3 Funzioni di più variabili

Le funzioni studiate finora dipendevano da un'unica variabile indipendente, e anche se molte applicazioni fanno intervenire solo funzioni di questo tipo, ne esistono molte altre che mettono in gioco più variabili indipendenti.

3.1 Definizioni

Esempi:

- La superficie S di un rettangolo di lati x e y si esprime con la ben nota formula

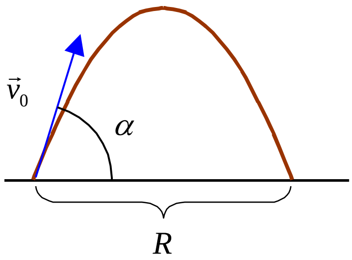
  $$S = x \cdot y,$$

  cioè S (**variabile dipendente**) è funzione delle due variabili x e y (**variabili indipendenti**).

- La gittata R di un proiettile lanciato con velocità iniziale v_0 e con angolo α è data (trascurando la resistenza dell'aria)

  $$R = v_0^{\,2}\,\mathrm{sen}(2\alpha)/g$$ (dove g è l'accelerazione di gravità).

  Cioè R è una funzione delle due variabili v_0 e α.



- La diagonale d di un parallelepipedo rettangolo di lati a, b e c è data da

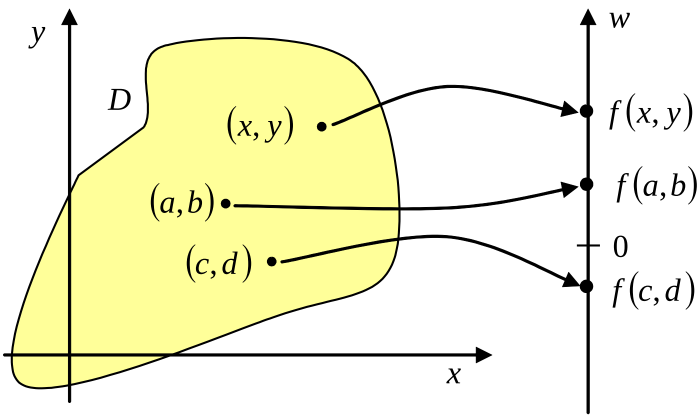
  $$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ .$$

  Cioè d è funzione delle tre variabili a, b e c.

Iniziamo questo capitolo dando la definizione di una funzione di due variabili; questa definizione potrà essere facilmente generalizzata al caso delle funzioni di n variabili.

> Sia D un insieme di coppie di numeri reali. Una **funzione f di due variabili** è una corrispondenza che a ogni coppia (x, y) di D associa esattamente un numero reale, che indichiamo con $f(x, y)$. L'insieme D è detto **insieme di definizione** (o dominio) della funzione f.
> I numeri $f(x, y)$ che corrispondono a tutti gli (x, y) di D costituiscono l'**insieme delle immagini** (o codominio) di f.

Graficamente, l'insieme di definizione D di una funzione a due variabili va rappresentato nel piano Oxy, mentre l'insieme delle immagini si rappresenta su un asse reale (vedi figura).



Esempio 1

Sia $f(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y}$.

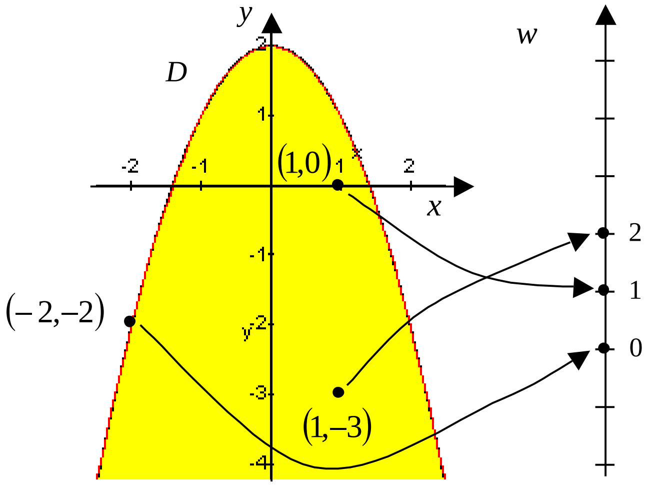
(a) Disegnare il dominio della funzione *f*.

(b) Secondo il modello della figura vista in precedenza, rappresentare i numeri $f(1,0)$, $f(1,-3)$, $f(-2,-2)$.

Soluzione:

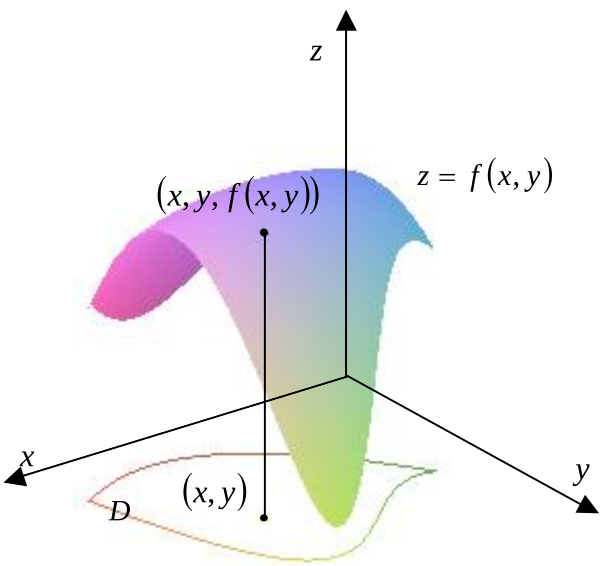
(a) Il radicale ci obbliga a considerare nel dominio *D* solamente le coppie (x, y) tale che $2 - x^2 - y \geq 0$ cioè $y \leq 2 - x^2$, come illustrato in figura.

