2 Equazioni differenziali

2.1 Definizioni

Sia y una funzione della variabile reale t: si chiama **equazione differenziale** nella funzione incognita $y(t)$ una relazione del tipo

$$F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0 .$$

Ogni funzione le cui derivate soddisfano l'equazione differenziale è chiamata **soluzione** dell'equazione.

Esempi

- $y(t) = t^3 - t$

  è una soluzione dell'equazione differenziale

  $$y'(t) = 3t^2 - 1 .$$

  Questa equazione differenziale ha più di una soluzione; infatti

  $$y(t) = t^3 - t + C$$

  soddisfa l'equazione differenziale per ogni valore della costante C.

- La funzione

  $$y(t) = At^3 - B/t$$

  per qualsiasi valore delle costanti A e B è soluzione dell'equazione differenziale

  $$t^2 y''(t) - ty'(t) - 3y(t) = 0$$

  infatti otteniamo

  $$y'(t) = 3At^2 + B/t^2$$
  $$y''(t) = 6At - 2B/t^3$$

  e quindi

  $$\begin{aligned} t^2 y''(t) - ty'(t) - 3y(t) &= t^2\left(6At - 2B/t^3\right) - t\left(3At^2 + B/t^2\right) - 3\left(At^3 - B/t\right) \\ &= 6At^3 - 2B/t - 3At^3 - B/t - 3At^3 + 3B/t = 0 \end{aligned}$$

  come richiesto.

L'**ordine** di una equazione differenziale è l'ordine della derivata di ordine massimo che compare nell'equazione. Nel primo esempio l'equazione differenziale è del primo ordine mentre nel secondo l'ordine è 2.
Si noti che la soluzione generale nel primo esempio, dove l'ordine era 1, aveva una costante arbitraria, nel secondo, dove l'ordine era due, aveva due costanti arbitrarie. Tipicamente un'equazione di ordine n ha una soluzione generale con n costanti arbitrarie.
Per scegliere una soluzione tra le infinite possibili, cioè per scegliere o stabilire il valore delle costanti arbitrarie, abbiamo bisogno di informazioni supplementari. Per una equazione di ordine uno servirà una condizione supplementare per stabilire il valore della costante che compare nella soluzione generale; se l'equazione è del secondo ordine, le costanti saranno due e le condizioni necessarie pure. Le condizioni supplementari sono spesso delle condizioni

iniziali, cioè i valori della funzione incognita e delle sue derivate ad un tempo t_0 fisso. Una equazione differenziale insieme alle condizioni iniziali prende il nome di **problema ai valori iniziali** o **problema di Cauchy**.

2.2 Esempio applicativo

In questo paragrafo e nei successivi vogliamo ricavare modelli matematici della realtà, cioè modelli di sistemi presenti in natura, trovando equazioni differenziali che descrivano correttamente le relazioni tra grandezze che caratterizzano lo stato del sistema (posizione e velocità delle singole parti, pressione, correnti e tensioni in circuiti elettrici, ecc.).

Decadimento radioattivo

Una sostanza radioattiva *A* decade, cioè una reazione nucleare trasforma gli atomi di *A* in atomi di un'altra sostanza *B*. Il processo di decadimento segue la seguente legge: la probabilità *p* che un atomo di *A*, ancora attivo al tempo *t*, decada nell'intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$ è proporzionale a Δt, se Δt è infinitesimo; perciò $p = \lambda \cdot \Delta t$ dove la costante di proporzionalità $\lambda > 0$ dipende dalla sostanza *A* scelta.
Inoltre i processi di decadimento degli atomi sono indipendenti tra loro. Se indichiamo con $N(t)$ il numero di atomi ancora attivi al tempo *t* allora ci si aspetta che nell'intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$ ne decadano $N(t)\cdot p = N(t)\cdot \lambda \cdot \Delta t$
Per il numero di atomi presenti alla fine e all'inizio dell'intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$ varrà quindi

$$N(t+\Delta t) - N(t) = -N(t)\cdot \lambda\Delta t,$$

dividendo per Δt

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$$

Come detto all'inizio si presuppone che l'intervallo di tempo Δt sia infinitesimo, possiamo passare quindi al limite per Δt tendente a zero ottenendo

$$\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$$

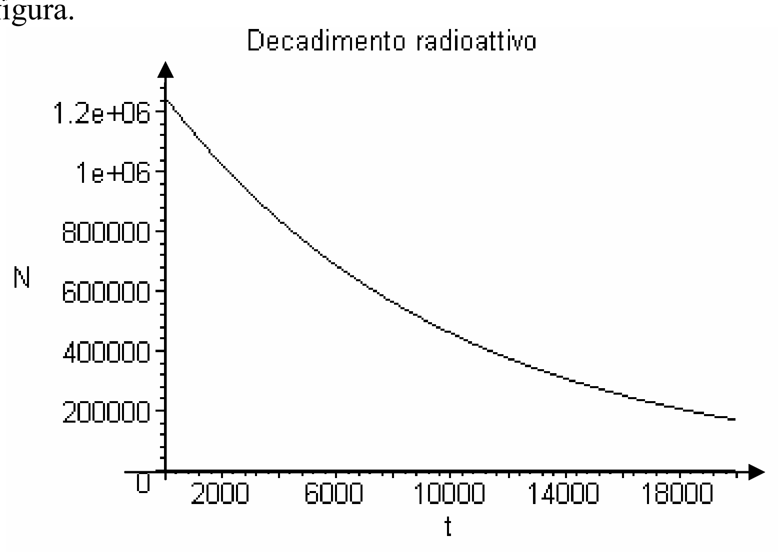
Questa non è altro che un'equazione differenziale. Se inoltre conosciamo il numero di atomi presente al tempo $t_0 = 0$, avremo anche la condizione iniziale $N(0) = N_0$ e quindi avremo ricavato un problema ai valori iniziali.
Infine vi è da dire che è formalmente scorretto utilizzare la derivata in questo contesto, poiché la funzione $N(t)$ è discreta, assume cioè unicamente valori interi. I risultati ottenuti descriveranno comunque adeguatamente la realtà, ciò è dovuto al fatto che i valori di $N(t)$ sono talmente grandi rispetto al salto di discretizzazione che è di 1.
La nostra esperienza in fatto di derivazione ci permette di trovare immediatamente la soluzione dell'equazione differenziale. Dobbiamo unicamente domandarci quale funzione ha derivata proporzionale alla funzione stessa. La risposta è: la funzione esponenziale. Dato che l'equazione differenziale è di primo ordine comparirà una costante arbitraria; facilmente si scoprirà che essa è moltiplicativa. Avremo quindi

$$N(t) = Ce^{-\lambda t}$$

La condizione iniziale $N(0) = N_0$ ci fornisce il valore della costante *C*.

