



Bidias TIOTSOP - Ghadi EL RABIH - Marc SOUAID



TABLE DES MATIÈRES

1 Remerciements	3
2 Introduction	4
3 Modélisation du problème	5
3.1 Cadre de travail	6
3.2 Condition sur les matrices de stratégie	7
3.3 Équilibre de Nash pour $N = 2$	8
4 Ecriture du problème MFG	11
4.1 Hypothèses simplificatrices	11
4.2 Équation limite (mean-field, temps discret)	11
4.3 Proposition : Problème d'optimisation limite	13
5 Résolution du problème MFG	16
5.1 Proposition : Solution du MFG	16
5.2 Solution approchée avec un nombre fini d'agents	17
6 Simulations numériques	18
6.1 Algorithme pour déterminer la solution numérique du MFG	18
6.2 Algorithme pour déterminer la solution numérique du problème à N joueurs	18
6.3 Hypothèses de simulation	19
6.4 Résultats	19
7 Conclusion	24

1

REMERCIEMENTS

Avant d'aborder notre sujet, il nous paraît essentiel de remercier toutes les personnes qui nous ont accompagnés et soutenus dans le cadre de ce projet.

Nous tenons à adresser nos plus sincères remerciements à notre professeur encadrant Mao Fabrice Djete pour sa disponibilité constante, sa patience et la qualité de ses explications tout au long de ce travail. Grâce à son accompagnement attentif, nous avons pu surmonter de nombreuses difficultés et mieux comprendre des notions parfois complexes. Son écoute, ses conseils avisés et sa capacité à rendre les choses claires ont été d'une aide précieuse à chaque étape du projet.

2

INTRODUCTION

Les marchés financiers sont caractérisés par l'interaction d'un très grand nombre d'acteurs économiques, tels que les investisseurs, les entreprises et les institutions. Chacun prend ses décisions en fonction de ses propres objectifs, mais aussi en tenant compte du comportement global du marché. La compréhension de ces mécanismes d'interaction est un enjeu important en finance, et les outils mathématiques permettent aujourd'hui de proposer des modèles pertinents pour les décrire.

Le but de cet EA est de comprendre comment des agents bancaires interagissent lorsqu'ils cherchent chacun à maximiser leur propre profit. La variable centrale de notre étude est la valeur d'une action, que nous appellerons *equity* dans la suite. Plus précisément, nous modélisons un système dans lequel les agents $i = 1, \dots, N$ sont représentés par leur valeur d'equity X^i . Ces valeurs évoluent de manière stochastique selon des dynamiques similaires, mais couplées : l'évolution de chaque X^i dépend de l'ensemble des agents.

Ce type de configuration renvoie à une problématique classique en stabilité financière : les interconnexions entre acteurs, via la détention mutuelle d'equities ou de dettes, permettent en principe de diversifier le risque, mais elles créent aussi des canaux de contagion. Un choc sur un acteur peut se transmettre à ses créanciers, puis aux créanciers de ses créanciers, et ainsi de suite, au risque de déclencher un phénomène de "domino" et de générer un risque systémique. Les autorités et la littérature académique ont beaucoup insisté sur ces enjeux, notamment dans le cadre des *stress tests* de système financier, où l'on simule l'impact d'un choc sur un réseau d'institutions fortement interconnectées. Cependant, ces simulations reposent souvent sur des règles de comportement ad hoc, sans garantie d'optimalité ni d'interprétation claire en termes d'équilibre stratégique.

Dans ce travail, nous abordons ce problème sous l'angle des jeux de champ moyen (*mean field games*) pour étudier ces interactions. Cette méthodologie, largement développée dans la littérature récente et notamment en temps continu dans les travaux de Mao Fabrice Djete et Nizar Touzi [1], consiste à partir du jeu à N agents, généralement intractable dès que $N > 2$, puis à examiner la limite où la population d'agents devient très grande. Dans ce régime, chaque agent devient "anonyme" : il fait face à une distribution de concurrents plutôt qu'à une liste nominative de contreparties, ce qui rend le problème plus tractable : on peut caractériser l'équilibre en termes d'équations effectives pour la dynamique de l'equity représentative et pour la distribution de la population. La stratégie d'interaction optimale apparaît alors comme une règle simple (souvent de type *bang-bang*) qui indique, en fonction du drift de l'equity des autres et de la loi du système, quelles positions les agents choisissent de détenir les uns dans les autres.

Concrètement, nous commençons par analyser le cas $N = 2$, qui sert de laboratoire pour mesurer la difficulté du problème et visualiser le rôle des effets de détention mutuelle. Nous passons ensuite au cadre d'un nombre infini d'agents, dans lequel nous formulons le jeu de champ moyen associé, en identifions la dynamique d'équilibre, puis en proposons une résolution. Enfin, nous revenons à des systèmes de taille finie et réalisons des simulations numériques sur quelques cas simples afin d'illustrer les comportements induits par l'équilibre de champ moyen (réduction de volatilité, effets de contagion ou de stabilisation) et d'en apprécier la pertinence comme approximation d'un équilibre à N joueurs.

3

MODÉLISATION DU PROBLÈME

On note X_t^i l'equity de l'agent i au temps t et $\Delta X_t^i = X_{t+1}^i - X_t^i$ l'accroissement de son equity entre t et $t + 1$. On suppose que l'equity évolue suivant la dynamique :

$$\Delta X_t^i = b_t^i + \sigma_t^i \varepsilon^i + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi_t^{i,j} \Delta X_t^j - \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi_t^{j,i} \Delta X_t^i \quad (1)$$

où

- $t \in \mathbb{N}$
- b_t^i et σ_t^i sont des facteurs de risque propres à l'agent i .
- ε^i est une variable normale, centrée réduite, indépendante de tous les ε^j , $j \neq i$.
- $\pi_t^{i,j}$ représente l'investissement de l'agent bancaire (*optimal*, le sens de l'*optimalité* sera défini plus bas) i dans l'agent bancaire j au temps t . Ici, $\pi_t = (\pi_t^{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ doit être vu comme une matrice carrée de taille N à coefficients réels. On peut aussi noter $\pi_t = (\pi_t^1, \pi_t^2, \dots, \pi_t^N)^T$ où chaque vecteur π_t^i représente l'investissement de l'agent i dans les autres agents, ou plus précisément $\pi_t^i = (\pi_t^{i,1}, \dots, \pi_t^{i,N})$ le profil de stratégies du joueur i . Pour la suite, on va supposer que $\pi_t^{i,j} \in [0, 1] \ \forall i, j$.

Remarques

- Intuitivement, l'equity d'un agent décroît plus si l'equity des agents dans lesquels il a investi décroît. Ici, la dépendance est supposée linéaire. On pouvait supposer une autre sorte de dépendance.
- Pour modéliser concrètement la faillite dans les stress tests, il serait judicieux de considérer les événements de faillite, qui seraient modélisés par la multiplication des termes en π par une indicatrice de non-faillite $\mathbf{1}_{X_{t+1}^i > 0}$. Dans ce cas, le problème devient plus compliqué, mais il est étudié dans l'article [2].

Il est important de comprendre que le contrôle de l'agent i se situe au niveau des $(\pi^{i,j})_{1 \leq j \leq N}$. Pour définir concrètement la fonction objectif que maximise chaque agent, nous avons besoin de définir une dynamique dans le cas où un seul joueur i du système s'écarte de la stratégie π_t^i . En supposant que le joueur i joue la stratégie $\beta_t \in \mathbb{R}^N \ \forall t < T$ (où T est un horizon temporel), on définit la dynamique du système bancaire par les équations suivantes :

$$\Delta X_t^{i,i,\pi,\beta} = b_t^i + \sigma_t^i \varepsilon^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta_t^j \Delta X_t^{i,j,\pi,\beta} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi_t^{j,i} \Delta X_t^{i,i,\pi,\beta} \quad (2)$$

$$\Delta X_t^{i,j,\pi,\beta} = b_t^j + \sigma_t^j \varepsilon^j + \frac{1}{N} \sum_{k \neq j} \pi_t^{j,k} \Delta X_t^{i,k,\pi,\beta} - \frac{1}{N} \sum_{k \neq i} \pi_t^{k,j} \Delta X_t^{i,j,\pi,\beta} - \frac{1}{N} \beta_t^j \Delta X_t^{i,j,\pi,\beta}, \quad (j \neq i) \quad (3)$$

où $X_t^{i,j,\pi,\beta}$ représente simplement l'equity du joueur j lorsque le joueur i dévie de la stratégie π_t et passe par la stratégie β_t à tout temps $t < T$. Nous rappelons que les temps étant définis discrets, tout est bien défini.

Le but de chaque agent est de maximiser l'espérance de son utilité à un horizon T donné. L'utilité ici sera vue comme une fonction U strictement concave en sa composante. Il s'agit en fait pour chaque agent de résoudre le problème :

$$\sup_{\beta_t \in \mathbb{R}^N \ \forall t < T} J_\pi^i(\beta) := \sup_{\beta_t \in \mathbb{R}^N \ \forall t < T} \mathbb{E} \left[U(X_T^{i,i,\pi,\beta}) \right] \quad (4)$$

Par abus de notation, nous écrivons simplement π au lieu de $(\pi_t)_{t < T}$. Cela est cohérent dans le cadre monopériode considéré ici, puisqu'il s'agit de la « trajectoire » d'investissement entre les dates 0 et $T - 1$.

