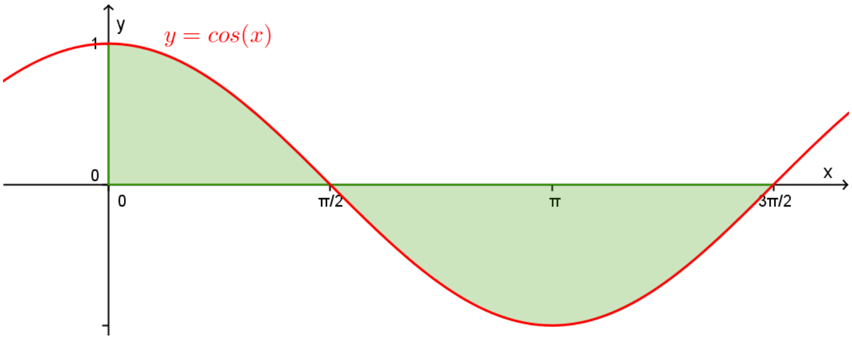
1 Applicazioni degli integrali

1.1 Calcolo di aree

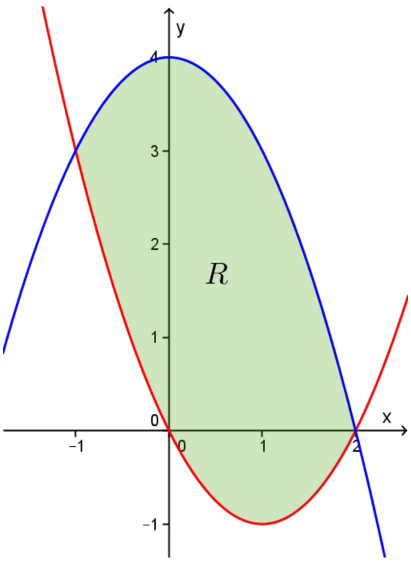
Come abbiamo già visto nel corso di Analisi 1 una delle applicazioni degli integrali è il calcolo di aree piane. Rivediamo e estendiamo questo concetto con alcuni esempi.

- L'area della superficie evidenziata in figura è $A = \int_0^{3\pi/2} |\cos x|\, dx$



$$A = \int_0^{3\pi/2} |\cos x|\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos x)\, dx =$$
$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = (1-0)-(-1-1) = 3.$$

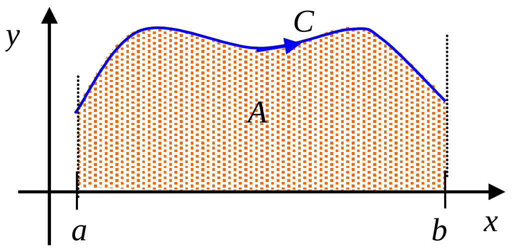
- Per determinare l'area della regione R piana e limitata, compresa fra le curve $y = x^2 - 2x$ e $y = 4 - x^2$, dobbiamo per prima cosa determinare le intersezioni delle curve, risolvere cioè il sistema
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$$
si ottiene: $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$ (in questo caso le coordinate y non ci interessano).
Perciò l'area A (evidenziata in figura) è data da:

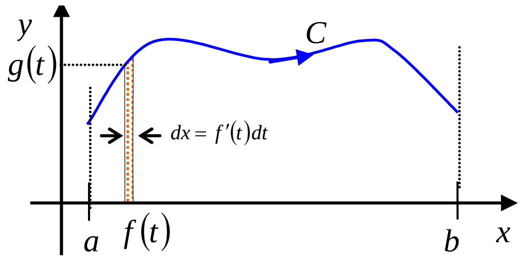


$$A = \int_{-1}^{2} \left((4-x^2)-(x^2-2x)\right) dx =$$
$$= \int_{-1}^{2} (4-2x^2+2x)\, dx =$$
$$= \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 8 + 4 - \left(-4 + \frac{2}{3} + 1\right) = 9$$

Aree delimitate da curve parametriche

Consideriamo la curva parametrica C con equazioni $x = f(t),\ y = g(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$, dove f è derivabile e g continua in $[\alpha, \beta]$. Supponiamo per il momento che $f'(t) \ge 0$ e $g(t) \ge 0$ in $[\alpha, \beta]$, per cui C non ha punti sotto l'asse x ed è percorsa da sinistra a destra quando t varia da α a β. Poniamo $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$.

