TD Kernels

Décembre 2024

Exercice 1: K MAX-3-SAT

Considérons le problème suivant :

k,r MAX-SAT

Input : n variables binaires, m clauses disjonctives comportant r variables maximum, un entier $k > 0$;

Question : Existe-t-il une instanciation des variables de sorte qu'au moins k clauses soient vraies ?

1. Montrer que si $k < \frac{m}{2}$ alors le problème est toujours satisfiable.
2. En déduire que le problème possède un noyau polynômial de $2k$ clauses et $2kr$ variables.
3. Quel est la taille du noyau pour K MAX-3-SAT ?

Exercice 2: K VERTEX COVER

Dans cet exercice on considère de nouvelless règles de réduction pour le problème K VERTEX COVER ;

1. Montrer que la règle de réduction suivante est valide :

   Réduction VC3 Si G a un sommet i de degré 1, alors on peut enlever i et son voisin et décrémenter le paramètre de 1. Si $k = 1$ il faut que cette arête soit la seule du graphe, sinon l'instance n'est pas satisfiable.

2. Montrer que la règle de réduction suivante est valide :

   Réduction VC4 Si G contient un sommet de degré 2 u dont les deux voisins sont adjaçents, on peut enlever les trois sommets de G et décrémenter le paramètre de 2 (indice : il faut montrer qu'au moins deux des sommets du triangle font partie d'un recouvrement)

3. Montrer que la règle de réduction suivante est valide :

   Réduction VC5 : si G contient un sommet u de degré 2 dont les voisins v, w ne sont pas adjacents, alors on peut construire un graphe G' en fusionnant v et w et en enlevant u. La réponse à la question est l'existence un vertex cover de G' pour le parmètre $k - 1$.

4. Montrer que le graphe obtenu après application de toutes les règles de réduction (y compris celles vues en cours VC1 et VC2) conduit, lorsque l'instance est satissfiable, à un Kernel de $2\frac{k^2}{3}$ sommets et k^2 arêtes.

Exercice 3: k CLUSTER EDITING

On considère le problème k CLUSTER EDITING :

k CLUSTER EDITING

Input : Un graphe non orienté G, un entier $k > 0$,

Question : Peut-on ajouter ou enlever au plus k arêtes de sorte que les composantes connexes du graphe soient des cliques ?

Considérons un graphe $G = (V, E)$ et deux sommets $i, j \in V$. On dit qu'un sommet $z \in V$ est un voisin commun de i et j si $\{z, i\}, \{z, j\} \in E$. De manière similaire un sommet z est dit voisin non commun de i, j si $\{z, i\} \in E$ ou $\{z, j\} \in E$ (mais pas les deux).

1. Montrer que la règle de réduction suivante est valide : Si i et j on plus de k voisins communs alors dans toute solution du problème, l'arête $\{i, j\}$ doit être présente (donc ajoutée si elle n'y est pas)
2. Montrer que la règle de réduction suivante est valide : Si i et j on plus de k voisins non communs alors dans toute solution du problème, l'arête $\{i, j\}$ doit être absente (donc enlevée si elle est dans G)
3. Que déduire si deux sommets comportent à la fois plus de k voisins communs et plus de k voisins non communs ?
4. Montrer que la règle de réduction suivante est valide : si une composante connexe de G est une clique alors on peut l'enlever du graphe.
5. Appliquer la règle de réduction à l'exemple de la figure 1

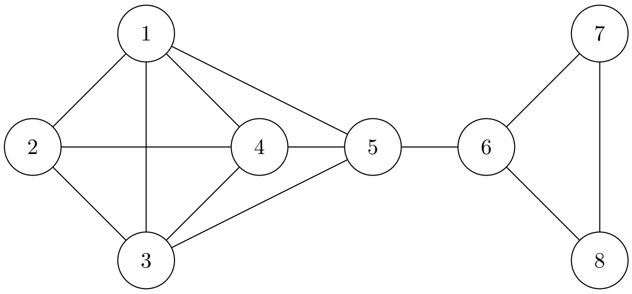

FIGURE 1 – un graphe pour le problème k CLUSTER EDITING avec $k = 3$

L'article [1] établit que ces règles peuvent être appliquées en temps $\mathcal{O}(n^3)$ et conduisent à un kernel d'au plus $2k^2 + k$ sommets et d'au plus $2k^3 + k^2$ arêtes.

Exercice 4: Décomposition en couronne pour vertex cover

Rappelons qu'une décomposition en couronne d'un graphe G est une partition de ses sommets en trois sous-ensembles C, H, R de sorte que :

— C est non vide.
— C est un stable
— il n'y a pas d'arêtes entre C et R.
— il existe un couplage de taille $|H|$ dans le sous graphe induit par H et par C

On vous demande d'admettre le lemme de la couronne suivant :

Lemme 1 *Soit G un graphe sans sommets isolés et avec au moins $3k + 1$ sommets. Alors il existe un algorithme polynomial (complexité $P(n)$ qui produit*

— Soit un couplage de taille $k + 1$ dans G
— Soit une décomposition en couronne de G

1. Montrer que si S est un vertex cover, alors $|S \cap (H \cup C)| \geq |H|$.
2. En déduire que $S - (H \cup C)$ est un vertex cover du graphe G', sous-graphe de G induit par l'ensemble R, de taille $|S| - |H|$.
3. Réciproquement considérons un vertex cover S' de G'. Montrer qu'on peut construire un vertex cover de taille $|S'| + |H|$ de G
4. Supposons que le nombre de sommets de G soit strictement supérieur à $3k$. En appliquant le lemme de la couronne, que peut-on conclure si l'on trouve un couplage de taille $k + 1$?
5. Dans le cas contraire, montrer que la réduction qui consiste à remplacer G par le graphe induit par R est valide. Que peut-on dire du nombre de sommets de R par rapport au nombre de sommets de G ?
6. En déduire que le problème VERTEX COVER possède un kernel d'au plus $3k$ sommets. Ce Kernel est-il polynomial ?

Références

[1] Jens Gramm, Jiong Guo, Falk Hüffner, and Rolf Niedermeier. Graph-modeled data clustering : Exact algorithms for clique generation. *Theory Comput. Syst.*, 38(4) :373–392, 2005.