Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

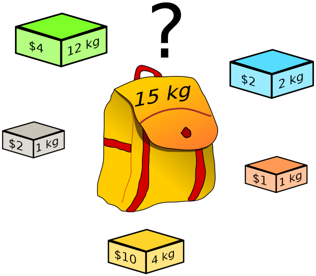
Università
della
Svizzera
italiana

Istituto Dalle Molle di studi sull'intelligenza artificiale

The Knapsack Problem

Matteo Salani
matteo.salani@idsia.ch

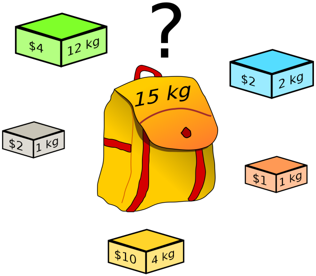
Il problema dello zaino



Definizione del problema

Sia dato uno zaino che possa sopportare un determinato peso. Siano dati inoltre N oggetti, ognuno dei quali caratterizzato da un peso e un valore. Scegliere quali di questi oggetti mettere nello zaino per ottenere il maggiore valore senza eccedere il peso sostenibile.

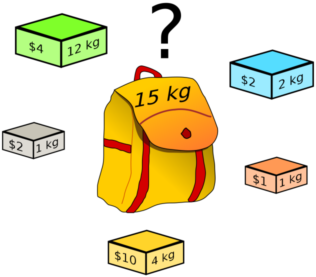
Il problema dello zaino



Definizione dei dati

- N: Insieme degli oggetti
- B: Capacità dello zaino
- v_i: Valore dell'oggetto i-mo $i = 1..|N|$
- w_i: Peso dell'oggetto i-mo $i = 1..|N|$

Il problema dello zaino



Definizione delle variabili

L'oggetto $i - mo$ viene inserito nello zaino?
Si/no $\rightarrow$ variabile binaria $x_i \in \{0, 1\}$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ è inserito nello zaino} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il problema dello zaino

Funzione obiettivo

Massimizzare il profitto totale

$$\text{Valore dell'oggetto } i - mo = \begin{cases} v_i & \text{se } x_i = 1 \\ 0 & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

Profitto totale

$$\sum_{i=1}^{|N|} v_i \cdot x_i$$

Funzione obiettivo

$$z = \max \sum_{i=1}^{|N|} v_i \cdot x_i$$

Il problema dello zaino

Vincoli

Non eccedere il peso sostenibile

$$\text{Peso dell'oggetto } i - mo = \begin{cases} w_i & \text{se } x_i = 1 \\ 0 & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

Peso totale

$$\sum_{i=1}^{|N|} w_i \cdot x_i$$

Vincolo di peso

$$\sum_{i=1}^{|N|} w_i \cdot x_i \leq B$$

Il problema dello zaino

Modello matematico

$$
\begin{array}{lll}
z = \underline{\max} & \sum_{i=1}^{|N|} v_i \cdot x_i & \\
s.t. & \sum_{i=1}^{|N|} w_i \cdot x_i \leq B & \\
 & x_i \in \{0,1\} & \forall i \in 1 \cdots |N|
\end{array}
$$

Modello di programmazione matematica lineare intera (binaria).

Brute force $\Rightarrow O(2^n)$

$N : \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$

$S(i, B)$

$N : \{\underbrace{n_1, n_2, n_3, \dots, n_i,}_{\text{primi } i \text{ oggetti}} \dots n_n\}$

$N_i : \{n_1, n_2, \dots, n_i\} \subseteq N$

$S(0, B)$ sol. è banale $\Rightarrow 0$

$S(i, 0)$ sol. è banale $\Rightarrow 0$

$S(i, B_i)$ consideriamo n_i

se $w_i > B_i$

$$S(i, B_i) = S(i-1, B_i)$$

se $w_i \leq B_i$

$$S(i, B_i) \begin{cases} ① \; v_i + S(i-1, B_i - w_i) & \text{caso in cui } i \text{ è inserito} \\ ② \; S(i-1, B_i) & \end{cases}$$

$$\underbrace{S(i, B_i)}_{\text{ottimo}} = \max\left(\underbrace{S(i-1, B_i)}_{\text{ottimo } i-1,\, B_i}, \underbrace{S(i-1, B_i - w_i) + v_i}_{\text{ottimo } i-1,\, B_i - w_i}\right)$$

① Sia $A(i, B_i)$ una sol. ottima di $S(i, B_i)$

$A \subseteq N_i$ cioe' un sottoinsieme di oggetti

$$A(i, B_i) = \{n_i\} \cup \underline{\underline{A(i-1, B_i - w_i)}}$$

$$\underline{A'(i-1, B_i - w_i)} \Rightarrow \underline{S'(i, B_i)} = V_i + S'(i-1, B_i - w_i)$$

$$\underline{S'(i, B_i)} = V_i + S'(i-1, B_i - w_i) >$$

$$V_i + S(\underline{\underline{i-1}}, \underline{\underline{B_i - w_i}}) = \underline{\underline{S(i, B_i)}}$$

② Esercizio

$S[N, B]$ v e' il valore ottimo di uno zaino di capacità B e N oggetti disponibili

$S[0, B] = 0$, $S[N, 0] = 0$

Top down

Kp (n, B, S)

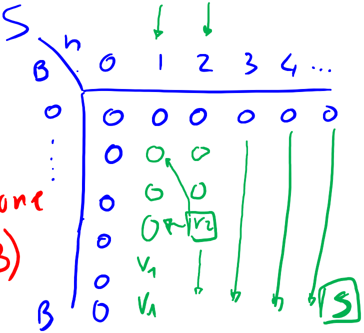
caso base → if n == 0 or B == 0
return 0;

if S[n-1, B-1] != 0 || memoization
return S[n-1, B-1]

ricorsione → S[n-1, B-1] = max (Kp(n-1, B, S),
Kp(n-1, B - W[n-1], S) +
V[n-1])

return S[n-1, B-1]

Kp_bu (n, V, W, B)




```
S[0,B] = 0
S[N,0] = 0
A[N] = 0        init soluzione
                O(n·B)
for i=1..N
  for j=1..B
    if w[i] > j {
      S[i,j] = S[i-1,j]          l'oggetto i non ci sta
    } else if S[i-1,j] ≥ S[i-1, j-w[i]] + V[i] {
        non prendo i                          prendo i
      S[i,j] = S[i-1,j]
    } else {
      S[i,j] = S[i-1, j-w[i]] + v[i]
      A[i] = 1
    }
}
```