Projektna naloga iz Statistike

David Čadež

1 Prva naloga

Pri prvi nalogi bomo obravnavali izobrazbo 43.866 družin, ki stanujejo v mestu Kibergrad. Pomagali si bomo z enostavnim vzorčenjem in ocenjevali delež družin, v katerih vodja gospodinjstva nima srednješolske izobrazbe.

Najprej definiramo novo spremenljivko Y, ki je indikator dogodka *vodja gospodinjstva nima srednješolske izobrazbe*. Delež gospodinjstev, v katerih vodja nima srednješolske izobrazbe je v tem primeru povprečje spremenljivke Y na populaciji.

Pomagal sem si s programom **naloga1.py**, ki vrne spodnji izhod, ko ga poženemo.

```
a) Ocena za delež je 0.200.
b) Ocena za standardno napako je 0.02829,
interval zaupanja pa je (0.14455, 0.25545).
c) Da, interval zaupanja pokrije populacijski delež: 0.21150
Prava standardna napaka je enaka 0.02888.
d) Pri n=200 92.0% intervalov zaupanja pokrije populacijski delež.
e) Standardni odklon vzorčnih deležev za n=200 je 0.02902,
prava standardna napaka za vzorec velikosti 200 pa 0.02888
f) Pri n=800 98.0% intervalov zaupanja pokrije populacijski delež.
Standardni odklon vzorčnih deležev za n=800 je 0.01209,
prava standardna napaka za vzorec velikosti 800 pa 0.01431
```

a) Pri prvi podnalogi vzamemo slučajen vzorec velikosti 200. Ker želimo oceniti pričakovano vrednost na populaciji, za cenilko vzamemo enostavno povprečje na vzorcu. S programom **naloga1.py** sem dobil oceno za delež $\hat{d} = 0{,}200$.

b) Standardno napako ocenimo z nepristransko cenilko

$$\widehat{\mathrm{SE}}_+^2 = \frac{N-n}{Nn} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

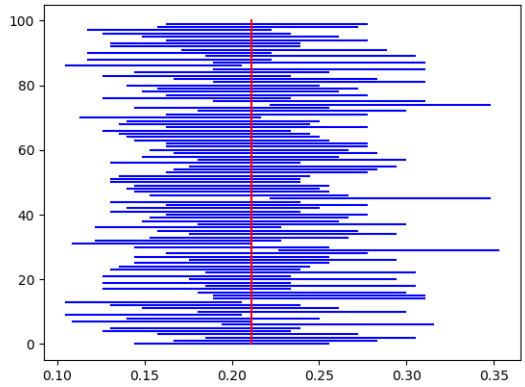
Program **naloga1.py** na podlagi vzorca vrne približek 0,02829. Z uporabo te ocene za standardno napako lahko izračunamo interval zaupanja kot

$$\mathrm{CI} = (\hat{d} - 1{,}96\widehat{\mathrm{SE}}_+^2, \hat{d} + 1{,}96\widehat{\mathrm{SE}}_+^2).$$

Program **naloga1.py** vrne interval zaupanja $(0.14455, 0.25545)$.

c) Pravi delež ljudi, ki nimajo srednješolske izobrazbe je približno 0,21150, torej zgornji interval zaupanja pokrije populacijski delež. Prava standardna napaka pa je približno 0,02888.

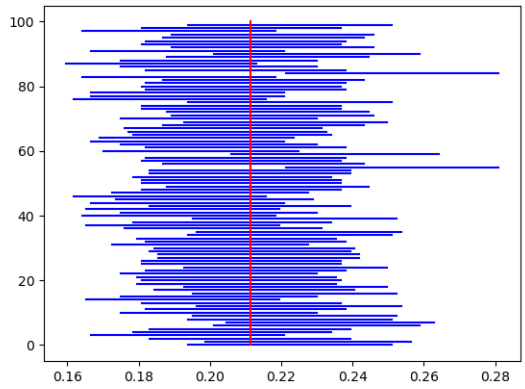
d) Vzemimo sedaj še 99 novih enostavnih slučajnih vzorcev in pri vsakem določimo interval zaupanja. Na sliki **??** so narisani ti intervali zaupanja. Program izračuna, da jih 92 % pokrije populacijsko povprečje, kar je blizu 95 %.



