Capitolo 2: SOLUZIONI serie di ripetizione

(esercizi tratti da test di anni precedenti)

1. Determinare il tempo di dimezzamento di una sostanza radioattiva se dopo un anno rimane il 99.57 percento della quantità iniziale.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow N(1) = N_0 \cdot e^{-\lambda} \stackrel{!}{=} \frac{99,57}{100} N_0 \Rightarrow \lambda = -\ln\left(\frac{99,57}{100}\right)$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{\ln\left(\frac{99,57}{100}\right) \cdot t} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} N_0$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(1/2)}{\ln\left(\frac{99,57}{100}\right)} \cong 160,85 \text{ anni}$$

2. Un contenitore avente una temperatura iniziale T_0 viene inserito in un forno a temperatura T_F con $T_F > T_0$. La velocità di riscaldamento del contenitore è proporzionale al quadrato della differenza tra la sua temperatura e quella del forno. Sapendo che $T_F = 200°$ e che la temperatura del contenitore passa da $20°$ a $100°$ in 5 minuti, determinare la funzione $T(t)$ che misura la temperatura del contenitore in funzione del tempo. Dopo quanti minuti il contenitore avrà raggiunto la temperatura massima?

$$\begin{cases} \dot{T} = K(T-200)^2 \\ T(0) = 20 \\ T(5) = 100 \end{cases}$$

$$\int \frac{dT}{(T-200)^2} = \int K\,dt$$

$$-\frac{1}{T-200} = Kt + C$$

$$T - 200 = -\frac{1}{Kt+C}$$

$$\Rightarrow T(t) = 200 - \frac{1}{Kt+C}$$

$$\begin{cases} T(0) = 20 \\ T(5) = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 = 200 - \frac{1}{C} \\ 100 = 200 - \frac{1}{5K+C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{180} \\ K = \frac{1}{1125} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(t) = 200 - \frac{1}{\frac{t}{1125} + \frac{1}{180}} = 200 - \frac{4500}{4t+25}$$

$$T(t^*) = 200 : \lim_{t \to +\infty} \left(200 - \frac{4500}{4t+25}\right) = 200$$

raggiunge i 200 solo per $t \to +\infty$

3. Risolvere la seguente equazione differenziale ai valori iniziali:

(a) $\begin{cases} y' = \dfrac{3x}{y} \\ y(2) = -3 \end{cases}$ (disegnare anche la soluzione e indicarne il dominio)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{y} \quad \Rightarrow \quad \int y\,dy = \int 3x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = 3\frac{x^2}{2} + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 3x^2 + C$$

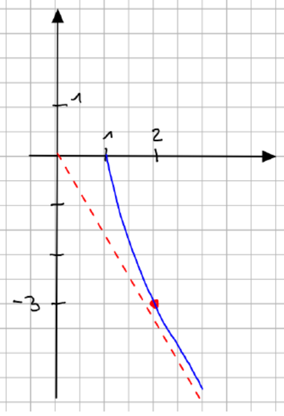
$$y = \pm\sqrt{3x^2 + C}$$

ma $y(2) = -3$ quindi $-3 = -\sqrt{12+C} \Rightarrow 9 = 12 + C$

$$\Rightarrow 9 = 12 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -3$$

$$\boxed{y = -\sqrt{3x^2 - 3}} \quad \left(= -\sqrt{3}\,\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\boxed{D = [1; +\infty[}$$



(b) $\begin{cases} y' + xy\sqrt{x^2+1} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y' + xy\sqrt{x^2+1} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + c_1$$

$$|y| = e^{c_1} e^{-\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$y(x) = c\,e^{-\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = c\,e^{-\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad c = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\frac{1}{3}\left(1 - (x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right)}$$

4. Risolvere la seguente equazione differenziale ai valori iniziali:

(a) $\begin{cases} y' + 2xy = e^{-x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y' + 2xy = e^{-x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$p(x) = 2x \qquad q(x) = e^{-x^2}$$

$$\mu(x) = \int 2x\,dx = x^2$$

$$e^{\mu(x)} = e^{x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{e^{x^2}} \int e^{x^2} \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{e^{x^2}} (x + c) = x \cdot e^{-x^2} + c e^{-x^2}$$

$$y(0) = 1 \iff 1 = c$$

$$\Rightarrow y(x) = (x+1) e^{-x^2}$$

(b) $\begin{cases} (x^2+1)y' + 3xy - 3x = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Data $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x)$, la sol. è $y(x) = e^{-\mu(x)} \cdot \int e^{\mu(x)} \cdot q(x) dx$, dove $\mu(x)$ è una primitiva qualsiasi di $p(x)$. Perciò con $y' + \underbrace{\frac{3x}{(x^2+1)}}_{p(x)} y = \underbrace{\frac{3x}{(x^2+1)}}_{q(x)}$ otteniamo:

$$\mu(x) = \int \frac{3x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + k = \ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k, \text{ e con } k = 0$$

$$y(x) = e^{-\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int e^{\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{3x}{x^2+1} dx = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot \int (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x dx = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C \right]$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 + C \cdot (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \text{ con } y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = 1 + (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

