参考资料

两角和差正余弦公式的证明

北京四中数学组 皇甫力超

论文摘要：

本文对两角和差的正余弦公式的推导进行了探讨。 在单位圆的框架下 ， 我们得到了和角余弦公式 (方法 1) 与差角余弦公式 (方法 2)。在三角形的框架下 ， 我们得到了和角正弦公式 (方法 3 ~11) 与差角正弦公式 (方法 12,13)。

关键词：

两角和差的正余弦公式

正文：

两角和差的正余弦公式是三角学中很重要的一组公式。 下面我们就它们的推导证明方法进行探讨。

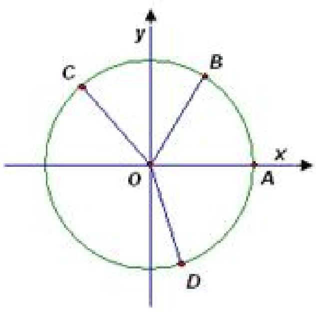
由角 α， β的三角函数值表示 $\alpha\pm\beta$的正弦或余弦值 ， 这正是两角和差的正余弦公式的功能。 换言之 ， 要推导两角和差的正余弦公式 ， 就是希望能得到一个等式或方程 ， 将 $\cos(\alpha\pm\beta)$ 或 $\sin(\alpha\pm\beta)$ 与 α， β的三角函数联系起来。

根据诱导公式 ， 由角 θ的三角函数可以得到 $-\theta$的三角函数。 因此 ， 由和角公式容易得到对应的差角公式 ， 也可以由差角公式得到对应的和角公式。 又因为 $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$，即原角的余弦等于其余角的正弦 ， 据此 ， 可以实现正弦公式和余弦公式的相互推导。 因此 ， 只要解决这组公式中的一个 ， 其余的公式将很容易得到。

（一） 在单位圆的框架下推导和差角余弦公式

注意到单位圆比较容易表示 α， β和 $\alpha\pm\beta$，而且角的终边与单位圆的交点坐标可以用三角函数值表示 ， 因此 ， 我们可以用单位圆来构造联系 $\cos(\alpha\pm\beta)$ 与 α， β的三角函数值的等式。

1. 和角余弦公式



(方法 1) 如图所示，在直角坐标系 xOy 中作单位圆 O，并作角 α， β和 $-\beta$，使角 α 的始边为 Ox，交 $\odot O$ 于点 A，终边交 $\odot O$ 于点 B；角 β始边为 OB，终边交 $\odot O$ 于点 C；角 $-\beta$始边为 Ox，终边交 $\odot O$ 于点。从而点 A，B，C和 D的坐标分别为 $A(1,0)$， $B(\cos\alpha,\sin\alpha)$， $C(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$， $D(\cos\beta,-\sin\beta)$ 。

由两点间距离公式得

$AC^2=(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha+\beta)=2-2\cos(\alpha+\beta)$；

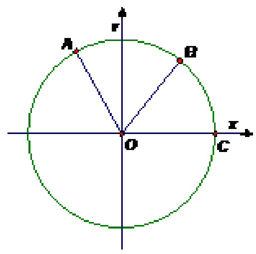
$BD^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(-\sin\beta-\sin\alpha)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$。

注意到 $AC=BD$，因此$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

注记：这是教材上给出的经典证法。它借助单位圆的框架，利用平面内两点间距离公式表达两条相等线段，从而得到我们所要的等式。注意，公式中的 α 和 β 为任意角。

2. 差角余弦公式

仍然在单位圆的框架下，用平面内两点间距离公式和余弦定理表达同一线段，也可以得到我们希望的三角等式。这就是



（方法2）如图所示，在坐标系 xOy 中作单位圆 O，并作角 α 和 β，使角 α 和 β 的始边均为 Ox，交 ⊙O 于点 C，角 α 终边交 ⊙O 于点 A，角 β 终边交 ⊙O 于点。从而点 A，B的坐标为 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$。