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Si ottiene il decadimento esponenziale tipico di questi processi. Si potrebbe ottenere l'andamento in figura.



2.3 Equazioni differenziali a variabili separabili

Consideriamo l'**equazione logistica**:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1-\frac{y}{L}\right),$$

che governa la crescita di una popolazione di animali in presenza di risorse alimentari limitate.

In questa equazione $y(t)$ rappresenta il numero di individui della popolazione presenti al tempo *t*, *k* è una costante positiva legata alla prolificità della specie animale e L è il valore della popolazione stazionaria permessa dalle risorse disponibili. Questa equazione è un esempio di una classe di equazioni differenziali del primo ordine, chiamate **equazioni a variabili separabili**, o più semplicemente **equazioni separabili**, perché, quando sono scritte in termini differenziali, possono essere ricondotte alla forma:

$$g(y)dy = f(t)\,dt$$

e risolte integrando poi entrambi i membri.

Nel nostro esempio abbiamo

$$\frac{L}{y(L-y)}dy = k\,dt$$

integrando entrambi i membri otteniamo

$$\int \frac{L}{y(L-y)}dy = \int k\,dt \quad \text{da cui} \quad \int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{L-y}\right)dy = kt + C_1 .$$

Supponendo $0 < y < L$, otteniamo quindi

$$\ln(y) - \ln(L-y) = kt + C_1$$

$$\ln\left(\frac{y}{L-y}\right) = kt + C_1$$

e questa equazione può essere risolta rispetto a *y* fornendo:

$$y(t) = \frac{CLe^{kt}}{1+Ce^{kt}}, \text{ dove } C = e^{C_1}.$$

- Risolvere l'equazione $y' = \dfrac{t}{y}$.

  Possiamo riscrivere l'equazione $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{y}$ da cui $y\,dy = t\,dt$, integrando abbiamo $\int y\,dy = \int t\,dt$ cioè $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{t^2}{2} + C_1$ ovvero $y^2 - t^2 = C$. Le curve soluzione sono delle iperboli equilatere con asintoti $y = t$ e $y = -t$.
- Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale $y' = t^2 y^3$ e la condizione iniziale $y(1) = 3$.

  Abbiamo $\dfrac{dy}{y^3} = t^2\,dt$, per cui $\int \dfrac{dy}{y^3} = \int t^2\,dt$ e $\dfrac{-1}{2y^2} = \dfrac{t^3}{3} + C$ da cui $y^2 = \dfrac{-3}{2t^3 + 6C}$.

  Poiché $y = 3$ quando $t = 1$, abbiamo $9 = \dfrac{-3}{2 + 6C}$ da cui $C = -\dfrac{7}{18}$.

  Sostituendo questo valore nella soluzione appena scritta otteniamo $y^2 = \dfrac{9}{7 - 6t^3}$; risolvendo rispetto a y (dove dalla condizione iniziale possiamo dedurre che $y > 0$) si ha $y(t) = \dfrac{3}{\sqrt{7 - 6t^3}}$, valida per $t < \left(\dfrac{7}{6}\right)^{1/3}$.

2.4 Equazioni differenziali del primo ordine lineari

Un'equazione differenziale (ordinaria) **lineare** del primo ordine è del tipo

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t),$$

dove $p(t)$ e $q(t)$ sono funzioni continue in un intervallo *I*. Il procedimento per risolvere equazioni di questo tipo è il seguente: sia $\mu(t)$ ($e^{\mu(t)}$ è chiamato **fattore integrante**) una primitiva qualsiasi di $p(t)$; perciò $d\mu/dt = p(t)$. Se $y = y(t)$ è una soluzione dell'equazione data, allora, usando la regola della derivata del prodotto:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mu(t)} y(t)\right) = e^{\mu(t)} \frac{d\mu}{dt} y(t) + e^{\mu(t)} \frac{dy}{dt} = e^{\mu(t)}\left(\frac{d\mu}{dt} y(t) + \frac{dy}{dt}\right) = e^{\mu(t)} q(t).$$

Pertanto

$$e^{\mu(t)} y(t) = \int e^{\mu(t)} q(t)\,dt.$$

Perciò la soluzione dell'equazione differenziale lineare $\dfrac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$ è

$$y(t) = e^{-\mu(t)} \int e^{\mu(t)} q(t)\,dt,$$

dove $\mu(t)$ è una primitiva qualsiasi di $p(t)$.

- Risolvere l'equazione differenziale $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{y}{t}=1$ per $t>0$.

  Dobbiamo determinare $\mu(t)$ soluzione di $d\mu/dt=1/t$, si ha $\mu(t)=\ln t$ per $t>0$, per cui $e^{\mu(t)}=t$. Utilizzando la formula vista sopra otteniamo

  $$y(t)=e^{-\mu(t)}\int e^{\mu(t)}q(t)dt=\frac{1}{t}\int t\,dt=\frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2}+C\right)=\frac{t}{2}+\frac{C}{t}.$$

  La funzione $y(t)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{C}{t}$ per $t>0$, è soluzione dell'equazione considerata per qualunque valore della costante *C*.

- Verificare, con il metodo appena descritto, che la soluzione generale dell'equazione differenziale

  $$\frac{dy}{dt}+ty=t^3 \qquad \text{è} \qquad y(t)=t^2-2+Ce^{\frac{-t^2}{2}}.$$

2.5 Interpretazione grafica per equazioni differenziali del primo ordine

Un'equazione differenziale può venire scritta nella forma $y'(t)=F(t,y(t))$; ma sappiamo che $y'(t)$ rappresenta la pendenza della retta tangente a $y(t)$ per un certo valore di t. Perciò se vogliamo determinare una soluzione passante per il punto $(t_0;y_0)$ l'equazione differenziale ci permette di trovare la derivata di $y(t)$ in quel punto

$$y'(t_0)=F(t_0,y_0).$$

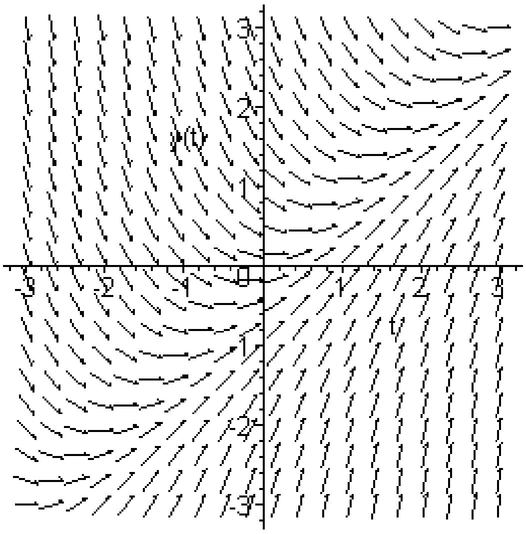
Associamo dunque a tale punto la direzione della corrispondente retta tangente a $y(t)$. Al variare del punto $(t_0;y_0)$ nel piano determiniamo così un **campo di direzioni**.

