# Fourier

martedì 26 ottobre 2021 11:41

## SERIE DI FOURIER FORMA ESTESA

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

* $a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t)\,dt$
* $a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$
* $b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$
* $S(t) = f(t)$ $\forall t$ su cui $f$ è continua
* $S(t) = \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2}$ se $f$ è discontinua in $t_0$ $\rightarrow$ $f(t_0^-)$ e $f(t_0^+)$ calcolo con limite

## SERIE DI FOURIER FORMA COMPATTA

$$S(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

STUDIARE CASI PARI E DISPARI

* $C_0 = \frac{a_0}{2}$
* $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\quad n \geq 1$
* $\tan(\theta_n) = -\frac{b_n}{a_n} \Rightarrow \theta_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$ $\nearrow$ se II III $\Rightarrow +\pi$

## SERIE DI FOURIER FORMA COMPLESSA

$$S(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n e^{i n \omega_0 t}$$

* $D_0 = \frac{a_0}{2} = C_0$
* $D_n = \frac{a_n + i b_n}{2}$ $\quad D_n, D_n \in \mathbb{C}$

$|D_n| = \frac{1}{2} C_n$

$\angle D_n = \theta_n$

$\angle D_{-n} = -\theta_n$

## Trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$ TRASFORMATA

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$ ANTITRASFORMATA

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, bend left, "\mathcal{F}"] & \mathcal{F}(f(t)) = F(\omega) \arrow[l, bend left, "\mathcal{F}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

## Energia e bande di frequenza

$$E_{TOT} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$ in frequenza (non sempre semplice)

$$E_{TOT} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\, dt \qquad E\% = \frac{E[a,b]}{E_{TOT}} \cdot 100$$

## Delta di Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$ se $f$ è continua in $t_0$!!

## Proprietà delle Trasformate di Fourier

* Linearità: $\mathcal{F}(a f_1(t) + b f_2(t)) = a\,\mathcal{F}(f_1(t)) + b\,\mathcal{F}(f_2(t))$
* Dualità: $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$
* Cambio Scala: $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
* Traslazione nel tempo: $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)\, e^{-i\omega t_0}$
* Traslazione in frequenza: $f(t)\, e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$
* Segnali modulati: $f(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$
* Trasformata della derivata: $t^n f(t) \leftrightarrow \frac{1}{(-i)^n} F^{(n)}(\omega)$
* Convoluzione: $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\, d\tau$

$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$ dove $F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\cdot F_2(\omega - x)\, dx$

$f(t) * g(t) \leftrightarrow F_1(\omega)\, F_2(\omega)$