• DÉFINITION : SOLUTION DU PROBLÈME

On dira que le profil de stratégies $(\pi_t)_{t < T}$, avec $\pi_t \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ pour tout $t < T$, constitue une solution du problème d'optimisation de l'ensemble des joueurs si, pour chaque joueur $i \in \{1, \dots, N\}$, la composante π^i de ce profil maximise son critère de performance, les stratégies des autres joueurs étant fixées.

Plus précisément, on exige que

$$J_\pi^i(\pi^i) \geq J_\pi^i(\beta) \quad \text{pour tout } \beta \text{ admissible } \in \mathbb{R}^N, \text{ et pour tout } i \in \{1, \dots, N\},$$

c'est-à-dire qu'aucun joueur ne peut améliorer individuellement sa fonction objectif en remplaçant sa propre stratégie π^i par une autre stratégie admissible β , dès lors que les stratégies des autres joueurs restent inchangées. Autrement dit, le profil π est stable au sens où il ne laisse aucune marge d'amélioration unilatérale à un agent pris isolément, ce qui correspond à la notion d'équilibre de Nash pour l'ensemble du système.

3.1 CADRE DE TRAVAIL

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans un cadre volontairement simplifié afin de rendre le problème plus tractable sur le plan analytique. Plus précisément, nous considérons une dynamique en temps discret et nous nous limitons à un horizon constitué d'un seul pas de temps.

Ce choix a deux conséquences importantes. D'une part, il réduit de manière drastique la complexité du problème d'optimisation : au lieu de devoir traiter une trajectoire complète $(\pi_t)_{0 \leq t < T}$, nous n'avons plus à nous intéresser qu'à la décision initiale. D'autre part, la dynamique du système se résume alors à l'évolution sur ce seul pas de temps, ce qui permet de mettre en évidence les mécanismes d'interaction entre les agents sans être immédiatement confronté aux difficultés techniques d'un cadre multi-périodes ou continu.

Dans toute la suite, et pour alléger les notations, nous adopterons donc la convention suivante : lorsque nous écrirons simplement π , il faudra entendre par là la stratégie au temps initial, que nous notons plus rigoureusement π_0 . Ce léger abus de notation n'entraîne pas d'ambiguïté dans le cadre monopériode que nous considérons ici.

Dans la suite de cette partie, nous commençons par préciser les conditions sous lesquelles le problème d'optimisation est bien posé, au sens où les quantités que nous manipulons (critères de performance, solutions candidates, etc.) sont correctement définies et finies. Une fois ce cadre de validité établi, nous allons nous restreindre au cas $N = 2$, ce qui permet d'obtenir des expressions plus explicites et de mieux comprendre la structure des interactions stratégiques entre deux agents représentatifs. Cette étude du cas à deux joueurs servira de base d'intuition pour l'analyse de configurations plus générales.

3.2 CONDITION SUR LES MATRICES DE STRATÉGIE

Pour tout i , on veut que l'équation 1 soit bien définie, ou encore que les incrémentations ΔX_0^i aient un sens.

$$\begin{aligned} \forall i, \quad \Delta X_0^i = b^i + \sigma^i \varepsilon^i + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ij} \Delta X_0^j - \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ji} \Delta X_0^i &\iff \forall i, \quad \Delta X_0^i - \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ij} \Delta X_0^j + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ji} \Delta X_0^i = b^i + \sigma^i \varepsilon^i \\ &\iff \forall i, \quad \left(1 + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ji}\right) \Delta X_0^i - \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ij} \Delta X_0^j = b^i + \sigma^i \varepsilon^i \end{aligned}$$

En notation matricielle, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \Delta \mathbf{X}_0 &= \mathbf{b} + \sigma \varepsilon & (5) \\ \text{avec : } \Delta \mathbf{X}_0 := \begin{pmatrix} \Delta X_0^1 \\ \Delta X_0^2 \\ \vdots \\ \Delta X_0^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{A} &= (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \\ A_{ii} &= 1 + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ji}, \quad A_{ij} = -\frac{1}{N} \pi^{ij} \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

La condition de **diagonale dominante** (théorème de Lévy-Desplanques) s'écrit :

$$|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}| \iff 1 + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ji} > \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ij} \quad (6)$$

Or, si $0 \leq \pi^{ij} \leq 1$, alors :

$$\sum_{j \neq i} \pi^{ij} \leq N - 1 \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ij} \leq \frac{N - 1}{N} < 1$$

et

$$A_{ii} = 1 + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \pi^{ji} \geq 1$$

Ainsi, pour $N \geq 2$:

$$A_{ii} \geq 1 > \frac{N - 1}{N} \geq \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$$

Conclusion : sous la condition $0 \leq \pi^{ij} \leq 1$, la matrice \mathbf{A} est strictement diagonale dominante par lignes et donc inversible. Le système

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{X}_0 = \mathbf{b} + \sigma \varepsilon$$

admet une solution unique, et l'équation est bien définie.

3.3 ÉQUILIBRE DE NASH POUR $N = 2$

Dans ce paragraphe, nous allons résoudre le problème dans le cas simplifié où l'on considère une utilité linéaire : $U(X_1^i) = X_1^i$ et où on a 2 agents uniquement dans le système bancaire.

Dans ce cas, le système discret s'écrit :

$$\Delta X_0^1 = b^1 + \sigma^1 \varepsilon^1 + \frac{1}{2} \pi^{12} \Delta X_0^2 - \frac{1}{2} \pi^{21} \Delta X_0^1, \quad (7)$$

$$\Delta X_0^2 = b^2 + \sigma^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \pi^{21} \Delta X_0^1 - \frac{1}{2} \pi^{12} \Delta X_0^2. \quad (8)$$

En regroupant les termes contenant ΔX_0^i à gauche, on obtient :

$$\left(1 + \frac{1}{2} \pi^{21}\right) \Delta X_0^1 - \frac{1}{2} \pi^{12} \Delta X_0^2 = c^1, \quad (9)$$

$$-\frac{1}{2} \pi^{21} \Delta X_0^1 + \left(1 + \frac{1}{2} \pi^{12}\right) \Delta X_0^2 = c^2, \quad (10)$$

avec

$$c^1 = b^1 + \sigma^1 \varepsilon^1, \quad c^2 = b^2 + \sigma^2 \varepsilon^2.$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle :

$$M \Delta \mathbf{X}_0 = \mathbf{c}, \quad (11)$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^1 & -\beta^1 \\ -\beta^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \Delta X_0^1 \\ \Delta X_0^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

et les coefficients sont définis par :

$$\alpha^1 = 1 + \frac{1}{2} \pi^{21}, \quad \alpha^2 = 1 + \frac{1}{2} \pi^{12}, \quad \beta^1 = \frac{1}{2} \pi^{12}, \quad \beta^2 = \frac{1}{2} \pi^{21}.$$

Pour une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, le déterminant de M est :

$$\det(M) = \alpha^1 \alpha^2 - \beta^1 \beta^2 = \left(1 + \frac{1}{2} \pi^{21}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \pi^{12}\right) - \frac{1}{4} \pi^{12} \pi^{21} = 1 + \frac{1}{2} (\pi^{12} + \pi^{21}). \quad (12)$$

Son inverse vaut donc :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^1 \\ \beta^2 & \alpha^1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

En multipliant par l'inverse, on obtient la solution d'équilibre :

$$\Delta \mathbf{X}_0 = M^{-1} \mathbf{c} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} \alpha^2 c^1 + \beta^1 c^2 \\ \beta^2 c^1 + \alpha^1 c^2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Ainsi :

$$\boxed{\Delta X_0^1 = \frac{\alpha^2 c^1 + \beta^1 c^2}{1 + \frac{1}{2} (\pi^{12} + \pi^{21})}} \quad \boxed{\Delta X_0^2 = \frac{\beta^2 c^1 + \alpha^1 c^2}{1 + \frac{1}{2} (\pi^{12} + \pi^{21})}} \quad (15)$$

avec

$$c^1 = b^1 + \sigma^1 \varepsilon^1, \quad c^2 = b^2 + \sigma^2 \varepsilon^2.$$

— **Existence et unicité** : $\det(M) > 0$ pour $\pi^{ij} \geq 0$, donc le système admet une solution unique.

Réponses optimales et forme de l'équilibre de Nash

En remplaçant les coefficients α^i, β^i par leurs expressions, on obtient des formes explicites de ΔX_0^1 et ΔX_0^2 en fonction de π^{12} et π^{21} :

$$\Delta X_0^1(\pi^{12}, \pi^{21}) = \frac{(2 + \pi^{12})c^1 + \pi^{12}c^2}{2 + \pi^{12} + \pi^{21}}, \quad \Delta X_0^2(\pi^{12}, \pi^{21}) = \frac{\pi^{21}c^1 + (2 + \pi^{21})c^2}{2 + \pi^{12} + \pi^{21}}. \quad (16)$$

On rappelle que chaque agent choisit son propre paramètre pour maximiser sa variation ΔX_0^i en prenant le paramètre de l'autre comme donné.

