Capitolo 1: SOLUZIONI serie di ripetizione

(esercizi tratti da test di anni precedenti)

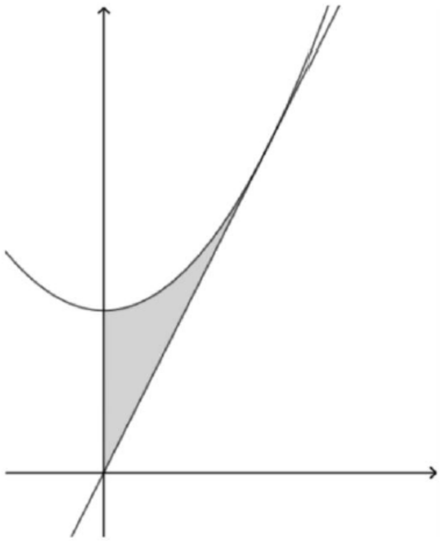
1. Siano date la parabola di equazione $y = x^2 + 1$ e la retta di equazione $y = 2x$.

   (a) Calcolare l'area della regione finita di piano R compresa fra le due curve e l'asse delle y.

   (b) Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse delle x.

   (c) Calcolare la coordinata x_G del baricentro di R.

   (d) Ricorrendo al teorema di Guldino-Pappo ricavare il valore esatto della coordinata y_G del baricentro di R ed il valore esatto del volume del solido ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse delle y.



a) Intersezione tra le due curve:

$$\begin{cases} y = x^2+1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2+1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2-2x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad P = (1;2)$$

$$Area_R = \int_0^1 (x^2+1-2x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x - x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

b)

$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left((x^2+1)^2 - (2x)^2\right) dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2) = \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \pi \cdot \frac{3-10+15}{15} = \boxed{\frac{8}{15}\pi}$$

c)

$$x_G = \frac{1}{A_R} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\,dx = 3 \cdot \int_0^1 x \cdot (x^2+1-2x)\,dx = 3\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \cancel{3}^{\,1} \cdot \frac{3-8+6}{\cancel{12}_{\,4}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

d)

$$V_x = A_R \cdot 2\pi \cdot y_G \Rightarrow y_G = \frac{V_x}{A_R \cdot 2\pi} = \frac{\frac{8}{15}\cancel{\pi}}{\frac{1}{3} \cdot 2\cancel{\pi}} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$V_y = A_R \cdot 2\pi \cdot x_G = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

2. Si consideri la parabola di equazione $y = x^2 + x - 6$.

   (a) Si determini l'equazione della retta t tangente alla parabola in $x = -2$.

   (b) Si consideri la regione finita di piano R delimitata dal grafico della parabola, dalla retta tangente t e dall'asse delle y.

      i. Si schizzi la regione R.

      ii. Si calcoli l'area della regione R.

      iii. Si calcoli la coordinata x_G del baricentro G della regione R.

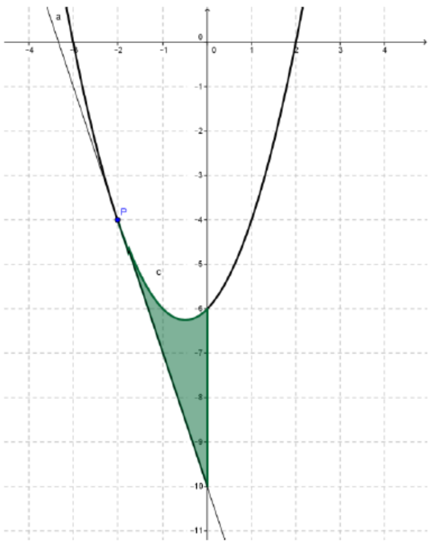
   (c) Si determini, col metodo che si ritiene più opportuno, il volume del solido di rivoluzione generato dalla rotazione di R attorno all'asse y.

