



Ecole polytechnique  
Institut polytechnique  
Département de mathématiques appliquées

### Projet de MODAL

---

# Modélisation Des Risques Extrêmes En Finance De Marchés

---

*Auteurs :*

Bidias Cabrel TIOTSOP NGUEGUIM  
Alain BAKOP

2<sup>e</sup> année Cycle Ingénieur Polytechnicien

*Supervisé par :*

Mme Gersende Fort  
M. Clément Rey

Année académique 2024 - 2025

# Remerciements

Nous exprimons notre profonde gratitude à l'ensemble de l'équipe en charge du module de Simulation Numérique Aléatoire (MODAL), qui constitue une véritable passerelle privilégiée vers le domaine de la finance.

Nous remercions tout particulièrement M. Orso Forghieri, doctorant au CMAP, Mme Gersende Fort, directrice de recherche CNRS au LAAS et responsable du MODAL, ainsi que les professeurs Charles-Albert Lehalle (CMAP) et Tony Lelièvre (CERMICS), M. Clément Rey, maître de conférence au CMAP, et M. Arvind Singh, chargé de recherche CNRS au LMO, pour leur accompagnement précieux. Leur expertise et leurs conseils, tant sur le plan théorique que pratique, ont été déterminants à la réussite de ce projet.

Nous tenons également à remercier nos camarades pour les échanges stimulants qui ont enrichi notre réflexion. Enfin, nous remercions notre institution pour les ressources mises à disposition, ainsi que les équipes techniques qui ont assuré le bon fonctionnement des outils numériques indispensables à nos simulations.

---

## Abstract

This project focuses on the study and comparison of different simulation methods for estimating rare events in a financial context, particularly the calculation of tail loss probabilities and risk quantiles such as Value at Risk (VaR). We presented several techniques, including the naive Monte Carlo method, importance sampling with mean and variance shifts, as well as splitting methods (with fixed and variable steps) and the last particle method. These approaches were evaluated across various thresholds by comparing estimated probabilities and relative errors. The results indicate that advanced methods like importance sampling and splitting provide better accuracy and significantly reduced errors compared to naive Monte Carlo, especially for very rare events. Additionally, Brownian motion trajectories were simulated using the Brownian bridge principle to illustrate the evolution of the common market factor affecting financial assets. While this work offers a thorough study of simulation methods, a more critical analysis involving other portfolio and simulation scenarios remains an interesting direction for future research.

## Résumé

Ce projet porte sur l'étude et la comparaison de différentes méthodes de simulation pour l'estimation des événements rares dans un contexte financier, notamment le calcul de probabilités d'excès de pertes et des quantiles de risque tels que la Value at Risk (VaR). Nous avons présenté plusieurs techniques, notamment la méthode de Monte-Carlo naïve, l'importance sampling avec changement de moyenne et de variance, ainsi que des méthodes basées sur le splitting (à pas fixe et variable) et la méthode de la dernière particule. Ces méthodes ont été évaluées sur plusieurs seuils, en comparant leurs probabilités estimées et leurs erreurs relatives. Les résultats montrent que les méthodes avancées comme l'importance sampling et le splitting offrent une meilleure précision et une réduction significative des erreurs par rapport à la Monte-Carlo naïve, surtout pour des événements très rares. Enfin, une simulation de trajectoires browniennes a été réalisée en utilisant le principe du pont brownien, illustrant l'évolution du facteur commun aux actifs financiers. Bien que ce travail ait permis une étude approfondie des méthodes de simulation, une analyse plus critique intégrant un autre type de porte feuille et autres scénarios de simulation reste à explorer dans le futur.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Table des figures</b>	<b>6</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>Modélisation</b>	<b>9</b>
0.1 Description de l'évolution du portefeuille . . . . .	9
0.1.1 Influence de la volatilité sur les Call et Put . . . . .	9
0.1.2 Influence de la composition du porte-feuille . . . . .	11
<b>1 Méthodes de modélisation des risques</b>	<b>12</b>
<b>Methodologie de modélisation des risques</b>	<b>12</b>
1.1 Méthodes analytiques développées pour l'évaluation des probabilités . . . . .	13
1.1.1 Méthode de Monte-Carlo naïve . . . . .	13
1.1.2 Echantillonage d'importance . . . . .	14
1.1.3 Control Variates . . . . .	18
1.1.4 Gain de variance . . . . .	18
1.1.5 Splitting à pas fixes . . . . .	18
1.1.6 Splitting à pas variables . . . . .	20
1.1.7 Analyse de la dernière particule . . . . .	20
1.2 Méthodologie pour l'estimation des quantiles . . . . .	20
1.2.1 Méthode de Monte Carlo Naive . . . . .	21
1.2.2 Méthode par Importance Sampling . . . . .	21
1.2.3 Méthode de splitting multiniveau fixé . . . . .	22
1.2.4 Méthode de la dernière particule . . . . .	23
<b>2 Implémentation numérique</b>	<b>24</b>
<b>Implémentation numérique</b>	<b>24</b>
2.1 Algorithmes pour la simulation des pertes . . . . .	24
2.1.1 Pertes non correlées . . . . .	24
2.1.2 Pertes correlées . . . . .	25
2.2 Algorithmes pour les calculs de probabilités d'événements rares . . . . .	26
2.2.1 Monte-Carlo . . . . .	26
2.2.2 Importance Sampling . . . . .	27
2.2.3 Splitting . . . . .	27
2.2.4 Analyse de la dernière particule . . . . .	30

2.3	Algorithmes pour les calculs de la VaR . . . . .	31
2.3.1	Monte-Carlo naïve . . . . .	31
2.3.2	Importance Sampling . . . . .	32
2.3.3	Analyse de la dernière particule . . . . .	33
2.3.4	Obtention d'une initialisation au delà de la VaR . . . . .	34
<b>Résultats</b>		<b>35</b>
2.4	Calculs de probabilités . . . . .	35
2.4.1	Récapitulatif des méthodes utilisées . . . . .	35
2.4.2	Résumé des résultats pour une évolution indépendante (cas de base) . . . . .	36
2.4.3	Résultats pour l'évolution corrélée . . . . .	38
2.5	Calculs de VaRs pour une évolution indépendante . . . . .	39
2.6	Trajectoires associées aux pertes extrêmes . . . . .	40
<b>3 Perspectives d'évolution</b>		<b>42</b>
<b>Perspectives d'évolution</b>		<b>42</b>
3.1	Perspectives d'évolution . . . . .	42
3.1.1	Analyse des portefeuilles couverts . . . . .	42
3.1.2	Impact des politiques monétaires et des cycles économiques . . . . .	42
3.1.3	Modélisation des corrélations dynamiques et des sauts . . . . .	43
3.1.4	Conséquences macroéconomiques des risques extrêmes . . . . .	43
<b>Conclusion</b>		<b>44</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>45</b>

# Table des figures

1	Représentation d'une option Call en fonction du temps . . . . .	10
2	Représentation du prix d'une option Put en fonction du temps . . . . .	10
3	Histogrammes de la distribution de $V_0 - V_t$ à $t = 365$ jours pour différents $\sigma$ . . . . .	11
1.1	Variance et moyenne en fonction de la $\mu$ dans l'IS . . . . .	15
1.2	Évolution de la moyenne de $V_0 - V_T^\sigma$ et de la variance empirique de l'indicatrice $1_{\{V_0 - V_T^\sigma > c\}}$ , en fonction du paramètre $\sigma$ . . . . .	17
2.1	Distribution de la perte pour un schéma corrélé . . . . .	39
2.2	Trajectoire de $B^0$ . . . . .	41

# Liste des tableaux

2.1	Comparaison des méthodes de simulation pour $\mathbb{P}(V_0 - V_t > 30000)$ . . . . .	36
2.2	Comparaison des méthodes de simulation pour $\mathbb{P}(V_0 - V_t > 50000)$ . . . . .	37
2.3	Comparaison des méthodes de simulation pour $\mathbb{P}(V_0 - V_t > 80000)$ . . . . .	37
2.4	Comparaison des méthodes de simulation pour $\mathbb{P}(V_0 - V_t > 100000)$ . . . . .	39
2.5	Estimation de la VaR au niveau 99.99% par différentes méthodes . . . . .	39
2.6	Estimation de la VaR au niveau 99.999% par différentes méthodes . . . . .	40

# Introduction

La gestion des risques extrêmes en finance de marché est cruciale pour anticiper les pertes potentielles dans des scénarios rares mais critiques, comme les crises financières. Ce projet, réalisé dans le cadre du module MODAL (Simulation Numérique Aléatoire), vise à évaluer les pertes extrêmes d'un portefeuille d'options sur actions, en se concentrant sur la Value-at-Risk (VaR) à des seuils très élevés (99.99 % ou 99.999 %). Nous étudions également la distribution conditionnelle des pertes au-delà de la VaR et l'impact de la composition du portefeuille (couvert ou non, corrélations entre actions, modèles à sauts). Pour ce faire, nous utilisons des simulations Monte Carlo en Python, avec des bibliothèques standards comme NumPy et Matplotlib. Nous présentons dans la suite nos avancées actuelles, en mettant en avant les premiers résultats, les défis rencontrés, et les perspectives pour la suite du projet.

# Modélisation

Le problème consiste à évaluer les risques extrêmes d'un portefeuille d'options (calls et puts) sur  $I_0 = 10$  actions, modélisées par des mouvements browniens géométriques :

$$S_t^i = S_0^i e^{-\frac{1}{2}\sigma_i^2 t + \sigma_i W_t^i},$$

où  $W_t^i$  est un mouvement brownien, et  $\sigma_i$  est la volatilité de l'action  $i$ . La valeur du portefeuille à l'instant  $t$  (en années) est donnée par :

$$V_t = \sum_{i=1}^{I_0} \alpha_i \text{Call}_i(t, S_t^i) + \beta_i \text{Put}_i(t, S_t^i),$$

où les prix des options sont calculés via la formule de Black-Scholes :

$$\begin{aligned} \text{call}(t, S_t) &= S_t \cdot N(d^+(T-t, S_t, K)) - K \cdot N(d^-(T-t, S_t, K)) \\ \text{put}(t, S_t) &= K \cdot N(d^+(T-t, S_t, K)) - S_t \cdot N(d^-(T-t, S_t, K)). \\ d^\pm(\tau, x, y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \end{aligned}$$

Nous considérons trois configurations de portefeuille  $(\alpha_i, \beta_i)$  et un cas couvert (hedgé) c'est-à-dire où l'investisseur détient une position longue sur l'action avant de vendre une option *call* sur celle-ci. L'objectif principal est d'estimer la VaR de  $V_0 - V_t$  à des seuils extrêmes, d'étudier la distribution conditionnelle des pertes au-delà de ce seuil, et d'analyser l'impact des corrélations entre actions et des sauts dans les cours boursiers.

Pour mieux comprendre la suite, nous avons jugé mieux de prendre un peu de temps pour comprendre le sens des objets modélisés

## 0.1 Description de l'évolution du portefeuille

Nous allons essayer de comprendre comment évolue le porte-feuille à partir de l'évolution des différents termes intervenant dans sa composition

### 0.1.1 Influence de la volatilité sur les Call et Put

Nous avons simulé l'évolution des trajectoires moyennes de *call* et de *put* sur 1 an d'un actif quelconque avec  $S_0 = \$100$  ( le prix de l'action à l'instant initial) et  $K = \$100$  le prix d'exercice de l'action à la date d'échéance fixée ici  $T = 365$  jrs sur une échelle de 30 jours.

#### description

Pour cela, nous avons commencé par faire  $N = 10^{-6}$  du brownien  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$  en utilisant la fonction `np.random.normal` du module numpy, puis nous avons construit le brownien géométrique  $S_t$

et enfin les variables `call` et `put` en nous référant ici à la formule de Black&Sholes donnée par :

## resultats graphiques

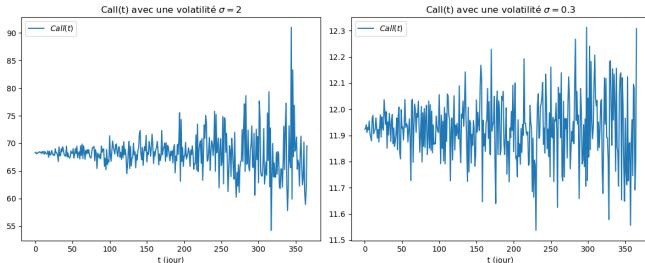


FIGURE 1 – Représentation d'une option Call en fonction du temps

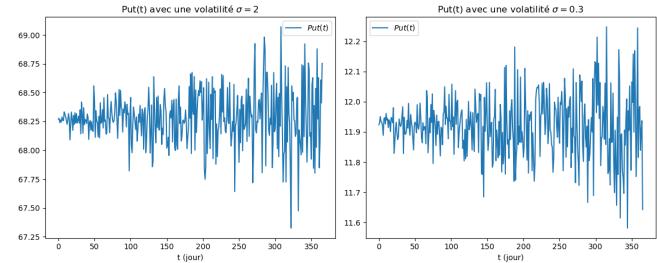


FIGURE 2 – Représentation du prix d'une option Put en fonction du temps

## Interprétation qualitative

On remarque que la trajectoire du Call lorsqu'on a une volatilité élevée varie fortement au cours du temps à cause de plusieurs facteurs dans la formule notamment la volatilité, nous avons remarqué plus elle est faible (c'est à dire plus les actions sont moins volatiles) plus les variations sont importantes. De plus, les paramètres  $S_0$  et  $K$  peuvent légèrement influencer les variations. On s'attendrait peut être naïvement à obtenir une décroissance du prix de l'option call en fonction du temps, ce qui est paraît plutôt intuitif, car plus la date de maturité approche, moins il y a d'incertitudes sur le prix de l'actif sous-jacent, et cela devrait contribuer à baisser le prix du call, ceci est cependant faux, quand il s'agit de simuler l'évolution d'option Call pour des actifs sous-jacents très volatiles. De plus, ici il n'est pas question d'acheter l'actif à la date  $t$  au prix  $\text{Call}(t)$  (ou de le revendre à cette date, comme dans le cas des options américaines), mais il est plutôt question simuler son évolution, et en effet, plus le temps passe, plus l'incertitude augmente, ce qui fait justement que les écarts à la moyenne (valeur initiale du Call) s'agrandit encore plus avec le temps pour des grandes volatilités, cependant, pour des actifs peu ou moyennement volatiles, on a une décroissance plutôt régulière du prix du Call.