(b) Per sostituzione diretta abbiamo $f(1,-3) = \sqrt{2 - 1^2 - (-3)} = \sqrt{4} = 2$ e analogamente $f(1,0) = 1$ e $f(-2,-2) = 0$. Questi valori della funzione sono riportati sull'asse *w* in figura.



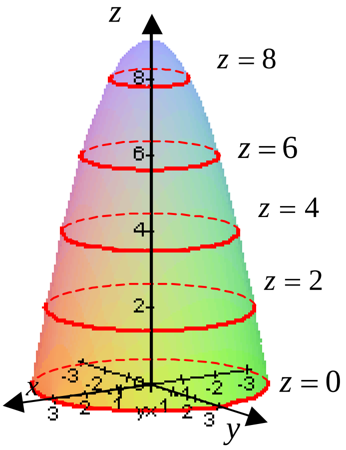
Una funzione di tre variabili (reali) si definisce in modo simile a quella a due variabili, in questo caso il dominio *D* è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$. A ogni terna (x, y, z) di *D* è associato esattamente un numero reale, che indicheremo con $f(x, y, z)$.

Torniamo ad una funzione *f* di due variabili *x* e *y*. La rappresentazione grafica di *f* è per definizione quella dell'equazione $z = f(x, y)$ in un sistema di coordinate *Oxyz*, che genera abitualmente una certa superficie *S*.



<u>Esempio 2</u>

Sia data la funzione $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$. Consideriamo il dominio $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 9\}$
.
Disegnare il grafico di f e le sue intersezioni (tracce) con i piani $z = 0$, $z = 2$, $z = 4$, $z = 6$, $z = 8$.

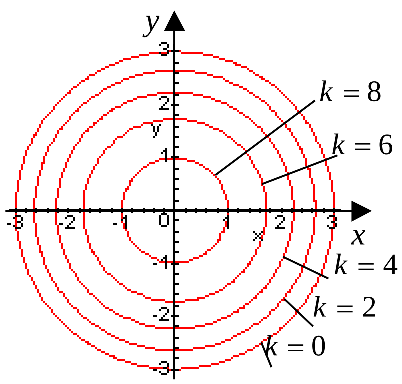


Soluzione
Il dominio D è costituito da tutti i punti interni o sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 3^2$. Il grafico di f è la parte di paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ situata al di sopra del piano *xy*, come indicato nella figura a fianco.
Per determinare le tracce nel piano $z = k$, sostituiamo k alla z e otteniamo:
$k = 9 - x^2 - y^2$ o $x^2 + y^2 = 9 - k$.
Per i valori di $k = 0,2,4,6,8$ otteniamo rispettivamente delle circonferenze di raggio $3, \sqrt{7}, \sqrt{5}, \sqrt{3}$ e 1, anch'esse rappresentate nella figura a fianco.

Prendiamo adesso la curva intersezione della superficie col piano $z = k$ e proiettiamola sul piano *Oxy*. Otteniamo una curva *C* d'equazione $f(x,y) = k$; tutti i punti (x,y) di *C* hanno una medesima immagine *k*. E' per questo motivo che *C* è chiamata **curva di livello** di *f*.

<u>Esempio 3</u>

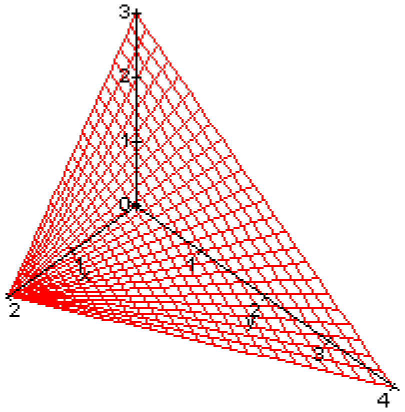
Disegnare alcune curve di livello della funzione dell'esempio 2.
Soluzione
Le curve di livello sono la rappresentazione grafica, nel piano *xy*, delle curve di equazione $f(x,y) = k$; nel nostro esempio abbiamo perciò:
$9 - x^2 - y^2 = k$ o $x^2 + y^2 = 9 - k$.
Otteniamo dunque delle circonferenze, a condizione che k sia compreso tra 0 e 9.
La figura a lato rappresenta le curve di livello con $k = 0,2,4,6,8$.

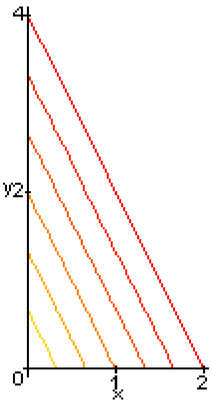


Se, come nell'esempio 3, rappresentiamo le curve di livello per valori di k distribuiti uniformemente, la loro vicinanza relativa ci fornisce delle indicazioni sul grado d'inclinazione della superficie.
Nella pagina successiva troviamo alcuni altri esempi di superfici con le rispettive curve di livello.

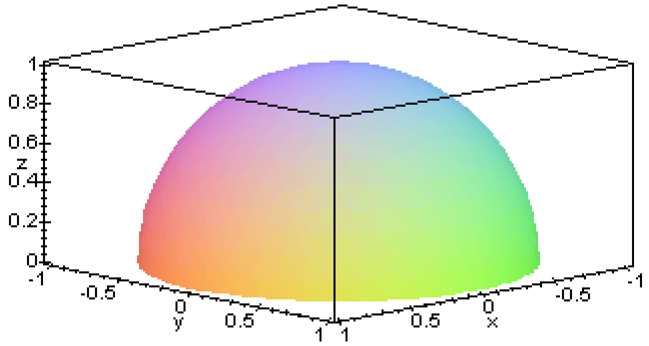
Esempio 4

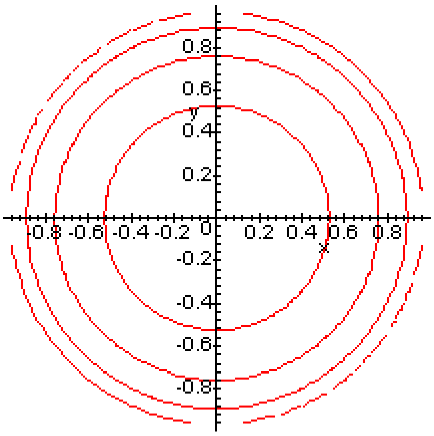
$$z = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$$



