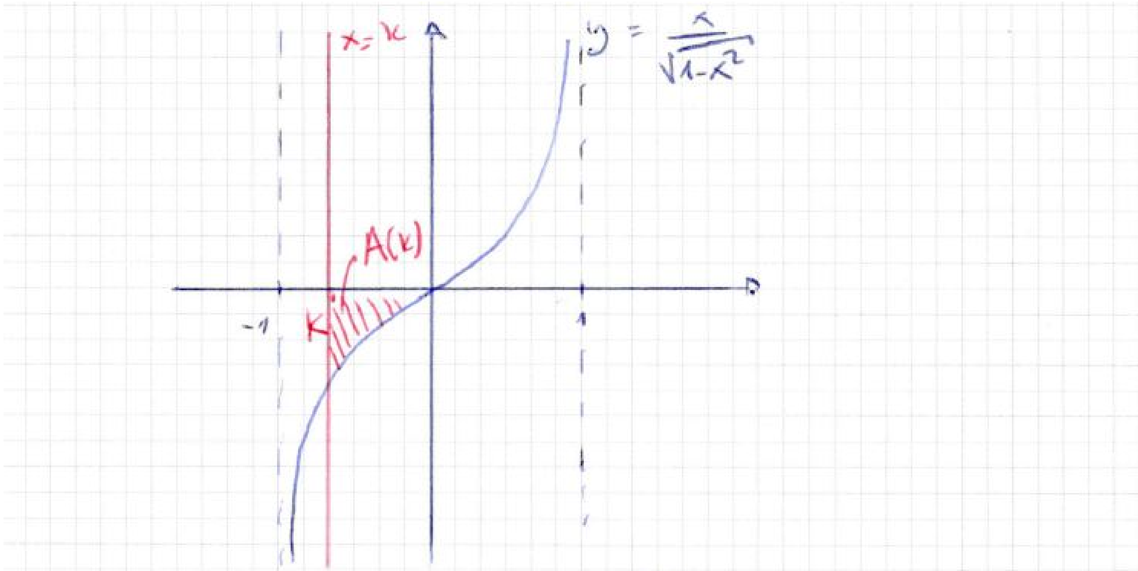
Capitolo 1: SOLUZIONI esercizi

1. Tracciare uno schizzo della curva di equazione $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ e considerare la parte situata nel III quadrante:

   (a) calcolare l'area $A(k)$ della superficie delimitata dalla curva, dall?asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = k$ con $-1 < k < 0$;

   (b) calcolare poi $\lim\limits_{k\to -1} A(k)$.



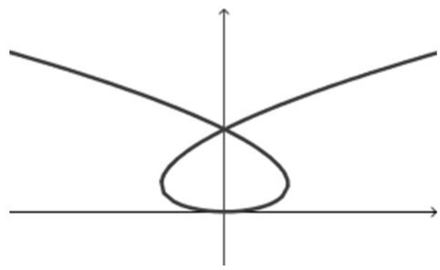
a) $$A(k) = \int_k^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_k^0 -2x\,(1-x^2)^{-1/2}\,dx$$

$$= \left(+\frac{1}{2}2\sqrt{1-x^2}\right)_k^0 = \left(\sqrt{1-x^2}\right)_k^0 = 1-\sqrt{1-k^2}$$

b) $$\lim_{k\to -1} A(k) = \lim_{k\to -1} 1-\underbrace{\sqrt{1-k^2}}_{\downarrow\, 0} = 1$$

2. Sia data la curva parametrica di equazione:

$$C: \begin{cases} x(t) = t^3 - 4t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$



il cui grafico è raffigurato a fianco. Calcolare l'area della regione finita racchiusa dall'anello.

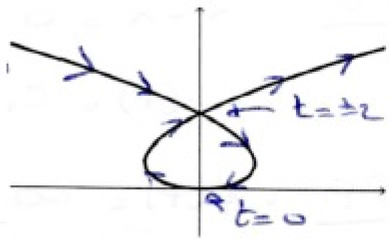
$x(t) = t^3 - 4t = (t^2-4)\cdot t = (t+2)(t-2)\cdot t = 0$

$t_1 = -2 \longrightarrow y(-2) = 4$

$t_2 = 0 \longrightarrow y(0) = 0$

$t_3 = 2 \longrightarrow y(2) = 4$

$t \to \infty \longrightarrow y(t) \to +\infty$



$x'(t) = 3t^2 - 4$

$$A = 2\cdot \int_{-2}^{0} t^2\cdot(3t^2-4)\,dt =$$

$$= 2\cdot \int_{-2}^{0} (3t^4 - 4t^2)\,dt$$

$$= 2\cdot\left(\frac{3}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3\right)_{-2}^{0} = 2\cdot\left(0 - \left(-\frac{128}{15}\right)\right) = \frac{256}{15}$$

3. Trovare l'area della regione limitata dall'asse x e da un arco di cicloide C di equazione: $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$

Un arco cicloide: $t \in [0; 2\pi]$

$$\Rightarrow A = \int_\alpha^\beta \dot{x}(t) \cdot y(t)\, dt$$

$$\leadsto \dot{x}(t) = a - a\cos(t)$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi} (a - a\cos(t))(a - a\cos t)\, dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2\, dt$$

