Capitolo 2: SOLUZIONI esercizi

1. Una sostanza radioattiva ha un tempo di dimezzamento di 1200 anni. Dopo 10 anni che percentuale rimane di una quantità iniziale di tale sostanza? Quanti anni sono richiesti per ridurre del 10 per cento la quantità iniziale?

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

$$\Rightarrow N(t) = k \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\begin{cases} N(0) = N_0 & \Rightarrow k \cdot e^{-\lambda 0} = N_0 \Rightarrow k = N_0 \\ N(1200) = \frac{1}{2} N_0 & \Rightarrow \cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot 1200} = \frac{1}{2} \cancel{N_0} \Rightarrow e^{-1200\lambda} = e^{\ln(1/2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\ln(1/2)}{1200} = \frac{\ln(2)}{1200}$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{\frac{-\ln(2)}{1200} \cdot t}$$

a) $N(10) = 0{,}99424\, N_0$ $\quad$ (99,424% di N_0)

b) $N(t) = 0{,}9 \cancel{N_0} = \cancel{N_0} \cdot e^{\frac{-\ln(2)}{1200} t}$

$$\Rightarrow e^{\ln(0{,}9)} = e^{\frac{-\ln(2)}{1200} t} \Rightarrow t = \frac{1200 \cdot \ln(0{,}9)}{-\ln(2)} \cong 182{,}4 \text{ anni}$$

2. In una certa coltura di batteri, la cui crescita è proporzionale al loro numero, il numero dei batteri triplica ogni 3 giorni. Se alla fine di 7 giorni nella coltura vi sono 10 milioni di batteri, quanti ne erano presenti inizialmente?

$$N'(t) = \lambda \cdot N(t)$$

$$\Rightarrow N(t) = k \cdot e^{\lambda t}$$

$$\begin{cases} N(0) = N_0 \longrightarrow k = N_0 \\ N(3) = 3N_0 \longrightarrow \\ N(7) = 10'000'000 \longrightarrow \end{cases} \begin{cases} N_0 \cdot e^{3\lambda} = 3N_0 \\ N_0 \cdot e^{7\lambda} = 10'000'000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{3\lambda} = 3 \Rightarrow 3\lambda = \ln(3) \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(3)}{3}$$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{10'000'000}{e^{7 \cdot \ln(3)/3}} \simeq 770401 \text{ batteri}$$

3. In base alla legge del raffreddamento di Newton, un oggetto caldo introdotto in un ambiente più freddo si raffredda con una rapidità proporzionale alla differenza fra la sua temperatura e quella dell?ambiente. Se una tazzina di caffè che si trova in un luogo mantenuto a una temperatura di $20°C$ si raffredda da $80°C$ a $50°C$ in cinque minuti, quanto tempo ancora sarà richiesto affinchè si raffreddi fino a $40°C$?

$T(t)$ = temperatura oggetto al tempo t

T_A = temperatura ambiente

$T'(t)$ = rapidità di variazione della temperatura dell'oggetto

Newton: $T'(t) = \lambda \cdot (T(t) - T_A)$

$$T'(t) = \lambda T(t) - \lambda T_A$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = -\lambda T_A$$

$$\mu(t) = \int -\lambda \, dt = -\lambda t + \cancel{c}$$

$$T(t) = e^{\lambda t} \cdot \int e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda T_A) \, dt$$

$$= e^{\lambda t} \cdot T_A \cdot \int -\lambda e^{-\lambda t} \, dt$$

$$= T_A \cdot e^{\lambda t} \cdot \left(e^{-\lambda t} + c \right)$$

$$T(t) = T_A + c \cdot T_A \cdot e^{\lambda t}$$

$T_A = 20°$

$T(0) = 80° \longrightarrow 20 + c \cdot 20 \cdot e^0 = 80 \Rightarrow c = \frac{60}{20} = 3$

$T(5) = 50° \longrightarrow T(5) = 20 + 60 \cdot e^{\lambda \cdot 5} \stackrel{!}{=} 50$

$$60 \cdot e^{5\lambda} = 30$$

$$e^{5\lambda} = 1/2 \Rightarrow \lambda = \ln(1/2)/5$$

$$T(t) = 20 + 60 \cdot e^{\frac{\ln(1/2)}{5} \cdot t}$$

$t: T(t) = 40°? \Rightarrow 20 + 60 \cdot e^{\frac{\ln(1/2)}{5} \cdot t} = 40$

$$e^{\frac{\ln(1/2)}{5} \cdot t} = 1/3$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(1/3) \cdot 5}{\ln(1/2)} \simeq 7{,}92 \text{ min.}$$

Devo aspettare ancora 2,92 minuti

4. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

(a) $y' = \dfrac{y}{2t}$

$$y' = \frac{y}{2t} \qquad t \neq 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{2t} \quad \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2t}\,dt \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|t| + c$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\ln|t| + c} \Rightarrow y(t) = e^{c}\cdot\sqrt{|t|} \Rightarrow y(t) = k\cdot\sqrt{|t|}$$

(b) $y' = 2 + e^y$

$$y' = 2 + e^y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 + e^y \Rightarrow \frac{1}{2+e^y}\,dy = dt \Rightarrow \int \frac{1}{2+e^y}\,dy = \int 1\,dt$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{1}{2+e^y}\,dy \quad \xrightarrow{\text{Sost. } 2+e^y = t} \quad \begin{array}{l} e^y\,dy = dt \\ dy = \frac{1}{t-2}\,dt \end{array} \Rightarrow \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t-2}\,dt =$$

$$= \int\left(\frac{1/2}{t-2} + \frac{-1/2}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln|t-2| - \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^y}{2+e^y}\right| + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\underbrace{\frac{e^y}{2+e^y}}_{>0}\right| = t + c \Rightarrow \ln\left(\frac{e^y}{2+e^y}\right) = 2t + c'$$

$$\Rightarrow \frac{e^y}{2+e^y} = e^{2t+c'} \Rightarrow e^y = k\cdot e^{2t}(2+e^y)$$

$$\Rightarrow e^y = 2ke^{2t} + ke^{2t}e^y \Rightarrow e^y(1-ke^{2t}) = 2ke^{2t}$$

$$\Rightarrow e^y = \frac{2ke^{2t}}{1-ke^{2t}} \Rightarrow y(t) = \ln\left(\frac{2ke^{2t}}{1-ke^{2t}}\right)$$

(c) $y' = \dfrac{t^2}{y^2}$

$$y' = \frac{t^2}{y^2} \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \int y^2\,dy = \int t^2\,dt \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow y^3 = t^3 + c' \Rightarrow y(t) = \sqrt[3]{t^3 + k}$$

(d) $y - a + x^2 y' = 0 \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}$

$$(y-a)\,dx = -x^2\,dy$$

$$(y-a)\,dx + x^2\,dy = 0$$

$$y' = \frac{a-y}{x^2} \overset{\substack{a\neq y\\ x\neq 0}}{\Rightarrow} \int \frac{1}{a-y}\,dy = \int \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow -\ln|a-y| = -\frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow |a-y| = \underbrace{e^{1/x + c'}}_{>0} \Rightarrow a - y = k \cdot e^{1/x}$$

$$\Rightarrow y(t) = a - k e^{1/x}$$

(e) $y' + x^2 y^3 = 0$

$$y' + x^2 y^3 = 0$$

$$\int \frac{dy}{y^3} = -\int x^2\,dx$$

$$-\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{3}x^3 + C_1$$

$$\frac{1}{2y^2} = \frac{x^3 - 3C_1}{3}$$

$$2y^2 = \frac{3}{x^3 - 3C_1}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{2x^3 + C}}$$