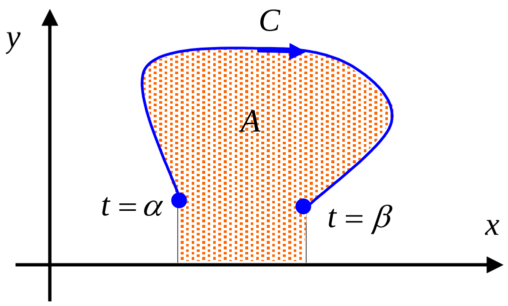




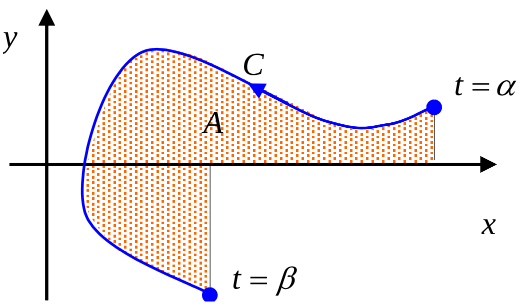
Si ha pertanto

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t)\,dt \,.$$

Nei seguenti due casi le aree ombreggiate si determinano:



$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t)\,dt$$



$$A = -\int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t)\,dt$$

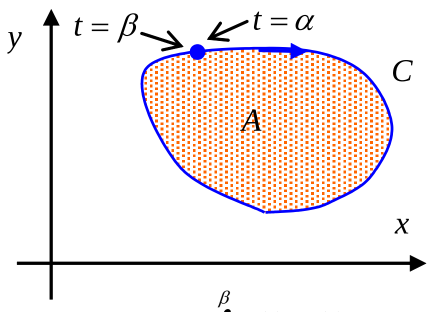
In particolare se C è una curva chiusa che non si autointerseca, allora l'area della regione delimitata da C è data da:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t)\,dt$$

se C è percorsa in verso orario quando t aumenta,

$$A = -\int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t)\,dt$$

se C è percorsa in verso antiorario .



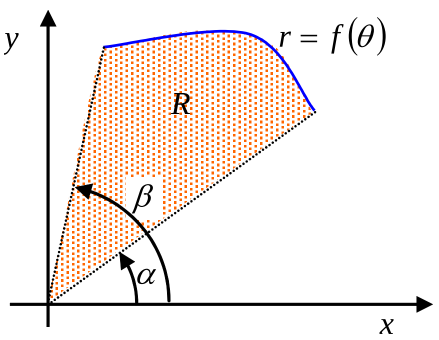
$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t)\,dt$$

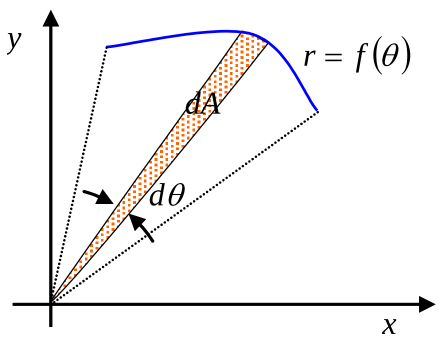
- Determinare l'area delimitata dall'ellisse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $(0 \le t \le 2\pi)$.
  Questa ellisse è percorsa in senso antiorario (se $0 \le t \le 2\pi$).
  L'area racchiusa è:

$$A = -\int_0^{2\pi} g(t) f'(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} b\sin t(-a\sin t)\,dt = ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = ab\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi ab$$

Aree delimitate da curve polari

Il problema dell'area in coordinate polari è quello di determinare l'area della regione R delimitata dal grafico polare $r = f(\theta)$ e dai due raggi $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Supponiamo che $\beta > \alpha$ e che f sia continua in $[\alpha, \beta]$.