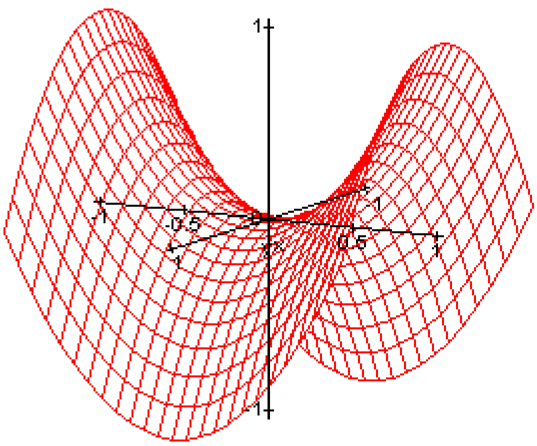


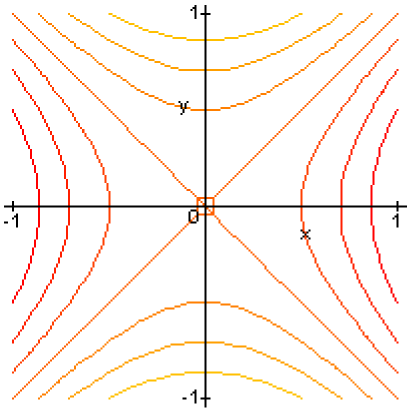
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$





$$z = y^2 - x^2$$





3.2 Limiti e continuità

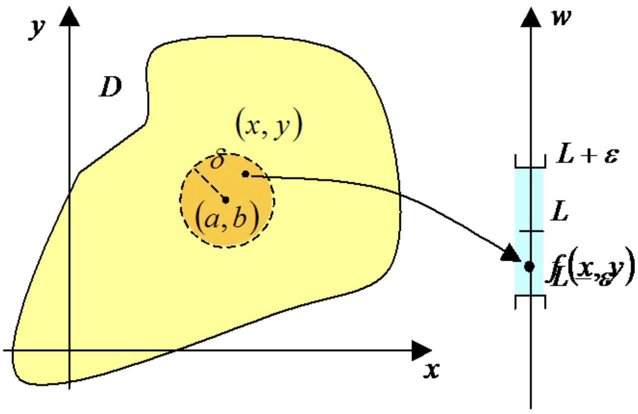
Sia f una funzione a due variabili: si dice che

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ ogni volta che } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta .$$

La figura a fianco illustra la definizione di limite: fissato un $\varepsilon > 0$ qualunque e l'intervallo aperto $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, affinché $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ sia verificata, deve esistere un $\delta > 0$ tale che l'immagine $f(x,y)$ di tutti i punti (x,y) interni al cerchio di raggio δ e centrato in (a,b), salvo eventualmente (a,b) stesso, appartenga a $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.



Se esiste il limite esso è unico. Nel caso di una funzione ad una sola variabile $f(x)$, l'esistenza del $\lim_{x\to a} f(x)$ implica che $f(x)$ tende allo stesso limite quando x tende ad a sia da destra sia da sinistra. In modo simile, per una funzione di due variabili $f(x,y)$, il $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ esiste solo se $f(x,y)$ tende allo stesso numero in qualunque modo (x,y) risulti tendere a (a,b). Gli esempi che seguiranno illustrano questa definizione.

Tutte le leggi usuali dei limiti si estendono in maniera ovvia alle funzioni di più variabili. Ad esempio:

se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, allora

i. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right) = L \pm M$,

ii. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y) \cdot g(x,y)\right) = L \cdot M$,

iii. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ purché $M \neq 0$.

<u>Esempio 5</u>

- $\lim_{(x,y)\to(2,5)} \left(3x - 2y^2\right) = 6 - 50 = -44$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^3 y^2 = a^3 b^2$
- $\lim_{(x,y)\to(\pi/3,2)} y sin(x/y) = 2 sin(\pi/6) = 1$

Esempio 6

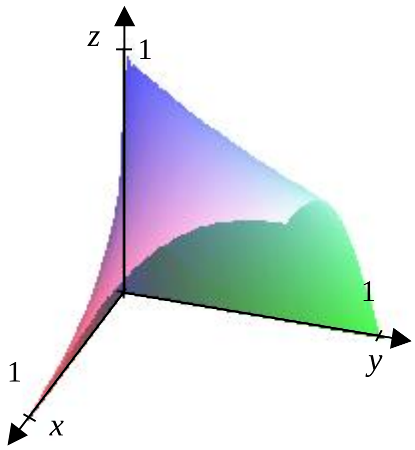
La funzione

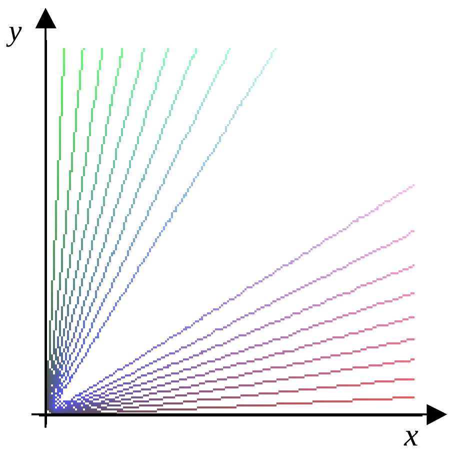
$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