由两点间距离公式得

$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$。

由余弦定理得

$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$。

从而有 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

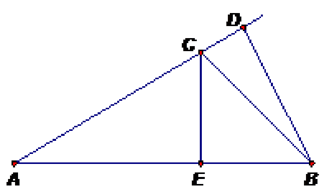
注记：方法 2 中用到了余弦定理，它依赖于 $\angle AOB$ 是三角形的内角。因此，还需要补充讨论角 α 和 β 的终边共线，以及 $\angle AOB$ 大于 π 的情形。容易验证，公式在以上情形中依然成立。

在上边的证明中，用余弦定理计算 AB^2 的过程也可以用勾股定理来进行。

（二）在三角形的框架下推导和差角正弦公式

除了在单位圆的框架下推导和差角的余弦公式，还可以在三角形中构造和角或差角来证明和差角的正弦公式。

1. 和角正弦公式（一）



(方法3) 如图所示，BD 为 ΔABC 的 AC 边上的高 ，CE 为 AB 边上的高。设 $AC=b$，$\angle CAB=\alpha$，$\angle CBA=\beta$，则。从而有

$AE=b\cos\alpha$，$CE=b\sin\alpha$，

$BE=CE\cot\beta=b\sin\alpha\cot\beta$，

$BC=CE\csc\beta=b\sin\alpha\csc\beta$。

因此 $AB=AE+BE=b(\cos\alpha+\sin\alpha\cot\beta)$，

$BD=AB\sin\alpha=b(\cos\alpha+\sin\alpha\cot\beta)\sin\alpha$。

注意到 $BD=BC\sin(\alpha+\beta)=b\sin\alpha\csc\beta\sin(\alpha+\beta)$，

从而有

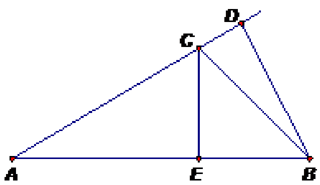
$$(\cos\alpha+\sin\alpha\cot\beta)\sin\alpha=\sin\alpha\csc\beta\sin(\alpha+\beta),$$

整理可得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta。$$

注记：在方法 3 中 ，用 AC 和与底角 α，β 相关的三角函数，从两个角度来表示 AC 边上高 BD，从而得到所希望的等式关系。 这一证明所用的图形是基于钝角三角形的 ，对基于直角或锐角三角形的情形 ，证明过程类似。

利用方法 3 中的图形 ，我们用类似于恒等变形的方式 ，可以得到下面的

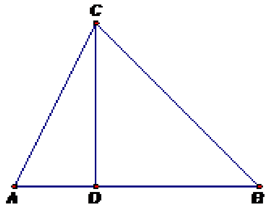


(方法 4) 如图所示，BD 为 ΔABC 的 AC 边上的高 ，CE 为 AB 边上的高。 设 $\angle CAB=\alpha$，$\angle CBA=\beta$，则 $\angle DCB=\alpha+\beta$。

注意到 $\Delta ACE \sim \Delta ABD$，则有 $\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{AD}{BD}$，即。

从而有 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{AE+BE}{AB}\cdot\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{AE\cdot BD}{AB\cdot BC}+\dfrac{BE\cdot BD}{AB\cdot BC}=\dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{CE}{BC}+\dfrac{BD}{AB}\cdot\dfrac{BE}{BC}$
$=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$。

利用正弦定理和射影定理 ，将得到下面这个非常简洁的证法。 注意证明利用的图形框架与方法 3,4 所用的图形框架是相同的。



(方法 5）如图所示，CD为 ΔABC的 AB边上的高。 设 $\angle CAB=\alpha$，$\angle CBA=\beta$，则有 $\angle ACB=\pi-(\alpha+\beta)$,。 由正弦定理可得

$$\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)}=d,$$

其中 d为 ΔABC的外接圆直径。

由 $AB=AC\cos\alpha+BC\cos\beta$得

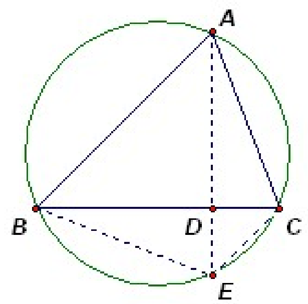
$$d\sin(\alpha+\beta)=d\sin\beta\cdot\cos\alpha+d\sin\alpha\cdot\cos\beta,$$