Slika 1: Intervali zaupanja za 100 enostavnih slučajnih vzorcev velikosti 200. Z rdečo je označeno populacijsko povprečje.

e) Standardni odklon vzorčnih deležev je približno 0,02902, kar je približno enako kot standardna napaka za vzorec velikosti 200.

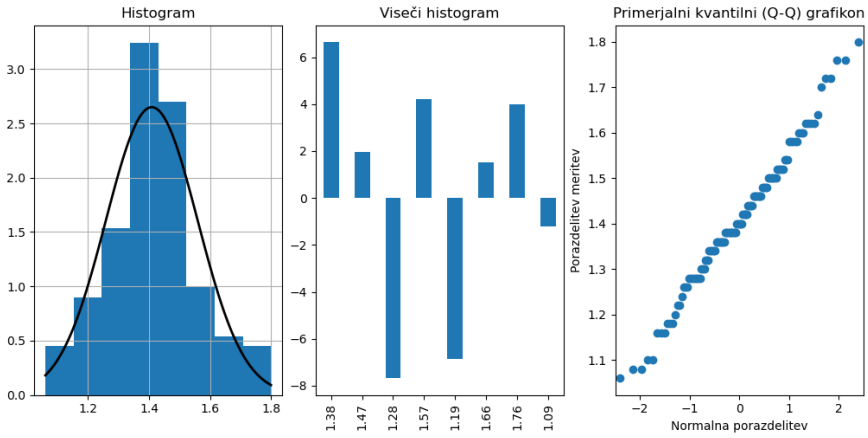
f) Sedaj pa izvedimo podobno še na 100 vzorcih velikosti 800. Na sliki **??** vidimo, da so intervali v povprečju ožji kot na sliki **??**. To je zato, ker je standardni odklon vzorčnih deležev manjši, če vzamemo večje deleže. Standardni odklon vzorčnih deležev teh 100 vzorcev velikosti 800 je približno 0,01209. Torej je res manjši od iste vrednosti za manjše vzorce. Prava standardna napaka za vzorec velikosti pa je enaka 0,01431. Če bi vzeli več vzorcev, bi bil standardni odklon vzorčnih deležev v povprečju bližje pravi standardni napaki za vzorec te velikosti.



Slika 2: Intervali zaupanja za 100 enostavnih slučajnih vzorcev velikosti 800. Z rdečo je označeno populacijsko povprečje.

2 Druga naloga

Pri drugi nalogi smo opazovali normalnost empirične porazdelitve. V obdobju 24 dni so vsak dan analizirali pet odlitkov. Te odlitke sem združil v seznam dolžine 120, ki vsebuje vrednosti vseh odvzetih odlitkov.



Slika 3: Na levi strani je histogram, kjer so prikazani vsi odlitki, hkrati je pa dorisana krivulja normalne porazdelitve, ki to empirično porazdelitev najbolje aproksimira. Na sredini je viseči histogram, ki za vsak razred podatkov nariše razliko med pričakovanim deležem podatkov in empiričnem deležem podatkov v tem razredu. Na desni pa je primerjalni kvantilni (Q-Q) diagram, ki primerja normalno in empirično porazdelitev.

Podatke smo združili v razrede po modificiranem Freedman-Diaconisovem pravilu. Najprej smo izračunali interkvartilni razmik po enačbi

$$IQR = x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}},$$

kjer sta $x_{\frac{3}{4}}$ tretji kvartil in $x_{\frac{1}{4}}$ prvi kvartil. Nato smo z uporabo interkvartilnega razmika izračunali še širino intervalov d po formuli

$$d = \frac{2{,}6\ IQR}{\sqrt[3]{n}}.$$

V našem primeru po tej metodi širina intervalov znaša 0,09488.

3 Tretja naloga

Pri tretji nalogi obravnavamo mesečne temperature v Ljubljani v letih od 1986 do 2020. Najprej sem podatke združil v seznam dolžine 420.