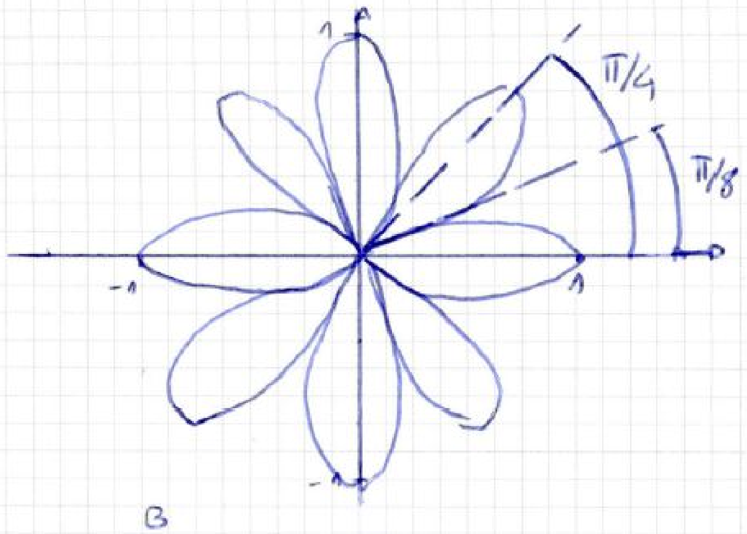
$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\, dt$$

$$= a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{1}{2}t \right)_0^{2\pi}$$

$$= a^2 \left[\left(2\pi - 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 + \pi\right) - \left(0 - 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 + 0\right) \right]$$

$$= 3\pi a^2$$

4. Trovare l'area della regione R che è una "foglia" della curva $r(\theta) = \cos(4\theta)$.



$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

$$A = 2 \cdot \int_0^{\pi/8} \cancel{\frac{1}{2}} \cos(4\theta)^2 d\theta$$

sost: $4\theta = t$

$4 d\theta = dt$

$d\theta = \frac{1}{4} dt$

$\theta = 0 \to t = 0$

$\theta = \frac{\pi}{8} \to t = \frac{\pi}{2}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \cos(t)^2 dt$$

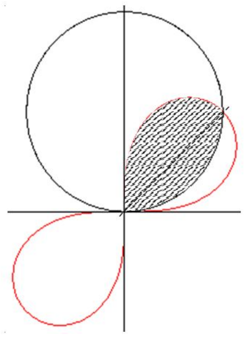
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

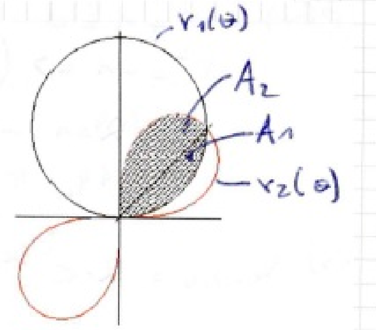
$$= \frac{1}{4}\left[\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) - (0 + 0)\right]$$

$$= \frac{\pi}{16}$$

5. Siano date le due curve di equazione $r_1(\theta) = \sqrt{2}\sin(\theta)$ e $r_2(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

   Calcolare l'area della regione interna ad entrambe le curve rappresentata nella figura a lato.





$r_1(\theta) = r_2(\theta)$

$\sqrt{2}\sin(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$

$2\sin^2\theta = \sin(2\theta)$

$\cancel{2}\sin^2\theta = \cancel{2}\sin\theta\cos\theta$

$\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$

$\sin\theta(\sin\theta - \cos\theta) = 0$

- $\sin\theta = 0 \longrightarrow \theta = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\sin\theta = \cos(\theta) \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (solo sol nel 1. Quadrante)

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^2 d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sin(2\theta)}\right)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sin^2\theta\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, d\theta$$

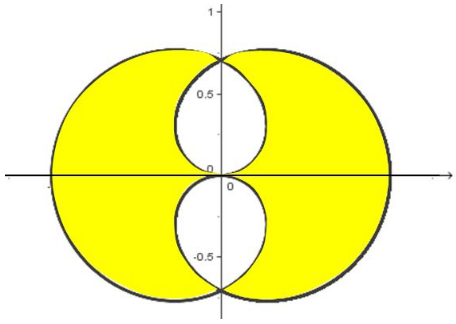
$$= \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} + \left(\frac{-\cos(2\theta)}{4}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

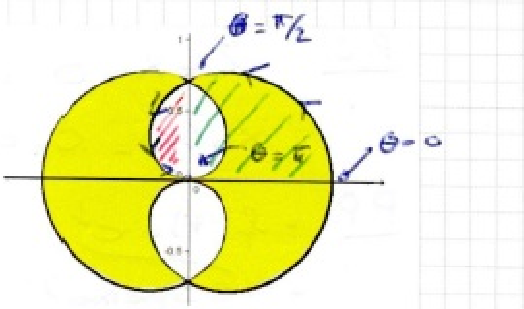
$$= \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$$

6. Sia data la curva polare C di equazione:

$$r(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Calcolare l'area della parte di piano indicata in figura.





$$A_{Gialla} = 4 \cdot \left(Area_{verde} - Area_{rossa} \right)$$

$$= 4 \cdot \left[\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 d\theta \right]$$

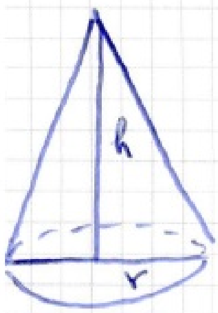
$$= 4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\theta}{4} \right)\Bigg|_0^{\pi/2} - \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\theta}{4} \right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} \right]$$

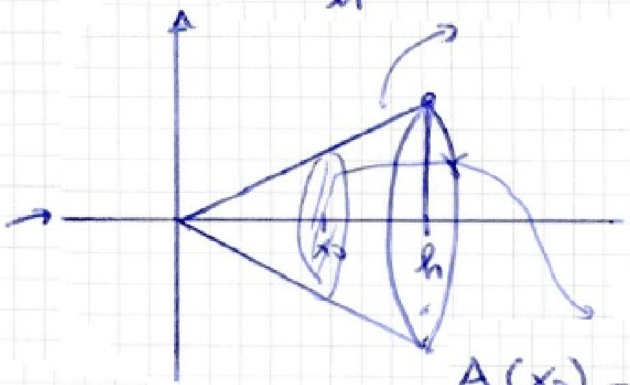
$$= 4 \cdot \left[\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

7. Dimostrare che il volume di un cono di raggio r e altezza h si calcola utilizzando la formula $V = \dfrac{r^2 \pi h}{3}$.