5. Risolvere la seguente equazione differenziale ai valori iniziali:

(a) $\begin{cases} y' + xe^{2y} = 0 \\ y(0) = -2 \end{cases}$

$y' + xe^{2y} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -xe^{2y} \Leftrightarrow \int e^{-2y}dy = -\int xdx \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}e^{-2y} = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1$

$\Leftrightarrow e^{-2y} = x^2 + C_2.$

Se $y(0) = -2 \Rightarrow e^{-2\cdot(-2)} = 0^2 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = e^4 \Rightarrow e^{-2y} = x^2 + e^4$

$-2y = \ln(x^2 + e^4) \Leftrightarrow$ $y = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + e^4)$ oppure $y = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + e^4}}\right)$

(b) $\begin{cases} (x+1)y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x \cdot y$

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{x}{x+1}dx$

$\int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{x+1-1}{x+1}dx$

$\int \dfrac{dy}{y} = \int\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)dx$

$\ln|y| = x - \ln|x+1| + C_1$

$|y| = \underbrace{e^{x - \ln|x+1| + C_1}}_{>0}$

$y = \pm e^{x - \ln|x+1| + C_1}$

$y = \pm e^{C_1} \cdot \dfrac{e^x}{|x+1|}$ $(C = \pm e^{C_1})$

$y(x) = \dfrac{C \cdot e^x}{|x+1|}$ $(x \neq 1)$

sol. generale

ma $y(0) = 1$ quindi $x > -1$

$\dfrac{C e^0}{|0+1|} = 1 \Rightarrow C = 1$

sol. particolare

$y(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$, $x > -1$

6. Risolvere le seguenti equazioni differenziali del primo ordine lineari:

(a) $y' + \frac{2y}{t} = \frac{1}{t^2}$ per $t \neq 0$

$y' + \frac{2}{t} y = \frac{1}{t^2} \qquad t \neq 0$

$\mu(t) = \int \frac{2}{t}\, dt = 2 \ln|t| \; \cancel{+c}$

N.B.: $e^{2\ln|t|} = (|t|)^2 = t^2$

$e^{-2\ln|t|} = (|t|)^{-2} = \frac{1}{t^2}$

$y(t) = e^{-2\ln|t|} \cdot \int e^{2\ln|t|} \cdot \frac{1}{t^2}\, dt$

$= \frac{1}{t^2} \cdot \int t^2 \cdot \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{t^2} \cdot \int 1\, dt$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{t^2} \cdot (t + c) = \frac{1}{t} + \frac{c}{t^2}$

(b) $y' + y = e^t$

$y' + y = e^t$

$\mu(t) = \int 1\, dt = t \; \cancel{+c}$

$\Rightarrow y(t) = e^{-t} \int e^t \cdot e^t\, dt = e^{-t} \cdot \int e^{2t}\, dt = e^{-t}\left(\frac{1}{2} e^{2t} + c\right)$

$y(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{c}{e^t}$

(c) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

$y' + \frac{-2}{x+1} y = (x+1)^3 \qquad x \neq -1$

$\mu(x) = \int \frac{-2}{x+1}\, dx = -2 \ln|x+1| \; \cancel{+c}$

$y(x) = e^{2\ln|x+1|} \cdot \int e^{-2\ln|x+1|} \cdot (x+1)^3\, dx$

VEDI N.B PREC. $= (x+1)^2 \cdot \int \frac{1}{\cancel{(x+1)^2}} \cdot (x+1)^{\cancel{3}}\, dx$

$= (x+1)^2 \left(\frac{x^2}{2} + x + c\right)$

$= (x+1)^2 \cdot \frac{1}{2} x (x+1) + c(x+1)^2$

$y(x) = \frac{1}{2} x (x+1)^3 + c(x+1)^2$

(d) $xy' - 4y = x + 3x^2$

$$xy' - 4y = x + 3x^2$$

$$y' - \frac{4}{x} y = 1 + 3x$$

$$p(x) = -\frac{4}{x} \qquad q(x) = 1 + 3x$$

$$\mu(x) = \int -\frac{4}{x}\, dx = -4 \ln|x| = \ln \frac{1}{x^4}$$

$$e^{\mu(x)} = \frac{1}{x^4}$$

$$\Rightarrow y(x) = x^4 \int \frac{1}{x^4}(1+3x)\, dx = x^4 \int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^3}\right) dx =$$

$$= x^4 \left(-\frac{1}{3x^3} - \frac{3}{2x^2} + C\right) = -\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}x^2 + Cx^4$$

7. Risolvere la seguente equazione differenziale ai valori iniziali:

(a) $\begin{cases} x^2y' + xy - 1 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Data $\frac{dy}{dt} + P(t)\cdot y = Q(t)$, la sol. è $y(t) = e^{-\mu(t)} \cdot \int e^{\mu(t)} \cdot Q(t)dt$, dove $\mu(t)$ è una primitiva qualsiasi di $P(t)$.

Perciò con $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{Q(x)}$ otteniamo:

$\mu(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) (+k)$ e $y(x) = e^{-\ln x} \cdot \int e^{\ln x} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \cdot \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x} \cdot (\ln x + k)$

Con $y(1) = 2$ si ottiene $k = 2$, dunque $y(x) = \frac{\ln(x)+2}{x}$

METODO 2 (variazioni delle costanti)

$x^2\, y' + xy - 1 = 0$ con $y(1) = 2$

$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$ ED lineare di primo ordine inomogenea

eq. omogenea associata: $y' + \frac{1}{x} y = 0$ (ED a variabili separabili)

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(|y|) = -\ln(|x|) + C_1 \Rightarrow y_0(x) = \frac{C}{x}$ con $C = \pm e^{C_1}$.

Per determinare sol.part, metodo delle **variazioni delle costanti**, i.e. supponiamo che $y_P(x) = \frac{C(x)}{x}$. Allora, inserendo nell'ED originale:

$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2} + \frac{C}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C' = \frac{1}{x} \Rightarrow C(x) = \ln(x) + k$

perciò $y_P(x) = \frac{\ln(x)+k}{x}$ e dunque $y(x) = y_0(x) + y_P(x) = \frac{\ln(x)+C}{x}$.

Con $y(1) = 2$ si ottiene $C = 2$, dunque $y(x) = \frac{\ln(x)+2}{x}$.

