

# Laboratorio 2

## Ezequiel Cabrera

### Introducción:

En diversos sistemas físicos el comportamiento del sistema está descrito por un campo  $U$  el cual es función de múltiples variables, comúnmente la evolución de este campo viene descrito por un set de ecuaciones que involucran múltiples variables, dando como resultado un sistema de ecuaciones de derivadas parciales como es el caso de las ecuaciones de flujo, electromagnéticas, ondas, etc. Las soluciones analíticas de estos problemas son escasas y es necesario, en el común de los casos, recurrir a técnicas numéricas para resolver dichos problemas.

En esta guía se implementa los métodos de solución de PDE: explícito, implícito, y el método de Crank Nicolson, todos estos aplicados a la ecuación del calor, analizando la evolución temporal de una barra inicialmente a 100 °C a la cual se le mantienen los bordes a una temperatura de 0 °C.

Dichos métodos constan de discretizar en un grillado el espacio y el tiempo, difiriendo cada método en la forma en la que la PDE es diferenciada, dando lugar a diferentes ecuaciones algebraicas:

#### Método explícito

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \eta [T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}]$$

#### Método implícito

$$T_{i,j-1} = -\eta T_{i-1,j} + (1 + 2\eta) T_{i,j} - \eta T_{i+1,j}$$

#### Método de Crank-Nicolson

$$-T_{i-1,j+1} + \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) T_{i,j+1} - T_{i+1,j+1} = T_{i-1,j} + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T_{i,j} + T_{i+1,j}$$

Donde los subíndices  $i$  y  $j$  se corresponden al elemento  $i$ -ésimo del espacio y  $j$ -ésimo de tiempo, con  $\eta = \Delta t / \Delta x^2$  debidamente adimensionalizada.

### Resultados:

#### 1. Ecuación del calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{K}{C\rho} \nabla^2 T(\mathbf{x}, t)$$

a) Para adimensionalizar la ecuación se sustituye las variables  $x$  y  $t$  por:

$$\hat{t} = t D / L^2, \quad \hat{x} = x / L$$

lo que da como resultado la ecuación:

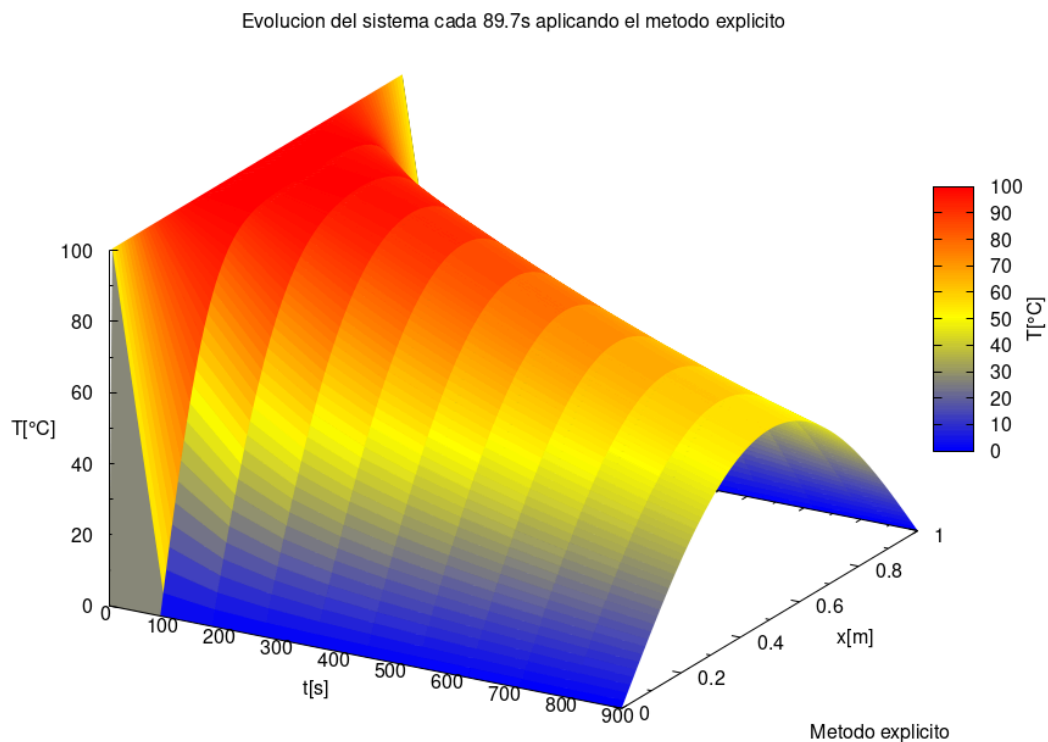
$$\frac{\partial T(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 T(\hat{x}, \hat{t})}{\partial^2 \hat{x}}$$

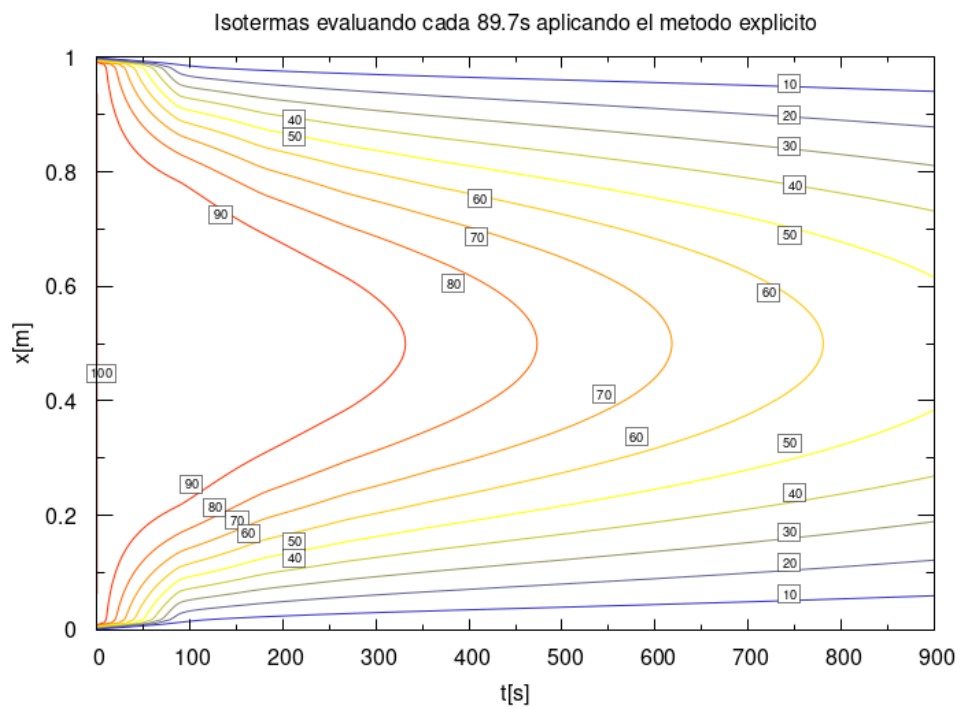
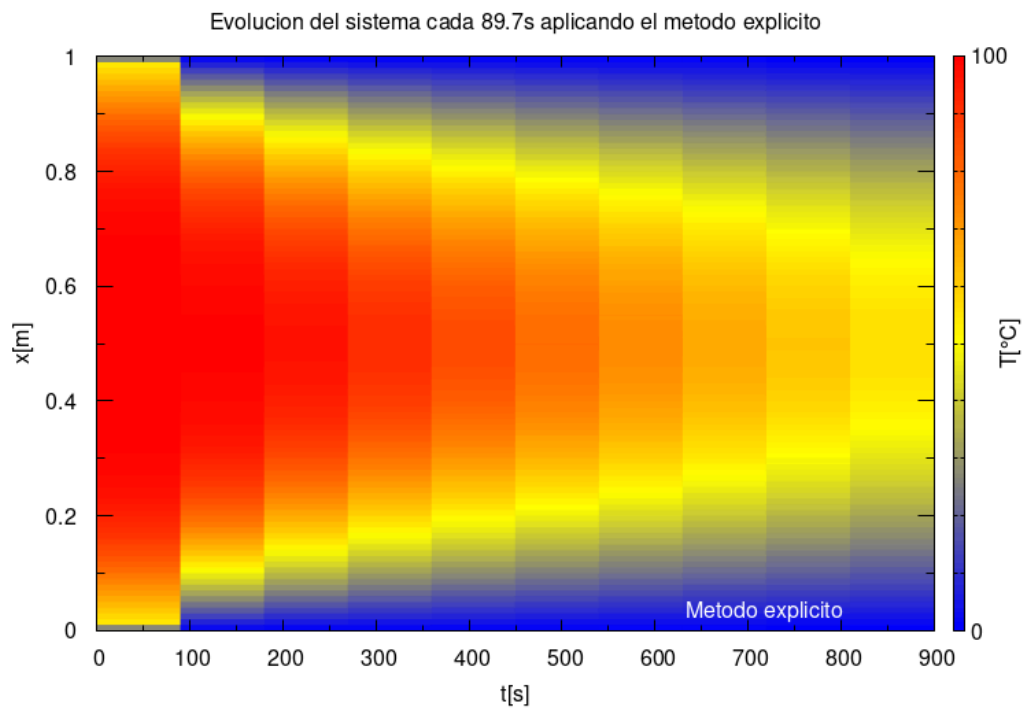
de ahora en adelante  $\hat{t} = t$ ,  $t = t_{real}$  para simplificar

