Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento tecnologie innovative

SUPSI

ESAME MODULO M-B3010
PARTE 2 - ALGEBRA LINEARE 2

1. febbraio 2022

Nome : ....

Cognome : ....

Classe : ....

N. fogli all. : ....

Osservazioni:

1. È permesso utilizzare:
   - 2 fogli A4 (fronte/retro) di riassunto **personale**
   - foglio formule trigonometriche
   - riassunto trasformazioni geometriche
   - formulario (es. "Formulari e tavole" Edition G d'Encre)
   - calcolatrice CAS.
2. **Il procedimento di soluzione deve sempre essere comprensibile: risultati non giustificati da un procedimento non verranno accettati.**
3. Se non specificato altrimenti dal testo dell'esercizio, tutti i risultati devono essere scritti in forma esatta e semplificata.
4. Comportamenti illeciti durante l'esame quali copiature, comunicazione tra studenti, utilizzo di sussidi non ammessi (...) verranno sanzionati con l'assegnazione della valutazione F.
5. Durata esame: **90 minuti**

Es.	1	2	3	4	5	6	**TOT**	**VOTO**
Punti	5	7	8	6	8	9	**43**	

1. Sia data la matrice $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$. Scrivere B^4 come combinazione lineare delle matrici B e I usando il teorema di Cayley-Hamilton.

2. Di una matrice quadrata A, 3×3, è noto che:

$$1 \in S_A\,, \quad \mathrm{Ker}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Determinare la matrice A.

(b) Determinare la matrice e^A.

3. Sia A una matrice reale 3×3 tale che $1 + 2i$ è un suo autovalore. È noto che $\mathrm{tr}(A) = 2$.

   (a) La matrice A è invertibile?

   (b) La matrice A è diagonalizzabile?

   Giustificare entrambe le risposte.

4. Si consideri la matrice $F = \begin{pmatrix} \frac{1001}{20} & 0 & -\frac{999}{20} \\ 0 & 100 & 0 \\ -\frac{999}{20} & 0 & \frac{1001}{20} \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare la norma e la condizione della matrice (entrambe in valore esatto).

(b) Sia dato il sistema lineare $F \cdot \vec{x} = \vec{b}$. A fronte di un errore relativo sui dati dello 0.2%, calcolare l'errore relativo massimo che si può commettere sulla soluzione del sistema.

5. Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = k\, u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) = u_1(t) + k\, u_2(t) \end{cases},$$

con condizioni iniziali $u_1(0) = u_2(0) = -1$, e con k parametro reale.

(a) Risolvere il sistema.

(b) Determinare per quali valori del parametro k sia $u_1(t)$ sia $u_2(t)$ convergono a 0 per $t \to +\infty$.

6. È data la seguente trasformazione geometrica in $\mathbb{R}^2$:
alla proiezione ortogonale sulla retta $r : 3x + y = 0$ segue la simmetria assiale rispetto alla retta $s : x + y - 2 = 0$.

   (a) Scrivere in coordinate omogenee la matrice P associata alla proiezione sulla retta r e la matrice S associata alla simmetria assiale rispetto alla retta s.

   (b) Scrivere quindi in coordinate omogenee la matrice F associata alla trasformazione composta.

   (c) Determinare le coordinate esatte del punto A_1 immagine del punto $A = (3; 4)$ attraverso la trasformazione geometrica definita dalla matrice F.