Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento tecnologie innovative

SUPSI

Algebra Lineare II

Semestre autunnale

Indice

1 Autovalori e autovettori **5**

1.1 Esempio introduttivo 5

1.2 Autovalori e autovettori 6

1.3 Calcolo degli autovalori 7

1.4 Calcolo degli autospazi 10

1.4.1 Sommario 13

1.4.2 Esercizio risolto 13

1.5 Autovalori e autospazi di trasformazioni geometriche 15

1.6 Diagonalizzazione di una matrice e altre proprietà 17

1.6.1 Matrici simili 17

1.6.2 Diagonalizzazione 17

1.6.3 Esercizio risolto 19

1.7 Matrici simmetriche 22

1.7.1 Proprietà delle matrici simmetriche 22

1.8 La scomposizione di Jordan 26

1.8.1 Scomposizione di Jordan: definizione 27

1.8.2 Calcolo della scomposizione di Jordan 28

1.8.3 Esercizio risolto 28

1.9 Alcune proprietà interessanti 31

1.9.1 Regole del determinante e della traccia 31

1.9.2 Calcolo di A^k 31

1.9.3 Esercizio risolto 32

1.9.4 Esercizio risolto: la successione di Fibonacci 33

1.9.5 Il teorema di Cayley-Hamilton 35

1.9.6 Autovalori di A^k e A^{-1} 36

1.9.7 L'esponenziale di matrici e^A 37

1.10 Calcolo matriciale in Matlab 39

2 Applicazioni **43**

2.1 Norme matriciali e condizione di una matrice 43

2.1.1 Norme vettoriali 43

2.1.2 Norme matriciali 45

2.1.3 La norma matriciale euclidea 46

2.1.4 Calcolo della norma euclidea per matrici qualsiasi 48

2.2 Una prima applicazione: la condizione di una matrice . . . 50
2.2.1 Esercizio risolto . . . 51
2.3 Risoluzione di sistemi di equazioni differenziali lineari . . . 52
2.3.1 Equazioni differenziali lineari di primo ordine a coefficienti costanti omogenee . . . 53
2.3.2 Sistemi di equazioni differenziali lineari di primo ordine . . . 54
2.3.3 Un caso semplice: matrice dei coefficienti diagonale . . . 56
2.3.4 Il metodo generale: cambio di variabili e diagonalizzazione . . . 57
2.3.5 Soluzione con esponenziale di matrici . . . 59
2.3.6 Il comportamento delle soluzioni per $t \to \infty$ . . . 61
2.3.7 Un esempio fisico: pendoli accoppiati . . . 62

3 Calcolo matriciale in grafica computerizzata 65
3.1 Introduzione . . . 65
3.2 Coordinate omogenee . . . 66
3.2.1 Traslazione . . . 67
3.2.2 Deformazione e ingrandimento . . . 67
3.2.3 Rotazione . . . 69
3.2.4 Proiezioni . . . 71

4 Raccolta di lavori scritti ed esami 73
4.1 Vecchi lavori scritti . . . 73
4.1.1 Prova formativa gennaio 2006 . . . 73
4.1.2 Lavoro scritto Gennaio 2006 per elettronici . . . 74
4.1.3 Lavoro scritto Gennaio 2006 per informatici . . . 75
4.1.4 Lavoro scritto Dicembre 2006 per informatici . . . 76
4.1.5 Lavoro scritto Dicembre 2006 per elettronici . . . 77
4.1.6 Lavoro scritto Novembre 2007 per informatici . . . 78
4.1.7 Lavoro scritto Dicembre 2007 per informatici . . . 79
4.2 Vecchi esami . . . 80
4.2.1 Esame Febbraio 2006 . . . 80
4.2.2 Esame d'appello Settembre 2007 . . . 82
4.2.3 Esame d'appello Giugno 2008 . . . 84