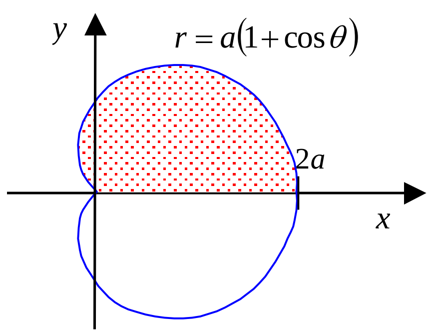
In questo caso l'area della regione R è data da

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,d\theta.$$

Difatti in questo caso l'elemento d'area adatto ad impostare efficacemente il problema è un settore di larghezza angolare $d\theta$. Per $d\theta$ infinitesimo si ha

$$dA = \frac{d\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}(f(\theta))^2\,d\theta.$$

- Determinare l'area delimitata dalla cardioide $r = a(1+\cos\theta)$
  Per simmetria :



$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,d\theta = 2\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^\pi (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^\pi \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta$$

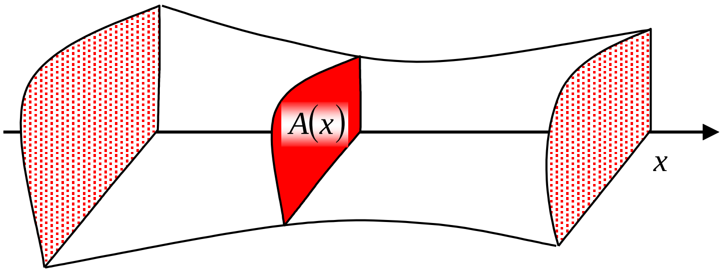
$$= a^2\left(\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

1.2 Calcolo di volumi

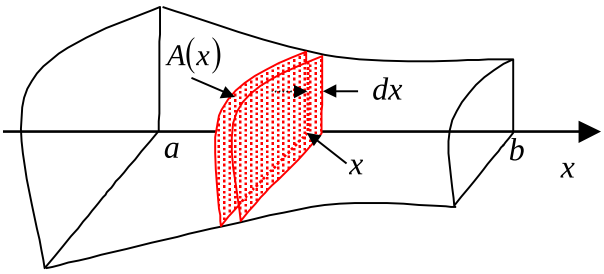
In questo paragrafo mostriamo come il volume di certe regioni tridimensionali (o “solidi”) può essere espresso tramite un integrale definito che ne consente la determinazione.

Volumi a “fette”

La conoscenza del volume del cilindro ci permette di determinare i volumi di alcuni solidi di forma più generale. Mediante piani paralleli possiamo dividere un solido in tante fette sottili. Ciascuna fetta è approssimativamente un cilindro di “altezza” molto piccola, dove l’altezza è rappresentata dallo spessore della fetta. Se si conosce l’area della sezione trasversale di ciascuna fetta, possiamo calcolarne il volume e, sommando i volumi di tutte le fette, determinare il volume del solido.



Per fissare le idee, supponiamo che il solido S sia compreso fra i piani perpendicolari all’asse *x* passanti per $x=a$ e $x=b$ e che l’area della sezione trasversale di S perpendicolare all’asse *x*, passante per *x*, sia una funzione nota $A(x)$, per $a \le x \le b$.



