Université Pierre et Marie Curie

UE: Statistique et informatique (LI323)

Projet 3 - Chaines de Markov à Temps Discret (CMTD)

Année scolaire : 2013/2014

Professeur chargé de TD/TME :

Bogdan MIRAUTA

Etudiants :

Rémi Cadène n°3000693

Joël Fieux-Herrera n°3003174

Sommaire

Readme

Ce projet Java sous Eclipse contient quatre dossiers :
- bin contient les fichiers compilés,
- src contient les fichiers sources,
- data contient les fichiers annexes donnés en début de projet et générés par notre programme,
- doc contient le sujet et les réponses aux questions.

Afin de compiler et d'executer, deux possibilités :

- avec Eclipse :

- ouvrir Eclipse
- selectionner votre Workspace
- importer (File / Import...)
- selectionner "General / Existing Projects into Workspace", puis Next
- selectionner en root directory le dossier contenant notre dossier projet (ex: Téléchargements), puis Finish
- compiler et executer (Run)

- avec Terminal :

- Pour compiler :

  cd <directory>/LI323_P3_CadeneFieux
  ***javac** -cp ./src/CMTD/*.java -d ./bin/CMTD/*

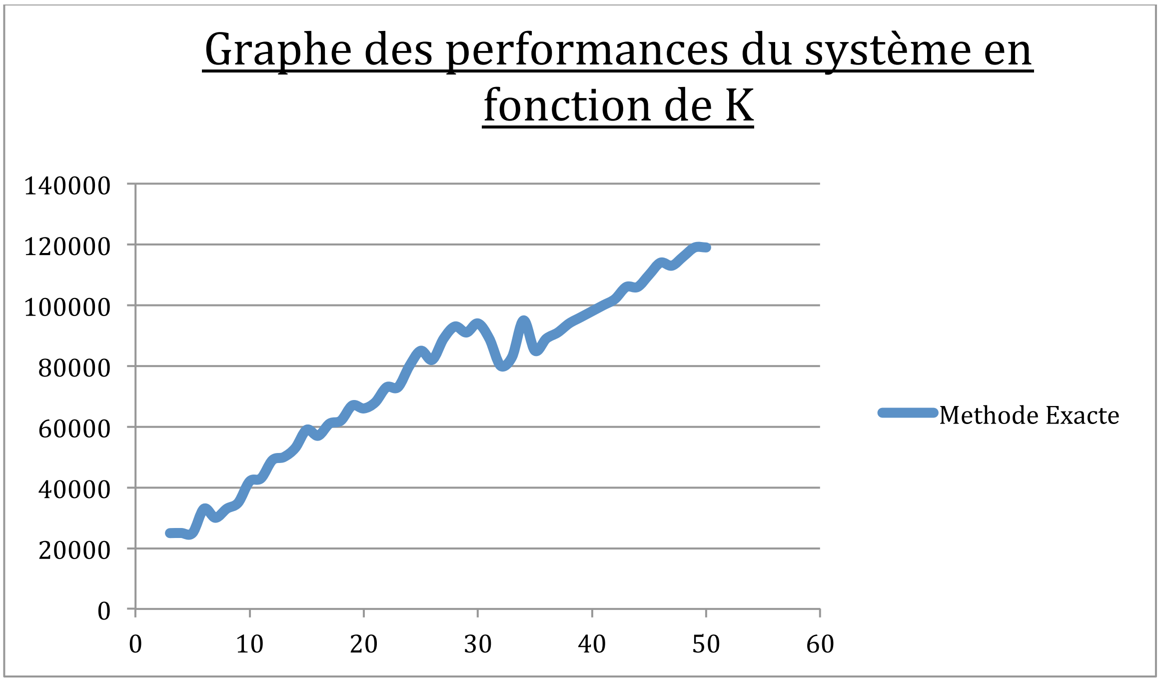
- Pour exécuter :

  ***java** CMTD*

Exercice 1

Question 1

Résultats vérifiés.



Question 2

La méthode des puissances nous rend une estimation du vecteur Pi qui converge vers le résultat obtenu avec la méthode exacte quand n tend vers l'infini.

