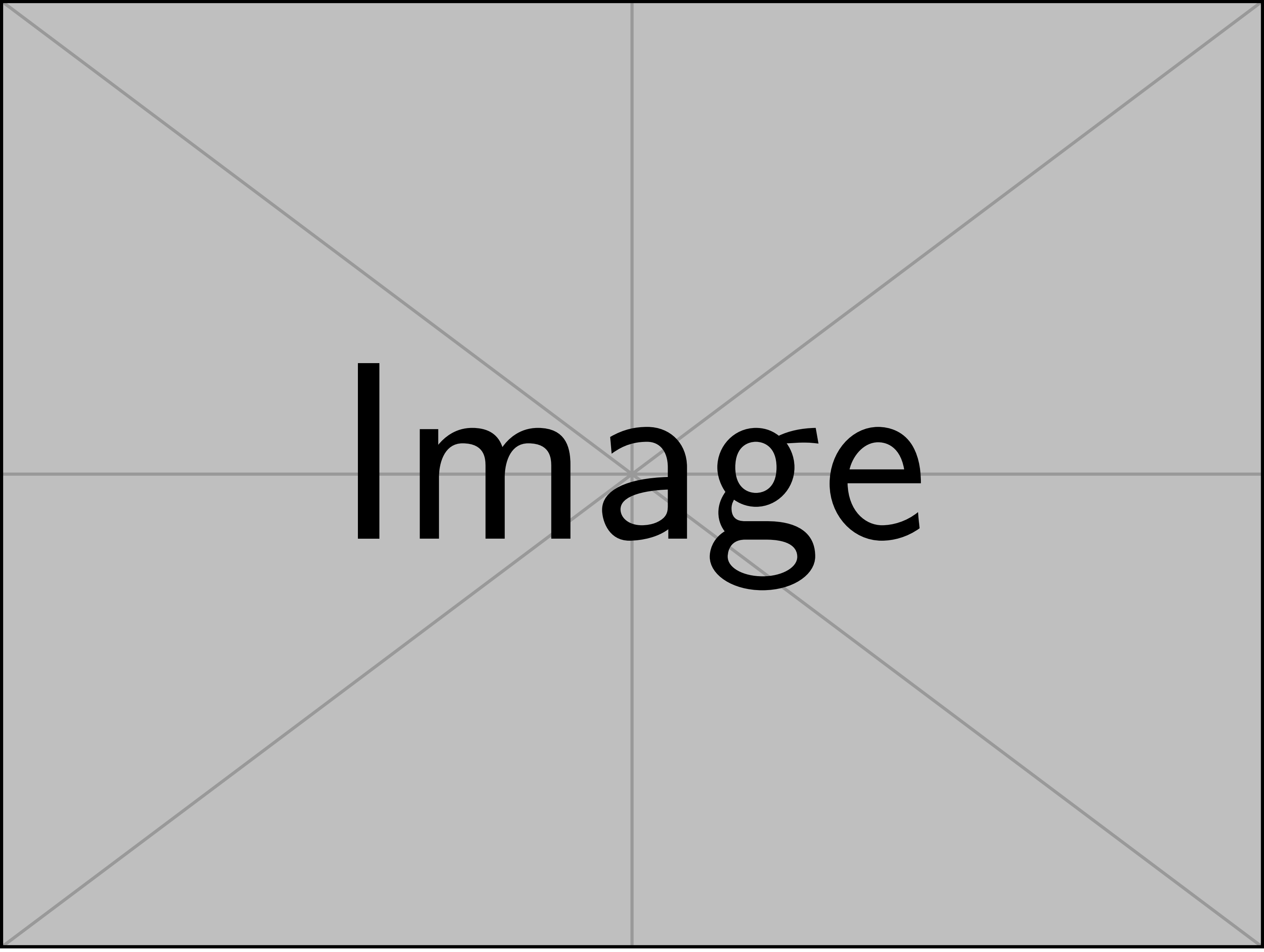

基础拓扑学笔记

目录

第一章 集合论复习

1.1 集合

定义 1.1 (幂集)

设 X 是一个集合，X 的所有子集组成的集合称为 X 的幂集，记作 2^X.