Le prix de l'option Put est aussi très sporadique en fonction du temps. Ceci confirme simplement la formule de la parité Call-Put à savoir :

$$\text{Call}(t, S_t) - \text{Put}(t, S_t) = S_t$$

Lorsqu'on néglige les taux d'intérêt

## Interprétation quantitative'

Selon le modèle, le prix d'un actif qui valait initialement  $S_0$  à la date  $T$  s'écrit :

$$S_T = S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T}$$

Le prix du Call à la date  $T$  s'écrit donc :

$$\text{Call}(T, S_T) = (S_T - K)_+$$

Comme  $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$ , à 97% les réalisations de  $W_T$  se situent entre  $-2\sqrt{T}$  et  $2\sqrt{T}$ , et ainsi, le terme exponentiel est au plus  $-\frac{1}{2}\sigma^2 T + 2\sigma\sqrt{T}$ , il est maximal lorsque la volatilité est de  $\sigma = \frac{2}{\sqrt{T}}$ , et vaut 2. Cependant, pour de grandes valeurs de la volatilité, de l'ordre de  $\frac{4}{\sqrt{T}}$ , il devient négatif, et rend le prix de l'actif sous-jacent très faible à la date  $T$ . Ce raisonnement peut être fait pour n'importe quelle date, mais comme il nous sera intéressant d'observer des marchés assez fluctuants, nous prendrons  $\sigma \leq 4 = \frac{4}{\sqrt{1}}$ .

## 0.1.2 Influence de la composition du porte-feuille

Nous avons simulé les valeurs de la perte  $V_0 - V_t$  au temps de maturité ( $t = T = 365$  jours) et construit l'histogramme des valeurs pour plusieurs valeurs de la volatilité respectivement pour les cas d'un porte-feuille à position courte, mélangés et longues pour 3 volatilités (0.01, 0.1, 2) afin de comprendre l'influence couplée de la composition du portefeuille sur l'évolution de ce-dernier.

### resultats graphiques

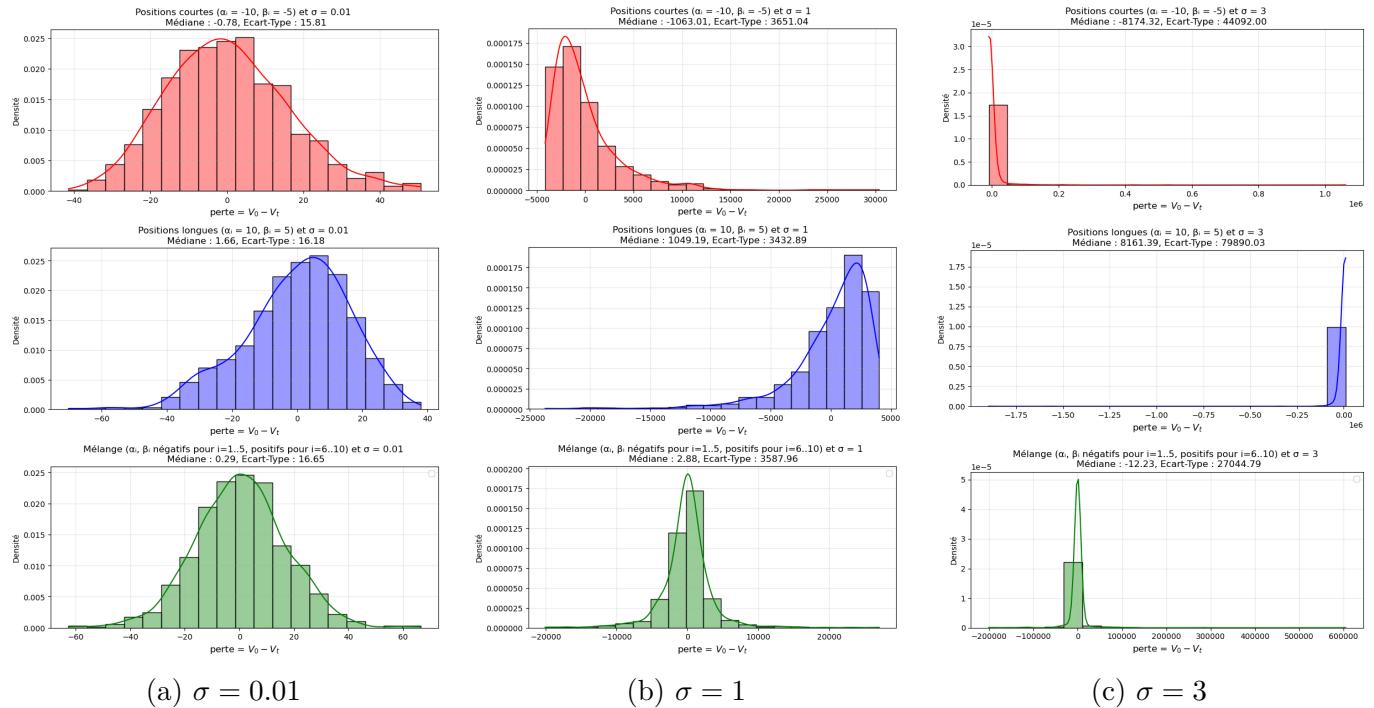


FIGURE 3 – Histogrammes de la distribution de  $V_0 - V_t$  à  $t = 365$  jours pour différents  $\sigma$

### Interprétation

Les graphiques obtenus mettent en évidence que plus la volatilité d'un actif est élevée, plus la distribution des pertes du portefeuille est étalée. Ce phénomène traduit une plus grande dispersion des valeurs possibles de perte, indiquant une exposition accrue aux fluctuations extrêmes. Ce constat fournit une première intuition : les actifs volatils présentent une instabilité marquée et ont tendance à enregistrer des variations rapides et importantes au cours du temps.

Ce résultat est appuyé par une relation mathématique fondamentale en finance, qui relie la variation relative du prix d'un actif à sa volatilité. En effet, on a l'approximation suivante :

$$\frac{S_{t+h} - S_t}{S_t} \approx \sigma(W_{t+h} - W_t),$$

où  $S_t$  désigne le prix de l'actif à l'instant  $t$ ,  $\sigma$  sa volatilité, et  $W_t$  un mouvement brownien standard. Cette relation montre que les amplitudes de variation du prix sont proportionnelles à la volatilité, justifiant ainsi la plus grande dispersion observée empiriquement dans les pertes pour des actifs à forte volatilité.

# Méthodes de modélisation des risques

## simulation des actifs financiers indépendants

Nous considérons le cas d'une évolution indépendante des actifs financiers. Plus précisément, nous supposons que les dynamiques des prix suivent un modèle indépendant avec une volatilité constante  $\sigma$ .

Pour chaque actif  $i \in \{1, \dots, d\}$ , le prix à l'instant  $t$  est donné par :

$$S_t^i = S_0^i \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}Z^i\right),$$

où  $Z^i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  sont des variables gaussiennes standard indépendantes.

Cette formule découle de la propriété fondamentale du mouvement brownien standard :  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ , ce qui peut être réécrit comme  $W_t = \sqrt{t}Z$  avec  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . L'indépendance des actifs permet alors de simuler les trajectoires conjointes à l'aide d'un vecteur gaussien  $Z = (Z^1, \dots, Z^d) \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ , où  $I_d$  désigne la matrice identité de dimension  $d$ .

Les simulations sont réalisées en exploitant cette représentation explicite, ce qui permet de générer efficacement un grand nombre de trajectoires indépendantes des prix des actifs. Cette approche est particulièrement adaptée aux méthodes de Monte-Carlo, car elle repose sur la génération de variables gaussiennes indépendantes, facilement vectorisables avec des bibliothèques optimisées telles que NumPy.

## Justification théorique des méthodes d'estimation

Nous justifions ici brièvement, en nous appuyant sur les éléments du cours, la validité des différentes méthodes d'estimation utilisées dans ce travail :

- **Méthode de Monte-Carlo naïve** : elle repose sur la loi des grands nombres (LLN) et le théorème central limite (TCL). Pour un événement  $A$ , on a  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[1_A]$  et l'estimateur empirique

$$\hat{p}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{A^{(i)}}$$

converge presque sûrement vers  $\mathbb{P}(A)$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . De plus, le TCL garantit que l'erreur de l'estimateur est asymptotiquement normale avec une variance  $\frac{\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(A))}{N}$ .

- **Méthode d'échantillonnage d'importance** : en réécrivant

$$\mathbb{P}(A) = \int 1_A(x)f(x)dx = \int 1_A(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx,$$

on obtient un nouvel estimateur,

$$\hat{p}_N^{(IS)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{A^{(i)}} \frac{f(X_i)}{g(X_i)},$$

où les  $X_i$  sont simulés selon la densité  $g$  (choisie judicieusement pour concentrer les échantillons dans les régions critiques de  $A$ ). Le TCL s'applique également à cet estimateur, à condition que  $\frac{f}{g}$  soit bien définie et intégrable au carré.

## 1.1 Méthodes analytiques développées pour l'évaluation des probabilités

Dans cette section, nous faisons rigoureusement part de toute la théorie des méthodes implémentées et nous présentons par ailleurs les différents résultats obtenus numériquement.

### 1.1.1 Méthode de Monte-Carlo naïve

La méthode de Monte Carlo naïve repose sur la loi des grands nombres et le théorème central limite pour estimer des probabilités par échantillonnage aléatoire. Son principal inconvénient réside dans le nombre élevé de simulations nécessaires pour observer au moins une occurrence d'un événement rare, ce qui peut être coûteux en termes de mémoire. Toutefois, cette approche présente l'avantage d'être naturellement parallélisable, les trajectoires simulées étant indépendantes les unes des autres. Grâce à des bibliothèques optimisées telles que NumPy en Python, il est possible de générer jusqu'à  $10^6$  simulations en moins d'une seconde. Ainsi, l'estimation de probabilités de l'ordre de  $10^{-6}$  reste tout à fait accessible avec des moyens de calcul classiques. Dans notre cas, on cherche à estimer la probabilité de l'événement  $V_0 - V_T > c$ , pour un certain seuil  $c$ . Pour ce faire, on simule  $N = 10^6$  réalisations indépendantes  $V_0 - V_T^{(i)}$  de la variable aléatoire  $V_0 - V_T$ , et l'on utilise l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}(V_0 - V_T > c) = \mathbb{E}_{\{V_0 - V_T > c\}}[1].$$

D'après la loi des grands nombres (LGN) et le théorème central limite (TCL), on a :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{V_0 - V_T^{(i)} > c\}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{ }} \mathbb{E}[1_{\{V_0 - V_T > c\}}],$$

et

$$\sqrt{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{V_0 - V_T^{(i)} > c\}} - \mathbb{E}[1_{\{V_0 - V_T > c\}}] \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \text{Var}(\{V_0 - V_T > c\})\right).$$

On en déduit un estimateur empirique de la probabilité :

$$\hat{p}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{V_0 - V_T^{(i)} > c\}},$$

ainsi qu'un intervalle de confiance asymptotique à 95 % donné par :

$$\hat{I}_N = \left[ \hat{p}_N - 1.96 \times \frac{\sqrt{\hat{p}_N(1 - \hat{p}_N)}}{\sqrt{N}}, \hat{p}_N + 1.96 \times \frac{\sqrt{\hat{p}_N(1 - \hat{p}_N)}}{\sqrt{N}} \right].$$

Il est à noter qu'avec seulement  $10^3$  simulations, il est pratiquement impossible d'observer un événement dont la probabilité réelle est de l'ordre de  $10^{-6}$ , ce qui souligne la nécessité d'un très grand nombre d'échantillons dans le cas des événements rares.

Cependant, comme discuté dans la ressource [1], c'est parfois difficile de faire ces simulations indépendantes de façon efficace, c'est pour cette raison que nous allons aussi étudier d'autres méthodes.

## 1.1.2 Echantillonage d'importance

Comme  $\mathbb{E}[1_{\{V_0 - V_T > c\}}]$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{E}[1_{\{V_0 - V_T > c\}}] = \int_{\mathbb{R}^{I_0}} 1_{\{h(x) > c\}} f(x) dx,$$

où  $h(x)$  désigne la transformation (mesurable) appliquée au vecteur aléatoire  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_{I_0})$  permettant de calculer la valeur du portefeuille à l'instant  $T$ ,  $f$  la densité de probabilité de  $Z$ , et  $I_0$  la dimension du vecteur gaussien, on peut introduire une densité auxiliaire  $g$  sur  $\mathbb{R}^{I_0}$  pour réécrire l'intégrale sous la forme :

$$\mathbb{E}[1_{\{V_0 - V_T > c\}}] = \int_{\mathbb{R}^{I_0}} 1_{\{h(x) > c\}} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx.$$

Cela justifie l'utilisation d'une méthode d'échantillonnage d'importance (\*importance sampling\*) : en simulant des vecteurs  $Z_g^{(i)} \sim g$ , on peut construire l'estimateur suivant :

$$\hat{p}_N^{(g)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\{h(Z_g^{(i)}) > c\}} \frac{f(Z_g^{(i)})}{g(Z_g^{(i)})}.$$

L'indice  $g$  sur les échantillons  $Z_g^{(i)}$  indique qu'ils sont tirés selon la densité de proposition  $g$ . Sous des hypothèses classiques (voir amphi 2 du cours), cet estimateur vérifie également un théorème central limite, ce qui permet de construire un intervalle de confiance asymptotique et d'analyser la variance réduite par rapport à l'estimateur naïf.

### Changement de moyenne

Dans notre approche, nous considérons  $g$  comme une densité normale  $\mathcal{N}(\mu, I_{I_0})$ , c'est-à-dire une loi gaussienne centrée en  $\mu \in \mathbb{R}^{I_0}$  et de matrice de covariance l'identité. L'idée sous-jacente est de modifier la moyenne du vecteur aléatoire  $Z$  de manière à recentrer les réalisations autour de la zone critique définie par le seuil  $c$ , ce qui permet d'augmenter la fréquence d'occurrence de l'événement rare  $V_0 - V_T > c$ . Cela permet ainsi une estimation plus précise de la probabilité recherchée à nombre de simulations fixé.

Cependant, toutes les valeurs de  $\mu$  ne sont pas équivalentes : il convient de choisir  $\mu$  de façon à minimiser la variance de l'estimateur par importance sampling, afin d'obtenir une efficacité statistique optimale.

Pour étudier empiriquement l'effet du choix de  $\mu$ , nous considérons un ensemble de 100 valeurs équidistantes entre 0 et 3, et pour chacune de ces valeurs, nous évaluons la moyenne de  $V_0 - V_T^\mu$ , où l'exposant  $\mu$  indique que  $V_T$  est obtenu à partir de variables normales réduites de moyenne  $\mu$ . Nous calculons également la variance empirique de l'indicateur  $\{V_0 - V_T^\mu > c\}$ , et nous traçons son évolution en fonction de  $\mu$ . L'objectif est d'identifier la valeur de  $\mu$  telle que la moyenne de  $V_0 - V_T^\mu$  soit proche du seuil  $c$ , tout en assurant une variance minimale.

