TIPE

Amaury Briand

July 2024

1 Marche aléatoire isotrope dans Z^d

Définition : La marche aléatoire est récurrente si et seulement si elle revient pour sur à 0

Lemme : En notant $Y = |\{n \in N^* \mid S_n = 0\}|$, la marche est récurrente si et seulement si E(Y) = $+\infty$

Preuve : Supposons E(Y) = $+\infty$ alors S = 0 une infinité de fois donc la marche est récurrente

Réciproquement supposons la marche récurrente on dispose alors de n dans N* tel que $S_n = 0$

après la n-ième étape la marche est dans la même situation que à l'étape 0. Elle va donc nécessairement

revenir à 0 une nouvelle fois après n. La marche revient donc une infinité de fois à 0. D'où $\mid Y \mid = +\infty$

2 Cas en 1 dimension

$$P(S_{2n} = 0) = P\left(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0\right)$$
$$= \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\sim \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot (\frac{2n}{e})^{2n}}{(\sqrt{2\pi n} \cdot (\frac{n}{e})^n)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$
$$Or \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty$$

$$Donc \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_{2n} = 0) = +\infty$$

D'après le lemme établi précedemment, dans Z la marche aléatoire isotrope est récurrente

3 Cas en dimension 2 (à recopier en latex plus tard)