Laboratorio 3

Ezequiel Cabrera

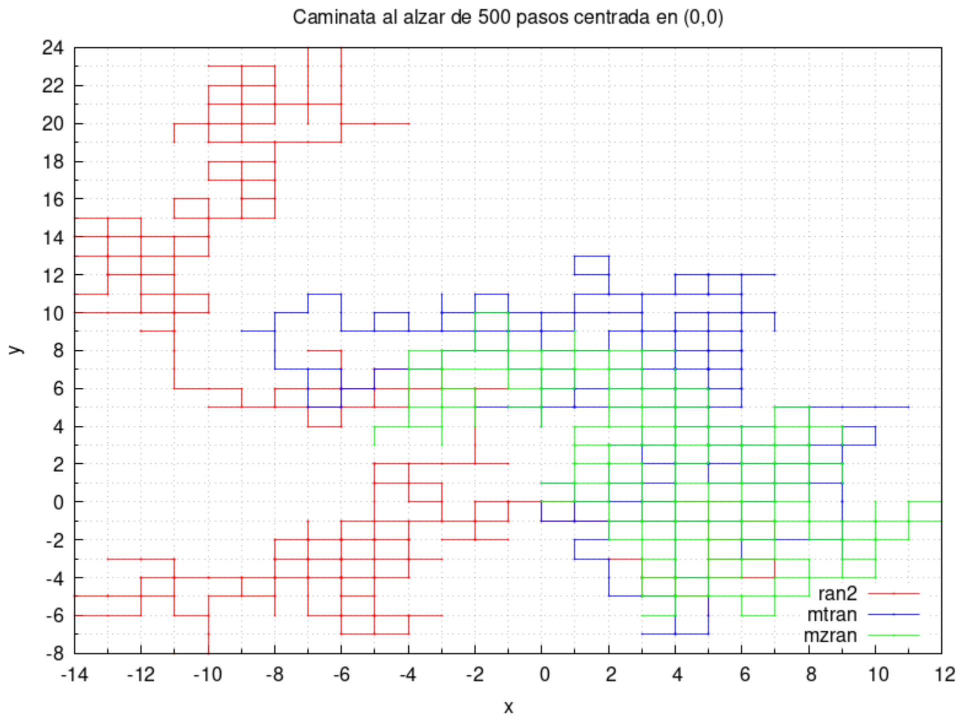
Introducción:

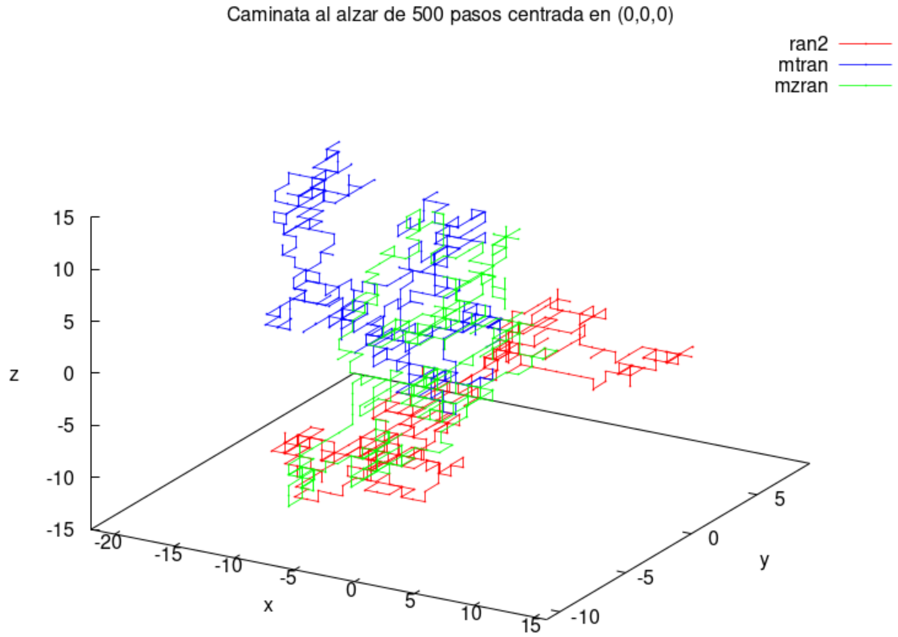
Es de gran interés en los métodos numéricos, el estudio de generadores de números pseudoaleatorios y su utilidad para el estudio de fenómenos estocásticos, integración de funciones de n variables y para estudiar la topología de un espacio de fases, por ejemplo. Es importante que estos generadores sean deterministas en sus condiciones iniciales para que la secuencia de números pseudoaleatorios, y en consecuencia el resultado de los programas creados, puedan ser replicados si es necesario.