Vediamo un esempio.

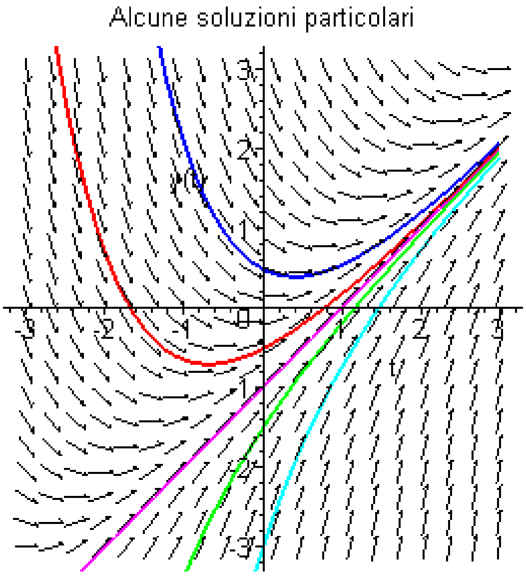
$$y'(t)=t-y(t),$$

la soluzione passante per il punto nel punto $(t_0;y_0)=(-2;1)$ avrà pendenza della tangente $y'(-2)=-2-1=-3$. Al variare di $(t_0;y_0)$ si ottiene il seguente campo di direzioni:

Pendenza di y(t)



Le soluzioni dovranno seguire in ogni punto la direzione associata. In molti casi è perciò possibile avere un'idea qualitativa delle soluzioni. Nel grafico sottostante sono riportate alcune di queste soluzioni.



Ogni curva nel piano *t*-*y* che in ogni punto è tangente alle freccette in figura sarà soluzione dell'equazione differenziale.
Possiamo ora risolvere l'equazione e controllare così le soluzioni:
L'equazione $y'(t) = t - y(t)$ è un'equazione differenziale lineare, difatti possiamo riscriverla nella forma

$$y'(t) + y(t) = t$$

perciò si ha $p(t) = 1$ da cui $\mu(t) = t$. Utilizzando la formula vista in precedenza otteniamo

$$y(t) = e^{-\mu(t)} \int e^{\mu(t)} q(t) dt = e^{-t} \int e^t \, t \, dt = e^{-t}\left[(t-1)e^t + C\right] = t - 1 + Ce^{-t}.$$

2.6 Equazioni differenziali lineare del secondo ordine

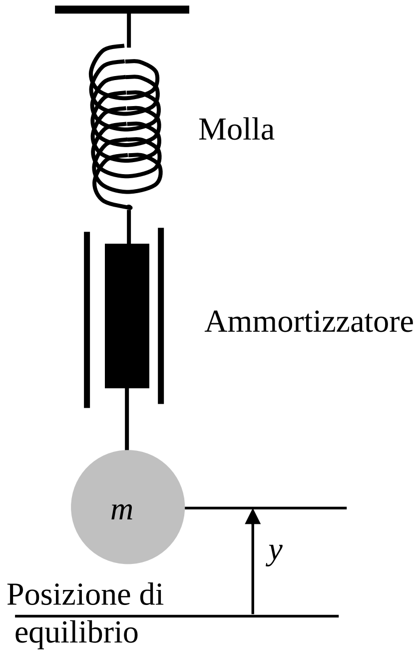
Un'equazione differenziale lineare del secondo ordine può venire scritta nella forma:

$$a(t)\ddot{y}(t) + b(t)\dot{y}(t) + c(t)y(t) = f(t), \; a(t) \neq 0$$

dove $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ e $f(t)$ sono funzioni continue in un certo intervallo *I*.

- Il termine **lineare** significa che l'incognita *y* e le sue derivate compaiono unicamente con l'esponente uno (ciò significa che non vi sono neppure espressioni del tipo $\sin y$ o $\ln y$).
- Quando $f(t) = 0$ l'equazione è detta **omogenea**.
- Se $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ non sono delle funzioni ma delle costanti, l'equazione si dirà a **coefficienti costanti.**

Un sistema meccanico



Consideriamo il sistema meccanico schizzato in figura. La molla esercita una forza di richiamo proporzionale all'elongazione y, mentre l'ammortizzatore esercita una forza di attrito proporzionale alla velocità $\dot{y}$ ma in senso inverso ad essa.
Il sistema si può descrivere completamente con l'andamento della variabile y.
Se per semplicità per il momento ammettiamo di essere in assenza di gravità avremo che in ogni istante agiranno sulla massa m due forze (la forza della molla e quella dell'ammortizzatore).

$$F_m = -ky$$
$$F_a = -b\dot{y}$$

La legge di Newton, applicata alla massa m, ci fornirà una equazione differenziale:

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} - ky$$

oppure

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0, \qquad m \neq 0$$

dove m, b e k sono delle costanti reali positive.
Questa equazione differenziale è lineare, omogenea del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti.

Essendo l'equazione di secondo ordine vi saranno due costanti arbitrarie nella soluzione generale e necessiteremo quindi di due condizioni iniziali, tipicamente posizione iniziale $y(t_0) = y_0$ e velocità iniziale $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$.
In questo caso, a differenza del primo esempio sul decadimento radioattivo, non è più tanto facile intuirne la soluzione. Come vedremo in seguito tutte le equazioni differenziali di questo tipo hanno come soluzione delle combinazioni lineari di funzioni esponenziali (complesse).

Torniamo ora all'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0, \qquad a \neq 0$$

Proviamo ad introdurre una funzione esponenziale $y(t) = e^{rt}$ nell'equazione, ottenendo

$$\dot{y}(t) = re^{rt}$$
$$\ddot{y}(t) = r^2 e^{rt}$$

e quindi

$$0 = a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt}$$

Questa identità è soddisfatta se la parentesi si annulla in quanto la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, r deve quindi essere scelto in modo da annullare il polinomio

$$p(r) = ar^2 + br + c$$

che è detto **polinomio caratteristico** dell'equazione differenziale. La funzione esponenziale $y(t) = e^{rt}$ proposta è quindi soluzione dell'equazione differenziale purché il parametro r sia uno zero del polinomio caratteristico.