METODO 3:

$$(x^2+1)y' = 3x \cdot (1-y) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{3x}{(x^2+1)} dx$$

$$\Leftrightarrow -\ln(|1-y|) = \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + k \overset{\tilde{C} = \pm e^k}{\Leftrightarrow} 1 - y = \tilde{C}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \overset{C = -\tilde{C}}{\Leftrightarrow} y = 1 + C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Se $y(0) = 2$ allora $y(x) = 1 + (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$.

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali ai valori iniziali:

(a) $\begin{cases} 4y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 4y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y(0) = 5 \end{cases} \longrightarrow p(r) = 4r^2 + 4r + 5 \stackrel{!}{=} 0$

$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{4 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-64}}{8} = \frac{-4 \pm 8i}{8}$

$\Rightarrow S = \{-\frac{1}{2} \pm i\}$

$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{-1/2 t} \cos t + c_2 e^{-1/2 t} \sin t$

$y'(t) = c_1 \cdot \frac{-1}{2} e^{-1/2 t} \cos t - c_1 e^{-1/2 t} \sin(t) - \frac{1}{2} c_2 e^{-1/2 t} \sin t + c_2 e^{-1/2 t} \cos t$

$\Rightarrow y(0) = c_1 \stackrel{!}{=} 2$

$y'(0) = -\frac{1}{2} c_1 + c_2 = 5 \longrightarrow c_2 = 5 + 1 = 6$

$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = 2e^{-1/2 t} \cos t + 6e^{-1/2 t} \sin t}}$

(b) $\begin{cases} w'' + w' + w = 0 \\ w(0) = 2 \\ w'(0) = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} w'' + w' + w = 0 \\ w(0) = 2 \\ w'(0) = -1 \end{cases}$

$w'' + w' + w = 0$

$p(r) = r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \left(\begin{matrix} \alpha = -1/2 \\ \beta = \sqrt{3}/2 \end{matrix}\right)$

$w(t) = c_1 e^{-1/2 t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + c_2 e^{-1/2 t} \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t)$

$w'(t) = -\frac{1}{2} c_1 e^{-1/2 t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t) - \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 e^{-1/2 t} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t) - \frac{1}{2} c_2 e^{-1/2 t} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t) + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 e^{-1/2 t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t)$

$\begin{cases} w(0) = 2 \\ w'(0) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + 0 = 2 \longrightarrow c_1 = 2 \\ -\frac{1}{2} c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 = -1 \longrightarrow c_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow w(t) = 2e^{-1/2 t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t)$

6. Data l'equazione differenziale: $y^{(4)} - a^4 y = 0$.

(a) determinarne la soluzione generale;

(b) determinare la soluzione particolare che soddisfa le condizioni: $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -a^2 \\ y'''(0) = 0 \end{cases}$

$$y^{(4)} - a^4 y = 0$$

$$r^4 - a^4 = 0$$

$$(r^2 - a^2)(r^2 + a^2) = 0 \Rightarrow (r+a)(r-a)(r^2+a^2) = 0$$

$$r_1 = -a$$
$$r_2 = a$$
$$r_{3,4} = \pm i a \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0 \\ \beta = a \end{pmatrix}$$

$$y(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{at} + c_3 \cos(at) + c_4 \sin(at)$$

$$y'(t) = -a c_1 e^{-at} + a c_2 e^{at} - a c_3 \sin(at) + a c_4 \cos(at)$$

$$y''(t) = a^2 c_1 e^{-at} + a^2 c_2 e^{at} - a^2 c_3 \cos(at) - a^2 c_4 \sin(at)$$

$$y'''(t) = -a^3 c_1 e^{-at} + a^3 c_2 e^{at} + a^3 c_3 \sin(at) - a^3 c_4 \cos(at)$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -a^2 \\ y'''(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ -a c_1 + a c_2 + a c_4 = 0 \\ a^2 c_1 + a^2 c_2 - a^2 c_3 = -a^2 \\ -a^3 c_1 + a^3 c_2 - a^3 c_4 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ -c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = -1 \\ -c_1 + c_2 - c_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = c_2 \\ c_4 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2c_1 + c_3 = 1 \\ 2c_1 - c_3 = -1 \end{matrix} \Big] \begin{matrix} 1 - c_3 = -1 + c_3 \\ c_3 = 1 \\ c_1 = 0 \end{matrix}$$

