

Algorithmique des Graphes

L3 informatique - Université de Toulon

5 janvier 2021

Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge. Il est inutile de recopier l'énoncé... La note finale tiendra compte de la présentation générale de la copie.

QUESTIONS DE COURS

Q1. Quel est le nombre d'arêtes maximal d'un graphe d'ordre n ? Dans ce cas, comment nomme-t-on le graphe?

1. tri linéaire
2. tri par sélection
3. tri rapide

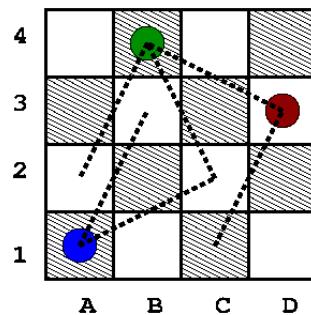
CRÉATION ALGORITHME

Q2. Pour une partie S de l'ensemble des entiers naturels, quelle est la définition de $\text{mex}(S)$?

Q6. Proposer une méthode efficace pour déterminer le plus petit entier ne figurant pas parmi les valeurs d'un tableau de n entiers. Préciser le temps de calcul.

Q3. Quelle structure est utilisée pour l'implantation de la gestion des ensembles disjoints avec l'heuristique de l'union par rang? Préciser le temps de calcul de l'opération REPRESENTANT, en fonction du nombre n d'opérations SINGLETON.

DÉPLACEMENT DU CAVALIER



Q4. Donner une définition de la notion de *tri topologique* du point de vue de la théorie algorithmique des graphes, en précisant bien le contexte et le temps de calcul. Citer un exemple d'application.

COMPLEXITÉ DE KRUSKAL

Q5. On considère l'algorithme de Kruskal procédant sur un graphe complet d'ordre n . Donner le temps de calcul en fonction n suivant l'algorithme de tri utilisé :

Q7. On considère le graphe des déplacements d'un cavalier sur les 16 cases d'un échiquier 4×4 . Par exemple, la case $A1$ est adjacente aux cases $C2$ et $B3$.

1. Le graphe est-il connexe?
2. Possède-t-il un cycle de longueur impair?
3. Le graphe est-il eulérien?
4. Possède-t-il un cycle hamiltonien?

5. Le graphe est-il planaire ?

GRAPHE DE QUADRUPLETS

On note $[0, t[$ l'intervalle des entiers naturels strictement inférieurs à t . On considère un quadruplet d'entiers $p := (a, b, c, d)$, paramètre auquel on associe le produit des intervalles :

$$\mathfrak{Q} = [0, a[\times [0, b[\times [0, c[\times [0, d[$$

Notons que $p \notin \mathfrak{Q}$, et que le quadruplet (i, j, k, l) est dans \mathfrak{Q} si et seulement si

$$0 \leq i < a, \quad 0 \leq j < b, \quad 0 \leq k < c, \quad 0 \leq l < d.$$

On considère le graphe Γ dont \mathfrak{Q} est l'ensemble des sommets; en traçant un arc de r vers r' si et seulement si le quadruplet r' se déduit de r en diminuant strictement une seule des composantes de r . On utilisera la notation $r \rightsquigarrow r'$. Par exemple, $(1, 2, 3, 4) \rightsquigarrow (1, 2, 1, 4)$ mais $(1, 2, 3, 4) \not\rightsquigarrow (1, 2, 1, 1)$ et $(1, 2, 3, 4) \not\rightsquigarrow (1, 2, 3, 4)$.

Q8. Préciser la nature du graphe Γ ?

Q9. Exprimer l'ordre de Γ en fonction de a, b, c et d .

Q10. Quel est le nombre d'arcs Γ ?

Q11. Quel est le degré du sommet (i, j, k, l) ?

PRÉLIMINAIRES ARITHMÉTIQUES

Q12. Effectuer la division euclidienne de l'entier naturel a par l'entier $b > 0$ c'est déterminer l'unique couple d'entiers (q, r) vérifiant :

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

1. Comment s'appelle les quantités q et r ?
2. En langage C, quels sont les opérateurs permettant de calculer q et r ?

Q13. Montrer que l'application :

$$(i, j, k, l) \mapsto \mathbf{N}(i, j, k, l) := labc + kab + ja + i$$

est une bijection de \mathfrak{Q} sur l'intervalle $[0, abcd[$.

Q14. Dans le cas, $a = 5$, $b = 7$, $c = 9$ et $d = 11$. Quelle est l'image de $(1, 2, 3, 4)$ par \mathbf{N} ? Quel est l'antécédant de 2021?

MISE EN OEUVRE

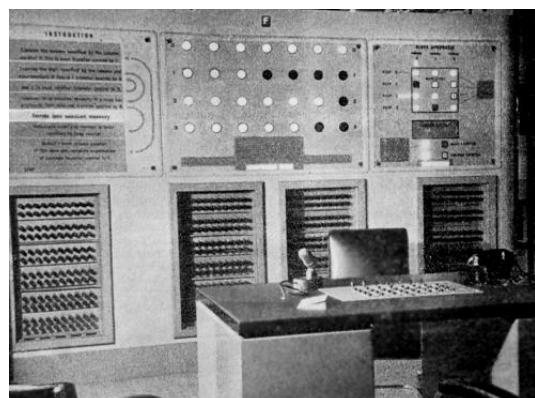
On définit les types :

```

1  typedef int quad[4]; // quadruplet
2  typedef struct {
3      int nbs;           // ordre du graphe
4      char ** mat; // mat. adjacence
5  } graphe;
```

Q15. Coder **int itoq(int t, quad r, const quad p)** qui détermine la valeur de r de sorte que $\mathbf{N}(r) = t$ pour le paramètre p . La valeur booléenne de retour renseigne sur la validité du résultat.

Q16. Coder **graphe nimrod(quad p)** une fonction qui retourne le graphe Γ correspondant au paramètre p .



The NIMROD (1951) was designed exclusively to play the game of 'NIM'. This is a simple game, where you start with a number of piles of tokens — traditionally matches. Each player in turn takes one or more tokens from any one pile, and the game continues until the last token is taken from the last remaining pile. .