$$y = \frac{r}{h} x \qquad x \in [0; h]$$





$$A(x_0) = \left(\frac{r}{h} x_0\right)^2 \pi$$

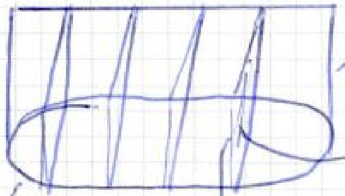
$$V = \int_0^h A(x)\, dx$$

$$= \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 \pi\, dx$$

$$= \frac{r^2}{h^2} \pi \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^h =$$

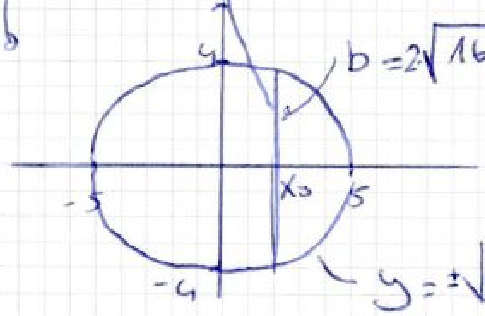
$$= \frac{r^2 \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{r^2 h \cdot \pi}{3} \quad \checkmark$$

8. Un solido ha una base a forma di ellisse, con l'asse maggiore lungo 10 e quello minore lungo 8. Calcolare il volume del solido sapendo che ogni sezione perpendicolare all'asse maggiore è un triangolo isoscele di altezza 6.



h costante $= 6$

$A(x_0) = \dfrac{b \cdot 6}{2}$



$b = 2\sqrt{16 - \frac{16}{25}x^2}$

$y = \pm\sqrt{16 - \frac{16}{25}x^2} = \pm 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^5 2 \cdot 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \cdot 6\,\frac{1}{2}\,dx =$$

$x = 0 \to t = 0$

$x = 5 \to t = \pi/2$

$$= 48 \cdot \int_0^5 \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}\,dx \qquad \text{sost.} \quad \frac{x}{5} = \sin(t)$$

$\frac{1}{5}dx = \cos(t)\,dt$

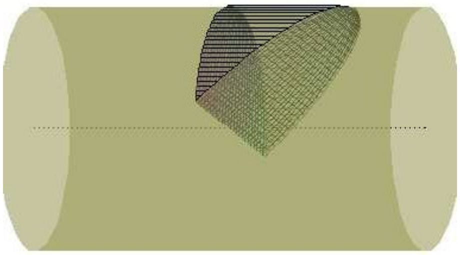
$dx = 5\cos t\,dt$

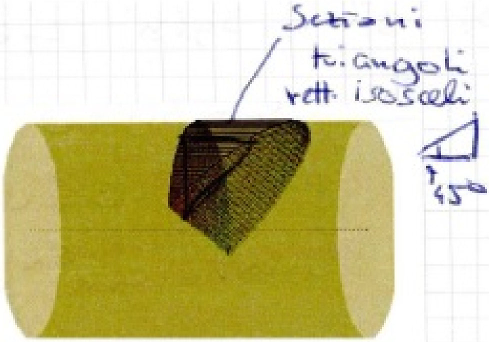
$$= 48 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot 5 \cdot \cos(t)\,dt$$

$$= 5 \cdot 48 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt$$

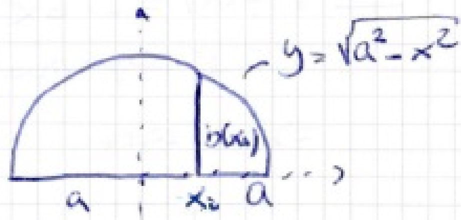
$$= 5 \cdot 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\sin t \cos t + \frac{t}{2}\right)_0^{\pi/2} = 5 \cdot 48 \cdot \frac{\pi}{4} = 60\pi$$

9. Un tronco ha forma cilindrica di diametro $2a$. Con una motosega gli si praticano due tagli; uno perpendicolare all'asse fino ad una profondità esattamente pari a mezzo diametro e l'altro inclinato rispetto al primo di 45°. Calcolare il volume dell'unghia di tronco che viene tagliata.





$$A(x_0) = \frac{b(x_0)\cdot b(x_0)}{2} = \frac{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}{2} = \frac{a^2-x^2}{2}$$

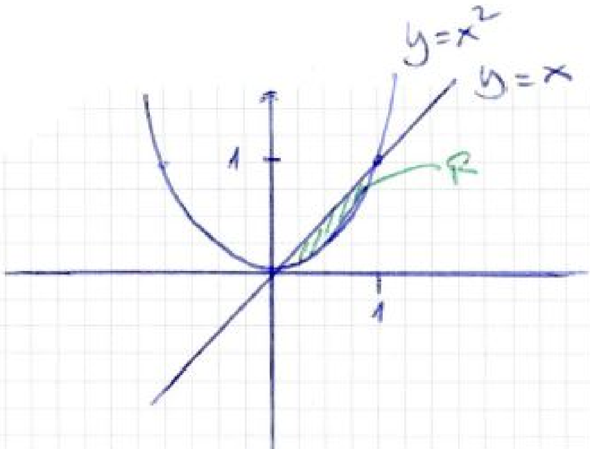


$$\Rightarrow \quad V = 2\cdot\int_0^a A(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a\left(\frac{a^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = 2\cdot\left(\frac{a^2}{2}x-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^a = 2\cdot\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{6}\right) = \frac{2}{3}a^3$$

10. Data la regione R limitata dalle curve di equazione $y = x$ e $y = x^2$. Determinare i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare la regione limitata R:

   (a) attorno all'asse x;

   (b) attorno all'asse y.