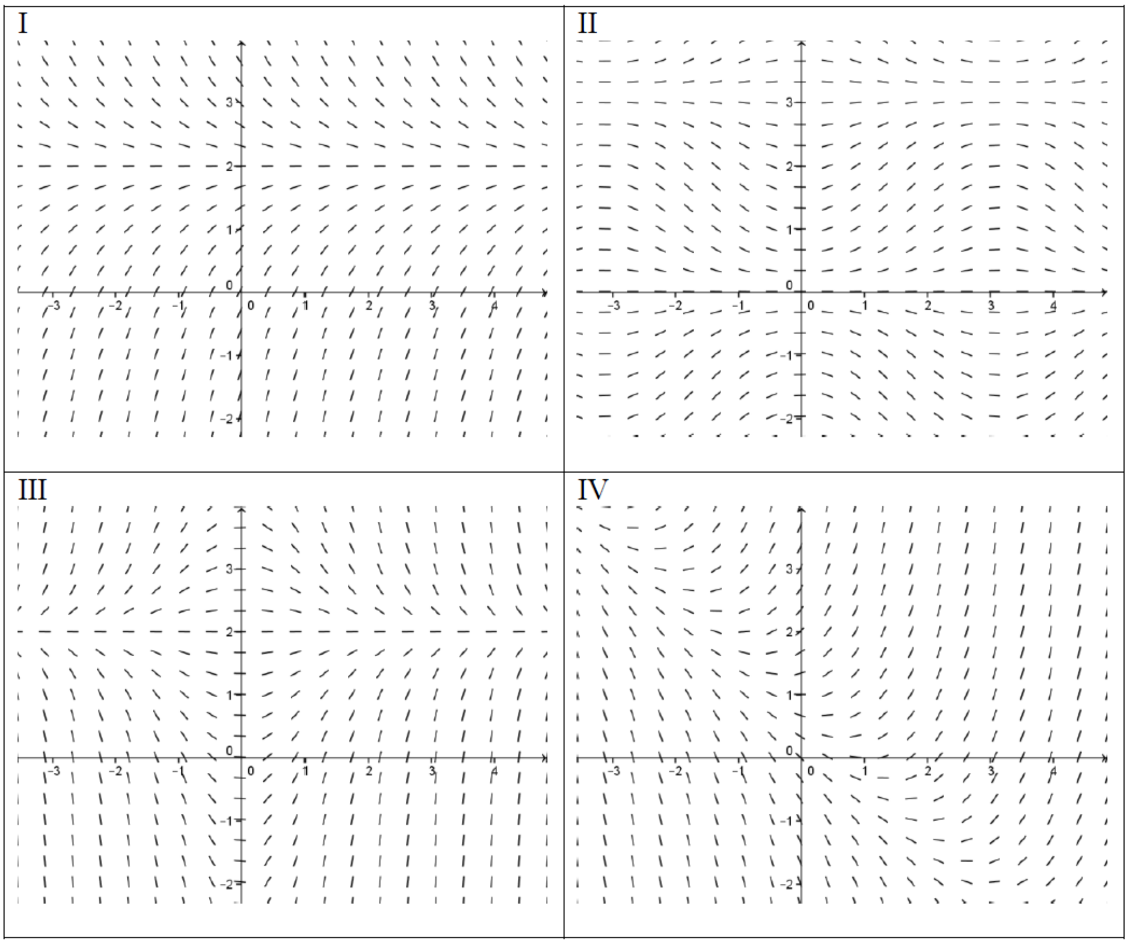
$$\begin{cases} c_1 = c_2 = c_4 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

$$y(t) = \cos(at)$$

7. È data l'equazione differenziale [A]: $y' = x \cdot (2 - y)$.

(a) La si risolva.

(b) Sapendo che uno dei quattro campi di direzione raffigurati (numerati da I a IV), rappresenta l'equazione differenziale data, lo si identifichi e si schizzi in esso la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = -1$.



