Rappels mathématiques

Espace vectoriel, espace affine, matrices, espace projectif

Christian Nguyen

Département d'informatique
Université de Toulon

Introduction

Informatique : définition algébrique des objets mathématiques.
$\hookrightarrow$ Infographie : nature duale plutôt qu'aspect géométrique.

$\Rightarrow$ constituer un ensemble d'équations concises d'algèbre linéaire.
$\Rightarrow$ notations raccourcies des formes algébriques équivalentes : opérations vectorielles ou matricielles

Objets manipulés principalement, à l'échelle "atomique" : points et vecteurs.

Les points

Wikipédia

Toutes les figures du plan et de l'espace sont constituées d'ensemble de points.

Le plus petit élément constitutif de l'espace géométrique.

Seule caractéristique : sa *position* (pas de dimension, longueur, largeur, épaisseur, volume ou aire).

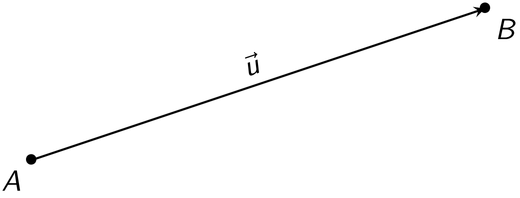
La notion de repère[1] permet de positionner tout point par ses coordonnées cartésiennes, et d'associer à tout point A, le vecteur OA.

On ramène ainsi les problèmes de géométrie à la résolution d'équations algébriques.

1. Descartes, Fermat

Dans un espace *affine* E associé à l'espace *vectoriel* V, les éléments de E sont appelés les *points* et les éléments de V sont appelés les *vecteurs*.

À chaque couple de points (A, B), on associe un vecteur $\phi(A, B) = \vec{u}$.



La notion d'espace à trois dimensions se représente assez naturellement et les physiciens en ajoutent même une quatrième, le temps.

Lorsque l'on doit représenter cet espace, on passe généralement à deux dimensions, par le dessin dans le plan.

De même, la représentation d'une force par un vecteur semble tout aussi naturelle et facilite la compréhension du concept.

Motivation : donner cette structure à certains ensembles qui ne l'ont pas naturellement.

Un corps commutatif est un *ensemble* avec deux lois internes (appelées addition et multiplication).

L'addition est associative, commutative, a un élément neutre, et tout élement doit avoir un symétrique.

La multiplication doit aussi être associative, commutative (car c'est un corps commutatif), avec un élément neutre, et tout élément doit avoir un symétrique (sauf 0, car $1/0$ n'est pas défini).

De plus, la multiplication doit être distributive par rapport à l'addition.

Exemples de corps : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ...

Un espace vectoriel E est un ensemble d'éléments, dénommés vecteurs (exemple $v = (1, 3)$), possédant un ensemble de propriétés axiomatiques.

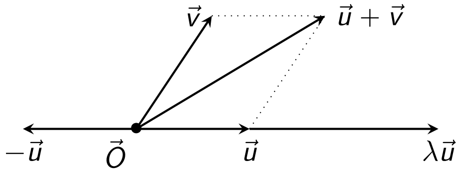
$(E, +)$ est un groupe abélien :

- $+$ est une loi commutative et associative,
- un élément neutre, noté 0, appelé vecteur nul,
- tout vecteur v a un opposé, noté $-v$.

Soit K un corps commutatif, les éléments du corps K sont appelés des *scalaires* (exemple $i = 12, 7$).

$(E, +, \bullet)$ est un K-*espace vectoriel* :

- $+$ est une loi de composition interne,
- $\bullet$ est une loi de composition externe à opérateurs dans K.



La loi $\bullet$ vérifie les propriétés suivantes :

1. distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :
   $\forall \lambda \in K,\ \forall (u,v) \in E \times E,\quad \lambda.(u+v) = (\lambda.u) + (\lambda.v)$
2. distributivité par rapport à l'addition des scalaires :
   $\forall (\lambda,\mu) \in K \times K,\ \forall u \in E,\quad (\lambda+\mu).u = (\lambda.u) + (\mu.u)$
3. associativité : $\forall (\lambda,\mu) \in K \times K,\ \forall u \in E,\quad \lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$
4. élement neutre : $\forall u \in E,\quad 1.u = u$

A noter que les éléments obtenus sont tous dans E.