Supponiamo che $A(x)$ sia continua in $[a,b]$. Una fetta del solido compresa fra *x* e $x+\Delta x$ ha spessore Δx e area di base $A(x)$. Essendo continua, $A(x)$ non cambia molto in un intervallo piccolo. In tal caso, se ΔV è il volume della fetta, allora l’errore dell’approssimazione $\Delta V \approx A(x)\Delta x$ è piccolo rispetto al valore di ΔV. Ciò suggerisce che l’elemento di volume, cioè il volume di una fetta infinitamente sottile di spessore *dx*, è $dV = A(x)dx$ e che il volume del solido è la “somma” (cioè l’integrale) di questi elementi di volume compresi fra le due estremità del solido.

Supponiamo che un solido sia compreso fra i piani $x=a$ e $x=b$ e che l’area della sua sezione trasversale sia data dalla funzione continua $A(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora il volume del solido è

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

- Calcolare il volume dell'ellissoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

  La sezione dell'ellissoide con un piano perpendicolare al piano delle ascisse e distante x dall'origine è un'ellisse di equazione

  $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ ovvero

  $\frac{y^2}{d^2}+\frac{z^2}{e^2}=1$ dove

  $d=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ e $e=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

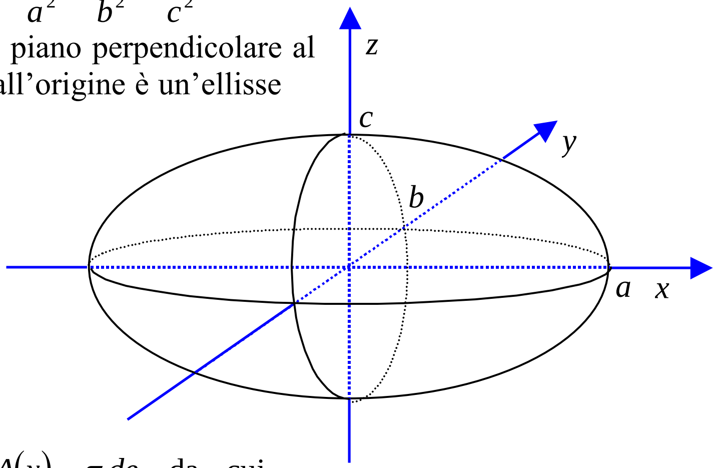
  sono i semiassi.

  Ma l'area dell'ellisse vale $A(x)=\pi\, de$ da cui

  $A(x)=\pi\, bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$.

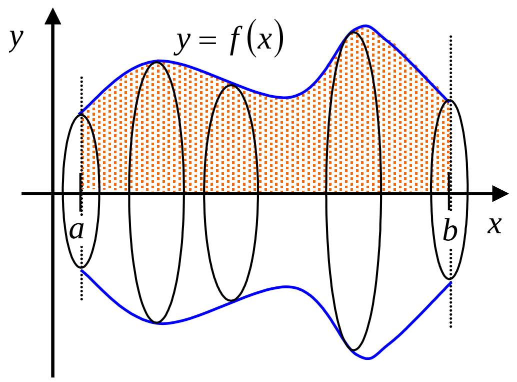
  Il volume dell'ellissoide è uguale quindi a

  $$V=\int_{-a}^{a}A(x)dx=\pi\, bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\, bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi\, abc$$



Solidi di rivoluzione

Le sezioni trasversali di molti solidi, in piani perpendicolari a un determinato asse, sono di forma circolare. Questi solidi sono detti solidi di rivoluzione perché possono essere generati mediante la rotazione di una regione piana attorno a un asse di quel piano.



Se la regione R delimitata da $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ e $x=b$ è fatta ruotare attorno all'asse x, allora il solido così generato ha un cerchio di raggio $|f(x)|$ come sezione trasversale nel piano perpendicolare all'asse x e passante per x.

