Exercice de base sur la complexité

Exercice 1: On considère dans cet exercice les problèmes de décision 3-SAT et CLIQUE définis de la manière suivante :

3-SAT

Input : U un ensemble de variables booléennes, C un ensemble de clauses de 3 termes chacunes.

Question : Peut on fixer les valeurs des variables de sorte que toutes les clauses soient vérifiées ?

Clique

Input : Un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $k > 0$;

Question : Est-ce que G possède une clique de taille k au minimum, ie. un ensemble de sommmets $V' \subseteq V$ avec $|V'| \geq k$ et pour tout couple $(u, v) \in V'^2$, $\{u, v\} \in E$?

1. Décrire le fonctionnement d'un algorithme naif non déterministe pour résoudre le problème CLIQUE. Quelle est sa complexité pour une NDTM ? Pouvez vous en déduire que CLIQUE $\in NP$?
2. Décrire un certificat et un vérificateur pour les problèmes 3-SAT et CLIQUE.
3. On souhaite démontrer que 3-SAT $\propto$ CLIQUE. Pour cela, on considère une instance $\mathcal{I}$ de 3-SAT définie par $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des variables booléennes et $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ l'ensemble des clauses de taille 3. Chaque clause est de la forme $c_j = \ell_j^1 \vee \ell_j^2 \vee \ell_j^3$ avec $\ell_j^i \in \{x_1, \ldots, x_n, \bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}\}$.
   Soit alors $f(\mathcal{I})$ l'instance associée à $\mathcal{I}$ de CLIQUE définie de la manière suivante :
   1. $V = \bigcup_{j=1}^{m} \{\ell_j^1, \ell_j^2, \ell_j^3\}$;
   2. L'arête $\{u, v\} \in E$ si les sommets u et v ne sont pas dans la même clause, et u n'est pas la négation de v ;
   3. $k = m$.

   On considère dans cette question l'instance $\mathcal{I}$ de 3-SAT définie par $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ avec $c_1 = x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$, $c_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$ et $c_3 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4$.
   1. Décrire l'instance $f(\mathcal{I})$ de CLIQUE associée à l'instance $\mathcal{I}$ de 3-SAT ;
   2. A partir d'une solution que vous déterminerez de $\mathcal{I}$, donnez une solution de $f(\mathcal{I})$;
   3. A partir d'une solution que vous déterminerez de $f(\mathcal{I})$, donnez une solution de $\mathcal{I}$.
4. Démontrez que f est une réduction polynomiale. Que peut-on en déduire de la complexité de CLIQUE ?

Exercice 2: Dans cet exercice, on considère les problèmes INDEPENDENT-SET et VERTEX-COVER definis par :

Independent-Set

Input : Un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $k > 0$;

Question : Est-ce que G contient un stable (« Independent Set » en anglais) de taille au moins k, ie. un ensemble d'au moins k sommets $V' \subseteq V$ tels que pour tout couple $(u,v) \in V'^2$, l'arête $\{u,v\} \notin E$?

Vertex-Cover

Input : Un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $\ell > 0$;

Question : Est-ce que G possède un couverture de taille au plus ℓ, ie. un ensemble d'au plus ℓ sommets $V' \subseteq V$ tel que, pour toute arête $\{u,v\} \in E$, $u \in V'$ ou $v \in V'$?

1. Est-ce que les problèmes Independent-Set et Vertex-Cover sont dans NP ? Justifiez votre réponse.
2. On considère dans cette question le graphe non orienté $G = (V, E)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4\}\}$.
   1. Quelle est la réponse à Clique pour $k = 3$? $k = 4$?
   2. Le complément d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un graphe non oriente $\overline{G} = (V, \overline{E})$ avec $\overline{E} = \{\{u, v\}, (u, v) \in V^2$ et $\{u, v\} \notin E\}$. Construire le complémentaire de G.
   3. Proposez une transformation de notre instance de Clique avec $k = 3$ vers une instance de Independent-Set.
3. Soit $\mathcal{I}$ une instance de Clique quelconque.
   1. Proposez une transformation de $\mathcal{I}$ vers une instance $f(\mathcal{I})$ de Independent-Set.
   2. Démontrez qu'il s'agit d'une transformation polynomiale.
   3. Que pouvez vous en déduire de la complexité de Independent-Set ?
   4. Que pensez-vous de f^{-1}. Conclusion ?
4. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.
   1. Démontrez que S est un stable de G ssi $V \backslash S$ est une couverture de G.
   2. En déduire une transformation polynomiale g de Independent-Set vers Vertex-Cover.
   3. Que peut-on en déduire de Vertex-Cover ?

