

# Exercices : les classes de complexité FPT et XP

Décembre 2022

## Exercice 1: Un algorithme simple pour $k$ -Vertex Cover

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté.

On considère dans cet exercice l'algorithme VCE suivant :

---

### Algorithm 1 VCE

---

**Require:**  $G = (V, E)$ , un entier  $k$

**Ensure:** Retourne True ssi existe une couverture de sommets de  $G$  de cardinalité  $k$ .

```
1: for chaque sous-ensemble  $X \subseteq V$  avec  $|X| = k$  do  
2:   if  $X$  est une couverture de  $G$  then  
3:     return True  
4:   end if  
5: end for  
6: return False
```

---

1. Analyser la complexité de cet algorithme en fonction de  $k$ .
2. Est-ce que il s'agit d'un algorithme FPT? Justifiez votre réponse.

## Exercice 2: Problème Clique

On considère le problème **Clique** suivant :

### Clique

**Input :** Deux entiers  $k$  et  $r$ , un graphe non orienté  $G = (V, E)$  dont le degré maximum des sommets est  $k$  ;

**Question :** Existe-t-il une clique de taille au moins  $r$  dans le graphe?

1. Exprimez les problèmes  $r$ -Clique et  $k$ -Clique respectivement paramétrés par  $r$  et  $k$ .
2. Montrez que le problème  $r$ -Clique  $\in XP$ .
3. Montrer que tout sommet  $x \in V$  de degré  $d_G(x) < r - 1$  ne peut appartenir à une clique de taille  $r$ .
4. On suppose maintenant que le sommet  $x \in V$  appartient à une clique de taille  $r$  de  $G$ . Soit alors  $\Gamma(x)$  l'ensemble des sommets adjacents à  $x$ .
  1. Que peut-on dire des  $r - 1$  autres sommets de la clique?
  2. Soit  $Y \subseteq \Gamma(x)$  de taille  $r - 1$ . Quelle est la complexité pour vérifier que  $Y \cup \{x\}$  est une clique de  $r$  sommets?
  3. Combien y a t'il d'ensembles  $Y \subseteq \Gamma(x)$  de taille  $r - 1$ ?
5. On suppose que le sommet  $x \in V$  n'appartient à aucune clique de taille  $r$ . Quel est le sous-graphe qui peut en contenir une?
6.
  1. En déduire un algorithme pour le problème de rechercher la clique de taille  $r$  ;
  2. Etudier sa complexité en fonction de  $k$ . Est-ce un FPT?

**Exercice 3:** Deux autres algorithmes pour  $k$ -**Vertex Cover**

On considère dans cet exercice une variante de l'algorithme VCB vue en cours pour le problème  $k$ -**Vertex Cover** s'appuyant sur la propriété suivante :

**Propriété 1** Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté et  $X$  une couverture des sommets de taille  $k$ . Si un sommet  $x \notin X$ , alors  $\Gamma(x) \subseteq X$ .

1. Résoudre  $k$ -**Vertex Cover** si, pour tout  $x \in V$ ,  $d_G(x) < 2$ . Rajouter un second cas de base à l'algorithme VCB.
2. Dans le cas général, on suppose que  $k \neq 0$ ,  $|E| > 0$  et qu'il existe au moins un sommet  $x \in V$  tel que  $d_G(x) \geq 2$ . En utilisant la propriété 1, établir une règle de branchement sur les sommets permettant de calculer l'existence d'une couverture de taille au plus  $k$ . Donnez le code complet de l'algorithme obtenu.
3. Etablir une équation de récurrence sur le nombre maximum  $v_k$  de feuilles de l'arbre de décision.
4. Résoudre cette équation récurrence homogène linéaire de degré 2. En déduire la complexité de l'algorithme. Est-il FPT ?
5. Montrer que si le degré maximum d'un sommet du graphe est 2, alors il existe une solution calculable en temps polynomial.
6. En déduire un nouvel algorithme qui branche uniquement sur les sommets de degré 3 et en déduire sa complexité.