从而有

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta。$$

2. 和角正弦公式（二）

方法 3,4 和 5 利用的图形框架是将角 α，β放在三角形的两个底角上。 如果将这两个角的和作为三角形的一个内角，将会有下面的几种证法（方法 6~11)。

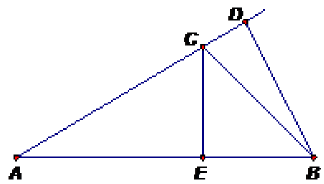


(方法 6）如图所示，作 $AE\perp BC$于D，交 ΔABC外接圆于 E，连 BE和CE。 设$\angle BAE=\alpha$，$\angle CAE=\beta$，则$\angle BCE=\alpha$，$\angle CBE=\beta$，$\angle BAC=\alpha+\beta$ 。

设 ΔABC的外接圆直径为 d，则有，$BE=d\sin\alpha$ $BD=BE\cos\beta=d\sin\alpha\cos\beta$，$CE=d\sin\beta$，$CD=CE\cos\alpha=d\sin\beta\cos\alpha$。

所以有$BC=BD+CD=d(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$。

注意到 $BC=d\sin(\alpha+\beta)$，从而$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。



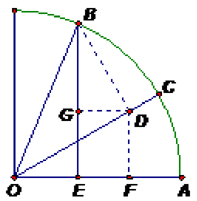
(方法 7）如图所示，BD为 ΔABC的 AC边上的高，CE为 AB边上的高。设 $\angle ACE=\alpha$，$\angle BCE=\beta$，则$\angle ACB=\alpha+\beta$。 设 $CE=h$，则

$AE=h\tan\alpha$，$BE=h\tan\beta$，$BC=h\sec\beta$，$AB=AE+BE=h(\tan\alpha+\tan\beta)$，
$BD=AB\sin A=AB\cos\alpha=h(\tan\alpha+\tan\beta)\cos\alpha$。

又 $BD = BC\sin(\alpha+\beta) = h\sec\beta\sin(\alpha+\beta)$

从而 $(\tan\alpha+\tan\beta)\cos\alpha = \sec\beta\sin(\alpha+\beta)$。

整理可得 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 。



（方法 8）如图所示，作 $BD\perp OC$ 于D，过 D作 $DF\perp OA$ 于 F，$DG\perp BE$ 于G。设 $\angle AOC=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，则 $\angle AOB=\alpha+\beta$，设 $OA=r$，从而 $BD=r\sin\beta$，$OD=r\cos\beta$，$BG=BD\cos\alpha=r\sin\beta\cos\alpha$，$GE=DF=OD\sin\alpha=r\cos\beta\sin\alpha$。

所以 $BE=BG+GE=r(\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha)$。

注意到 $BE=r\sin(\alpha+\beta)$，则有

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta 。$$

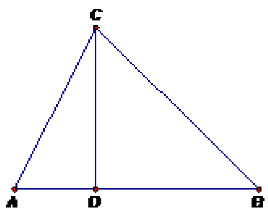
注记：我们用两种不同的方法计算 BE，得到了和角的正弦公式。如果我们用两种方法来计算 OE，则可以得到和角的余弦公式。由上图可得

$$OF=OD\cos\alpha=r\cos\beta\cos\alpha,$$

$$EF=GD=BD\sin\alpha=r\sin\beta\sin\alpha,$$

从而有 $OE=OF-EF=r(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$。注意到 $OE=r\cos(\alpha+\beta)$，从而可得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

方法 6,7 和 8 都是用角 α，β 的三角函数从两个角度表示图形中的同一线段，从而构造出我们所希望的等式关系。



（方法 9）如图所示，设 CD 为 ΔABC 的 AB 边上的高。设 $\angle CAB=\alpha$，$\angle CBA=\beta$，$AC=b$，$BC=a$，从而有

$$AD = b\cos\alpha\text{，}BD = a\cos\beta$$

$$CD = b\sin\alpha = a\sin\beta$$

因此 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle DBC}$

$$= \frac{1}{2}AD \cdot CD + \frac{1}{2}BD \cdot CD$$

$$= \frac{1}{2}b\cos\alpha \cdot a\sin\beta + \frac{1}{2}a\cos\beta \cdot b\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}ab(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