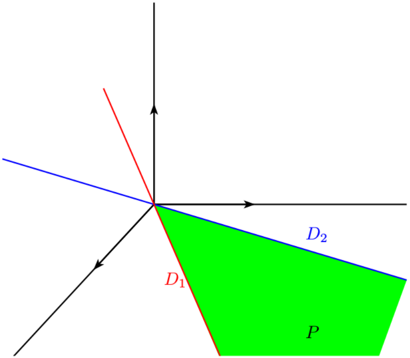
Il est fastidieux de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Un moyen plus commode de le faire est de se placer dans un espace vectoriel plus grand.

On hérite des propriétés de bon comportement des opérations, il n'y a plus qu'à montrer les stabilités, ce qui est beaucoup plus rapide. C'est la notion de *sous-espace vectoriel*.

Soit E un K-espace vectoriel, et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $0_E \in F$,
- F est stable par $+$: $\forall u, u' \in F, \quad u + u' \in F$
- F est stable par $\bullet$: $\forall \lambda \in K, \ \forall u \in F, \quad \lambda . u \in F$

Soit $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est un espace vectoriel.



- D_1 et D_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$,
- $D_1 \cup D_2$ n'est pas un espace vectoriel (non stable par $+$),
- P n'est pas un sous-espace vectoriel (non stable par $+$).

Construction fondamentale puisqu'elle fait intervenir les deux lois de composition de l'espace :

- l'addition de deux vecteurs,
- la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

$$u := \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$$

Utilisation des opérateurs ensemblistes sur la structure d'espace vectoriel.

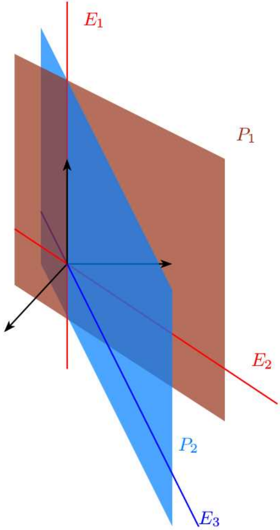
Si E et F sont des espaces vectoriels, alors $E \cap F$ est un espace vectoriel.

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E, l'ensemble de tous les éléments $u + v, u \in F, v \in G$, est un sous-espace vectoriel de E :

$$F + G = \{w \in E, \exists u \in F, \exists v \in G / w = u + v\}$$

Le sous-espace vectoriel $F + G$ de E est le sous-espace vectoriel de E *engendré par* $F \cup G$, c'est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G.

Si $F \cap G = \{0\}$, on parle de somme directe, notée $F \oplus G$.



On a : $\begin{cases} E_1 \oplus E_2 = P_1 \\ E_1 \oplus E_3 = P_2 \\ P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3 \\ P_1 \oplus E_3 = \mathbb{R}^3 \end{cases}$

On peut donc construire un espace vectoriel à l'aide de sommes de sous-espaces, mais aussi en prenant l'espace engendré par une famille idoine.

Une famille *génératrice* est une famille de vecteurs dont les combinaisons linéaires permettent de construire tous les autres vecteurs de l'espace.

On aimerait pouvoir le faire avec une famille aussi petite que possible. On dit ainsi qu'une famille est liée, si tous ses éléments ne sont pas indispensables. Sinon, à l'inverse, on dira qu'elle est libre.

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est dite *libre* si aucun vecteur de la famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Une famille libre et génératrice est appelée *base* du sous-espace F.

Si cette base est finie, son cardinal est appelé *dimension* de l'espace vectoriel F.
Remarque : certains espaces sont de dimension infinie, comme les espaces de fonctions (toute fonction n'est pas exprimable comme une somme finie d'autres fonctions).

Une base permet de construire *tous* les vecteurs de l'espace à l'aide de combinaisons linéaires des vecteurs de la base.