Dérivées partielles

On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \Delta X_0^1}{\partial \pi^{12}}(\pi^{12}, \pi^{21}) = \frac{\pi^{21}(c^1 + c^2) + 2c^2}{(2 + \pi^{12} + \pi^{21})^2}, \quad \frac{\partial \Delta X_0^2}{\partial \pi^{21}}(\pi^{12}, \pi^{21}) = \frac{\pi^{12}(c^1 + c^2) + 2c^1}{(2 + \pi^{12} + \pi^{21})^2}.$$

On remarque que, pour chaque agent, le numérateur de la dérivée ne dépend pas de sa propre variable de décision, mais uniquement du paramètre de l'autre agent. Cependant, le dénominateur est strictement positif puisque $\pi^{12}, \pi^{21} \in [0, 1]$. Ainsi, pour un π^{21} fixé, le **signe de** $\frac{\partial \Delta X_0^1}{\partial \pi^{12}}$ est constant sur tout l'intervalle $\pi^{12} \in [0, 1]$. Il en va de même pour ΔX_0^2 en fonction de π^{21} . Ceci nous permet de conclure que la fonction est monotone (strictement croissante, strictement décroissante, ou plate) sur tout l'intervalle.

Maximisation sur l'intervalle borné $[0, 1]$

Pour l'agent 1 :

- si $\pi^{21}(c^1 + c^2) + 2c^2 > 0$, alors ΔX_0^1 est strictement croissante en π^{12} , d'où le maximum en $\pi^{12*} = 1$;
- si $\pi^{21}(c^1 + c^2) + 2c^2 < 0$, alors ΔX_0^1 est strictement décroissante en π^{12} , d'où le maximum en $\pi^{12*} = 0$;
- si $\pi^{21}(c^1 + c^2) + 2c^2 = 0$, ΔX_0^1 est constante en π^{12} : tout $\pi^{12} \in [0, 1]$ est optimal.

Pour l'agent 2 :

- si $\pi^{12}(c^1 + c^2) + 2c^1 > 0$, le maximum de ΔX_0^2 est atteint en $\pi^{21*} = 1$;
- si $\pi^{12}(c^1 + c^2) + 2c^1 < 0$, le maximum est atteint en $\pi^{21*} = 0$;
- si $\pi^{12}(c^1 + c^2) + 2c^1 = 0$, tout $\pi^{21} \in [0, 1]$ est optimal.

On peut résumer ces réponses optimales sous forme d'indicatrices :

$$\pi^{12*}(\pi^{21}) = \mathbf{1}_{\{\pi^{21}(c^1 + c^2) + 2c^2 > 0\}}, \quad \pi^{21*}(\pi^{12}) = \mathbf{1}_{\{\pi^{12}(c^1 + c^2) + 2c^1 > 0\}}. \quad (17)$$

Un équilibre de Nash (π^{12*}, π^{21*}) est alors donné par une solution de point fixe du système

$$\pi^{12*} = \pi^{12*}(\pi^{21*}), \quad \pi^{21*} = \pi^{21*}(\pi^{12*}),$$

c'est-à-dire par l'un des couples $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ ou $(1, 1)$, suivant les signes des quantités

$$\pi^{21}(c^1 + c^2) + 2c^2 \quad \text{et} \quad \pi^{12}(c^1 + c^2) + 2c^1.$$

Pour chaque configuration de signes, on peut en déduire l'expression de l'optimum en remplaçant (π^{12*}, π^{21*}) dans les formules explicites de ΔX_0^1 et ΔX_0^2 ci-dessus.

Conclusion et portée du résultat

Ce calcul explicite met en évidence qu'il est déjà relativement complexe d'obtenir la structure exacte de l'équilibre de Nash lorsque $N = 2$ seulement. En particulier, les dépendances croisées entre paramètres d'interaction, les conditions de monotonie et la recherche de points fixes montrent que l'approche analytique devient rapidement inextricable dès que le nombre d'agents augmente.

Cela illustre l'impossibilité pratique de procéder de manière similaire pour $N > 2$: le système d'équations s'élargit, les interactions deviennent multidimensionnelles et les conditions de maximisation se combinent en un ensemble exponentiel de cas possibles. Ce constat justifie naturellement le passage à un **régime limite** lorsque

$N \rightarrow \infty$, dans lequel les agents ne sont plus considérés comme individuellement nominatifs mais représentés par un *agent représentatif* ou une distribution d'agents, permettant une analyse plus structurée et tractable des interactions stratégiques.

Un second enseignement important de cette étude pour $N = 2$ est que les réponses optimales des agents, compte tenu des paramètres admissibles $\pi^{ij} \in [0, 1]$, sont toujours situées aux bornes de l'intervalle :

$$\pi^{ij*} \in \{0, 1\}.$$

Autrement dit, les agents choisissent toujours entre « investir pleinement » ou « ne pas investir du tout » dans l'interaction stratégique avec l'autre agent.

Cette propriété de **réponse bang-bang** constituera un élément conceptuel clé à garder en tête dans les développements ultérieurs, notamment lorsque nous passerons à des populations plus grandes. Elle guidera l'intuition mathématique dans l'analyse des versions plus avancées du modèle.

4

ECRITURE DU PROBLÈME MFG

Dans cette section, nous allons écrire le problème limite (quand le nombre d'agents $N \rightarrow +\infty$)

4.1 HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES

Nous allons émettre les hypothèses simplificatrices suivantes concernant les données du problème :

1. Les drifts b^i intervenant dans la dynamique des agents ne dépendent que de ces agents et dépendent de ceux-ci de la même façon, via une même fonctionnelle b , soit explicitement $b^i = b(X_0^i)$ et la fonctionnelle b est lipschitz
2. Les termes σ^i intervenant dans la dynamique des agents ne dépendent que de ces agents et dépendent de ceux-ci de la même façon. Plus explicitement : $\sigma^i = \sigma(X_0^i)$
3. L'investissement $\pi^{i,j}$ de l'agent bancaire i dans l'agent bancaire j dépend de l'equity de l'agent i et de celle de l'agent j aux instants antérieurs. Et tous ces investissements se font suivant une même fonctionnelle, soit $\pi^{i,j} = \pi^{i,j}(X_0^i, X_0^j) := \pi(X_0^i, X_0^j)$, et la fonctionnelle π est lipschitz

On note X_0^1, \dots, X_0^N les valeurs d'equity initiales des N joueurs, et X_1^1, \dots, X_1^N leurs états au temps suivant. Nous associons à la population la mesure empirique

$$\mu^N := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{(X_0^j, X_1^j)}.$$

Cette mesure décrit simplement la distribution observée des couples d'états (X_0, X_1) au sein de la population : chaque joueur contribue de manière égale à cette distribution.

La dynamique du joueur i est définie par l'équation 1 que l'on réécrit en tenant compte des hypothèses simplificatrices :

$$\Delta X_0^i = b(X_0^i) + \sigma(X_0^i) \varepsilon^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi(X_0^i, X_0^j) \Delta X_0^j - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi(X_0^j, X_0^i) \Delta X_0^i \quad (18)$$

4.2 ÉQUATION LIMITÉ (MEAN-FIELD, TEMPS DISCRET)

Nous faisons désormais l'hypothèse que la mesure empirique μ^N converge, lorsque $N \rightarrow \infty$, vers une mesure limite que nous noterons μ . Cette hypothèse est naturelle dans un cadre où les dynamiques individuelles sont symétriques entre les agents et où les fonctions intervenant dans l'évolution sont Lipschitz, garantissant une forme de stabilité du système.

De manière mathématiquement intuitive, la preuve d'une telle convergence repose sur deux éléments classiques. (i) La Lipschitzianité des dynamiques assure que de petites variations dans la mesure des interactions produisent des variations proportionnellement petites dans les trajectoires des agents, ce qui permet d'obtenir des estimations de type Grönwall et d'éviter toute explosion du système. (ii) La symétrie entre agents implique l'échangeabilité du système, ce qui permet d'appliquer les arguments standards de propagation du chaos : lorsque N croît, les influences individuelles se diluent et les lois marginales se rapprochent d'un comportement moyen

déterministe.

Nous ne détaillons pas ici une preuve complète, celle-ci nécessitant des outils avancés de probabilité et d'analyse des systèmes de particules, et dépassant le cadre de ce travail. Nous nous contenterons donc d'admettre l'existence d'une telle mesure limite μ , qui jouera le rôle de distribution représentative de la population lorsque N devient grand.

