Capitolo 3: serie di ripetizione
(esercizi tratti da test di anni precedenti)

1. Rappresentare graficamente il dominio delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x;y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \ln(9 - x^2)$.

   (b) $f(x;y) = \dfrac{\arcsin(x^2 + y^2 - 3)}{\ln(x + y)}$

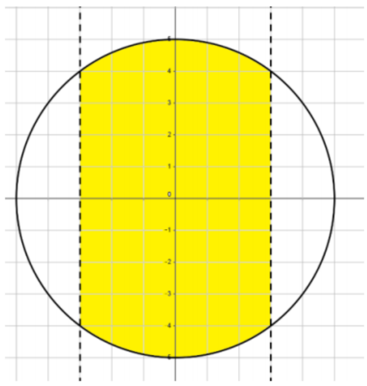
(a)

$f(x;y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \ln(9 - x^2)$

Deve valere:

$$\begin{cases} 25 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5^2 \\ x^2 < 9 \end{cases}$$

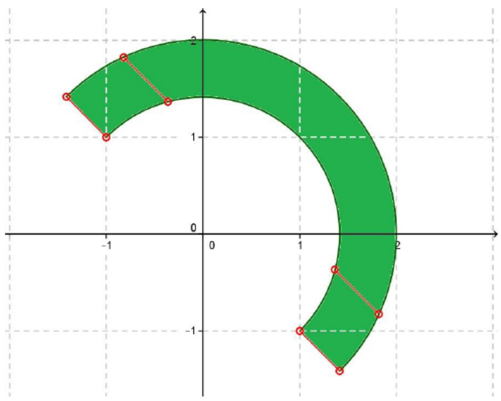
$$D = \left\{ (x,y) \in R^2 \middle| \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5 \wedge -3 < x < 3 \right\}$$



(b)

Deve valere $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3 \geq -1 \\ x^2 + y^2 - 3 \leq 1 \\ x + y > 0 \\ x + y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ y > -x \\ y \neq -x + 1 \end{cases}$

dunque D è la parte di anello compreso tra le circonferenze con centro nell'origine e raggio $\sqrt{2}$, risp.2, che sta al di sopra della retta $y = -x$ (segmenti e punti rossi non compresi).



2. Sia $f(x;y) = 2x^3 - 3x^2 + \sin(2y) - y$ con $(x;y) \in]-2;2[\times]-2;2[$.
Determinare i punti critici della funzione f e stabilirne il tipo.

$$f(x;y) = 2x^3 - 3x^2 + \sin(2y) - y$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x^2 - 6x = 0 \\ f_y(x,y) = 2\cos(2y) - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot(x-1) = 0 \\ \cos(2y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ 2y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ y = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

I punti critici nella regione data sono : $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(0,-\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(1,\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(1,-\frac{\pi}{6}\right)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & -4\sin(2y) \end{pmatrix},$$

$$\det(H(x;y)) = -24\sin(2y)\cdot(2x-1)$$

Punto		
$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$	$\det\left(H\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\sqrt{3} > 0$ e $f_{xx}\left(0,\frac{\pi}{6}\right) = -6 < 0$	Massimo
$\left(0,-\frac{\pi}{6}\right)$	$\det\left(H\left(0,-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -12\sqrt{3} < 0$	Punto di sella
$\left(1,\frac{\pi}{6}\right)$	$\det\left(H\left(1,\frac{\pi}{6}\right)\right) = -12\sqrt{3} < 0$	Punto di sella
$\left(1,-\frac{\pi}{6}\right)$	$\det\left(H\left(1,-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\sqrt{3} > 0$ e $f_{xx}\left(1,\frac{\pi}{6}\right) = 6 > 0$	minimo

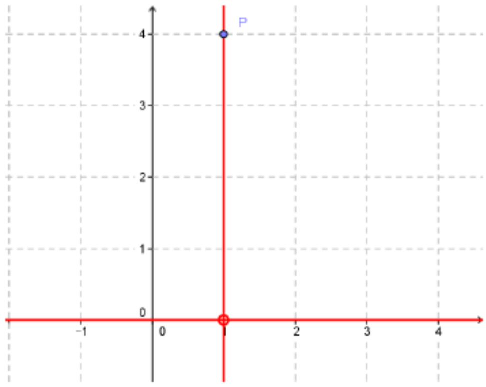
3. Sia data la funzione $f(x;y) = y \cdot \ln(x)$ e il punto $P = (1;4)$.