Gli zeri di questo polinomio possono essere

- reali e distinti se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;
- reali e coincidenti se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: $r_1 = r_2 = r = \dfrac{-b}{2a}$
- complessi coniugati se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: $r_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \pm i\dfrac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} = \alpha \pm i\beta$

Nel primo caso $(\Delta > 0)$

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \text{ e } y_2(t) = e^{r_2 t}$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti e la soluzione generale dell'equazione differenziale si ottiene come combinazione lineare delle due soluzioni indipendenti così trovate

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Nel secondo caso $(\Delta = 0)$ le due soluzioni sono linearmente dipendenti, ma se prendiamo

$$y_1(t) = e^{rt}$$

è facile dimostrare che la funzione $y_2(t) = te^{rt}$ e anche soluzione dell'equazione differenziale. Perciò la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{rt} + C_2 te^{rt}.$$

Nel terzo caso $(\Delta < 0)$

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \text{ e } y_2(t) = e^{r_2 t}$$

sono due soluzioni complesse linearmente indipendenti. Utilizzando il teorema di Eulero possiamo riscriverle nella forma:

$$y_1(t) = e^{r_1 t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$$
$$y_2(t) = e^{r_2 t} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)).$$

Stiamo cercando delle soluzioni reali dell'equazione differenziale, ma sapendo che ogni combinazione lineare di soluzioni è anche soluzione possiamo calcolare:

$$\tilde{y}_1(t) = \frac{1}{2}(y_1(t) + y_2(t)) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

$$\tilde{y}_2(t) = \frac{1}{2i}(y_1(t) - y_2(t)) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

ottenendo due soluzioni reali linearmente indipendenti. La soluzione generale dell'equazione differenziale è:

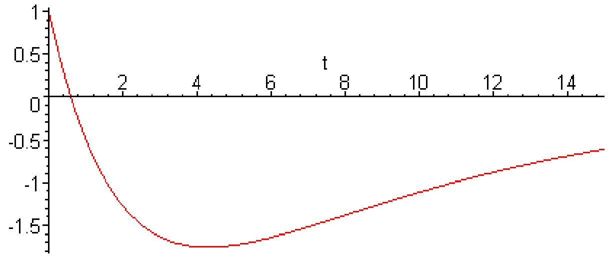
$$y(t) = C_1 \tilde{y}_1(t) + C_2 \tilde{y}_2(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

o

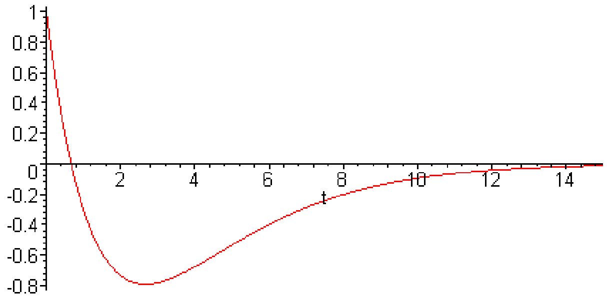
$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

Riprendiamo l'esempio della molla con $m=16$, $y(0)=1$ e $y'(0)=-2$ e vediamo cosa capita al variare di b e k :

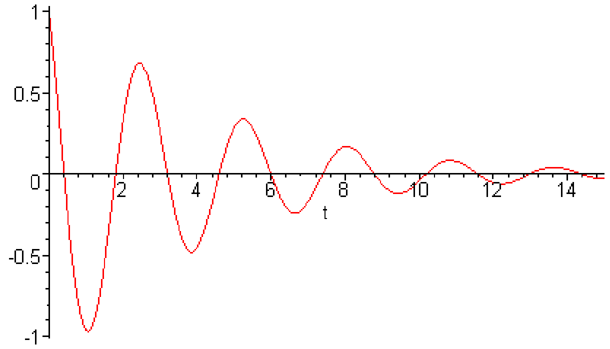
$b=10,\ k=1$: smorzamento forte $\left(b^2>4mk\right)$



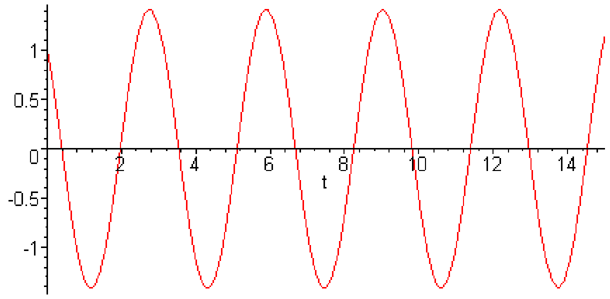
$b=16,\ k=4$: smorzamento critico $\left(b^2=4mk\right)$



$b=8,\ \ k=82$: smorzamento debole $\left(b^2<4mk\right)$



$b=0,\ \ k=64$: smorzamento nullo



2.7 Equazioni differenziali lineari omogenee

Oramai abbiamo acquisito un'esperienza sufficiente e siamo in grado di formulare una teoria per queste equazioni.
Una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti ha la forma

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = 0$$

L'insieme degli zeri $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ del polinomio caratteristico dell'equazione differenziale

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

è detto **spettro** dell'equazione differenziale.
Se il polinomio caratteristico possiede n zeri distinti allora le n funzioni

$$y_1(t) = e^{r_1 t}, y_2(t) = e^{r_2 t}, \cdots, y_n(t) = e^{r_n t}$$

sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale. La soluzione generale si ottiene come combinazione lineare di esse.
A questo punto possono insorgere due tipi di complicazioni.

1. Gli zeri $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ non sono tutti reali.
   Se i coefficienti $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sono reali allora gli zeri complessi si presentano a coppie di complessi coniugati. Siano ad esempio r_j, r_k una coppia di zeri complessi coniugati allora le soluzioni complesse $y_j(t) = e^{r_j t}, y_k(t) = e^{r_k t}$ possono essere sostituite dalla loro parte reale e immaginaria ottenendo così delle soluzioni reali.
2. Tra gli zeri ve ne sono di multipli.
   Lo zero r_j abbia molteplicità k allora oltre alla soluzione $y_j(t) = e^{r_j t}$ vi sono pure le soluzioni $ty_j(t) = te^{r_j t}, t^2 y_j(t) = t^2 e^{r_j t}, \cdots, t^{k-1} y_j(t) = t^{k-1} e^{r_j t}$.

Da notare che in ogni caso otteniamo n soluzioni linearmente indipendenti, la soluzione generale è sempre la combinazione lineare delle n soluzioni così trovate.