(c) Gli altri tre campi di direzione sono definiti dalle seguenti equazioni differenziali:

[B] $y' = 2 - y$

[C] $y' = x + y - 1$

[D] $y' = \sin(x) \cdot \sin(y)$

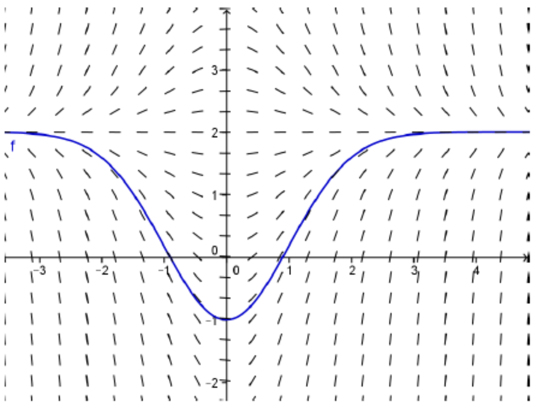
Si associ ad ogni equazione differenziale il campo di direzione che le corrisponde (numerato da I a IV), motivando la scelta fatta.

a)

$$y' = x \cdot (2-y) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y-2} = -\int x dx \Leftrightarrow \ln|y-2| = -\frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow y = 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow y(x) = 2 - 3e^{-\frac{x^2}{2}}$$

b) Per $x>0$: se $y>2$, y' è negativo, risp. se $y<2$, y' è positivo.
Per $x<0$: se $y>2$, y' è positivo, risp. se $y<2$, y' è negativo. Solo III presenta questa caratteristica.
Oppure: quando $y=2$ si ha $y'=0$. Solo I e III presentano questa caratteristica. Inoltre $y'|_{(-x,y)} = -y'|_{(x,y)}$: solo III ha questa caratteristica. Dunque A corrisponde a III.
Effettivamente disegnando la funzione trovata $y(x) = 2 - 3e^{-\frac{x^2}{2}}$ si vede che si adatta al campo di direzione:



c) L'ED B quando $y=2$ dà $y'=0$, ed è indipendente da x: solo I ha questa caratteristica.
L'ED D definisce un campo di direzione periodico sia in direzione x che direzione y, dunque corrisponde a II. Dunque per esclusione C deve corrispondere a IV: ma si capisce anche che $y'=0$ quando $y=-x+1$, e si verifica che solo IV ha questa proprietà. Sopra questa retta [ossia quando $y>-x+1$] y' è positivo, sotto negativo.

A-III, B-I, C-IV, D-II

8. Determinare, con il metodo "dell'Ansatz", la soluzione generale delle seguenti equazioni lineari non omogenee:

   (a) $\ddot{x} + x = e^t$

$\ddot{x} + x = e^t$

P.O. $\ddot{x} + x = 0 \Rightarrow p(r) = r^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{pmatrix}$

$x_0(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$

P.P. • $f(t) = e^t$

• $1 \in$ Spettro? NO!

$\overset{\text{Ansatz}}{\Longrightarrow} \quad x_p(t) = b \cdot e^t$

$\dot{x}_p(t) = b \cdot e^t$

$\ddot{x}_p(t) = b \cdot e^t$

$\Rightarrow \quad b \cdot e^t + b \cdot e^t = e^t \quad \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$x_p(t) = \frac{1}{2} \cdot e^t$

Soluzione generale:

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{1}{2} e^t$$

(b) $y''(x) - 3y(x) = 2 - 6x$

$y''(x) - 3y(x) = 2 - 6x$

P.O. $y'' - 3y = 0$

$p(r) = r^2 - 3 \overset{!}{=} 0 \qquad r_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

$y_o(x) = c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x}$

P.P. • $f(x) = 2 - 6x$

• $0 \in$ Spettro? NO!

$\Rightarrow$ Ansatz: $y_p(x) = b_0 + b_1 \cdot x$

$y_p'(x) = b_1$

$y_p''(x) = 0$

$\Rightarrow 0 - 3(b_0 + b_1 x) = 2 - 6x$

$-3b_0 - 3b_1 x = 2 - 6x$

$\Rightarrow b_0 = -\frac{2}{3} \qquad b_1 = 2$

$y_p(x) = -\frac{2}{3} + 2x$

Soluzione generale:

$y(x) = c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x} - \frac{2}{3} + 2x$

(c) $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 8\sin(2x)$

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 8\sin(2x)$$

<u>P.O.</u> $y'' + y' - 2y = 0$

$$p(r) = r^2 + r - 2 = 0$$

$$(r+2)(r-1) = 0 \qquad r_1 = 1 \quad r_2 = -2$$

$$y_0(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$$

<u>P.P.</u> $f(x) = 8\sin(2x)$

$\pm 2i \in$ Spettro ? NO!