Cette convergence est écrite au sens de la distance de Rubinstein-Kantorovich que nous définissons ensuite :

- **DÉFINITION (DISTANCE DE RUBINSTEIN-KANTOROVICH)**

Elle permet de quantifier la distance entre deux mesures de probabilités définies sur un même espace Ω . Elle est définie comme suit :

$$d(\mu, \nu) = \sup_{f \text{ lipschitz, } k < 1} \left(\int_{\Omega} f d\mu(\omega) - \int_{\Omega} f d\nu(\omega) \right)$$

Ainsi, la convergence au sens de la distance de Kantorovic implique :

$$\forall f \text{ fonction } k\text{-lipschitz, } k \leq 1, \text{ sur } \mathbb{R}^2, \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mu^N(dx, dy) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mu(dx, dy)$$

- **PROPOSITION : (FORMULATION MFG DE LA DYNAMIQUE)**

La dynamique limite (avec un nombre infini d'agents) s'écrit :

$$\Delta \bar{X}_0 = b(\bar{X}_0) + \sigma(\bar{X}_0) \varepsilon + \int_{\mathbb{R}^2} \pi(\bar{X}_0, x)(y - x) \mu(dx, dy) - \left(\int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, \bar{X}_0) \mu(dx, dy) \right) \Delta \bar{X}_0$$

où

- \bar{X} est un agent représentatif des agents à la limite.
- ε est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite

Idée de preuve Pour commencer, on remarque déjà que les termes en $\pi(X_0^i, X_0^j)$ s'écrivent sous la forme :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi(X_0^i, X_0^j) \Delta X_0^j = \int_{\mathbb{R}^2} \pi(X_0^i, x)(y - x) \mu^N(dx, dy)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi(X_0^j, X_0^i) \Delta X_0^i = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, X_0^i) \mu^N(dx, dy) \right) \Delta X_0^i$$

Ainsi, à la limite, la dynamique de l'agent i est donnée par :

$$\Delta X_0^i = b(X_0^i) + \sigma(X_0^i) \varepsilon^i + \int_{\mathbb{R}^2} \pi(X_0^i, x)(y - x) \mu(dx, dy) - \left(\int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, X_0^i) \mu(dx, dy) \right) \Delta X_0^i$$

On remarque que cette équation limite ne dépend plus des autres agents $j \neq i$, mais uniquement de l'état de l'agent i . Autrement dit, la dynamique d'un agent individuel, lorsque N est très grand, devient indépendante des trajectoires particulières des autres joueurs.

Ce phénomène est attendu : comme l'influence d'un agent pris isolément sur la mesure empirique est de l'ordre de $1/N$, son impact devient négligeable lorsque $N \rightarrow \infty$. La mesure μ évolue donc de manière « moyenne » et fixe le cadre dans lequel évolue tout agent pris individuellement.

On peut ainsi définir un *agent représentatif* \bar{X} , dont la dynamique décrit le comportement limite de n'importe quel agent du système. En notant donc \bar{X} l'agent représentatif, on obtient la dynamique limite :

$$\Delta \bar{X}_0 = b(\bar{X}_0) + \sigma(\bar{X}_0) \varepsilon + \int_{\mathbb{R}^2} \pi(\bar{X}_0, x)(y - x) \mu(dx, dy) - \left(\int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, \bar{X}_0) \mu(dx, dy) \right) \Delta \bar{X}_0$$

Cette équation décrit entièrement l'évolution d'un agent typique dans un système à très grande population, où les interactions individuelles se dissolvent dans l'effet moyen de la mesure limite μ .

Une preuve plus complète de la propagation du chaos et donc de ce résultat peut être trouvée dans la ressource[3]

4.3 PROPOSITION : PROBLÈME D'OPTIMISATION LIMITE

À la limite $N \rightarrow \infty$, le jeu à N agents est décrit par une mesure μ qui représente la distribution des états dans la population, ainsi que par une stratégie symétrique π jouée par tous les agents. Le problème de *champ moyen* consiste alors à trouver un couple (π, μ) tel que :

- la mesure μ soit cohérente avec la dynamique limite des agents lorsque tous jouent π , c'est-à-dire

$$\mu = \mathcal{L}(\bar{X}_0, \bar{X}_1)$$

où (\bar{X}_0, \bar{X}_1) désigne les états de l'agent représentatif à la limite ;

- la stratégie π soit optimale pour l'agent représentatif évoluant dans l'environnement décrit par μ , au sens où pour toute stratégie admissible β ,

$$J_{\pi, \mu}(\beta) \leq J_{\pi, \mu}(\pi). \quad (19)$$

où l'on définit la fonctionnelle

$$J_{\pi, \mu}(\beta) := \mathbb{E}[U(\bar{X}_0 + \Delta \bar{X}_0^{\pi, \beta})],$$

et où $\bar{X}^{\pi, \beta}$ désigne l'agent représentatif lorsque tous les autres agents jouent π et que cet agent représentatif dévie en jouant β . Sa dynamique limite est donnée par :

$$\Delta \bar{X}_0^{\pi, \beta} = b(\bar{X}_0^{\pi, \beta}) + \sigma(\bar{X}_0^{\pi, \beta}) \varepsilon + \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\bar{X}_0^{\pi, \beta}, x) (y - x) \mu(dx, dy) - \left(\int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, \bar{X}_0^{\pi, \beta}) \mu(dx, dy) \right) \Delta \bar{X}_0^{\pi, \beta}, \quad (20)$$

où ε est une variable gaussienne centrée réduite.

La présente preuve se concentre sur le second point : elle décrit le problème d'optimisation limite d'un agent individuel, en supposant pour l'instant que le couple (π, μ) est donné.

Preuve (origine de la fonctionnelle limite).

L'objectif est de montrer comment la fonctionnelle $J_{\pi, \mu}(\beta)$ et la dynamique (20) émergent comme limite du problème d'optimisation individuel dans le jeu à N joueurs.

On considère le système à N joueurs dans lequel tous les agents utilisent la stratégie π , sauf l'agent i qui dévie et utilise β . On note alors $Y^{i,j}$ la trajectoire de l'agent j dans ce système de déviation (il s'agit du « monde vu depuis la déviation de i »). Par analogie avec la dynamique discrète de X^i , la dynamique de l'agent déviant i s'écrit

$$\Delta Y_0^{i,i} = b(Y_0^{i,i}) + \sigma(Y_0^{i,i}) \varepsilon^i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta(Y_0^{i,i}, Y_0^{i,j}) \Delta Y_0^{i,j} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi(Y_0^{i,j}, Y_0^{i,i}) \Delta Y_0^{i,j}.$$

Pour un agent $j \neq i$, qui continue à jouer π , la dynamique reste de même forme que dans le modèle original, à la différence près que l'état de i est maintenant $Y^{i,i}$:

$$\Delta Y_0^{i,j} = b(Y_0^{i,j}) + \sigma(Y_0^{i,j}) \varepsilon^j + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \pi(Y_0^{i,j}, Y_0^{i,k}) \Delta Y_0^{i,k} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \pi(Y_0^{i,k}, Y_0^{i,j}) \Delta Y_0^{i,j}.$$

On obtient ainsi un système couplé analogue à celui de X^j , mais dans lequel une seule trajectoire (celle de i) est soumise à une stratégie différente en sortie.

Pour analyser l'effet de cette déviation sur la population, on introduit la mesure empirique associée au système de déviation :

$$\mu_\beta^N := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{(Y_0^{i,j}, Y_1^{i,j})}, \quad Y_1^{i,j} := Y_0^{i,j} + \Delta Y_0^{i,j}.$$

On suppose, comme dans la partie précédente, que le système sans déviation est bien posé et que sa mesure empirique $\mu^N := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{(X_0^j, X_1^j)}$ converge vers une mesure limite μ lorsque $N \rightarrow \infty$.

Pour toute fonction test Lipschitz $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu_\beta^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi(Y_0^{i,j}, Y_1^{i,j}), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi(X_0^j, X_1^j),$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu_\beta^N - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\varphi(Y_0^{i,j}, Y_1^{i,j}) - \varphi(X_0^j, X_1^j)).$$

Sous des hypothèses de régularité (Lipschitz) sur la dynamique, la déviation d'un seul agent induit une perturbation de taille de l'ordre de $1/N$ sur les autres trajectoires. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|(Y_0^{i,j}, Y_1^{i,j}) - (X_0^j, X_1^j)\| \leq \frac{C}{N} \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N.$$

En utilisant la Lipschitzianité de φ (de constante L), on obtient

$$\left| \varphi(Y_0^{i,j}, Y_1^{i,j}) - \varphi(X_0^j, X_1^j) \right| \leq L \|(Y_0^{i,j}, Y_1^{i,j}) - (X_0^j, X_1^j)\| \leq L \frac{C}{N},$$

et donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu_\beta^N - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu^N \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N L \frac{C}{N} = \frac{LC}{N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0.$$

Autrement dit, μ_β^N et μ^N ont la même limite faible, et en particulier

$$\mu_\beta^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mu \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty.$$

Cela signifie que, même si la déviation de l'agent i perturbe légèrement les autres trajectoires, son influence sur la mesure empirique s'annule à la limite. L'agent déviant évolue donc, à la limite, dans le même environnement agrégé μ que s'il ne déviait pas.