a) $$V = \int_0^1 (x)^2 \pi \, dx - \int_0^1 (x^2)^2 \pi \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) \, dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right)_0^1 = \frac{2}{15}\pi$$

b) $$y = x^2 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{y}$$

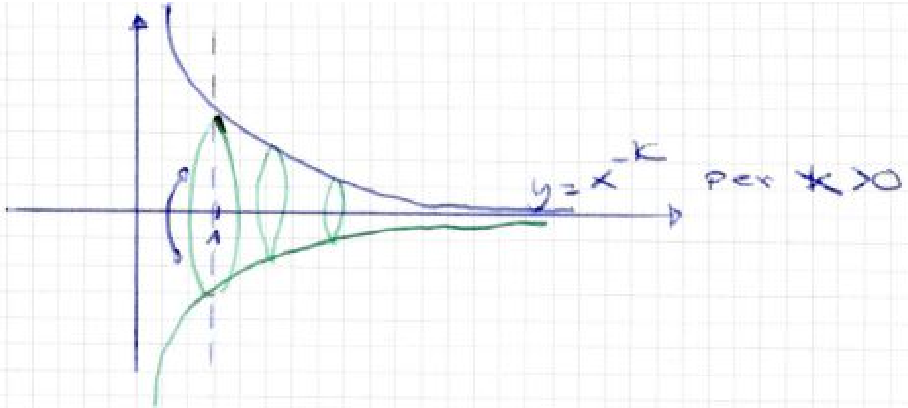
$$y = x \rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow V = \int_0^1 (\sqrt{y})^2 \pi \, dy - \int_0^1 (y)^2 \pi \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (y - y^2) \, dy$$

$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

11. Data la regione aperta R, limitata dalle curve di equazione $y = x^{-k}$, $y = 0$ e $x = 1$. Determinare per quali valori di k il volume del solido ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse delle x è finito.



$$V = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \left(x^{-k}\right)^2 \pi \, dx =$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \pi \int_1^r x^{-2k} \, dx$$

<u>Caso 1</u>: $k = 1/2$

$$\dots = \lim_{r \to +\infty} \pi \int_1^r \frac{1}{x} \, dx = \lim_{r \to +\infty} \left(\ln|x|\right)_1^r = +\infty$$

<u>Caso 2</u>: $k \neq 1/2$

$$\dots = \lim_{r \to +\infty} \pi \cdot \left(\frac{x^{-2k+1}}{-2k+1} \right)_1^r =$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \left(\frac{r^{-2k+1}}{-2k+1} - \frac{1}{-2k+1} \right) = \begin{cases} +\infty & k < 1/2 \\ \dfrac{-1}{-2k+1} & k > 1/2 \end{cases}$$

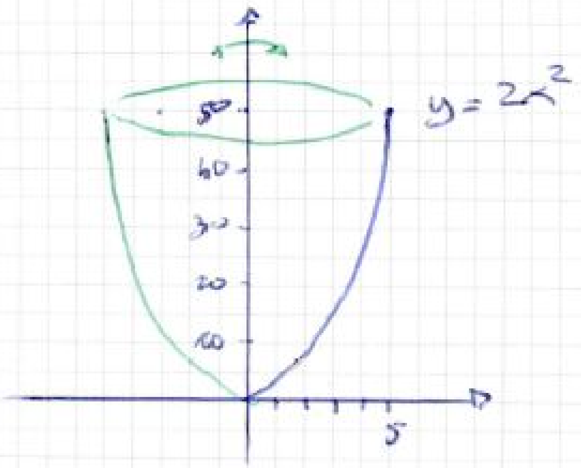
Il volume converge per $k > 1/2$

12. Una coppa di cristallo ha la forma di un paraboloide generato dalla rotazione completa della parabola $y = 2x^2$, con $x \in [0; 5]$ in centimetri. Quale è la capacità di tale coppa?

$y = 2x^2 \qquad x \in [0; 5)$

$\frac{y}{2} = x^2$

$x = \sqrt{\frac{y}{2}}$



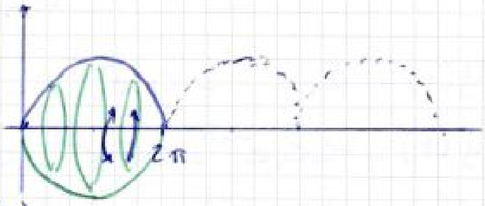
$$V = \int_0^{50} \left(\sqrt{y/2}\right)^2 \pi \, dy$$

$$= \int_0^{50} \frac{y}{2} \pi \, dy = \left(\frac{y^2}{4} \pi \right)_0^{50} = 625 \pi$$

13. **(∗) Esercizio di approfondimento**

La regione limitata dall'asse x e da un arco di cicloide C di equazione:
$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$ viene fatta ruotare attorno all'asse delle x. Determinare il volume ottenuto.

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi \cdot (y(t))^2 \cdot x'(t)\, dt$$



$$x'(t) = a - a\cos(t)$$
$$= a(1 - \cos(t)) = y(t)$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi} \pi\, (a(1-\cos(t)))^2 \cdot a(1-\cos(t))\, dt$$
$$= a^3\pi \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^3\, dt$$
$$= a^3\pi \cdot \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos(t) + 3\cos^2(t) - \cos^3(t))\, dt$$

Tande + (∗)

$$= a^2\pi \cdot \left(t + 3\sin(t) + \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{3}{2}t - \sin t\cos^2 t - \frac{2}{3}\sin^3 t \right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$= a^2\pi \left[\left(2\pi + \frac{3}{2}2\pi\right) - (0) \right] = 5a^2\pi^2$$

(∗) $$\int \cos^3 t\, dt = \int \cos(t) \cdot \cos^2(t)\, dt$$
$$\overset{PP}{=} \sin t\cos^2 t - \int \sin t \cdot (-2\sin t\cos t)\, dt$$
$$= \sin t\cos^2 t + 2\int \cos t\sin^2 t\, dt$$
$$= \sin t\cos^2 t + \frac{2}{3}\sin^3(t)$$

14. Determinare la lunghezza di un arco della curva $y = \ln(x)$ con $x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}]$.