**b)** Gráficos de superficie para cada método, se guardaron los datos cada 300 iteraciones, usando  $\Delta t = 0.3s$  lo cual al adimensionalizar queda que

$\Delta t = \Delta t_{real} \cdot C \approx 0.3^{-5}$  donde  $C = \frac{D}{l^2}$  es la constante que adimensionaliza a  $t$ . De esta forma se puede ver que  $\eta \approx 0.3 \leq 0.5$ , por lo que el método explícito es estable.

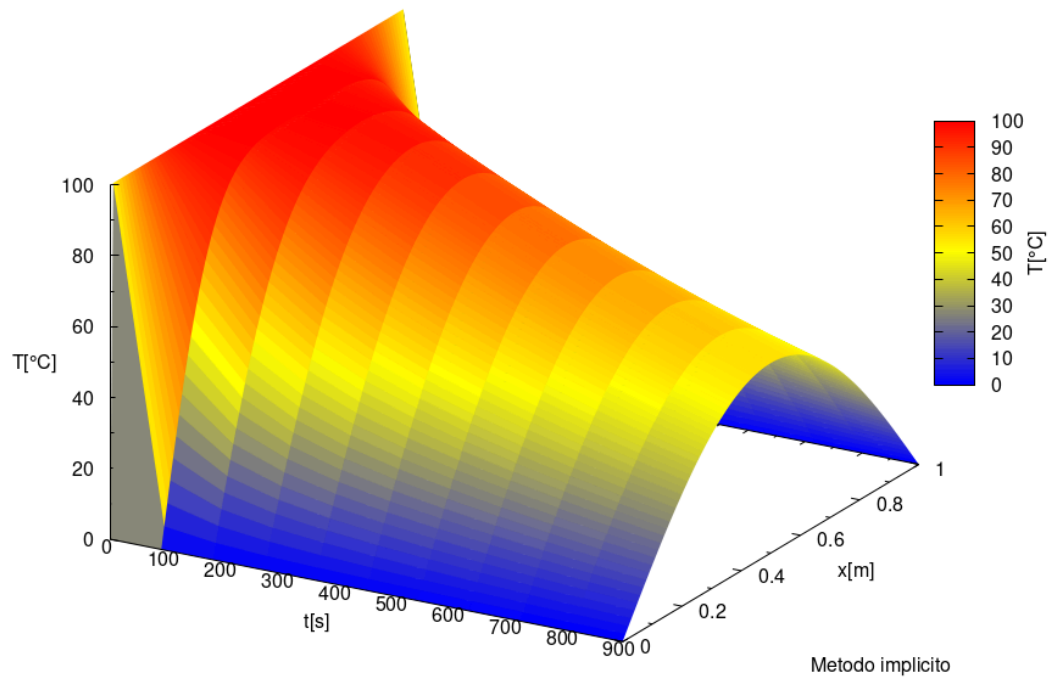
### i) Método explícito



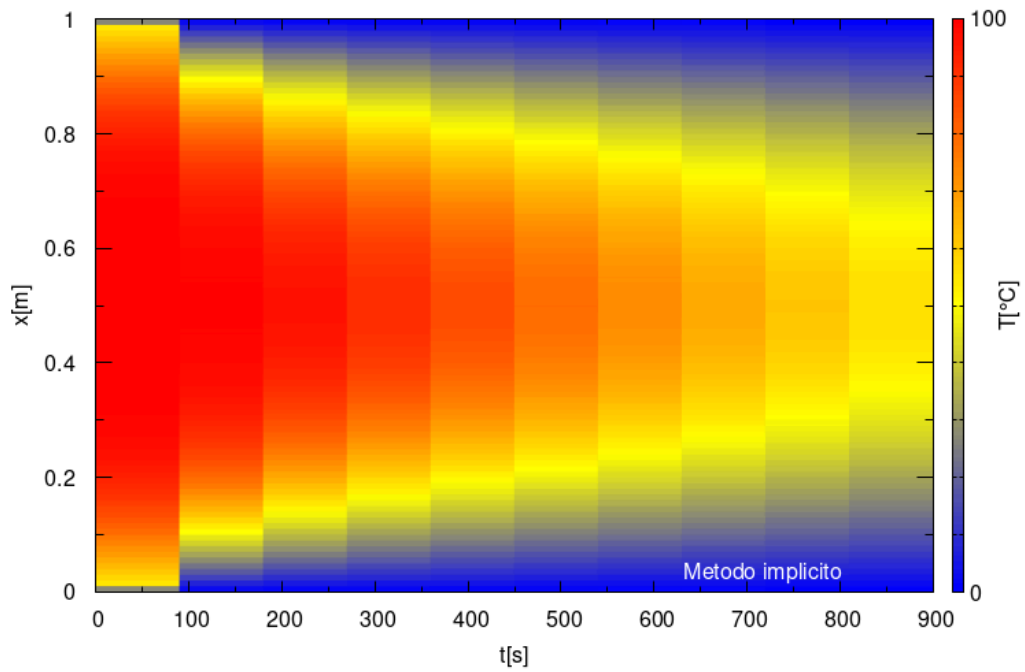


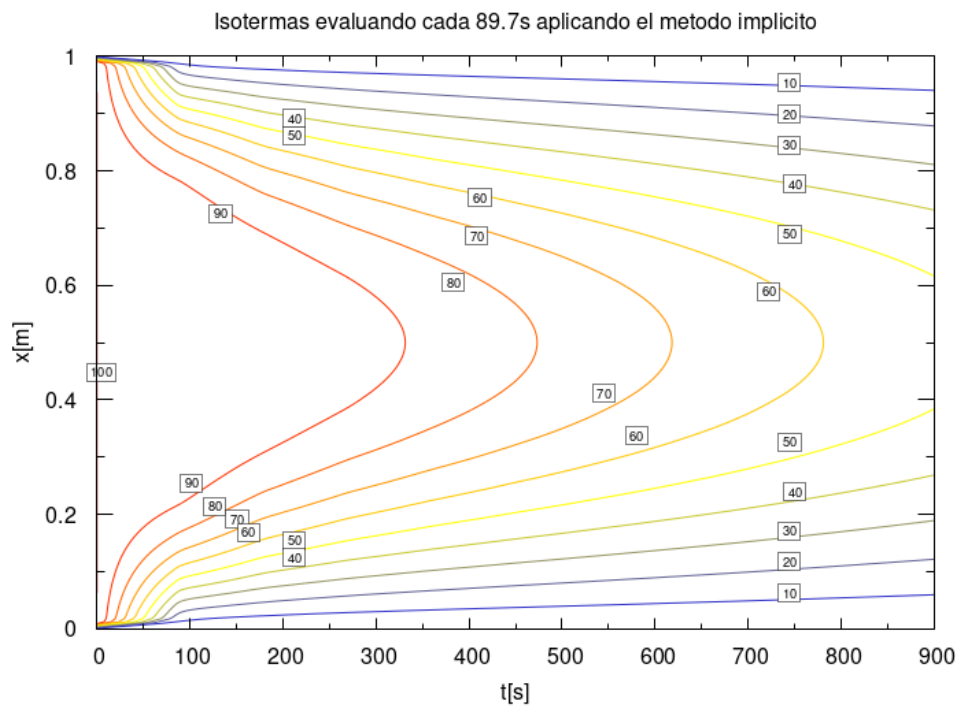
ii) Método implícito

Evolucion del sistema cada 89.7s aplicando el metodo implicito



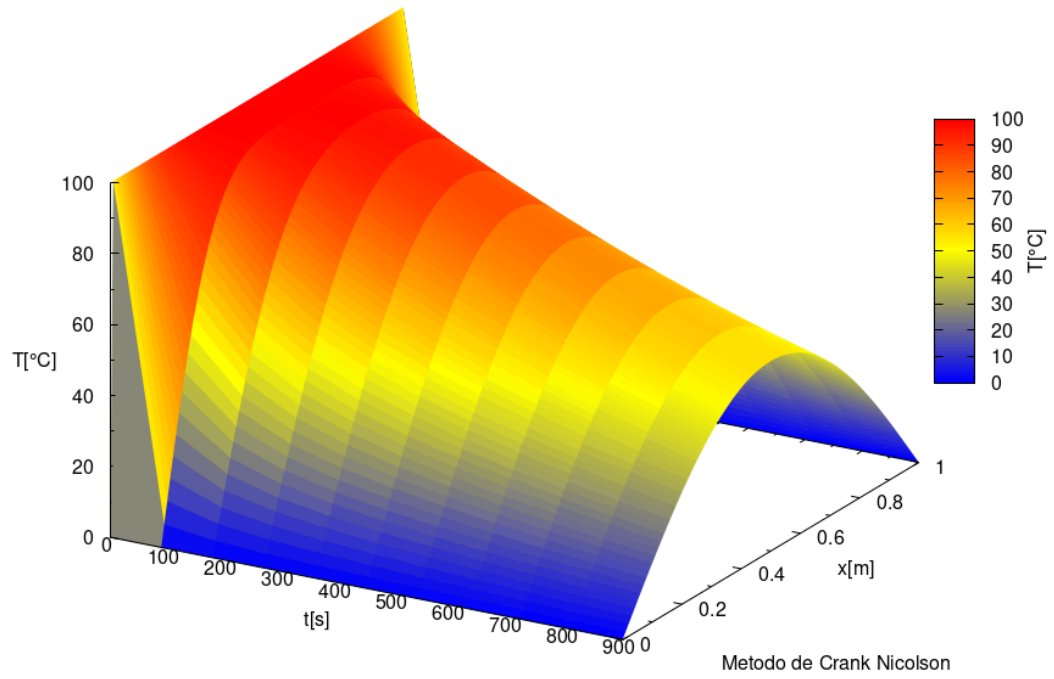
Evolucion del sistema cada 89.7s aplicando el metodo implicito



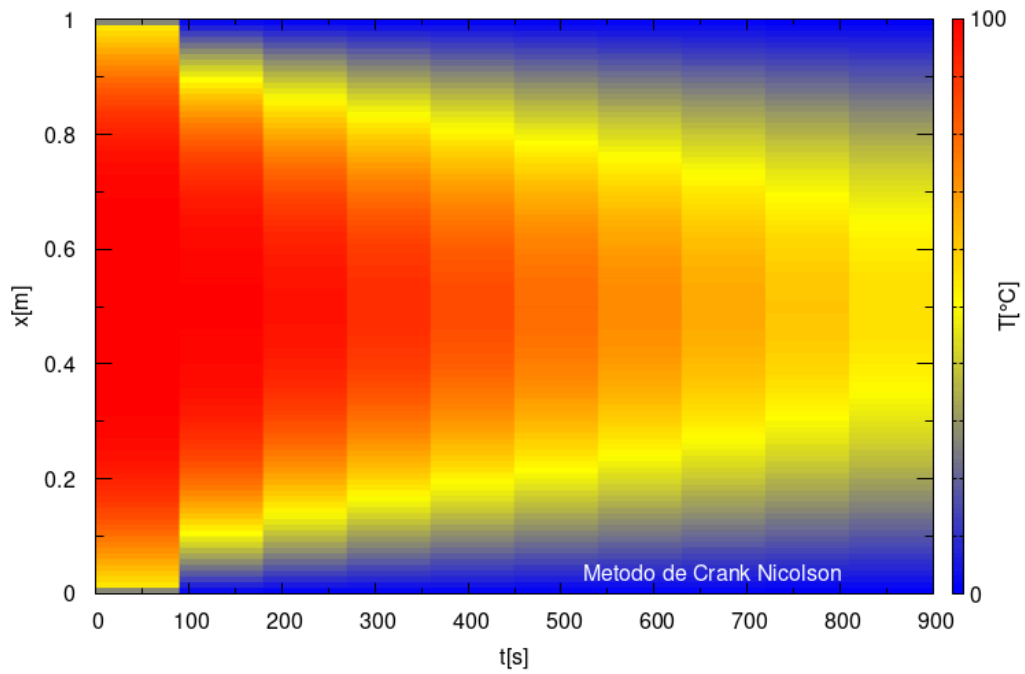


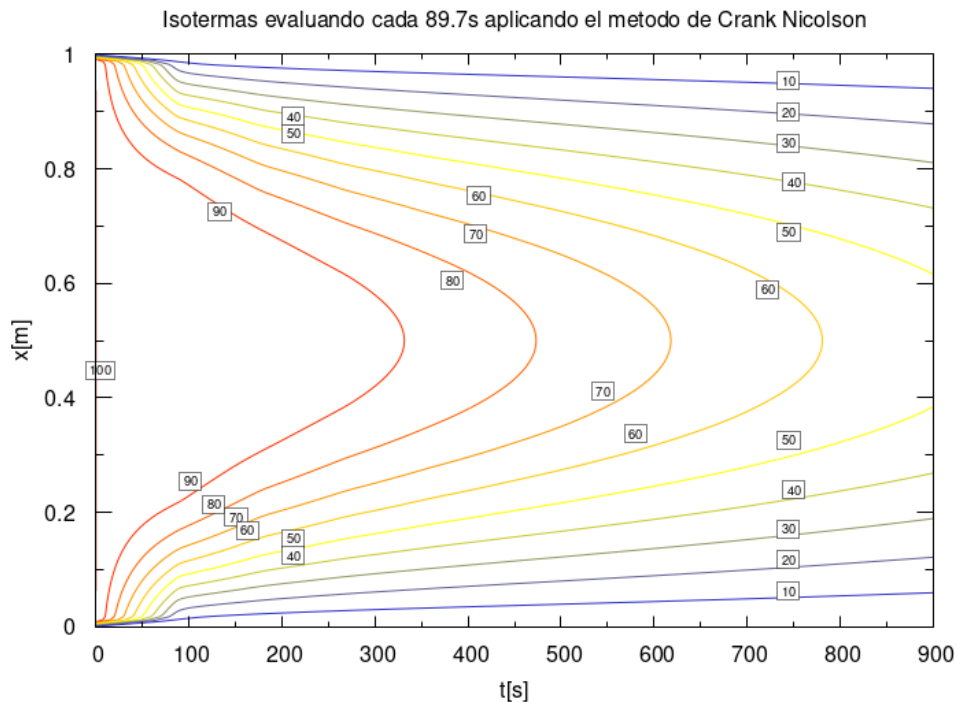
iii) Método de Crank Nicolson

Evolucion del sistema cada 89.7s aplicando el metodo de Crank Nicolson



Evolucion del sistema cada 89.7s aplicando el metodo de Crank Nicolson





No encontré diferencia visible entre los métodos; sin embargo, analizando las curvas de error relativo en los incisos siguientes, se observa que existe una diferencia entre los métodos del orden de  $\sim 10^{-4}$ .

- c) d)** Se puede observar que para cada método, la temperatura varía suavemente a lo largo de la barra, a excepción de los primeros segundos, cuando la temperatura de los extremos varía violentamente; sin embargo, esto se debe a las condiciones iniciales de temperatura de la barra, las cuales varían súbitamente una vez que se evoluciona en el tiempo, termalizando los extremos rápidamente y reduciendo lentamente la temperatura del centro de la barra.

También se puede ver que a medida que se evoluciona en el tiempo, la temperatura tiende a disminuir gradualmente hasta cero, esto es de esperar dado que la solución del sistema es decreciente exponencialmente en el tiempo, concretamente de la forma  $\sim e^{-\gamma t}$ , con  $\gamma$  algún parámetro real-positivo.