Capitolo 1

Autovalori e autovettori

1.1 Esempio introduttivo

Consideriamo l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \mapsto \vec{y} = A \cdot \vec{x},$$

definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Normalmente, calcolando l'immagine di un vettore qualsiasi $\vec{x}$ rispetto a f, si ottiene un vettore $\vec{y} = f(\vec{x})$ con una direzione diversa da quella di $\vec{x}$. Ad esempio,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

chiaramente i due vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ non sono paralleli poiché non esiste nessun numero λ tale che $\vec{y} = \lambda \cdot \vec{x}$. Esistono però dei casi particolari in cui $f(\vec{x})$ possiede la stessa direzione di $\vec{x}$, ad esempio

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

e quindi $\vec{y} = A\vec{x} = -3 \cdot \vec{x}$, oppure

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e quindi $\vec{y} = A\vec{x} = -1 \cdot \vec{x}$. È interessante notare che, se un vettore $\vec{x}$ possiede questa proprietà, anche un suo multiplo possiede la stessa proprietà, ad esempio

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \end{pmatrix},$$

e quindi $\vec{y} = A\vec{x} = -3 \cdot \vec{x}$.

Il nostro obiettivo, in questo capitolo, è quello di determinare tutti i vettori che possiedono questa particolare proprietà rispetto a un'applicazione lineare generica

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \mapsto \vec{y} = A \cdot \vec{x}.$$

Questi particolari vettori sono molto importanti per numerose applicazioni pratiche di cui vedremo qualche esempio nel secondo capitolo.

1.2 Autovalori e autovettori

Definizione 1.1 *Data una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ è detto* autovalore *di A se esiste un vettore $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\vec{x} \neq \vec{0}$ e $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Il vettore $\vec{x}$ con questa proprietà è chiamato* autovettore *relativo all'autovalore λ.*

Esempio 1.1 *La matrice dell'esempio introduttivo,*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

possiede l'autovalore $\lambda = -3$, un autovettore relativo a questo autovalore è ad esempio

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

infatti

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 \cdot \vec{x}.$$

Nell'esempio introduttivo abbiamo visto che possono esistere diversi autovettori relativi allo stesso autovalore. In particolare abbiamo intuito che, dato un autovettore $\vec{x}$ relativo a un autovalore λ della matrice quadrata A, allora ogni multiplo del vettore $\vec{x}$ è ancora un autovettore relativo all'autovalore A. Questa intuizione può essere generalizzata e dimostrata come segue. Consideriamo due autovettori $\vec{x}$ e $\vec{z}$ relativi all'autovalore λ della matrice A, ovvero tali che

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \qquad A\vec{z} = \lambda\vec{z},$$

allora abbiamo che

- $\vec{x} + \vec{z}$ è ancora un autovettore relativo all'autovalore λ.
- $\mu \cdot \vec{x}$ è ancora un autovettore relativo all'autovalore λ per qualsiasi $\mu \in \mathbb{C}$.

Infatti, grazie alle proprietà del prodotto matriciale, abbiamo che

$$A(\vec{x} + \vec{z}) = A\vec{x} + A\vec{z} = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{z} = \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{z}),$$
$$A(\mu \cdot \vec{x}) = \mu \cdot A\vec{x} = \mu \cdot \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}).$$

Di conseguenza, qualsiasi combinazione lineare di autovettori relativi allo stesso autovalore di una matrice è ancora un autovettore (o il vettore nullo), e quindi ogni autovalore possiede sempre infiniti autovettori.

Definizione 1.2 *Data una matrice quadrata A e un autovalore λ di A, l'*autospazio *relativo a λ, indicato con E_λ, è formato da* ***tutti*** *gli autovettori relativi a λ e dal vettore nullo. Si può verificare che gli autospazi sono spazi vettoriali.*

Si pone ora il problema di come calcolare gli autovalori e i rispettivi autospazi di una matrice quadrata qualsiasi A. Incominciamo con il calcolare gli autovalori.