(b) $\begin{cases} y' = \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} \cdot y + \sin(t) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

$$y' - \frac{\cos t}{\sin t} \cdot y = \sin t$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{La sol. generale di} \\ y' + p(t) \cdot y = q(t) \quad \text{è} \\ y(t) = e^{-\mu(t)} \cdot \int e^{\mu(t)} \cdot q(t)\, dt \\ \text{dove } \mu'(t) = p(t) \end{array}\right]$$

$$p(t) = -\frac{\cos t}{\sin t} \Rightarrow \int p(t) dt = -\ln|\sin t| + k$$

quindi $\mu(t) = -\ln|\sin t|$

sol. generale:

$$y(t) = e^{\ln|\sin t|} \cdot \int e^{-\ln|\sin t|} \cdot \sin t\, dt = \circledast$$

$$= |\sin t| \cdot \int \frac{1}{|\sin(t)|} \cdot \sin t \cdot dt$$

$$\circledast \overset{(\sin t > 0)}{=\!=} \sin t \cdot \int \frac{1}{\cancel{\sin t}} \cdot \cancel{\sin t}\, dt$$

$$= \sin t \,(t + C)$$

$$\circledast \overset{\sin t < 0}{=\!=} -\sin t \int \frac{1}{-\sin t} \cdot \sin t\, dt$$

$$= -\sin t\,(-t + C_1)$$

$$= \sin t\,(t - C_1)$$

quindi sol. generale

$$y(t) = \sin t \cdot (t + C) \quad (\sin t \neq 0)$$

ma $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$\sin\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + C\right) = 1 \iff \frac{\pi}{2} + C = 1 \iff C = 1 - \frac{\pi}{2}$$

Sol. particolare

$$y(t) = \sin t \cdot \left(t + 1 - \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad t \in]0; \pi[$$

(c) $\begin{cases} y' + x^{-1}y = x^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = x^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \mu(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$\xrightarrow{x=1} \mu(x) = \ln(x)$

$$y(x) = e^{-\ln(x)} \cdot \int e^{\ln(x)} \cdot x^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \int x^4 \, dx = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^5}{5} + c \right)$$

$$= \frac{x^4}{5} + \frac{c}{x}$$

$$y(1) = \frac{1}{5} + c \overset{!}{=} 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \frac{x^4}{5} - \frac{1}{5x}}}$$

8. Risolvere la seguente equazione differenziale ai valori iniziali e schizzare la soluzione, dopo aver specificato quale è il più ampio intervallo in cui è definita:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{t} = \dfrac{1}{t^2} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{t} = \dfrac{1}{t^2} \\ y(-1) = 2 \end{cases} \qquad t \neq 0$$

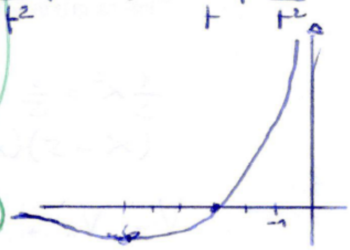
$$\mu(t) = \int \frac{2}{t}\,dt = \ln|t| + c$$

$$y(t) = e^{-2\ln|t|} \cdot \int e^{2\ln|t|} \cdot \frac{1}{t^2}\,dt$$

v. D
es. precedente $\to = \dfrac{1}{t^2} \displaystyle\int t^2 \cdot \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t^2} \cdot \int 1\,dt = \frac{1}{t^2}(t+c) = \frac{1}{t} + \frac{c}{t^2}$

$$\Rightarrow y(-1) = \frac{1}{-1} + \frac{c}{(-1)^2} \overset{!}{=} 2 \Rightarrow c = 3$$

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} \quad \text{per } t \in \,]-\infty; 0[$$



9. È data l'equazione differenziale: $y' = \dfrac{x \cdot y^2}{2}$.

(a) La si risolva.

(b) Determinare le tre soluzioni particolari, specificandone il dominio, che soddisfino le condizioni iniziali seguenti:

(1) $y(0) = 1$

(2) $y(0) = -3$

(3) $y(3) = -1$

(c) Sapendo che il campo di direzioni raffigurato rappresenta l'equazione differenziale data, si schizzi in esso le soluzione particolari trovate al punto precedente.

a) $y' = \dfrac{x \cdot y^2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x \cdot y^2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{x}{2}dx$ che è un'ED a variabili separate.

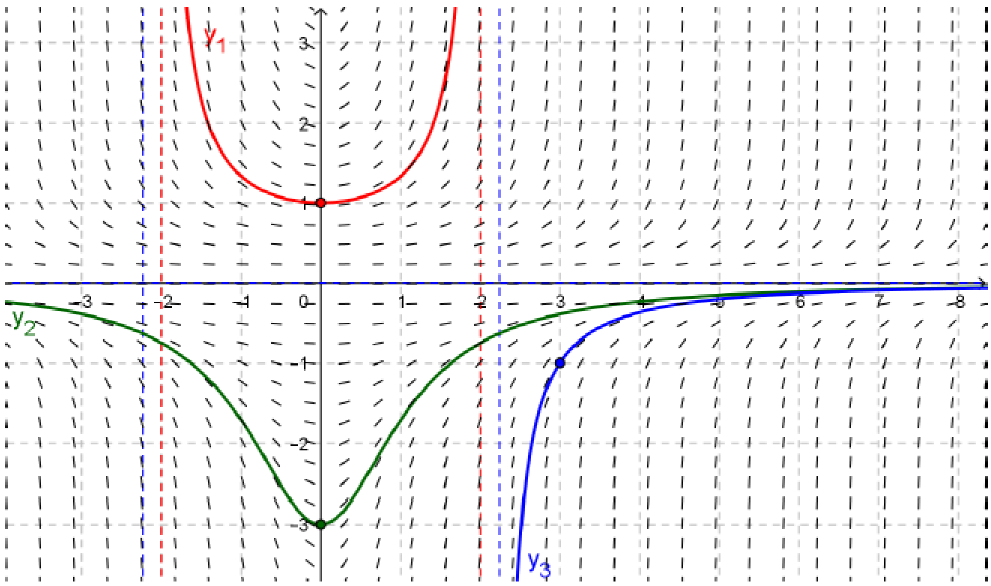
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{x}{2}dx \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{4} + C_1 \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2+4C_1}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{x^2+4C_1} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{x^2+C}$$

b) (1) $y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad 1 = -\dfrac{4}{0+C} \quad \Rightarrow \quad C=-4$ dunque $y_1(x) = \dfrac{4}{4-x^2} \quad D_{y_1} =]-2,2[$

(2) $y(0)=-3 \quad \Rightarrow \quad -3 = -\dfrac{4}{0+C} \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{4}{3}$ dunque $y_2(x) = -\dfrac{12}{3x^2+4} \quad D_{y_2} = \mathbb{R}$

(3) $y(3)=-1 \quad \Rightarrow \quad -1 = -\dfrac{4}{9+C} \quad \Rightarrow \quad C=-5$ dunque $y_3(x) = \dfrac{4}{5-x^2} \quad D_{y_3} = [\sqrt{5},+\infty[$