又因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC\sin\angle ACB = \frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta)$

从而可得

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

方法 9 利用面积关系构造三角恒等式。下面这两个证法的思路则有所不同。

$$AB = d\cos\beta\text{，}BC = d\sin\beta$$

$$CD = d\sin\alpha\text{，}DA = d\cos\alpha$$

$$BD = d\sin(\alpha+\beta)$$

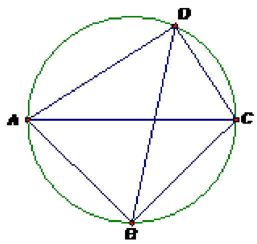
由托勒密定理知

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

即 $d \cdot d\sin(\alpha+\beta) = d\cos\beta \cdot d\sin\alpha + d\cos\alpha \cdot d\sin\beta$

整理即得

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



（方法 10）如图所示，设 AC 为 ΔABC 的外接圆直径d，长度为d。设 $\angle CAD = \alpha$，$\angle BAC = \beta$，则 $\angle DAB = \alpha + \beta$，从而

$$AB = d\cos\beta \text{，} BC = d\sin\beta$$

$$CD = d\sin\alpha \text{，} DA = d\cos\alpha$$

$$BD = d\sin(\alpha+\beta)$$

由托勒密定理知

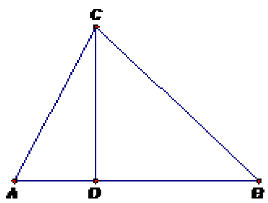
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

即 $$d \cdot d\sin(\alpha+\beta) = d\cos\beta \cdot d\sin\alpha + d\cos\alpha \cdot d\sin\beta$$

整理即得

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

注记：这一证明用到了托勒密定理：若 AC 和 BD 是圆内接四边形的对角线，则有 $d \cdot d\sin(\alpha+\beta) = d\cos\beta \cdot d\sin\alpha + d\cos\alpha \cdot d\sin\beta$。



（方法 11）如图所示，CD 为 ΔABC 的 AB 边上的高。设 $\angle ACD = \alpha$，$\angle BCD = \beta$，则 $\angle ACB = \alpha+\beta$。设 $CD = h$，则

$$AB = AD + BD = h(\tan\alpha + \tan\beta)$$

$$AC = h\sec\alpha \text{，} BC = h\sec\beta$$

由正弦定理可得

$$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$

即 $$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AC}{\cos\beta} = \frac{BC}{\cos\alpha}$$

从而 $$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AC+BC}{\cos\beta+\cos\alpha}$$

即 $$\frac{h(\tan\alpha+\tan\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{h(\sec\alpha+\sec\beta)}{\cos\beta+\cos\alpha}$$

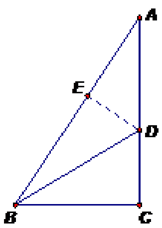
整理即得

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

方法 10 和 11 将某一线段作为基本量，利用与角 α，β 相关的三角函数表示其它线段，再通过联系这些线段的几何定理（托勒密定理或正弦定理），构造出我们希望的等式关系。

3. 差角正弦公式

仍然还是在三角形中，我们可以在三角形的内角里构造出差角来。方法 12 和 13 便是用这种想法来证明的。



（方法 12）如图所示，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$。设 $\angle ABC=\alpha$，$\angle DBC=\beta$，记 $BD=b$，作 $DE\perp AB$ 于 E，则 $\angle ABD=\alpha-\beta$，$\angle ADE=\alpha$，从而有

$$CD=b\sin\beta\text{；}DE=b\sin(\alpha-\beta)$$

$$DA=DE\sec\alpha=b\sin(\alpha-\beta)\sec\alpha$$

因此有

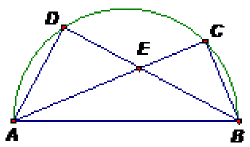
$$AC=CD+DA=b(\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)\sec\alpha)$$

注意到

$$BC=b\cos\beta\text{；}AC=BC\tan\alpha=b\cos\beta\tan\alpha$$

从而 $$\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)\sec\alpha=\cos\beta\tan\alpha$$