a) $f(x)=x^2+x-6=(x+3)\cdot(x-2); f(-2)=-4$; Punto di tangenza: $P=(-2,-4)$

$f'(x)=2x+1; f'(-2)=-3$

retta tangente t: $y=-4-3\cdot(x+2)\Leftrightarrow t(x)=-3x-10$

b) (i)



(ii)

$$A_R = \int_{-2}^{0}[f(x)-t(x)]dx = \int_{-2}^{0}[(x^2+x-6)-(-3x-10)]dx = \int_{-2}^{0}[x^2+4x+4]dx = \int_{-2}^{0}[x+2]^2 dx = \left.\frac{(x+2)^3}{3}\right|_{-2}^{0} = \frac{8}{3}$$

(iii)

$$M_{x=0} = \int_a^b x\cdot[f(x)-t(x)]dx = \int_{-2}^{0} x\cdot[x^2+4x+4]dx = \left.\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+2x^2\right|_{-2}^{0} = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_G = \frac{M_{x=0}}{A_R} = -\frac{1}{2}$$

$$M_{y=0} = \int_{-2}^{0} \underbrace{\frac{1}{2}[f(x)+t(x)]}_{y_{G_i}\ \text{del rettangolino}}\cdot\underbrace{[f(x)-t(x)]dx}_{\text{area del rettangolino}} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}[f^2(x)-t^2(x)]\cdot dx =$$

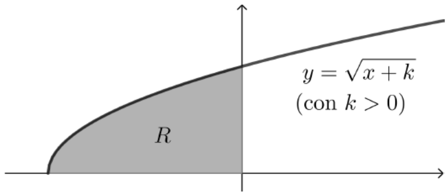
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}[(x^2+x-6)^2-(-3x-10)^2]dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}[x^4+2x^3-11x^2-12x+36-(9x^2+60x+100)]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left.\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-\frac{20}{3}x^3-36x^2-64x\right)\right|_{-2}^{0} = -\frac{292}{15} \Rightarrow y_G = \frac{M_{y=0}}{A_R} = -\frac{292}{15}\cdot\frac{3}{8} = -\frac{73}{10} = -7.3$$

c) [Guldino-Pappo] $V = 2\pi|x_G|\cdot A_R = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{8}{3}\pi$ quindi $V = \frac{8}{3}\pi$

3.

Si consideri la regione finita di piano R delimitata dagli assi cartesiani e dal grafico di $f:\ y = \sqrt{x+k}$ (con $k > 0$).



(a) Determinare le intersezioni del grafico di f con gli assi cartesiani.

(b) Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse x.

(c) Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse y.

(d) Determinare per quale valore di k i due solidi hanno uguale volume.

a) Intersezione con asse y: $x=0 \Rightarrow y=\sqrt{k}$ $\quad \boxed{(0;\sqrt{k})}$

Intersezione con asse x: $y=0 \Rightarrow x=-k$ $\quad \boxed{(-k;0)}$

b) $$\boxed{V_x} = \pi \int_{-k}^{0} \left(\sqrt{x+k}\right)^2 dx = \pi \int_{-k}^{0} (x+k)\,dx = \pi\left(\frac{1}{2}x^2 + kx\right)\Bigg|_{-k}^{0} =$$

$$= \pi\left(0 - \left(\frac{1}{2}k^2 - k^2\right)\right) = \boxed{\frac{1}{2}\pi k^2}$$

c) $y = \sqrt{x+k}$; $0 \geq x \geq -k$, $0 \leq y \leq \sqrt{k}$

$y^2 = x+k \Rightarrow x = y^2 - k$; $f^{-1}(x) = x^2 - k$ $\quad 0 \leq x \leq \sqrt{k}$

$$\boxed{V_y} = \pi \int_{0}^{\sqrt{k}} (x^2-k)^2 dx = \pi \int_{0}^{\sqrt{k}} (x^4 - 2x^2k + k^2)\,dx = \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3k + k^2x\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{k}}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5}k^2\sqrt{k} - \frac{2}{3}k^2\sqrt{k} + k^2\sqrt{k}\right) = \boxed{\frac{8}{15}\pi k^2\sqrt{k}}$$

