CÁLCULO III

- Massas e momentos em três dimensões

Prof. Alex Lima

Massas

- Se $\delta(x, y, z)$ é a densidade de um objeto que ocupa uma região D no espaço (massa por unidade de volume), a integral sobre essa região nos dará a **massa do objeto**.

$$M = \iiint\limits_{D} \delta(x, y, z)dV$$

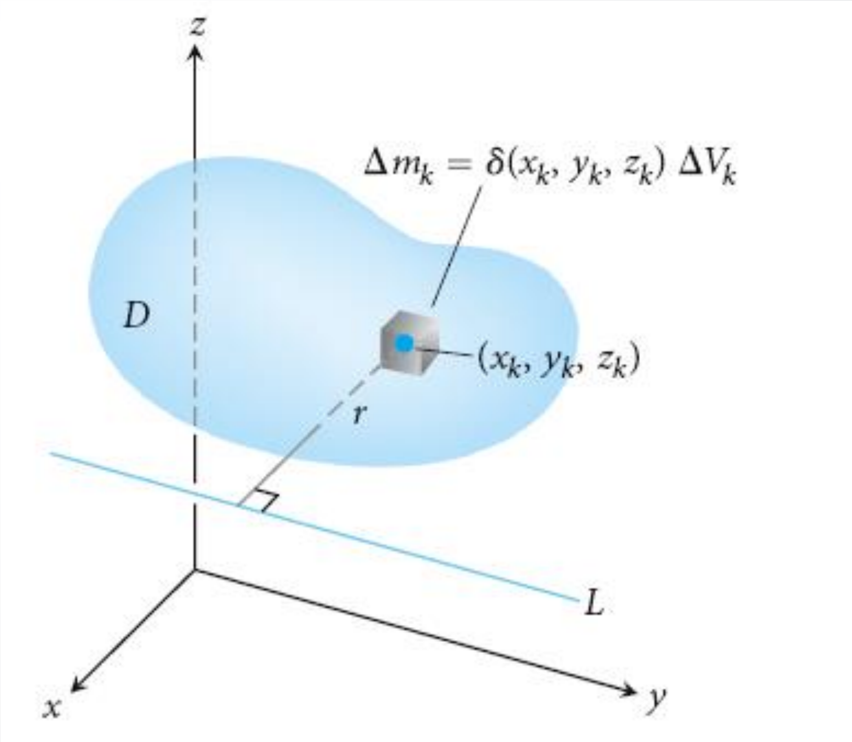

Figura 1

Momentos

- Se $\mathrm{r}(x, y, z)$ é a distância do ponto (x, y, z) em D a uma reta L, então o momento de inércia da massa em relação a L do objeto é

$$I_L = \iiint_D r^2 \delta dV$$

Momentos

- Podemos usar a Figura 2 para encontrar as distâncias de dV ao planos e eixos coordenados

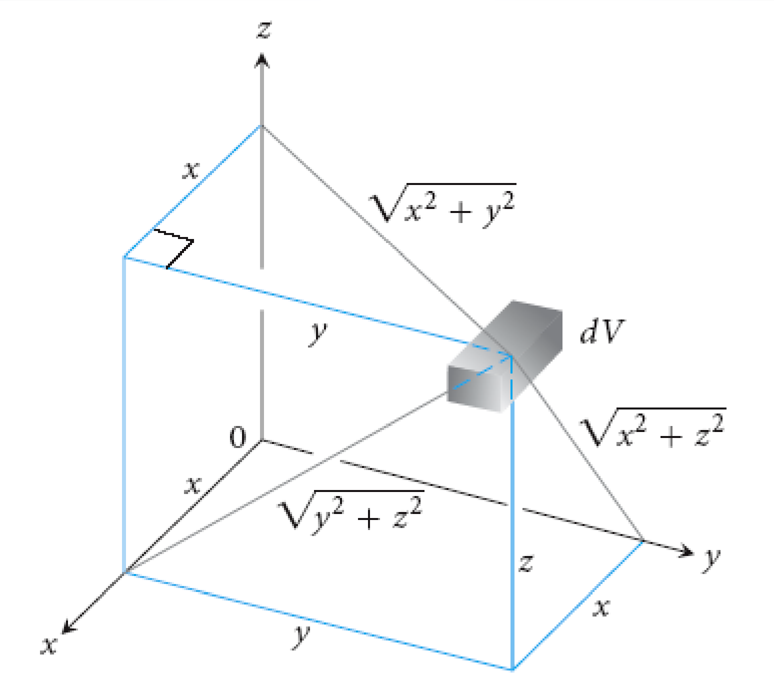

Figura 2

Massas e momentos em três dimensões

Massa: $M = \iiint_D \delta \, dV \qquad (\delta = \delta(x, y, z) = \text{densidade})$

Primeiros momentos em relação aos planos coordenados:

$$M_{yz} = \iiint_D x\,\delta \, dV, \qquad M_{xz} = \iiint_D y\,\delta \, dV, \qquad M_{xy} = \iiint_D z\,\delta \, dV$$

Centro de massa:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Momentos de inércia (segundos momentos) em relação aos eixos coordenados:

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2)\,\delta \, dV$$

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2)\,\delta \, dV$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\delta \, dV$$

Momentos de inércia em relação a uma reta L:

$I_L = \iiint r^2 \,\delta \, dV$ ($r(x, y, z)$ = distância do ponto (x, y, z) à reta L)

Raio de rotação em relação a uma reta L:

$$R_L = \sqrt{I_L / M}$$

Massa: $M = \iiint\limits_D \delta \, dV \qquad (\delta = \delta(x, y, z) = \text{densidade})$

Primeiros momentos em relação aos planos coordenados:

$$M_{yz} = \iiint\limits_D x\,\delta\,dV, \qquad M_{xz} = \iiint\limits_D y\,\delta\,dV, \qquad M_{xy} = \iiint\limits_D z\,\delta\,dV$$

Centro de massa:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Momentos de inércia (segundos momentos) em relação aos eixos coordenados:

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2)\,\delta\,dV$$

$$I_y = \iiint (x^2 + z^2)\,\delta\,dV$$

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\delta\,dV$$

Momentos de inércia em relação a uma reta L:

$I_L = \iiint r^2\,\delta\,dV$ ($r(x, y, z)$ = distância do ponto (x, y, z) à reta L)

Raio de rotação em relação a uma reta L:

$$R_L = \sqrt{I_L/M}$$

Massas e momentos em três dimensões

- Exemplo 01

Encontre o centro de massa de um sólido de densidade constante limitado abaixo pelo disco R: $x^2 + y^2 \leq 4$ no plano $z = 0$ e acima pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ (Figura 15.34).

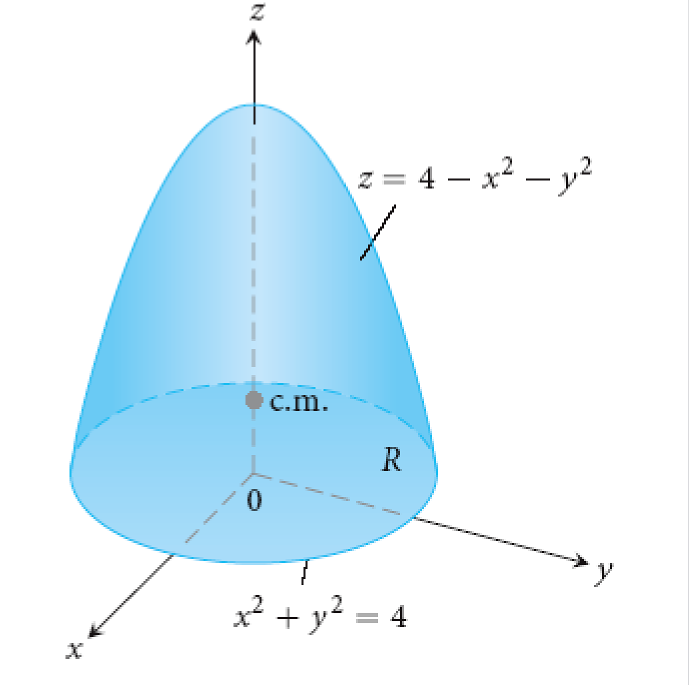

Figura 3

Massas e momentos em três dimensões

- Exemplo 02

Encontre I_x, I_y e I_z para o sólido retangular de densidade constante mostrado na Figura 4.

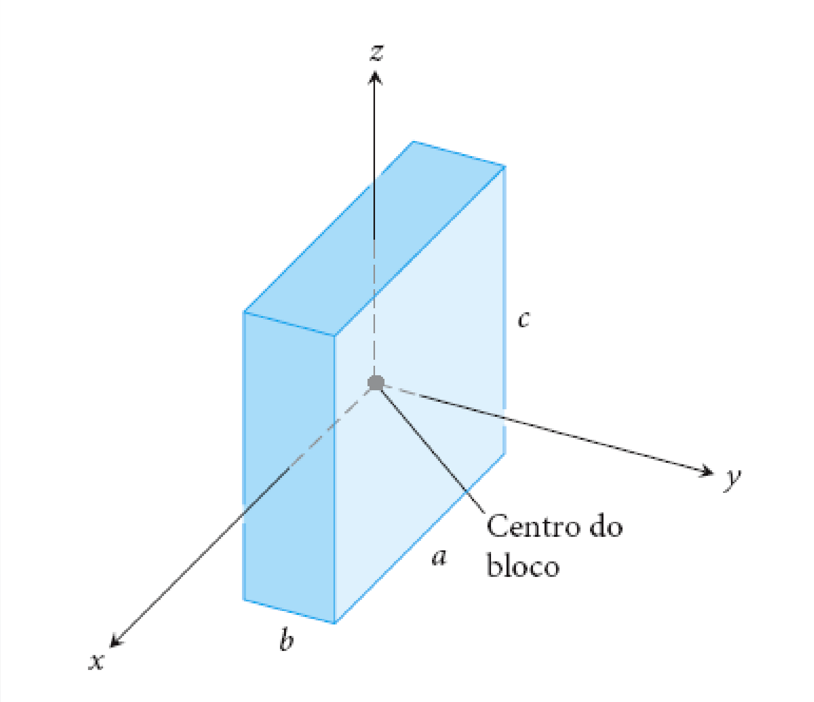

Figura 4

Sugestão de atividades

- Exercícios 15.5 do livro Thomas
  - Questões 1 a 20