   (a) Determinare la curva di livello della funzione $f(x;y)$ passante per il punto P.

   (b) Determinare l'equazione del piano tangente e della retta normale alla superficie $f(x;y)$ nel punto $(1;4;f(1;4))$.

   (c) Calcolare la derivata direzionale di $f(x;y)$ in P nella direzione del punto $Q = (4;1)$.

a) $f(1,4) = 4 \cdot \ln(1) = 0$; $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y \cdot \ln(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = 1$, dunque la curva di livello corrispondente a $f(x,y) = 0$ è: $\{(x,0) | x \in R\} \cup \{(1,y) | y \in R\}$.



b) $f_x(x,y) = \frac{y}{x}$; $f_x(1,4) = 4$; $f_y(x,y) = \ln(x)$; $f_y(1,4) = 0$, dunque l'equazione del piano tangente alla superficie $f(x,y)$ nel punto (1;4;0) è:

$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) \Leftrightarrow z = 4 \cdot (x-1)$

Il vettore normale alla superficie $f(x,y)$ nel punto P=(1;4;0) è $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -f_x(x_0,y_0) \\ -f_y(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

perciò la retta normale ha equazione: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (con $t \in$ **R**)

c) $\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_u(1,4) = \nabla f(1,4) \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}$

4. Si consideri la funzione $f(x;y) = x^3 - 12xy + 8y^3$.

(a) Determinare i punti critici di $f(x;y)$ e stabilirne il tipo.

(b) Si rappresenti la regione limitata $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 \geq x \geq y^2\}$, e si determini il massimo e il minimo assoluti assunti da $f(x;y)$ in D.

a)

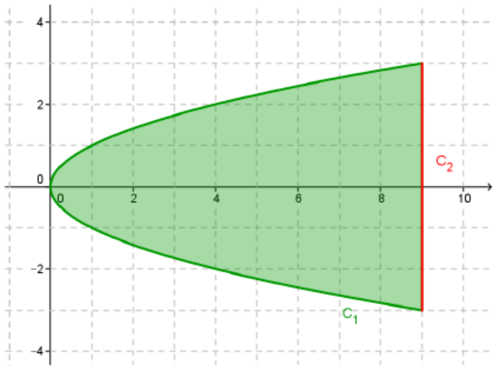
$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-12y=0 \\ f_y(x,y)=-12x+24y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2y^2)^2-4y=0 \\ x=2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\cdot(y^3-1)=0 \\ x=2y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ e } (2,1) \text{ pti critici}$$

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}, \ \det(H(x,y))=144\cdot(2xy-1)$$

Si ha $\det(H(0,0))=-144<0$ quindi punto di sella in $(0,0)$.

e $\det(H(2,1))=432>0$ e $f_{xx}(2,1)=6>0$ quindi punto di minimo in $(2,1)$, $f(2,1)=8-24+8=-8$

b)



lungo $C_1 : x=y^2 \quad y\in[-3,3]$: $f(y^2,y)=y^6-12y^3+8y^3=y^6-4y^3$,

$f'(y^2,y)=6y^5-12y^2=6y^2\cdot(y^3-2)=0 \Rightarrow y=0 \vee y=\sqrt[3]{2}$.

$f(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})=4-24+16=-4$

lungo $C_2 : x=9 \quad y\in[-3,3]$: $f(9,y)=729-108y+8y^3$,

$f'(9,y)=-108+24y^2=0 \Rightarrow y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{9}{2}}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\cong\pm 2.12$,

$f\left(9,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=729-108\frac{3\sqrt{2}}{2}+8\frac{27}{4}\sqrt{2}=729-108\sqrt{2}\cong 576.26$

$f\left(9,-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=729+108\frac{3\sqrt{2}}{2}-8\frac{27}{4}\sqrt{2}=729+108\sqrt{2}\cong 881.74$