Quindi il volume del solido di rivoluzione è

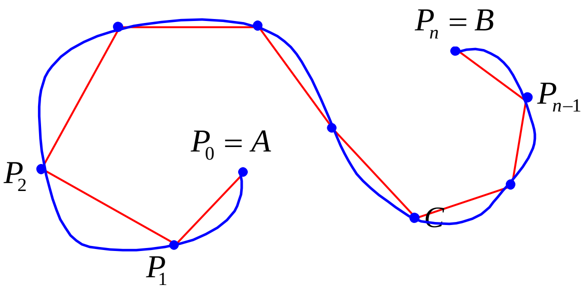
$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

- Se la semicirconferenza $0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}$ è fatta ruotare attorno all'asse *x*, essa genera una sfera di raggio *r* il cui volume è

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

1.3 Lunghezza di un arco di curva

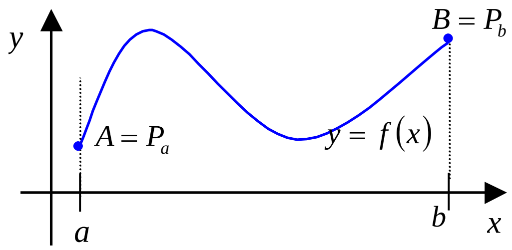
Se *A* e *B* sono due punti del piano, indichiamo con $|AB|$ la distanza compresa fra *A* e *B*, cioè la lunghezza del segmento di linea retta *AB*.



Data una curva *C* che unisce due punti *A* e *B*, possiamo formare una linea poligonale $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$ scegliendo i punti $A = P_0$, P_1, P_2, …, P_{n-1} e $P_n = B$ ordinati lungo la curva, come mostrato in figura. La lunghezza

$$L_n = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \ldots + |P_{n-1}P_n| = \sum_{k=1}^{n} |P_{k-1}P_k|$$

di tale linea poligonale costituisce un'approssimazione della lunghezza della curva e normalmente tale valore aumenta al crescere di *n*, a condizione che le lunghezze di tutti i segmenti $P_{k-1}P_k$ tendano a 0. Se sotto queste condizioni, L_n ha un limite, quel limite è chiamato **lunghezza d'arco** della curva *C*. La lunghezza d'arco è molto spesso indicata con *s*.
Supponiamo che *C* sia il grafico di una funzione *f* la cui derivata f' è continua in $[a,b]$.



La lunghezza d'arco *s* di *C* è data da

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx .$$

Questa formula si ricorda con facilità se la si associa al "triangolo differenziale", che fornisce un espediente mnemonico per ottenere la formula di *s*, difatti $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ ovvero $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ da cui:

$$s = \int_{x=a}^{x=b} ds = \int_a^b \frac{ds}{dx}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

- Determinare la lunghezza della curva $y = x^{2/3}$ da $x = 1$ a $x = 8$.

  Poiché $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, la lunghezza della curva è data da

  $$s = \int_1^8 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_1^8 \sqrt{1+\frac{4}{9}x^{-2/3}}\,dx = \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3x^{1/3}}\,dx = \begin{bmatrix} u = 9x^{2/3}+4 \\ du = 6x^{-1/3}dx \end{bmatrix}$$

  $$= \frac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{1/2}du = \frac{1}{27}u^{3/2}\Big|_{13}^{40} = \frac{40\sqrt{40}-13\sqrt{13}}{27}.$$

Molto spesso, a causa della presenza della radice quadrata nella formula per *s*, i problemi riguardanti la lunghezza d'arco conducono a integrali che possono essere calcolati solo mediante tecniche numeriche.

Lunghezza d'arco delle curve parametriche

Consideriamo la curva parametrica *C* con equazioni $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$, dove $f'(t)$ e $g'(t)$ siano continue in $[\alpha, \beta]$ e mai entrambe nulle.

La lunghezza della curva *C* è data da

$$s = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} ds = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\,dt.$$

- Determinare la lunghezza della curva parametrica
  $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $0 \le t \le 2$.

  Abbiamo $\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$, $\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$.

