TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE E MATRICI ASSOCIATE

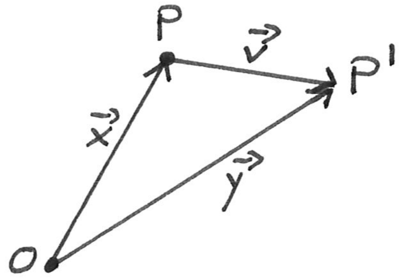
Le trasformazioni geometriche in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ sono AL (e perciò hanno una matrice associata) se non spostano l'origine.

- **TRASLAZIONE DI UN VETTORE $\vec{v}$**

non è un'AL, è definita in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$

$$\tau_{\vec{v}} : P \mapsto P' \quad \Big| \quad \vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$$

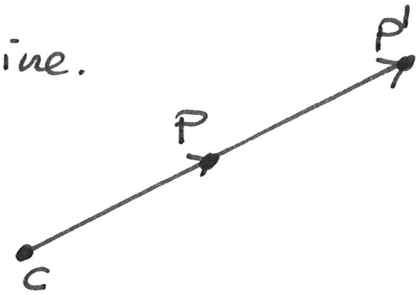
$$\vec{x} \mapsto \vec{y} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+v_1 \\ x_2+v_2 \\ x_3+v_3 \end{pmatrix}$$



- **OMOTETIA DI CENTRO C e rapporto K**

è un'AL solo se il centro C è l'origine.

$$\Omega(C;K) : P \longrightarrow P' \quad \Big| \quad \vec{CP'} = K\vec{CP}$$

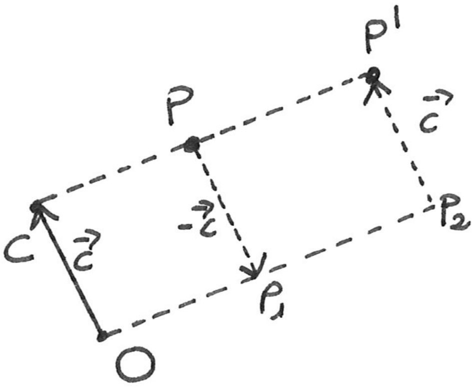


Se $C \equiv O$ La matrice associata è:

in $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = \Omega$

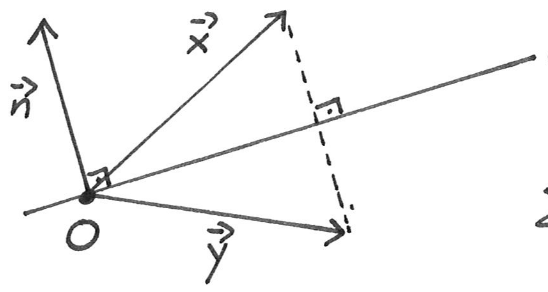
in $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = \Omega$

Se $C \not\equiv O \Rightarrow \Omega(C;K) = \tau_{\vec{c}} \circ \Omega(O,K) \circ \tau_{-\vec{c}}$



$$\Rightarrow \vec{y} = \Omega \cdot (\vec{x} - \vec{c}) + \vec{c}$$

- **SIMMETRIA ASSIALE** in $\mathbb{R}^2$ l'asse è una retta
in $\mathbb{R}^3$ l'asse è un piano



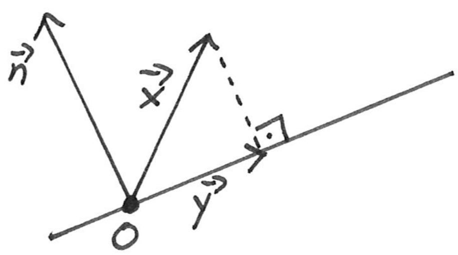
$$\Sigma : \vec{x} \longrightarrow \vec{y} = \vec{x} - 2\,\mathrm{proj}(\vec{x}, \vec{n})$$
$$= \vec{x} - 2\,\frac{\vec{x}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$$
$$= \left(I - 2\,\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}\right)\vec{x}$$

$\Rightarrow$ La matrice S associata è $S = I - 2\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}$

(solo se l'asse passa per l'origine!)