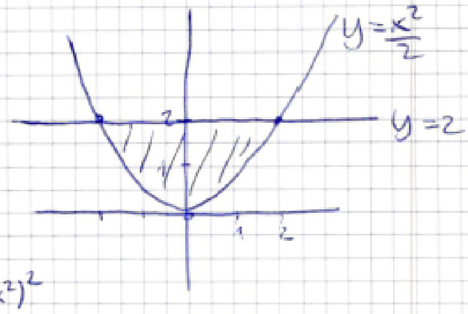
Vertici: $f(9,3)=729-108\cdot 3+8\cdot 27=621$, $f(9,-3)=729+108\cdot 3-8\cdot 27=837$

Tabella:

Punto (x,y)	Valore funzione $f(x,y)$	Tipo
$(2,1)$	-8	Min assoluto
$(0,0)$	0	
$(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$	-4	
$\left(9,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	~ 576.26	
$\left(9,-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	~ 881.74	Max assoluto
$(9,3)$	621	
$(9,-3)$	837	

5. Si consideri la seguente funzione a due variabili indipendenti $f(x;y) = 3xy - x^3 - y^3$. Determinare il massimo e il minimo assoluti assunti da $f(x;y)$ nella regione finita di piano compresa tra le curve di equazione $y = 2$ e $y = \frac{x^2}{2}$.

$$f(x;y) = 3xy - x^3 - y^3$$



- $$\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} 3y - 3x^2 \\ 3x - 3y^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = 3x^2 \rightarrow y = x^2 \\ 3x = 3y^2 \rightarrow 3x = 3(x^2)^2 \end{cases}$$

$$3x^4 - 3x = 0$$

$$3x(x^3-1) = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0 \quad P_1(0;0)$$

$$x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 \quad P_2(1;1)$$

- Bordo 1: $y = 2$

$$f(x;2) = 6x - x^3 - 8$$

$$f'(x) = 6 - 3x^2 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \qquad P_3(-\sqrt{2};2) \quad P_4(\sqrt{2};2)$$

- Bordo 2: $y = \frac{x^2}{2}$

$$f\left(x;\frac{x^2}{2}\right) = 3x\cdot\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^6}{8} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{x^6}{8}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}}x^5 = \frac{3}{4}x^2\left(2 - x^3\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \begin{matrix} \nearrow x_1 = 0 \\ \searrow x_2 = \sqrt[3]{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} P_1(0;0) \\ P_5\left(\sqrt[3]{2};\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right) \end{matrix}$$

- CANDIDATI:

	f		
$P_1(0;0)$	$\longrightarrow$	0	
$P_2(1;1)$	$\longrightarrow$	1	max assoluto
$P_3(-\sqrt{2};2)$	$\longrightarrow$	$-13,66$	min assoluto
$P_4(\sqrt{2};2)$	$\longrightarrow$	$-2,34$	
$P_5\left(\sqrt[3]{2};\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$	$\longrightarrow$	$0,5$	
$P_6(-2;2)$	$\longrightarrow$	-12	
$P_7(2;2)$	$\longrightarrow$	-4	

Domande multiple choice

1. La funzione $f(x;y) = x^3 + y^3 - 6x - 3y$ possiede

   A tre punti di sella

   B un massimo locale, un minimo locale e due punti di sella.

   C due massimi locali e due minimi locali

   D un massimo locale e tre punti di sella

   E un massimo locale, un minimo locale e un punto di sella

$f(x;y) = x^3 + y^3 - 6x - 3y$

$\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6 \\ 3y^2 - 3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ \longrightarrow y = \pm 1 \end{matrix}$

PC: $(-\sqrt{2}; -1)$; $(-\sqrt{2}; 1)$; $(\sqrt{2}; -1)$; $(\sqrt{2}; 1)$

$\det\left(H_{f(x;y)}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}\right) = 36xy$

- $(-\sqrt{2}; -1) \longrightarrow \det > 0$; $f_{xx}(-\sqrt{2}; -1) < 0 \rightarrow$ max loc.
- $(-\sqrt{2}; 1 \longrightarrow \det < 0$; $\rightarrow$ punto di sella
- $(\sqrt{2}; -1) \rightarrow \det < 0$; $\rightarrow$ punto di sella
- $(\sqrt{2}; 1) \longrightarrow \det > 0$; $f_{xx}(\sqrt{2}; 1) > 0 \rightarrow$ min loc.