- Le vecteur directeur d'une droite est la base de cette droite.
- Deux vecteurs non colinéaires d'un plan forment une base de ce plan.
- Trois vecteurs non colinéaires d'un plan forment une famille génératrice du plan (mais pas une base car ils ne sont pas libres).
- Trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace (souvent notée i, j, k).
- Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
- Quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont forcément liés.

Codées sur 3 octets, chaque octet correspondant à l'intensité de chacune des couleurs fondamentales en synthèse additive (codage RVB).

En notant E l'espace des couleurs et R, V, B les couleurs rouge, vert et bleu respectivement, la couleur jaune est obtenue par la *combinaison linéaire*.

$$J = 255R + 255V + 0B.$$

$\{R, V, B\}$ forment une famille *génératrice* de E puisqu'elles permettent de construire *toutes* les autres et *libre* puisqu'*aucune* d'entre elles ne peut s'obtenir comme combinaison linéaire des deux autres.

Dans les espaces vectoriels « génériques » de dimension finie, on défnit la *base canonique* (implicite) dont les vecteurs sont notés e_i .

Pour chaque vecteur e_i, une seule coordonnée n'est pas nulle et vaut 1. Le i représente la position du 1 dans les coordonnées du vecteur.

Les vecteurs e_1, e_2, e_3 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ valent respectivement $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

Lorsqu'on ne précise pas la base, on utilise la base canonique.

Une *application linéaire* est un morphisme d'espaces vectoriels i.e une application qui ne bouleverse pas ces structures.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et φ une application de E dans F. Pour que φ soit une application linéaire, elle doit respecter :

- la structure additive : soient deux vecteurs u et v, $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
- la structure multiplicative : soit un vecteur u et un scalaire λ, $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$.

Ce que l'on peut résumer ainsi : pour toute combinaison linéaire $k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$ de vecteurs de E on a :

$$\varphi(k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n) = k_1 \varphi(v_1) + \ldots.. + k_n \varphi(v_n)$$

En particulier si on écrit un vecteur v dans sa base, $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n$, on a :

$$\varphi(v) = x_1 \varphi(b_1) + x_2 \varphi(b_2) + \cdots + x_n \varphi(b_n)$$

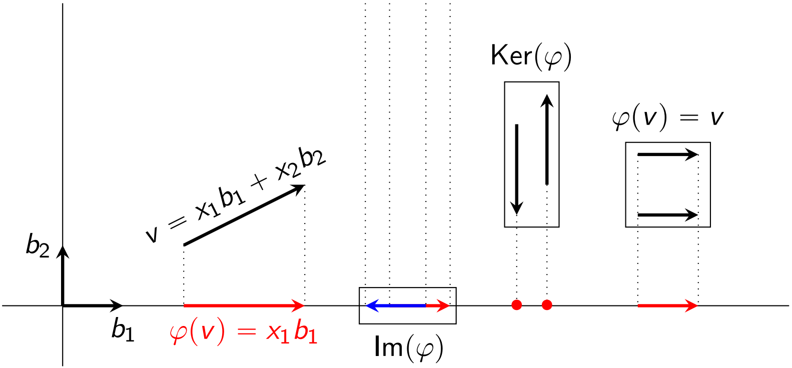
$\Rightarrow$ il suffit de connaître $\varphi(b_1), \varphi(b_2), \ldots, \varphi(b_n)$ pour calculer $\varphi(v)$ et connaître φ.

Questions : dans $\mathbb{R}$, $\varphi : x \rightarrow 3x$ est-elle linéaire ? et $\varphi : x \rightarrow 3x + 2$?

Propriétés des applications linéaires

- $\varphi(0_E) = 0_F$ (car $\varphi(0_E) = \varphi(v - v) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0_F$),
- $\mathrm{Im}(\varphi)$, l'ensemble de toutes les images des éléments de E par φ, est un sous espace vectoriel de F,
- $\mathrm{Ker}(\varphi)$, l'ensemble des vecteurs de E qui on pour image 0_F, est un sous espace vectoriel de E,
- l'ensemble des vecteurs v de E tels que $\varphi(v) = kv$ (avec k donné) est un sous espace vectoriel de E (en particulier c'est le cas des invariants de E qui sont tels que $\varphi(v) = v$).