Se l'asse non passa per l'origine $\Rightarrow \vec{y} = S\cdot(\vec{x} - \vec{c}) + \vec{c}$
dove C è un qualunque punto sull'asse e S è la matrice associata alla simmetria rispetto l'asse a'//a e passante per O.

- **PROIEZIONE SU UN ASSE** in $\mathbb{R}^2$ l'asse è una retta
in $\mathbb{R}^3$ l'asse è un piano

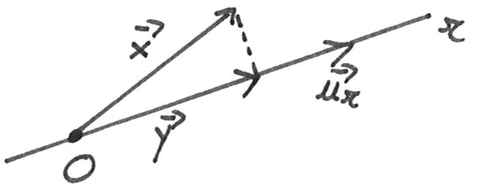


$$P : \vec{x} \longrightarrow \vec{y} = \vec{x} - \mathrm{proj}(\vec{x}, \vec{n})$$
$$= \vec{x} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$$
$$= \left(I - \frac{\vec{n}\vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}\right)\vec{x}$$

$\Rightarrow$ La matrice associata è $P = I - \dfrac{\vec{n}\vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}$ solo se l'asse passa per O

Se l'asse non passa per $O \Rightarrow \vec{y} = P\cdot(\vec{x} - \vec{c}) + \vec{c}$
dove C è un qualunque punto sull'asse e P è la matrice associata alla proiezione sull'asse a'//a e passante per O.

- **PROIEZIONE SU UNA RETTA in $\mathbb{R}^3$** $\quad r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \vec{u_r}$



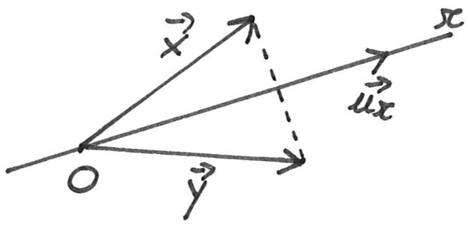
$$\vec{y} = proj_c(\vec{x}, \vec{u_r}) = \frac{\vec{u_r}\,\vec{u_r}^T}{\|\vec{u_r}\|^2}\vec{x}$$

$\Rightarrow$ La matrice associata è $P = \dfrac{\vec{u_r}\,\vec{u_r}^T}{\|\vec{u_r}\|^2}$

Se la retta r non passa per l'origine,

$\Rightarrow \vec{y} = P(\vec{x} - \vec{c}) + \vec{c}$ dove C è un qualunque punto su r
e P è la matrice di proiezione su $r' \parallel r$ per O

- **SIMMETRIA RISPETTO AD UNA RETTA in $\mathbb{R}^3$** $\quad r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \vec{u_r}$



$$\vec{y} = 2 proj_c(\vec{x}, \vec{u_r}) - \vec{x} = \left(\frac{2\vec{u_r}\,\vec{u_r}^T}{\|\vec{u_r}\|^2} - I\right)\vec{x}$$

La matrice associata è $S = \dfrac{2\vec{u_r}\cdot\vec{u_r}^T}{\|\vec{u_r}\|^2} - I$

Se la retta non passa per l'origine,

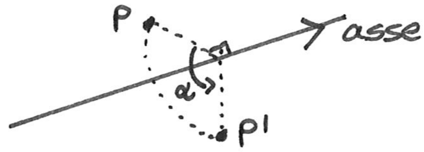
$\Rightarrow \vec{y} = S\cdot(\vec{x} - \vec{c}) + \vec{c}$ dove C è un qualunque punto su r.
e S è la matrice di simmetria rispetto $r' \parallel r$ per O.