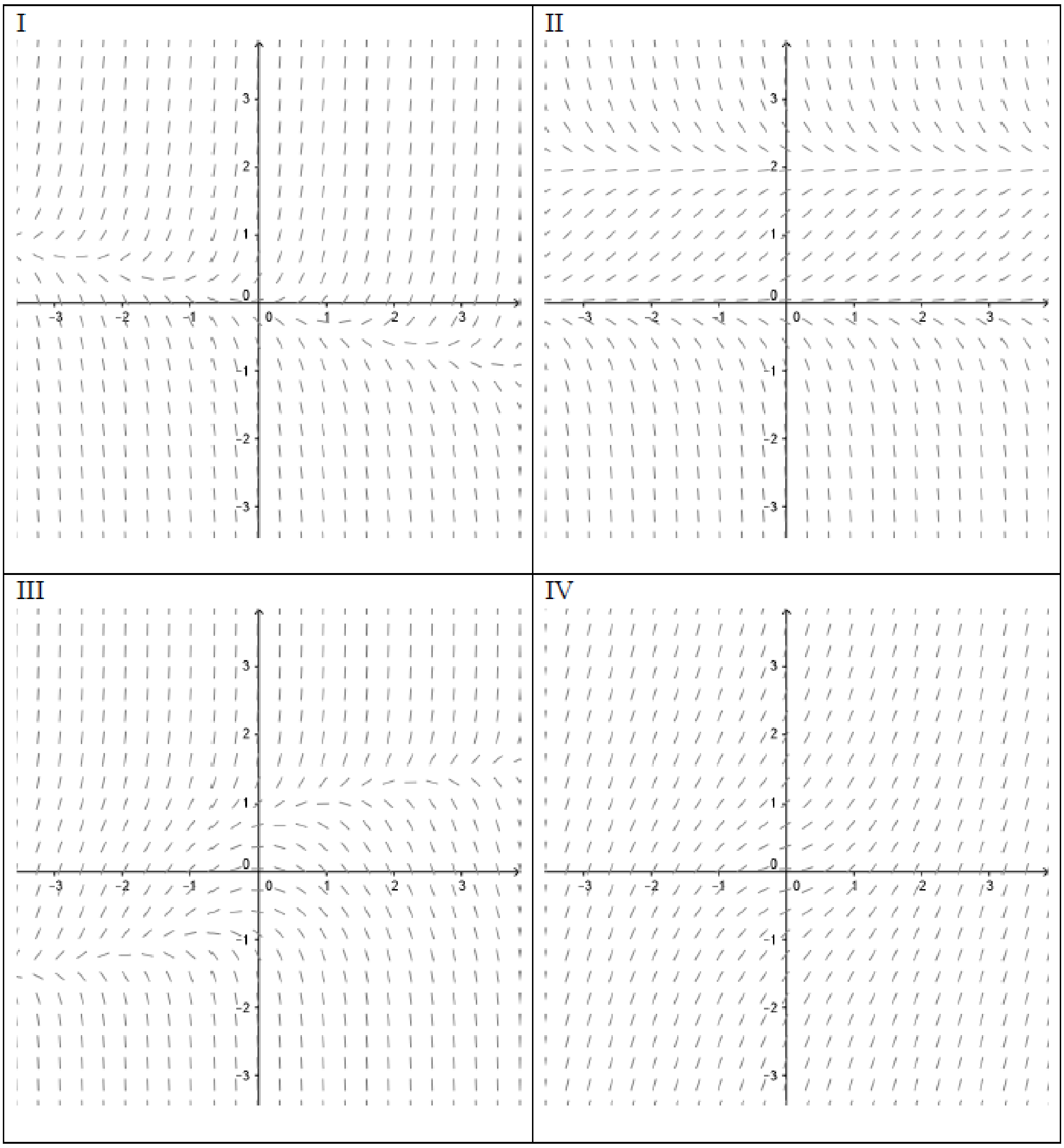
c)



10. È data l'equazione differenziale [A]: $y' = 2y - y^2$.

(a) La si risolva.

(b) Sapendo che uno dei quattro campi di direzione raffigurati (numerati da I a IV), rappresenta l'equazione differenziale data, lo si identifichi e si schizzi in esso la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.



(c) Gli altri tre campi di direzione sono definiti dalle seguenti equazioni differenziali:

[B] $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$

[C] $y' = x + 4y$

[D] $y' = y^3 - x$

Si associ ad ogni equazione differenziale il campo di direzione che le corrisponde (numerato da I a IV), motivando la scelta fatta.

a) $y' = 2y - y^2 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2y - y^2 \Leftrightarrow \int \dfrac{dy}{2y - y^2} = \int 1 dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2-y}\right)dy = x + C_1 \Leftrightarrow$$

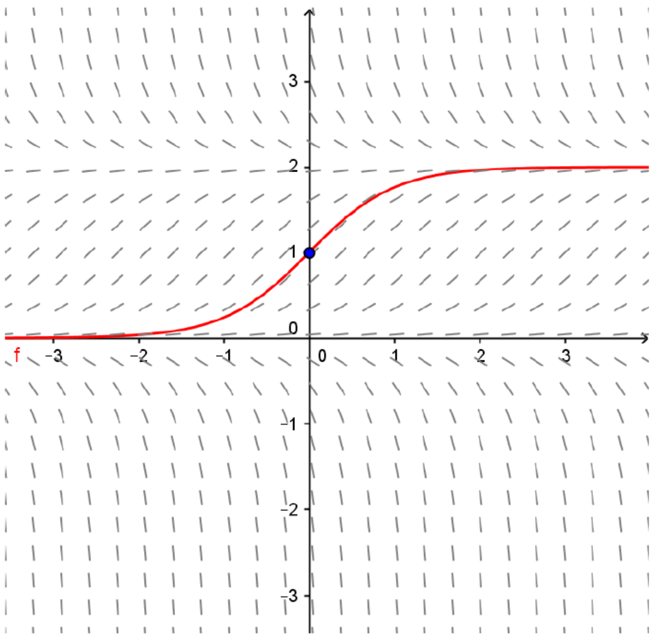
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\ln|y| - \ln|2-y|\right] = x + C_1 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\left|\frac{y}{2-y}\right|\right) = 2x + C_2 \Leftrightarrow \frac{y}{2-y} = Ce^{2x} \Leftrightarrow y\cdot\left(1 + Ce^{2x}\right) = 2Ce^{2x} \quad \text{dove } C = \pm e^{C_2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2Ce^{2x}}{1 + Ce^{2x}} = \frac{2C}{e^{-2x} + C}$$

Poichè $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{2C}{1+C} \Rightarrow C = 1$ e dunque $y = \dfrac{2}{1 + e^{-2x}}$.

b)



L'ED A, $y' = 2y - y^2$, definisce un campo direzionale che non dipende dalla x [dunque è invariante rispetto a traslazioni in direzione x]. L'unico con questa caratteristica è **II**. Inoltre, $y' = 0 \Leftrightarrow y\cdot(2-y) = 0$, dunque lungo le rette orizzontali $y = 0$ e $y = 2$ la pendenza si annulla.

$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^{-2x}+1} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^{-2x}+1} = 2$

c) L'ED B, $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$, definisce un campo di direzione sempre positivo [poichè la radice è sempre ≥0] con y' crescente al crescere della distanza r dall'origine: la figura figura IV mostra questa caratteristica.

L'ED C, $y' = x + 4y$, quando $y = -\dfrac{1}{4}x$ dà $y' = 0$. Si riconosce che nella figura I i punti a tangente orizzontale giacciono lungo la retta $y = -\dfrac{1}{4}x$.

L'ED D, $y' = y^3 - x$, quando $x = y^3$ dà $y' = 0$. Si riconosce che nella figura III i punti a tangente orizzontale giacciono lungo la curva $x = y^3$.

Sopra questa curva [ossia dove $y^3 > x$] y' è positivo, sotto è negativo.