Troviamo ad esempio la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$x^{(4)}(t) + 2\ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 5x(t) = 0$$

nonché la soluzione particolare se

$$x(0) = 1, \qquad \dot{x}(0) = 3, \qquad \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

(si noti che la terza condizione non è un semplice valore iniziale).
L'equazione caratteristica è

$$p(r) = r^4 + 2r^2 - 8r + 5 = (r-1)^2 (r^2 + 2r + 5)$$

con gli zeri

$$r_{1,2} = 1 \text{ (doppio) e } r_{3,4} = -1 \pm 2i \text{ (complessi coniugati)}$$

Si ottengono quindi le quattro soluzioni linearmente indipendenti

$$x_1(t) = e^t, x_2(t) = te^t, x_3(t) = e^{-t} \cos 2t, x_4(t) = e^{-t} \sin 2t$$

La soluzione generale sarà dunque

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + C_3 e^{-t} \cos 2t + C_4 e^{-t} \sin 2t .$$

Per la soluzione particolare analizziamo le condizioni date, partendo dall'ultima condizione $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. I primi due termini tendono all'infinito per t che tende all'infinito, mentre le altre due tendono a zero. Ciò implica quindi che i primi due termini sono completamente assenti, cioè $C_1 = C_2 = 0$.
Mentre la altre due ci forniscono i valori di C_3 e C_4

$$\begin{aligned}
& x(t) = C_3 e^{-t}\cos 2t + C_4 e^{-t}\sin 2t \\
& \Rightarrow \dot{x}(t) = -C_3 e^{-t}\cos 2t - 2C_3 e^{-t}\sin 2t - C_4 e^{-t}\sin 2t + 2C_4 e^{-t}\cos 2t \\
& \Rightarrow x(0) = C_3 = 1 \\
& \Rightarrow \dot{x}(0) = -C_3 + 2C_4 = 3 \Rightarrow C_4 = 2
\end{aligned}$$

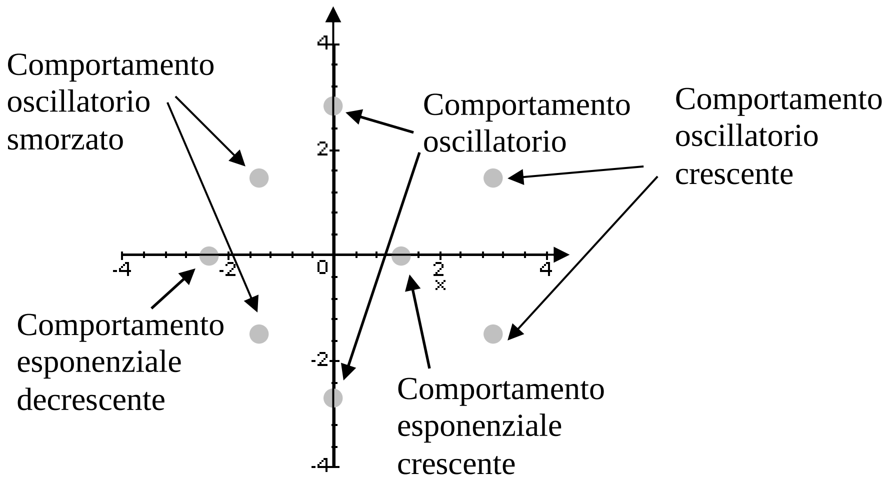
Con la soluzione particolare

$$x(t) = e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t).$$

Alcune considerazioni sul comportamento delle soluzioni

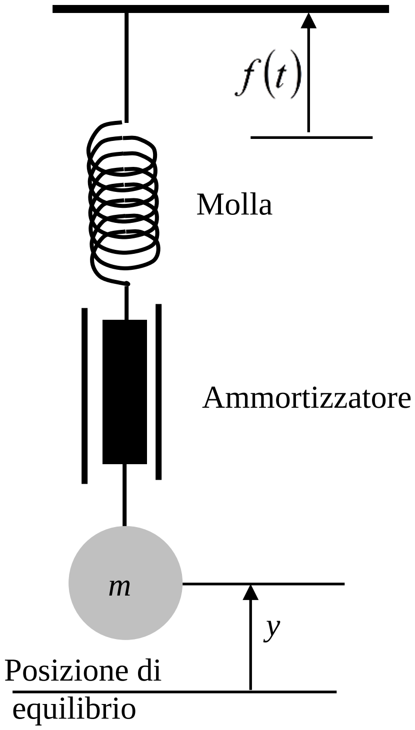
Abbiamo visto che la soluzione generale si ottiene come combinazione lineare di termini del tipo $y_i(t) = e^{r_i t}$.

Se lo zero r del polinomio caratteristico ha una parte immaginaria β non nulla il comportamento è oscillatorio, di ampiezza crescente o decrescente a dipendenza del segno della parte reale α.
Nella soluzione generale dominerà dopo tempi molto lunghi il termine esponenziale con r maggiore. È sufficiente che un unico termine abbia un valore r positivo e la soluzione divergerà per t che tende all'infinito, diremo che il sistema che sta alla base dell'equazione è **instabile**.
Spesso si rappresentano gli zeri del polinomio caratteristico nel piano di Gauss; degli zeri nel semipiano destro sono indice di un sistema instabile.



2.8 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine inomogenee

Un sistema meccanico



Riprendiamo l'esempio precedente modificandolo leggermente, a differenza di prima la molla non è attaccata ad un punto fisso, ma ad un punto che si sposta secondo una funzione data $f(t)$.
Questa differenza si ripercuote sulla lunghezza della molla e quindi sulla forza esercitata dalla stessa.

$$F_m = -k(y - f(t))$$

mentre per l'ammortizzatore non cambia nulla

$$F_a = -b\dot{y}$$

La legge di Newton ci fornirà l'equazione

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} - k(y - f(t))$$

oppure

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = kf(t)$$

La differenza rispetto all'esempio precedente consiste nel termine a destra del segno uguale.
Questa equazione differenziale è lineare, inomogenea di secondo ordine a coefficienti costanti.
Il termine **inomogenea** significa che vi è un termine additivo indipendente da y (nel nostro esempio $kf(t)$).

Equazioni differenziali di questo tipo sono talmente importanti e diffuse che si sono sviluppate diverse tecniche per la loro risoluzione, tra le altre le seguenti:

- metodo pratico ("Ansatz-Methode" in tedesco) per parti inomogenee particolari,
- metodo della variazione delle costanti,
- trasformata di Laplace.