1.3 Calcolo degli autovalori

Come abbiamo visto nella Definizione 1.1, un autovalore λ della matrice A è un numero, reale o complesso, tale che esiste almeno un vettore non nullo $\vec{x}$ tale che

$$A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}. \tag{1.1}$$

L'equazione (1.1) può essere trasformata come segue,

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ A\vec{x} - \lambda\vec{x} &= \vec{0} \\ (A - \lambda I)\vec{x} &= \vec{0}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove I indica la matrice identità. L'equazione (1.2) descrive un sistema omogeneo con matrice dei coefficienti $(A - \lambda I)$. Dal corso di algebra lineare I sappiamo che un sistema omogeneo possiede soluzioni diverse da quella banale $\vec{x} = \vec{0}$ solo se la matrice dei coefficienti ha determinante uguale a zero. Di conseguenza, possono esistere dei vettori non nulli $\vec{x}$ tali che vale (1.1), solo se $\det(A - \lambda I) = 0$. Per calcolare gli autovalori di una matrice A è quindi sufficiente trovare tutti i λ reali o complessi, tali che $\det(A - \lambda I) = 0$. Vediamo alcuni esempi e mettiamo in evidenza alcune proprietà particolari.

Esempio 1.2 *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)^2 - 1^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1),$$

da cui segue che

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3 \textit{ oppure } \lambda = -1.$$

Gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$.[1]

[1] In queste dispense indichiamo con λ_1, λ_2, … in maniera progressiva tutti gli autovalori di una data matrice.

Esempio 1.3

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\det(B - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda),$$

da cui segue che gli autovalori di B *sono* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ *e* $\lambda_3 = 3$*, ossia gli elementi sulla diagonale della matrice.*

Proprietà: poiché per calcolare il determinante di una matrice triangolare (superiore o inferiore) oppure di una matrice diagonale di dimensione qualsiasi è sufficiente calcolare il prodotto degli elementi sulla diagonale, abbiamo la seguente interessante proprietà: **gli autovalori di una matrice triangolare o diagonale coincidono con gli elementi sulla diagonale della matrice stessa**.

Esempio 1.4

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinante in questo caso possiamo servirci dei diversi metodi studiati in algebra lineare I, ad esempio la regola di Sarrus (visto che si tratta di una matrice 3×3*), oppure il metodo di Lagrange. Il risultato che si ottiene è*

$$\det(C - \lambda I) = -(2+\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 2),$$

da cui segue, risolvendo $\det(C - \lambda I) = 0$*, che gli autovalori di* C *sono* $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2 + \sqrt{2}$ *e* $\lambda_3 = -2 - \sqrt{2}$.

Proprietà: Data una matrice A di dimensione $n \times n$, è possibile dimostrare che $\det(A - \lambda I)$ è sempre un polinomio di n-esimo grado in λ. Risolvere $\det(A - \lambda I) = 0$ significa quindi risolvere un'equazione di n-esimo grado in λ. Il teorema fondamentale dell'algebra afferma che una simile equazione ha sempre n soluzioni in $\mathbb{C}$. Da queste osservazioni segue che **una matrice** $n \times n$ **possiede sempre** n **autovalori**.

Definizione 1.3 *Data una matrice* A *di dimensione* $n \times n$*, il polinomio di* n*-esimo grado definito da* $\det(A - \lambda I)$ *è detto* polinomio caratteristico di A *e viene indicato con* $P_A(\lambda)$.

Esempio 1.5

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$D - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Il determinante in questo caso è dato da

$$P_D(\lambda) = \det(D - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4),$$

da cui segue, risolvendo $P_D(\lambda) = 0$, che gli autovalori di D sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 4$. Vediamo che l'autovalore 1 si ripete due volte poichè nel polinomio caratteristico il termine $(\lambda - 1)$ compare al quadrato, se non si ripetesse la matrice D avrebbe solo due autovalori e questo non sarebbe compatibile con la precedente proprietà.

È possibile che alcuni degli n autovalori di una matrice $n \times n$ siano uguali.

Definizione 1.4 *Il numero di volte che un dato autovalore si ripete è detto* molteplicità algebrica *di quell'autovalore. Nell'esempio 1.5 l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 mentre l'autovalore 4 ha molteplicità algebrica 1.*

Proprietà: la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di una matrice $n \times n$ è sempre uguale a n.