è definita ovunque, tranne nell'origine $(0,0)$. Possiamo domandarci ugualmente se il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ esiste o meno. Se facciamo tendere (x,y) a $(0,0)$ lungo l'asse x otteniamo $f(x,y) = f(x,0) = 0$, per cui il limite deve essere 0, qualora esista. Similmente in tutti i punti dell'asse y abbiamo $f(x,y) = f(0,y) = 0$. Tuttavia nei punti della retta $y = x$, f ha un valore costante diverso: $f(x,x) = 1$. Poiché il limite di $f(x,y)$ è 1 quando il punto (x,y) tende all'origine lungo questa retta, ne segue che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ non esiste.}$$

Si osservi che $f(x,y)$ ha un valore costante su ciascuna retta passante per l'origine (sulla retta $y = kx$ il valore è $2k/(1+k^2)$), e questi valori sono differenti su rette differenti. Le curve di livello di $f(x;y)$ sono le rette passanti per l'origine, private dell'origine stessa.
E' difficile disegnare il grafico di f vicino all'origine. La parte di grafico che si trova nel primo ottante, e le rispettive curve di livello, sono raffigurate nelle due figure seguenti.





Esempio 7

La funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

come quella dell'esempio 6 è definita ovunque, tranne nell'origine $(0,0)$. Anche questa funzione si annulla sugli assi coordinati, per cui il limite deve essere 0, qualora esista.
Se esaminiamo $f(x,y)$ sulla retta $y = kx$, otteniamo

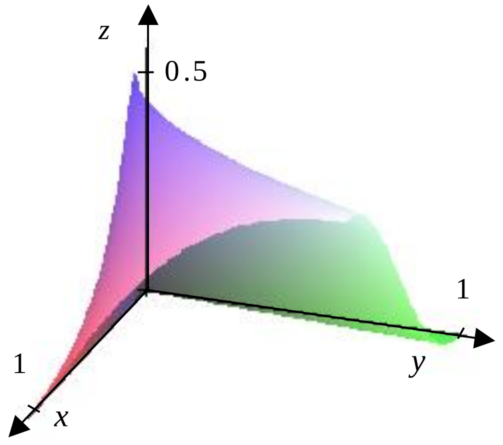
$$f(x,kx) = \frac{x^2 kx}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \to 0 \text{ quando } x \to 0, \quad (k \neq 0).$$

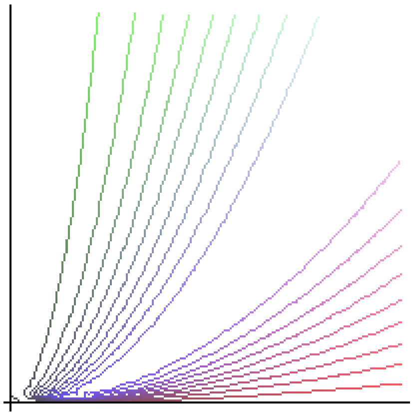
Perciò $f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$ lungo qualunque retta passante per l'origine. Potremmo concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ma ciò sarebbe sbagliato. Osserviamo il comportamento di $f(x,y)$ lungo la parabola $y = x^2$:

$$f\left(x, x^2\right) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2},$$

per cui $f(x, y)$ non tende a 0, quando $(x, y) \to (0,0)$ lungo questa curva. Quindi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ non esiste.

Si osservi che $f(x, y)$ ha un valore costante su ciascuna parabola con vertice nell'origine (sulla parabola $y = kx^2$ il valore è $k/\left(1+k^2\right)$), e questi valori sono differenti su parabole differenti.





La funzione $f(x, y)$ è continua nel punto (a,b) se
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a,b).$$

Come per le funzioni a una variabile, somme, differenze, prodotti, composizioni di funzioni continue sono continue.

3.3 Derivate parziali

Le **derivate parziali prime** della funzione $f(x, y)$ **rispetto alle variabili** x e y sono le funzioni $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ date da

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

a condizione che i limiti esistano.

Per indicare le derivate parziali prime di $z = f(x, y)$ si possono usare varie notazioni:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = z_x$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = z_y.$$

Se $f(x,y)=x^2\cos y$ allora

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=2x\cos y \text{ e } \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=-x^2\operatorname{sen} y.$$

Si osservi che $f_x(x,y)$ è proprio la derivata ordinaria di $f(x,y)$, considerata come funzione della sola variabile *x*, interpretando *y* come parametro. Analogamente $f_y(x,y)$ è la derivata prima di $f(x,y)$ considerata come funzione soltanto di *y*.
I valori delle derivate parziali in un punto (a,b) sono indicati:

$$f_x(a,b)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)}=\left.\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\right|_{(a,b)} \qquad \text{e} \qquad f_y(a,b)=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)}=\left.\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)\right|_{(a,b)}.$$

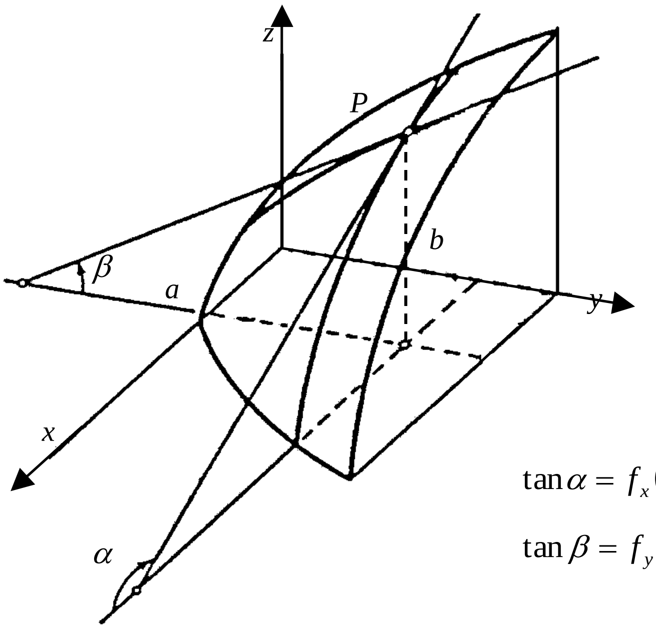
<u>Esempio</u>

Calcolare $f_x(2,\pi/3)$ e $f_y(2,\pi/3)$ se $f(x,y)=x^2\cos y$.
Soluzione
Abbiamo già visto che $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=2x\cos y$ e $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=-x^2\operatorname{sen} y$, perciò

$$f_x\left(2,\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2 \text{ e } f_y\left(2,\frac{\pi}{3}\right)=-2^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}.$$