In questo capitolo tratteremo unicamente il primo metodo.
Prima di cominciare dobbiamo formulare un teorema:

> La soluzione generale di un'equazione differenziale lineare inomogenea è la somma di una soluzione particolare $y_p(t)$ della stessa e della soluzione generale $y_0(t)$ dell'equazione omogenea associata, cioè dell'equazione che si ottiene sostituendo la parte inomogenea con zero.
>
> $$y(t) = y_p(t) + y_0(t)$$

Per la dimostrazione è sufficiente accertarsi che la differenza tra due soluzioni dell'equazione inomogenea è per forza soluzione dell'equazione omogenea associata.
Ciò significa per il nostro problema che prima di tutto occorre trovare la soluzione dell'equazione omogenea

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0,$$

cosa già fatta nel problema precedente.

Il metodo pratico dell'"Ansatz" ci aiuta a trovare una soluzione particolare. Questo metodo dice, in effetti, che vi è generalmente una soluzione particolare dello stesso tipo dell'inomogeneità, cioè se l'inomogeneità è una funzione armonica anche la soluzione particolare lo sarà, se è un polinomio di grado *n* anche la soluzione particolare lo sarà.

Data l'equazione $a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=f(t)$, $(a\neq 0)$,la forma di una soluzione particolare dell'equazione chiamata appunto "Ansatz" in tedesco è indicata nella tabella seguente a dipendenza dell'inomogeneità $f(t)$.

Inomogeneità $f(t)$	Condizione	Soluzione particolare $y_p(t)$
$f(t)=\sum_{k=0}^{n}c_k t^k$	$r_1\neq 0$ e $r_2\neq 0$	$y_p(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$
	$r_1=0$ e $r_2\neq 0$ o viceversa	$y_p(t)=t\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$
	$r_1=r_2=0$	$y_p(t)=t^2\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$
$f(t)=c\sin\alpha t$ $f(t)=c\cos\alpha t$ $f(t)=c_1\sin\alpha t+c_2\cos\alpha t$	$r_{1,2}\neq\pm i\alpha$	$y_p(t)=a_1\sin\alpha t+a_2\cos\alpha t$
	$r_{1,2}=\pm i\alpha$	$y_p(t)=t(a_1\sin\alpha t+a_2\cos\alpha t)$
$f(t)=ce^{\mu t}$	$r_1\neq\mu$ e $r_2\neq\mu$	$y_p(t)=ae^{\mu t}$
	$r_1=\mu$ e $r_2\neq\mu$ o viceversa	$y_p(t)=ate^{\mu t}$
	$r_1=r_2=\mu$	$y_p(t)=at^2e^{\mu t}$
$f(t)=e^{\mu t}(c_1\sin\alpha t+c_2\cos\alpha t)$	$r_{1,2}\neq\mu\pm i\alpha$	$y_p(t)=e^{\mu t}(a_1\sin\alpha t+a_2\cos\alpha t)$
	$r_{1,2}=\mu\pm i\alpha$	$y_p(t)=te^{\mu t}(a_1\sin\alpha t+a_2\cos\alpha t)$

Esistono tabelle più complete per altri tipi di inomogeneità.

Torniamo al nostro esempio e ammettiamo che il punto di fissaggio della molla si muova di moto armonico $f(t)=c\sin\alpha t$ ($i\alpha$ non è uno zero del polinomio caratteristico).

Avremo quindi una soluzione particolare $y_p(t)=a_1\sin\alpha t+a_2\cos\alpha t$ che introdotta nell'equazione darà:

$$\dot{y}_p(t)=\alpha(a_1\cos\alpha t-a_2\sin\alpha t)$$

$$\ddot{y}_p(t)=-\alpha^2(a_1\sin\alpha t+a_2\cos\alpha t)$$

$$m\ddot{y}_p+b\dot{y}_p+ky_p=kf(t)$$

$$\Rightarrow -m\alpha^2(a_1 \sin\alpha t + a_2 \cos\alpha t) + b\omega(a_1 \cos\alpha t - a_2 \sin\alpha t) + k(a_1 \sin\alpha t + a_2 \cos\alpha t) = kc\sin\alpha t$$

$$\Rightarrow \sin\alpha t(-m\alpha^2 a_1 - b\alpha a_2 + ka_1 - kc) + \cos\alpha t(-m\alpha^2 a_2 + b\alpha a_1 + ka_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (k - m\alpha^2)a_1 - b\alpha\, a_2 = kc \\ b\alpha\, a_1 + (k - m\alpha^2)a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = kc\dfrac{k - m\alpha^2}{(k - m\alpha^2)^2 + (b\alpha)^2} \\[2ex] a_2 = kc\dfrac{-b\alpha}{(k - m\alpha^2)^2 + (b\alpha)^2} \end{cases}$$

Con tutti questi calcoli rischiamo di non ricordarne il significato. Stiamo cercando una soluzione particolare dell'equazione inomogenea che descrive un sistema meccanico.

Il significato dei diversi parametri è:

k è la costante della molla,

m è la massa del corpo,

b è la costante dell'ammortizzatore,

c è l'ampiezza dell'oscillazione dell'eccitamento $f(t)$, mentre

α è la sua frequenza circolare.

a_1, a_2 sono i coefficienti del seno e del coseno nella soluzione particolare

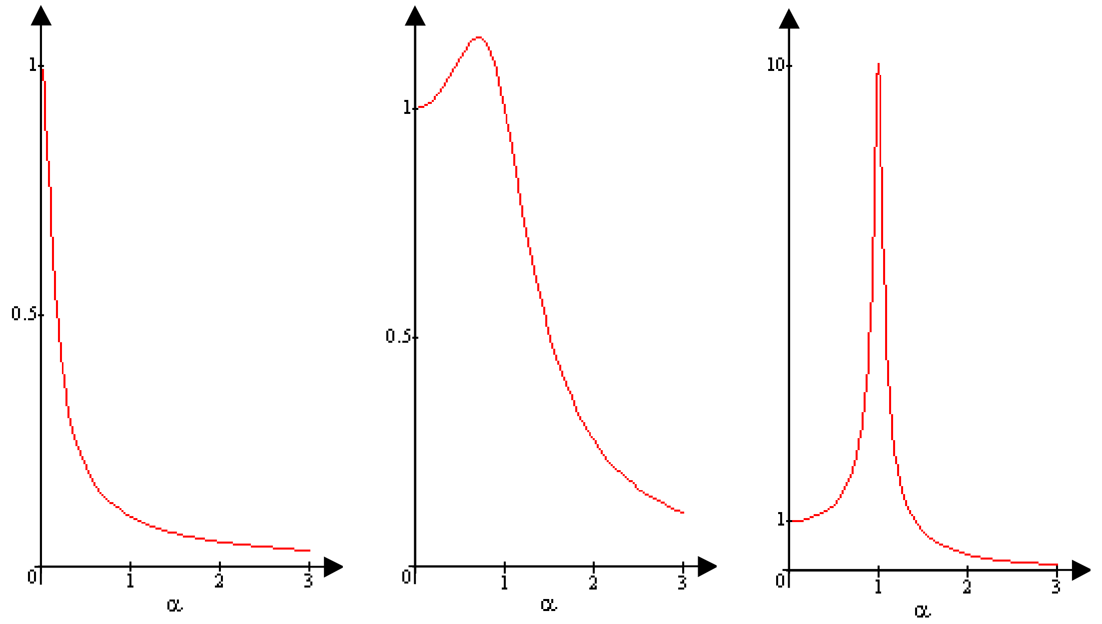
$$y_p(t) = a_1 \sin\alpha t + a_2 \cos\alpha t = a\sin(\alpha t + \varphi)$$

con $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = c\dfrac{k}{\sqrt{(k - m\alpha^2)^2 + (b\alpha)^2}}$.