定义 1.2 (集合的卡氏积)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为集合，则它们的卡氏积定义为 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in X_i\right\}$.

命题 1.1 (集合运算的分配律)

1. $A \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \cup B_\lambda)$
2. $A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda)$
3. $A \times \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \times B_\lambda)$
4. $A \times \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \times B_\lambda)$
5. $A \times (B_1 \setminus B_2) = (A \times B_1) \setminus (A \times B_2)$

定理 1.1 (德 · 摩根定律)

1. $A \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus B_\lambda)$
2. $A \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus B_\lambda)$

1.2 映射

定义 1.3 (映射)

设 X, Y 是两个集合，则 X, Y 之间的**映射** $f : X \to Y$ 将 X 中的每个元素 x 唯一地对应到 Y 中一个元素 y. 其中 X 称为**定义域**，Y 称为**值域**.

定义 1.4 (映射的像)

设 $f: X \to Y$ 是一个映射，则子集 $A \subseteq X$ 在 f 之下的像为

$$f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, \text{ s.t. } f(x) = y\} \subseteq Y$$

♣

定义 1.5 (原像)

设 $f: X \to Y$ 是一个映射，则子集 $B \subseteq Y$ 在 f 之下的**原像**为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\} \subseteq X$$

♣

提醒 注意，这里的 f^{-1} 不表示 f 的逆映射或是 f 的反函数.

定义 1.6 (单射、满射、双射)

设 $f: X \to Y$ 是一个映射，如果：

1. $\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$，则称 f 是一个**单射**.
2. $\forall y \in Y, \exists x \in X, \text{s.t. } f(x) = y$，则称 f 是一个**满射**.
3. 若 f 即是单射也是满射，则称 f 是一个**双射**.

♣

定义 1.7 (逆映射)

如果 $f: X \to Y$ 是一个双射,定义 $f^{-1}: Y \to X$ 是 f 的**逆映射**,满足 $f: x \mapsto y \Rightarrow f^{-1}: y \mapsto x$. ♣

命题 1.2 (映射的性质)

如果 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 是两个映射，$A_\lambda \subset X, B_\lambda \subset Y$，则

1. $f^{-1}\left(\bigcup_\lambda B_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$
2. $f^{-1}\left(\bigcap_\lambda B_\lambda\right) = \bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$
3. $f\left(\bigcup_\lambda B_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f(B_\lambda)$
4. $f\left(\bigcap_\lambda B_\lambda\right) \subset \bigcap_\lambda f(B_\lambda)$，当 f 为单射时，等号成立.
5. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$，当 f 为满射时，等号成立.
6. $f^{-1}\left(f(A)\right) \supset A$，当 f 为单射时，等号成立.
7. $(g \circ f)(A) = g\left(f(A)\right), A \subset X$
8. $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right), C \subset Z$

♠

证明

4. $\forall x \in \bigcap_\lambda B_\lambda$，有 $\forall \lambda \in \Lambda, x \in B_\lambda \Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda, f(x) \in f(B_\lambda) \Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda, f\left(\bigcap_\lambda B_\lambda\right) \subset f(B_\lambda)$

$$\Rightarrow f\left(\bigcap_\lambda B_\lambda\right) \subset \bigcap_\lambda f(B_\lambda).$$

当 f 为单射时，对 $\forall y \in \bigcap\limits_{\lambda} f(B_\lambda)$，知 $y \in f(B_\lambda)(\forall \lambda)$，所以 $\forall \lambda, \exists x_\lambda \in B_\lambda, \text{s.t. } f(x_\lambda) = y$.