Question 3

Le critère de convergence élémentaire est peu efficace, car il varie fortement en fonction de K, p et q. Plus K et grand, et plus p et q sont petits, plus n doit être grand pour que le résultat rendu par la méthode des puissances corresponde à celui de la méthode exacte.

Question 4

- méthode Exacte :
[0,0075 0,0153 0,0308 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037]

Premier critère : arrêt si la norme vectoriel $|Pi^{(n)}| - |Pi^{(n-1)}| <$ epsilon.
- arrêt : n = 1213

[0,0078 0,0158 0,0315 0,0629 0,1262 0,2539 0,5019]

Deuxième critère : arrêt si la somme des $|pi^{(n)} - pi^{(n-1)}| <$ epsilon".
- arrêt : n = 1379

[0,0076 0,0155 0,0311 0,0626 0,1261 0,2542 0,5029]

Troisième critère : arrêt si x% des pi tel que $|pi^{(n)} - pi^{(n-1)}| <$ epsilon", avec pi choisi aléatoirement.
- arrêt : n = 1060 avec x=50%

[0,0081 0,0163 0,0321 0,0635 0,1265 0,2534 0,5001]

Quatrième critère : arrêt si pour tous les pi, on a $|pi^{(n)} - pi^{(n-1)}| <$ epsilon"
- arrêt : n = 1174

[0,0079 0,0159 0,0316 0,0630 0,1263 0,2538 0,5016]

Nous avons choisi le quatrième et dernier critère, car il n'est pas aléatoire et il s'arrête à un nombre d'itération inférieur aux deux premiers pour des résultats suffisamment précis.

Question 5

Pour K=6, p=0.02, q=0.01, en faisant varier e, avec le critère sélectionné à la dernière question, nous obtenons les résultats suivants :

- méthode Exacte :

[0,0075 0,0153 0,0308 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037]
- 10^{-3} : arrêt à n = 62

[0,0868 0,1196 0,1352 0,1412 0,1449 0,1580 0,2144]
- 10^{-4} : arrêt à n = 670

[0,0113 0,0212 0,0384 0,0696 0,1292 0,2483 0,4820]
- 10^{-5} : arrêt à n = 1174

[0,0079 0,0159 0,0316 0,0630 0,1263 0,2538 0,5016]
- 10^{-6} : arrêt à n = 1677

[0,0075 0,0153 0,0309 0,0624 0,1260 0,2544 0,5035]
- 10^{-7} : arrêt à n = 2180

[0,0075 0,0153 0,0309 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037]

Alors le meilleur critère a adopté est "arrêt si pour tous les pi, on a $|pi^{(n)} - pi^{(n-1)}| <$ epsilon" avec epsilon = 10^{-5}.