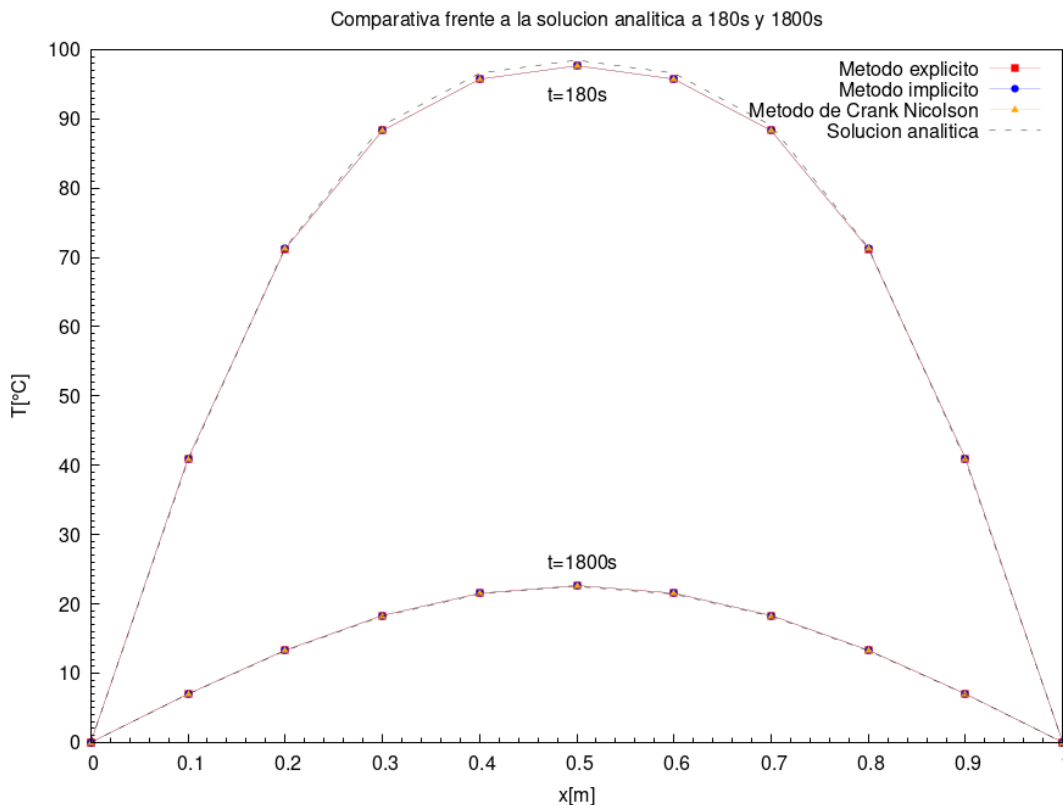
- e)** Solución analítica y comparativa entre métodos para los tiempos  $t_{real} = 180s$  y  $t_{real} = 1800s$  para 10 divisiones:

Antes con la implementación se adimensionaliza el tiempo máximo y a través de este se define el número máximo de iteraciones:

$$n_t = (C \cdot t_{max})/dt$$

Donde  $dt$  en este caso se escoge como óptimo para asegurar la estabilidad del método explícito, para el caso de 10 divisiones con  $\Delta t = 4.5 \times 10^{-3}$  es suficiente para asegurar la estabilidad.

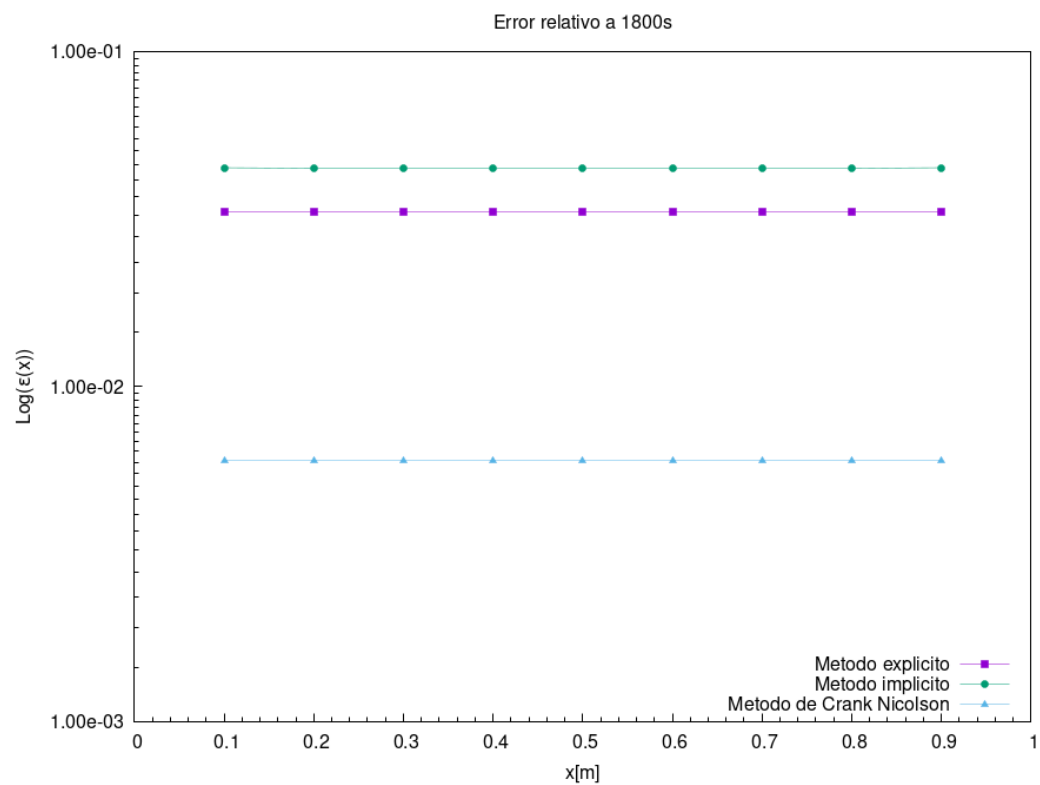
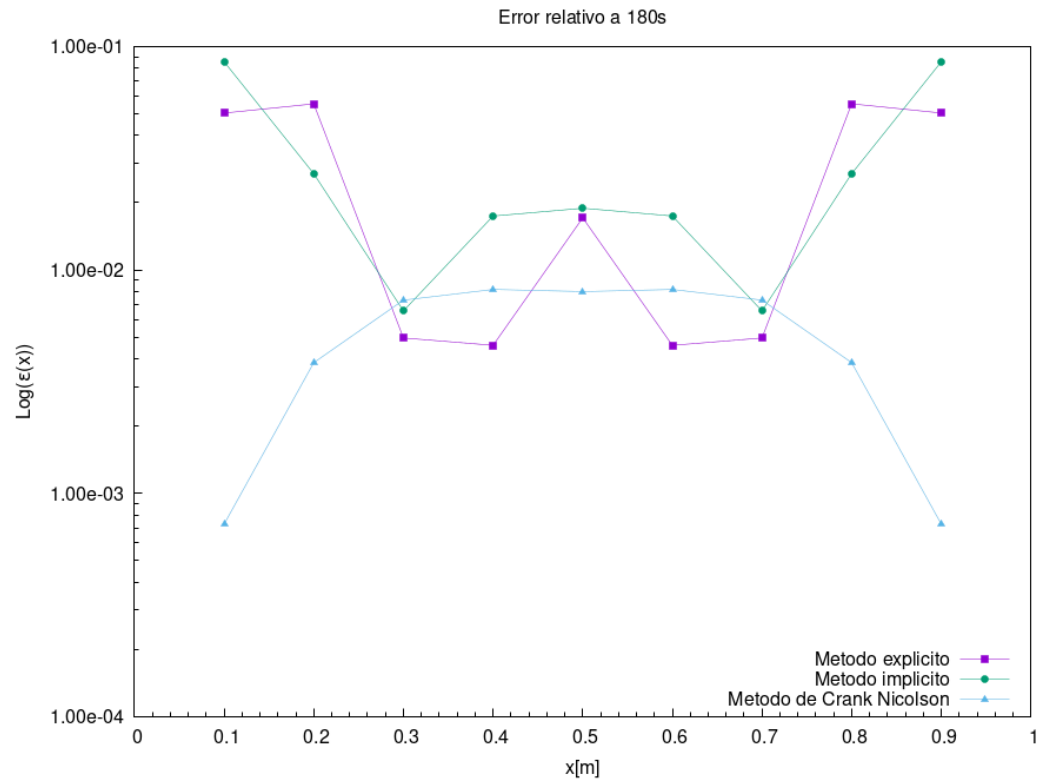
La solución analítica a su vez se calcula hasta el sumando 17, sumando primero las contribuciones más pequeñas. Esto es así dado que para términos superiores la contribución a la suma era solo del orden de  $\sim 10^{-20}$  a  $t_{real} = 180s$  (siendo aún más pequeñas para  $t_{real} = 1800s$ ).