Exemple de la projection φ du plan E de base (b_1, b_2) sur la droite F de base $(b1)$ parallèlement à $(b2)$



Lien entre calcul matriciel et application linéaire φ :

- soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies respectives $p > 0$ et $n > 0$ et de bases respectives e et f,
- soit φ une application linéaire de E dans F,

on appelle *matrice représentative* de φ dans les bases e et f la matrice (α_{ij}) déterminée par

$$\forall j \in \{1, \ldots, p\}, \quad \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i.$$

Exemple, transformation d'une image en niveaux de gris :

$$\begin{pmatrix} g_r \\ g_v \\ g_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ 0,299 & 0,587 & 0,114 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ v \\ b \end{pmatrix} \quad (1)$$

En informatique :

- implantation des applications linéaires : sous forme matricielle,
- transposition de la structure matricielle : la structure de tableau.

Deux transformations élémentaires : les *translations* (loi additive interne) et les *homothéties* (loi multiplicative externe).

Soit E un K-espace vectoriel et v un vecteur de E. On appelle *translation de vecteur v*, l'application $t_v : E \to E$ définie par

$$t_v(u) = u + v.$$

Soit E un K-espace vectoriel et λ un scalaire de K. On appelle *homothétie de rapport λ*, l'application $h_\lambda : E \to E$ définie par

$$h_\lambda(u) = \lambda u.$$

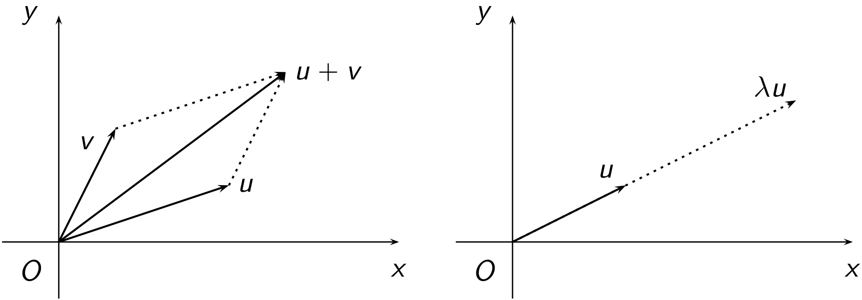


FIGURE – À gauche : translation de vecteur v. À droite : homothétie de rapport λ

L'application t_v est-elle une application linéaire ? Exemple dans le plan euclidien à deux dimensions :

$$\begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & ? & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \tag{2}$$

L'application h_λ est une application linéaire, exemple :

$$\begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \tag{3}$$

La structure d'espace vectoriel est le support de base pour faire de la géométrie.

Deux notions supplémentaires pour manipuler les objets du plan : distance et angle, toutes deux obtenues grâce au *produit scalaire*.

On appelle *produit scalaire* l'application $\phi : K^n \times K^n \to K$ définie dans une base orthonormée par

$$\phi(u, v) := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \tag{4}$$

avec $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

On note souvent $(u \,|\, v)$ le nombre réel $\phi(u, v)$.

Un produit scalaire permet de définir une *norme* puis une *distance* dites *induites*. Si u et v désignent deux vecteurs du plan,

$$\|u\| := \sqrt{(u \mid u)} \quad \text{et} \quad d(u, v) := \|v - u\|. \tag{5}$$

la norme et la distance ainsi définies sont la norme et la distance *euclidiennes*.

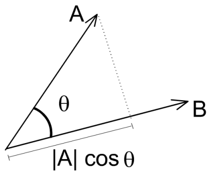
Un vecteur est dit *normé* ou *unitaire* si $\|u\| = 1$.

Deux vecteurs u et v sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul, autrement dit si $(u \mid v) = 0$.

Ils sont *orthonormés* s'ils sont orthogonaux et si chacun des vecteurs est normé.

