Programiranje I: 2. izpit

25. avgust 2020

Čas reševanja je 150 minut. Veliko uspeha!

1. naloga

a) Napišite funkcijo za izračun kota med dvema ravninskima vektorjema.

```
angle_between: float * float -> float * float -> float
```

b) Napišite funkcijo, ki sezname dolžine tri pretvori v trojico, sicer pa vrne `None`.

```
list_to_triple : 'a list -> ('a * 'a * 'a) option
```

c) Definirajte zapisni tip `counter` s celoštevilskimi polji `lt`, `eq` in `gt`. Funkcija `compare_with` sprejme seznam in vrednost ter vrne koliko elementov seznama je manjših, enakih oziroma večjih kot podana vrednost. Rezultat naj bo tipa `counter`, za vse točke pa naj se funkcija po seznamu sprehodi zgolj enkrat.

```
compare_with : 'a list -> 'a -> counter
```

d) Napišite funkcijo, ki sestavi kompozitum seznama funkcij.

```
apply_all : ('a -> 'a) list -> 'a -> 'a
```

Kot primer, `apply_all [f1; f2; f3]` vrne funkcijo, ki `x` preslika v `f1(f2(f3(x)))`. Za vse točke naj bo kompozitum sestavljen tako, da med izvajanjem ne pride do stack overflow napake. Kot test lahko uporabite:

```
let long_test = List.init 1000000 (fun _ -> (+) 1) in
apply_all long_test 0
```

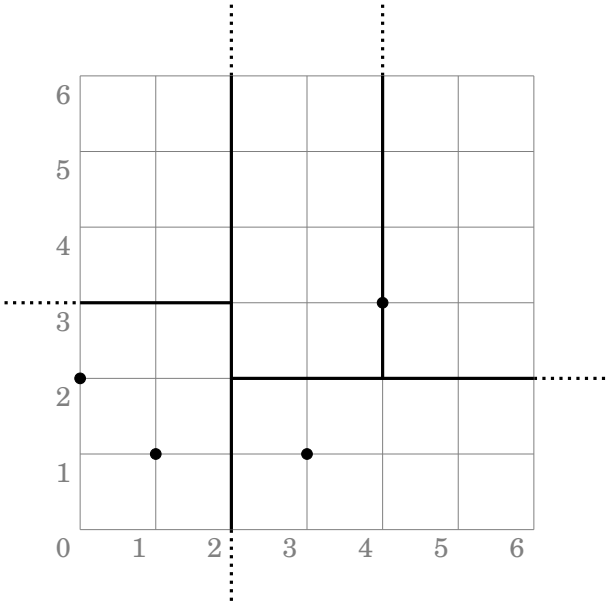
2. naloga

Za razvrščanje točk v ravnini uporabljamo *delilna drevesa*. Vozlišča drevesa razdelijo ravnino (po x ali y koordinati), v listih pa se nahaja seznam vseh elementov v podravnini.

```
type xytree =
  | Xsplit of int * xytree * xytree
  | Ysplit of int * xytree * xytree
  | Elements of (int * int) list
```

Vozlišče `Xsplit (2, lt, rt)` ravnino razdeli glede na premico $x = 2$. V poddrevesu `lt` se nahajajo točke s prvo koordinato *manjšo ali enako* 2, v `rt` pa točke s prvo koordinato večjo od 2. Vrstni red točk v seznamih ni pomemben.

a) Definirajte primer delilnega drevesa `example`, ki ga prikazuje slika. Točke naj bodo vstavljene v pravilno podravnino.



b) Napišite funkcijo `num_of_elements`, ki prešteje število točk, ki jih vsebuje delilno drevo.

```
# num_of_elements example;;
- : int = 4
```

c) Definirajte funkcijo `insert` za vstavljanje točk v delilno drevo.

d) Definirajte funkcijo `alternates`, ki preveri ali delilno drevo izmenično uporablja delilno koordinato. To pomeni, da če na prvem koraku ravnino delimo glede na x-os, jo v drugem glede na y in tako naprej.

e) Napišite funkcijo `boxed_correctly`, ki preveri ali so vsi elementi v delilnem drevesu v pravilnem vozlišču.

3. naloga

Nalogo lahko rešujete v Pythonu ali OCamlu.

Parnost permutacije π definiramo kot parnost števila njenih *inverzij*, torej takih parov števil $i < j$, da velja $\pi_i > \pi_j$. Na primer, identična permutacija je soda, ker nima inverzij, permutacija

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

pa je liha, saj ima tri inverzije: $\rho_1 > \rho_4$, $\rho_2 > \rho_4$ in $\rho_3 > \rho_4$. Enostavno lahko preverimo (pa tudi pri *Algebri 1* ste se učili), da:

- je kompozitum dveh sodih ali dveh lihih permutacij soda permutacija,
- je kompozitum sode in lihe permutacije liha permutacija,
- je cikel $(123\ldots n)$ liha permutacija natanko tedaj, kadar je n sod.

Napišite funkcijo `soda`, ki sprejme naravno število n in ob vsakem klicu vrne naključno izbrano *sodo* permutacijo prvih n naravnih števil. Funkcija naj deluje v času $O(n)$, porabi naj največ $O(n)$ dodatnega prostora, vsaka permutacija pa naj se pojavi z enako verjetnostjo (ki je za $n < 2$ enaka 1, sicer pa $\frac{2}{n!}$). Pravilnost rešitve utemeljite v komentarjih.