Interpretazione geometrica delle derivate parziali

La superficie $z=f(x,y)$ interseca il piano verticale $y=b$ lungo una curva. Se prendiamo la retta orizzontale e quella verticale passanti per il punto $(0,b,0)$ come assi coordinati di quel piano, allora l'equazione della curva è $z=f(x,b)$, e la pendenza della sua tangente nel punto $x=a$ è $f_x(a,b)$. Analogamente $f_y(a,b)$ rappresenta la pendenza della tangente alla curva intersezione tra la superficie $z=f(x,y)$ e il piano $x=a$.
La figura seguente illustra la situazione.

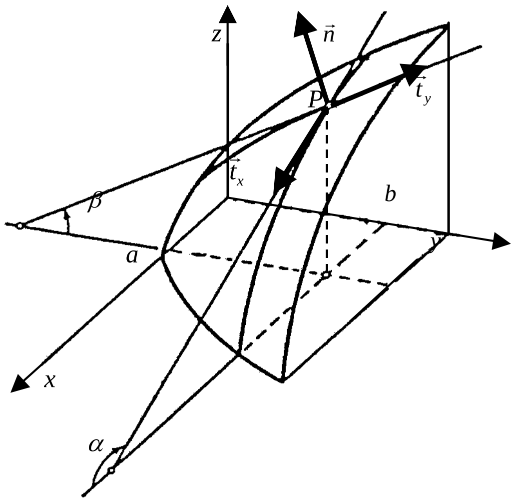


$\tan\alpha=f_x(a,b)$

$\tan\beta=f_y(a,b)$

Piano tangente e retta normale

Se il grafico $z = f(x,y)$ è una superficie "liscia" vicina a un punto *P* di coordinate $(a,b,f(a,b))$, allora quel grafico avrà un piano tangente e una retta normale in *P*. La retta normale è la retta passante per *P* perpendicolare alla superficie; il piano tangente in *P* è il piano passante per *P* e perpendicolare alla retta normale; questo piano è determinato dalle due rette tangenti descritte nel paragrafo precedente e la cui pendenza è data da $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$.



I vettori direzione di queste due rette indicati in figura con $\vec{t}_x$ e $\vec{t}_y$ hanno coordinate

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a,b) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a,b) \end{pmatrix},$$

mentre il vettore normale al piano tangente, e quindi normale anche alla superficie $z = f(x,y)$, sarà

$$\vec{n} = \vec{t}_x \times \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a,b) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a,b) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione del piano tangente è quindi

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

o anche in modo equivalente

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

3.4 Derivate parziali di ordine superiore

Le derivate parziali di secondo ordine e d'ordine più elevato sono calcolate prendendo le derivate delle derivate parziali precedentemente calcolate. L'ordine in cui si effettuano le derivazioni è indicato dalla notazione. Se $z = f(x,y)$, allora si possono calcolare quattro derivate parziali del secondo ordine:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

<u>Esempio</u>

Calcolare le quattro derivate parziali seconde di $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y^4$.

Soluzione

Essendo $f_x(x,y) = 6x^2 - 6xy^4$ e $f_y(x,y) = -12x^2y^3$, si avrà:

$$f_{xx}(x,y) = 12x - 6y^4; \quad f_{xy}(x,y) = -24xy^3; \quad f_{yy}(x,y) = -36x^2y^2; \quad f_{yx}(x,y) = -24xy^3.$$

In maniera analoga si possono definire le derivate di ordine superiore, di funzioni a *n* variabili.

<u>Esempio</u>

Calcolare le derivate parziali terze f_{yyz}, f_{zyy}, f_{yzy} di $f(x,y,z)=e^{3x-2y+5z}$.

Soluzione

$$f_{yyz}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}e^{3x-2y+5z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(-2e^{3x-2y+5z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(4e^{3x-2y+5z}\right)=20e^{3x-2y+5z},$$

$$f_{zyy}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}e^{3x-2y+5z}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(5e^{3x-2y+5z}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-10e^{3x-2y+5z}\right)=20e^{3x-2y+5z},$$

$$f_{yzy}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}e^{3x-2y+5z}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\left(-2e^{3x-2y+5z}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-10e^{3x-2y+5z}\right)=20e^{3x-2y+5z}.$$

In entrambi gli esempi precedenti si constata che le derivate parziali miste rispetto alle stesse variabili, ma in ordine diverso, sono uguali. Il teorema seguente enuncia in modo preciso questa importante proprietà.

Sia *f* una funzione di due variabili *x* e *y*. Se *f*, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} sono continue in tutti i punti di una regione aperta *R*, allora $f_{xy} = f_{yx}$ per tutti i punti di *R*.

Il teorema può essere facilmente generalizzato alle funzioni di *n* variabili e alle derivate di ordine superiore, ad esempio $f_{xyzx}(x,y,z)=f_{xxyz}(x,y,z)=\ldots=f_{zyxx}(x,y,z)$.