由于 f 为单射，可知所有的 x_λ 都相等，记为 x_0，即 $\forall \lambda, x_\lambda = x_0 \in X$，则 $\forall \lambda, x_0 \in B_\lambda \Rightarrow x_0 \in \bigcap\limits_{\lambda} B_\lambda \Rightarrow f(x_0) = y \in f\left(\bigcap\limits_{\lambda} B_\lambda\right) \Rightarrow \bigcap\limits_{\lambda} f(B_\lambda) \subset f\left(\bigcap\limits_{\lambda} B_\lambda\right)$.

综上可知当 f 为单射时，$f\left(\bigcap\limits_{\lambda} B_\lambda\right) = \bigcap\limits_{\lambda} f(B_\lambda)$

5. $\forall x \in f^{-1}(B)$，$\exists y \in B, \text{s.t. } f(x) = y \in B \Rightarrow f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
   当 f 为满射时，$\forall y \in B, \exists x \in f^{-1}(B), \text{s.t. } f(x) = y \Rightarrow B \subset f(f^{-1}(B))$，因此 $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.
6. $\forall x \in A, \exists y \in f(A), \text{s.t. } f(x) = y$，故 $x \in f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \subset f(f^{-1}(A)) \Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$.
   当 f 为单射时，$\forall y \in f(A), \exists!\, x \in A, \text{s.t. } f(x) = y$，故 $f^{-1}(y) = x \in A \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \subset A$.
   因此，当 f 为单射时，$f^{-1}(f(A)) = A$.

□

定义 1.8 (映射的限制)

设 $f : X \to Y$ 是一个映射，$A \subset X$，定义 f 在 A 上的**限制**为

$$\begin{aligned} f|_A : A &\to F \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

反过来，f 称为 $f|_A$ 在 X 上的**扩张**.

♣

定义 1.9 (特殊的映射)

1. $\begin{aligned} \mathrm{id}_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$ 称为 X 上的**恒等映射**.
2. 若 $A \subset X$，则 $\begin{aligned} i : A &\to X \\ a &\mapsto a \end{aligned}$ 称为 A 到 X 的**包含映射**.
3. $\begin{aligned} \Delta_X : X &\to X \times X \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$ 称为 X 的**对角映射**.

♣

注 关于包含映射，我们有以下交换图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f|_A"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

也就是说，我们可以把限制映射看成包含映射和映射的复合.

1.3 等价关系

定义 1.10 (等价关系)

设 $\sim$ 是集合 X 上的一个二元关系，如果它满足以下条件：

1. 自反性：$\forall x \in X,\ x \sim x$
2. 对称性: $\forall x, y \in X,\ x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3. 传递性: $\forall x, y, z \in X,\ x \sim y$ 且 $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

则称 $\sim$ 为 X 上的一个等价关系.

定义 1.11 (等价类)

设 $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系，则 A 中所有等价于 x 的元素组成的集合称为 x 的等价类，记作 $[x] = \{y \in X | x \sim y\}$.

命题 1.3 (等价类的性质)

两个等价类要么是相等的，要么是不交的.

定义 1.12 (商集)

设 $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系，所有等价类的集合称为商集，记为 $X/\sim = \{[x] | x \in X\}$.

第二章 拓扑空间

2.1 拓扑空间

复习一下连续函数的相关知识.

定理 2.1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数当且仅当任何开集的原像是开集.

命题 2.1 (实数集上开集的性质)

1. $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}$ 是开集.
2. 任意多个开集的并还是开集.
3. 任意有限多个开集的交还是开集.

证明 第三条性质的证明：设 $U_1=\bigcup\limits_{\alpha}(a_\alpha,b_\alpha), U_2=\bigcup\limits_{\beta}=(c_\beta,d_\beta)$.

则 $U_1\cup U_2=\left(\bigcup\limits_{\alpha}(a_\alpha,b_\alpha)\right)\cup\left(\bigcup\limits_{\beta}(c_\beta,d_\beta)\right)=\bigcup\limits_{\alpha,\beta}((a_\alpha,b_\alpha)\cup(c_\beta,d_\beta))$.