### Résultats

Les résultats de cette étude exploratoire sont présentés dans la figure suivante.

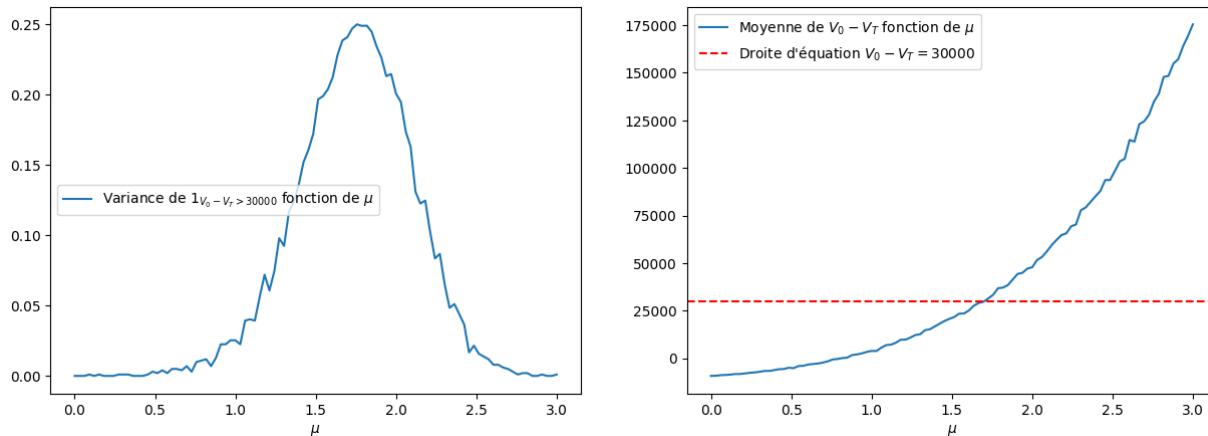


FIGURE 1.1 – Variance et moyenne en fonction de la  $\mu$  dans l'IS

**Limites de la méthode** Il convient tout d'abord de souligner que la représentation graphique des courbes précédentes requiert un effort computationnel important : elle nécessite 100 fois plus de simulations que pour une estimation unique. En dépit de cet investissement, la précision des probabilités obtenues reste limitée. En particulier, il n'est pas possible d'estimer de manière fiable des probabilités de l'ordre de  $10^{-5}$  avec une erreur relative inférieure à 1, ce qui limite considérablement l'intérêt de la méthode dans ce cadre.

En d'autres termes, bien que la technique d'échantillonnage d'importance permette théoriquement d'atteindre des événements rares, les résultats empiriques montrent que, dans cette configuration, le gain en précision n'est pas suffisant pour justifier le coût numérique engagé. L'efficacité réelle de la méthode mériterait donc d'être réévaluée sur des événements encore plus rares, c'est-à-dire de probabilité de l'ordre de  $10^{-6}$  ou inférieure.

### Justification théorique de l'allure de la courbe de la moyenne de la pert en fonction de $\mu$

Nous analysons ici l'impact du changement de loi utilisé dans l'échantillonnage d'importance sur l'espérance de l'option *call*, ainsi que sur la variance de l'indicatrice d'un événement rare. Pour cela, nous considérons une variable gaussienne biaisée  $Z_\mu \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$  utilisée dans la simulation du prix de l'actif sous-jacent.

### Effet de la moyenne $\mu$ sur l'espérance d'un *call*

Considérons un actif simulé selon

$$S_T = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}Z_\mu\right),$$

avec  $Z_\mu \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ .

L'espérance du *call* à maturité  $T$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu[(S_T - K)_+] &= \int_{\mathbb{R}} (S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - K)_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}(x+\mu)} - K)_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \end{aligned}$$

Cette écriture permet de mettre en évidence le rôle de  $\mu$  comme paramètre de translation dans la fonction d'activation du *call*. L'impact sur l'espérance peut alors être analysé en dérivant par rapport à  $\mu$  :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \mathbb{E}_\mu[(S_T - K)_+] = \int_{\mathbb{R}} (S_0 \sigma \sqrt{T} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \sqrt{T}(x+\mu)}) \cdot 1_{S_T > K} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx > 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \mathbb{E}_\mu[(S_T - K)_+] = \int_{\mathbb{R}} (S_0 \sigma^2 T e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \sqrt{T}(x+\mu)}) \cdot 1_{S_T > K} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx > 0.$$

On en conclut que la fonction  $\mu \mapsto \mathbb{E}_\mu[(S_T - K)_+]$  est strictement croissante et convexe sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs, on observe que :

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} \mathbb{E}_\mu[(S_T - K)_+] = 0,$$

car le terme  $S_T$  devient négligeable vis-à-vis de  $K$  pour toute valeur de  $x$ , et l'intégrand tend donc vers zéro partout. Ceci est cohérent avec l'intuition : en décalant la densité vers la gauche, la probabilité que  $S_T > K$  devient négligeable.

Ainsi, pour un portefeuille constitué uniquement d'options d'achat (avec des coefficients éventuellement négatifs sur les *calls*), la valeur moyenne du portefeuille suit également une fonction croissante et convexe de  $\mu$ .

## Effet du changement de loi sur la variance de l'indicatrice

Nous nous intéressons maintenant au comportement qualitatif de la variance du terme  $1_{V_0 - V_T^\mu > c}$  lorsque l'on fait varier  $\mu$ , dans le cadre de la méthode d'échantillonnage d'importance.

Le changement de loi agit principalement sur la moyenne de la variable  $V_0 - V_T^\mu$ , et il est raisonnable de supposer que, tant que l'effet de translation l'emporte sur l'éventuelle augmentation de la variance, on peut atteindre un seuil  $\mu$  pour lequel presque tous les échantillons satisfont  $V_0 - V_T^{\mu,(i)} > c$ . Dans ce cas, toutes les indicatrices valent 1 et la variance de l'estimateur devient nulle.

À l'opposé, si  $\mu$  est trop petit, alors  $V_T^\mu$  est trop élevé, de sorte que  $V_0 - V_T^{\mu,(i)} < c$  pour tous les  $i$ , ce qui rend toutes les indicatrices nulles, et la variance est également nulle.

Ainsi, la variance de l'indicatrice  $1_{V_0 - V_T^\mu > c}$  en fonction de  $\mu$  est typiquement nulle aux extrémités et non nulle uniquement sur un intervalle intermédiaire. Cette forme justifie qualitativement l'existence d'un  $\mu^*$  optimal pour lequel la variance de l'estimateur pondéré (en incluant le facteur de poids  $f/g$ ) est minimale. C'est autour de cette valeur optimale que les réalisations de  $V_0 - V_T^\mu$  sont les plus susceptibles de franchir le seuil  $c$ , rendant ainsi l'estimation la plus efficace.

## Changement de variance

Nous poursuivons ici l'approche développée dans le paragraphe précédent, en étudiant cette fois l'effet du changement de variance dans la loi de simulation.

Plus précisément, au lieu de modifier la moyenne du vecteur  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_{I_0})$ , nous considérons une densité auxiliaire  $g$  correspondant à une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 I_{I_0})$ , pour différents niveaux de variance  $\sigma^2 > 0$ . Cette modification revient à étirer ou contracter l'ensemble des trajectoires générées, ce qui impacte directement la dispersion des réalisations du portefeuille final  $V_T$ .

L'intuition est la suivante : une variance trop faible concentre les réalisations autour de la moyenne, ce qui rend peu probable la survenue d'un événement extrême de type  $V_0 - V_T > c$ . À l'inverse, une variance trop élevée génère de nombreux extrêmes, mais dilue l'efficacité de l'échantillonnage dans des régions peu pertinentes, ce qui dégrade aussi l'estimateur.

Nous évaluons donc empiriquement, comme précédemment, l'effet de cette transformation sur la performance statistique de l'estimateur. Pour cela, nous fixons une grille de 100 valeurs de  $\sigma$  dans un intervalle  $[1, 3]$ , et pour chaque  $\sigma$ , nous calculons :

- La moyenne empirique de  $V_0 - V_T^\sigma$ , où  $V_T^\sigma$  désigne la valeur finale du portefeuille obtenue à partir de  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_{I_0})$  ;
- La variance empirique de l'indicatrice  $1_{\{V_0 - V_T^\sigma > c\}}$ .

L'objectif est similaire à celui du changement de moyenne : identifier une valeur optimale de  $\sigma$  qui équilibre le taux d'occurrence de l'événement rare et la variance de l'estimateur, pour une efficacité maximale de la méthode d'échantillonnage d'importance.

## Résultats

Nous présentons ici les résultats graphiques obtenus.

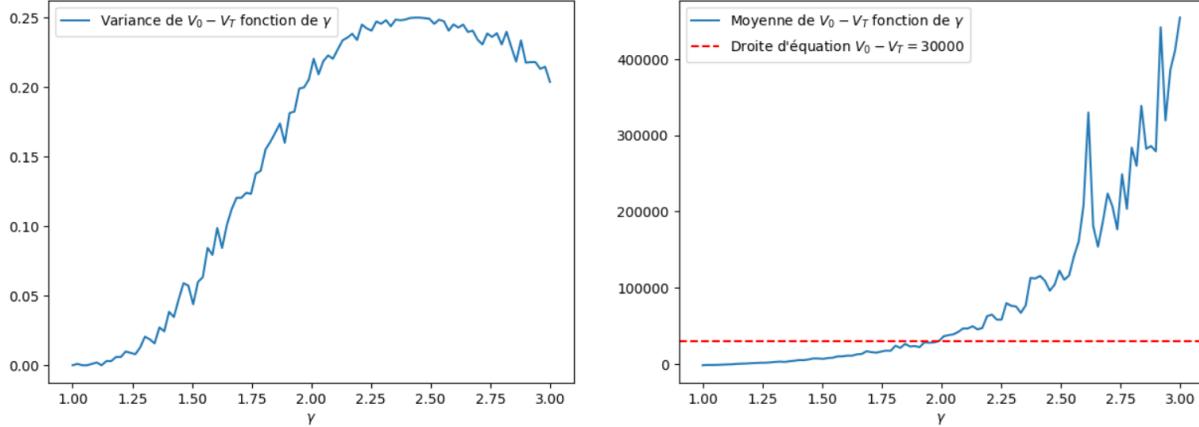


FIGURE 1.2 – Évolution de la moyenne de  $V_0 - V_T^\sigma$  et de la variance empirique de l'indicatrice  $1_{\{V_0 - V_T^\sigma > c\}}$ , en fonction du paramètre  $\sigma$ .

**Justification théorique de l'allure de la courbe de la moyenne en fonction de la variance**  
Dans la continuité du paragraphe précédent, et dans un raisonnement analogue Considérons un actif  $j$ , alors le prix de l'option call  $(S_T^j - K_j)_+$  où

$$S_T^j = S_0^j \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma_j^2 T + \sigma_j \sqrt{T} Z_\mu \right), \quad Z_\mu \sim \mathcal{N}(\mu, 1).$$

est une fonction strictement croissante et convexe de  $Z_\gamma$ , car la fonction  $x \mapsto (e^x - K)_+$  est convexe croissante sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $V_T^\gamma$  est croissante et convexe en  $Z_\gamma$ , donc également croissante et convexe en  $\gamma$ .

Par linéarité de l'espérance et par la dérivation sous le signe intégral, on obtient pour des poids négatifs :

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \mathbb{E}_\gamma[V_T^\gamma] < 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \mathbb{E}_\gamma[V_T^\gamma] < 0,$$

d'où

$$\gamma \mapsto \mathbb{E}_\gamma[V_0 - V_T^\gamma] = V_0 - \mathbb{E}_\gamma[V_T^\gamma] \text{ est strictement croissante et convexe.}$$

Considérons maintenant l'indicatrice

$$X_\gamma := 1_{\{V_0 - V_T^\gamma > c\}}, \quad \text{et sa variance} \quad \text{Var}_\mu(X_\gamma) = \mathbb{P}_\gamma(V_0 - V_T^\gamma > c) (1 - \mathbb{P}_\mu(V_0 - V_T^\mu > c)).$$

Cette expression est maximale lorsque  $\mathbb{P}_\gamma(V_0 - V_T^\gamma > c) = 1/2$ , et elle vaut zéro lorsque la probabilité vaut 0 ou 1.

Or, comme  $V_T^\gamma$  est croissante en  $\gamma$ ,  $V_0 - V_T^\gamma$  est décroissante. Il en découle que la probabilité  $\mathbb{P}_\gamma(V_0 - V_T^\gamma > c)$  est décroissante en  $\gamma$ . Ainsi, la variance  $\text{Var}_\gamma(X_\gamma)$  présente une forme en cloche : nulle aux extrémités (événement presque impossible ou presque certain), et maximale pour une valeur  $\gamma$  telle que

$$\mathbb{P}_\gamma(V_0 - V_T^\gamma > c) = \frac{1}{2}.$$

## Limite de la méthode d'échantillonnage d'importance avec changement de variance

Les résultats numériques présentés dans le tableau précédent mettent en évidence une limite importante de la méthode d'échantillonnage d'importance. On observe en effet que lorsque le seuil  $c$  augmente, la probabilité  $\mathbb{P}(V_0 - V_T > c)$  diminue comme attendu, mais l'erreur relative de l'estimateur augmente fortement. Elle passe ainsi de 34.5% pour  $c = 30\,000$  à plus de 73% pour  $c = 70\,000$ , ce qui traduit une perte significative de précision.

Cette dégradation s'explique par le fait qu'un simple décalage de la variance  $\sigma$  ne suffit plus à produire un nombre suffisant de réalisations satisfaisant  $V_0 - V_T > c$  lorsque  $c$  devient trop grand. Autrement dit, même en modifiant la loi de simulation pour se rapprocher de la zone critique, la probabilité de franchir le seuil reste trop faible, et l'échantillon simulé devient peu informatif.

**Conclusion.** La méthode d'échantillonnage d'importance avec changement de moyenne ou de variance seule montre des limites pour estimer des probabilités d'événements trop rares. Pour améliorer la précision, il est nécessaire d'envisager des approches plus riches, telles qu'un changement conjoint de moyenne et de variance, ou des méthodes adaptatives permettant de mieux concentrer les trajectoires simulées dans la zone critique.

### 1.1.3 Control Variates

C'est une technique développée dans la ressource [1] au chapitre 4.