Las diferencias entre los métodos no son apreciables a simple vista, para realizar una comparativa hay que recurrir a un análisis de los errores con la solución analítica. Definiendo el error relativo  $\varepsilon$  de la siguiente manera:

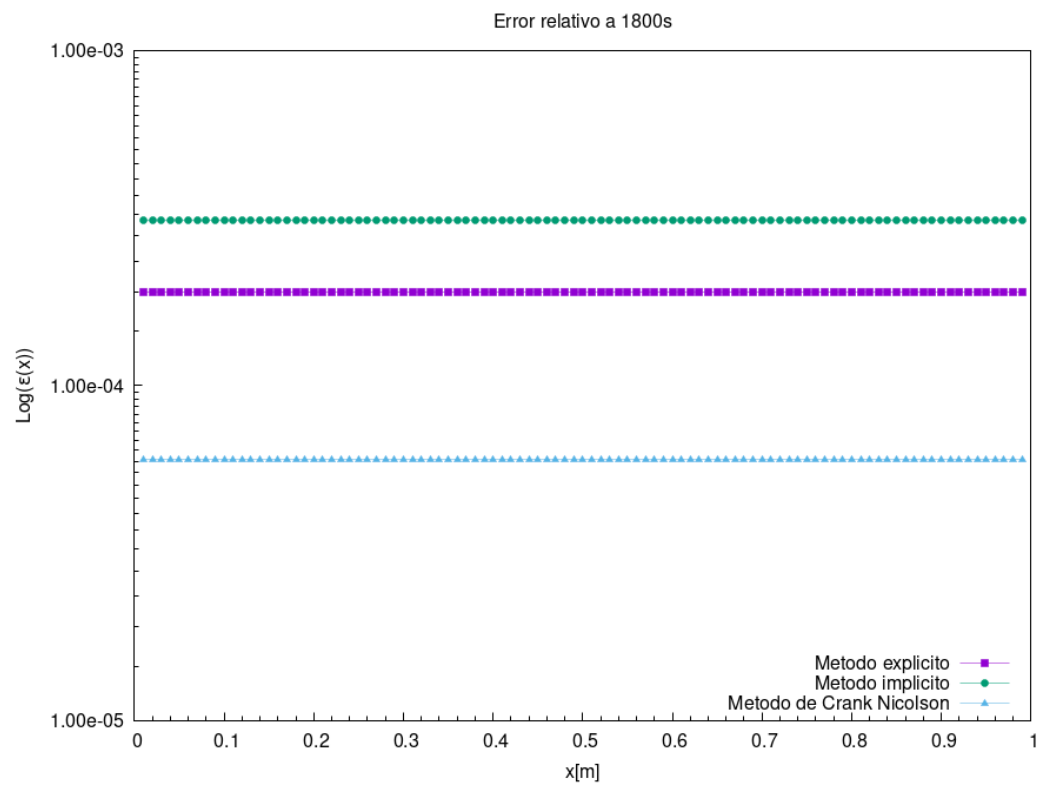
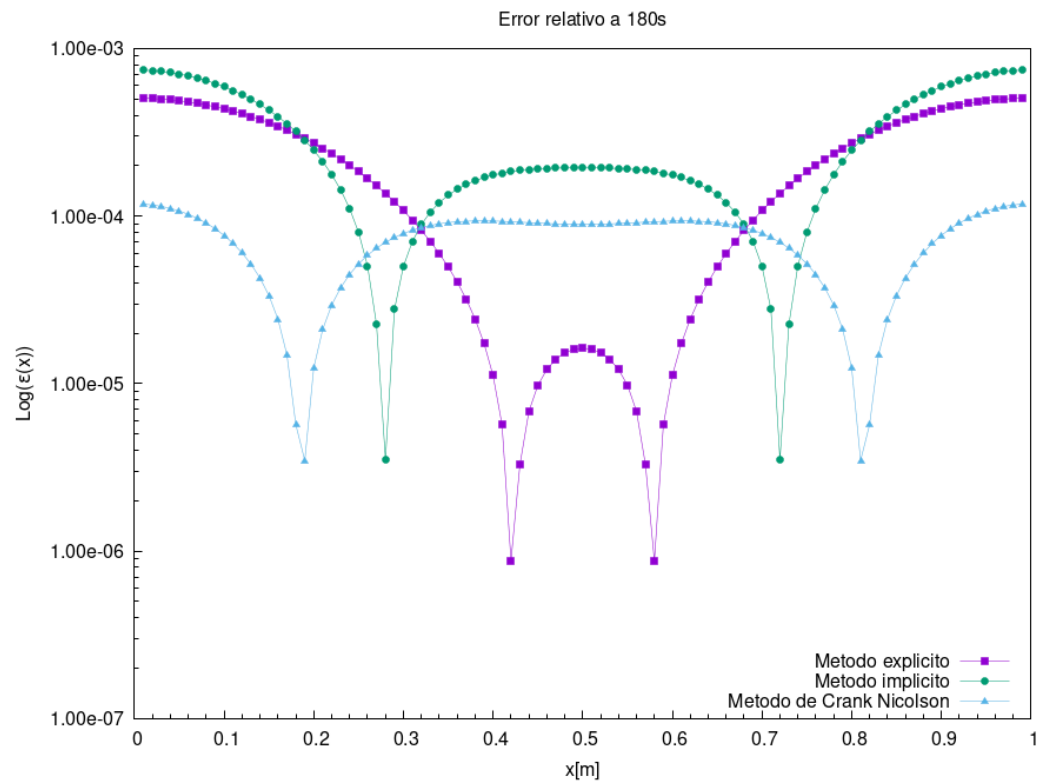
$$\varepsilon = \left| \frac{\{\text{método}\} - \{\text{exacto}\}}{\{\text{exacto}\}} \right|$$





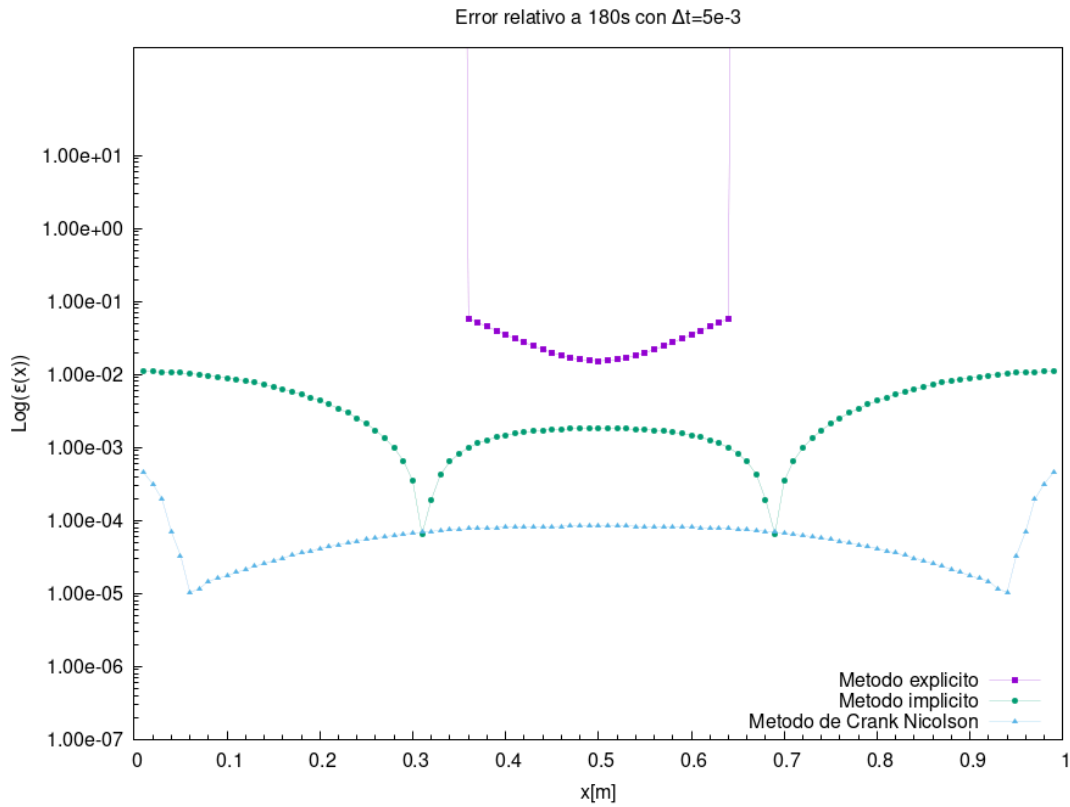
Se puede ver que para estos parámetros seleccionados el error es inferior a  $10^{-1}$  y que el método de CN es el mejor en ambos tiempos estudiados.

A modo de revisión, se cambiaron los parámetros de integración tal que  $\Delta t = 0.3s$  y  $\Delta x = 0.01m$  (correctamente adimensionalización dentro del programa) para hacer un estudio sobre el error relativo a los tiempos 180s y 1800s.