È interessante studiare la risposta in frequenza del sistema, cioè il rapporto tra l'ampiezza *a* dell'oscillazione della massa e l'ampiezza dell'oscillazione dell'eccitamento *c*, a dipendenza della frequenza α

$$\alpha \mapsto \frac{a}{c} = \frac{k}{\sqrt{(k - m\alpha^2)^2 + (b\alpha)^2}} .$$

Disegniamo il grafico per diversi valori dei parametri. In figura sono rappresentati tre casi.
Nella prima figura lo smorzamento è forte e vediamo come l'ampiezza diminuisce con l'aumentare della frequenza, infatti lo smorzamento forte impedisce i movimenti veloci (la forza nell'ammortizzatore è proporzionale alla velocità).
Nella seconda figura lo smorzamento è debole, vediamo che per certe frequenze l'ampiezza dell'oscillazione d'uscita (della massa) supera quella d'entrata (eccitamento). Inoltre la risposta in frequenza presenta un massimo, la frequenza corrispondente è detta frequenza di risonanza.
Nella terza figura lo smorzamento è ancora più debole, notiamo che l'ampiezza d'uscita supera di molte volte quella d'entrata, la risonanza è più stretta ma più alta. Un eccitamento anche debole ma alla frequenza giusta può avere effetti molto importanti, eventualmente anche devastanti.



Se pensiamo ad un bimbo che va in altalena il semplice movimento periodico delle gambe induce l'altalena, e quindi la massa di tutto il corpo, a compiere oscillazioni notevoli, se pensiamo invece alla "Takoma Bridge" capiamo anche che gli effetti possono essere devastanti.
La frequenza di risonanza la si può ottenere cercando il massimo della risposta in frequenza.

$$\frac{a}{c} = \frac{k}{\sqrt{\left(k - m\alpha^2\right)^2 + \left(b\alpha\right)^2}}$$

è massimo quando il radicando è minimo, cioè per

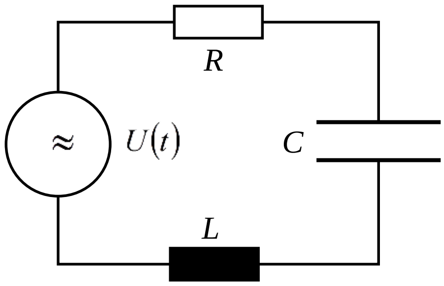
$$\alpha_r = \frac{\sqrt{4mk - 2b^2}}{2m},$$

questa frequenza è molto vicina alla frequenza propria del sistema, cioè alla frequenza con cui il sistema oscilla se viene lasciato andare senza eccitamento (problema precedente).
Fino a questo punto abbiamo solamente discusso la soluzione particolare, ricordiamo che la soluzione generale dell'equazione inomogenea si ottiene come somma della soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

$$y(t) = y_p(t) + y_0(t)$$

Le costanti arbitrarie C_1, C_2 contenute in $y_0(t)$ dipendono dalle condizioni iniziali, ma la soluzione omogenea spesso non interessa, poiché in un sistema stabile, tende esponenzialmente a zero per t che va all'infinito e sopravvive unicamente la soluzione particolare dovuta all'eccitamento $f(t)$.

Un circuito elettrico



Calcolare la corrente elettrica $i(t)$ sulla bobina L avendo i seguenti dati:
condensatore $C = 1nF$,
resistenza $R = 2\,k\,\Omega$,
induttanza $L = 10\,mH$,
sorgente $U(t) = U_0 \sin \omega_0 t$, con $U_0 = 1V$ e $\omega_0 = 3\cdot 10^5\, s^{-1}$.
Le condizioni iniziali sono:

$u_c(0) = 0$ (condensatore scarico),

$i(0) = 0$ (nessuna corrente nella bobina).

Ciò significa che il circuito era spento.
Costruire l'equazione differenziale non è compito della matematica ma piuttosto dell'elettrotecnica, dobbiamo quindi avvalerci di tale "scienza".
Le relazioni tra tensione e corrente nei diversi componenti sono

$$u_R(t) = Ri$$
$$u_L(t) = L\dot{i}$$
$$\dot{u}_c(t) = \frac{1}{C} i$$

mentre la legge di Kirchoff dice che

$$u_R + u_L + u_c = U(t),$$

è conveniente derivare tutta l'equazione in modo che compaia la derivata $\dot{u}_c(t)$

$$\dot{u}_R + \dot{u}_L + \dot{u}_c = \dot{U}(t)$$
$$\Rightarrow R\dot{i} + L\ddot{i} + \frac{1}{C} i = U_0 \omega_0 \cos \omega_0 t$$
$$\Rightarrow LC\ddot{i} + RC\dot{i} + i = CU_0 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

ottenendo così per la funzione incognita $i(t)$ una equazione differenziale lineare inomogenea a coefficienti costanti, del tutto simile a quella del sistema meccanico appena visto.
Risolviamo per prima l'equazione omogenea

$$LC\ddot{i} + RC\dot{i} + i = 0 .$$

Il polinomio caratteristico è

$$p(r) = LCr^2 + RCr + 1$$

i cui zeri sono

$$r_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} = \lambda \pm i\omega$$

con

$$\lambda = \frac{-R}{2L} = -10^5\, s^{-1} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC} = 3\cdot 10^5\, s^{-1}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea sarà

$$i_0(t) = e^{\lambda t}\left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\right)$$