Exercice 2

Question 1

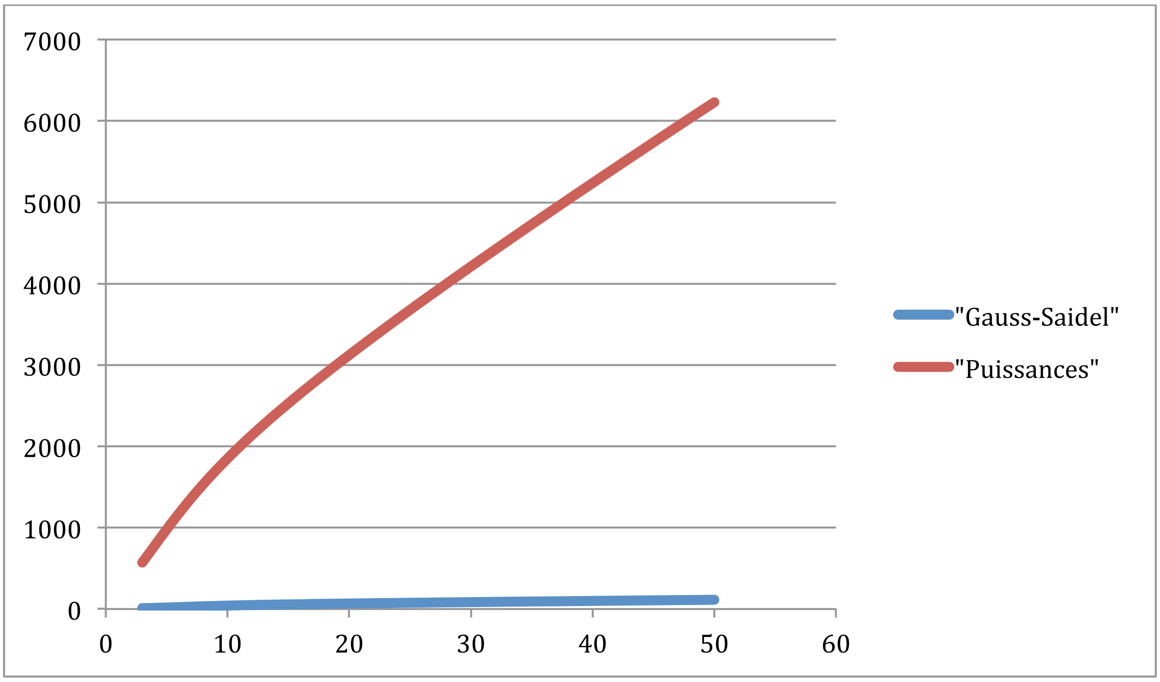
Lors du calcul du vecteur Pi, pour une itération de n, on aura K+1 itérations de j afin de calculer le vecteur Pi.
La méthode de Gauss-Seidel utilise durant l'itération n les valeurs des pi anciennement calculées durant celle-ci, c'est à dire de pi_0 à pi_{j-1}, tandis que la méthode des puissances utilisent uniquement les valeurs des pi de l'itération n-1.
Cela explique que la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement.

Question 2

Pour K=6, p=0.02, q=0.01, e=10^{-5}, nous obtenons les résultats suivants :
- méthode Exacte :
[0,0075 0,0153 0,0308 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037]
- méthode des Puissances : arrêt à n = 1379
[0,0076 0,0155 0,0311 0,0626 0,1261 0,2542 0,5029]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 27
[0,0075 0,0153 0,0309 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037]

Question 3

Graphe du nombre d'itérations (ordonnées) par rapport au nombre d'états (abscisses) pour les méthodes Puissances et Gauss-Seidel.



Nous observons sur cet exemple que la méthode de Gauss-Seidel converge beaucoup plus vite.

Question 4

(k,p,q) : (6,0.02,0.01)
- méthode des Puissances : arrêt à n = 1174
[0,0079 0,0159 0,0316 0,0630 0,1263 0,2538 0,5016]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 24
[0,0075 0,0153 0,0309 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037]

(k,p,q) : (6,0.9,0.9)
- méthode des Puissances : arrêt à n = 146
[0,0192 0,1920 0,1921 0,1923 0,1925 0,1926 0,0193]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 33
[0,0192 0,1923 0,1923 0,1923 0,1923 0,1923 0,0192]

(k,p,q) : (6,0.9,0.01)
- méthode des Puissances : arrêt à n = 10
[0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0111 0,9889]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 4
[0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0111 0,9889]

(k,p,q) : (6,0.1,0.9)
- méthode des Puissances : arrêt à n = 16
[0,8889 0,1097 0,0014 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 9
[0,8889 0,1097 0,0014 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000]

(k,p,q) : (6,0.0020,0.0010)
- méthode des Puissances : arrêt à n = 6721
[0,0118 0,0218 0,0391 0,0702 0,1293 0,2461 0,4817]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 24
[0,0078 0,0157 0,0314 0,0629 0,1260 0,2522 0,5039]

Question 5

En conclusion de tous ces exemples, la méthode Gauss-Seidel est toujours plus performante que la méthode des Puissances.