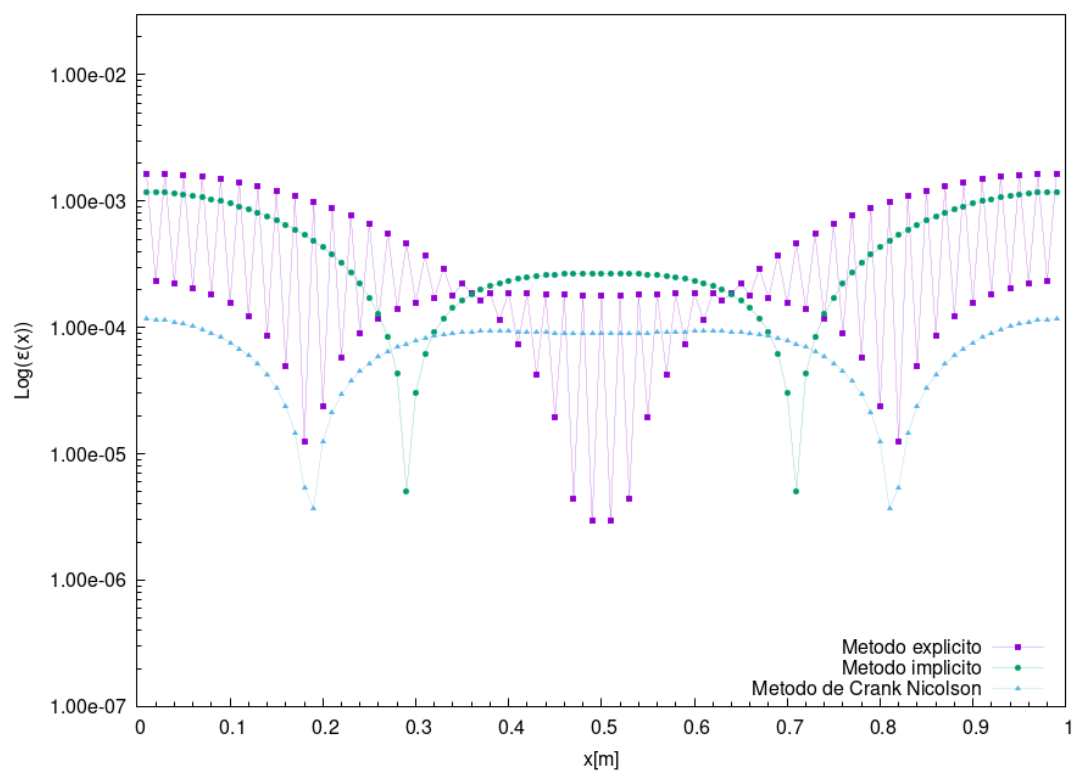


En ambos tiempos el método de CN es el más estable y el más preciso a tiempos largos.

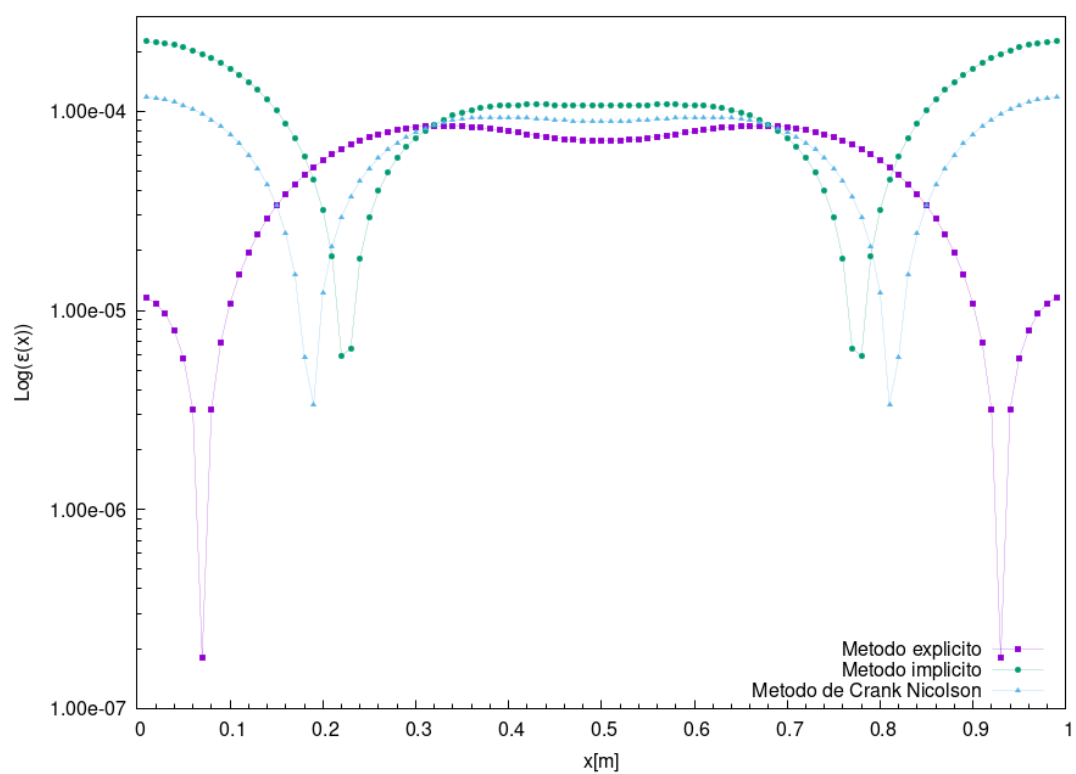
Adicionalmente, para ver cómo evoluciona el error para diferentes parámetros de  $\Delta t$ , realice una run para diferentes órdenes de magnitud tomando 100 espaciamentos abarcando los valores de:  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-6}$