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$S = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx$$

$x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}]$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx$$

$x = \sqrt{t^2-1}$

sost: $t = \sqrt{1+x^2}$ $\quad x=\sqrt{8} \to 3$, $\quad x=\sqrt{3} \to 2$

$$dt = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\, dt$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \cdot t \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\, dt$$

$$= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\, dt = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{(t+1)(t-1)}\right) dt$$

$$= \int_2^3 \left(1 + \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}\right) dt =$$

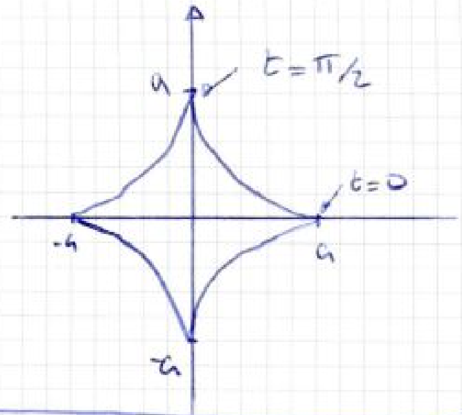
$$= \left(t + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1|\right)_2^3$$

$$= \left(3 + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(4)\right) - \left(2 + \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \ln(4) + \ln(3)\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln(3/2)$$

15. Determinare la lunghezza totale dell'astroide $\begin{cases} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{cases}$.

$$S = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3a\sin(t)\cos^2(t) \\ \dot{y}(t) = 3a\cos(t)\sin^2(t) \end{cases}$$

$$S = 4\cdot\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\sin(t)\cos^2(t))^2 + (3a\cos(t)\sin^2(t))^2}\, dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\sin^2(t)\cos^4(t) + 9a^2\cos^2(t)\sin^4(t)}\, dt$$

$$= 4\cdot\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\sin^2(t)\cos^2(t)\cdot\underbrace{(\cos^2(t) + \sin^2(t))}_{=1}}\, dt$$

$t \in [0; \pi/2]$

$$= 4\cdot\int_0^{\pi/2} 3a\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)\, dt$$

$$= 12a\int_0^{\pi/2} \cos(t)\cdot\sin(t)\, dt$$

$$= 12a\left(\frac{1}{2}\sin^2(t)\right)\Big|_0^{\pi/2} = 12a\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 6a$$

16. Determinare la lunghezza della curva polare $r(\theta) = \theta^2$ per $\theta \in [0; \pi]$.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2}\, d\theta \qquad r(\theta) = \theta^2 \quad r'(\theta) = 2\theta$$

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}\, d\theta$$

$\theta > 0$

$$= \int_0^{\pi} \theta \cdot \sqrt{4 + \theta^2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} 2\theta \left(4 + \theta^2\right)^{1/2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \left(4 + \theta^2\right)^{3/2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\left(4 + \pi^2\right)^{3/2} - \frac{1}{3} 4^{3/2}$$

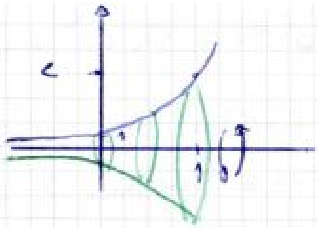
$$= \frac{\left(4 + \pi^2\right)^{3/2} - 8}{3}$$

17. Determinare l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la curva data attorno alla retta indicata:

    (a) $y = e^x$ per $x \in [0; 1]$, attorno all'asse delle x;

    (b) $y = x^2$ per $x \in [0; 2]$, attorno all'asse delle y.

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$



a) $$S = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

$\rightsquigarrow$ sost: $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$ $\quad x=0 \to t=1$

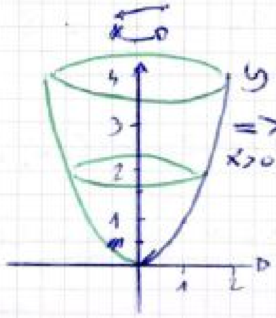
$e^{2x} = t^2$ $\quad x=1 \to t=e$

$$\Rightarrow S = 2\pi \int_1^e \sqrt{1+t^2}\,dt =$$

tavole $$= \cancel{2}\pi \left(\frac{t\sqrt{1+t^2}}{\cancel{2}} + \frac{\ln|t+\sqrt{1+t^2}|}{\cancel{2}} \right)\Bigg|_1^e$$

$$= \pi \cdot \left(e\sqrt{1+e^2} + \ln(e+\sqrt{1+e^2}) - \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}) \right)$$

$(\cong 22{,}943)$



$y = x^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{y}$

$x>0$ $\quad x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

b) $$S = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\,dy$$

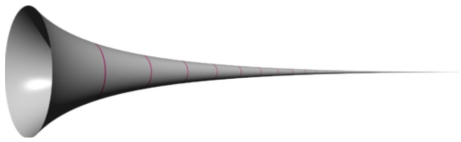
$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy$$

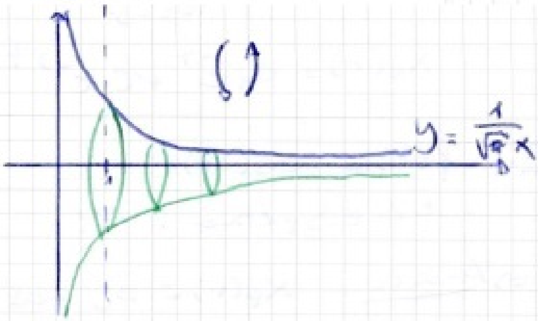
$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{y+\frac{1}{4}}\,dy =$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{3}\left(y+\frac{1}{4}\right)^{3/2} \right)\Bigg|_0^4 = 2\pi \left(\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{17}{4}\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} \right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left(\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8} \right) \quad (\cong 36{,}177)$$

18. Ruotando attorno all'asse delle x la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}x}$ per $x \in [1; \infty[$ sie ottiene la figura rappresentata a lato, chiamata la Tromba di Torricelli. Calcolare il volume e l'area della superficie della tromba di Torricelli.