Soient u et v deux vecteurs non nuls du plan euclidien, alors :

$$(u \mid v) = \|u\|\|v\| \cos(u, v)$$



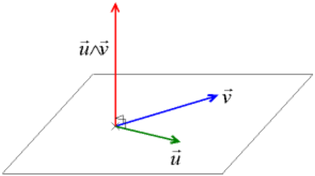
Projeté : la trigonométrie du triangle rectangle permet de calculer le produit scalaire grâce à une projection orthogonale. Soit C le projeté de A sur B, on a :

$$(A \mid B) = \|A\|\|B\| \cos\theta = \|B\|\|C\|$$

Opération effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension trois.

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :

- le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal aux deux vecteurs donnés,
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de sens direct,
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.



Si $u = (a, b)$, alors les vecteurs $v = (x, y)$ orthogonaux à u satisfont

$$ax + by = 0. \tag{6}$$

Il s'agit là de l'équation d'une droite vectorielle D.

Si $u = (x, y)$ est un vecteur non-nul et appartient à la droite D, i.e. s'il satisfait (6), alors tout vecteur λu qui lui est colinéaire $(\lambda \neq 0)$ satisfait l'équation (6) également.

N'importe lequel de ces vecteurs est appelé vecteur directeur de la droite D.

Une matrice A (2×2) est dite *orthogonale* si les vecteurs formés par les deux colonnes de la matrice sont orthonormés.

Ceci équivaut à ce que l'application linéaire représentée par cette matrice conserve le produit scalaire, i.e.

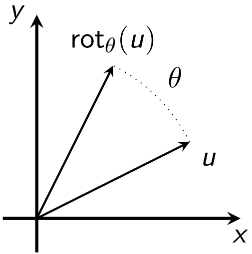
$$\forall (u, v) \in \mathcal{P}, \quad (Au \,|\, Av) = (u \,|\, v). \tag{7}$$

Les matrices orthogonales de déterminant 1 sont appelées des matrices orthogonales directes ou matrices de rotation.

On appelle donc *rotation d'angle θ* l'application $\mathrm{rot}_\theta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ définie par $u \mapsto \mathrm{rot}_\theta(u)$.

Cela se traduit sous forme matricielle, en notant $u = (x, y)$, par

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{8}$$



En géométrie, la notion d'espace affine généralise la notion d'espace issue de la géométrie euclidienne en omettant les notions d'angle et de distance.

Alignement, parallélisme, barycentre s'expriment sous une forme qui utilise des rapports de mesures algébriques, qui est une notion affine.

Résultat : une géométrie affine, où l'espace apparait comme une structure algébrique, voisine de celle d'espace vectoriel.

Un espace affine peut aussi être vu comme un espace vectoriel "dont on a oublié l'origine".

Les points d'un espace affine sont aussi des vecteurs, tout dépend du point de vue auquel on se place.

- un point a une position, ni direction, ni longueur,
- un vecteur a une direction et une longueur, pas de position.

Remarque : si une origine est spécifiée, un point peut-être représenté par un vecteur, soient A, B deux points du plan affine alors $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $B - A$.

Soit E un ensemble et V un K-espace vectoriel. Soit $\varphi : E \times E \to V$ une application satisfaisant :

1. $\forall (A, B) \in E^2, \forall v \in V,\ A + v = B \Leftrightarrow AB = v$,
2. $\forall (A, B, C) \in E \times E \times E,\ \varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$.

Le couple (E, φ) est appelé espace affine défini sur V. Les éléments d'un espace affine sont appelés des *points*.

La première (resp. seconde) coordonnée d'un point $M = (x, y)$ dans le plan affine est appelée *abscisse* (resp. *ordonnée*).

Soit Δ une droite vectorielle d'équation $ax + by = 0$. On appelle *droite affine* de direction Δ contenant $A = (x_A, x_A)$ l'ensemble des points $M = (x, y)$ de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AM} \in \Delta$.

$$ax + by - (ax_A + by_A) = 0.$$

En notant que si A décrit le plan $\mathcal{P}$, alors $-(ax_A + by_A)$ décrit $\mathbb{R}$ tout entier, l'équation générale d'une droite affine est obtenue pour trois scalaires a, b et c par

$$ax + by + c = 0.$$

La *translation* d'un point de l'espace affine est définie exactement de la même manière que dans un espace vectoriel.