La théorie y a été développée et nous rappelons simplement les points essentiels.

Ici, on veut calculer l'espérance de  $X = \mathbf{1}_{V_0 - V_T > c}$ . L'idée est de considérer la variable

$$Y = X - b(c^T S_T^v(Z) - c^T S_0^v)$$

où  $c$  est un vecteur agrégant les poids associés aux différents Call et Put, et la notation en exposant  $v$  est pour signifier qu'on considère le vecteur associé aux valeurs initiales des actifs et non d'un seul actif. On remarque d'entrée de jeu que  $Y$  et  $X$  ont même moyenne, et donc effectuer un Monte-Carlo sur  $X$  ou sur  $Y$  ne change absolument rien au calcul de l'espérance. Cependant, le choix de la constante  $b$  est primordial, car c'est lui qui influence finalement le facteur de réduction de variance. La valeur de  $b$  qui minimise la variance de la variable  $Y$  est

$$b = \frac{\text{cov}(X, c^T S_0^v)}{\text{Var}(X)}$$

. Comme nous ne disposons pas exactement de la statistique de  $V_0 - V_T$ , nous allons nous contenter d'une approximation comme développé dans la ressource. Nous prendrons donc

$$\hat{b}_N = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(c^T S_T^v(Z^i) - c^T S_0^v)}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}.$$

### 1.1.4 Gain de variance

Cette méthode prévoit un gain de variance de l'ordre de

$$G = \frac{1}{1 - \text{cov}(X, U)}, \text{ avec } U = c^T S_T^v(Z)$$

### 1.1.5 Splitting à pas fixes

Le principe de cette méthode est découper l'événement rare  $A := V_0 - V_T > c$  en une suite d'événements de plus en plus rares sous la forme :

$$A_0 := \text{Tout l'espace} \supset A_1 \supset \cdots \supset A_I := A$$

---

permettant d'exprimer la probabilité cherchée sous forme d'un produit de probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(V_0 - V_T > c) = \prod_{i=1}^I \mathbb{P}(A_i | A_{i-1}).$$

Dans notre cas, nous choisissons les événements intermédiaires sous la forme

$$A_i := \{V_0 - V_T > c_i\},$$

où  $(c_i)_{0 \leq i \leq I}$  est une suite strictement croissante de seuils, avec  $c_0 = -\infty$  et  $c_I = c$ .

Pour construire les seuils intermédiaires  $(c_i)$ , nous avons utilisé une approche heuristique. À partir d'un échantillon de  $N = 10^3$  réalisations indépendantes, nous avons estimé des quantiles empiriques d'ordre 0.1, 0.2, ..., 1 de la distribution de  $V_0 - V_T$ . Les seuils  $c_i$  ont ensuite été ajustés manuellement pour obtenir des valeurs plus arrondies, facilitant l'interprétation et la manipulation des résultats.

## Simulation de la loi conditionnelle

La principale difficulté de la méthode réside dans la simulation efficace selon les lois conditionnelles  $\mathbb{P}(V_0 - V_T > c_i | V_0 - V_T > c_{i-1})$ . Pour cela, nous avons recours à un noyau de transition gaussien autoregressif.

Plus précisément, si  $Z_0$  est une variable aléatoire telle que  $V_0 - V_T(Z_0) > c_{i-1}$ , nous définissons la suite  $(Z_n)_{n \geq 0}$  par :

$$Z_{n+1/2} = \rho Z_n + \sqrt{1 - \rho^2} Z, \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_{I_0}),$$

$$Z_{n+1} = \begin{cases} Z_{n+1/2} & \text{si } V_0 - V_T(Z_{n+1/2}) > c_{i-1}, \\ Z_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\rho \in [0, 1]$  est un hyperparamètre de la méthode. Il permet de définir à quelle vitesse on *oublie* les valeurs précédentes. Une valeur trop proche de 0 donne un noyau de transition qui s'apparente clairement à une simulation par la méthode du rejet, et une valeur trop proche de 1 nécessite beaucoup d'itérations pour oublier les valeurs précédentes. La loi limite de  $V_0 - V_T(Z_n)$  est la loi de  $V_0 - V_T | V_0 - V_T > c_{i-1}$ .

Le principe algorithmique sera détaillé dans la section portant sur l'implémentation des méthodes.

## Calcul de l'erreur relative

Pour calculer cette erreur, nous nous sommes servis de l'indépendance des échantillons réalisant les événements  $V_0 - V_T | V_0 - V_T > c_i$ .

Plus précisément, comme

$$\mathbb{P}(V_0 - V_T > c) = \prod_{i=1}^I \mathbb{P}(V_0 - V_T > c_i | V_0 - V_T > c_{i-1})$$

, alors on a :

$$\begin{aligned} \log(\mathbb{P}(V_0 - V_T > c)) &= \sum_{i=1}^I \log [\mathbb{P}(V_0 - V_T > c_i | V_0 - V_T > c_{i-1})] \\ &\Rightarrow \frac{\delta \mathbb{P}(V_0 - V_T > c)}{\mathbb{P}(V_0 - V_T > c)} = \sum_{i=1}^I \frac{\delta \mathbb{P}(V_0 - V_T > c_i | V_0 - V_T > c_{i-1})}{\mathbb{P}(V_0 - V_T > c_i | V_0 - V_T > c_{i-1})} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta \mathbb{P}(V_0 - V_T > c)}{\mathbb{P}(V_0 - V_T > c)} \leq \sum_{i=1}^I \frac{\Delta \mathbb{P}(V_0 - V_T > c_i | V_0 - V_T > c_{i-1})}{\mathbb{P}(V_0 - V_T > c_i | V_0 - V_T > c_{i-1})} \end{aligned}$$

Dit plus simplement, l'erreur relative sur la probabilité finale est la somme des erreurs relatives commises aux différents niveaux de splitting.

### 1.1.6 Splitting à pas variables

Dans cette approche, nous avons utilisé une méthode proche de la **méthode de splitting à pas fixe**, dans laquelle les niveaux intermédiaires sont définis dynamiquement à partir des quantiles empiriques des échantillons générés. Plus précisément, à chaque étape, le niveau suivant est pris comme le *quantile d'ordre*  $u = 0,6$  de l'échantillon issu de la loi conditionnelle précédente. Ce choix garantit qu'en moyenne, environ 40 % des trajectoires franchissent le seuil et sont conservées pour l'itération suivante.

Cette procédure permet alors d'estimer la probabilité de l'événement rare  $A := \{V_0 - V_T > c\}$  via la formule suivante :

$$\hat{p} := \hat{r} \cdot (1 - u)^{\hat{I}},$$

où  $\hat{r}$  désigne une estimation de la probabilité résiduelle  $\mathbb{P}(V_0 - V_T > c \mid V_0 - V_T > c_{\hat{I}})$ , et  $\hat{I}$  est le *nombre de niveaux franchis* pour atteindre le seuil final  $c$ .

Comme précisé dans le cours,  $\hat{I}$  est une variable aléatoire qui dépend du chemin suivi par l'algorithme.

### 1.1.7 Analyse de la dernière particule

Il s'agit simplement d'un splitting à pas variable avec comme seuils consécutifs les niveaux les plus bas de l'échantillon. Attention cependant, il ne faut pas resimuler tout l'échantillon, mais juste la dernière particule. Avec cette méthode, on a des résultats théoriques plus poussés qui permettent d'obtenir des seuils de confiance plus précis que toutes les autres méthodes sus-citées.

#### Formule d'estimation de la probabilité et de l'erreur relative

D'après les résultats de l'amphi 4,

$$\hat{p}_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\hat{J}_n}$$

où  $\hat{J}_n$  est le nombre de niveaux qui ont été nécessaires pour atteindre le niveau  $c$ .

Ce nombre de niveaux est tel que  $\hat{J}_N \sim \mathcal{P}(-N \ln p)$ , ce qui permet même d'avoir la valeur la plus probable possible pour  $\hat{J}_n$ , ainsi que la valeur la plus probable de  $\hat{p}_N$ . Enfin, l'erreur relative prévue par cette méthode s'écrit

$$\hat{r} = \frac{1.96 \sqrt{-\ln \hat{p}_N}}{\sqrt{N}}$$

. Cette erreur relative tend bien évidemment vers  $+\infty$  avec la probabilité, mais pour des valeurs raisonnables de la probabilité (événements de probabilité de l'ordre d'au moins  $10^{-n/1.96^2}$ ), on est bien loin de 1 comme erreur relative, ce qui est plutôt une grande avancée par rapport aux autres méthodes

## 1.2 Méthodologie pour l'estimation des quantiles

Après avoir étudié la probabilité d'occurrence d'événements rares sur notre portefeuille, nous nous intéressons à présent à la détermination d'une valeur seuil telle que la probabilité que la perte du portefeuille dépasse ce seuil soit inférieure à un certain niveau  $\alpha$ .

Cette quantité est connue sous le nom de **Value at Risk (VaR)** et elle correspond, mathématiquement, au quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution des pertes. On la définit comme :

$$\text{VaR}_{\alpha} = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\text{perte} > x) \leq 1 - \alpha\}$$

## 1.2.1 Méthode de Monte Carlo Naive

**Intuition mathématique :**

Pour estimer la *Value at Risk* (VaR), nous simulons un grand nombre de réalisations d'une variable aléatoire  $X$  représentant la perte, définie comme :

$$X = V_0 - V_T,$$

où  $V_0$  est la valeur initiale du portefeuille, et  $V_t$  sa valeur au temps de maturité.

À partir de ces  $n$  simulations  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , nous obtenons une estimation empirique de la fonction de répartition donnée par :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

et le quantile d'ordre  $\alpha$  (i.e., la VaR au niveau de confiance  $\alpha$ ) est alors estimé par la statistique d'ordre :

$$\hat{q}_\alpha = X_{(\lceil \alpha n \rceil)},$$

où  $X_{(i)}$  désigne la  $i$ -ème plus petite valeur des pertes simulées.

Sous des hypothèses classiques (fonction de répartition  $F$  continue et dérivable en  $q_\alpha$ , densité  $f(q_\alpha) > 0$ ), le **Théorème Central Limite** nous assure que :

$$\sqrt{n}(\hat{q}_\alpha - q_\alpha) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(q_\alpha)^2}\right),$$

où  $f(q_\alpha)$  est la densité de la perte en  $q_\alpha$ .

Ce résultat permet notamment de construire un *intervalle de confiance asymptotique* pour la VaR estimée.

La preuve basé sur la méthode delta et le TCL sur la fonction de répartition empirique, a été démontré dans l'amphi 1 du cours.

## 1.2.2 Méthode par Importance Sampling

On considère une variable aléatoire  $X$  représentant la perte d'un portefeuille, définie par :

$$X = V_0 - V_T,$$

**Principe de l'importance sampling.**

1. **Échantillonnage biaisé.** On simule  $V_T^{(1)}, \dots, V_T^{(n)}$  selon une loi de proposition  $g$  différente de la loi réelle  $f$ , choisie pour suréchantillonner les événements rares (fortes pertes).

2. **Calcul des pertes simulées.** On en déduit les pertes simulées :

$$X_i = V_0 - V_T^{(i)}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

3. **Pondération des observations.** Chaque observation est pondérée par un poids d'importance :

$$w_i = \frac{f(V_T^{(i)})}{g(V_T^{(i)})},$$

où  $f$  est la densité réelle et  $g$  celle utilisée pour la simulation.

4. **Estimation de la fonction de répartition.** On construit la fonction de répartition empirique pondérée :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \sum_{i=1}^n w_i \cdot \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}.$$

5. **Estimation du quantile.** Le quantile estimé  $\hat{q}_\alpha$  est alors défini comme :

$$\hat{q}_\alpha = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \hat{F}_n(x) \geq \alpha \right\}.$$

---

**Interprétation.** La méthode permet de concentrer les simulations sur les pertes extrêmes, tout en corrigeant le biais via les poids  $w_i$ , de sorte que l'estimateur reste cohérent vis-à-vis de la distribution réelle de  $X$ .

#### Justification du choix d'intervalle de confiance (TCL)

Comme démontré dans le Théorème 1 de Glynn [2], les estimateurs de quantiles obtenus via importance sampling vérifient un théorème central limite, sous des hypothèses raisonnables sur la régularité de la fonction de répartition et les moments des poids d'importance. on a :

**Théorème 1.** *Supposons que  $\mathbb{E}[L_1^3] < \infty$  et que la fonction de répartition  $F$  soit dérivable en  $\alpha = F^{-1}(p)$ , avec  $F'(\alpha) > 0$ . Alors, pour  $i = 1, \dots, 4$  :*

$$\sqrt{n}(\tilde{\alpha}_{in} - \alpha) \xrightarrow{d} \sigma_i \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où les variances asymptotiques  $\sigma_i^2$  sont données par :

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \frac{\mathbb{E}[L_1^2 \cdot \mathbf{1}_{\{X_1 \leq \alpha\}}] - p^2}{(F'(\alpha))^2}, \\ \sigma_2^2 &= \frac{\mathbb{E}[L_1^2 \cdot \mathbf{1}_{\{X_1 > \alpha\}}] - (1-p)^2}{(F'(\alpha))^2}, \\ \sigma_3^2 &= \frac{\mathbb{E}\left[L_1^2 \cdot (\mathbf{1}_{\{X_1 \leq \alpha\}} - p)^2\right]}{(F'(\alpha))^2}, \\ \sigma_4^2 &= \frac{\mathbb{E}\left[L_1^2 \cdot (\mathbf{1}_{\{X_1 > \alpha\}} - (1-p))^2\right]}{(F'(\alpha))^2}.\end{aligned}$$

où

$$\tilde{\alpha}_{in} = \inf \{x : \tilde{F}_{in}(x) \geq p\}.$$

et les estimateurs de la fonction de répartition :

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{1n}(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i \cdot \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}, \\ \tilde{F}_{2n}(x) &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i \cdot \mathbf{1}_{\{X_i > x\}}, \\ \tilde{F}_{3n}(x) &= \frac{\tilde{F}_{1n}(x)}{\bar{L}_n}, \\ \tilde{F}_{4n}(x) &= \frac{\tilde{F}_{2n}(x)}{\bar{L}_n}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

avec  $L_i = p(X_i)$  est le *poids d'importance* ou ratio de vraisemblance associé à  $X_i$  et  $p(\cdot)$  est une fonction de densité connue.