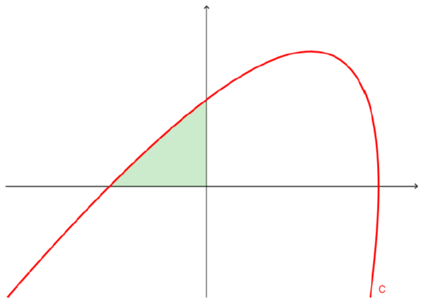
d) $V_x = V_y$

$\frac{1}{2}\cancel{\pi}\cancel{k^2} = \frac{8}{15}\cancel{\pi}\cancel{k^2}\sqrt{k}$ $\quad (k>0)$

$\sqrt{k} = \frac{15}{16} \iff \boxed{k = \frac{225}{256}}$

4. In figura è disegnata una parte del grafico della curva C di equazione parametrica

$$C: \begin{cases} x(t) = 4 - t^2 \\ y(t) = 5t - 2t^2 \end{cases}$$



Calcolare il valore esatto dell'area della regione finita di piano, situata nel secondo quadrante, racchiusa dalla curva C e dagli assi cartesiani.

Cerchiamo l'intersezione della curva $C: \begin{cases} x = 4 - t^2 \\ y = 5t - 2t^2 \end{cases}$ con gli assi:

$x = 0 : 4 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2$ quindi $P_{t=-2} = (0,-18)$, $P_{t=2} = (0,2)$

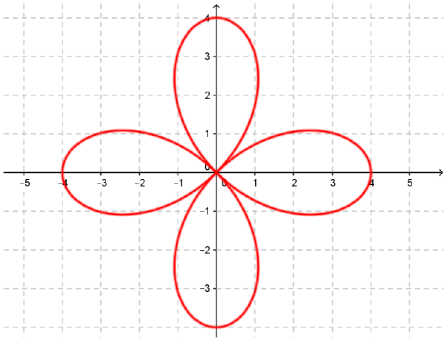
$y = 0 : 5t - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{5}{2}$ quindi $P_{t=0} = (4,0)$, $P_{t=\frac{5}{2}} = \left(-\frac{9}{4},0\right)$

Poiché nella regione di nostro interesse [tra $t = 2$ e $t = 5/2$] la curva viene percorsa da destra a sinistra [ossia $x' < 0$] e la $y > 0$,

$$A_S = -\int_2^{5/2} y(t) \cdot x'(t)\,\mathrm{dt} = -\int_2^{5/2} \left(5t - 2t^2\right) \cdot (-2t)\,\mathrm{dt} = \int_2^{5/2} \left(-4t^3 + 10t^2\right)\mathrm{dt} = \left(-t^4 + \frac{10}{3}t^3\right)\Bigg|_2^{5/2} =$$

$$= \frac{125}{8} \cdot \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{2}\right) - 8 \cdot \left(\frac{10}{3} - 2\right) = \frac{125}{8} \cdot \frac{5}{6} - 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{113}{48} \cong 2.35$$

5. È data la curva di equazione polare $r_1(\theta) = 4\cos(2\theta)$ (vedi figura).



(a) Disegnare nel grafico a lato anche la circonferenza di equazione $r_2(\theta) = 2\sqrt{3}$ e colorare la regione R finita di piano che si trova all'interno della curva $r_1(\theta)$ e all'esterno della curva $r_2(\theta)$.

(b) Calcolare l'area della regione R.