Revenons maintenant à la dynamique de $Y^{i,i}$. Comme précédemment, les termes d'interaction peuvent se réécrire sous forme d'intégrales par rapport à μ_β^N :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta(Y_0^{i,i}, Y_0^{i,j}) \Delta Y_0^{i,j} &= \int_{\mathbb{R}^2} \beta(Y_0^{i,i}, x)(y-x) \mu_\beta^N(dx, dy), \\ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pi(Y_0^{i,j}, Y_0^{i,i}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, Y_0^{i,i}) \mu_\beta^N(dx, dy). \end{aligned}$$

La dynamique de l'agent déviant s'écrit alors

$$\Delta Y_0^{i,i} = b(Y_0^{i,i}) + \sigma(Y_0^{i,i}) \varepsilon^i + \int_{\mathbb{R}^2} \beta(Y_0^{i,i}, x)(y-x) \mu_\beta^N(dx, dy) - \left(\int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, Y_0^{i,i}) \mu_\beta^N(dx, dy) \right) \Delta Y_0^{i,i}.$$

Sous des hypothèses de régularité (Lipschitz, croissance contrôlée) sur b, σ, π, β , la convergence $\mu_\beta^N \rightarrow \mu$ permet de passer à la limite dans cette équation, ce qui donne précisément la dynamique limite (20) pour la variable limite $\bar{X}^{\pi, \beta}$.

Enfin, le critère de performance de l'agent déviant i à N fixé est

$$J_\pi^i(\beta) := \mathbb{E}[U(Y_1^{i,i})], \quad Y_1^{i,i} = Y_0^{i,i} + \Delta Y_0^{i,i}.$$

D'après ce qui précède, $(Y_0^{i,i}, Y_1^{i,i})$ converge en loi vers $(\bar{X}_0, \bar{X}_0 + \Delta \bar{X}_0^{\pi,\beta})$ lorsque $N \rightarrow \infty$. En supposant que l'utilité U est continue et que les équités sont uniformément bornées (ou que U a une croissance au plus linéaire et que les équités sont uniformément intégrables), on peut appliquer le théorème de la convergence dominée pour obtenir

$$J_\pi^i(\beta) = \mathbb{E}[U(Y_1^{i,i})] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[U(\bar{X}_0 + \Delta \bar{X}_0^{\pi,\beta})] =: J_{\pi,\mu}(\beta).$$

De manière analogue, lorsque tous les agents jouent π , on a $J_\pi^i(\pi) \rightarrow J_{\pi,\mu}(\pi)$.

On voit ainsi que la fonctionnelle limite $J_{\pi,\mu}$ apparaît naturellement comme limite du problème d'optimisation individuel dans le jeu à N joueurs, et que la présence de la mesure μ dans (20) et (19) reflète simplement l'environnement agrégé dans lequel évolue l'agent représentatif. \square

5

RÉSOLUTION DU PROBLÈME MFG

Pour résoudre le problème, nous allons nous inspirer de la méthode utilisée dans l'article [1] en temps continu. Nous considérons que $\bar{X}_1^{\pi,\beta}$ suit une dynamique telle que l'incrément est de la forme :

$$\Delta \bar{X}_0^{\pi,\beta} = B(\bar{X}_0^{\pi,\beta}) + \Sigma(\bar{X}_0^{\pi,\beta})\varepsilon$$

où ε est une variable normale centrée réduite (en fait la même que dans l'expression initiale). Cette supposition est naturelle, car l'expression de $\Delta \bar{X}_0$ peut se mettre sous cette forme, sous réserve d'inversibilité du coefficient $1 + \int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, \bar{X}_0^{\pi,\beta})\mu(dx, dy)$.

5.1 PROPOSITION : SOLUTION DU MFG

La solution du problème limite est donnée par :

1. $\beta^*(x, y) = \pi(x, y) = \mathbf{1}_{B(y) \geq 0}$,
2. $B(x) = \frac{1}{2}(b(x) + c)_+ - (b(x) + c)_-$,
3. c est solution de l'équation : $c = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(c + b(\bar{X}_0))_+]$,
4. $\Sigma(x) = \frac{\sigma(x)}{1 + \mathbf{1}_{B(x) \geq 0}}$,
5. $\mu = \mathcal{L}(\bar{X}_0, \bar{X}_1) = \mathcal{L}(\bar{X}_0, \bar{X}_0 + B(\bar{X}_0) + \Sigma(\bar{X}_0)\varepsilon)$

Avant de faire une esquisse de preuve, faisons quelques remarques quant à cette solution :

Remarques

- Pour toute fonction d'utilité croissante, l'investissement de l'agent représentatif ne dépend finalement pas de ce qu'il possède, mais plutôt de ce qu'une copie de lui possèderait.
- Si $b(x) \geq 0$ p.s, alors $c = \mathbb{E}(b(\bar{X}_0))$ et tout est plus simple
- Si $b(x) \leq 0$ alors $c = 0$ et $B(x) = b(x)$ et finalement $\beta^*(x, y) = 0$

Preuve

Comme

$$\Delta \bar{X}_0^{\pi,\beta} = B(\bar{X}_0^{\pi,\beta}) + \Sigma(\bar{X}_0^{\pi,\beta})\varepsilon$$

on peut écrire :

$$\Delta \bar{X}_0^{\pi,\beta} = b(\bar{X}_0^{\pi,\beta}) + \sigma(\bar{X}_0^{\pi,\beta})\varepsilon + \mathbb{E}[\beta(\bar{X}_0^{\pi,\beta}, \hat{X}_0^{\pi,\beta})(B(\hat{X}_0^{\pi,\beta}) + \Sigma(\hat{X}_0^{\pi,\beta})\hat{\varepsilon})|\bar{X}_0^{\pi,\beta}] - \Delta \bar{X}_0^{\pi,\beta} \int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, \bar{X}_0^{\pi,\beta})\mu(dx, dy)$$

(Ici, $\hat{X}_0^{\pi,\beta}$ est une copie indépendante de $\bar{X}_0^{\pi,\beta}$)

$$= b(\bar{X}_0^{\pi,\beta}) + \sigma(\bar{X}_0^{\pi,\beta})\varepsilon + \mathbb{E}[\beta(\bar{X}_0^{\pi,\beta}, \hat{X}_0^{\pi,\beta})B(\hat{X}_0^{\pi,\beta})] - \Delta \bar{X}_0^{\pi,\beta} \int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, \bar{X}_0^{\pi,\beta})\mu(dx, dy)$$

$$\implies \Delta \bar{X}_0^{\pi,\beta} = \frac{b(\bar{X}_0^{\pi,\beta}) + \sigma(\bar{X}_0^{\pi,\beta})\varepsilon + \mathbb{E}[\beta(\bar{X}_0^{\pi,\beta}, \hat{X}_0^{\pi,\beta})B(\hat{X}_0^{\pi,\beta})]}{1 + \int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, \bar{X}_0^{\pi,\beta})\mu(dx, dy)}$$

$$\Delta \bar{X}_0^{\pi,\beta} = \frac{b(\bar{X}_0^{\pi,\beta}) + \int_{\mathbb{R}^2} \beta(\bar{X}_0^{\pi,\beta}, x)B(x)\mu(dx, dy)}{1 + \int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, \bar{X}_0^{\pi,\beta})\mu(dx, dy)} + \frac{\sigma(\bar{X}_0^{\pi,\beta})}{1 + \int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, \bar{X}_0^{\pi,\beta})\mu(dx, dy)}\varepsilon$$

Ainsi, B et Σ vérifient les équations suivantes :

$$B(z) = \frac{b(z) + \int_{\mathbb{R}^2} \beta(z, x)B(x)\mu(dx, dy)}{1 + \int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, z)\mu(dx, dy)} \quad (21)$$

$$\Sigma(z) = \frac{\sigma(z)}{1 + \int_{\mathbb{R}^2} \pi(x, z)\mu(dx, dy)} \quad (22)$$

La fonction objectif ayant pour but de maximiser l'espérance (à π et μ fixés) d'une utilité croissante et lipschitz (donc continue), pour qu'elle soit maximale, il suffit que $\Delta\bar{X}_0^{\pi, \beta}$ soit maximal. Ceci est le cas dès que $\beta(\bar{X}_0^{\pi, \beta}, x) = \mathbf{1}_{B(x) \geq 0}$. Ainsi, on a bien que l'investissement optimal de l'agent représentatif s'écrit :

$$\beta^*(x, y) = \mathbf{1}_{B(y) \geq 0}, \forall x \in \text{Supp}(\bar{X}_0^{\pi, \beta}) := \bar{X}_0^{\pi, \beta}(\Omega)$$

L'expression de $B(x)$ est tirée de l'article [1], théorème 4.3.

5.2 SOLUTION APPROCHÉE AVEC UN NOMBRE FINI D'AGENTS

Une fois le problème MFG résolu, il est essentiel de répondre à la question centrale : Quelle est la stratégie optimale de chaque agent ? En d'autres termes, comment exploiter la solution du MFG pour obtenir la solution du problème avec un nombre fini de joueurs ?

- **DÉFINITION : ϵ -ÉQUILIBRE DE NASH**

Soit $\epsilon > 0$. On dira dans notre cas que $\pi = (\pi^1, \dots, \pi^N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ solution est un ϵ -Équilibre de Nash si :

$$J_\pi^i(\pi^i) \geq J_\pi^i(\beta) - \epsilon \quad \forall i \in [N], \beta \in \mathbb{R}^N$$

Considérons la stratégie π obtenue comme solution du MFG. puis définissons la stratégie Π^N comme suit : $\forall i, j \in [N], \pi^{i,j} = \pi(X_0^i, X_0^j)$ et $\Pi^N = (\pi^{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$.