整理可得 $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$



（方法 13）如图所示，AB 为 ΔABC 的外接圆直径，长度为 d。设 $\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，则 $\angle CBD=\beta$，$\angle CAB=\alpha-\beta$。从而

$AD = d\cos\alpha$, $BD = d\sin\alpha$

$BC = d\sin(\alpha-\beta)$, $AC = d\cos(\alpha-\beta)$

$$DE = AD\tan\beta = d\cos\alpha\tan\beta$$

$$BE = BC\sec\beta = d\sin(\alpha-\beta)\sec\beta$$

所以

$$BD = BE + DE = d(\sin(\alpha-\beta)\sec\beta + \cos\alpha\tan\beta)$$

注意到 $BD = d\sin\alpha$，从而

$$\sin\alpha = \sin(\alpha-\beta)\sec\beta + \cos\alpha\tan\beta$$

整理可得

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

方法 12 和 13 的基本思路仍然是用两种不同方法计算同一线段， 借此来构造等式关系。

很显然， 在这十二种证法中， 方法 1 和 2 更具普遍性。 换言之， 这两种方法中出现的角 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是任意角。 而其余方法中， 角 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 则有一定的限制， 它们都是三角形的内角（ 甚至都是锐角 ）。 因此， 对于方法 3~13，我们需要将我们的结果推广到角 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是任意角的情形。 具体而言， 我们要证明：如果公式对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 成立， 则对任意角也成立。

容易验证， 角 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个是轴上角（ 即终边在坐标轴上的角 ），我们的公式是成立的。 下面证明， 角 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都是象限角（ 即终边在坐标系的某一象限中的角 ） 时， 我们的公式也成立。 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为第二象限角， $\boldsymbol{\beta}$ 为第三象限角， 从而有

$$\alpha = 2m\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha_1,\ 0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2},\ m\in Z;$$

$$\beta = (2n+1)\pi + \beta_1,\ 0 < \beta_1 < \frac{\pi}{2},\ n\in Z$$

因此有

$$\sin\alpha = \cos\alpha_1,\ \cos\alpha = -\sin\alpha_1,$$

$$\sin\beta = -\sin\beta_1,\ \cos\beta = -\cos\beta_1$$

从而

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[(2m\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha_1)+((2n+1)\pi+\beta_1)]$$

$$=\sin[(2m+2n+\frac{3}{2})\pi+(\alpha_1+\beta_1)]$$

$$=-\cos(\alpha_1+\beta_1)$$

$$=-\cos\alpha_1\cos\beta_1+\sin\alpha_1\sin\beta_1$$

$$=\cos\alpha_1(-\cos\beta_1)+(-\sin\alpha_1)(-\sin\beta_1)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

同理可证，公式对于象限角 α 和 β 的其它组合方式都成立。因此，我们可以将方法 3~13 推导的公式推广到角 α，β 是任意角的情形。

两角和差的正余弦公式是三角学中很基本的一组公式。其推导证明对指导学生进行探究性学习很有帮助。从上文中可以看到，这一探究过程可分为四个步骤：

(1) 明确推导证明的目标：构造联系 α 和 β 三角函数与 $\cos(\alpha\pm\beta)$ 或 $\sin(\alpha\pm\beta)$ 的等式或方程；

(2) 简化课题：四个公式只要解决一个，其余的都可由它推出；

(3) 解决问题：利用单位圆或三角形作为联系 α 和 β 三角函数与 $\cos(\alpha\pm\beta)$ 或 $\sin(\alpha\pm\beta)$ 的工具，寻找我们希望的等式关系；

(4) 完善解决问题的方法：考察方法是否有普遍性。如果普遍性有欠缺，可考虑将其化归为已解决的情形，必要时还要进行分类讨论。

参考文献：

1. 谷丹：全面数学教育观与知识形成过程的教学——三个教学个案及分析，《开放的视野，务实的努力》，中央民族大学出版社，2006 年 3 月第 27 ~32 页。

2. 人民教育出版社中学数学室：全日制普通高级中学教科书 << 数学（第一册下）>>（必修），人民教育出版社，2003 年 12 月第 34 ~ 35 页。

【返回参考资料列表】