3.5 Differenziale totale

Data una funzione $z=f(x,y)$, indichiamo con Δx e Δy gli incrementi delle variabili indipendenti *x* e *y*. L'incremento Δz di $z=f(x,y)$ è definito da

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y).$$

Sia $z=f(x,y)$ definita in *R*, supponiamo che f_x e f_y esistano su *R* e che siano continue in un punto $(x,y)\in R$. Se Δx e Δy sono tali che $(x+\Delta x, y+\Delta y)\in R$, allora esistono due funzioni ε_1 e ε_2 che tendono a 0 quando $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ e tali che

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y.$$

Esempio

Sia $z=f(x,y)=3x^2-xy$.

a) Determinare l'incremento Δz.

b) Quanto vale Δz quando (x,y) passa da $(1,2)$ a $(1{,}01;1{,}98)$?

c) Trovare le espressioni di ε_1 e ε_2 che compaiono nel teorema precedente.

Soluzione

a) $$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=\left(3(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)(y+\Delta y)\right)-\left(3x^2-xy\right)\\ &=\left(3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2-xy-x\Delta y-y\Delta x-\Delta x\Delta y\right)-3x^2+xy\\ &=6x\Delta x+3(\Delta x)^2-x\Delta y-y\Delta x-\Delta x\Delta y\end{aligned}$$

b) $$\Delta z = 6\cdot 1\cdot 0{,}01+3\cdot(0{,}01)^2-1\cdot(-0{,}02)-2\cdot 0{,}01-0{,}01\cdot(-0{,}02)=0{,}0605$$

c) Sapendo che $f_x(x,y)=6x-y$ e $f_y(x,y)=-x$, possiamo riscrivere l'incremento Δz calcolato in a) ad esempio nel modo seguente

$$\Delta z=\left(3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2-xy-x\Delta y-y\Delta x-\Delta x\Delta y\right)-3x^2+xy$$
$$=(6x-y)\Delta x+(-x)\Delta y+(3\Delta x)\Delta x+(-\Delta x)\Delta y$$

perciò i valori di ε_1 e ε_2 potrebbero essere $\varepsilon_1=3\Delta x$ e $\varepsilon_2=-\Delta x$.

Sia $z=f(x,y)$ e siano Δx e Δy gli incrementi rispettivi di *x* e *y*.

a) I differenziali *dx* e *dy* delle variabili indipendenti *x* e *y* sono

$$dx=\Delta x \text{ e } dy=\Delta y$$

b) Il differenziale *dz* della variabile dipendente *z* è

$$dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

<u>Esempio</u>

Il differenziale della funzione $z=f(x,y)=3x^2-xy$ vale

$$dz=(6x-y)\,dx+(-x)\,dy,$$

e ponendo gli stessi incrementi dell'esercizio precedente otteniamo:

$$dz=(6-2)\cdot 0{,}01-1\cdot(-0{,}02)=0{,}0600$$

Possiamo dire che se Δx e Δy sono "piccoli", allora il differenziale *dz* è una buona approssimazione per l'incremento Δz.

Equazioni a differenziali totali

Un'equazione differenziale del primo ordine espressa nella forma differenziale seguente

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$$

è detta **equazione a differenziali totali** o **equazione differenziale esatta** se il membro di sinistra è un differenziale totale, vale a dire quando esiste una funzione continua $f(x,y)$:

$$df(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy;$$

cioè se $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$

La funzione *f* è detta funzione **integrale** dell'equazione differenziale. Ovviamente le curve di livello $f(x,y)=C$ della funzione *f* sono le soluzioni dell'equazione differenziale.

Ad esempio le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x\,dx+y\,dy=0$$

sono date da

$$x^2+y^2=C$$

poiché

$$d\left(x^2+y^2\right)=2x\,dx+2y\,dy=2(x\,dx+y\,dy)=0.$$

Una *condizione necessaria* affinché l'equazione differenziale $M\,dx + N\,dy = 0,$ sia esatta è che risulti

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Per determinare la funzione $f(x, y)$ esistono vari metodi che verranno spiegati con l'ausilio di alcuni esempi.

<u>Esempio 1</u>

Risolvere l'equazione:

$$2xy\,dx + \left(x^2 + 1\right) dy = 0\,.$$

L'equazione è esatta, poiché risulta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x\,, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 1\right) = 2x\,.$$

Perciò dobbiamo trovare una funzione $f(x, y)$ tale che:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) = 2xy\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = x^2 + 1\,.$$

Integrando la prima delle due espressioni rispetto a *x*, mantenendo nel contempo *y* costante , e sommando $g(y)$ come "costante di integrazione" si ha

$$f(x, y) = x^2 y + g(y)$$

Derivando questa espressione rispetto a *y*, con *x* mantenuta costante e uguagliando il risultato a $x^2 + 1$, si ha

$$x^2 + g'(y) = x^2 + 1, \text{ ossia } g'(y) = 1 \text{ e quindi } g(y) = y + k\,.$$

Perciò

$$f(x, y) = x^2 y + y + k$$

L'integrale (la soluzione) dell'equazione differenziale risulta quindi essere

$$x^2 y + y = C \qquad \text{oppure} \qquad y = \frac{C}{x^2 + 1}\,.$$

Per determinare la funzione $f(x, y)$ tale che $df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ si può fare uso di una delle seguenti formule

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy\,;$$

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy\,,$$

dove (x_0, y_0) è un punto qualsiasi interno al dominio delle due funzioni *M* e *N*.

Esempio 2

Risolvere l'equazione:

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xy\,dy = 0\,.$$

L'equazione è esatta, poiché risulta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 2y\,, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y\,.$$

Determiniamo la funzione $f(x,y)$ con la seconda formula dove $(x_0, y_0) = (0{,}0)$.

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^x \left(x^2 + 0^2\right)dx + \int_0^y 2xy\,dy = \frac{x^3}{3} + xy^2 + k$$

L'integrale dell'equazione differenziale risulta essere:

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 = C\,.$$

3.6 Gradiente e derivata direzionale

La derivata parziale prima di una funzione di più variabili rappresenta la rapidità di variazione di quella funzione rispetto alla distanza misurata in direzione di un asse coordinato. In questo paragrafo introdurremo un metodo per trovare la rapidità di variazione rispetto alla distanza misurata in qualunque direzione nel dominio della funzione.