En este laboratorio se estudiaron tres tipos de generadores distintos: **ran2** (Numerical Recipes), 'Mersenne Twister' (de ahora en más **mtran**), y **mzran** de Marsaglia y Zaman. Serán implementados en una caminata aleatoria discreta en dos y tres dimensiones, además de analizar la aplicabilidad para integrales de Monte Carlo.

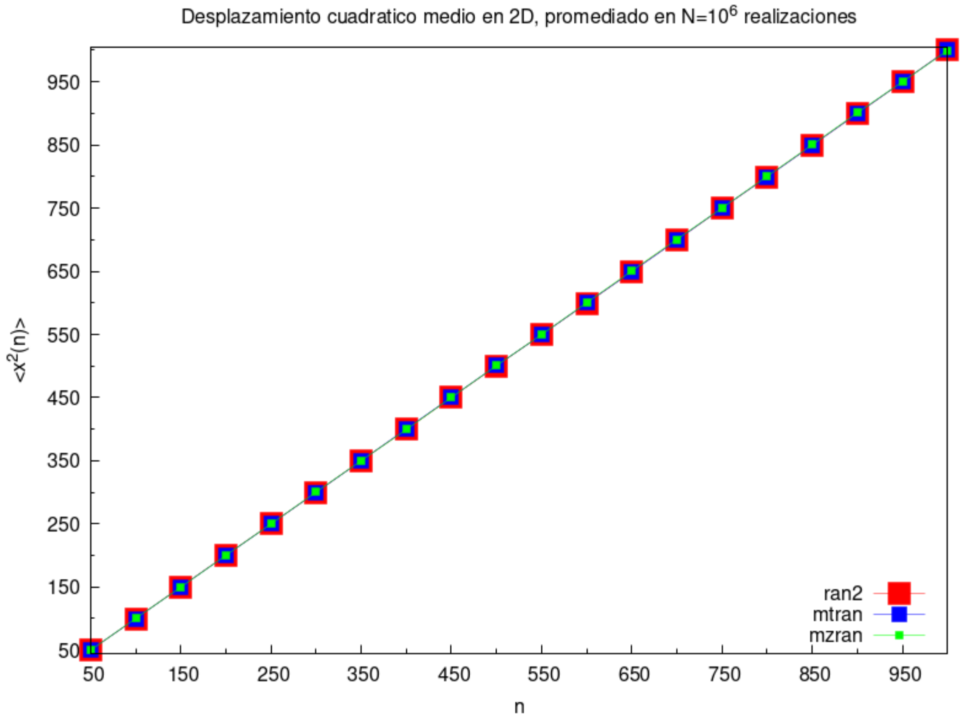
Resultados:

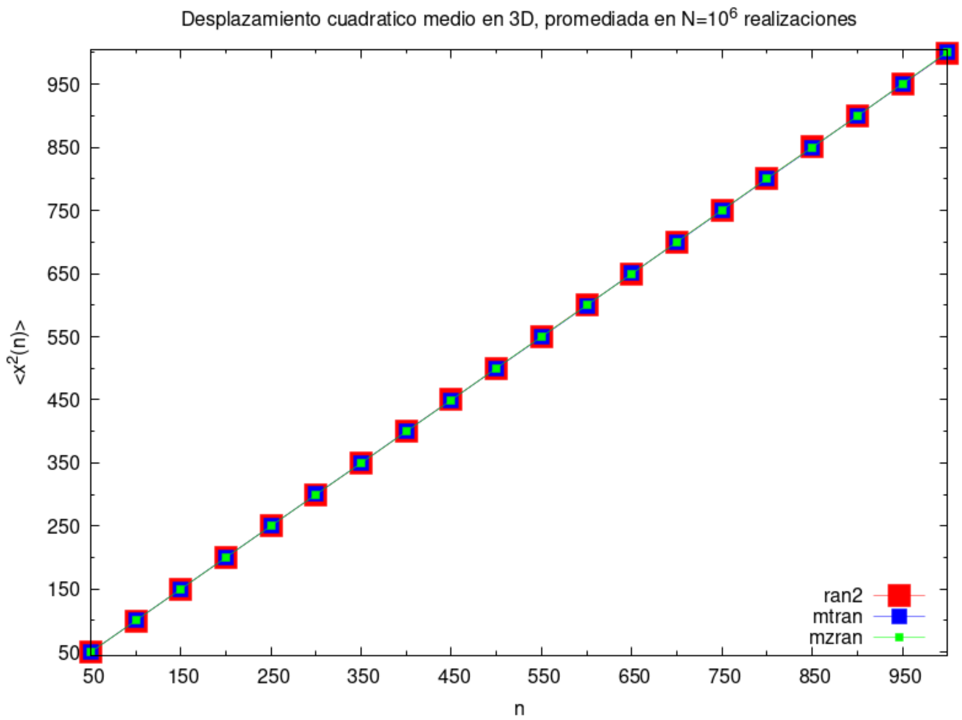
2. *Caminata al azar*:





a) Para cada cantidad de pasos n se realizaron $N = 10^6$ realizaciones para promediar el desplazamiento cuadrático medio.