  Elevando al quadrato, sommando e semplificando, otteniamo

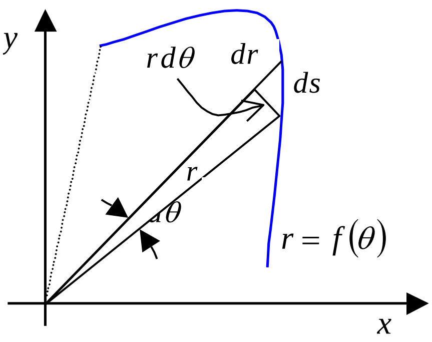
  $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 = 2e^{2t}.$$

  La lunghezza della curva è quindi

  $$s = \int_0^2 \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \sqrt{2}\int_0^2 e^t\,dt = \sqrt{2}e^t\Big|_0^2 = \sqrt{2}\left(e^2 - 1\right).$$

Lunghezza d'arco delle curve polari

L'elemento di lunghezza d'arco della curva polare $r = f(\theta)$ può essere determinato dal triangolo differenziale mostrato in figura. Il cateto $r\,d\theta$ del triangolo è uguale all'arco di un cerchio di raggio *r*, che sottende l'angolo $d\theta$ nell'origine.



Abbiamo

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 = \left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)(d\theta)^2$$

per cui otteniamo la formula seguente:

La lunghezza d'arco della curva polare $r = f(\theta)$ da $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ è

$$s = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\, d\theta .$$

- La lunghezza totale della cardioide $r = a(1+\cos\theta)$ è il doppio della lunghezza da $\theta = 0$ e $\theta = \pi$:

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}\, d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta}\, d\theta \qquad \left(\text{ma} \quad 1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\,a\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2(\theta/2)}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a$$

1.4 Area delle superfici di rivoluzione

Quando una curva piana è fatta ruotare (in tre dimensioni) attorno a una retta del piano in cui giace la curva, essa genera una **superficie di rivoluzione**. Per esempio una sfera di raggio *a* è generata dalla rotazione di un semicerchio di raggio *a* attorno al diametro del semicerchio.

Se $y = f(x)$, $(a \le x \le b)$ è fatta ruotare attorno all'asse *x*, l'area della superficie generata è data da

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx .$$

- Determinare l'area della superficie di una sfera di raggio *a*.

  Tale sfera può essere generata facendo ruotare il semicerchio di equazione $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $(-a \le x \le a)$ attorno all'asse *x*. Ma

$$1+(f'(x))^2 = 1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2 = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

  Perciò

$$S = 2\pi\int_{-a}^{a} |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = 2\pi\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}\, dx = 2\pi a\int_{-a}^{a} dx = 2\pi a x\Big|_{-a}^{a} = 4\pi a^2$$

1.5 Momenti e centro di massa

Si dice che una massa *m* situata nella posizione *x* dell'asse *x* ha un momento *xm* rispetto al punto $x = 0$.
Per un sistema di masse m_1 in (x_1, y_1), m_2 in $(x_2, y_2), \ldots, m_n$ in (x_n, y_n) il **momento rispetto all'asse** *y* $(x = 0)$ è definito da:

$$M_{x=0} = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \ldots + x_n m_n = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k$$

e il **momento rispetto all'asse** *x* $(y = 0)$ è definito da:

$$M_{y=0} = y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + \ldots + y_n m_n = \sum_{k=1}^{n} y_k m_k \ .$$

Il **centro di massa** (baricentro) è il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ le cui coordinate sono definite da:

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} .$$

Nel caso di distribuzioni di massa continue, le somme diventano degli integrali opportuni.