$$V_x = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}x}\right)^2 \pi \, dx =$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \frac{1}{\cancel{\pi} x^2} \cancel{\pi} \, dx = \lim_{r \to +\infty} \left[\left(\frac{-1}{x} \right|_1^r \right]$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \left[\frac{-1}{r} - \frac{-1}{1} \right] = \lim_{r \to +\infty} \left[1 - \underset{\downarrow \, 0}{\frac{1}{r}} \right] = 1$$

$$S_x = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{\pi}(x)^2}\right)^2} \, dx$$

$S_x \geq +\infty$

$$= \lim_{r \to +\infty} \int_1^r 2\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\pi x^4}} \, dx$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \int_1^r 2\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\pi x^4 + 1}{\pi x^4}} \, dx$$

$$\overset{x\infty}{=} \lim_{r \to +\infty} \int_1^r 2\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\pi x^2} \cdot \sqrt{\pi x^4 + 1} \, dx$$

$$⚠ \geq \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \sqrt{\pi x^4} \, dx =$$

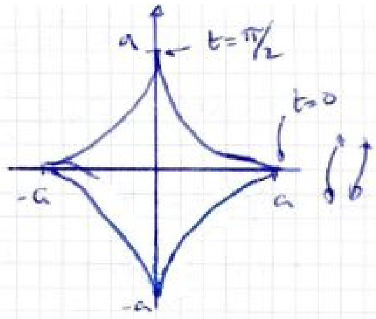
$$= \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \frac{2\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \cancel{\sqrt{\pi}} x^2 dx = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r 2 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{r \to +\infty} \left(2 \cdot \ln|x|\right)_1^r$$

$= +\infty$

19. (∗) **Esercizio di approfondimento**

L'astroide di equazione $\begin{cases} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{cases}$ viene ruotato attorno all'asse delle x. Determinare l'area della superficie di rivoluzione ottenuta.

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi\, y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$



$$\begin{cases} x'(t) = -3a\sin(t)\cos^2(t) \\ y'(t) = 3a\cos(t) \cdot \sin^2(t) \end{cases}$$

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} a \cdot \sin^3(t) \cdot \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^4 t + 9a^2 \cos^2 t \sin^4(t)}\, dt$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} a \cdot \sin^3(t) \cdot \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t\, \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}}\, dt$$

$a > 0$

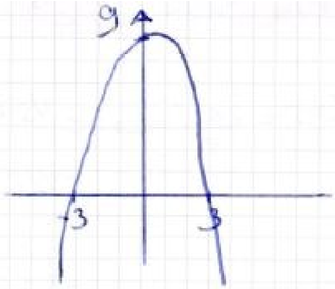
$t \in [0; \pi/2]$ $$= 4\pi \int_0^{\pi/2} a \cdot \sin^3(t) \cdot 3 \cdot a \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)\, dt$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot \sin^4(t)\, dt$$

$$= 12\pi a^2 \left(\frac{1}{5} (\sin(t))^5 \right)_0^{\pi/2} = \frac{12\pi a^2}{5}$$

20. Determinare il baricentro della regione R: $0 \leq y \leq 9 - x^2$.

$\bar{x} = 0$ (per simmetria)



$$A_R = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,dx$$

$$= \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)_{-3}^{3} = 36$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2A_R} \cdot \int_a^b f(x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 36} \cdot \int_{-3}^{3} (9 - x^2)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{72} \cdot 2 \cdot \int_0^3 (81 - 18x^2 + x^4)\,dx = \frac{1}{36} \cdot \left(81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right)_0^3$$

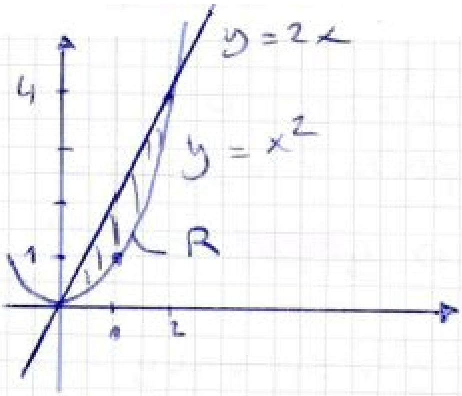
$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{648}{5} = \frac{18}{5}$$

$B(0; 18/5)$

21. Determinare le coordinate del baricentro della figura piana racchiusa dai grafici della parabola $p(x) = x^2$ e della retta $r(x) = 2x$ nel primo quadrante.

$$A_R = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right)_0^2 = \frac{4}{3}$$



$$x_B = \frac{3}{4} \cdot \int_0^2 x \cdot (2x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^2 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} \right)_0^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$y_B = \frac{3}{4} \cdot \int_0^2 \frac{1}{2} \cdot \left((2x)^2 - (x^2)^2 \right) dx$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \int_0^2 (4x^2 - x^4)\, dx$$

$$= \frac{3}{8} \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} \right)_0^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{64}{15} = \frac{8}{5}$$

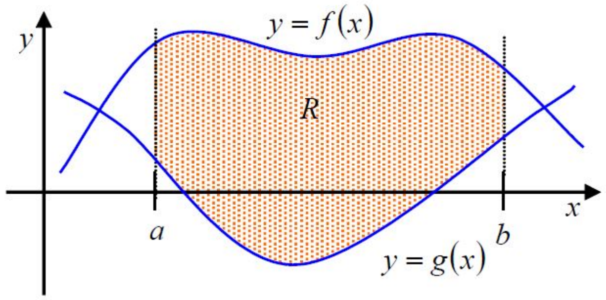
Baricentro: $(1 ; 8/5)$

22. **(∗) Esercizio di approfondimento**
Sia R una regione piana racchiusa tra il grafico di due funzioni in un intervallo $[a;b]$. Le coordinate del baricentro $B=(x_B;y_B)$ della figura piana R sono date da:

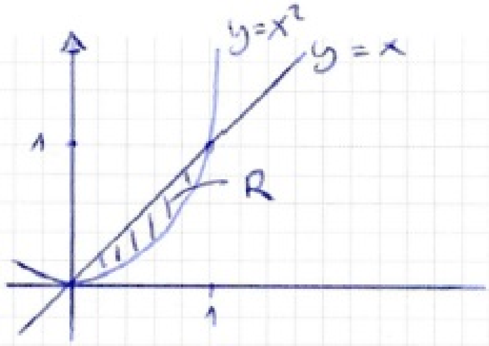
$$x_B = \frac{1}{A}\int_a^b x\cdot[f(x)-g(x)]\ dx$$

$$y_B = \frac{1}{2A}\int_a^b [(f(x))^2-(g(x))^2]\ dx$$

dove $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$



Determinare le coordinate del baricentro della regione R finita limitata da $y=x$ e $y=x^2$.