La *rotation* d'un angle θ autour d'un point I du plan affine $\mathcal{P}$ est l'application $\mathrm{rot}_{(I,\theta)} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui associe à un point M l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{IM'} = \mathrm{rot}_\theta(\overrightarrow{IM}). \tag{9}$$

où rot_θ désigne la rotation vectorielle d'angle θ.

Quand $\theta = \pi$, la rotation $\mathrm{rot}_{(I,\pi)}$ s'appelle *symétrie* de centre I.

Deux types de transformation (complémentaires) :

- les transformations géométriques, qui permettent de déplacer les objets par rapport à un système de coordonnées fixe,
- les transformations de coordonnées, pour lesquelles l'objet reste fixe par rapport à un système de coordonnées en mouvement par rapport à cet objet.

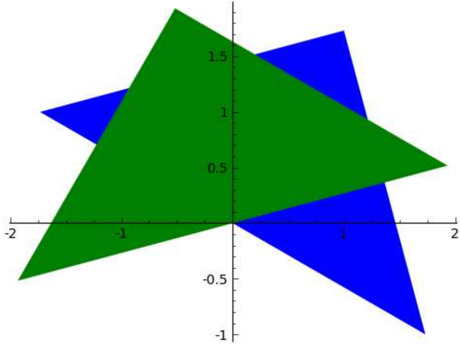
Remarque : les transformations de coordonnées sont essentielles dans le « prélèvement » c'est à dire la définition des objets dans leur propre système de coordonnées local, puis leur plongement dans un système de coordonnées principal.

Soit un système de coordonnées cartésien dans le plan et un objet considéré comme un ensemble de points.

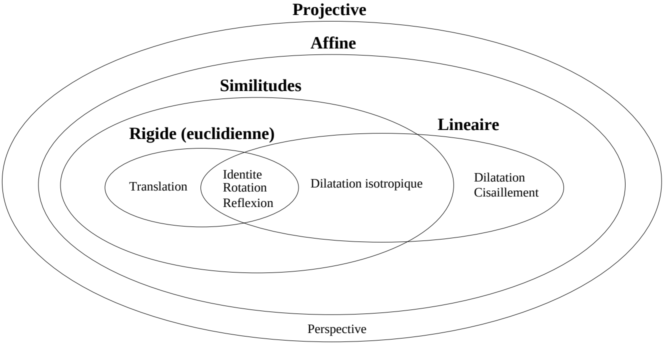
Toutes transformations appliquées à cet objet peuvent être ramenées à des transformations identiques appliquées à l'ensemble des points définissant cet objet.

$$P'(x', y') = P(x, y) + T_v \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{array} \right.$$

$$P'(x', y') = R_\Theta(P(x, y)) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta + x\sin\theta \end{array} \right.$$



Rotation d'un objet (ici un polygone)

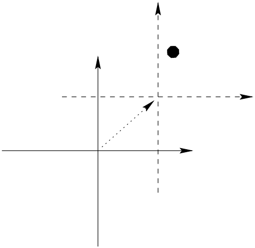


- les *transformations rigides* préservent distances et angles,
- les *similitudes* préservent les angles,
- les *transformations affines* préservent le parallélisme,
- les *transformations projectives* préservent le sens.

Supposons un plan muni des deux systèmes de coordonnées (O, x, y) et (O', x', y'). Chaque point du plan a donc deux jeux de coordonnées.

Si on suppose que le second système est le résultat d'une transformation appliquée au premier, on dit qu'une *transformation de coordonnées* a été effectuée, une transformation linéaire qui peut être définie par une matrice.

Translation



$$P' \begin{cases} x' = x - t_x \\ y = y - t_y \end{cases}$$

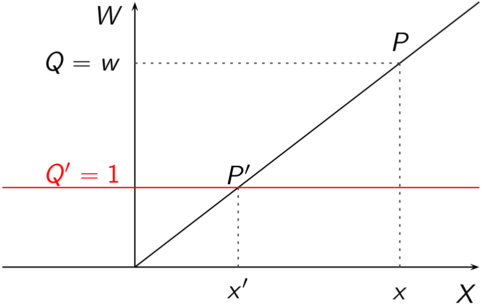
Motivation initiale : trouver un cadre théorique adapté à l'étude des perspectives.