Baricentro di una figura piana

Se consideriamo la regione *R* delimitata da $y = f(x), y = 0$, $x = a$ e $x = b$ $\left(f(x) > 0 \quad \forall x \in \left]a, b\right[\right)$ come figura piana materiale, con densità costante (cioè la massa dell'unità di area e costante in tutti i punti della figura) allora

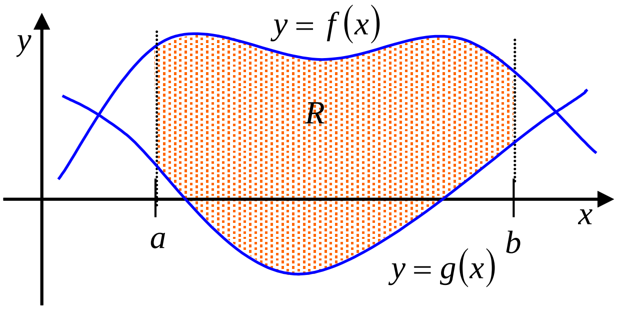
il baricentro di *R* è

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_{x=0}}{A}, \frac{M_{y=0}}{A} \right) \qquad \text{dove}$$

$$A = \int_a^b f(x)dx, \ M_{x=0} = \int_a^b x\, f(x)dx, M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx .$$

- Determinare il baricentro del semidisco, $-r \le x \le r$, $0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}$.
  Per simmetria la coordinata *x* del baricentro è $\bar{x} = 0$.
  Poiché $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, abbiamo
  $$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A} = \frac{2}{\pi r^2}\frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx = \frac{2}{\pi r^2}\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi} .$$
  Perciò il baricentro del semidisco è $\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$.

Oss: le coordinate del baricentro G di una figura piana R delimitata da due funzioni, sono date da:



$$x_G = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x)-g(x)]dx,$$

$$y_G = \frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)+g(x)]\cdot[f(x)-g(x)]dx \quad \text{dove} \quad A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

Baricentro di una curva piana

Sia data una curva materiale piana di equazione $y=f(x)$, $a\le x\le b$. Supponiamo che la densità della curva sia costante (cioè la massa dell'unità di lunghezza di questa curva sia uguale in tutti i punti . Se la funzione f è continua, come pure la sua derivata, allora

il baricentro della curva è

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_{x=0}}{s},\frac{M_{y=0}}{s}\right) \qquad \text{dove}$$

$$s=\int_{x=a}^{x=b} ds = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,\ M_{x=0} = \int_{x=a}^{x=b} x ds = \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$M_{y=0} = \int_{x=a}^{x=b} f(x) ds = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

- Determinare il baricentro della semicirconferenza di equazione $y=\sqrt{r^2-x^2}$ $,-r\le x\le r$.
  Per simmetria la coordinata x del baricentro è $\bar{x}=0$.

  Poiché $s=\frac{1}{2}2\pi r=\pi r$, abbiamo

  $$\bar{y} = \frac{1}{\pi r}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\pi r}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}dx = \frac{2r}{\pi}.$$

  Perciò il baricentro della semicirconferenza è $\left(0,\frac{2r}{\pi}\right)$.

Il teorema di Pappo

Il volume e l'area di un solido di rotazione possono essere calcolati con l'ausilio del teorema di Pappo, conosciuto anche come teorema di Guldino (dal nome del matematico gesuita svizzero Paul Guldin, 1557-1643) a cui è impropriamente attribuito; esso risale infatti al celebre matematico greco Pappo di Alessandria vissuto nel III secolo d.C..

Il teorema di Pappo afferma:

(a) Il volume del solido generato dalla rotazione di una figura piana R intorno a una retta ad essa complanare e che non l'attraversa, è dato dal prodotto dell'area di tale figura per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro.
(b) L'area della superficie generata dalla rotazione di un arco di curva piana C intorno a una retta ad essa complanare e che non l'attraversa, è dato dal prodotto della lunghezza dell'arco di tale curva per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro.

- Facendo ruotare un disco di raggio r attorno ad una retta distante d dal centro del disco ($d > r$), si genera un toro (ciambella) di volume
$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d$$
poiché il baricentro del disco è ovviamente il centro del disco.
L'area della superficie del toro è
$$A = 2\pi r \cdot 2\pi d = 4\pi^2 r d .$$