Obravnaval bom model A, ki je linearen trend s sinusnim nihanjem s periodo eno leto, in model B, ki je linearen trend s spreminjanjem temperature vsak mesec posebej. Model A lahko opišemo s konfiguracijsko matriko

$$X_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \\ 1 & 2 & \sin(\frac{2\pi}{6}) & \cos(\frac{2\pi}{6}) \\ 1 & 3 & \sin(\frac{3\pi}{6}) & \cos(\frac{3\pi}{6}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 418 & \sin(\frac{418\pi}{6}) & \cos(\frac{418\pi}{6}) \\ 1 & 419 & \sin(\frac{419\pi}{6}) & \cos(\frac{419\pi}{6}) \end{bmatrix},$$

model B pa z matriko

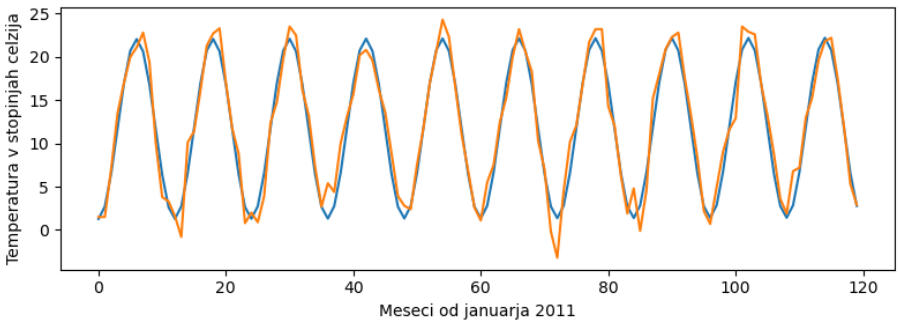
$$X_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 417 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 418 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 419 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na predavanjih smo pokazali, da je ocena za vektor β po metodi največjega verjetja enaka vektorju $\hat{\beta} = \left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1} X^{\mathrm{T}}Y$, kar je natanko rešitev predoločenega sistema $X\beta = Y$ po metodi najmanjših kvadratov (s predpostavko, da je X polnega ranga). Tu je Y vektor opažanj.

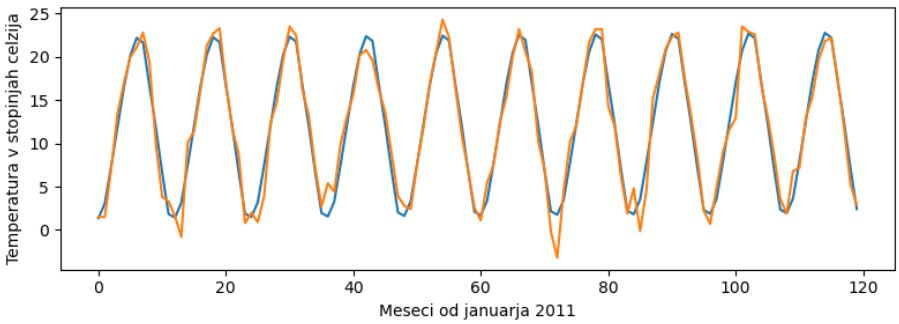
Označimo z β_A in β_B oceni parametrov modelov A in B. S programom **naloga3.py** izračunamo

$$\hat{\beta_A} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.091 \\ -10.39 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \hat{\beta_B} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ -11.504 \\ -9.801 \\ -5.486 \\ -0.949 \\ 3.617 \\ 7.28 \\ 9.292 \\ 8.733 \\ 3.704 \\ -1.033 \\ -6.301 \\ -11.095 \end{bmatrix}.$$

Rezultati se zdijo smiselni, saj bo nihanje skozi leto res izgledalo podobno grafu nasprotne vrednosti kosinusa. Podobno iz $\hat{\beta_B}$ razberemo, da so pozimi temperature nižje od povprečja, poleti pa višje. Prvi komponenti vektorjev $\hat{\beta_A}$ in $\hat{\beta_B}$ predstavljata linearen trend, ki je pri obeh modelih pozitiven, torej so se temperature v opazovanem času v povprečju dvignile.



Slika 4: Na grafikonu sta narisani dve krivulji. Oranžna označuje empirične podatke, modra pa oceno znotraj modela A.



Slika 5: Na grafikonu sta narisani dve krivulji. Oranžna označuje empirične podatke, modra pa oceno znotraj modela B.

Pri drugem delu naloge smo izračunali Akaikejevo informacijo