Per prima cosa combiniamo le derivate parziali prime in modo da formare una singola funzione vettoriale chiamata gradiente.

In ogni punto (x,y) dove le derivate parziali prime della funzione $f(x,y)$ esistono, il **vettore gradiente grad** $f(x,y)$, indicato anche con $\nabla f(x,y)$, è definito dalla relazione

$$\mathbf{grad}\; f(x,y) = f_x(x,y)\vec{e}_1 + f_y(x,y)\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Esempio

Se $f(x,y) = x^2 + y^2$ allora **grad** $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$. In particolare **grad** $f(1{,}2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Si osservi che questo vettore è perpendicolare alla retta $x + 2y = 5$ che è tangente in $(1{,}2)$ alla circonferenza $x^2 + y^2 = 5$. Questa circonferenza è la curva di livello di *f* passante per $(1{,}2)$. Questa perpendicolarità non è una coincidenza, come mostra il seguente teorema.

Se $f(x,y)$ è derivabile nel punto (a,b) e $\nabla f(a,b) \neq \vec{0}$ allora $\nabla f(a,b)$ è un vettore perpendicolare alla curva di livello di *f* che passa per (a,b).

Per definire la derivata direzionale, possiamo specificare la direzione mediante un vettore non nullo di modulo qualsiasi, è però più conveniente usare un vettore unitario.

Sia $\vec{u}$ un vettore unitario, cioè

$\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ dove $u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}=1$.

La derivata direzionale di $f(x,y)$ in (a,b) nella direzione di $\vec{u}$ è la rapidità di variazione di $f(x,y)$ rispetto alla distanza misurata nel punto (a,b) lungo una retta in direzione di $\vec{u}$ nel piano *xy*. Questa derivata direzionale è data da

$$f_{\vec{u}}(a,b)=\lim_{s\to 0}\frac{f(a+su_1,b+su_2)-f(a,b)}{s}.$$

Il teorema seguente stabilisce una formula per il calcolo della derivata direzionale.

Se *f* è derivabile in (a,b) e $\vec{u}$ è un vettore unitario, allora la derivata direzionale di $f(x,y)$ in (a,b) nella direzione di $\vec{u}$ è data dal prodotto scalare tra $\vec{u}$ e il gradiente di *f*, cioè:

$$f_{\vec{u}}(a,b)=\vec{u}\cdot\nabla f(a,b).$$

Esempio

Calcolare la rapidità di variazione di $f(x,y)=y^4+2xy^3+x^2y^2$ in $(0,1)$ misurata in ciascuna delle seguenti direzioni:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ c) in direzione del punto $(-2,2)$.

Soluzione

Calcoliamo $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2y^3+2xy^2\\4y^3+6xy^2+2x^2y\end{pmatrix}\Rightarrow\nabla f(0,1)=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

a) $f_{\vec{u}}(0,1)=\vec{u}\cdot\nabla f(0,1)=\dfrac{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\|}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\dfrac{2+8}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.

b) $f_{\vec{u}}(0,1)=\vec{u}\cdot\nabla f(0,1)=\dfrac{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\|}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\dfrac{6}{3}=2.$

c) Il vettore $\vec{u}$ è il vettore unitario del vettore $\begin{pmatrix}-2-0\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ perciò

$$f_{\vec{u}}(0,1)=\vec{u}\cdot\nabla f(0,1)=\frac{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\|}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\frac{-4+4}{\sqrt{5}}=0.$$

Possiamo formulare ora le proprietà del gradiente:

i. In ogni punto (a,b), $f(x,y)$ aumenta nel modo più rapido nella direzione del vettore gradiente $\nabla f(a,b)$. La rapidità di aumento massima è $\|\nabla f(a,b)\|$.

ii. In ogni punto (a,b), $f(x,y)$ diminuisce nel modo più rapido nella direzione di $-\nabla f(a,b)$. La rapidità di diminuzione massima è $\|\nabla f(a,b)\|$.

iii. La rapidità di variazione di $f(x,y)$ in (a,b) è nulla nella direzione tangente alla curva di livello di *f* che passa per (a,b).

3.7 Massimi e minimi di una funzione a due variabili

Una funzione $z = f(x,y)$ di due variabili ammette un valore **massimo locale** (o **minimo locale**) in (a,b) se esiste un intorno $I(\subset D_f)$ di (a,b) tale che $f(x,y) \leq f(a,b)$ (o $f(x,y) \geq f(a,b)$ per tutti i punti $(x,y) \in I$.

Se la disuguaglianza vale per tutti i punti del dominio di *f*, allora si dice che *f* ha un valore **massimo assoluto** (o **minimo assoluto**) in (a,b).

Possiamo ora formulare il seguente teorema:

Una funzione $f(x,y)$ può avere un valore estremo locale o assoluto in un punto (a,b) del suo dominio solo se (a,b) è:

a) un **punto critico** di *f*, cioè un punto soddisfacente $\nabla f(a,b) = \vec{0}$

b) un **punto singolare** di *f*, cioè un punto in cui $\nabla f(a,b)$ non esiste, o

c) un **punto del contorno** del dominio di *f*.

<u>Esempio 1</u>

La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ ha un punto critico in $(0,0)$ poiché $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ ed entrambe le componenti si annullano in $(0,0)$.

In $(0,0)$ la funzione assume un il valore minimo (assoluto) 0; poiché

$$f(x,y) > 0 = f(0,0) \text{ se } (x,y) \neq (0,0).$$

Se il dominio di *f* non è ristretto a qualche regione particolare, allora *f* non assume nessun valore massimo.

<u>Esempio 2</u>

Anche la funzione $g(x,y) = x^2 - y^2$ ha un punto critico in $(0,0)$, ma non ha né un valore massimo locale né un minimo locale in quel punto. Si osservi che $g(0,0) = 0$ ma $g(x,0) > 0$ e $g(0,y) < 0$ per tutti i valori non nulli di *x* e *y*. Il punto $(0,0)$ è chiamato punto di sella di *g*.