A-II, B- IV , C-I, D-III

11. Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali del secondo ordine:

(a) $y'' + 7y' + 10y = 0$

$y'' + 7y' + 10y = 0$

$p(r) = r^2 + 7r + 10 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow (r+5)(r+2) = 0 \Rightarrow r_1 = -2;\ r_2 = -5$

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 e^{-5t}$

(b) $y'' + 2y' = 0$

$y'' + 2y' = 0$

$p(r) = r^2 + 2r \overset{!}{=} 0 \Rightarrow r(r+2) = 0 \Rightarrow r_1 = 0;\ r_2 = -2$

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{0t} + C_2 \cdot e^{-2t} = C_1 + C_2 e^{-2t}$

(c) $y'' + 8y' + 16y = 0$

$y'' + 8y' + 16y = 0$

$p(r) = r^2 + 8r + 16 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow (r+4)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -4$

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{-4t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-4t}$

(d) $4\ddot{x} - 12\dot{x} + 10x = 0$

$4\ddot{x} - 12\dot{x} + 10x = 0$

$p(r) = 4r^2 - 12r + 10 \overset{!}{=} 0$

$2r^2 - 6r + 5 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} i$

$\rightsquigarrow \alpha = \frac{3}{2};\ \beta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x(t) = C_1 \cdot e^{3/2 t} \cdot \cos(\frac{1}{2}t) + C_2 e^{3/2 t} \cdot \sin(\frac{1}{2}t)$

12. Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali lineari:

(a) $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 21\dot{x} - 26x = 0$

$$\dddot{x} - 6\ddot{x} + 21\dot{x} - 26x = 0$$

$$p(r) = r^3 - 6r^2 + 21r - 26 = 0 \qquad r = 2 \text{ è sol}$$

Ruffini: $\Rightarrow$

	1	-6	21	-26
2		2	-8	26
	1	-4	13	0

$$p(r) = (r-2)(r^2 - 4r + 13) \overset{!}{=} 0$$

$$r_1 = 2$$

$$r_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i \qquad \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} \cos(3t) + C_3 e^{2t} \sin(3t)$$

(b) $x^{(7)} + 2x^{(5)} + x^{(3)} = 0$

$$x^{(7)} + 2x^{(5)} + x^{(3)} = 0$$

$$p(r) = r^7 + 2r^5 + r^3 \overset{!}{=} 0$$

$$r^3(r^4 + 2r^2 + 1) = 0$$

$$r^3 (r^2 + 1)^2 = 0$$

$$r_{1,2,3} = 0 \quad (\text{molt. } 3)$$

$$\left.\begin{matrix} r_{4,5} = i \\ r_{6,7} = -i \end{matrix}\right\} r = 0 \pm i \qquad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix} \qquad \text{con molt. } 2$$

$$x(t) = C_1 e^{0t} + C_2 \cdot t \cdot e^{0t} + C_3 \cdot t^2 \cdot e^{0t} + C_4 e^{0t} \cos t + C_5 e^{0t} \sin t + C_6 \cdot t \cdot e^{0t} \cdot \cos t + C_7 \cdot t \cdot e^{0t} \cdot \sin t$$

$$x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 \cos t + C_5 \sin t + C_6 \cdot t \cdot \cos t + C_7 \cdot t \cdot \sin t$$

(c) $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 10y^{(3)} + 18y'' + 9y' = 0$

$$y^{(5)} + 2y^{(4)} + 10y''' + 18y'' + 9y' = 0$$

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + 10x^3 + 18x^2 + 9x =$$

$$= x(x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9) =$$

$$= x(x+1)^2(x^2+9) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_{2,3} = -1 \qquad x_{4,5} = \pm 3i$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 \cos(3x) + C_5 \sin(3x)$$

13. Risolvere le seguenti equazioni differenziali ai valori iniziali:

(a) $\begin{cases} 2y'' + 5y' - 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$2y'' + 5y' - 3y = 0$

$p(r) = 2r^2 + 5r - 3 \stackrel{!}{=} 0$

$r_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} \begin{matrix} + & 1/2 \\ - & -3 \end{matrix}$

$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{1/2 t} + c_2 e^{-3t}$ $\quad$ C.I. $\Rightarrow \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{1}{2} c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases}$

$y'(t) = \frac{1}{2} c_1 e^{1/2 t} - 3c_2 e^{-3t}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 = 6 c_2 \end{cases} \Rightarrow 7c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{7}$

$c_1 = 6/7$

$\Rightarrow y(t) = \frac{6}{7} e^{\frac{1}{2} t} + \frac{1}{7} e^{-3t}$

(b) $\begin{cases} \ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 0 \\ x(1) = 0 \\ \dot{x}(1) = 2 \end{cases}$

$\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 0$

$p(r) = r^2 + 10r + 25 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow (r+5)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -5$

$x(t) = c_1 \cdot e^{-5t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-5t}$

$\dot{x}(t) = -5c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-5t} - 5c_2 \cdot t \cdot e^{-5t}$ $\quad$ C.I. $\Rightarrow \begin{cases} x(1) = 0 \\ \dot{x}(1) = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c_1}{e^5} + \dfrac{c_2}{e^5} = 0 \\ -\dfrac{5c_1}{e^5} + \dfrac{c_2}{e^5} - \dfrac{5c_2}{e^5} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -5c_1 + c_2 - 5c_2 = 2 \cdot e^5 \end{cases}$

$\Rightarrow -5(-c_2) + c_2 - 5c_2 = 2 \cdot e^5$

$c_2 = 2 \cdot e^5$

$c_1 = -2e^5$

$\Rightarrow x(t) = -2e^5 \cdot e^{-5t} + 2e^5 \cdot t \cdot e^{-5t}$

$x(t) = -2e^{-5t+5} + 2t\, e^{-5t+5}$

(c) $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0 \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$

$p(r) = r^2 + 4r + 5 = 0 \qquad r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i$

$\alpha = -2;\ \beta = 1$

$x(t) = c_1 e^{-2t} \cos t + c_2 e^{-2t} \sin t$

$\dot{x}(t) = -2c_1 e^{-2t} \cos t - c_1 e^{-2t} \sin t - 2c_2 e^{-2t} \sin t + c_2 e^{-2t} \cos t$

C.I $\leadsto \begin{cases} x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ -2c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow c_2 = 6$

$x(t) = 2e^{-2t} \cdot \cos t + 6e^{-2t} \sin t$

(d) $\begin{cases} y^{(4)} + 4y'' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 16 \end{cases}$

$y^{(4)} + 4y'' = 0$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$ e $y'''(0) = 16$.

Polinomio caratteristico: $P(r) = r^4 + 4r^2 = r^2(r^2 + 4) = r^2(r + 2i)(r - 2i)$

Zeri di $P(r)$: $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 2i$ e $r_4 = -2i$

Quindi la soluzione dell'ED è: $y(x) = Ae^{0x} + Bxe^{0x} + e^{0x}(C\cos(2x) + D\sin(2x))$.

$\Leftrightarrow y(x) = A + Bx + C\cos(2x) + D\sin(2x)$.