Esempio 1.6

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$E - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Il determinante in questo caso è dato da

$$P_E(\lambda) = \det(E - \lambda I) = \lambda^2 + 1.$$

Per calcolare gli autovalori dobbiamo risolvere l'equazione $\lambda^2 + 1 = 0$, e quindi $\lambda^2 = -1$, da cui segue che gli autovalori di E sono $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Proprietà: spesso gli autovalori sono numeri complessi con parte immaginaria diversa da zero. Esistono alcune matrici particolari di cui si sa già a priori che possiedono tutti autovalori reali, come ad esempio le matrici simmetriche. Discuteremo queste matrici in seguito.

Definizione 1.5 *L'insieme di tutti gli autovalori di una matrice A è detto* spettro *di A e viene indicato con S_A. Ad esempio gli spettri delle matrici dei precedenti esempi sono i seguenti:*

$$\begin{aligned} S_A &= \{-3,-1\}\,, \\ S_B &= \{2,1,3\}\,, \\ S_C &= \left\{-2,-2+\sqrt{2},-2-\sqrt{2}\right\}, \\ S_D &= \{1,1,4\}\,, \\ S_E &= \{i,-i\}\,. \end{aligned}$$

1.4 Calcolo degli autospazi

Adesso che siamo in grado di calcolare gli autovalori di una matrice A qualsiasi, si pone il problema di come calcolare i rispettivi autospazi. Consideriamo per iniziare un esempio.

Esempio 1.7 *Consideriamo nuovamente l'esempio 1.5 precedente. Della matrice*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

conosciamo lo spettro $S_D = \{1,1,4\}$. Iniziamo calcolando l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$. In pratica dobbiamo calcolare tutti i vettori $\vec{x}$ tali che

$$D\vec{x} = 1\cdot\vec{x},$$

ossia tali che

$$(D-I)\vec{x} = \vec{0}. \tag{1.3}$$

Abbiamo

$$(D-I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema (1.3) può essere risolto con Gauss come segue,

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{RREF} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

abbiamo due gradi di libertà, scegliendo x_2 e x_3 abbiamo $x_1 = -x_2 - x_3$ e quindi

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ è quindi lo spazio di dimensione 2,

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Calcoliamo ora l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 4$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(D - 4 \cdot I)\vec{x} = \vec{0}. \tag{1.4}$$

Abbiamo

$$(D - 4 \cdot I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema (1.4) può essere risolto con Gauss come segue,

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \xrightarrow{RREF} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

abbiamo un grado di libertà, scegliendo x_3 abbiamo $x_2 = x_3$ e $x_1 = x_3$, quindi

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 4$ è quindi lo spazio di dimensione 1,

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

In generale per calcolare l'autospazio E_λ relativo all'autovalore λ della matrice A di dimensione $n \times n$, è sufficiente risolvere il sistema omogeneo $n \times n$ dato da

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0},$$

utilizzando un metodo qualsiasi, ad esempio il metodo di Gauss.

Definizione 1.6 *Il numero di vettori linearmente indipendenti che generano l'autospazio E_λ è detto* molteplicità geometrica *dell'autovalore λ. È facile verificare che la molteplicità geometrica di un autovalore λ è pari alla dimensione dello spazio $Ker(A - \lambda I)$.*

Ad esempio l'autovalore $\lambda_1 = 1$ dell'esempio 1.7 ha molteplicità geometrica due, mentre l'autovalore $\lambda_2 = 4$ ha molteplicità geometrica uno. In questo caso la molteplicità geometrica e algebrica dei diversi autovalori coincidono. Con la segunte proprietà vediamo che questo non accade per qualsiasi matrice.

Proprietà: la molteplicità geometrica di un autovalore è sempre minore o uguale alla molteplicità algebrica dello stesso autovalore.
Può infatti capitare, come vedremo nel prossimo esempio, che un autovalore che si ripete m volte, ossia con molteplicità algebrica m, abbia un autospazio di dimensione inferiore a m, ossia abbia molteplicità geometrica inferiore a m.