### 1.2.3 Méthode de splitting multiniveau fixé

Dans le schéma de splitting à pas fixe, on cherche à estimer le quantile  $q_\alpha$  en construisant une suite de niveaux croissants

$$\ell_0 < \ell_1 < \dots < \ell_J = \hat{q}_\alpha,$$

telle que chaque niveau  $\ell_j$  corresponde au quantile d'ordre  $1 - p_j$  conditionnellement à avoir dépassé  $\ell_{j-1}$ , avec un pas de probabilité fixé  $p_j \in (0, 1)$ .

Autrement dit, pour chaque  $j \in \{1, \dots, J\}$ , le niveau  $\ell_j$  vérifie :

$$\mathbb{P}(X > \ell_j \mid X > \ell_{j-1}) = p_j, \quad \text{soit équivallemment} \quad \mathbb{P}(X \leq \ell_j \mid X > \ell_{j-1}) = 1 - p_j.$$

Pour le résultat du TCL, on se base sur les résultats de l'Amphi 4 du cours.

**Estimateur de quantile à chaque niveau.** On estime  $\ell_j$  à partir d'un échantillon  $X_1^{(j-1)}, \dots, X_n^{(j-1)} \sim \mathbb{P}(\cdot | X > \ell_{j-1})$ , et on définit :

$\hat{\ell}_j :=$  statistique d'ordre de rang  $\lceil (1 - p_j)n \rceil$ , dans l'échantillon conditionné au niveau  $\ell_{j-1}$ .

Par le théorème central limite pour les quantiles empiriques, sous l'hypothèse que la densité conditionnelle  $f_j$  de  $X | X > \ell_{j-1}$  est positive et continue en  $\ell_j$ , on a :

$$\sqrt{n}(\hat{\ell}_j - \ell_j) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p_j(1-p_j)}{f_j(\ell_j)^2}\right)$$

**Quantile final estimé.** Le quantile d'ordre  $\alpha = 1 - p_J^J$  est estimé par :

$$\hat{q}_\alpha := \hat{\ell}_J.$$

Par propagation des erreurs à travers les  $J$  niveaux, et en supposant que les erreurs sont indépendantes (hypothèse classique dans les schémas idéaux), on en déduit :

$$\sqrt{n}(\hat{q}_\alpha - q_\alpha) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sum_{j=1}^J \frac{p_j(1-p_j)}{f_j(\ell_j)^2}\right)$$

Ce résultat fournit une approximation gaussienne pour l'erreur d'estimation du quantile final  $q_\alpha$ , et permet de construire un intervalle de confiance asymptotique :

$$\hat{q}_\alpha \pm z_{1-\frac{\delta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{p_j(1-p_j)}{f_j(\ell_j)^2}}.$$

#### 1.2.4 Méthode de la dernière particule

Dans un cadre d'échantillonnage séquentiel (ou splitting), une approche efficace pour estimer un quantile extrême d'une variable de perte consiste à suivre l'évolution d'un nuage de particules et à estimer le quantile à partir de la *dernière particule* survivante.

Soit  $Y$  une variable aléatoire telle que  $X = V_0 - Y$  représente la perte. On s'intéresse au quantile d'ordre  $\alpha$  de  $X$ , ce qui correspond au quantile d'ordre  $p := 1 - \alpha$  de  $Y$ .

**Nombre d'étapes.** Le nombre d'étapes nécessaires pour que la dernière particule atteigne le seuil  $q$  (quantile d'ordre  $p$ ) est asymptotiquement donné par :

$$j_n = -n \ln p \left(1 + \mathcal{O}(n^{-1})\right)$$

où  $n$  est la taille de l'échantillon à chaque niveau.

**Théorème central limite asymptotique.** En notant  $q_n$  l'estimation du quantile obtenue via la dernière particule au pas  $j_n$ , on a la convergence suivante :

$$\sqrt{n} \left( \frac{q_n - q}{q} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p^2 \ln p}{q^2 f_Y(q)^2}\right),$$

où  $f_Y(q)$  désigne la densité de  $Y$  en  $q$ .

# Implémentation numérique

Dans cette partie, nous explicitons les algorithmes utilisés d'une part pour les calculs de probabilités d'évenements rares et d'autre part pour les calculs de quantiles, mais avant, il faut expliciter les algorithmes pour la simulation des pertes.

## 2.1 Algorithmes pour la simulation des pertes

### 2.1.1 Pertes non correlées

Pour les simulations ici, nous nous basons sur le fait que  $W_t \sim \sqrt{t}\mathcal{N}(0, 1)$  algorithm algorithmic float

---

**Algorithm 1** Algorithme pour simuler plusieurs réalisations d'une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \gamma^2)$

---

**Require:**  $\mu, \gamma$  : Deux nombres réels (optionnels, et par défaut 0 et 1)

**Require:**  $N_{sim}, I_0$  : Deux entiers naturels strictement positifs

**Ensure:**  $Z$  : Tableau de  $N_{sim}$  lignes et  $I_0$  colonnes où chaque élément est une réalisation de  $\mathcal{N}(\mu, \gamma^2)$

Utilisation de `numpy.random.normal` pour la simulation du tableau  $Z$

**return**  $Z$

---

---

**Algorithm 2** Algorithme pour Calculer  $W_t$

---

**Require:**  $t$  : Temps en jours

**Require:**  $Z$  : Tableau de  $N_{sim}$  lignes et  $I_0$  colonnes où chaque élément est une réalisation de  $\mathcal{N}(\mu, \gamma^2)$

$W_t \leftarrow \sqrt{t}Z$

**return**  $W_t$

---

---

**Algorithm 3** Algorithme pour Calculer  $S_t$

---

**Require:**  $t$  : Temps en jours

**Require:**  $W_t$  : Brownien à la date  $t$

**Require:**  $\sigma$  : Réel strictement positif (paramètre optionnel, par défaut égal à 1)

$t \leftarrow \frac{t}{\text{periode}}$  {Dans la formule de Black-Scholes, le temps est en années, donc il faut absolument diviser le temps en jours par 365 qui est la période considérée ici}

$S_t \leftarrow e^{-0.5\sigma^2 t + \sigma W_t}$  {Ici, l'exponentielle doit être vue composante par composante, ce qui est possible avec numpy}

**return**  $S_t$

---

---

**Algorithm 4** Algorithme pour calculer le prix d'un Call européen  $Call(t, S_t, K, \sigma)$ 


---

**Require:**  $t$  : Temps actuel en jours  
**Require:**  $S_t$  : Prix de l'actif sous-jacent à l'instant  $t$   
**Require:**  $K$  : Prix d'exercice de l'option  
**Require:**  $\sigma$  : Volatilité de l'actif sous-jacent  
**Require:**  $T$  : Date de maturité (en jours)  
**Require:** période : Nombre de jours dans une année (ex : 365)

$$\tau \leftarrow \frac{T-t}{\text{période}}$$

**if**  $\tau = 0$  **then**

- return**  $\max(S_t - K, 0)$

**end if**

$$d_1 \leftarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + 0.5\sigma\sqrt{\tau}$$

$$d_2 \leftarrow d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$Call \leftarrow S_t \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2)$$

**return**  $Call$

---



---

**Algorithm 5** Algorithme pour calculer le prix d'un Put européen  $Put(t, S_t, K, \sigma)$ 


---

**Require:**  $t$  : Temps actuel en jours  
**Require:**  $S_t$  : Prix de l'actif sous-jacent à l'instant  $t$   
**Require:**  $K$  : Prix d'exercice de l'option  
**Require:**  $\sigma$  : Volatilité de l'actif sous-jacent  
**Require:**  $T$  : Date de maturité (en jours)  
**Require:** période : Nombre de jours dans une année (ex : 365)

$$\tau \leftarrow \frac{T-t}{\text{période}}$$

**if**  $\tau = 0$  **then**

- return**  $\max(K - S_t, 0)$

**end if**

$$d_1 \leftarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{K}{S_t}\right) + 0.5\sigma\sqrt{\tau}$$

$$d_2 \leftarrow d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$Put \leftarrow K \cdot \Phi(d_1) - S_t \cdot \Phi(d_2)$$

**return**  $Put$

---



---

**Algorithm 6** Algorithme pour calculer la valeur du portefeuille  $V_t$ 


---

**Require:**  $t$  : Temps en jours  
**Require:**  $S_t$  : Vecteur des prix des actifs sous-jacents à l'instant  $t$   
**Require:**  $K$  : Prix d'exercice de l'option  
**Require:**  $\sigma$  : Volatilité de l'actif sous-jacent  
**Require:**  $\alpha$  : Vecteur des poids des options Call dans le portefeuille  
**Require:**  $\beta$  : Vecteur des poids des options Put dans le portefeuille

Calculer  $Call_t \leftarrow Call(t, S_t, K, \sigma)$  {Prix des options Call à  $t$ }

Calculer  $Put_t \leftarrow Put(t, S_t, K, \sigma)$  {Prix des options Put à  $t$ }

$$V_t \leftarrow Call_t \cdot \alpha + Put_t \cdot \beta$$
 {Produit scalaire}

**return**  $V_t$

---

### 2.1.2 Pertes correlées

Pour une évolution correlée, la seule chose qui change est le calcul de  $W_t$ . Bien sûr on va simuler des matrices  $Z$  avec  $I_0 + 1$  colonnes maintenant, mais l'algorithme en lui-même est identique, donc

---

nous nous contentons juste de mentionner l'algorithme de calcul de  $W_t$

---

#### Algorithm 7 Algorithme pour calculer $W_t$ dans le cas corrélé

---

**Require:**  $t$  : Temps en jours

**Require:**  $Z$  : Tableau de  $N_{sim}$  lignes et  $I_0 + 1$  colonnes, chaque ligne  $Z_i = (Z_i^0, Z_i^1, \dots, Z_i^{I_0})$  iid  $\mathcal{N}(0, 1)$

**Require:**  $\rho_{corr}$  : Coefficient de corrélation

$t \leftarrow t/\text{periode}$  {Conversion en années}

$B_0 \leftarrow \sqrt{t} \cdot Z_{:,0}$  {Colonne principale, taille  $(N_{sim}, 1)$ }

$B_i \leftarrow \sqrt{t} \cdot Z_{:,1:}$  {Colonnes secondaires, taille  $(N_{sim}, I_0)$ }

$W_t \leftarrow \sqrt{\rho_{corr}} \cdot B_0 + \sqrt{1 - \rho_{corr}} \cdot B_i$  {Combinaison linéaire}

**return**  $W_t$  {Tableau  $(N_{sim}, I_0)$ }

---

## 2.2 Algorithmes pour les calculs de probabilités d'événements rares

### 2.2.1 Monte-Carlo

---

#### Algorithm 8 Estimation de $\mathbb{P}(V_0 - V_t > c)$ par Monte-Carlo naïf

---

**Require:**  $N$  : nombre de simulations indépendantes

**Require:**  $t$  : temps de maturité

**Require:**  $I_0$  : nombre d'actifs dans le portefeuille

**Require:**  $c$  : seuil de perte à estimer

**Require:**  $\alpha, \beta$  : poids des options Call et Put dans le portefeuille

1: Calculer la valeur initiale du portefeuille :  $V_0 = V_{\text{init}}(\alpha, \beta)$

2: **for**  $i = 1$  **to**  $N$  **do**

3: Générer un vecteur gaussien  $Z^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, I_{I_0})$

4: Calculer les prix simulés des actifs à maturité :  $S_t^{(i)} = S(t, Z^{(i)})$

5: Calculer la valeur du portefeuille à maturité :  $V_t^{(i)} = V_t(t, \alpha, \beta, S_t^{(i)})$

6: Calculer la perte simulée :  $L^{(i)} = V_0 - V_t^{(i)}$

7: **end for**

8: Estimer la probabilité recherchée :  $\hat{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}\{L^{(i)} > c\}$

9: Estimer l'erreur relative à 95% : erreur =  $\frac{1.96}{\sqrt{N}\hat{p}}$

10: **return**  $\hat{p}$  (probabilité estimée), erreur (erreur relative)

---

## 2.2.2 Importance Sampling

---

**Algorithm 9** Algorithme d'importance sampling pour estimer  $\mathbb{P}(V_0 - V_t > c)$  avec changement de moyenne et de variance

---

**Require:**  $N_{sim}$  : Nombre de simulations

**Require:**  $t$  : Temps en jours

**Require:**  $\mu_{opt}$  : Moyenne optimale pour l'importance sampling

**Require:**  $\gamma_{opt}$  : Variance optimale pour l'importance sampling

**Require:**  $\alpha, \beta$  : Poids des options Call et Put dans le portefeuille

**Require:**  $K, \sigma$  : Paramètres des options

Simuler  $Z \sim \mathcal{N}(\mu_{opt}, \gamma_{opt}^2 I)$  de taille  $(N_{sim}, I_0)$

Calculer  $S_t \leftarrow S(t, Z)$

Calculer  $V_t \leftarrow V_t(t, \alpha, \beta, S_t)$

Calculer  $V_0 \leftarrow V_{init}(\alpha, \beta)$

Calculer les poids  $w_i = \frac{f(Z_i)}{g(Z_i)}$  où  $f$  est la densité  $\mathcal{N}(0, I)$  et  $g$  la densité  $\mathcal{N}(\mu_{opt}, \gamma_{opt}^2 I)$

Calculer  $perte_i = (V_0 - V_t)_i > c$

Calculer l'estimateur  $\hat{p} = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=1}^{N_{sim}} perte_i \cdot w_i$

Calculer l'intervalle de confiance  $\delta = 1.96 \times \frac{\text{std}(perte \cdot w)}{\sqrt{N_{sim}}}$

**return**  $\hat{p}, \delta$

---

## 2.2.3 Splitting

### Noyau de transition

---

**Algorithm 10** Noyau de transition pour une évolution non corrélée

---

**Require:**  $Z$  : état courant (vecteur de taille  $I_0$ )

**Require:**  $t$  : temps

**Require:**  $\alpha, \beta$  : poids du portefeuille

**Require:** *seuil* : seuil à dépasser

**Require:**  $K, S_0$  : paramètres des options

**Require:**  $\rho$  : paramètre d'autocorrélation ( $0 < \rho < 1$ )

**Require:**  $V_0$  : valeur initiale du portefeuille

$\rho_t \leftarrow \sqrt{1 - \rho^2}$

$new\_Z \leftarrow \rho \cdot Z + \rho_t \cdot \mathcal{N}(0, I_{I_0})$  {Mutation indépendante sur chaque coordonnée}