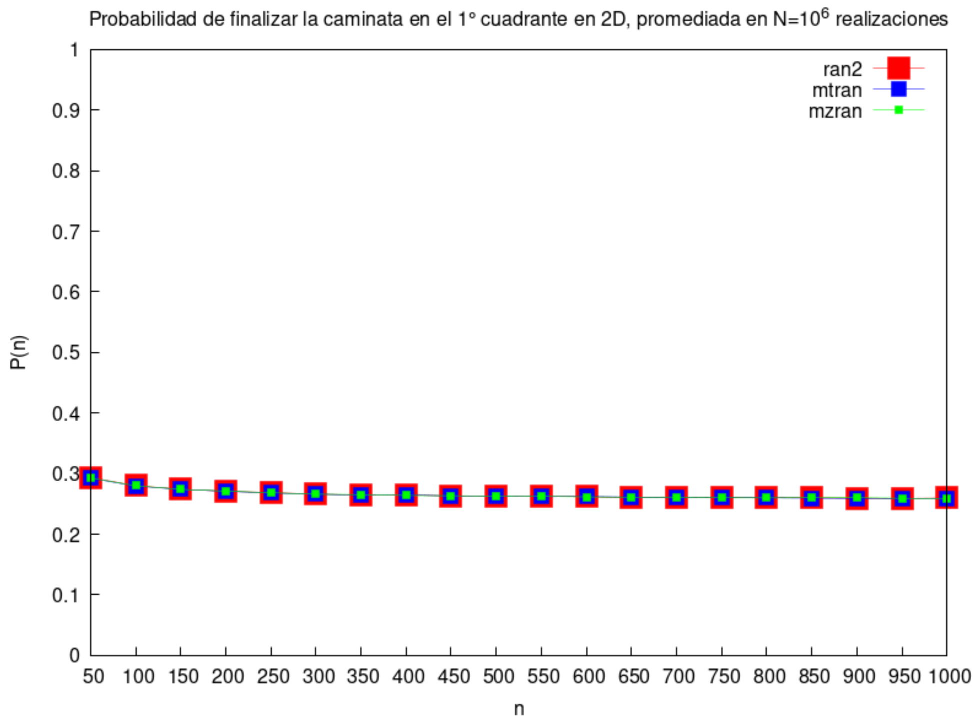


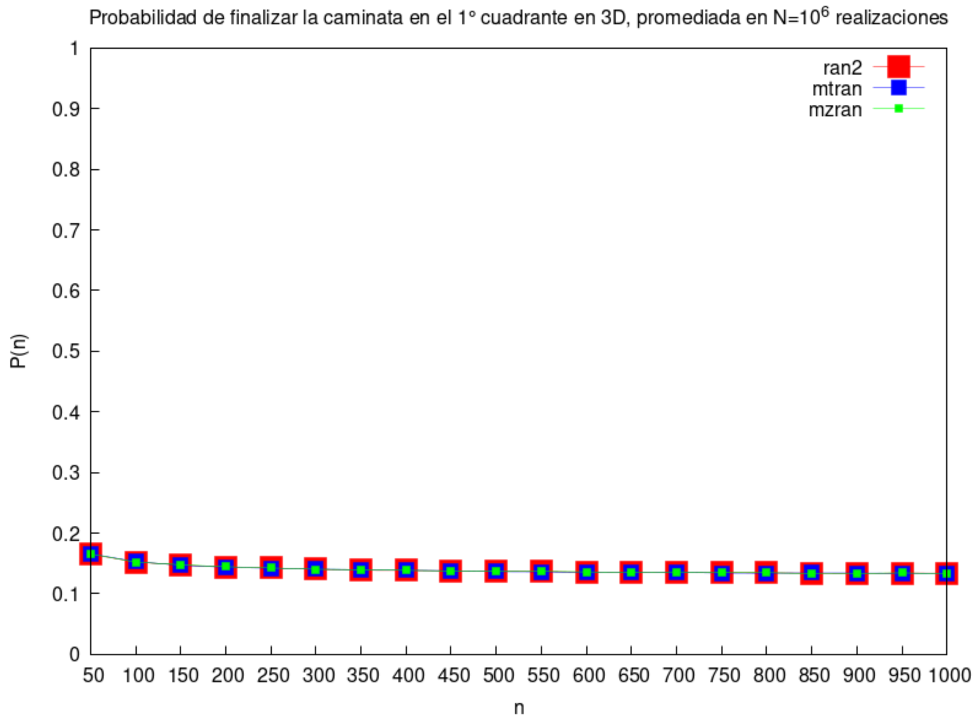
se puede ver que la tendencia es lineal en n como era de esperar, debido a que para un número de realizaciones lo suficientemente grande, se espera que la suma de caminatas al azar recorra la 'totalidad' del espacio accesible, en 2D es un disco, mientras que en 3D es una esfera, ambas de radio n por lo que a N realizaciones lo suficientemente grandes.

$$< x_n^2 >\sim n$$

Como se observa en la gráfica tanto para 2D como en 3D.

b) En ambos casos se toma en cuenta cuando el caminante termina su caminata en el primer cuadrante, es decir que en 2D el primer cuadrante corresponde a $x \geq 0,\ y \geq 0$ mientras que en 3D el primer cuadrante se ubica en $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Se promediaron los resultados para $N = 10^6$ realizaciones en ambos casos.





Como era de esperar, dado que el caminante no posee un sesgo a la hora de dar su siguiente paso, tiene igual probabilidad de terminar en cualquier cuadrante, por lo que esta es independiente de n y promediando sobre la totalidad de realizaciones se puede ver que la probabilidad de que el caminante termine en un dado cuadrante es de $\sim 1/4$ para el caso 2D (cuatro cuadrantes igualmente probables), y de $\sim 1/8$ para el caso 3D (ocho cuadrantes igualmente probables).

3. *Integración de MC:*

$$\int_0^1 x^m \cdot dx \quad , m = 3$$

a) **b)** Definiendo el error absoluto como $\epsilon = |I_n - I|$, siendo I_n el valor de la integral evaluando $f(x)$, n cantidad de veces y I el valor exacto de la integral, en este caso $I = 1/4$.