$\Rightarrow$ <u>Ansatz</u>:
$$y_p(x) = b_1\cos(2x) + b_2\sin(2x)$$
$$y_p'(x) = -2b_1\sin(2x) + 2b_2\cos(2x)$$
$$y_p''(x) = -4b_1\cos(2x) + 4b_2\sin(2x)$$

$$-4b_1\cos(2x) + 4b_2\sin(2x) - 2b_1\sin(2x) + 2b_2\cos(2x)$$
$$-2b_1\cos(2x) - 2b_2\sin(2x) \stackrel{!}{=} 8\sin(2x)$$

$$\cos(2x)\left(-4b_1 + 2b_2 - 2b_1\right) + \sin(2x)\left(4b_2 - 2b_1 - 2b_2\right) = 8\sin(2x)$$

$$\begin{cases} -6b_1 + 2b_2 = 0 & \rightarrow \quad b_2 = 3b_1 \longrightarrow b_2 = 6 \\ 2b_2 - 2b_1 = 8 & \longrightarrow \quad 4b_1 = 8 \\ & \qquad\quad b_1 = 2 \end{cases}$$

$$y_p(x) = 2\cos(2x) + 6\sin(2x)$$

<u>Soluzione generale</u>:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + 2\cos(2x) + 6\sin(2x)$$

9. Risolvere le seguenti equazioni differenziali ai valori iniziali:

(a) $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = \sin(3t) \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = \sin(3t)$

P.O. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$

$p(r) = r^2 + 4r + 13 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i$ $\quad \alpha = -2$, $\beta = 3$

$\Rightarrow x_0(t) = C_1 e^{-2t} \cos(3t) + C_2 e^{-2t} \sin(3t)$

P.P: • $f(t) = \sin(3t)$

• $\pm 3i \in$ Spettro? NO!

$\Rightarrow$ Ansatz: $x_p(t) = b_1 \cos(3t) + b_2 \sin(3t)$

$\dot{x}_p(t) = -3b_1 \sin(3t) + 3b_2 \cos(3t)$

$\ddot{x}_p(t) = -9b_1 \cos(3t) - 9b_2 \sin(3t)$

$\Rightarrow \cos(3t)\left(-9b_1 + 12b_2 + 13b_1\right) + \sin(3t)\left(-9b_2 - 12b_1 + 13b_2\right) = \sin(3t)$

$\begin{cases} 4b_1 + 12b_2 = 0 \longrightarrow b_1 = -3b_2 \longrightarrow b_1 = -3/40 \\ 4b_2 - 12b_1 = 1 \longrightarrow 4b_2 + 36b_2 = 1 \longrightarrow b_2 = 1/40 \end{cases}$

$x_p(t) = -\frac{3}{40}\cos(3t) + \frac{1}{40}\sin(3t)$

Soluzione generale:

$x(t) = C_1 e^{-2t} \cos(3t) + C_2 e^{-2t} \sin(3t) - \frac{3}{40}\cos(3t) + \frac{1}{40}\sin(3t)$

$\dot{x}(t) = -2C_1 e^{-2t} \cos(3t) - 3C_1 e^{-2t} \sin(3t) - 2C_2 e^{-2t} \sin(3t) + 3C_2 e^{-2t} \cos(3t) + \frac{9}{40}\sin(3t) + \frac{3}{40}\cos(3t)$

$\begin{cases} x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 - 3/40 = 2 \longrightarrow C_1 = 83/40 \\ -2C_1 + 3C_2 + \frac{3}{40} = 1 \longrightarrow C_2 = 203/120 \end{cases}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{83}{40} e^{-2t} \cos(3t) + \frac{203}{120} e^{-2t} \sin(3t) - \frac{3}{40}\cos(3t) + \frac{1}{40}\sin(3t)$

(b) $\begin{cases} y'' + y' = x^2 + x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y'' + y' = x^2 + x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

$y_0(x)$: $\quad P(x) = x^2 + x = x(x+1) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -1$

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$$

$y_p(x)$: $\quad y_p(x) = x \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) =$

$$= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3$$

$$y_p'(x) = a_0 + 2a_1 x + 3a_2 x^2$$

$$y_p''(x) = 2a_1 + 6a_2 x$$

$$y_p'' + y_p' \overset{!}{=} x^2 + x$$

$$3a_2 x^2 + (6a_2 + 2a_1)x + a_0 + 2a_1 \overset{!}{=} x^2 + x$$

$$\begin{cases} 3a_2 = 1 \\ 6a_2 + 2a_1 = 1 \\ a_0 + 2a_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = \frac{1}{3} \\ a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_0 = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow y_p(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 e^{-1} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -\frac{5e+6}{6(e-1)} \\ c_2 = \frac{11e}{6(e-1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{5e+6}{6(e-1)} + \frac{11e}{6(e-1)} e^{-x} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

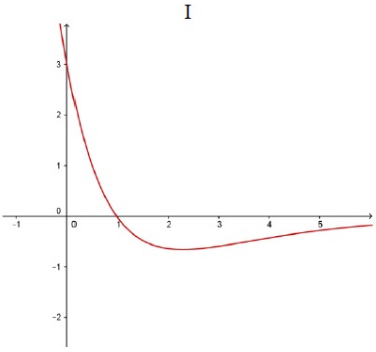
10. È data l'equazione differenziale del secondo ordine $2y'' + 2y' + 5y = 0$.