- **ROTAZIONE in $\mathbb{R}^2$ attorno ad un punto C di un angolo α**

Se $C \equiv O \Rightarrow R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Se $C \not\equiv O \Rightarrow \vec{y} = R\cdot(\vec{x} - \vec{c}) + \vec{c}$

• ROTAZIONE in $\mathbb{R}^3$ attorno ad un asse (retta) orientata di un angolo α



$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ matrice di rotazione attorno all'asse Ox

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ matrice di rotazione attorno all'asse Oy

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matrice di rotazione attorno all'asse Oz

Se l'asse di rotazione è una retta qualsiasi per O:

$$a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \vec{a} \qquad \text{con } \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix}$$ versore di $\vec{a}$

$$\Rightarrow R_a = \cos\alpha \cdot I + (1-\cos\alpha) \cdot \begin{pmatrix} a_{01}^2 & a_{01}a_{02} & a_{01}a_{03} \\ a_{01}a_{02} & a_{02}^2 & a_{02}\cdot a_{03} \\ a_{01}a_{03} & a_{02}a_{03} & a_{03}^2 \end{pmatrix} +$$

$$- \sin\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{03} & -a_{02} \\ -a_{03} & 0 & a_{01} \\ a_{02} & -a_{01} & 0 \end{pmatrix}$$

Se l'asse di rotazione non passa per l'origine

$\Rightarrow \vec{y} = R_{a'}(\vec{x} - \vec{c}) + \vec{c}$ dove C è un qualunque punto su a e a' è la retta $//$ a per O.

PROPRIETÀ DELLE MATRICI ASSOCIATE ALLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

OMOTETIA : in $\mathbb{R}^2$ $\Omega = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$

$\det(\Omega) = K^2 \quad tr(\Omega) = 2K$

$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{pmatrix} \qquad \Omega^n = \begin{pmatrix} K^n & 0 \\ 0 & K^n \end{pmatrix}$

spettro $S_\Omega = \{K; K\}$

$E_K = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \equiv \mathbb{R}^2$

in $\mathbb{R}^3$ $\Omega = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$

$\det(\Omega) = K^3 \quad tr(\Omega) = 3K$

$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K} \end{pmatrix} \qquad \Omega^n = \begin{pmatrix} K^n & 0 & 0 \\ 0 & K^n & 0 \\ 0 & 0 & K^n \end{pmatrix}$

spettro $S_\Omega = \{K; K; K\}$

$E_K = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \equiv \mathbb{R}^3$

SIMMETRIA ASSIALE $S = I - 2\frac{\vec{n}\vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}$

$\det(S) = -1 \qquad tr(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ 1 & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$

$S^{-1} = S \qquad S^n = \begin{cases} I & n \text{ pari} \\ S & n \text{ disp.} \end{cases}$ S è involutoria

spettro $S_S = \{-1; 1\}$ in $\mathbb{R}^2$; $S_S = \{-1; 1; 1\}$ in $\mathbb{R}^3$

$E_{-1} = <\vec{n}> \qquad E_1 \equiv$ asse

PROIEZIONE SU UN ASSE

$$P = I - \frac{\vec{n}\vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}$$

$\det(P) = 0$ $\quad tr(P) = \begin{cases} 1 & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ 2 & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$

$P^{-1} \nexists$; $P^n = P$ idempotente

spettro : $S_P = \{0; 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ $\quad S_P = \{0; 1; 1\}$ in $\mathbb{R}^3$

$E_0 = \langle \vec{n} \rangle$ $\quad E_1 \equiv$ asse

PROIEZIONE su una retta in $\mathbb{R}^3$

$$P = \frac{\vec{u_r}\vec{u_r}^T}{\|\vec{u_r}\|^2}$$

$\det(P) = 0$ $\quad tr(P) = 1$

$P^{-1} \nexists$; $P^n = P$ idempotente

spettro : $S_P = \{0; 0; 1\}$

$E_1 \equiv$ retta $= \langle \vec{u_r} \rangle$ $\quad E_0 \equiv$ piano $\perp$ retta , passante per O

SIMMETRIA rispetto ad una retta in $\mathbb{R}^3$

$$S = 2\frac{\vec{u_r}\vec{u_r}^T}{\|\vec{u_r}\|^2} - I$$

$\det(S) = 1$ $\quad tr(S) = -1$

$S^{-1} = S$ $\quad S^n = \begin{cases} S & n \text{ disp.} \\ I & n \text{ pari} \end{cases}$ involutoria

spettro : $S_S = \{-1; -1; 1\}$

$E_1 \equiv$ retta $= \langle \vec{u_r} \rangle$ $\quad E_{-1} \equiv$ piano $\perp$ retta, passante per O

ROTAZIONE

$\det(R_\alpha) = 1$

$R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$; $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$