- **THÉORÈME : APPROXIMATION DE LA SOLUTION (EXTRAIT DE L'ARTICLE [1], THÉORÈME 4.11)**

$\forall N \in \mathbb{N}$, La stratégie Π^N est un ϵ_N -équilibre de Nash, et la suite ϵ_N tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$.

6

SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Le but des simulations sera de vérifier le théorème précédent. Concrètement, nous prendrons $N \in \{2, 5, 20, 50\}$, nous déterminerons la solution MFG et la solution approchée, déterminerons l'écart entre les fonctions objectifs et vérifierons si la suite ϵ_N tend effectivement vers 0.

Nous ferons ceci pour plusieurs types de drift : OU, linéaire, quadratique.

6.1 ALGORITHME POUR DÉTERMINER LA SOLUTION NUMÉRIQUE DU MFG

Nous procéderons comme suit pour déterminer la dynamique du processus limite en MFG :

1. Simuler $n = 10^4$ copies indépendantes de \bar{X}_0
2. Choisir c^0 arbitrairement.
3. Calculer $c^{k+1} = \frac{1}{2n} \sum_{p=1}^n (c^k + b(\bar{X}_0^p))_+$ jusqu'au premier k tel que $|c^k - c^{k+1}| < \epsilon_{tol} := 10^{-4}$
4. Déduire $n = 10^4$ simulations de \bar{X}_1 . Déterminer $\hat{J}_{\pi, \mu_0}(\pi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U(\bar{X}_1)$

Un point important est la simulation initiale des copies **indépendantes** des variables \bar{X}_0 . Pour le moment, nous supposerons des variables gaussiennes, mais pour généraliser, il serait utile de considérer une simulation par rejet ou alors par l'algorithme de Metropolis.

6.2 ALGORITHME POUR DÉTERMINER LA SOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME À N JOUEURS

Nous procédons comme suit pour déterminer la dynamique des X_0^i quand le nombre de joueurs est fini :

1. Réaliser $m = 10^2$ copies indépendantes de chaque X_0^i (au total mN simulations)
2. Déterminer c^∞ par l'algorithme précédent
3. Déduire $\pi(X_0^i, X_0^j) \quad \forall i, j$
4. Calculer la matrice $\Gamma_N = A^{-1}$ pour chaque simulation où A est définie comme dans la section 3.3 (au total m inversions de matrices de taille N) ou encore plus simplement :

$$\Gamma_N = \left(I_N + \frac{1}{N} \text{Diag}({}^t \Pi \mathbf{1}) - \frac{1}{N} \Pi \right)^{-1}$$

, avec $\Pi = (\pi(X_0^i, X_0^j))_{1 \leq i, j \leq N}$, π étant la solution du MFG.

5. Déduire les termes $B_N := \Gamma_N \mathbf{b}$ et $\Sigma_N := \Gamma_N \text{Diag}(\sigma(X_0^1), \dots, \sigma(X_0^N)) \varepsilon$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0_{\mathbb{R}^N}, I_N)$
6. Calculer les utilités de chaque joueur pour chaque simulation, moyennier les utilités de chaque joueur sur les simulations.
7. Déterminer le minimum de chaque espérance d'utilité

Si l'on veut juste simuler les stratégies gagnantes, on peut s'arrêter au point 3 de l'algorithme précédent, et la complexité algorithmique n'est pas énorme, mais si l'on veut vérifier le dernier théorème, il faut aller jusqu'au dernier point, et la complexité algorithmique passe à $O(mN^3)$ car l'inversion d'une matrice ne se fait pas en moins d'opérations de façon stable. De plus, la stabilité numérique des simulations devient un problème à partir de $N = 10^4$, car les matrices deviennent de plus en plus grosses et deviennent également mal conditionnées

6.3 HYPOTHÈSES DE SIMULATION

- Nous considérons qu'initialement la variable \bar{X}_0 a même loi que $N\mathbf{1}_{N \geq 0}$, où $N \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Nous considérons un drift b de type OU $b(x) = \mu(\theta - x)$
- Nous considérons une volatilité σ constante : $\sigma(x) = \bar{\sigma}$ avec $\sigma^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{2\theta}$

6.4 RÉSULTATS

Nous commençons par observer la frontière d'investissement (donnée par c) pour une valeur figée du jeu de paramètres

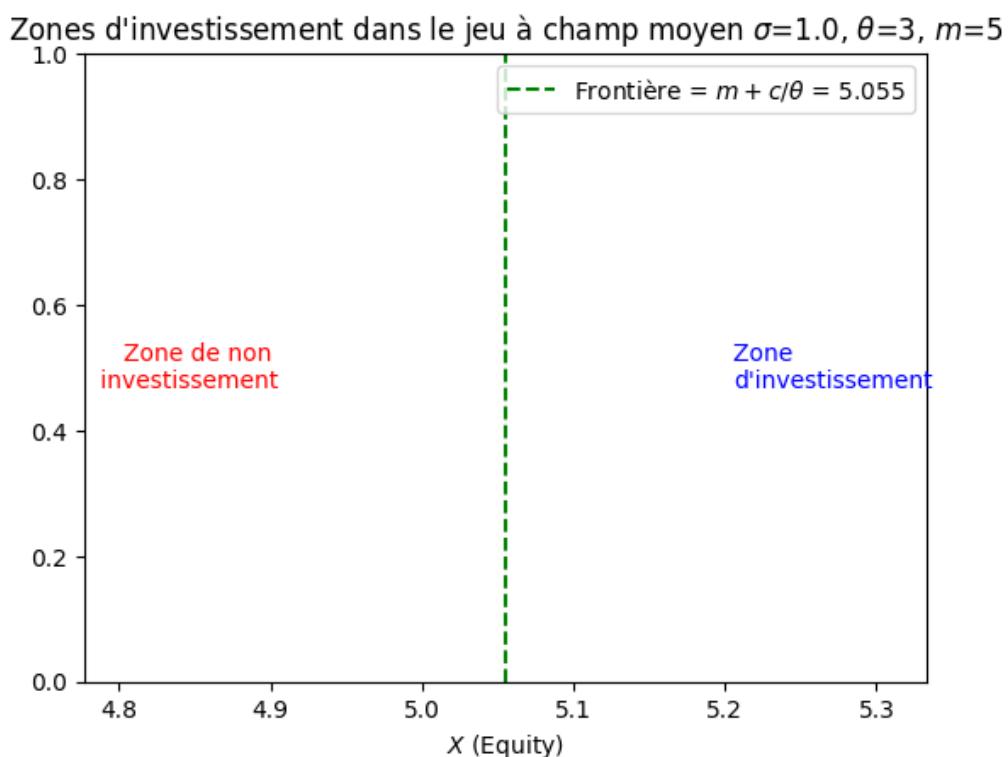
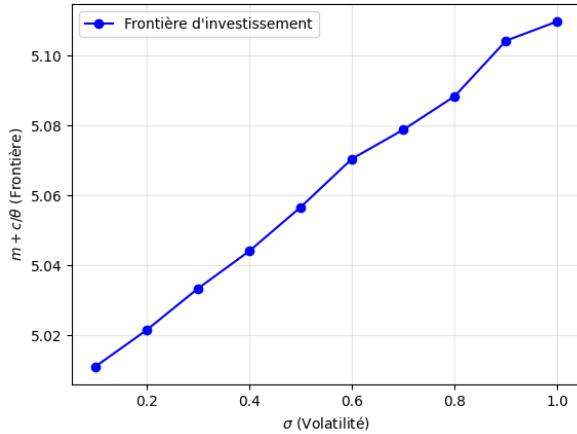
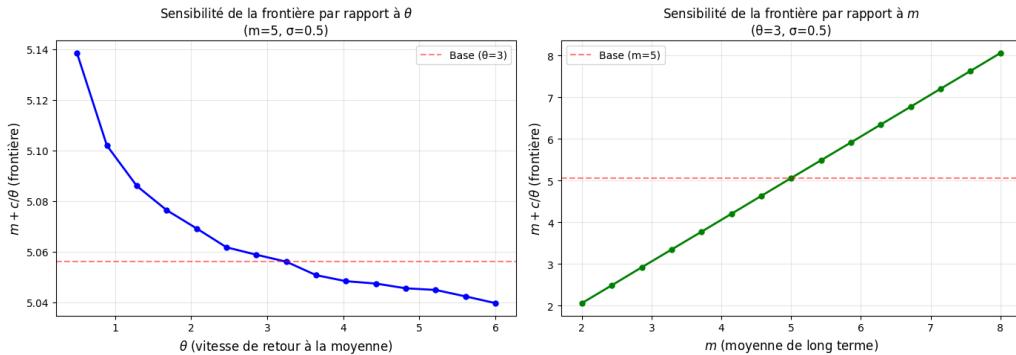


FIGURE 1 – Frontière d'investissement

Les résultats obtenus apparaissent cohérents avec l'intuition économique. En effet, plus un agent dispose d'un niveau d'équité élevé, plus le temps nécessaire pour que son stock atteigne la faillite est long, ce qui justifie une décision d'investissement. Il convient toutefois d'examiner la robustesse de cette conclusion en étudiant la sensibilité du modèle aux paramètres, afin de vérifier si cette stratégie d'investissement demeure pertinente dans différents contextes.