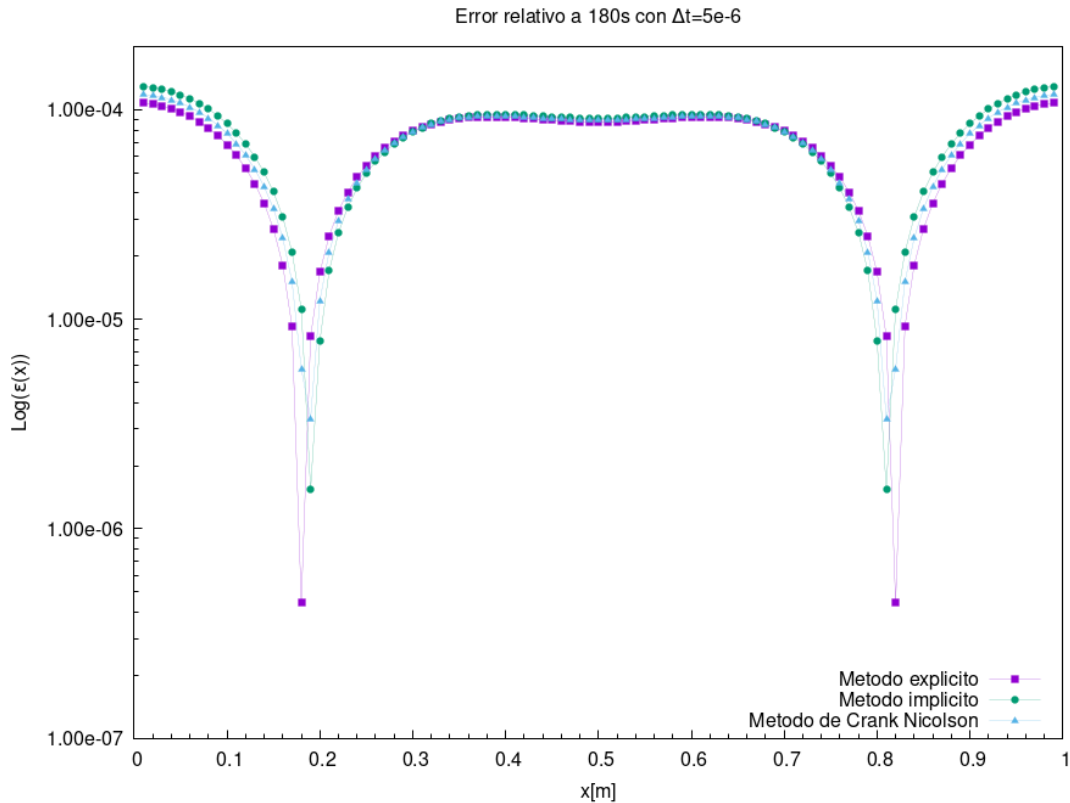


Error relativo a 180s con  $\Delta t=5e-4$



Error relativo a 180s con  $\Delta t=5e-5$



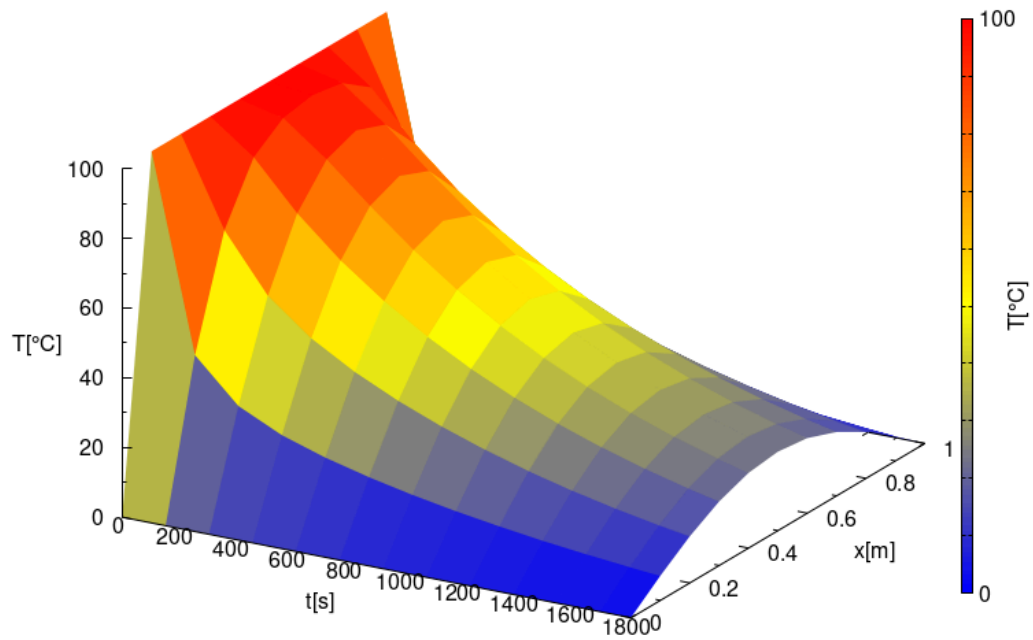


Se puede ver que para  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ ,  $\eta > 0.5$  donde el método explícito es inestable, este no converge y se aleja altamente de la solución exacta, mientras que los otros métodos, sí convergen a la solución, siendo el Método de Crank Nicolson el de menor error alcanzando la cota mínima del orden de  $\sim 10^{-5}$

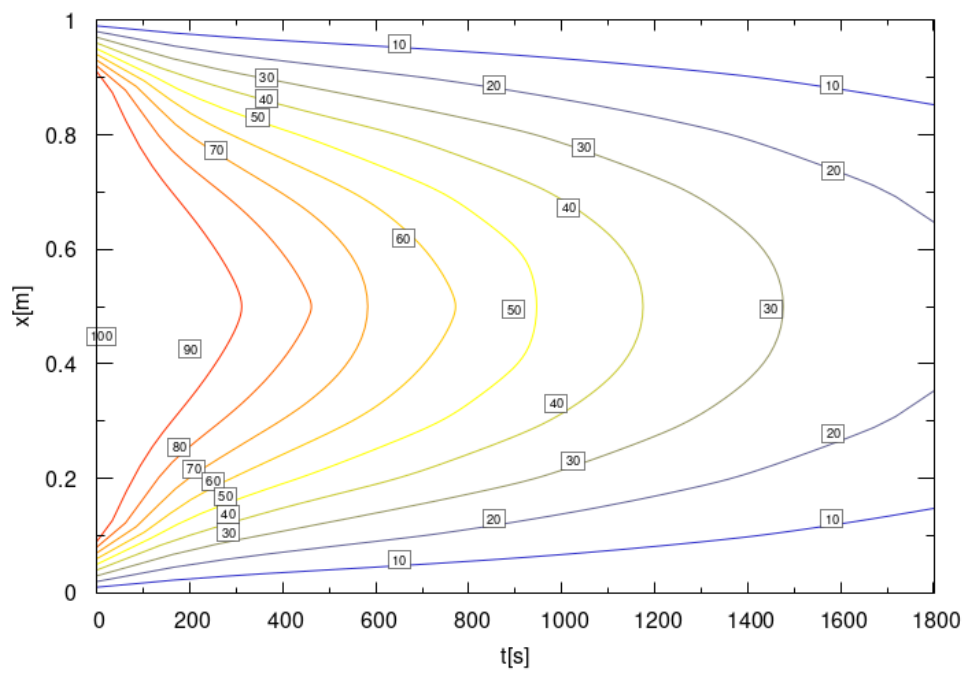
Además, se aprecia que para  $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$  los métodos convergen entre sí a una misma solución, dando como resultado una de error de  $\sim 10^{-4}$  alcanzando un error mínimo menor a  $10^{-6}$  en determinados puntos de la solución.

- f) Para cada método se observan resultados similares.  
i) Método explícito

Evolucion del sistema cada 0.5s aplicando el metodo explicito

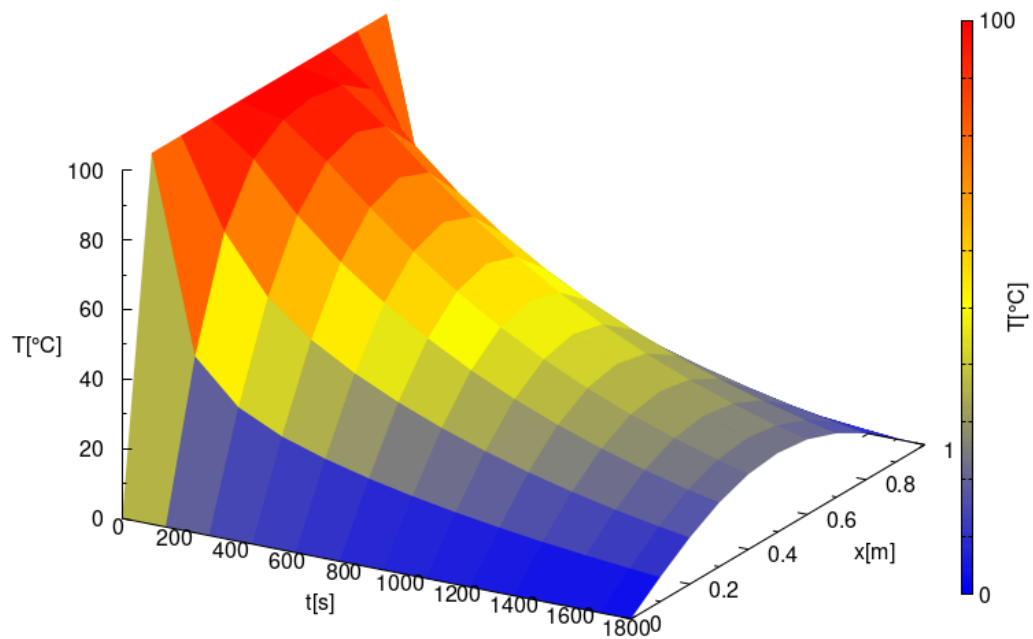


Isotermas evaluando cada 0.5s tomando 10 divisiones, aplicando el metodo explicito