$S_t \leftarrow S(t, Z)$

$new\_S_t \leftarrow S(t, new\_Z)$

$new\_value \leftarrow V_0 - V_t(t, \alpha, \beta, new\_S_t)$

**if**  $new\_value > seuil$  **then**

**return**  $new\_Z, new\_value$

**else**

**return**  $Z, V_0 - V_t(t, \alpha, \beta, S_t)$

**end if**

---

## Splitting pas fixes

---

**Algorithm 11** Splitting à pas fixes pour estimer  $\mathbb{P}(V_0 - V_t > c)$

---

**Require:** seuils : **np.ndarray** de floats, seuils croissants  $[a_0, a_1, \dots, a_K]$   
**Require:** N : **int**, nombre de particules  
**Require:** alphas : poids des Calls  
**Require:** betas : poids des Puts  
**Require:** Z\_0 : état initial (dimension  $I_0$ )  
**Require:** S\_t : prix initiaux des actifs à  $t$

```

proba ← 1                                // float
valeurs ← tableau de taille  $N$            // np.ndarray de floats
val ←  $V_t(t, \alpha, \beta, S_t)$           // float
er ← 0                                     // float
for  $i = 0$  to  $K - 1$  do
     $s \leftarrow \text{seuils}[i]$                 // float
     $Z \leftarrow Z_0$                          // np.ndarray
    if  $val < s$  then
        proba ← 0
        break
    end if
    for  $j = 1$  to  $N$  do
         $Z, valeur \leftarrow \text{noyau}(Z, t, \alpha, \beta, s)$            //  $Z$  : np.ndarray, valeur : float
        if  $valeur < s$  then
            Afficher "Erreur dans le noyau"
        end if
        if  $valeur > \text{seuils}[i + 1]$  then
             $Z_0, val \leftarrow Z, valeur$ 
        end if
         $valeurs[j] \leftarrow valeur$ 
    end for
     $e \leftarrow 1.96 \times \text{std}(valeurs > \text{seuils}[i + 1]) / \sqrt{N}$       // float
     $prob \leftarrow \text{mean}(valeurs > \text{seuils}[i + 1])$                   // float
     $er \leftarrow er + e / prob$ 
     $proba \leftarrow proba \times prob$ 
end for
return proba (float), er (float)

```

---

## Splitting à pas variables

---

**Algorithm 12** Splitting à pas variables pour estimer  $\mathbb{P}(V_0 - V_t > c)$

---

**Require:**  $c$  : seuil rare

**Require:**  $u$  : quantile utilisé à chaque étape (ex :  $u = 0.9$ )

**Require:**  $N$  : nombre de particules

**Require:**  $\alpha, \beta$  : poids du portefeuille

```

1: Initialiser  $Z_0$  (ex :  $Z_0 = 0$ )
2:  $S_t \leftarrow S(t, Z_0)$ 
3:  $proba \leftarrow 1$ 
4:  $val \leftarrow V_t(t, \alpha, \beta, S_t)$ 
5:  $seuils \leftarrow [-\infty]$ 
6:  $er \leftarrow 0$ 
7:  $i \leftarrow 0$ 
8: while  $seuils[-1] < c$  do
9:    $Zs \leftarrow$  tableau  $N \times I_0$  de zéros
10:   $s \leftarrow seuils[-1]$ 
11:   $Z \leftarrow Z_0$ 
12:  for  $j = 1$  to  $N$  do
13:     $Z, valeur \leftarrow$  noyau( $Z, t, \alpha, \beta, s$ )
14:     $Zs[j] \leftarrow Z$ 
15:     $valeurs[j] \leftarrow valeur$ 
16:  end for
17:   $seuils.append(\text{quantile}(valeurs, u) - 0.1)$ 
18:   $filtre \leftarrow \{j : valeurs[j] > seuils[-1]\}$ 
19:   $alea \leftarrow$  indice aléatoire parmi  $filtre$ 
20:   $Z_0 \leftarrow Zs[alea]$ 
21:   $val \leftarrow valeurs[alea]$ 
22:   $e \leftarrow 1.96 \times \text{std}(valeurs > seuils[-1]) / \sqrt{N}$ 
23:  if  $seuils[-1] \geq c$  then
24:     $p \leftarrow \text{mean}(valeurs > c)$ 
25:     $e \leftarrow 1.96 \sqrt{(1-p)/(Np)}$ 
26:     $proba \leftarrow proba \times p$ 
27:     $er \leftarrow er + e$ 
28:    break
29:  end if
30:   $prob \leftarrow \text{mean}(valeurs > seuils[-1])$ 
31:   $er \leftarrow er + 1.96 \sqrt{u/(N(1-u))}$ 
32:   $proba \leftarrow proba \times (1-u)$ 
33:   $i \leftarrow i + 1$ 
34: end while
35: return  $proba, er$ 

```

---

## 2.2.4 Analyse de la dernière particule

---

**Algorithm 13** Estimation de  $\mathbb{P}(V_0 - V_t > s)$  par la méthode de la dernière particule

---

**Require:**  $N$  : nombre de particules

**Require:**  $t$  : maturité

**Require:**  $\alpha, \beta$  : poids du portefeuille

**Require:**  $s$  : seuil de perte

**Require:**  $T_{\text{repet}}$  : nombre de mutations par étape

**Require:**  $\text{max\_steps}$  : nombre maximal d'itérations

```

1: Initialiser  $Z_1, \dots, Z_N \sim \mathcal{N}(0, I)$ 
2: Calculer  $V_0 = V_{\text{init}}(\alpha, \beta)$ 
3: Calculer  $perte_j = V_0 - V_t(t, \alpha, \beta, S(t, Z_j))$  pour  $j = 1..N$ 
4:  $J \leftarrow 0$ 
5: while  $\min_j perte_j < s$  et  $J < \text{max\_steps}$  do
6:    $i_{\min} \leftarrow \arg \min_j perte_j$ 
7:    $indices \leftarrow \{j : perte_j > perte_{i_{\min}}\}$ 
8:   Sélectionner  $Z_{\text{ref}}$  au hasard parmi  $Z_j$  avec  $j \in indices$ 
9:    $Z_{\text{courant}} \leftarrow Z_{\text{ref}}$ 
10:  for  $k = 1$  to  $T_{\text{repet}}$  do
11:     $Z_{\text{courant}}, val \leftarrow \text{noyau}(Z_{\text{courant}}, t, \alpha, \beta, perte_{i_{\min}})$ 
12:  end for
13:   $Z_{i_{\min}} \leftarrow Z_{\text{courant}}$ 
14:   $perte_{i_{\min}} \leftarrow val$ 
15:   $J \leftarrow J + 1$ 
16: end while
17: if  $\min_j perte_j < s$  then
18:   Avertir : non-convergence après  $\text{max\_steps}$  étapes
19: end if
20:  $p_{\text{LP}} \leftarrow (1 - 1/N)^J$ 
21: return  $p_{\text{LP}}, J$ 
```

---

## 2.3 Algorithmes pour les calculs de la VaR

### 2.3.1 Monte-Carlo naïve

---

**Algorithm 14** Estimation de la VaR par la méthode de Monte-Carlo naïve

---

**Require:**  $N$  : nombre de simulations indépendantes

**Require:**  $t$  : temps de maturité

**Require:**  $I_0$  : nombre d'actifs dans le portefeuille

**Require:**  $\alpha, \beta$  : poids des options Call et Put dans le portefeuille

**Require:**  $p$  : niveau de quantile désiré (ex :  $p = 0.99$ )

1: Calculer la valeur initiale du portefeuille :  $V_0 = V_{\text{init}}(\alpha, \beta)$

2: **for**  $i = 1$  **to**  $N$  **do**

3: Générer un vecteur gaussien  $Z^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, I_{I_0})$

4: Calculer les prix simulés des actifs à maturité :  $S_t^{(i)} = S(t, Z^{(i)})$

5: Calculer la valeur du portefeuille à maturité :  $V_t^{(i)} = V_t(t, \alpha, \beta, S_t^{(i)})$

6: Calculer la perte simulée :  $L^{(i)} = V_0 - V_t^{(i)}$

7: **end for**

8: Estimer la VaR au niveau  $p$  :  $\widehat{\text{VaR}}_p = \text{quantile}_p(L^{(1)}, \dots, L^{(N)})$

9: Estimer l'erreur relative à 95% :  $\text{erreur} = \frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{\widehat{\text{VaR}}_p \sqrt{N} \cdot f(\widehat{\text{VaR}}_p)}$  où  $f$  est la densité estimée en  $\widehat{\text{VaR}}_p$

10: **return**  $\widehat{\text{VaR}}_p$  (VaR estimée), erreur (erreur relative)

---

### 2.3.2 Importance Sampling

---

**Algorithm 15** Estimation de la VaR par Importance Sampling (changement de moyenne)

---

**Require:**  $N$  : nombre de simulations

**Require:**  $t$  : Temps en jours auquel on se place (on anticipe le cas des options américaines)

**Require:**  $I_0$  : nombre d'actifs

**Require:**  $\alpha, \beta$  : poids des options Call et Put

**Require:**  $p$  : niveau de quantile désiré (ex :  $p = 0.999$ )

**Require:**  $\mu$  : paramètre de changement de moyenne

- 1: Générer  $Z^{(i)} \sim \mathcal{N}(\mu\mathbf{1}, I_{I_0})$  pour  $i = 1..N$
  - 2: Calculer  $S_t^{(i)} = S(t, Z^{(i)})$
  - 3: Calculer  $V_0 = V_{\text{init}}(\alpha, \beta)$
  - 4: Calculer  $V_t^{(i)} = V_t(t, \alpha, \beta, S_t^{(i)})$
  - 5: Calculer les pertes  $L^{(i)} = V_0 - V_t^{(i)}$
  - 6: Trier  $L^{(i)}$  et réordonner  $Z^{(i)}$  en conséquence
  - 7: Calculer les poids  $w^{(i)} = \frac{f(Z^{(i)})}{g(Z^{(i)})}$  où  $f$  est la densité standard et  $g$  la densité modifiée
  - 8: Calculer la densité empirique  $f_L$  des pertes sous la loi standard
  - 9: **for**  $i = 1$  **to**  $N$  **do**
  - 10:    $q = L^{(i)}$
  - 11:    $F(q) = \sum_j^1 w^{(j)} \sum_{j=1}^N w^{(j)} \cdot \mathbb{I}\{L^{(j)} \leq q\}$
  - 12:   **if**  $F(q) \geq p$  **then**
  - 13:     Estimer l'erreur relative à 95% :  $e = \frac{1.96\sqrt{\mathbb{E}[w^2 \mathbb{I}\{L \leq q\}] - p^2}}{\sqrt{N} \cdot f_L(q) \cdot |q|}$
  - 14:     **retourner**  $q, e$
  - 15:   **end if**
  - 16: **end for**
-

### 2.3.3 Analyse de la dernière particule

---

**Algorithm 16** Estimation de la VaR par Importance Sampling (changement de moyenne)

---

**Require:**  $N$  : nombre de simulations

**Require:**  $t$  : Temps en jours auquel on se place (on anticipe le cas des options américaines)

**Require:**  $I_0$  : nombre d'actifs

**Require:**  $\alpha, \beta$  : poids des options Call et Put

**Require:**  $p$  : niveau de quantile désiré (ex :  $p = 0.999$ )

**Require:**  $\mu$  : paramètre de changement de moyenne

- 1: Générer  $Z^{(i)} \sim \mathcal{N}(\mu\mathbf{1}, I_{I_0})$  pour  $i = 1..N$
  - 2: Calculer  $S_t^{(i)} = S(t, Z^{(i)})$
  - 3: Calculer  $V_0 = V_{\text{init}}(\alpha, \beta)$
  - 4: Calculer  $V_t^{(i)} = V_t(t, \alpha, \beta, S_t^{(i)})$
  - 5: Calculer les pertes  $L^{(i)} = V_0 - V_t^{(i)}$
  - 6: Trier  $L^{(i)}$  et réordonner  $Z^{(i)}$  en conséquence
  - 7: Calculer les poids  $w^{(i)} = \frac{f(Z^{(i)})}{g(Z^{(i)})}$  où  $f$  est la densité standard et  $g$  la densité modifiée
  - 8: Calculer la densité empirique  $f_L$  des pertes sous la loi standard
  - 9: **for**  $i = 1$  **to**  $N$  **do**
  - 10:    $q = L^{(i)}$
  - 11:    $F(q) = \sum_j^1 w^{(j)} \sum_{j=1}^N w^{(j)} \cdot \mathbb{I}\{L^{(j)} \leq q\}$
  - 12:   **if**  $F(q) \geq p$  **then**
  - 13:     Estimer l'erreur relative à 95% :  $e = \frac{1.96\sqrt{\mathbb{E}[w^2 \mathbb{I}\{L \leq q\}] - p^2}}{\sqrt{N} \cdot f_L(q) \cdot |q|}$
  - 14:     **retourner**  $q, e$
  - 15:   **end if**
  - 16: **end for**
-

### 2.3.4 Obtention d'une initialisation au delà de la VaR

---

**Algorithm 17** Estimation de la distribution conditionnelle des pertes au-delà de la VaR (évolution corrélée)

---

**Require:** VaR : niveau de VaR  
**Require:**  $N$  : nombre de particules  
**Require:**  $T_{\text{rep}}$  : nombre de répétitions du noyau  
**Require:**  $\alpha, \beta$  : poids des options Call et Put  
**Require:**  $t$  : Temps en jours auquel on se place (on anticipe le cas des options américaines)

- 1: Initialiser  $Z_0 = \mathbf{0}$  (vecteur de taille  $I_0 + 1$ )
- 2: Calculer  $V_0 = V_{\text{init}}(\alpha, \beta)$
- 3: Calculer  $W_0 = W_t^{\text{corr}}(t, Z_0)$
- 4: Calculer  $S_{t,0} = S_t^{\text{corr}}(t, W_0)$
- 5: Calculer  $val = V_0 - V_t(t, \alpha, \beta, S_{t,0})$
- 6: Initialiser  $seuils = [-\infty]$
- 7: Initialiser  $Zs$  (matrice  $N \times (I_0 + 1)$ ),  $valeurs$  (taille  $N$ )
- 8:  $i \leftarrow 0$
- 9: **while**  $seuils[-1] < \text{VaR}$  **do**
- 10:    $s \leftarrow seuils[-1]$
- 11:   **for**  $j = 1$  **to**  $N$  **do**
- 12:      $Z \leftarrow Z_0$
- 13:     **for**  $k = 1$  **to**  $T_{\text{rep}}$  **do**
- 14:       Appliquer le noyau de transition corrélé :  $Z, valeur = \text{noyau\_corr}(Z, t, \alpha, \beta, s, \rho, V_0)$
- 15:     **end for**
- 16:      $Zs[j] \leftarrow Z$
- 17:      $valeurs[j] \leftarrow valeur$
- 18:   **end for**
- 19:   Trouver  $indice = \arg \max(valeurs)$
- 20:    $Z_0 \leftarrow Zs[indice]$
- 21:    $val \leftarrow valeurs[indice]$
- 22:   Ajouter  $val$  à  $seuils$
- 23:    $i \leftarrow i + 1$
- 24: **end while**
- 25: Retourner  $Z_0, val$  (une réalisation au-delà de la VaR)

---

# Résultats et interprétations

## 2.4 Calculs de probabilités

Pour les calculs de probabilités, nous avons choisi des actifs très volatiles ( $\sigma = 1$ ). Plus précisément, nous avons considéré les paramètres suivants :

- $K = 100$
- $S_0 = 100$
- $\rho = 0.6$  (paramètre pour le noyau gaussien)
- $t = T = 365$  (jours)
- Type de porte-feuille : Positions courtes
- $N_{sim} = 10^3$  (Nombre de simulations réalisées)

### 2.4.1 Récapitulatif des méthodes utilisées

#### Méthode de Monte-Carlo

**Avantages** Cette méthode bénéficie d'une grande simplicité d'implémentation et d'une bonne efficacité temporelle, notamment grâce à la possibilité de parallélisation des calculs.