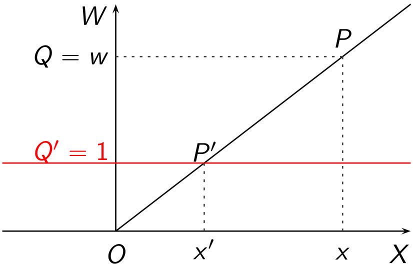
- un étudiant en science a appris que deux droites parallèles ne se coupent pas,
- un architecte sait qu'elles se coupent à l'infini (ce que le dessin en perspective montre bien).

Motivation en infographie : simplification des transformations planes, ainsi la translation devient une transformation linéaire dans le plan projectif.

Soit un point quelconque $P(x, w)$ (avec $w \neq 0$), sa projection centrale $P'(x', 1)$ est l'intersection de la droite OP et de la droite d'équation $w = 1$.
On constate que les deux triangles OPQ et $OP'Q'$ sont semblables si bien que :

$$x' = \frac{x'}{1} = \frac{P'Q'}{OQ'} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{x}{w}$$

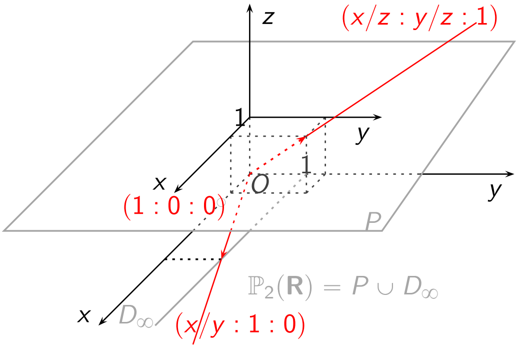




$$\boxed{x = w\ x'}$$

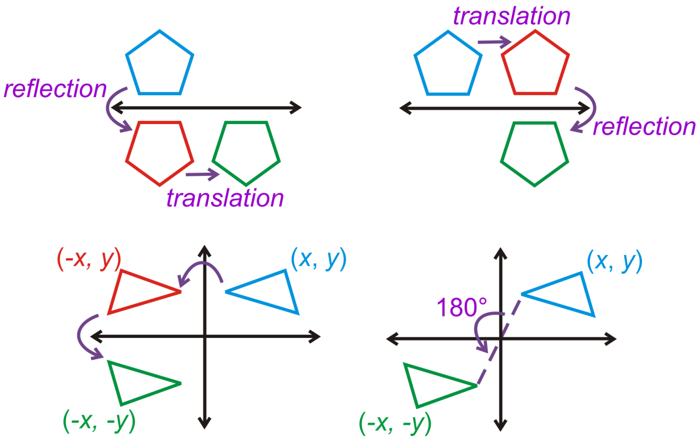
- tous les points vérifiant cette relation sont sur la droite OP,
- ils ont tous la même projection P' sur la droite $Q' = 1$,
- tout couple de coordonnées (wx', w) peut être utilisé pour définir P', et en particulier le couple $(x', 1)$.

Dans le sous-espace de codimension 1 du plan, un même point à plusieurs représentations distinctes, correspondant à une relation de proportionnalité : $P_i(tx_i, ty_i, th_i)$ avec $t \neq 0$.



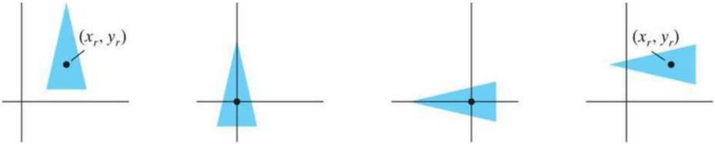
Puisque les points sont représentés par des vecteurs-colonnes composés de trois éléments, les matrices correspondantes sont 3×3 :

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_\theta \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_{x|y} \begin{pmatrix} d_x & 0 & 0 \\ 0 & d_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


reflection
translation
translation
reflection
(-x, y)
(x, y)
(-x, -y)
180°
(x, y)
(-x, -y)

Exemple, rotation autour d'un point quelconque :

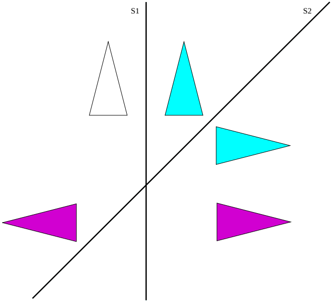
$$v' = T^{-1} \cdot R \cdot T \cdot v$$



Avantage principal : gain en efficacité. En effet, l'application sur un point de cette transformation affine nécessite 9 multiplications et 6 additions. Cependant, sa structure fixe permet de simplifier le calcul en 4 multiplications et 4 additions.