Evolution de la frontière d'investissement en fonction de σ ($\theta=3, m=5$)FIGURE 2 – Sensibilité de la frontière d'investissement en fonction de σ

On observe que plus l'équity d'un agent est volatile, plus la prudence s'impose avant d'y investir : une forte volatilité accroît le risque et augmente la probabilité que l'agent tombe rapidement en faillite.

FIGURE 3 – Sensibilité en fonction de θ et μ

On constate finalement que la dépendance à la vitesse de retour à la moyenne n'est pas linéaire, mais demeure néanmoins décroissante. Cette vitesse peut être interprétée comme un indicateur de stabilité, puisqu'elle mesure la rapidité avec laquelle l'équity revient vers un niveau de long terme relativement stable. Bien que la frontière de décision varie peu, ce paramètre reste pertinent et exploitable en pratique.

Un résultat a priori contre-intuitif est que le niveau de retour à la moyenne augmente avec la frontière de décision. Cette relation apparaît directement dans l'expression de la frontière $m + \frac{c}{\theta}$. Certes, le paramètre c dépend de m , mais l'analyse montre que cette dépendance est largement absorbée par le terme linéaire en m . Il est possible que l'effet attendu soit plus marqué pour de faibles valeurs de la moyenne de long terme.

Nous poursuivons ensuite avec une analyse de la sensibilité des moments d'ordre 1 et 2 de la distribution limite.

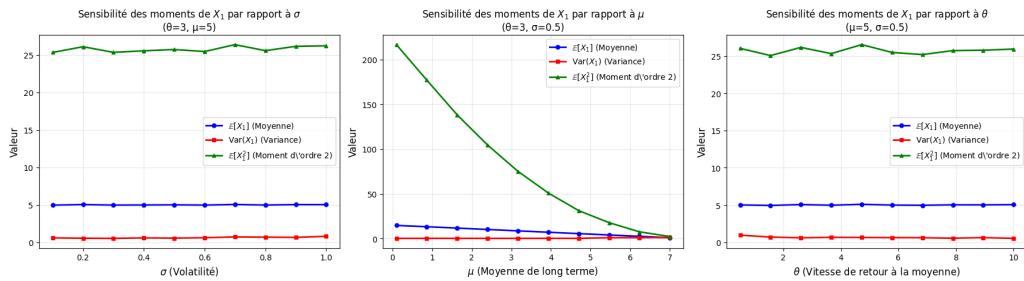
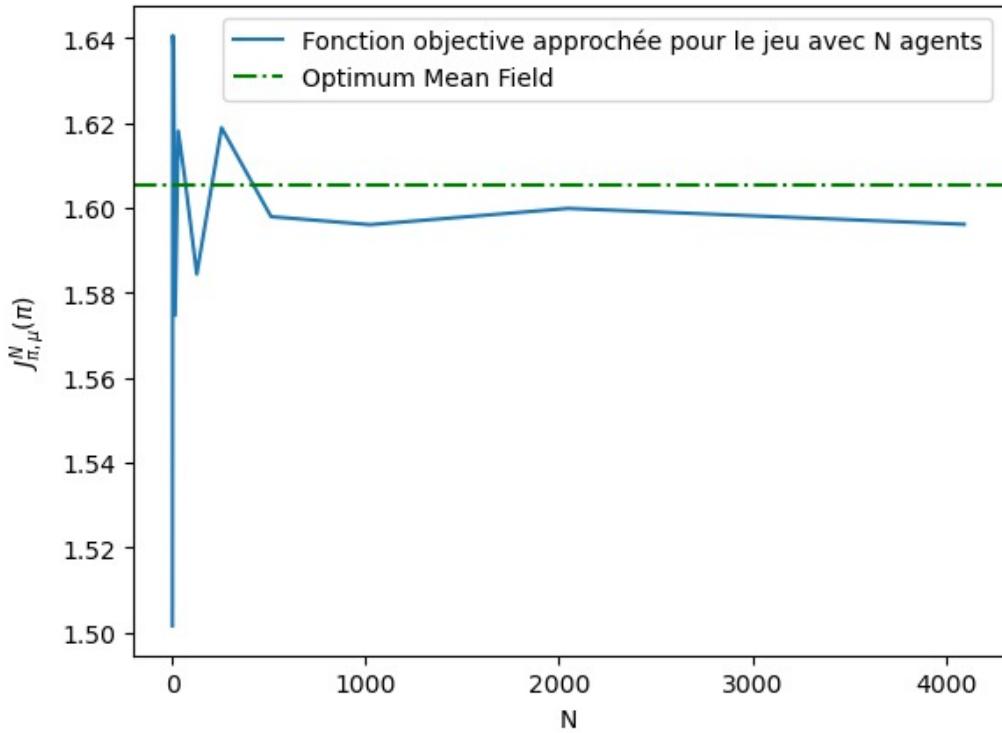


FIGURE 4 – Sensibilité de la distribution limite de l'equity dans le cadre du Mean Field Game

La Figure 4 illustre l'influence des paramètres σ , μ , et θ sur les moments de la distribution limite de l'equity. Elle montre que la stratégie issue du Mean Field Game réduit systématiquement la variance et améliore la stabilité du système, tout en préservant la moyenne lorsque les conditions sont favorables.

Nous continuons par tracer une illustration de la convergence de la solution approchée vers la solution du problème de type mean field.

FIGURE 5 – Moyenne de la fonction objectif approchée sur N joueurs vs Obj Mean field game

On constate que l'augmentation du nombre d'agents entraîne une convergence progressive de la valeur objectif moyenne du système vers celle prédictive par le Mean Field Game.

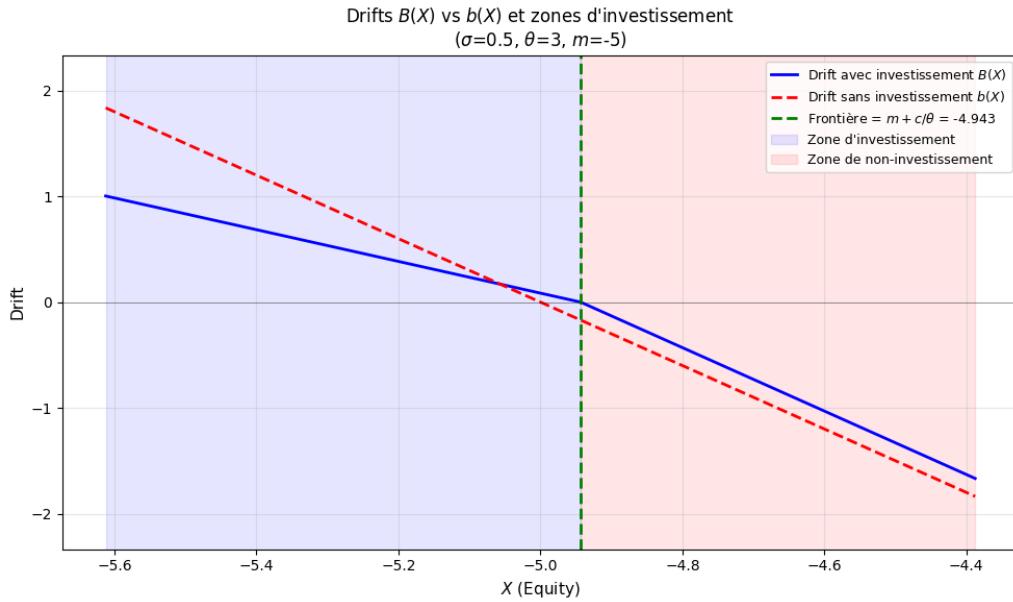
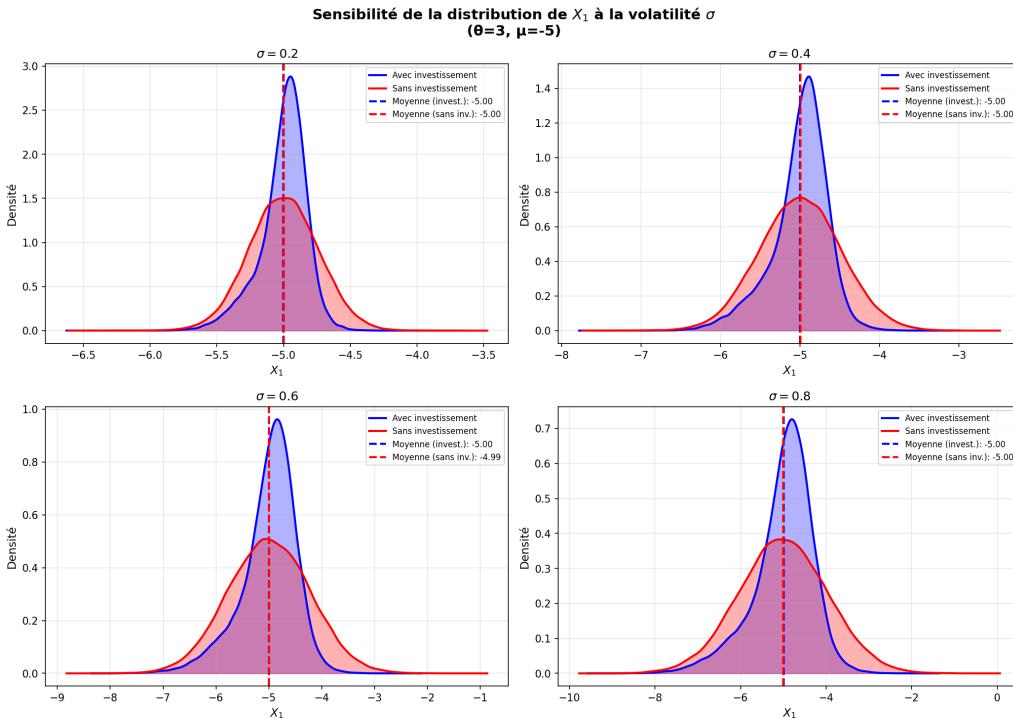