Exercice 3

Question 1

Le graphe associé à la CMTD de l'exercice 3 est représentée par la matrice de transition suivante lorsqu'elle est tronquée à une valeur K :

départ\arrivé	0	1	2	...	K-1	K
0	1-p+p*r	p*(1-r)	0	...	0	0
1	r	(1-p)*(1-r)	p*(1-r)	...	0	0
2	r	0	(1-p)*(1-r)	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...
K-1	r	0	0	...	(1-p)*(1-r)	p*(1-r)
K	r	0	0	...	0	(1-p)*(1-r)

Pour implémenter cette matrice nous utilisons l'algorithme suivant :
Soit m une matrice.
Soit set(i,j,v) l'opération permettant d'initialiser la ligne i et la colonne j à la valeur v.

```
m.set(0,0, 1-p+r*p);
for (int i=1; i<=k; i++){
     m.set(i,0, r );
     m.set(i-1,i, p*(1-r) );
     m.set(i,i, (1-p)*(1-r) );
}
```

Question 2

Pour k=6, p=2/5, r=1/6 et e=10^{-5}, nous obtenons les résultats suivants :
- méthode Exacte :
[0,3541 0,2360 0,1574 0,1049 0,0699 0,0466 0,0311]
- méthode des Puissances : arrêt n = 18
[0,3447 0,2337 0,1585 0,1074 0,0729 0,0494 0,0335]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2
[0,3541 0,2360 0,1574 0,1049 0,0699 0,0466 0,0311]

Question 3

(k,p,q) : (6,2/5,1/6)
- méthode Exacte :
[0,3541 0,2360 0,1574 0,1049 0,0699 0,0466 0,0311]
- méthode des Puissances : arrêt n = 18
[0,3447 0,2337 0,1585 0,1074 0,0729 0,0494 0,0335]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2
[0,3541 0,2360 0,1574 0,1049 0,0699 0,0466 0,0311]

(k,p,q) : (20,2/5,1/6)
- méthode Exacte :
[0,3334 0,2223 0,1482 0,0988 0,0659 0,0439 0,0293 0,0195 0,0130 0,0087 0,0058 0,0039 0,0026 0,0017 0,0011 0,0008 0,0005 0,0003 0,0002 0,0002 0,0001]
- méthode des Puissances : arrêt n = 26
[0,3334 0,2223 0,1482 0,0988 0,0659 0,0439 0,0293 0,0195 0,0130 0,0087 0,0058 0,0038 0,0026 0,0017 0,0011 0,0007 0,0005 0,0003 0,0002 0,0002 0,0001]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2
[0,3334 0,2223 0,1482 0,0988 0,0659 0,0439 0,0293 0,0195 0,0130 0,0087 0,0058 0,0039 0,0026 0,0017 0,0011 0,0008 0,0005 0,0003 0,0002 0,0002 0,0001]

(k,p,q) : (6,0.1,0.9)
- méthode Exacte :
[0,9890 0,0109 0,0001 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000]
- méthode des Puissances : arrêt n = 6
[0,9890 0,0109 0,0001 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2
[0,9890 0,0109 0,0001 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000]

(k,p,q) : (6,0.9,0.1)
[0,1972 0,1755 0,1562 0,1391 0,1238 0,1102 0,0981]
- méthode des Puissances : arrêt n = 6
[0,1727 0,1617 0,1513 0,1416 0,1325 0,1240 0,1161]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2
[0,1972 0,1755 0,1562 0,1391 0,1238 0,1102 0,0981]

Plus petite est la chaîne produite par la troncature k, plus grande est la probabilité de chacun des états de i=0 à k.

Question 4

Pour K=6, lambda = 1, T=1, r= 1/6, lorsque les arrivées de clients sont poissoniennes, nous obtenons les résultats suivants :
- matrice :
[0,6934 0,3066 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000]
[0,1667 0,5268 0,1533 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000]
[0,1667 0,0000 0,6801 0,0511 0,0000 0,0000 0,0000]
[0,1667 0,0000 0,0000 0,7822 0,0128 0,0000 0,0000]
[0,1667 0,0000 0,0000 0,0000 0,8206 0,0026 0,0000]
[0,1667 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,8308 0,0004]
[0,1667 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,8329]
- méthode des Puissances : arrêt n = 72

[0,4297 0,3106 0,1856 0,0655 0,0081 0,0003 0,0001]
- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2
[0,4911 0,3181 0,1524 0,0358 0,0025 0,0000 0,0000]