Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento tecnologie innovative

SUPSI

Esercizi di verifica
Capitolo 2
Algebra lineare 2

1) È data la matrice di Jacobi A_{3x3} definita da: $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

a) Scrivere la matrice A e calcolare $\| A \|$ e $k(A)$ (approssimazione a 3 cifre decimali).

b) Sia $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2{,}9290 \\ 2{,}0199 \\ 1{,}6032 \end{pmatrix}$. Determinare la soluzione $\vec{x}$ del sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Si consideri quindi una perturbazione sui dati dovuta ad un'approssimazione a 2 cifre decimali. Calcolare l'errore relativo sulla soluzione e quello sui dati, interpretando i risultati ottenuti mediante la condizione della matrice A.

2) È data la matrice $F = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ a & -2 \end{pmatrix}$, $a > 0$.

a) Calcolare $\| F \|$ e $k(F)$ in funzione del parametro reale a.

b) Stabilire per quali valori del parametro reale $a > 0$ si ha che $k(F) = 5$.

c) Determinare per tali valori di a i vettori $\vec{x}$ che realizzano $\| F \| = \max\limits_{\vec{x} \neq \vec{0}} \dfrac{\|F \cdot \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$.

d) Si consideri, nelle stesse ipotesi del punto b), il sistema $F \cdot \vec{x} = \vec{b}$. A fronte di un errore relativo sui dati dello 0.2%, stabilire il valore percentuale massimo che può raggiungere l'errore relativo sulla soluzione.

3) Sia data la matrice $F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove a è un parametro reale, $a \geq 0$.

a) Determinare la condizione $k(F)$ al variare del parametro reale $a \geq 0$.

b) Stabilire quindi per quali valori del parametro $a \geq 0$ la condizione $k(F)$ risulta minima.

4) È data la matrice $A = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Risolvere il sistema di ED $\dot{\vec{u}}(t) = A\vec{u}(t)$, $\vec{u}(0) = \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$ noto che $\vec{u}(8) = \begin{pmatrix} e^4 + e \\ e^4 + e^2 \\ e^2 + e \end{pmatrix}$.

5) Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Risolvere il sistema di ED $\dot{\vec{u}}(t) = A\vec{u}(t)$, $\vec{u}(0) = \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ in modo che il vettore soluzione $\vec{u}(t)$ abbia come componenti <u>solo</u> delle sinusoidi.

b) Calcolare quindi in forma esatta $\vec{u}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.