$\Rightarrow$ Risposta $\boxed{B}$

2. In quale direzione la derivata direzionale di $f(x;y) = 2xy^2 - 8y$ nel punto $P = (3;1)$ vale zero?

   A $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   B $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

   C $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   D $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   E $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

La derivata direzionale vale 0 nella direzione perpendicolare al gradiente.

$f(x;y) = 2xy^2 - 8y \quad \rightarrow \nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} 2y^2 \\ 4xy - 8 \end{pmatrix}$

$\nabla f(3;1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ vale che $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Risposta $\boxed{A}$

3. Considera la funzione $g(x;y) = xe^{xy}$ e il punto $Q = (2;0;g(2;0))$. Determina l'equazione del piano tangente alla superficie della funzione g nel punto Q.

   [A] $x + 4y + z - 4 = 0$

   [B] $2x - 4y + z = 0$

   [C] $x + 4y - z = 0$

   [D] $x + 4y - z - e = 0$

   [E] $x - y - z = 0$

$g(x;y) = xe^{xy}$

$g(2;0) = 2$

$g_x(x;y) = e^{xy} + xye^{xy}$ $\qquad g_x(2;0) = 1$

$g_y(x;y) = x^2e^{xy}$ $\qquad g_y(2;0) = 4$

$\Rightarrow$ Piano tangente:

$1 \cdot (x-2) + 4 \cdot (y-0) + 2 = z$

$x - 2 + 4y + +2 - z = 0$

$x + 4y - z = 0$ $\Rightarrow$ Risposta $\boxed{C}$

4. Sia data la funzione $f(x;y) = e^{x^2 y}$ ed il punto $P_0 = (2;1)$. Il valore della derivata direzionale di f in P_0 nella direzione del punto $P_1 = (5;5)$ è:

- [A] $\dfrac{14}{5}e^4$
- [B] $40e^4$
- [C] $\dfrac{28}{5}e^4$
- [D] $28e^4$
- [E] $\dfrac{40}{5}e^4$
- [F] $14e^4$