Exercice 3: On considère dans cet exercice le problème suivant :

Vertex k-coloring

Input : Un graphe non orienté $G = (V, E)$, un entier $k > 0$;

Question : Est-ce que les sommets de G peuvent être coloriés en au plus k couleurs différentes telles que, pour toute arête $e = \{u, v\} \in E$, les sommets u et v ont des couleurs différentes.

1. Dans cette question, on considère le graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$. Quelle est la réponse au problème Vertex k-coloring pour G et $k = 2$? $k = 3$? Justifiez votre réponse.
2. Démontrez que Vertex k-coloring $\in NP$.
3. Démontrez que le problème Vertex k-coloring est polynomial pour $k = 2$. Quelle est la complexité de l'algorithme obtenu ?
4. On veut démontrer que 3-Sat $\propto$ Vertex 3-coloring. Pour cela, on considère une instance $\mathcal{I}$ de 3-Sat définie par $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des variables booléennes et $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ l'ensemble des clauses de taille 3. Chaque clause est de la forme $c_j = \ell_j^1 \vee \ell_j^2 \vee \ell_j^3$ avec $\ell_j^i \in \{x_1, \ldots, x_n, \bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}\}$.

   On définie partiellement la transformation suivante. L'ensemble des sommets V du graphe G est composé de :

1. 3 sommets spéciaux Vrai, Faux et Rouge ;
2. des sommets x_i et $\bar{x}_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$;
3. de 5 sommets $c_j^1, \ldots, c_j^5$ associés à toute clause c_j pour $i \in \{1, \ldots, m\}$.

L'ensemble des arêtes E est partitionné en deux ensembles E_1 et E_2 :

1. E_1 est associé aux littéraux : $E_1 = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{\{x_i, \bar{x}_i\}, \{x_i, \text{Rouge}\}, \{\bar{x}_i, \text{Rouge}\}\} \cup \{\{\text{Rouge}, \text{Faux}\}, \{\text{Rouge}, \text{Vrai}\}, \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}\}$;
2. E_2 est associé aux clauses et sera définie ultérieurement.

On note alors $c(x)$ la couleurs d'un sommet.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, quelle sont les valeurs possibles des couples $(c(x_i), c(\bar{x}_i)), i \in \{1, \ldots, n\}$ en fonction de $c(\text{Vrai})$, $c(\text{Faux})$ et $c(\text{Rouge})$?

5. On considère le sous-graphe partiel représenté par la figure 1 et associé à la clause $c_1 = (x \vee y \vee z)$.

   Montrez que si chacun des noeuds x, y et z est colorié en $c(\text{Vrai})$ ou $c(\text{Faux})$, alors le coloriage est réalisable si et seulement si au moins un des trois sommets x, y ou z est colorié en $c(\text{Vrai})$.

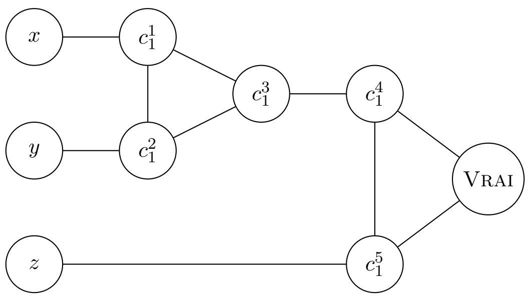

Figure 1 – Sous-graphe partiel correspondant à une clause $c_1 = (x \vee y \vee z)$.

6. Complétez la transformation et la preuve pour démontrer que 3-Sat $\propto$ Vertex 3-coloring. Quelle est la complexité de Vertex 3-coloring ?
7. Pour tout $k > 3$, montrez que Vertex 3-coloring $\propto$ Vertex k-coloring. Conclusion ?