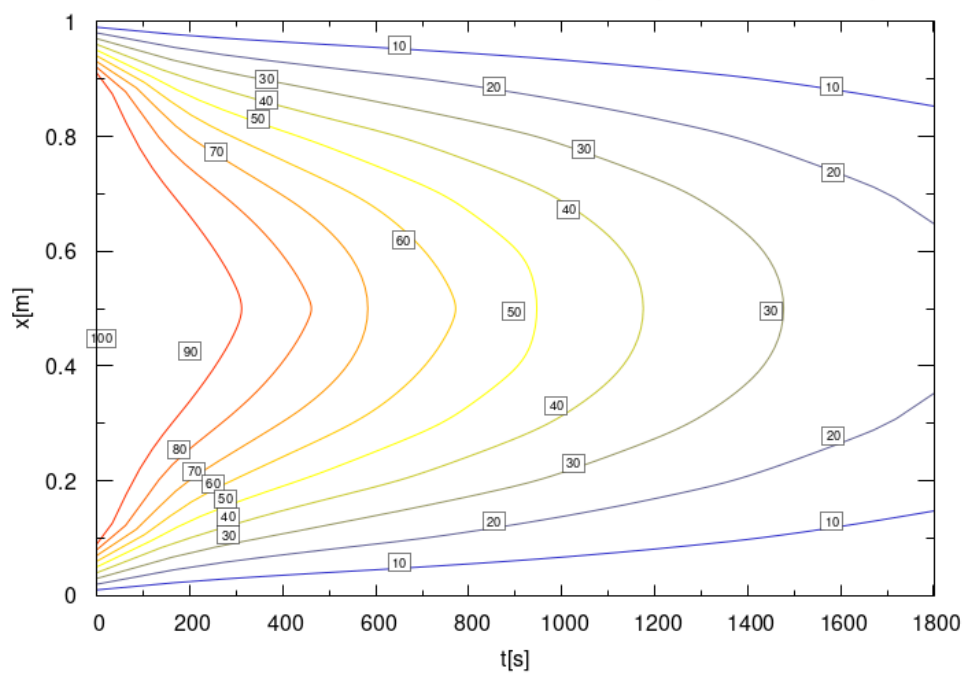


ii) Método implícito

Evolucion del sistema cada 0.5s aplicando el metodo implícito

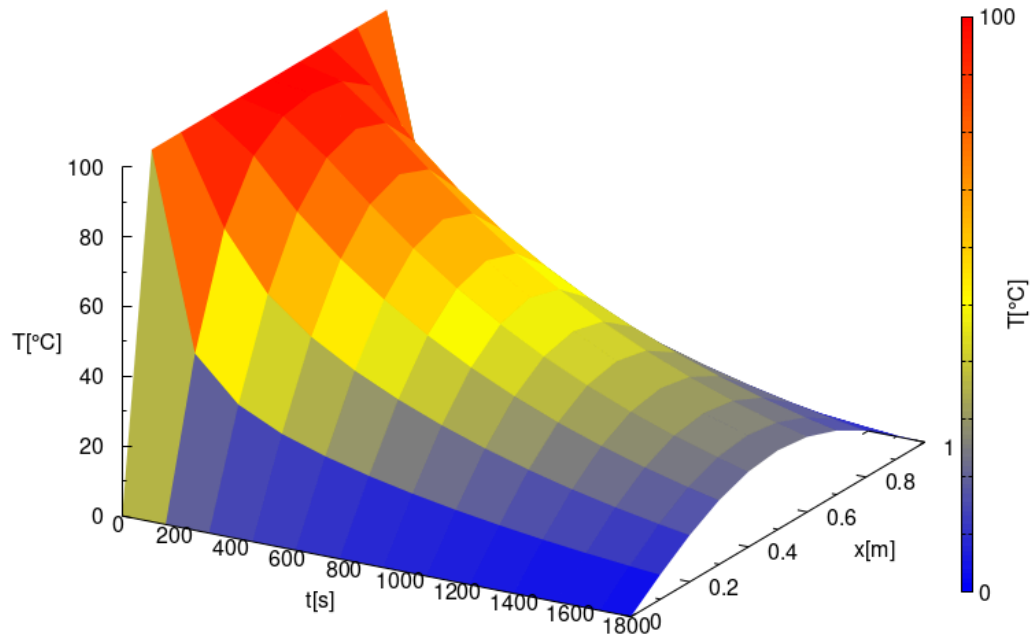


Isotermas evaluando cada 0.5s tomando 10 divisiones, aplicando el metodo implícito

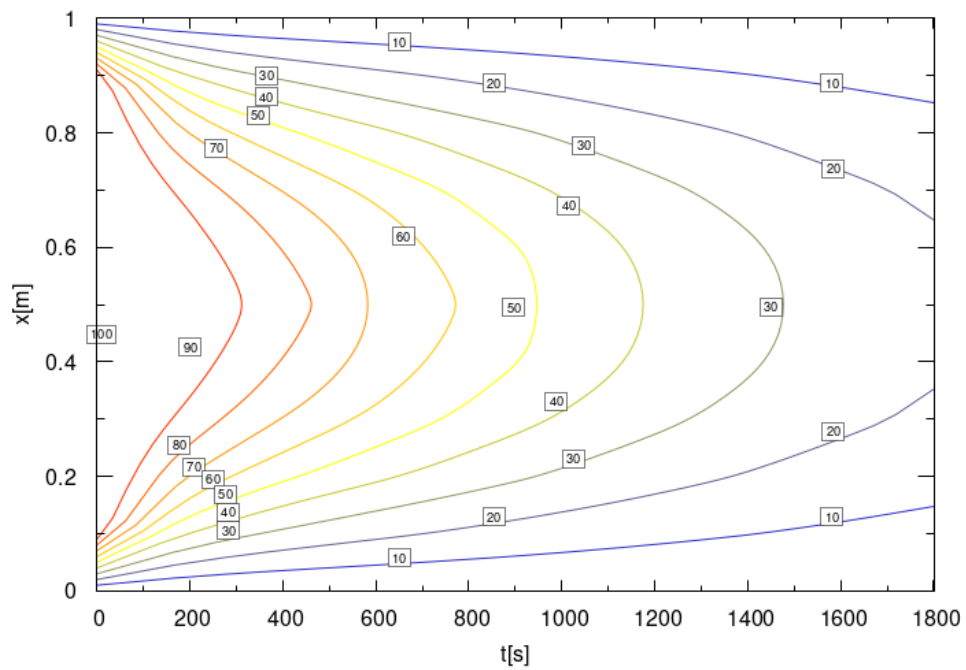


### iii) Método de Crank Nicolson

Evolucion del sistema cada 0.5s aplicando el metodo de Crank Nicolson



Isotermas evaluando cada 0.5s tomando 10 divisiones, aplicando el metodo de Crank Nicolson





Nuevamente, no se aprecian diferencias visuales claras entre los diferentes métodos; sin embargo, una revisión sobre el código y los errores indica que los métodos están siendo implementados correctamente con diferencias del orden de  $\sim 10^{-2}$ , dando a cada método valores distintos pero poco apreciables entre ellos.

**g) h)** Como en el código se implementaron los métodos de tal manera que son llamados a la vez en cada iteración, la comparación entre los distintos métodos se realizó posteriormente. Sin embargo, se puede calcular que para 180 s, implementando los tres métodos al mismo tiempo, el programa tarda  $\sim 10^{-3}$  s, y  $\sim 10^{-2}$  s para alcanzar los 1800 de simulación.

Analizando la eficiencia de cada método, partiendo de  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$  (dado que para valores superiores, el método explícito diverge) y buscando un error menor a  $10^{-4}$ , se llega a que para un mismo  $\Delta t$  el método explícito es el más veloz (con  $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ , el método explícito tarda  $\sim 2 \times 10^{-4}$  s mientras que CN tarda  $\sim 9 \times 10^{-4}$  s y el método implícito  $\sim 10^{-3}$  s). Sin embargo, requiere de un  $\Delta t$  de al menos  $5 \times 10^{-5}$  para alcanzar la cota del error deseada y es altamente inestable para  $\Delta t$  grandes.

Para el caso del método implícito con  $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$  ya asegura un error del orden de  $0.6 \times 10^{-4}$  en 0.6s; sin embargo, para  $\Delta t$  más grandes el error es mayor que la cota.

Por último, para el método de Crank Nicolson, con un  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$  ya se alcanza un error de  $0.5 \times 10^{-4}$  en  $8 \times 10^{-4}$  s

A continuación una tabla resumen de los tiempos de CPU y  $\Delta t$  necesarios para lograr un error relativo menor a  $10^{-4}$

Método	$\Delta t$ [s]	Tiempo de CPU [s]
Explícito	$5 \times 10^{-5}$	$\sim 10^{-3}$ s
Implícito	$5 \times 10^{-6}$	$\sim 0.6$ s
Crank-Nicolson	$5 \times 10^{-3}$	$\sim 8 \times 10^{-4}$ s

### Conclusión:

De los 3 métodos evaluados se puede ver que el método de Crank Nicolson es el segundo más veloz en tiempos de cómputo, que además cuenta con la ventaja que es

estable para todo valor de  $\Delta t$  por lo que permite pasos temporales mayores, reduciendo el tiempo de cómputo de simulaciones a tiempos largos. Mientras que si bien el método explícito es ligeramente el más veloz, es altamente inestable para  $\Delta t$  que no cumplan la relación de  $\eta < 0.5$ . Por otro lado, el método implícito, si bien es el más lento de los 3, tiene la ventaja de, al igual que el método de Crank Nicolson, ser estable para todo valor de  $\Delta t$ .

Por otro lado, un análisis de los errores en conjunto con una observación cualitativa entre los métodos arroja que no existen diferencias significativas entre los tres métodos, siempre y cuando se asegure la estabilidad del método explícito, arrojando resultados idénticos para  $\Delta t$  lo suficientemente pequeño (en este caso, del orden de  $5 \times 10^{-6}$ ).