Determiniamo le prime tre derivate:

$y'(x) = B - 2C\sin(2x) + 2D\cos(2x)$

$y''(x) = -4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)$

$y'''(x) = 8C\sin(2x) - 8D\cos(2x)$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 1 \\ B + 2D = 0 \\ -4C = 0 \\ -8D = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \\ C = 0 \\ D = -2 \end{cases}$$

Quindi $y_p(x) = 1 + 4x - 2\sin(2x)$

14. Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale: $y^{(4)} + y = 0$.

$$y^{(4)} + y = 0$$

$$p(r) = r^4 + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$r^4 = -1 \Rightarrow \left(Re^{i\varphi}\right)^4 = e^{i\pi} \Rightarrow R^4 \cdot e^{i4\varphi} = e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R^4 = 1 \rightarrow R = 1 \\ 4\varphi_k = \pi + 2k\pi \quad k \in \{0;1;2;3\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ \varphi_k = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad k \in \{0;1;2;3\} \end{cases}$$

$$k \in \{0;1;2;3\} \quad r_{1,2,3,4} = R \cdot e^{i\varphi_k} \quad \Rightarrow r_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i \quad \begin{pmatrix} \alpha = \sqrt{2}/2 \\ \beta = \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$r_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i \quad \begin{pmatrix} \alpha = \sqrt{2}/2 \\ \beta = \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 e^{\sqrt{2}/2\, t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) + C_2 e^{\sqrt{2}/2\, t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) + C_3 e^{-\sqrt{2}/2\, t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) + C_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} t} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right)$$

15. Determinare, con il metodo "dell'Ansatz", la soluzione generale delle seguenti equazioni lineari non omogenee:

(a) $\ddot{x} = t^3 + 5$

$\ddot{x} = t^3 + 5$

P.O.: $\ddot{x} = 0 \quad p(r) = r^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0 \qquad S = \{0\}$

$x_0(t) = C_1 \cdot e^{0t} + C_2 \cdot t \cdot e^{0t} = C_1 + C_2 t$

P.P. • $f(t) = t^3 + 5$

• $0 \in S$? sì, molt = 2

Ansatz

$\Rightarrow x_p(t) = t^2 \cdot (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3)$

$x_p(t) = b_0 t^2 + b_1 t^3 + b_2 t^4 + b_3 t^5$

$\dot{x}_p(t) = 2b_0 t + 3b_1 t^2 + 4b_2 t^3 + 5b_3 t^4$

$\ddot{x}_p(t) = 2b_0 + 6b_1 t + 12b_2 t^2 + 20b_3 t^3 \stackrel{!}{=} t^3 + 5$

$$\begin{cases} 2b_0 = 5 \\ 6b_1 = 0 \\ 12b_2 = 0 \\ 20b_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = 2/5 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 1/20 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_p(t) = \frac{2}{5} t^2 + \frac{1}{20} t^5$

Soluzione generale:

$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$

$x(t) = C_1 + C_2 t + \frac{2}{5} t^2 + \frac{1}{20} t^5$

(b) $\ddot{x} + 4x = t^2$

$\ddot{x} + 4x = t^2$

P.O.: $\ddot{x} + 4x = 0 \Rightarrow p(r) = r^2 + 4 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$ $\quad \alpha = 0$, $\beta = 2$

$$x_0(t) = c_1 e^{0t} \cos(2t) + c_2 e^{0t} \sin(2t)$$
$$= c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

P.P.: $f(t) = t^2$

$0 \in$ Spettro? No

Ansatz

$\Rightarrow$ $x_p(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$

$\dot{x}_p(t) = b_1 + 2b_2 t$

$\ddot{x}_p(t) = 2b_2$

$\Rightarrow$ $2b_2 + 4 \cdot (b_0 + b_1 t + b_2 t^2) \stackrel{!}{=} t^2$

$2b_2 + 4b_0 + 4b_1 t + 4b_2 t^2 = t^2$

$$\begin{cases} 2b_2 + 4b_0 = 0 & \longrightarrow b_0 = -1/8 \\ 4b_1 = 0 & \longrightarrow b_1 = 0 \\ 4b_2 = 1 & \longrightarrow b_2 = 1/4 \end{cases}$$

$x_p(t) = \frac{-1}{8} + \frac{1}{4} t^2$

Soluzione generale:

$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$

$x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} t^2$

(c) $\ddot{x} - \dot{x} = \cos(t)$

$$\ddot{x} - \dot{x} = \cos(t)$$

P.O. $\quad \ddot{x} - \dot{x} = 0 \Rightarrow p(r) = r^2 - r = r(r-1) \stackrel{!}{=} 0 \ ; \ r_1 = 0, \ r_2 = 1$

$$x_0(t) = C_1 + C_2 e^t$$

P.P. • $f(t) = \cos(t)$

• $i \in$ Spettro ? $\rightarrow$ NO!

$\overset{\text{Ansatz}}{\Longrightarrow} \quad x_p(t) = b_1 \cos t + b_2 \sin t$

$$\dot{x}_p(t) = -b_1 \sin t + b_2 \cos t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -b_1 \cos t - b_2 \sin t$$

$\Rightarrow -b_1 \cos t - b_2 \sin t - (-b_1 \sin t + b_2 \cos t) \stackrel{!}{=} \cos t$

$$(-b_1 - b_2)\cos t + (-b_2 + b_1)\sin t \stackrel{!}{=} \cos t$$

$$\begin{cases} -b_2 + b_1 = 0 & \rightarrow b_1 = b_2 \longrightarrow b_2 = -1/2 \\ -b_1 - b_2 = 1 & \longrightarrow -2b_1 = 1 \rightarrow b_1 = -1/2 \end{cases}$$

$$x_p(t) = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

Soluzione generale

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

(d) $s''(t) - 2as'(t) + a^2 s(t) = e^t \quad \text{con } a \neq 1$

$s'' - 2as' + a^2 s = e^t \qquad a \neq 1$

<u>P.O.</u>: $s'' - 2as' + a^2 s = 0$

$p(r) = r^2 - 2ar + r^2 \stackrel{!}{=} 0$

$(r-a)^2 = 0 \quad \Rightarrow r_1 = r_2 = a$

$s_0(t) = c_1 e^{at} + c_2 t e^{at}$

<u>P.P.</u>: • $f(t) = e^t$

• $1 \in$ Spettro? NO! $a \neq 1$

$\Rightarrow$ Ansatz: $s_p(t) = b e^t$

$s_p'(t) = s_p''(t) = b \cdot e^t$

$be^t - 2abe^t + a^2 be^t = e^t$

$e^t \cdot b \cdot (1 - 2a + a^2) = e^t$

$b = \frac{1}{(1-a)^2}$

$s_p(t) = \frac{1}{(1-a)^2} \cdot e^t$

<u>Soluzione generale:</u>

$s(t) = c_1 e^{at} + c_2 t e^{at} + \frac{1}{(1-a)^2} \cdot e^t \qquad a \neq 1$

(e) $\ddot{y} - 7\dot{y} + 12y = t$

$$\ddot{y} - 7\dot{y} + 12y = t$$

P.O. $\ddot{y} - 7\dot{y} + 12y = 0$

$p(r) = r^2 - 7r + 12 = 0$

$(r-4)(r-3) = 0 \qquad r_1 = 3\ ;\ r_2 = 4$

$y_0(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t}$

P.P. • $f(t) = t$

• $0 \in$ Spettro? $\to$ NO

$\Rightarrow$ Ansatz: $y_p(t) = b_0 + b_1 t$

$y_p'(t) = b_1$

$y_p''(t) = 0$

$0 - 7b_1 + 12(b_0 + b_1 t) = t$

$\Rightarrow \begin{cases} -7b_1 + 12b_0 = 0 \\ 12b_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} b_0 = 7/144 \\ b_1 = 1/12 \end{array}$

$y_p(t) = \frac{7}{144} + \frac{1}{12}t$

Soluzione generale:

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t} + \frac{7}{144} + \frac{1}{12}t$$

(f) $y^{(4)} + 8y'' - 9y = 5e^t$

$y^{(4)} + 8y'' - 9y = 5e^t$.