In generale, qualunque punto *critico interno* appartenente al dominio di una funzione *f* di più variabili sarà chiamato **punto di sella** se *f* non ha un valore massimo o minimo locale in quel punto.

Non sempre è facile valutare se un punto critico è un massimo o un minimo, il teorema seguente ci fornisce in alcuni casi un aiuto.

Supponiamo che (a,b) sia un punto critico di $f(x,y)$ interno al dominio di *f*, cioè $f_x(a,b)=0$ e $f_y(a,b)=0$. Supponiamo inoltre che le derivate parziali seconde di f siano continue vicino ad (a,b). Definiamo la matrice **hessiana** $H(x,y)$ di *f*

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

a) Se $\det(H(a,b))>0$ e $f_{xx}(a,b)>0$, allora *f* ha un valore minimo locale in (a,b).

b) Se $\det(H(a,b))>0$ e $f_{xx}(a,b)<0$, allora *f* ha un valore massimo locale in (a,b).

c) Se $\det(H(a,b))<0$, allora f ha un punto di sella in (a,b).

d) Se $\det(H(a,b))=0$, allora questo test non fornisce nessuna informazione.

Esempio

Determinare e classificare i punti critici di $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$.

Soluzione

I punti critici devono soddisfare il sistema di equazioni:

$$0=f_x(x,y)=6x^2-6y=6(x^2-y) \qquad \Leftrightarrow x^2=y$$

$$0=f_y(x,y)=-6x+6y=-6(x-y) \qquad \Leftrightarrow x=y.$$

Queste due equazioni implicano $x^2=x$, per cui $x=0$ e $x=1$. I punti critici sono $(0,0)$ e $(1,1)$.

Calcoliamo ora le seconde derivate e il discriminante *H*:

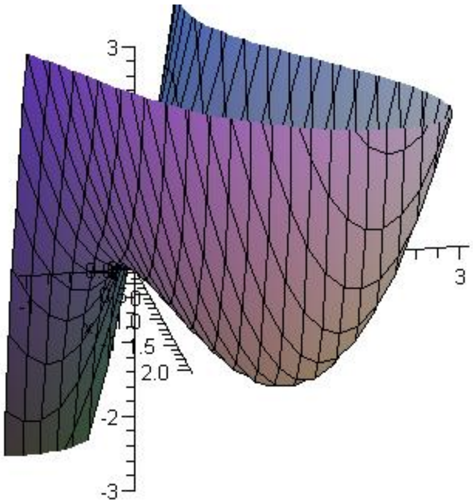
$$f_{xx}(x,y)=12x; \quad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-6; \quad f_{yy}(x,y)=6;$$

perciò

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così $\det(H(0,0))=\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}=-36<0$ per cui $(0,0)$ è un punto di sella;

mentre $\det(H(1,1))=\begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}=36>0$ e $f_{xx}(1,1)=12>0$ per cui $(1,1)$ è un minimo relativo.

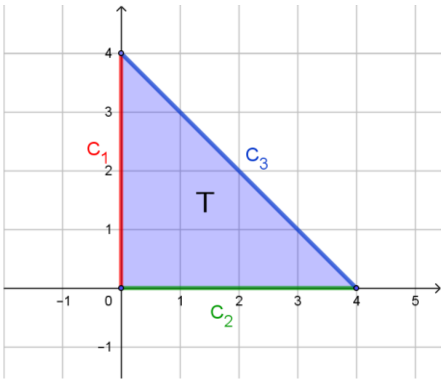


Valori estremi di funzioni definite su domini ristretti

Vogliamo ora mostrare, con un esempio, come si deve operare quando vogliamo determinare i valori massimo e minimo assoluti di una funzione che li posseggono; queste sono di solito le funzioni aventi per dominio un insieme ristretto.

Esempio

Determinare i valori estremi della funzione $f(x,y)=x^2ye^{-(x+y)}$ nella regione triangolare T $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 4$.



Soluzione

Cerchiamo dapprima i punti critici:

$$0=f_x(x,y)=xy(2-x)e^{-(x+y)} \qquad \Leftrightarrow x=0, y=0 \text{ o } x=2$$

$$0=f_y(x,y)=x^2(1-y)e^{-(x+y)} \qquad \Leftrightarrow x=0 \text{ o } y=1$$

I punti critici sono $(0,y)$ per ogni y e $(2,1)$. Solo il punto $(2,1)$ è interno alla regione triangolare. $f(2,1)=4e^{-3}\cong 0.199$. Il contorno della regione consiste di tre segmenti di linea retta. Su due di essi, C_1 e C_2 , f è identicamente nulla. Il terzo segmento è dato da:

$$C_3: y=4-x, \qquad 0\le x\le 4,$$

per cui i valori di f su di esso possono essere espressi in funzione della sola variabile x:

$$g(x)=f(x,4-x)=x^2(4-x)e^{-4}, \qquad 0\le x\le 4.$$

Chiaramente $g(0)=g(4)=0$. I punti critici di g sono dati da $0=g'(x)=x(8-3x)e^{-4}$, per cui essi sono $x=0$ e $x=8/3$. Abbiamo

x	y	$f(x;y)$		
0	y	0	$(0 \le y \le 4)$	minimo assoluto
2	1	$4e^{-3} \cong 0.199$		massimo assoluto
$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{256}{27}e^{-4} \cong 0.174$		
x	0	0	$(0 \le x \le 4)$	minimo assoluto

In conclusione il valore massimo di f nella regione triangolare T è $4/e^3$ e la funzione assume tale valore nel punto critico interno $(2,1)$. Il valore minimo della funzione è 0 e questo valore è assunto in tutti i punti delle curve C_1 e C_2 del contorno di T.