$x = x^2$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x_1 = 0\ ;\ x_2 = 1$

$$A_R = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$x_B = \frac{1}{1/6}\cdot\int_0^1 x\cdot(x-x^2)\,dx = 6\cdot\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx$$

$$= 6\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)_0^1 = 6\cdot\frac{1}{12} = 1/2$$

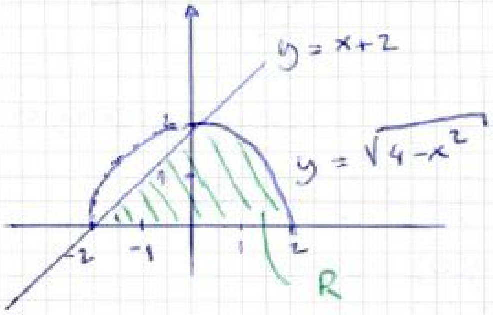
$$y_B = \frac{1}{2\cdot 1/6}\cdot\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx = 3\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)_0^1$$

$$= 3\cdot\frac{2}{15} = \frac{2}{5}$$

$$(x_B;y_B) = \left(\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right)$$

23. (∗) **Esercizio di approfondimento**
Determinare le coordinate esatte del baricentro della regione finita di piano delimitata dalle curve di equazione $y = x + 2$, $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = 0$.

$$A_R = A_\Delta + A_D = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2^2 \pi}{4} = 2 + \pi$$



$$x_B = \frac{1}{A} \cdot \left(\Sigma M_{x_i} \right)$$

$$= \frac{1}{2+\pi} \cdot \left(\int_{-2}^{0} x(x+2)\, dx + \int_{0}^{2} x \cdot \sqrt{4-x^2}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2+\pi} \cdot \left(\int_{-2}^{0} (x^2+2x)\, dx - \frac{1}{2} \int_{0}^{2} -2x (4-x^2)^{1/2} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2+\pi} \cdot \left[\left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right)_{-2}^{0} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} (4-x^2)^{3/2} \right)_{0}^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2+\pi} \left[-\frac{4}{3} + \frac{8}{3} \right] = \frac{4}{6+3\pi} \quad (\cong 0{,}259)$$

$$y_B = \frac{1}{A} \left(\Sigma M_{y_i} \right)$$

$$= \frac{1}{2+\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} \int_{-2}^{0} (x+2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{2} \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx \right)$$

$$= \frac{1}{4+2\pi} \cdot \left(\int_{-2}^{0} (x^2+4x+4)\, dx + \int_{0}^{2} (4-x^2)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{4+2\pi} \left[\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right)_{-2}^{0} + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right)_{0}^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{4+2\pi} \left[\frac{8}{3} + \frac{16}{3} \right] = \frac{1}{4+2\pi} \cdot 8 = \frac{4}{2+\pi} \quad (\cong 0{,}778)$$

$$B: \ (x_B ; y_B) = \left(\frac{4}{6+3\pi} ; \frac{4}{2+\pi} \right)$$

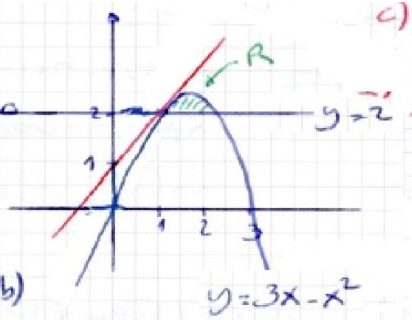
24. Determinare il volume che si ottiene facendo ruotare la regione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = 3x - x^2$ e $y = 2$:

(a) attorno all'asse x;

(b) attorno all'asse y;

(c) attorno alla retta tangente alla parabola in $x = 1$.

<u>oss</u>: per risolvere la parte c) dobbiamo utilizzare Pappo $\Rightarrow$ utilizziamo il Teorema anche per le parti a) e b)



c) $y = 3x - x^2$

$y' = 3 - 2x$

$y'|_{x=1} = 1$

$\Rightarrow t(x) = 1 \cdot x + b$

$t(1) = 2$

$\Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow t(x) = x + 1$

$\Rightarrow \quad 3x - x^2 = 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$$\Rightarrow A_R = \int_1^2 (3x - x^2 - 2)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right)_1^2 = 1/6$$

$x_B = 3/2$ (per simmetria)

$$y_B = \frac{1}{2 \cdot 1/6} \cdot \int_1^2 \left((3x - x^2)^2 - 2^2\right) dx = 3 \cdot \int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4)\,dx$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + 3x^3 - 4x\right)_1^2 = 3 \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{10}$$

$B\left(\frac{3}{2}; \frac{21}{10}\right)$

a) $V_x = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot \frac{21}{10} = \frac{7}{10}\pi$

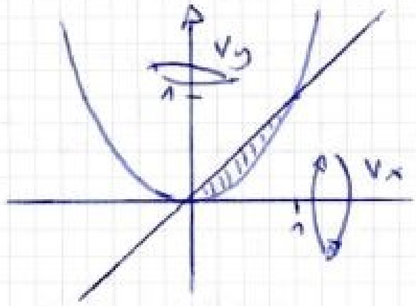
b) $V_y = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi}{2}$

c) $t(x) = y = x + 1 \Rightarrow t: \ x - y + 1 = 0 \qquad B\left(\frac{3}{2}; \frac{21}{10}\right)$

$$\Rightarrow \text{dist}(B; t) = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{21}{10} + 1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4/10}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow V_t = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{15}$$

25. Utilizzare opportunamente il teorema di Guldino-Pappo per determinare le coordinate del baricentro della regione finita limitata da $y = x$ e $y = x^2$.