Per la soluzione particolare useremo l'"Ansatz" ($i\omega_0$ non è uno zero del polinomio caratteristico)

$$i_p(t) = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t$$

ottenendo

$$\dot{i}_p(t) = \omega_0 \left(-a_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos \omega_0 t\right)$$

$$\ddot{i}_p(t) = -\omega_o^2 \left(a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t\right)$$

$$LC\ddot{i} + RC\dot{i} + i = CU_0 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\Rightarrow -LC\omega_o^2 \left(a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t\right) + RC\omega_0 \left(-a_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos \omega_0 t\right) + \\ + \left(a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t\right) = CU_0 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\Rightarrow \cos \omega_0 t \left(-LC\omega_o^2 a_1 + RC\omega_0 a_2 + a_1\right) + \sin \omega_0 t \left(-LC\omega_o^2 a_2 - RC\omega_0 a_1 + a_2\right) = CU_0 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1 - LC\omega_o^2\right) a_1 + RC\omega_0 a_2 = CU_0 \omega_0 \\ RC\omega_0 a_1 - \left(1 - LC\omega_o^2\right) a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = U_0 \dfrac{C\omega_0 \left(1 - LC\omega_o^2\right)}{\left(1 - LC\omega_o^2\right)^2 + \left(RC\omega_0\right)^2} \cong 0.081 mA \\ a_2 = U_0 \dfrac{R\left(C\omega_0\right)^2}{\left(1 - LC\omega_o^2\right)^2 + \left(RC\omega_0\right)^2} \cong 0.486 mA \end{cases}$$

La soluzione particolare sarà quindi

$$i_p(t) = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t$$

e quella generale dell'equazione inomogenea

$$i(t) = i_0(t) + i_p(t) = e^{\lambda t}\left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\right) + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t$$

Le condizioni iniziali assicurano che $i(0) = 0, \dot{i}(0) = 0$;
Derivando otteniamo

$$\dot{i}(t) = \lambda e^{\lambda t}\left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t\right) + e^{\lambda t}\omega\left(-C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t\right) + \omega_0\left(-a_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos \omega_0 t\right)$$

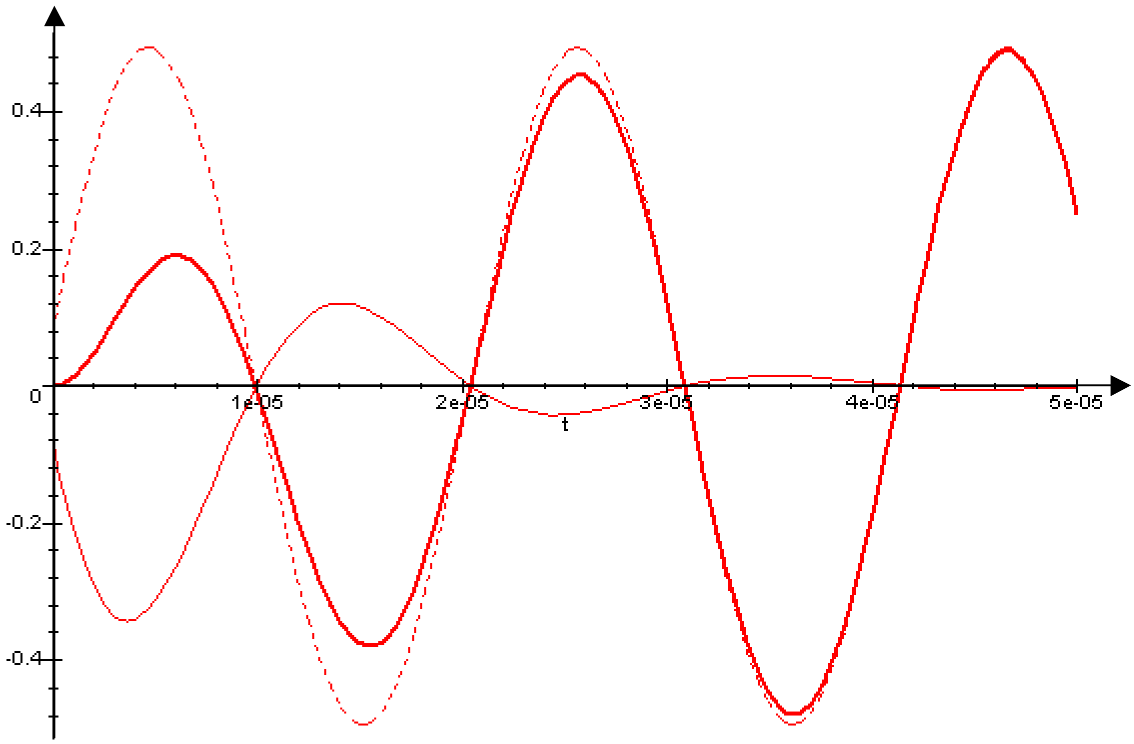
e quindi

$$\begin{cases} 0 = i(0) = C_1 + a_1 \\ 0 = \dot{i}(0) = \lambda C_1 + \omega C_2 + \omega_0 a_2 \end{cases}$$

e la soluzione

$$\begin{cases} C_1 = -a_1 \cong -0.081 mA \\ C_2 = \dfrac{\lambda a_1 - \omega_0 a_2}{\omega} \cong -0.514 mA \end{cases}$$

In figura sono rappresentate la soluzione con le due componenti (particolare e omogenea).



La soluzione particolare (tratteggiata in figura) è detta anche stazionaria, nel senso che continua allo stesso modo per tutti i tempi. Essa è dovuta all'eccitamento continuo della sorgente di tensione applicata al circuito.
La soluzione omogenea (linea normale nel disegno) è detta anche transitoria, e sparisce rapidamente. Essa è dovuta alle condizioni iniziali, che in un sistema stabile non potranno avere un loro effetto per tutti i tempi.
La somma delle due (linea in grassetto in figura) è la soluzione del problema ai valori iniziali. Come si vede nel disegno parte da zero con pendenza nulla come richiesto dalle condizioni iniziali per sovrapporsi poi, dopo un certo tempo, alla soluzione stazionaria.

Conclusioni

A questo punto abbiamo già visto tutto ciò che volevamo, facciamo quindi solo un riassunto di quanto visto.
Le equazioni differenziali lineari, inomogenee a coefficienti costanti si risolvono procedendo come segue.

- Risolvere l'equazione omogenea associata mediante lo studio del polinomio caratteristico, la soluzione generale così ottenuta è detta soluzione omogenea.
- Trovare una soluzione dell'equazione inomogenea con il metodo pratico dell'"Ansatz" secondo la tabella di pagina 23, introdurre la soluzione particolare così ottenuta nell'equazione inomogenea stabilendo così i valori dei diversi parametri. Questa soluzione è detta soluzione particolare.
- La soluzione generale dell'equazione inomogenea è la somma della soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea.
- Se dati, introdurre le condizioni iniziali per stabilire i valori delle costanti presenti nella soluzione omogenea.