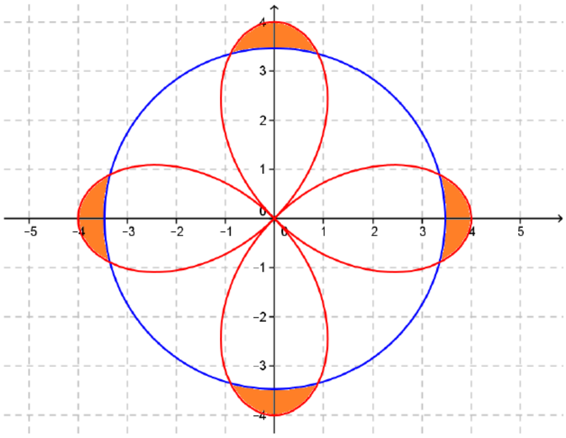
Determiniamo per che valore di θ le due curve si intersecano:

$$r_1(\theta) = r_2(\theta) \Leftrightarrow 4\cos 2\theta = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi$$

$$r_1(\theta+\pi) = -r_2(\theta) \Leftrightarrow 4\cos(2(\theta+\pi)) = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos(2\theta+2\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(2\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{5}{12}\pi + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$



Sappiamo che l'area S di una regione racchiusa dalla curva $r = f(\theta)$ e dai due raggi $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ è data da: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2 d\theta$. Perciò l'area della regione R cercata sarà uguale a:

$$A_R = 8\cdot\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}}(r_1(\theta))^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}}(r_2(\theta))^2 d\theta\right] = 8\cdot\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}}16\cos^2(2\theta)d\theta - \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= 64\int_0^{\frac{\pi}{12}}\frac{1+\cos(4\theta)}{2}d\theta - 4\pi = 8\sin 4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{12}} + \frac{8}{3}\pi - 4\pi = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \ (\cong 2.739..)$$

6. Calcolare il volume del solido la cui base nel piano cartesiano è la regione finita di piano nel primo quadrante delimitata dall'asse delle ordinate e dalle curve di equazione $y = |x|$ e $y = 2 - x^2$ e le cui sezioni trasversali perpendicolari all?asse x sono triangoli isosceli di altezza pari al doppio della base.

SOLUZIONE:

Il punto di intersezione tra le due curve nel primo quadrante si ottiene eguagliando le due equazioni:

$$\begin{cases} 2 - x^2 & = & x \\ x^2 + x - 2 & = & 0 \\ \Delta = 1 + 4 \cdot 2 & = & 9 \\ x_{I\,quadrante} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} & = & 1 \\ y & = & 1 \end{cases}$$

La base di ogni triangolo isoscele (perpendicolare all'asse x) risulta:

$$B(x) = (2 - x^2) - x = -x^2 - x + 2$$

Il volume di ogni elemento infinitesimale risulta:

$$dVol = \frac{B(x) \cdot 2 \cdot B(x)}{2} \cdot dx = (-x^2 - x + 2)^2 \cdot dx$$

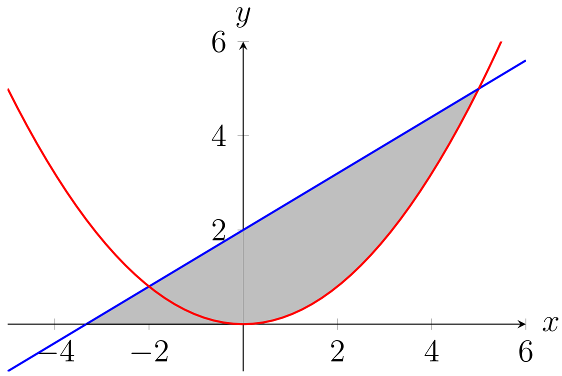
Integrando:

$$\begin{aligned} Vol &= \int_0^1 (-x^2 - x + 2)^2 \cdot dx = \int_0^1 (x^4 + 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 4) \cdot dx = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \right]_0^1 = 1.7 \end{aligned}$$

7. Nel grafico a lato sono rapresentati i grafici delle funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{3}{5}x + 2$$

Determinare il volume ottenuto da una rotazione completa della figura grigia attorno all'asse Ox.