**Inconvénients** Cependant, elle nécessite un grand nombre de réalisations pour estimer avec précision les probabilités d'événements rares, ce qui induit une forte consommation de mémoire et limite son applicabilité dans ce contexte.

#### Importance Sampling

**Avantages** L'importance sampling permet une estimation efficace des probabilités d'événements rares. De plus, cette méthode conserve l'avantage d'être parallélisable, ce qui en fait une approche particulièrement adaptée et performante dans notre cadre d'étude.

**Inconvénients** La méthode repose souvent sur des heuristiques pour orienter la loi de simulation vers les événements rares, ce qui peut limiter la précision des estimations. Par exemple, bien que l'approximation Delta-Gamma (cf. [1]) puisse améliorer cette orientation, elle demeure une approximation. Par ailleurs, malgré un gain en efficacité par rapport à la méthode Monte-Carlo naïve, un nombre important de simulations reste nécessaire, notamment dans notre cas où nous avons combiné plusieurs séries indépendantes de simulations.

#### Splitting à pas fixes

**Avantages** Cette méthode peut réduire significativement le nombre total de simulations nécessaires, à condition de bien choisir les seuils intermédiaires, ce qui améliore son efficacité.

**Inconvénients** Cependant, les simulations étant conditionnées les unes aux autres, le temps de calcul est considérablement allongé, ce qui limite son usage pratique dans des contextes où la rapidité est cruciale.

### Splitting à pas variables

**Avantages** Le splitting à pas variables offre un contrôle plus fin de l'erreur relative, améliorant ainsi la précision de l'estimation. Par ailleurs, il se révèle beaucoup plus rapide et plus précis que le splitting à pas fixes.

**Inconvénients** Toutefois, cette méthode reste plus coûteuse en temps de calcul que la méthode de Monte-Carlo classique.

### Analyse de la dernière particule

**Avantages** L'analyse de la dernière particule constitue la méthode la plus précise parmi celles étudiées, permettant d'estimer efficacement des probabilités d'événements extrêmement rares.

**Inconvénients** Elle est néanmoins la plus coûteuse en termes de temps de calcul, ce qui peut en limiter l'utilisation dans certaines applications.

## 2.4.2 Résumé des résultats pour une évolution indépendantes (cas de base)

Les résultats présentent une comparaison des probabilités et de l'erreur relative obtenues entre les différentes méthodes pour des seuils de niveaux différents pour un portefeuille à positions courtes.

Pour  $c = 30000$

Méthode	Seuil	Probabilité estimée	Erreur relative
Monte Carlo naïf	30000	0.00000	$\infty$
IS - changement de moyenne	30000	$4,7366 \times 10^{-5}$	0.6839
IS - changement de variance	30000	$5.1664 \times 10^{-4}$	0.45176
Splitting à pas fixe	30000	$2.88611 \times 10^{-4}$	0.66629
Splitting à pas variable	30000	$1.81000 \times 10^{-4}$	0.68967
Dernière particule ( $J = 8097$ )	30000	$3.0322 \times 10^{-4}$	0.1764

TABLE 2.1 – Comparaison des méthodes de simulation pour  $\mathbb{P}(V_0 - V_t > 30000)$

### Analyse et Interpretation

Les résultats obtenus permettent de comparer différentes méthodes de simulation pour l'estimation de la probabilité d'un événement rare de la forme  $\mathbb{P}(V_0 - V_t > 30000)$  :

- **Méthode de Monte Carlo naïf** : elle échoue complètement à détecter l'événement rare, avec une probabilité estimée nulle et une erreur relative infinie. Elle est donc inutilisable dans ce contexte.
- **Importance Sampling (IS) :**
  - par **changement de moyenne** permet une estimation non nulle, mais avec une instabilité importante (erreur relative  $\approx 0.68$ ).

- par **changement de variance** offre une estimation plus fiable, avec une erreur relative réduite à 0.45176.
- **Méthodes de Splitting :**
  - Les approches **à pas fixe** et **à pas variable** donnent des résultats similaires, avec des erreurs relatives modérées ( $\approx 0.6$ ).
  - Elles permettent d'approcher efficacement l'événement rare via une progression en niveaux, mais restent sensibles au choix des seuils intermédiaires.
- **Méthode de la dernière particule** : cette méthode se démarque nettement des autres. Elle fournit une estimation précise de la probabilité avec la **meilleure erreur relative** (0.1764). Grâce à son approche adaptative multi-niveaux, elle s'avère être la plus performante pour ce problème, mais est gourmande en temps

**Conclusion** : le Monte Carlo naïf est à proscrire pour évaluer les risques extrêmes. L'Importance Sampling avec changement de variance ainsi que les méthodes de Splitting offrent un compromis intéressant. Toutefois, la méthode de la dernière particule est la plus recommandée pour une estimation précise et efficace des événements rares. Pour la suite, on va plus observer les résultats pour la méthode de Monte Carlo naïf car elle est obsolète.

pour  $c = 50000$

Méthode	Seuil	Probabilité estimée	Erreur relative
IS - changement de moyenne	50000	$2.3252 \times 10^{-6}$	1.6852
IS - changement de variance	50000	$2.5897 \times 10^{-5}$	0.5593
Splitting à pas fixe	50000	$6.2900 \times 10^{-5}$	0.8196
Splitting à pas variable	50000	$5.7100 \times 10^{-5}$	0.7975
Dernière particule ( $J = 10128$ )	50000	$3.9743 \times 10^{-5}$	0.1973

TABLE 2.2 – Comparaison des méthodes de simulation pour  $\mathbb{P}(V_0 - V_t > 50000)$

pour  $c = 80000$

Méthode	Seuil	Probabilité estimée	Erreur relative
IS - changement de moyenne	80000	$5.6741 \times 10^{-7}$	1.9569
IS - changement de variance	80000	$7.4539 \times 10^{-6}$	0.6182
Splitting à pas fixe	80000	$6.7552 \times 10^{-8}$	1.4058
Splitting à pas variable	80000	$2.4700 \times 10^{-6}$	1.0379
Dernière particule ( $J = 11877$ )	80000	$6.9072 \times 10^{-6}$	0.2137

TABLE 2.3 – Comparaison des méthodes de simulation pour  $\mathbb{P}(V_0 - V_t > 80000)$

## Analyse globale

Les résultats obtenus pour les différents seuils (30000, 50000, 80000) mettent en évidence plusieurs tendances clés en matière d'efficacité des méthodes de simulation de probabilités rares.

- **Influence du seuil sur la difficulté de l'estimation** : plus le seuil augmente, plus l'événement devient rare, ce qui se traduit par des probabilités de plus en plus faibles et des erreurs relatives globalement en hausse. Cela confirme la difficulté croissante à estimer de tels événements avec précision, en particulier pour les méthodes standards.

- **Dégradation des méthodes classiques** : les méthodes d'importance sampling (IS), en particulier avec changement de moyenne, deviennent rapidement peu fiables à mesure que le seuil augmente. Leurs erreurs relatives dépassent souvent 1, ce qui les rend imprécises, voire inutilisables dans certains cas .
- **Robustesse modérée du splitting** : les méthodes de splitting, qu'elles soient à pas fixe ou variable, conservent des erreurs relatives modérées pour les seuils moyens (30000 et 50000), mais leur précision se dégrade pour le seuil le plus élevé (80000) si les seuils sont mal choisis ou si le nombre de seuils est trop grand, avec des erreurs relatives proches ou supérieures à 1. Elles restent tout de même compétitives vis-à-vis des variantes d'IS.
- **Performance remarquable de la méthode de la dernière particule** : c'est la seule méthode qui maintient une erreur relative faible (inférieure à 0.25) sur l'ensemble des seuils. Elle apparaît comme la méthode la plus **stable, fiable et précise** pour estimer des probabilités extrêmement faibles, même lorsque le nombre de niveaux requis devient élevé.

**Conclusion** : pour des événements de plus en plus rares, seules les méthodes adaptatives et bien calibrées, comme la méthode de la dernière particule ou l'IS avec changement de variance, fournissent des estimations acceptables.

### 2.4.3 Résultats pour l'évolution corrélée simulation des actifs financiers dépendants

Dans cette partie, on suppose que les actifs sont liés et qu'ils s'influencent les unes les autres au cours de leur évolution. Nous allons donc étudier la conséquence directe de ce format de modélisation. idée mathématique :

$$W_t^i = \sqrt{\rho} B_t^0 + \sqrt{1 - \rho} B_t^i, \quad t \geq 0,$$

où les  $(B_t^i)_{0 \leq i \leq I}$  sont des mouvements browniens indépendants et  $\rho \geq 0$ . Le processus  $B^0$  peut s'interpréter comme un facteur commun à toutes les actions du marché et  $\rho$  est la covariance entre les browniens. Dans la suite nous allons supposer que  $B_t^0$  est lui aussi un brownien dont les trajectoires sont données. Nous allons pas reprendre ici toute la théorie développée et les méthodes utilisées précédemment mais juste présenter les résultats importants.

#### Influence de la corrélation sur la rareté de pertes extrêmes

Nous allons analyser la distribution de la perte  $V_0 - V_t$  au temps de maturation  $t = T$  pour des actifs corrélés. Nous allons considérer un portefeuille à position courte c'est à dire pour des poids négatifs et une volatilité de  $\sigma = 1$ . Pour de faibles valeurs de  $\rho$ , comme on s'y attendait, on retrouve quasiment les mêmes histogrammes de départ. Cependant, plus  $\rho$  proche de 1, plus on a de longues queues de distribution. En effet, plus  $\rho$  est proche de 1, plus leur évolution devient proche et le risque n'en devient que plus élevé.

Le premier histogramme met en évidence l'impact de la corrélation positive entre actifs sur la distribution des pertes et gains du portefeuille. On observe que la queue gauche de la distribution, correspondant aux pertes extrêmes, s'allonge significativement, tandis que la queue droite, associée aux gains importants, se contracte.

Cela s'explique par le fait que, dans un contexte de corrélation positive, une baisse du prix d'un actif tend à être accompagnée par des baisses similaires des autres actifs du portefeuille. Ce phénomène d'amplification synchronisée accroît considérablement le risque de pertes extrêmes, rendant le portefeuille plus vulnérable aux chocs de marché.

Inversement, les gains sont limités car la diversification ne joue plus son rôle protecteur : les actifs évoluent dans le même sens, ce qui réduit la probabilité que certains compensent les pertes des autres.

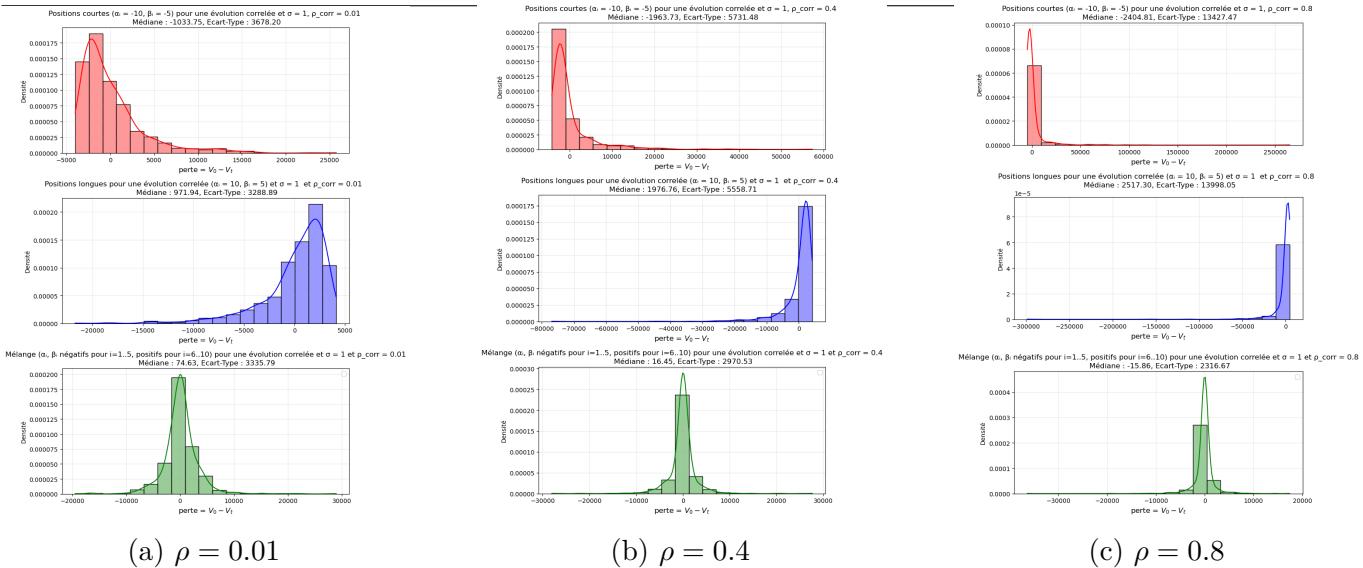


FIGURE 2.1 – Distribution de la perte pour un schéma corrélé

Ainsi, la structure corrélée du portefeuille entraîne une asymétrie défavorable dans la distribution des rendements, caractérisée par une augmentation du risque de pertes sévères sans amélioration proportionnelle des gains potentiels.

Les méthodes employées sont disponibles dans le notebook associé à ce document. Dans un souci d'éviter toute redondance avec les interprétations déjà fournies précédemment, nous nous limiterons ici à la présentation synthétique des probabilités estimées pour le seuil  $c = 100000$  pour une corrélation positive de coefficient  $\rho_{corr} = 0.8$ .

