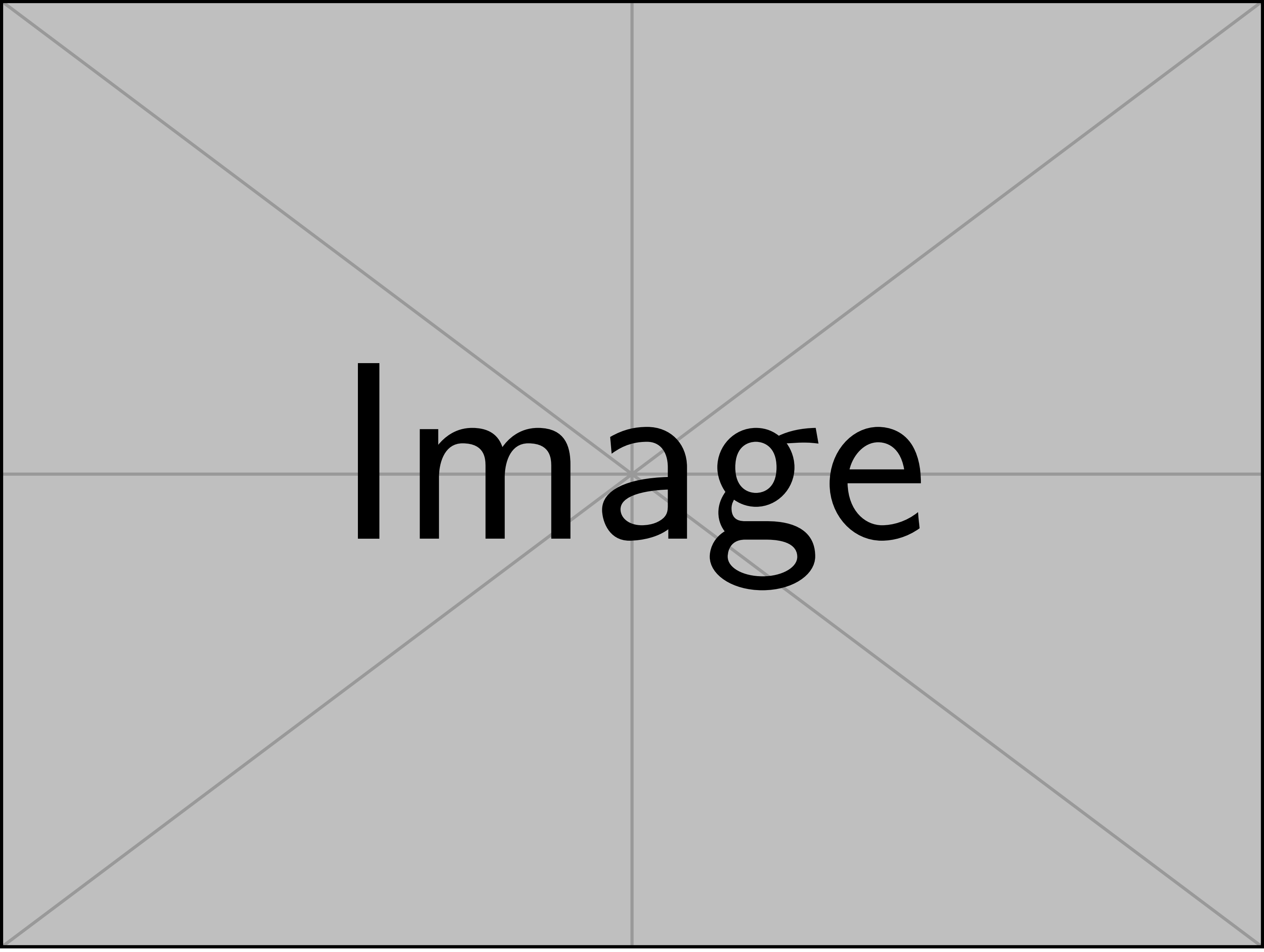

基础拓扑学笔记

目录

第一章 集合论复习

定义 1.1 (幂集)

设 X 是一个集合，X 的所有子集组成的集合称为 X 的幂集，记作 2^X.

定义 1.2 (集合的卡氏积)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为集合,则它们的卡氏积定义为 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in X_i\big\}$.