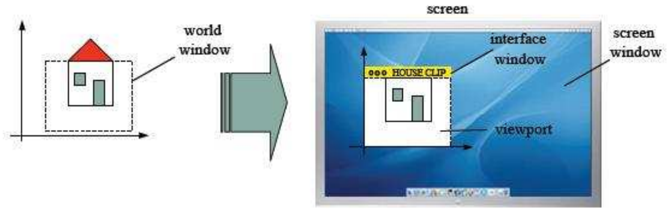
[Wikipédia] Étude géométrique centrée sur les groupes de transformations géométriques et à leurs propriétés, indépendamment des figures, considérées invariantes.

Elle contient des processus non commutatifs. Par exemple, l'ordre d'application de deux symétries axiales peut conduire à deux résultats différents.



Souvent, les dimensions des objets sont incompatibles avec le système de coordonnées du dispositif d'affichage (immeuble, molécule, ...).

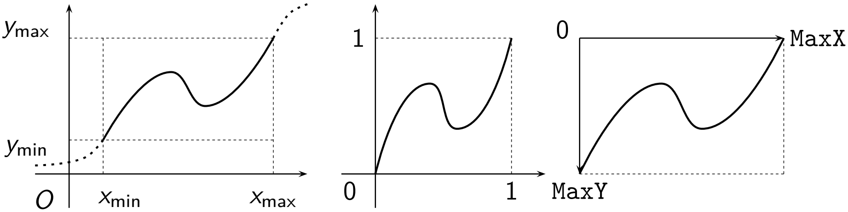
On distingue la fenêtre (*window*) qui est parallèle aux axes du système de coordonnées et liée aux objets, de la zone de visualisation (*viewport*) liée à l'image résultante.



On distingue donc trois systèmes de coordonnées :

- le système de coordonnées absolues ou repère du monde (*World Coordinate* ou *WC*), qui décrit l'objet par rapport à un système de coordonnées cartésien,
- le système de coordonnées normalisées (*Normalized Coordinate* ou *NC*) $[0,1] \times [0,1]$,
- le système de coordonnées du dispositif physique (*Display Coordinate* ou *DC*).

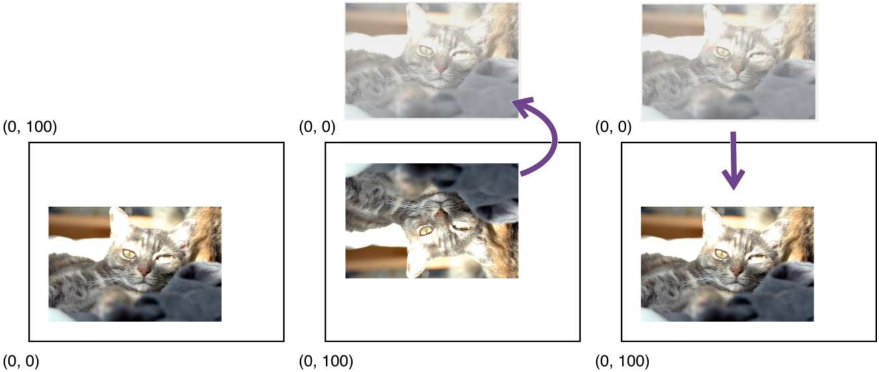
La représentation d'une courbe sur un écran nécessite quelques transformations à partir de sa représentation dans le plan réel $\mathcal{P}$.



fenêtre d'observation/espace réel [WC]

espace normalisé [NC]

fenêtre de visualisation/écran [DC]



Attention au changement de repère