Pappo: $V_x = 2\pi \cdot y_B A$

$\Rightarrow y_B = \dfrac{V_x}{2\pi A}$

$V_y = 2\pi \cdot x_B A$

$\Rightarrow x_B = \dfrac{V_y}{2\pi A}$

- $A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} \right|_0^1 = 1/6$

- $V_x = \int_0^1 x^2 \pi \, dx - \int_0^1 x^4 \pi \, dx =$

$= \pi \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} \right|_0^1 = \dfrac{2}{15}\pi$

- V_y : $y = x \rightarrow x = y$

$y = x^2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y}$

$V_y = \int_0^1 (\sqrt{y})^2 \pi \, dy - \int_0^1 y^2 \pi \, dy$

$= \pi \left(\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y^3}{3} \right|_0^1 = \dfrac{\pi}{6}$

PAPPO

$\Rightarrow$

$y_B = \dfrac{2/15\, \pi}{2\pi \cdot \frac{1}{6}} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

$x_B = \dfrac{\pi/6}{2\pi\, 1/6} = \dfrac{1}{2}$

Baricentro: $\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{2}{5} \right)$

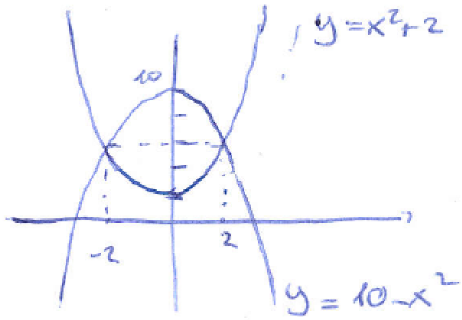
26. Sia R la regione compresa tra i grafici delle funzioni $y = x^2 + 2$ e $y = 10 - x^2$.

(a) Disegnare la regione R.

(b) Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse delle x.

(c) Calcolare la coordinata y del baricentro di R.

a)



$$x^2+2 = 10-x^2$$
$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$
$$A = \int_{-2}^{2} (10-x^2)-(x^2+2)\,dx = \frac{64}{3}$$

b) $$V = \int_{-2}^{2} (10-x^2)^2 \pi\, dx - \int_{-2}^{2} (x^2+2)^2 \pi\, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} 100 - 20x^2 + x^4\, dx - \pi \int_{-2}^{2} x^4 + 4x + 4\, dx$$

$$= \pi \left(100x - \frac{20}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right)_{-2}^{2} - \pi \left(\frac{x^5}{5} + 2x^2 + 4x\right)_{-2}^{2}$$

$$= \pi \frac{4592}{15} - \pi \frac{752}{15} = 256\pi$$

c)

Pappo: $V = 2\pi \cdot y_G \cdot A \Rightarrow 256\pi = 2\pi \cdot y_G \cdot \frac{64}{3}$

$$\Rightarrow y_G = \frac{256\pi \cdot 3}{2\pi 64} = 6$$

(visibile anche per simmetria)

27. Sia R la regione finita di piano racchiusa tra i grafici delle due funzioni $f_1(x) = x^2 - 5x$ e $f_2(x) = -x^2 + 9x$.

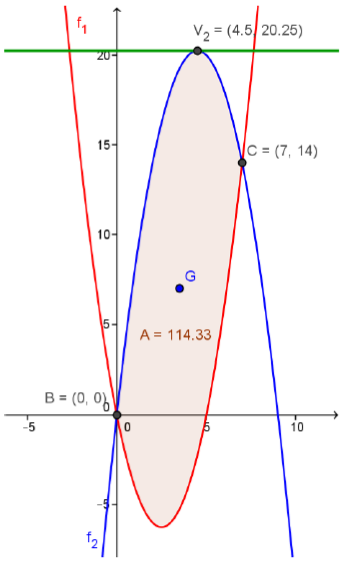
(a) Disegnare la regione R e determinare il valore esatto della sua area.

(b) Sia r la retta tangente alla funzione f_2 nel suo punto di massimo: determinare il volume del solido ottenuto ruotando la regione R attorno alla retta r.

a) $f_1 \cap f_2$: $x^2 - 5x = -x^2 + 9x \Leftrightarrow 2x^2 - 14x = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (x-7) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 7$

$$R = \int_0^7 [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_0^7 [-2x^2 + 14x]dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 7x^2 \right)\Bigg|_0^7 = 7^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{343}{3}$$

b) Vertice di f_2: $V = \left(\frac{9}{2}, \frac{81}{4} \right)$, dunque r è una retta orizzontale di equazione $y = \frac{81}{4}$.



La coordinata y del baricentro della regione R è data da:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^7 \frac{1}{2}[f_2(x) - f_1(x)] \cdot [f_2(x) + f_1(x)]dx}{R} =$$

$$= \frac{1}{2R}\int_0^7 \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx = \frac{1}{2R}\int_0^7 \left[(-x^2 + 9x)^2 - (x^2 - 5x)^2\right]dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2R}\int_0^7 [-8x^3 + 56x^2]dx = \frac{1}{2R} \cdot \left(-2x^4 + \frac{56}{3}x^3 \Bigg|_0^7 \right) = .. = 7$$

Per Guldino-Pappo il volume V del solido generato dalla rotazione della regione R intorno alla retta r è dato dal prodotto dell'area di R per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro. La distanza tra la retta r e il baricentro della regione R è:

$$d = \frac{81}{4} - 7 = \frac{53}{4}$$

$$V = 2\pi d \cdot R = 2\pi \cdot \frac{53}{4} \cdot \frac{343}{3} = \frac{18'179}{6} \cdot \pi$$