Esempio 1.8 *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice A ha polinomio caratteristico $P_A(\lambda) = \lambda^2$ e quindi il singolo autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica due. Per calcolare l'autospazio relativo a 0 risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo un grado di libertà, ma x_2 è necessariamente uguale a zero, x_1 di conseguenza può essere scelto liberamente e quindi

$$E_\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

La dimensione di E_λ è pari a uno e quindi la molteplicità geometrica di λ è inferiore della molteplicità algebrica.

Proprietà: autovettori relativi ad autovalori **diversi** di una stessa matrice A sono tra di loro **linearmente indipendenti**.

Esempio 1.9 *Riprendendo l'esempio 1.7, è facile verificare che il vettore*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

è linearmente indipendente dai vettori

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

otteniamo infatti che

$$\begin{matrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{RREF} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Proprietà: gli autovalori di una matrice A di dimensione $n \times n$ **possono assumere il valore 0**. L'autospazio relativo all'autovalore zero viene calcolato risolvendo il sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ e **corrisponde quindi a** $Ker(A)$.

Proprietà: Dal corso di algebra lineare I sappiamo che il rango di una matrice A $n \times n$ e la dimensione di $Ker(A)$ sono collegati dalla relazione

$$rang(A) = n - \dim(Ker(A)).$$

Dalla proprietà precedente sappiamo però che $\dim(Ker(A))$ corrisponde alla molteplicità geometrica dell'autovalore 0, che a sua volta è minore della molteplicità algebrica. In poche parole, se l'autovalore 0 compare m volte, allora $\dim(Ker(A)) \leq m$ e quindi

$$rang(A) = n - \dim(Ker(A)) \geq n - m.$$

Esempio 1.10 *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

possiede due autovalori zero (molteplicità algebrica 2, $m = 2$), il rango della matrice è evidentemente uguale a 1, quindi

$$1 = rang(A) \geq 2 - 2 = 0.\checkmark$$

Proprietà: una matrice A di dimensione $n \times n$ **con un singolo autovalore 0** possiede $rang(A) = n - 1$.

1.4.1 Sommario

Per calcolare gli autovalori e gli autovettori di una matrice quadrata A di dimensione $n \times n$, è sufficiente svolgere i seguenti tre passi:

1. Calcolare il polinomio caratteristico di n-esimo grado $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

2. Calcolare gli n autovalori di A risolvendo l'equazione $P_A(\lambda) = 0$.

3. Per ogni autovalore λ diverso trovato calcolare l'autospazio E_λ risolvendo il sistema omogeneo $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

1.4.2 Esercizio risolto

Considera la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcola gli autovalori e i rispettivi autospazi della matrice C, di ogni autovalore specifica la molteplicità geometrica e algebrica.

Soluzione: calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di C. Abbiamo

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix},$$

sviluppando il calcolo del determinante rispetto alla prima colonna troviamo

$$\begin{aligned} P_C(\lambda) &= \det(C - \lambda I) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 2(\lambda - 1) + 2(2 - 2\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 - 2\lambda + 2 + 4 - 4\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Gli autovalori di C sono quindi $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica 1, e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica 2. Calcoliamo ora l'autospazio relativo all'autovalore 0, come visto in precedenza questo equivale a calcolare $Ker(C)$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$C\vec{x} = \vec{0},$$

con Gauss otteniamo

$$\begin{array}{ccc} 3 & \text{-1} & \text{-2} \\ 2 & 0 & \text{-2} \\ 2 & \text{-1} & \text{-1} \end{array} \xrightarrow{RREF} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & \text{-1} \\ 0 & 1 & \text{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array},$$

abbiamo un grado di libertà, esprimiamo x_1 e x_2 in funzione di x_3: dalla prima equazione abbiamo $x_1 = x_3$, dalla seconda abbiamo $x_2 = x_3$,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

La molteplicità geometrica di λ_1 è 1 (non poteva essere altrimenti...). Calcoliamo ora l'autospazio relativo all'autovalore 1. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(C - I)\vec{x} = \vec{0},$$

con Gauss otteniamo

$$\begin{array}{ccc} 2 & \text{-1} & \text{-2} \\ 2 & \text{-1} & \text{-2} \\ 2 & \text{-1} & \text{-2} \end{array} \xrightarrow{RREF} \begin{array}{ccc} 1 & \text{-0.5} & \text{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array},$$

abbiamo due gradi di libertà, esprimiamo x_1 in funzione di x_2 e x_3: dalla prima equazione abbiamo $x_1 = 0.5 \cdot x_2 + x_3$,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

La molteplicità geometrica di λ_2 è quindi 2.