L'ED omogenea associata è:

$y^{(4)} + 8y'' - 9y = 0$ il cui polinomio caratteristico è

$P(r) = r^4 + 8r^2 - 9 = (r^2 + 9)\cdot(r^2 - 1)$

$P(r) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1,\ r_{3,4} = \pm 3i$

Quindi soluzione generale dell'ED omogenea associata:

$y_O(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 \sin(3t) + C_4 \cos(3t)$

"Ansatz" per la sol. particolare dell'ED inomogenea $[r_1 = \mu$ e $r_2 \neq \mu]$: $y_P(t) = ate^t$

$y'_P(t) = ae^t + ate^t$; $\quad y''_P(t) = 2ae^t + ate^t$; $\quad y'''_P(t) = 3ae^t + ate^t$; $\quad y^{(4)}{}_P(t) = 4ae^t + ate^t$

Sostituiamo nell'equazione iniziale: $ae^t \cdot [(4+t) + 8(2+t) - 9t] = 5e^t \Leftrightarrow 20ae^t = 5e^t \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$

Quindi la soluzione generale dell'ED è:

$$y(t) = y_P(t) + y_O(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 \sin(3t) + C_4 \cos(3t) + \frac{1}{4} te^t$$

16. Risolvere le seguenti equazioni differenziali ai valori iniziali:

(a) $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = \cos(2t) \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$

$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = \cos(2t)$

P.O. : $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$

$p(r) = r^2 + 4r + 3 = 0$

$(r+3)(r+1) = 0$

$r_1 = -1$

$r_2 = -3$

$x_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$

P.P. . $f(t) = \cos(2t)$

. $\pm 2i \in$ Spettro ? NO!

$\Rightarrow$ Ansatz : $x_p(t) = b_0 \cos(2t) + b_1 \sin(2t)$

$\dot{x}_p(t) = -2b_0 \sin(2t) + 2b_1 \cos(2t)$

$\ddot{x}_p(t) = -4b_0 \cos(2t) - 4b_1 \sin(2t)$

$-4b_0 \cos(2t) - 4b_1 \sin(2t) - 8b_0 \sin(2t) + 8b_1 \cos(2t) + 3b_0 \cos(2t)$
$+ 3b_1 \sin(2t) = \cos(2t)$

$\cos(2t)\left(-4b_0 + 8b_1 + 3b_0\right) + \sin(2t)\left(-4b_1 - 8b_0 + 3b_1\right) = \cos(2t)$

$\begin{cases} -b_0 + 8b_1 = 1 \\ -b_1 - 8b_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow -b_0 \cdot 64b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = -1/65$

$\longrightarrow b_1 = -8b_0$ $\qquad b_1 = 8/65$

$x_p(t) = \frac{-1}{65}\cos(2t) + \frac{8}{65}\sin(2t)$

Soluzione generale:

$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{65}\cos(2t) + \frac{8}{65}\sin(2t)$

$\dot{x}(t) = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t} + \frac{2}{65}\sin(2t) + \frac{16}{65}\cos(2t)$

$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{65} = 1 \\ -C_1 - 3C_2 + 16/65 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 19/10 \\ C_2 = -23/26 \end{cases}$

$> x(t) = \frac{19}{10}e^{-t} - \frac{23}{26}e^{-3t} - \frac{1}{65}\cos(2t) + \frac{8}{65}\sin(2t)$

(b) $\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = 4\cos(5t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$y'' - 4y' - 5y = 0$ ED omogenea associata (2)

$p(r) = r^2 - 4r - 5 = (r-5)(r+1)$ quindi $p(r) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 5$ o $r_2 = -1$

soluzione generale della (2) : $y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}$

L'inomogeneità è $f(x) = 4\cos(5x)$

quindi per "Ansatz-Methode" sol. particolare dell'ED :

$$y_p(x) = A\cos(5x) + B\sin(5x)$$

$$y'_p(x) = -5A\sin(5x) + 5B\cos(5x)$$

$$y''_p(x) = -25A\cos(5x) - 25B\sin(5x)$$

sost. nell'ED :

$$(-25A\cos(5x) - 25B\sin(5x)) - 4\cdot(-5A\sin(5x) + 5B\cos(5x))$$
$$- 5\cdot(A\cos(5x) + B\sin(5x)) = 4\cos(5x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(5x)\,(\underbrace{-25A - 20B - 5A - 4}_{-30A-20B-4}) + \sin(5x)\cdot(\underbrace{-25B + 20A - 5B}_{-30B+20A}) = 0$$

ma $\cos(5x)$ e $\sin(5x)$ funzioni lin. indipendenti

quindi

$$\begin{cases} -30A - 20B - 4 = 0 \\ -30B + 20A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2}B \\ -\frac{90}{2}B - 20B - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\cancel{130}^{65}\,B}{\cancel{2}} = 4$$

$$\begin{cases} B = -4/65 \\ A = \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{-\cancel{4}^{2}}{65} = -6/65 \end{cases}$$

dunque $y_p(x) = \frac{-6}{65}\cos(5x) - \frac{4}{65}\sin(5x)$

quindi la sol. generale dell'ED è :

$$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} - \frac{6}{65}\cos(5x) - \frac{4}{65}\sin(3x)$$

$$y'(x) = 5C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x} + \frac{6}{13}\sin(5x) - \frac{4}{13}\cos(3x)$$

Ma $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ quindi $\begin{cases} C_1 + C_2 - 6/65 = 0 \\ 5C_1 - C_2 - 4/13 = 0 \end{cases}$

$$C_1 = \frac{6}{65} - C_2$$

$$5\cdot\left(\frac{6}{65} - C_2\right) - C_2 - \frac{4}{13} = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{13} - 5C_2 - C_2 - \frac{4}{13} = 0$$

$$-6C_2 + \frac{2}{13} = 0 \Leftrightarrow C_2 = \frac{\cancel{2}^{1}}{13\cdot\cancel{6}_{3}} = \frac{1}{39}$$

$$C_1 = \frac{6}{65} - \frac{1}{39} = \frac{1}{15}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{15}e^{5x} + \frac{1}{39}e^{-x} - \frac{4}{65}\cos(5x) - \frac{6}{65}\sin(3x)}$$