(a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale.

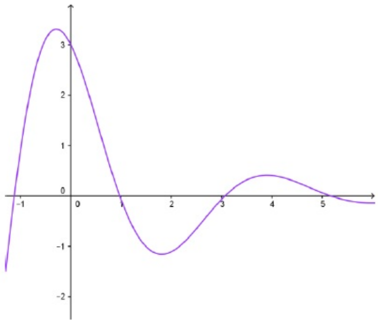
(b) Determinare la soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali: $y(0) = 3$ e $y'(0) = -2$

(c) Quale dei seguenti grafici può corrispondere alla soluzione particolare determinata nel punto (b)? Motivare la risposta.

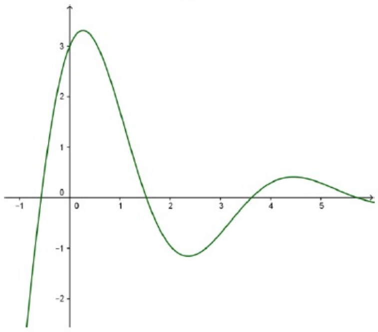
I



II



III



a) Polinomio caratteristico: $p(r) = 2r^2 + 2r + 5$, $\quad p(r) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{36}}{4} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{3}{2}i$

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left[C_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right) \right]$$ soluzione generale dell'ED.

b) Se $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$ vale:

$$y'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left[C_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}t\right) \right] + \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left[-C_1 \sin\left(\frac{3}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \right]$$

dunque $C_1 = 3$ e $-\dfrac{1}{2} \cdot [C_1] + \dfrac{3}{2} \cdot [C_2] = -2 \Leftrightarrow C_2 = -\dfrac{1}{3}$

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left[3\cos\left(\frac{3}{2}t\right) - \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3}{2}t\right) \right].$$

c) È il grafico II poiché corrisponde a quello di un'oscillazione smorzata (ossia con zeri del polinomio caratteristico complessi) e $y'(0)$ è negativo (mentre nel III è positivo) .

Domande multiple choice

1. Si consideri il problema ai valori iniziali $\frac{1}{3}y' = y^2$, con $y(2) = 1$. La soluzione del problema è:

   $\boxed{\text{A}}$ $y(t) = \frac{1}{(5-2t)^2}$

   $\boxed{\text{B}}$ $y(t) = -\frac{1}{3t} + \frac{7}{6}$

   $\boxed{\text{C}}$ $y(t) = \frac{1}{7-3t}$

   $\boxed{\text{D}}$ $y(t) = \frac{-1}{t-3}$

   $\boxed{\text{E}}$ $y(t) = \frac{-1}{3t+c}$, con $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{3}\frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 3\,dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = 3t + c \Rightarrow y = \frac{1}{-3t-c}$$

$$y(2) = \frac{1}{-6-c} = 1 \Rightarrow -6-c = 1 \Rightarrow c = -7$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{7-3t}$$

Risposta $\boxed{\text{C}}$

2. Quale delle seguenti funzioni non può essere la soluzione di un'equazione differenziale del tipo $ay'' + by' + cy = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$?

   $\boxed{\text{A}}$ $y(t) = 4e^{2t} - te^{2t}$

   $\boxed{\text{B}}$ $y(t) = \sin t - 3\cos(2t)$

   $\boxed{\text{C}}$ $y(t) = 8\sin(3t) + 5\cos(3t)$

   $\boxed{\text{D}}$ $y(t) = e^{-t}(-2\sin(6t) + \cos(6t))$

   $\boxed{\text{E}}$ $y(t) = 3e^{-2t} - 6e^{4t}$

Risposta $\boxed{\text{B}}$

$y(t) = \sin(t) - 3\cos(2t)$

Frequenze diverse $\Rightarrow$ possibile solo se l'eq. differenziale ha ordine 4 o sup!