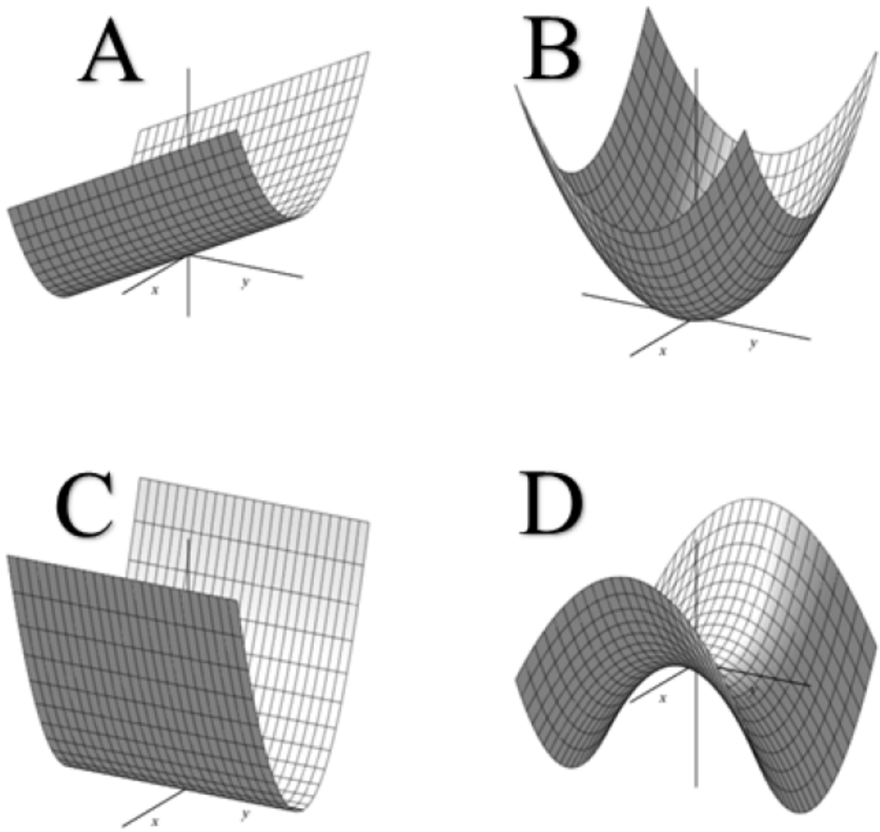
$f(x;y) = e^{x^2 y}$

$\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2y} \\ x^2 e^{x^2 y} \end{pmatrix} \quad \nabla f(2;1) = \begin{pmatrix} 4e^4 \\ 4e^4 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$f_{\vec{u}}(2;1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4e^4 \\ 4e^4 \end{pmatrix} = \frac{28}{5}e^4 \Rightarrow$ Risposta $\boxed{C}$

5. A quali funzioni appartengono le seguenti superfici?



1) Il grafico della funzione $f(x;y) = x^2 + 1$ è:

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

2) Il grafico della funzione $f(x;y) = x^2 + y^2$ è:

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

3) Il grafico della funzione $f(x;y) = x^2 + y$ è:

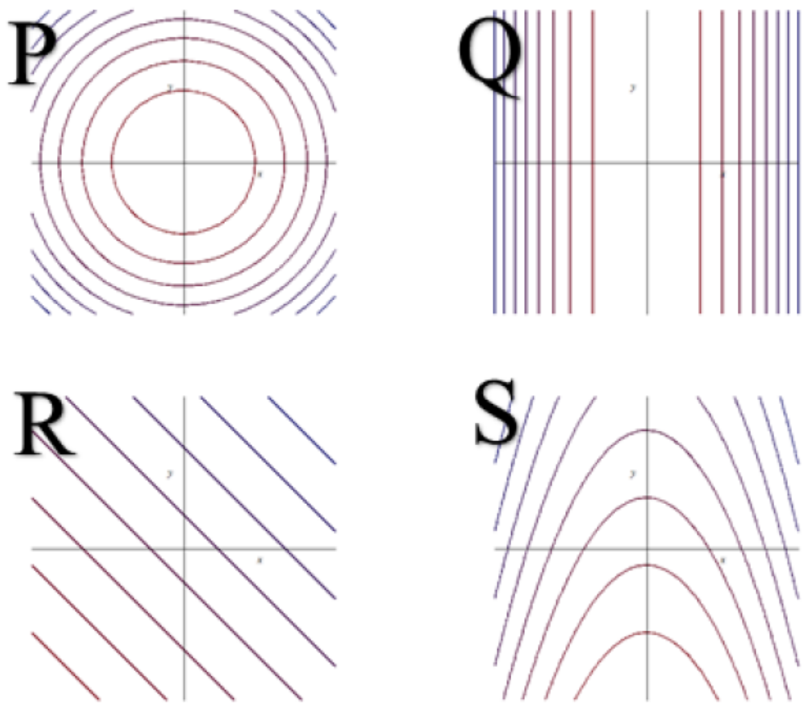
$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

1) $f(x;y) = x^2+1 \rightarrow$ grafico $\boxed{C}$

2) $f(x;y) = x^2+y^2 \rightarrow$ grafico $\boxed{B}$

3) $f(x;y) = x^2+y \rightarrow$ grafico $\boxed{A}$

6. A quali funzioni appartengono i seguenti curve di livello?



1) Il grafico della funzione $f(x;y) = x^2 + 1$ è:

A B C D

2) Il grafico della funzione $f(x;y) = x^2 + y^2$ è:

A B C D

3) Il grafico della funzione $f(x;y) = x^2 + y$ è:

A B C D

1) $f(x;y) = x^2+1 \longrightarrow$ curve di livello $\boxed{Q}$

2) $f(x;y) = x^2+y^2 \longrightarrow$ curve di livello $\boxed{P}$

3) $f(x;y) = x^2+y \longrightarrow$ curve di livello $\boxed{S}$