本不具有正态性时，使用 t 检验会导致经验 I 型错误率高于显著性水平。其中卡方分布 $\chi^2(1)$ 的样本的经验 I 型错误率最高，达到了 10% 以上，指数分布达到 8%，而均匀分布受到影响较小。但是经验 I 型错误率和显著水平 α 差距不大，可见 t 检验对偏离正态性的数据具有一定鲁棒性。
使用代码如下：

```
        n <- 20
        m <- 10000
        v <- 1
        a <- 0
        b <- 2
        lambda <- 1
        set.seed(1015)
        pvalues <- replicate(m, expr = {
```

```
    x <- rchisq(n,v)
    ttest <- t.test(x, alternative = "two.sided", mu
        = v)
    ttest$p.value } )
    power <- mean(pvalues <= .05)
    print(power)

    pvalues <- replicate(m, expr = {
    x <- runif(n,a,b)
    ttest <- t.test(x, alternative = "two.sided", mu
        = (a+b)/2)
    ttest$p.value } )
    power <- mean(pvalues <= .05)
    print(power)

    pvalues <- replicate(m, expr = {
    x <- rexp(n,lambda)
    ttest <- t.test(x, alternative = "two.sided", mu
        = 1/lambda)
    ttest$p.value } )
    power <- mean(pvalues <= .05)
    print(power)
```

7 习题 6.B

给定样本数 n=20，实验重复次数 m=10000。给定二元正态分布的均值 $\mu = (0,0)$ 协方差矩阵 Σ 如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

生成 n 对独立同分布服从于二元正态分布 $N_2(\mu, \Sigma)$ 的随机数，分别使用 pearson, kendall, spearman 三种方法进行相关性检验，并记录检验的 p 值。将实验重复 m 次，计算 p 值的均值，作为经验 I 型错误率，最终得到结果如下：

检验方法	pearson	kendall	spearman
经验 I 型错误率	0.0934	0.1261	0.1188

表 5: 三种检验方法对于二元正态分布的经验 I 型错误率表

根据上表看出，使用 pearson 方法检验二元样本相关性，经验 I 型错误率比另外两种方法更低，因此可以经验地证明，对于二元正态分布的样本，使用 pearson 方法检验效果更好。
为找到一种二元分布 (X,Y) 使得 kendall, spearman 两种检验方法效果比 pearson 方法效果更优，构造随机变量如下：令 X U(0,10)，Y=X^2 则 X,Y 为相关的随机变量，生成 n 对服从 (X,Y) 的随机数，并分别使用三种检验方法对样本进行相关性检验，记录检验的 p 值。将实验重复 m 次，计算 p 值的均值，作为经验 I 型错误率，最终得到结果如下：

检验方法	pearson	kendall	spearman
经验 I 型错误率	0.0237	0.0111	0.0051

表 6: 三种检验方法对于构造的分布的经验 I 型错误率表

根据上表可以看出，对于新构造的服从二元分布 (X,Y) 的样本，使用 pearson 方法进行检验的经验 I 型错误率比另外两种方法都更高，因此 pearson 方法不如另外两种检验方法。
使用代码如下：

```
library(MASS)
Sigma <- matrix(c(1,0.5,0.5,1),2,2)
n <- 20
m <- 10000
p1 <- p2 <- p3 <- numeric(m)
set.seed(1015)
for (j in 1:m){
sample1 <- mvrnorm(n, rep(0, 2),Sigma)
#x2 <- runif(n,0,10)
#y2 <- x2*x2
```

```
#sample1 < cbind(x2,y2)
#c("pearson", "kendall", "spearman")
cortest<-cor.test(sample1[,1], sample1[,2],
alternative = "two.sided",
method = "pearson")
p1[j] <- cortest$p.value
cortest<-cor.test(sample1[,1], sample1[,2],
alternative = "two.sided",
method = "kendall")
p2[j] <- cortest$p.value
cortest<-cor.test(sample1[,1], sample1[,2],
alternative = "two.sided",
method = "spearman")
p3[j] <- cortest$p.value
}

print(mean(p1))
print(mean(p2))
print(mean(p3))
```