SOLUZIONE:

Il punto di intersezione tra le due curve nel primo quadrante si ottiene eguagliando le due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\cdot x^2 & = & \frac{3}{5}\cdot x + 2 \\ \frac{1}{5}\cdot x^2 - \frac{3}{5}\cdot x - 2 & = & 0 \\ \Delta = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 4\cdot\frac{1}{5}\cdot 2 & = & \frac{49}{25} \\ x_1 = \frac{\frac{3}{5}+\frac{7}{5}}{\frac{2}{5}} & = & 5 \\ y_1 & = & 5 \end{cases}$$

Il punto di intersezione tra la retta e l'asse delle ascisse risulta:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}\cdot x + 2 & = & 0 \\ x = \frac{-10}{3} \end{cases}$$

Considerando il solido ottenuto dalla rotazione del segmento di retta compreso nell'intervallo $[\frac{-10}{3}, 5]$ notiamo che si tratta di un cono di raggio $r = 5$ e altezza $h = \frac{10}{3} + 5 = \frac{25}{3}$. Senza scomodare il calcolo integrale risulta:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{5^4}{9}\cdot\pi$$

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione,intorno all'asse delle ascisse, del tratto di parabola $[0, 5]$ risulta:

$$V_{g(x)} = \int_0^5 \left(\frac{1}{5}\cdot x^2\right)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{\pi}{25}\cdot\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^5 = 25\cdot\pi$$

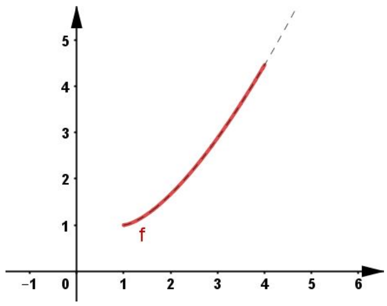
Sottraendo otteniamo il volume cercato:

$$V_{cono} - V_{g(x)} = \left[\frac{5^4}{9} - 25\right]\cdot\pi = \left[\frac{400}{9}\right]\cdot\pi$$

8. Nel grafico a lato è rappresentata una porzione del grafico della funzione reale:

$$f : x \mapsto y = \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + 1$$

Calcolare la lunghezza dell'arco di curva generato dalla funzione f per $x \in [1; 4]$.



$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

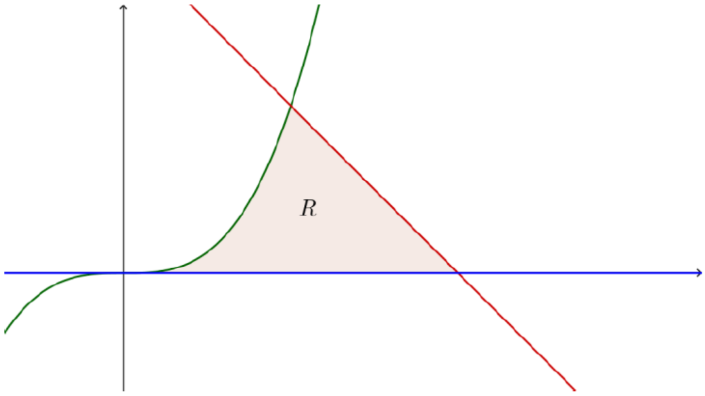
$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1}$$

$$\ell = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + x - 1}\, dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right)_1^4 = \frac{2}{3} 4^{3/2} - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

9. Si consideri la regione finita di piano R delimitata dai grafici delle funzioni $y = x^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$ (vedi figura).



(a) Calcolare l'area della regione R.

(b) Determinare le coordinate esatte del baricentro della regione R.

(c) Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse delle y.

a) $A_R = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2-x)dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

b) $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\int_a^b (x \cdot f(x))dx}{\int_a^b f(x)dx}, \frac{\int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x)dx} \right) = \left(\frac{M_{x=0}}{A_R}, \frac{M_{y=0}}{A_R} \right)$

$$M_{x=0} = \int_a^b x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^4 dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{5} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{13}{15}$$

$$M_{y=0} = \int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2 dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 x^6 dx + \int_1^2 (2-x)^2 dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 - \frac{(2-x)^3}{3}\Big|_1^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - 0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{21}$$

$$\Rightarrow (\bar{x}; \bar{y}) = \left(\frac{M_{x=0}}{A_R}; \frac{M_{y=0}}{A_R} \right) = \left(\frac{13}{15} \cdot \frac{4}{3}; \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{3} \right) = \left(\frac{52}{45}; \frac{20}{63} \right)$$

c) $V_y = 2\pi \bar{x} \cdot A_R = 2\pi \frac{52}{45} \cdot \frac{3}{4} = \frac{26}{15}\pi$