FIGURE 6 – Comparaison des drifts

Cette figure compare le drift à l'équilibre avec celui obtenu dans le cas sans investissement. Elle met en évidence que l'investissement permet de rapprocher le drift de zéro, ce qui signifie une moindre dérive et donc une plus grande stabilité du système. Autrement dit, l'investissement réduit déjà la déviation du point de vue du drift. L'étude de la sensibilité par rapport à σ permettra ensuite de confirmer et d'amplifier ce constat.

FIGURE 7 – Sensibilité de la distribution de \bar{X}_1 en fonction de σ

On constate que la distribution de \bar{X}_1 est beaucoup plus étroite lorsqu'on utilise la stratégie π dans l'investissement. En effet, le terme de volatilité Σ est soit égal au terme σ soit il est égal à $\sigma/2$ dépendant du signe de B . Au-delà du point de vue purement mathématique, on peut également dire que diversifier ses investissements de façon optimale ne mène pas forcément à un portefeuille qui subit des variations élevées, mais ceci peut au contraire contribuer à réduire la dépendance de son portefeuille vis-à-vis des différents risques.

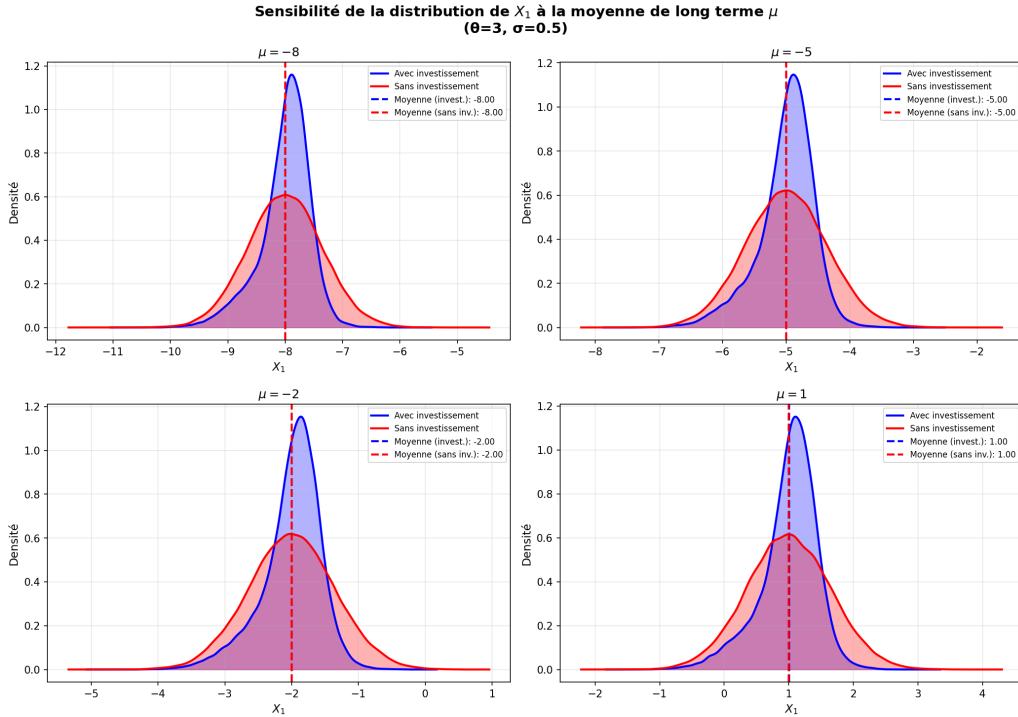


FIGURE 8 – Sensibilité de la distribution de \bar{X}_1 en fonction de μ

On compare les distributions de l'equity sans investissement interbancaire et de l'equity avec investissement optimal. On observe que la densité de l'equity avec investissement optimal au temps 1 présente une variance plus faible que celle de l'equity sans investissement interbancaire. Cela met en évidence l'effet de diversification apporté par l'investissement interbancaire (les participations croisées entre banques).

On remarque également que la densité est déplacée vers la droite lorsque l'equity sans investissement interbancaire a une moyenne négative. Autrement dit, la politique optimale d'investissement interbancaire des agents ayant une dérive positive conduit à une augmentation globale de la moyenne de l'equity au niveau de la population, ou encore que l'investissement fournit du profit positif en moyenne à tout le système interbancaire.

7

CONCLUSION

Ce travail s'est inscrit dans le cadre de l'étude des systèmes financiers interconnectés à travers un modèle d'investissements croisés entre agents, analysé au moyen de la théorie des *Mean Field Games*. Après avoir formulé le jeu à N agents et mis en évidence, dans le cas particulier $N = 2$, la structure bang-bang des stratégies optimales, nous avons montré que la complexité du problème croît rapidement avec la taille du système, justifiant naturellement le recours à une approche de type *Mean Field Game*.

Le passage à la limite lorsque $N \rightarrow \infty$ a permis d'obtenir une dynamique effective pour un agent représentatif, couplée à une mesure limite décrivant l'état agrégé de la population. Nous avons ensuite caractérisé explicitement la solution du problème de *Mean Field Game*, en montrant que la politique d'investissement optimale repose sur une règle simple, dépendant du signe du drift effectif. Cette caractérisation permet de construire une stratégie approchée pour le jeu à N agents, laquelle constitue un ε_N -équilibre de Nash, avec une erreur qui s'annule à la limite lorsque la taille du système augmente.

Les simulations numériques confirment les prédictions théoriques. Elles mettent en évidence l'existence d'une frontière d'investissement naturelle, une réduction systématique de la variance de l'equity sous l'effet de l'investissement optimal, ainsi qu'un effet global de stabilisation du système. L'analyse de sensibilité montre que ces propriétés sont robustes vis-à-vis des paramètres fondamentaux du modèle, notamment la volatilité, la moyenne de long terme et la vitesse de retour à la moyenne. Par ailleurs, la convergence observée de la fonction objectif du jeu à N agents vers celle du *Mean Field Game* valide empiriquement la pertinence de l'approximation de champ moyen.

D'un point de vue économique, ces résultats soulignent que l'investissement interbancaire optimal joue un double rôle : il agit comme un mécanisme de diversification permettant de réduire le risque individuel, tout en améliorant, dans des conditions favorables, la performance moyenne du système. Ce travail illustre ainsi l'intérêt des *Mean Field Games* comme outil d'analyse des phénomènes de stabilité financière dans les systèmes de grande dimension.

Plusieurs pistes d'approfondissement peuvent être envisagées à la suite de ce travail. Une première extension naturelle consisterait à introduire explicitement le risque de défaut dans la dynamique des agents, en s'appuyant sur les modèles de Mean Field Games avec agents défaillants, afin d'analyser plus finement les phénomènes de contagion et de risque systémique. Il serait également pertinent de généraliser le cadre à des dynamiques multi-périodes, voire en temps continu, permettant d'étudier l'impact des stratégies d'investissement sur des horizons de long terme. D'un point de vue structurel, l'intégration de réseaux d'interactions hétérogènes, plutôt qu'une interaction moyenne uniforme, offrirait une description plus réaliste des systèmes financiers. Enfin, une calibration du modèle sur des données réelles pourrait constituer une étape décisive pour évaluer la portée empirique des résultats obtenus.

RÉFÉRENCES

- [1] Mao Fabrice Djete, Nizar TOUZI Mean Field Game of Mutual Holding *arXiv :2104.03884 [math.OC]* 2022
- [2] Mao Fabrice Djete, Nizar TOUZI, Gaoyue Guo Mean Field Game of Mutual Holding with defaultable agents, and systemic risk : *arXiv :2303.07996 [math.PR]*
- [3] A.S. Sznitman. Topics in propagation of chaos : *In P-L Hennequin, editor, Ecole de Probabilités de Saint Flour, XIX-1989. Volume 1464 of Lecture Notes in Mathematics, pages 165-251. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.*