命题 1.1 (集合运算的分配律)

1. $A \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \cup B_\lambda)$
2. $A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda)$
3. $A \times \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \times B_\lambda)$
4. $A \times \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \times B_\lambda)$
5. $A \times (B_1 \setminus B_2) = (A \times B_1) \setminus (A \times B_2)$

定理 1.1 (德 · 摩根定律)

1. $A \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus B_\lambda)$
2. $A \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus B_\lambda)$

定义 1.3 (映射)

设 X, Y 是两个集合，则 X, Y 之间的映射 $f : X \to Y$ 将 X 中的每个元素 x 唯一地对应到 Y 中一个元素 y. 其中 X 称为定义域，Y 称为值域.

定义 1.4 (映射的像)

设 $f : X \to Y$ 是一个映射，则子集 $A \subseteq X$ 在 f 之下的像为

$$f(A) = \big\{y \in Y \big| \exists x \in A, \text{ s.t. } f(x) = y\big\} \subseteq Y$$

定义 1.5 (原像)

设 $f : X \to Y$ 是一个映射，则子集 $B \subseteq Y$ 在 f 之下的原像为

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in X \big| f(x) \in B\big\} \subseteq X$$

笔记 注意，这里的 f^{-1} 不表示 f 的逆映射或是 f 的反函数.

定义 1.6 (逆映射)

如果 $f: X \to Y$ 是一个双射，定义 $f^{-1}: Y \to X$ 是 f 的逆映射，满足 $f: x \mapsto y \Rightarrow f^{-1}: y \mapsto x$. ♣

命题 1.2 (映射的性质)

如果 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 是两个映射，$A_\lambda \subset X, B_\lambda \subset Y$，则

1. $f^{-1}\left(\bigcup\limits_\lambda B_\lambda\right) = \bigcup\limits_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$
2. $f^{-1}\left(\bigcap\limits_\lambda B_\lambda\right) = \bigcap\limits_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$
3. $f\left(\bigcup\limits_\lambda B_\lambda\right) = \bigcup\limits_\lambda f(B_\lambda)$
4. $f\left(\bigcap\limits_\lambda B_\lambda\right) \subset \bigcap\limits_\lambda f(B_\lambda)$，当 f 为单射时，等号成立.
5. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$，当 f 为满射时，等号成立.
6. $f^{-1}(f(A)) \supset A$，当 f 为单射时，等号成立.
7. $(g \circ f)(A) = g(f(A)), A \subset X$
8. $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right), C \subset Z$

♠

定义 1.7 (映射的限制)

设 $f: X \to Y$ 是一个映射，$A \subset X$，定义 f 在 A 上的限制为

$$\begin{aligned} f|_A : A &\to F \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

反过来，f 称为 $f|_A$ 在 X 上的扩张. ♣

定义 1.8 (特殊的映射)

1. $\begin{aligned} \mathrm{id}_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$ 称为 X 上的恒等映射.
2. 若 $A \subset X$，则 $\begin{aligned} i : A &\to X \\ a &\mapsto a \end{aligned}$ 称为 A 到 X 的包含映射.
3. $\begin{aligned} \Delta_X : X &\to X \times X \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$ 称为 X 的对角映射.

♣

注 关于包含映射，我们有以下交换图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f|_A"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

也就是说，我们可以把限制映射看成包含映射和映射的复合.

定义 1.9 (等价关系)

设 $\sim$ 是集合 X 上的一个二元关系，如果它满足以下条件：

1. 自反性：$\forall x \in X, x \sim x$
2. 对称性: $\forall x, y \in X, x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3. 传递性: $\forall x, y, z \in X, x \sim y$ 且 $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

则称 $\sim$ 为 X 上的一个等价关系.

♣

定义 1.10 (等价类)

设 $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系，则 A 中所有等价于 x 的元素组成的集合称为 x 的等价类，记作 $[x] = \{y \in X | x \sim y\}$.

♣

命题 1.3 (等价类的性质)

两个等价类要么是相等的，要么是不交的.

♠

定义 1.11 (商集)

设 $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系，所有等价类的集合称为商集，记为 $X/\sim = \{[x] | x \in X\}$.

♣