Domande multiple choice

1. La regione chiusa dall'asse delle x e dalla funzione $y = \cos(x)$ per $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ è separata in due regioni dalla retta $x = k$.
   Se l'area della regione per $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq k$ è il triplo dell'area della regione per $k \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, allora vale

   $\boxed{\text{A}}$ $k = \arcsin \frac{1}{4}$

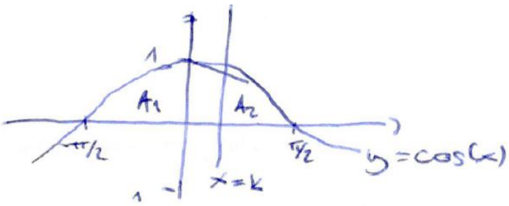
   $\boxed{\text{B}}$ $k = \frac{\pi}{6}$

   $\boxed{\text{C}}$ $k = \arcsin \frac{1}{3}$

   $\boxed{\text{D}}$ $k = \frac{\pi}{4}$

   $\boxed{\text{E}}$ $k = \frac{\pi}{3}$

$A_1 = 3 A_2$



$$\int_{-\pi/2}^{k} \cos(x)\,dx = 3 \cdot \int_{k}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

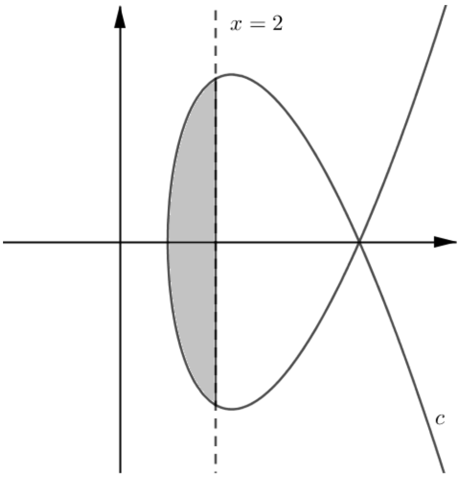
$$\Big(\sin(x)\Big)_{-\pi/2}^{k} = 3 \cdot \Big(\sin(x)\Big)_{k}^{\pi/2}$$

$$\sin(k) - \underbrace{\sin(-\pi/2)}_{=-1} = 3\big(\underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1} - \sin(k)\big)$$

$$4 \sin(k) = 2 \Rightarrow \sin(k) = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\pi}{6} \quad (k \in \text{I quadrante})$$

$\Rightarrow$ Risposta $\boxed{\text{B}}$

2. Nel grafico a lato sono rappresentate la retta $x = 2$ e la curva $c : \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t^3 - 4t \end{cases}$.



L'area A della regione colorata in grigio misura:

$\boxed{\text{A}}$ $A = \frac{17}{5}$

$\boxed{\text{B}}$ $A = \frac{11}{3}$

$\boxed{\text{C}}$ $A = 4$

$\boxed{\text{D}}$ $A = \frac{68}{15}$

$\boxed{\text{E}}$ $A = \frac{12}{5}$

$x(t) = 2 = t^2 + 1 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$

$\dot{x}(t) = 2t$

$\left.\begin{array}{l} y(-1) = 3 \\ y(1) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow$  (Antiorario)

$$\Rightarrow A = -\int_{-1}^{1} (t^3 - 4t) \cdot 2t \, dt = -\int_{-1}^{1} (2t^4 - 8t^2) \, dt$$

$$-\left(\frac{2t^5}{5} - \frac{8}{3} t^3 \right)_{-1}^{1} = \frac{68}{15}$$

$\Rightarrow$ Risposta $\boxed{\text{D}}$

3. Sia $C : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ con $0 \leq t \leq 4$. Allora la lunghezza della curva viene calcolata dall'integrale:

A $\int_0^4 \sqrt{4t+1}\, dt$

B $2\int_0^4 \sqrt{t^2+1}\, dt$

C $\int_0^4 \sqrt{2t^2+1}\, dt$

D $\int_0^4 \sqrt{4t^2+1}\, dt$

E $2\pi \int_0^4 \sqrt{4t^2+1}\, dt$

F Nessuna delle precedenti possibilità è corretta.

$$C = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$$

$$\dot{x}(t) = 2t$$

$$\dot{y}(t) = 1$$

$$\Rightarrow \quad C = \int_0^4 \sqrt{4t^2+1}\, dt$$

Risposta $\boxed{D}$

4. La lunghezza della spirale definita dalla funzione in forma polare $r(\theta) = e^{-3\theta}$ con $\theta \in [0; \infty]$ è:

$\boxed{A}$ $\frac{\sqrt{10}}{3}$

$\boxed{B}$ $\sqrt{2}$

$\boxed{C}$ ∞

$\boxed{D}$ $\sqrt{10} - e$

$\boxed{E}$ $\sqrt{20}$

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta \qquad f(\theta) = e^{-3\theta} \quad f'(\theta) = -3e^{-3\theta}$$

$$\ell = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r \sqrt{(e^{-3\theta})^2 + (-3e^{-3\theta})^2}\, d\theta$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \int_0^r \sqrt{10(e^{-3\theta})^2}\, d\theta = \sqrt{10} \cdot \lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-3\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{10} \cdot \lim_{r \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}e^{-3\theta}\right)_0^r = \sqrt{10} \lim_{r \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}e^{-3r} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$\Rightarrow$ Risposta $\boxed{A}$

5. Sia c il tratto di curva della funzione $f(x) = \frac{3}{x^2}$ dove $x \in [2; 6]$. L'area della superficie di rivoluzione ottenuta ruotando la curva c attorno all'asse delle x si calcola tramite l'integrale:

   A $6\pi \int_2^6 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{9}{x^4}}dx$

   B $2\pi \int_2^6 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{36}{x^4}}dx$

   C $2\pi \int_2^6 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{9}{x^4}}dx$

   D $2\pi \int_2^6 \sqrt{1+\frac{36}{x^6}}dx$

   E $6\pi \int_2^6 \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^6+36}{x^6}}dx$

$$A_{lat} = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2} \qquad f'(x) = \frac{-\cancel{6}x}{x^4} = \frac{-6}{x^3}$$

$$A_{lat} = 2\pi \int_2^6 \frac{3}{x^2}\sqrt{1+\frac{36}{x^6}}\, dx$$

$$= 6\pi \int_2^6 \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^6+36}{x^6}}\, dx$$

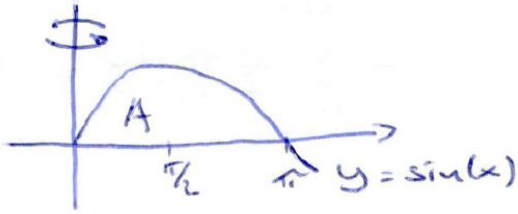
$\Rightarrow$ Risposta $\boxed{E}$

6. La figura piana $F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0;\pi] \ \wedge \ 0 \leq y \leq \sin(x)\}$ viene ruotata attorno all'asse y. Il volume del solido ottenuto è:

- [A] π^2
- [B] $2\pi^2$
- [C] π
- [D] 4π
- [E] $2\pi - 2$

$$A = \int_0^\pi \sin(x)\,dx$$

$$= \left(-\cos(x)\right)_0^\pi = 2$$



$x_B = \frac{\pi}{2}$ (per simmetria)

$\Rightarrow$ Pappo: $V = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi^2$

$\Rightarrow$ Risposta $\boxed{B}$