$\boxed{\text{A}}$ Spettro $= \{2\}$ (molt. 2)

$\boxed{\text{C}}$ Spettro $= \{\pm 3i\}$

$\boxed{\text{D}}$ Spettro $= \{-1 \pm 6i\}$

$\boxed{\text{E}}$ Spettro $= \{-2; 4\}$

3. A quale delle seguenti equazioni differenziali è associato il seguente campo direzionale?

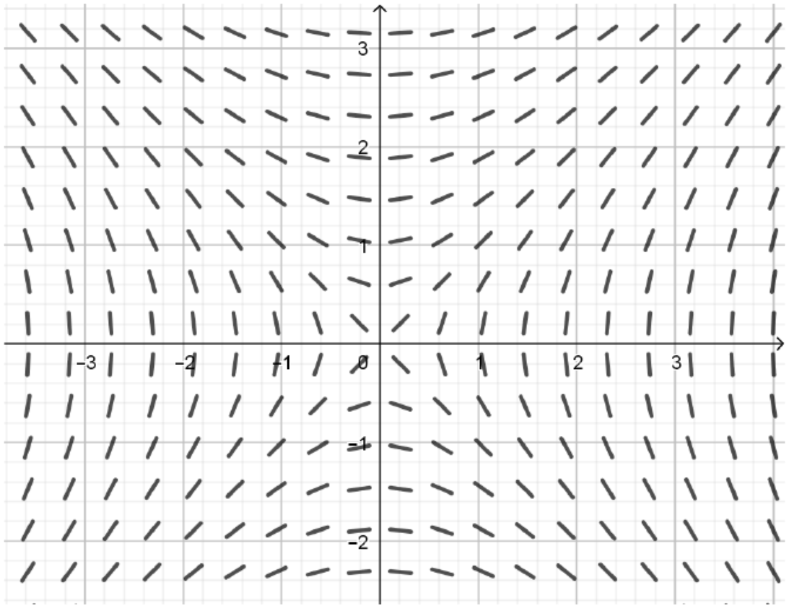
[A] $y' = \dfrac{x-y}{x}$

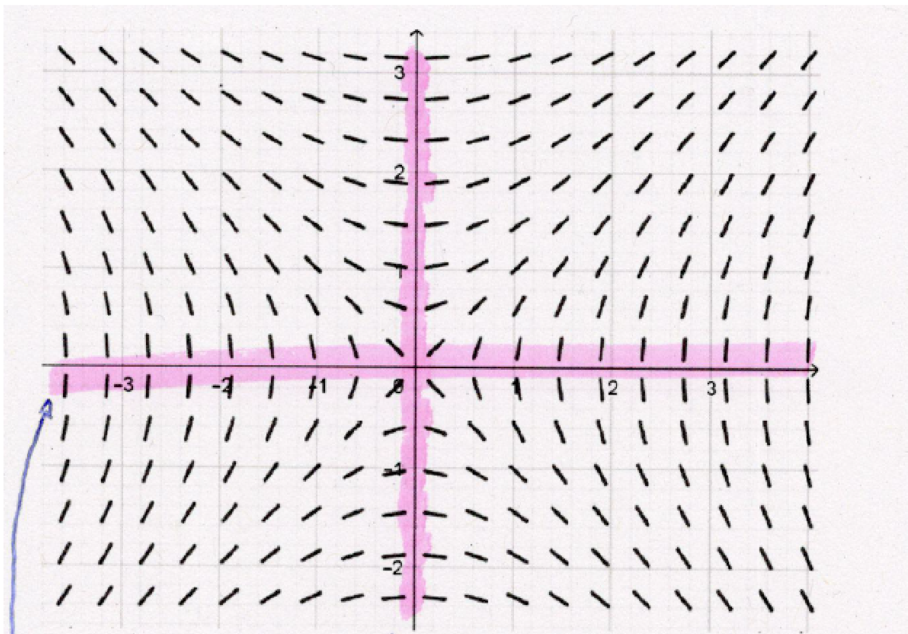
[B] $y' = \dfrac{x+y}{y-x}$

[C] $y' = xy$

[D] $y' = \dfrac{x}{y}$

[E] $y' = \dfrac{x+y}{x}$



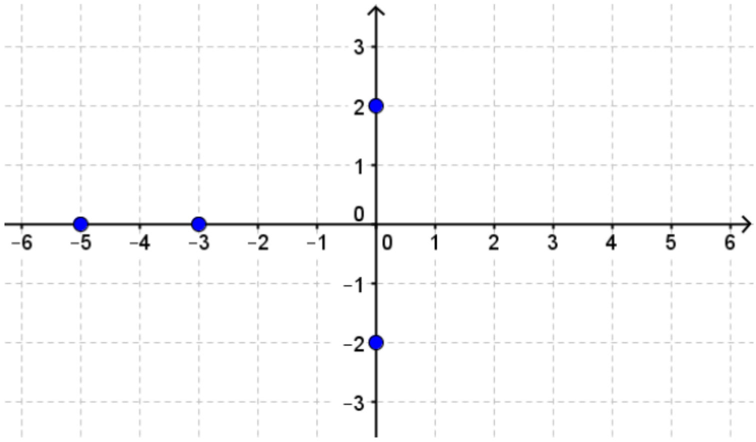


$\hookrightarrow x=0 \Rightarrow y'(t)=0$

$y=0 \Rightarrow y'(t) \to \pm\infty$

$\Rightarrow$ Risposta $\boxed{D}$

4. Nel seguente piano di Gauss è rappresentato lo spettro di una data equazione differenziale (Δ).



Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o sono false:

Spettro = $\{\pm 2i ; -3 ; -5\}$

(a) L'equazione differenziale Δ ha ordine 4 o superiore.

Vero!

Lo spettro di (Δ) ha 4 soluzioni distinte
(non si hanno informazioni sulle molteplicità degli zeri)
$\Rightarrow$ L'ordine dell'eq. differenziale è "almeno" 4.

(b) $f(t) = 3e^{-3t}$ è una soluzione di Δ.

Supponiamo che tutti gli elementi dello spettro hanno molteplicità 1:

$\Rightarrow y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-5t} + C_3 \sin(t) + C_4 \cos(t) \quad (*)$

poniamo $C_1 = 3$ e $C_2 = C_3 = C_4 = 0$

$\Rightarrow$ affermazione Vera!

(c) Sia $f(t)$ una soluzione qualsiasi di Δ. Allora vale che $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$.

come visto in (b) da $(*)$ segue che
$y(t) = \sin(t) \quad (C_1 = C_2 = C_4 = 0 ; C_3 = 1)$
è una soluzione di (Δ)

$\Rightarrow \lim_{t\to-\infty} f(t) \neq 0$

$\Rightarrow$ affermazione Falsa!

5. La soluzione generale dell'equazione differenziale $x'' - 7x' + 12x = 6e^t$ è:

$\boxed{\text{A}}$ $x(t) = Ae^{3t} + Be^{4t} + 6e^t$ con $A, B \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{B}}$ $x(t) = Ae^{-3t} + Be^{-4t} + e^t$ con $A, B \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{C}}$ $x(t) = Ae^{-3t} + Be^{-4t}$ con $A, B \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{D}}$ $x(t) = Ae^{-3t} + Be^{-4t} + 6e^t$ con $A, B \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{E}}$ $x(t) = Ae^{3t} + Be^{4t}$ con $A, B \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{F}}$ $x(t) = Ae^{3t} + Be^{4t} + e^t$ con $A, B \in \mathbb{R}$

<u>PO</u>: $x'' - 7x' + 12x = 0$

$P(r) = r^2 - 7r + 12 = (r-4)(r-3) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow r_1 = 3 \quad r_2 = 4$

$x_o(t) = Ae^{3t} + Be^{4t}$

<u>P.P.</u>
- $f(t) = 6e^t$
- $1 \notin S$

$\Big\}$ Ansatz: $x_p(t) = be^t = x_p'(t) = x_p''(t)$

$\Rightarrow be^t - 7be^t + 12be^t = 6e^t$

$6be^t = 6e^t \Rightarrow b = 1$

$x_p(t) = e^t$

$\Rightarrow$ <u>Soluzione generale</u>: $x(t) = Ae^{3t} + Be^{4t} + e^t$

Risposta $\boxed{\text{F}}$

6. Una data popolazione $y(t)$ cresce secondo l'equazione differenziale $y'(t) = k \cdot y(t)$, dove k è una costante e t è il tempo misurato in anni. Sapendo che la popolazione raddoppia ogni 10 anni, allora vale che:

$\boxed{\text{A}}$ $k = \frac{\ln(2)}{10}$ $\boxed{\text{B}}$ $k = 10$ $\boxed{\text{C}}$ $k = 2$ $\boxed{\text{D}}$ $k = \frac{1}{10}$ $\boxed{\text{E}}$ $k = \frac{1}{2}$

$y' = ky \Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{kt}$

$\begin{cases} y(0) = N_0 \\ y(10) = 2 N_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = C_1 = N_0 \\ y(10) = C_1 \cdot e^{10k} = 2 \cdot N_0 \end{cases}$

$\Rightarrow N_0 \cdot e^{10k} = 2 \cdot N_0 \Rightarrow e^{10k} = 2$

$10k = \ln(2)$

$k = \frac{\ln(2)}{10}$ Risposta $\boxed{E}$