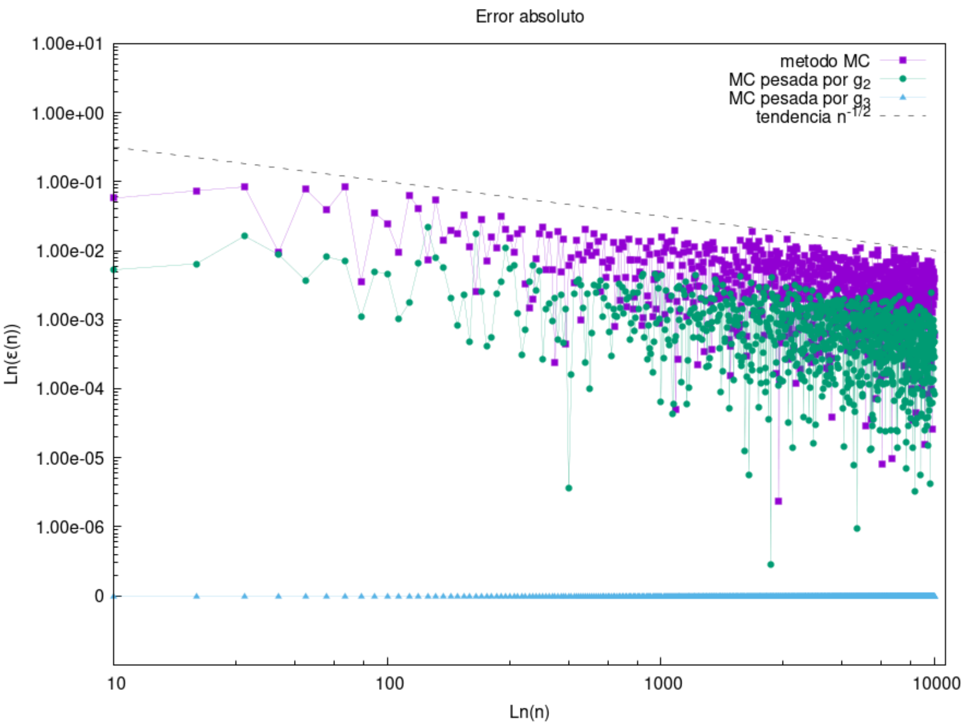
Inicialmente, se calculará la integral evaluando la función directamente y sabiendo que $I_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ con: b, a los límites de integración: $1, 0$ respectivamente. Estando los valores x_i generados de manera directa por **mtran**, el cual da valores distribuidos uniformemente sobre el intervalo $[0: 1]$. Luego con '*importance sampling'* se realizará la integral pero esta vez pesada por una función g_k de la forma:

$$g_k(x) = (k + 1) \cdot x^k$$

La cual se puede ver que es una densidad de probabilidad en $[0: 1]$ y ahora $I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(y_i)}{g_k(y_i)}$ para cada g_k donde y_i son números distribuidos sobre $[0: 1]$ bajo la densidad de probabilidad de g_k según la relacion:

$$y_i = \sqrt[k+1]{x_i}$$

Donde x_i se encuentran distribuidos uniformemente sobre $[0: 1]$.



Se puede apreciar que la tendencia del error del método es decreciente con $\varepsilon \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ y que se alcanza una reducción del error si la función es pesada por una densidad de probabilidad que se aproxime de buena manera a la función que se intenta integrar.
Se debe destacar el caso de g_3 , donde como se puede ver, el error es 0 para todo n, esto se debe a como se vio en clase, a través del teorema central del límite:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{Var_g(f/g)}$$

para el caso de $g_3 = 4 \cdot x^3 = 4 \cdot f(x)$ se puede ver que:

$$Var_g(f/g) = Var_g(1/4) = 0$$

Y en consecuencia $\varepsilon = 0$ independientemente de la cantidad de puntos n que se evalúan, siempre y cuando no sea demasiado pequeño.

Conclusión:

Para la primera experiencia que se realizó en este laboratorio, se puede ver que la implementación de un generador de números pseudoaleatorios frente a cualquiera de los otros dos no ofrece ninguna ventaja significativa, pero cabe destacar que esto depende de las dimensiones del problema, si la cantidad de números pseudoaleatorios que se necesitan generar en el programa es más grande que el periodo del generador entonces es necesario cambiar a un generador con periodo más grande, para que la repetición de estos números no afecte a los resultados. Por lo que en general se recomienda por seguridad el generador de 'Mersenne Twister' dado que, con diferencia, es el generador con periodo más grande de entre los tres utilizados.

Además, en cada inciso se pudieron comprobar las tendencias teóricas vistas en clase. En particular, en el inciso 3 se puede apreciar no solo la tendencia del error en relación con la cantidad de evaluaciones, sino también que este error tiene naturaleza estocástica y se encuentra distribuido bajo una densidad de probabilidad donde la media obedece la tendencia teórica de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.