(c) $\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2x) + \cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2x) + \cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

$$y_0(x): \quad p(r) = r^2 + 4 = 0 \qquad r_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_0(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

$$y_p(x): \quad y_p(x) = a_1 x \sin(2x) + a_2 x \cos(2x)$$

$$y_p'(x) = a_1 \sin(2x) + 2a_1 x \cos(2x) + a_2 \cos(2x) - 2a_2 x \sin(2x)$$

$$y_p''(x) = 2a_1 \cos(2x) + 2a_1 \cos(2x) - 4a_1 x \sin(2x) - 2a_2 \sin(2x) +$$
$$- 2a_2 \sin(2x) - 4a_2 x \cos(2x)$$

$$y_p'' + 4y_p \overset{!}{=} \sin(2x) + \cos(2x)$$

$$4a_1 \cos(2x) - \cancel{4a_1 x \sin(2x)} - 4a_2 \sin(2x) - \cancel{4a_2 x \cos(2x)} +$$

$$+ \cancel{4a_1 x \sin(2x)} + \cancel{4a_2 x \cos(2x)} \overset{!}{=} \sin(2x) + \cos(2x)$$

$$\begin{cases} 4a_1 = 1 \\ -4a_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{-1}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{4} x \sin(2x) - \frac{1}{4} x \cos(2x)$$

$$\Rightarrow y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{4} x \sin(2x) - \frac{1}{4} x \cos(2x)$$

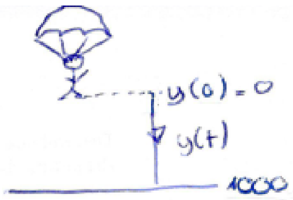
$$y(0) = 0 \iff A = 0$$

$$y'(x) = 2B\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2} x \cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x)$$

$$y'(0) = 1 \iff 2B - \frac{1}{4} = 1 \iff B = \frac{5}{8}$$

17. Un uomo si lancia con il paracadute da una mongolfiera dall'altezza di 1000 m. Il paracadute, che ha una forma particolare, fa in modo che l?attrito dell?aria sia direttamente proporzionale alla velocità (coefficiente di proporzionalità $b = 200\ Ns/m$). Determinare lo spazio percorso e la velocità dopo un minuto e dopo due minuti. Dopo quanto tempo toccherà terra e a quale velocità?
(massa uomo e paracadute $= 100\ kg$, accelerazione di gravità $= 10\ m/s^2$

Newton: $F = m \cdot a$



$y(t)$ = altezza paracadute al tempo t

$$m \cdot \ddot{y} = \underbrace{-b \cdot \dot{y}}_{\text{attrito aria}} + \underbrace{m \cdot g}_{\text{forza peso}}$$

$$\Rightarrow 100\ddot{y} = -200\dot{y} + 1000 \quad \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} = 10 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

P.O: $\ddot{y} + 2\dot{y} = 0$

$p(r) = r^2 + 2r = r(r+2) \stackrel{!}{=} 0 \qquad r_1 = 0,\ r_2 = -2$

$y_0(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-2t}$

$y_0(t) = c_1 + c_2 e^{-2t}$

P.P.: • $f(t) = 10$

• $0 \in$ Spettro? sì! con molt. 1

$\Rightarrow$ Ansatz: $y_p(t) = t^1 \cdot (b_0)$

$\dot{y}_p(t) = b_0$

$\ddot{y}_p(t) = 0$

$0 + 2b_0 = 10 \Rightarrow b_0 = 5$

$y_p(t) = 5t$

$\Rightarrow$ Soluzione generale: $y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + 5t$

$\dot{y}(t) = -2c_2 e^{-2t} + 5$

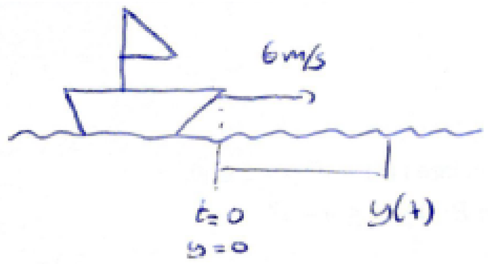
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -2c_2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \to c_1 = -5/2 \\ \to c_2 = 5/2 \end{matrix}$$

$y(t) = -\frac{5}{2} + 5/2\, e^{-2t} + 5t$

$\dot{y}(t) = -\frac{10}{2} e^{-2t} + 5$

- $y(60) = 297{,}5\,m \qquad \dot{y}(60) \simeq 5\ m/s$
- $y(120) = 597{,}5\,m \qquad \dot{y}(120) = 5\ m/s$
- $y(t) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} e^{-2t} + 5t \stackrel{!}{=} 1000 \Rightarrow t \stackrel{\wedge}{=} 200{,}5\,s$ (calcolatrice)

18. Una barca con la massa di 750 kg ha una velocità di 6 m/s quando viene spento il motore. La resistenza dell'acqua è proporzionale alla sua velocità ed è 900 N quando $t = 0$. Di quanto sarà avanzata la barca quando la sua velocità si è ridotta a $1,5\ m/s$?



Newton: $F = m \cdot a$

$-b \cdot \dot{y} = m \cdot \ddot{y}$

$v_0 = 6\ m/s \Rightarrow b \cdot v_0 = 900$

$b = 150\ kg/s$

$\Rightarrow \quad 750 \cdot \ddot{y} + 150 \dot{y} = 0$

$5\ddot{y} + \dot{y} = 0$

$p(r) = 5r^2 + r = 0$

$r(5r+1) = 0 \qquad r_1 = 0, \quad r_2 = -1/5$

$\Rightarrow y(t) = C_1 + C_2 e^{-1/5 t}$

$\dot{y}(t) = -\frac{1}{5} C_2 e^{-1/5 t}$

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \longrightarrow C_1 = 30 \\ -\frac{1}{5} C_2 = 6 \longrightarrow C_2 = -30 \end{cases}$

$y(t) = 30 - 30 e^{-1/5 t}$

- $\dot{y}(t) = +\frac{1}{5} \cdot 30 \cdot e^{-1/5 t} \stackrel{!}{=} 1,5$

$e^{-1/5 t} = \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{5} t = \ln(1/4)$

$t = -5 \cdot \ln(1/4) \cong 6,93\ s$

$y(6,93) \cong 22,5\ m$

19. **(*) Esercizio di approfondimento**
Si consideri un circuito composto da un condensatore di capacità $C = 1E - 3\ Fa$ collegato ad una resistenza $R = 1E - 2\ \Omega$. All'istante t=0 il condensatore ha una carica $Q(0) = 3E - 3\ C$.
Sapendo che il principio di Kirchhoff impone:

$$-\frac{Q(t)}{C} - R \cdot I(t) = 0$$

e che la corrente I(t) è la derivata della carica Q(t), calcolare il tempo necessario affinchè la carica nel condensatore sia $Q = 1.5 \cdot 10^{-3}\ C$.

Soluzione:

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabile:

$$\begin{cases} -R \cdot \frac{dQ}{dt} - \frac{1}{C} \cdot Q(t) = 0 \\ \frac{dt}{-R \cdot C} = \frac{dQ}{Q} \\ \int_0^T \frac{dt}{-R \cdot C} = \int_{Q(0)}^{Q(T)} \frac{dQ}{Q} \end{cases}$$

Integrando:

$$\begin{cases} Q(t) = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \\ \frac{Q(0)}{2} = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \\ \frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \\ t = 2.0794 \cdot 10^{-5}\ s \end{cases}$$