Méthode	Seuil	Probabilité estimée	Erreur relative
Monte-Carlo naïf	100000	0.0	nan
IS-changement de moyenne	100000	$4.4985 \times 10^{-6}$	1.8981
IS-changement de variance	100000	$2.6818 \times 10^{-6}$	0.2083
Splitting à pas variable	100000	$4.90 \times 10^{-5}$	0.8253

TABLE 2.4 – Comparaison des méthodes de simulation pour  $\mathbb{P}(V_0 - V_t > 100000)$

## 2.5 Calculs de VaRs pour une évolution indépendante

pour  $p = 0.9999$

Méthode	Niveau de VaR	VaR estimée	Erreur relative
Monte Carlo naïf	99.99%	42710.89	3.64
IS - changement de moyenne	99.99%	45390.09	0.0518
IS - changement de variance	99.99%	39960.18	2.54
Dernière particule	99.99%	37802.67	0.0391

TABLE 2.5 – Estimation de la VaR au niveau 99.99% par différentes méthodes

pour  $p = 0.99999$

Méthode	Niveau de VaR	VaR estimée	Erreur relative
Monte Carlo naïf	99.999%	71867.37	5.32
IS - changement de moyenne	99.999%	57173.64	0.0328
IS - changement de variance	99.999%	74307.26	0.0106
Dernière particule	99.999%	60592.74	0.0410

TABLE 2.6 – Estimation de la VaR au niveau 99.999% par différentes méthodes

## Analyse et Interprétation

On observe que la méthode de Monte Carlo naïf présente les erreurs relatives les plus élevées (de l'ordre de 3.64 à 5.32), ce qui témoigne de son inefficacité pour estimer des quantiles extrêmes. Cela s'explique par la rareté des événements situés en queue de distribution, que cette méthode peine à capturer avec précision sans un nombre d'échantillons massivement élevé.

Les méthodes d'Importance Sampling (IS) s'avèrent significativement plus efficaces. En particulier, l'IS avec changement de moyenne produit des estimations avec une bonne stabilité (erreurs relatives  $\approx 5\%$ ), bien que son estimation de la VaR à 99.999% (44324.97) paraisse sous-estimée comparée aux autres méthodes (le poids étant bien estimé par rapport à la VaR obtenue par Monte Carlo Naive), ce qui peut indiquer une mauvaise adaptation du biais introduit.

L'IS par changement de variance montre une amélioration à très haut niveau de confiance (99.999%) avec une erreur relative remarquablement faible ( $\approx 1\%$ ), suggérant une très bonne capacité à explorer les queues de distribution extrêmes, au prix toutefois d'une surestimation potentielle de la VaR (jusqu'à 74307.26).

Enfin, la méthode de la dernière particule (ou splitting) fournit des estimations robustes, avec des erreurs relatives faibles (inférieures à 4%), tout en maintenant des valeurs estimées de VaR cohérentes avec les méthodes IS. Elle constitue ainsi un excellent compromis entre précision et stabilité, particulièrement adaptée pour les événements rares.

En résumé, pour l'estimation de la VaR :

- **Monte Carlo naïf** est peu fiable pour des quantiles élevés.
- **IS par changement de moyenne** est précis mais peut sous-estimer les extrêmes.
- **IS par changement de variance** est très performant pour explorer les queues.
- **La dernière particule** offre le meilleur équilibre précision.

## 2.6 Trajectoires associées aux pertes extrêmes

Pour cette partie, nous nous sommes inspirés de la formule du conditionnement (2.24) de la ressource [1]. Nous détaillons juste le résultat dans le cas d'un mouvement brownien ( $B_t$ ). On s'est aussi servi du fait que

$$\text{cov}(B_s, B_t) = t - s \text{ pour } s < t$$

. Pour analyser les trajectoires typiques du facteur commun  $B_0$  associées aux pertes extrêmes, nous simulons des trajectoires browniennes conditionnées sur une valeur finale donnée. Cette méthode repose sur la propriété du **pont brownien** : étant donné une valeur finale  $B_t = b$  à un instant  $t$ , la loi conditionnelle du processus à un instant intermédiaire  $s \in [0, t]$  suit une loi normale avec moyenne  $\frac{s}{t}b$  et variance  $s\left(1 - \frac{s}{t}\right)$ .

**Rappel sur le pont brownien** Le pont brownien est un processus stochastique obtenu à partir d'un mouvement brownien standard  $(B_t)_{t \geq 0}$  conditionné à revenir à une valeur donnée à un instant

final. Plus précisément, pour un instant  $t > 0$  fixé et une valeur finale  $B_t = b$ , la loi conditionnelle du processus à un instant intermédiaire  $s \in [0, t]$  est donnée par :

$$B_s \mid B_t = b \sim \mathcal{N}\left(\frac{s}{t}b, s\left(1 - \frac{s}{t}\right)\right),$$

où  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  désigne la loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ .

Ce processus modélise ainsi un mouvement brownien "ponté" entre l'origine et la valeur  $b$  à l'instant  $t$ , ce qui est utile pour simuler des trajectoires avec une contrainte finale imposée.

Notre algorithme simule donc à rebours, de  $t$  vers 0, ces trajectoires en utilisant cette distribution conditionnelle. Cette approche permet d'obtenir des trajectoires cohérentes avec la contrainte imposée sur la valeur finale, ce qui est particulièrement adapté pour étudier des scénarios extrêmes de marché où le facteur commun atteint une valeur importante.

**Résultats graphiques des trajectoires obtenus** Nous avons simulé 10 trajectoires différentes partant de  $B_0 = 0$  pour atteindre une trajectoire cible  $B_t$

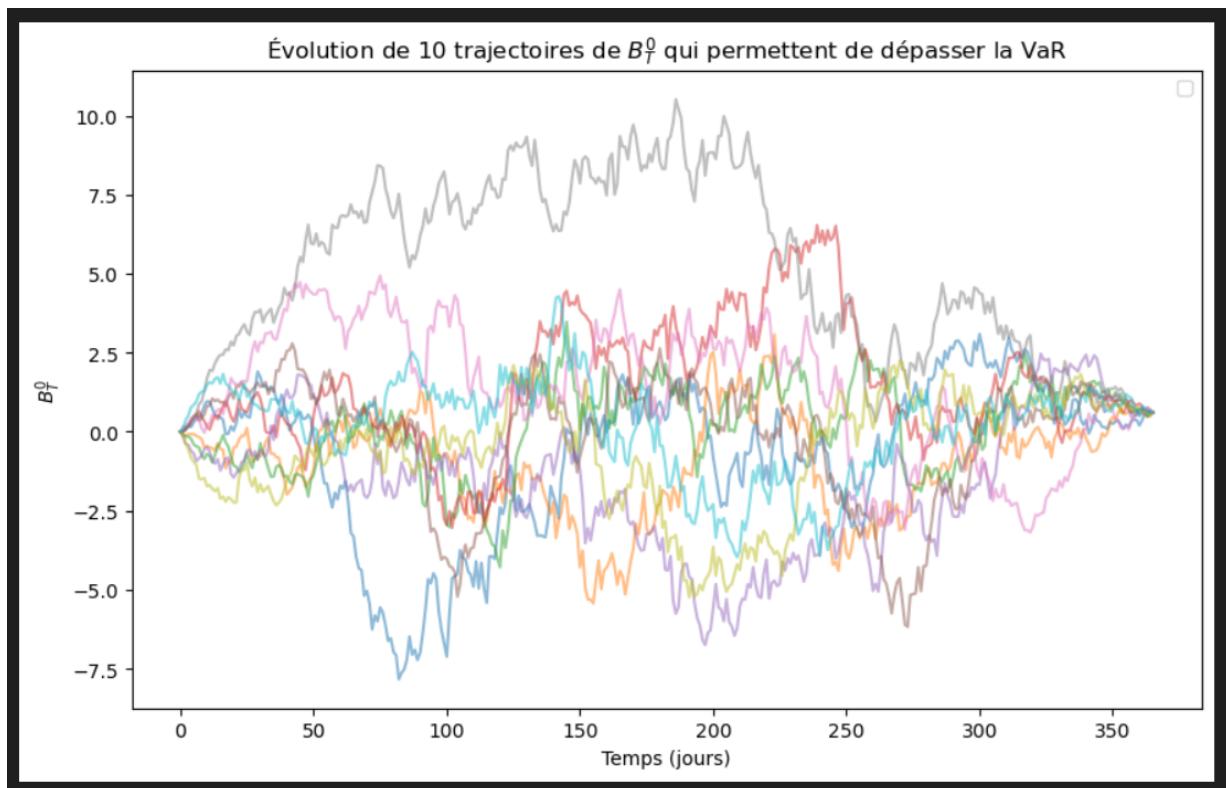


FIGURE 2.2 – Trajectoire de  $B^0$

**Commentaire** Ces trajectoires mettent clairement en exergue un point privilégié plutôt proche de 0,5. On aurait éventuellement pu le prédire si l'on utilisait une approximation d'ordre 2 de l'évolution du portefeuille (approximation Delta-Gamma)

# Perspectives d'évolution

## 3.1 Perspectives d'évolution

Dans ce travail, nous nous sommes concentrés sur l'évaluation des risques extrêmes pour des portefeuilles composés de *calls* et *puts* non couverts, en utilisant des méthodes de simulation pour estimer les probabilités de pertes rares et les quantiles de risque tels que la *Value-at-Risk* (VaR). Pour prolonger cette étude, plusieurs axes d'amélioration peuvent être envisagés, notamment en intégrant des considérations économiques pour mieux contextualiser les résultats dans un cadre macroéconomique et financier.

### 3.1.1 Analyse des portefeuilles couverts

Une première direction consisterait à étudier les portefeuilles couverts (*hedged portfolios*), où la valeur des options est ajustée en fonction de leur sensibilité locale, c'est-à-dire en soustrayant les termes delta, définis par :

$$\partial_{S_i} \text{Call}_i(0, S_{i,0}) S_{i,t} \quad \text{et} \quad \partial_{S_i} \text{Put}_i(0, S_{i,0}) S_{i,t}.$$

La valeur d'un portefeuille couvert à l'instant  $t$  s'écrirait alors :

$$V_t^H = \sum_{i=1}^{I_0} \alpha_i (\text{Call}_i(t, S_{i,t}) - \partial_{S_i} \text{Call}_i(0, S_{i,0}) S_{i,t}) + \sum_{i=1}^{I_0} \beta_i (\text{Put}_i(t, S_{i,t}) - \partial_{S_i} \text{Put}_i(0, S_{i,0}) S_{i,t}).$$

Une analyse comparative entre portefeuilles couverts et non couverts permettrait d'évaluer l'efficacité de la couverture dans la réduction des pertes extrêmes. En contexte économique, cette étude pourrait être enrichie en examinant l'impact de la couverture sur la stabilité financière des institutions, notamment dans des scénarios de chocs économiques, tels que des crises de liquidité ou des krachs boursiers. Par exemple, une couverture efficace pourrait atténuer les pertes systémiques lors d'événements comme la crise financière de 2008, où la corrélation entre actifs a amplifié les pertes.

### 3.1.2 Impact des politiques monétaires et des cycles économiques

Un autre axe d'amélioration consisterait à intégrer l'influence des politiques monétaires et des cycles économiques sur la volatilité des actifs et, par extension, sur les risques extrêmes. Les décisions des banques centrales, telles que les variations des taux d'intérêt ou les programmes d'assouplissement quantitatif, ont un impact direct sur la volatilité des marchés financiers. Par exemple, une hausse des taux d'intérêt peut augmenter la volatilité des actifs sous-jacents, affectant ainsi les estimations de la VaR. En modifiant notre modèle pour inclure des paramètres dynamiques de volatilité, inspirés par des modèles comme GARCH, nous pourrions simuler l'effet de ces politiques sur la distribution des pertes. Cela permettrait d'évaluer la robustesse des portefeuilles face à des scénarios économiques réalisables, tels que des périodes de récession ou d'expansion.

### 3.1.3 Modélisation des corrélations dynamiques et des sauts

Dans notre analyse, nous avons supposé des corrélations constantes entre les actifs. Cependant, en période de crise économique, les corrélations entre actifs tendent à augmenter, comme observé lors de la crise des subprimes. Une extension de ce travail pourrait consister à intégrer des corrélations dynamiques, modélisées par exemple via une matrice de covariance dépendante du temps, ou à inclure des modèles à sauts (par exemple, le modèle de Merton) pour capturer les chutes soudaines des prix des actifs. Ces améliorations permettraient de mieux refléter les dynamiques de marché en période de stress économique, renforçant ainsi la pertinence des estimations de risque pour les investisseurs et les régulateurs.

### 3.1.4 Conséquences macroéconomiques des risques extrêmes

Enfin, une perspective économique plus large consisterait à analyser les implications macroéconomiques des pertes extrêmes. Les événements rares, comme les crises financières, peuvent avoir des effets en cascade sur l'économie réelle, tels que des contractions du crédit, des faillites en chaîne ou une diminution de la confiance des investisseurs. En liant les résultats de nos simulations aux indicateurs macroéconomiques (par exemple, le PIB, le taux de chômage ou les indices de confiance), nous pourrions évaluer l'impact systémique des pertes extrêmes sur l'économie. Cette approche nécessiterait une collaboration interdisciplinaire entre finance quantitative et économie, intégrant des données macroéconomiques dans les scénarios de simulation.

# Conclusion

Ce projet a permis d'explorer différentes méthodes de simulation pour l'estimation d'événements rares et le calcul de quantiles extrêmes, en particulier la Value-at-Risk. Nous avons comparé plusieurs techniques, allant de la méthode de Monte-Carlo naïve à des approches plus avancées telles que l'importance sampling et le splitting.

Les résultats montrent que certaines méthodes permettent une meilleure précision et une réduction significative de l'erreur relative, renforçant ainsi la fiabilité des estimations dans des situations critiques.

Nous sommes toutefois conscients que ce travail aurait pu bénéficier d'une analyse plus approfondie, notamment par l'intégration de différentes métriques d'évaluation et la réalisation de simulations supplémentaires, afin de mieux interpréter les résultats dans un cadre financier.

Les perspectives ouvertes, comme l'étude des portefeuilles couverts, constituent un axe intéressant pour prolonger ce travail et approfondir la gestion du risque dans des contextes plus complexes.

# Bibliographie

- [1] P. Glasserman. Monte-carlo methods in financial engineering.
- [2] P. W. Glynn, “Importance sampling for monte carlo estimation of quantiles,” Stanford University, Department of Operations Research, Tech. Rep., 1995, technical report.