其中 $(a_\alpha,b_\alpha)\cup(c_\beta,d_\beta)$ 一定是空集或是开区间，所以 $U_1\cup U_2$ 也是开集.

对于有限多个的情形应用数学归纳法即可.

$\square$

定义 2.1 (拓扑空间)

设 X 是一个集合，$\mathcal{T}$ 为 X 上的子集族，满足：

1. $\varnothing, X\in\mathcal{T}$
2. $\mathcal{T}$ 中任意子集的并仍属于 $\mathcal{T}$
3. $\mathcal{T}$ 中有限个子集的交仍属于 $\mathcal{T}$

则称 $\mathcal{T}$ 为 X 上的拓扑，$(X,\mathcal{T})$ 为一个拓扑空间，$\mathcal{T}$ 中的子集称为开集.

命题 2.2 (条件 3 的等价条件)

$\mathcal{T}$ 中有限个子集的交仍属于 $\mathcal{T}\Leftrightarrow\mathcal{T}$ 中两个子集的交属于 $\mathcal{T}$.

例 (1) 在标准的实数集 $\mathbb{R}$ 中，$\mathcal{T}:=\left\{\bigcup\limits_{\lambda}(a_\lambda,b_\lambda)\,\middle|\,(a_\lambda,b_\lambda)\text{是}\mathbb{R}\text{上的开区间}\right\}$ 是拓扑空间.

(2)$X=a,b,c$，$\mathcal{T}_1=\{\varnothing,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，$\mathcal{T}_2=\{\varnothing,X,\{a\},\{a,b\}\}$，$\mathcal{T}_3=\{\varnothing,X,\{a\},\{a,c\}\}$.

但 $\{\varnothing,X,\{b\},\{c\},\{a,b\}\}$ 不是拓扑，因为 $\{b\}\cup\{c\}=\{b,c\}$ 不在其中.

(3)X 是一个非空集合，$\mathcal{T}_1=\{\varnothing,X\}$，被称为平凡拓扑.$\mathcal{T}_2=2^X$，被称为离散拓扑.

(4)$X=\mathbb{R},\mathcal{T}=\{\varnothing\cup\{\mathbb{R}\text{上有限子集的补集}\}\}$.

(i) $\varnothing,\mathbb{R}\in\mathcal{T}$

(i) $\bigcup_{\lambda}(\mathbb{R}\setminus F_\lambda)=\mathbb{R}\setminus\left(\bigcap_{\lambda}F_\lambda\right)\in\mathcal{T}$

(i) $(\mathbb{R}\setminus F_1)\cap(\mathbb{R}\setminus F_2)=\mathbb{R}\setminus(F_1\cup F_2)\in\mathcal{T}$

因此 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的拓扑，称为有限补拓扑，记作 $\mathbb{R}_{fc}$.

定义 2.2 (拓扑的精细与粗糙)

设 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 是集合 X 上的两个拓扑，如果 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$，则称 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ **精细**，或称 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ **粗糙**. ♣

结论 平凡拓扑是最粗糙的拓扑，因为它仅包含了空集和补集，是满足条件 1 的最低要求.

离散拓扑是最精细的拓扑，因为它已经包含了集合中的所有子集.

例 在 $\mathbb{R}$ 上，$\mathbb{R}_{trival}\subsetneqq\mathbb{R}_{fc}\subsetneqq\mathbb{R}_{std}\subsetneqq\mathbb{R}_{discrete}$.

其中 $\mathbb{R}_{fc}\subsetneqq\mathbb{R}_{std}$ 的原因在于任意有限集的补集都是 $\mathbb{R}_{std}$ 中的开集，因此 $\mathbb{R}_{fc}\subset\mathbb{R}_{std}$. 并且如果我们取 $\mathbb{R}_{std}$ 中的开集 $(0,1)$，它的补集是一个无限集，因此不在 $\mathbb{R}_{fc}$ 中，所以 $\mathbb{R}_{fc}\subsetneqq\mathbb{R}_{std}$ 是严格包含的关系.