1.5 Autovalori e autospazi di trasformazioni geometriche

Glu autovalori e gli autospazi assumono un significato interessante in relazione alle trasformazioni geometriche. In questa sezione studiamo alcuni esempi significativi.

Esempio 1.11 *Consideriamo la proiezione in $\mathbb{R}^2$ sull'asse x. La trasformazione è descritta dalla matrice*

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è dato da

$$P_{P_x} = -\lambda(1-\lambda) = \lambda(\lambda - 1),$$

abbiamo quindi autovalori

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.$$

Gli autospazi sono dati da

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si vede chiaramente che gli autovettori relativi all'autovalore 0 (ossia i vettori che si annullano) sono i vettori perpendicolari all'asse x, ovvero i vettori paralleli a $\vec{e_2}$, mentre gli autovettori relativi all'autovalore 1 (ossia i vettori che rimangono invariati) sono i vettori paralleli all'asse x, ovvero i vettori paralleli a $\vec{e_1}$. Questo risultato, ragionando su quali vettori rimangono invariati e quali vengono annullati durante una proiezione, poteva essere trovata con agio anche senza calcolare. Questo ragionamento è valido anche per proiezioni su altri assi (passanti per l'origine) e per proiezioni in $\mathbb{R}^3$ su piano passanti per l'origine.

Esempio 1.12 *Consideriamo ora una rotazione in $\mathbb{R}^2$ rispetto all'origine di angolo qualsiasi α ($\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Possiamo chiederci quali vettori conservano la loro direzione rispetto a questa trasformazione, la risposta, evidente, è nessuno. Proviamo a verificare se questo fatto poteva essere scoperto anche calcolando gli autovalori. La rotazione è descritta dalla matrice*

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è dato da

$$P_{R_\alpha} = (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 - 2\cos(\alpha)\lambda + \lambda^2,$$

abbiamo quindi gli autovalori

$$\lambda_1 = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha), \quad \lambda_2 = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha).$$

Gli autovalori sono entrambi complessi! Quindi non esistono vettori reali che mantengono la direzione quando vengono ruotati di un angolo qualsiasi. L'unico caso in cui troviamo autovalori reali è quando $\sin(\alpha) = 0$, ma in questo caso $\alpha = 0$, oppure $\alpha = \pi$ e quindi $R_0 = I$, rispettivamente $R_\pi = -I$, casi non molto interessanti. In $\mathbb{R}^3$ le matrici di rotazione possiedono sempre un autovalore 1, infatti tutti i vettori paralleli all'asse di rotazione rimangono invariati. Ad esempio, la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

descrive la rotazione di angolo $\frac{2}{3}\pi$ rispetto a un asse parallelo al vettore

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di R è dato da

$$P_R(\lambda) = 1 - \lambda^3,$$

e quindi, come unico autovalore reale, abbiamo $\lambda = 1$. L'autospazio associato a questo autovalore, è, come ci aspettavamo,

$$E_\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Esempio 1.13 *Supponiamo ora di voler capire a che trasformazione geometrica è associata la matrice*

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A occhio è molto difficile capirlo. Proviamo a vedere se il calcolo degli autovettori e degli autovalori può aiutarci. Calcolando gli autovalori troviamo un autovalore singolo $\lambda_1 = 0$ e un autovalore doppio $\lambda_2 = 1$. I rispettivi autospazi sono dati da

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

I due autospazi sono perpendicolari, ovvero qualsiasi vettore di E_{λ_1} è perpendicolare a qualsiasi vettore di E_{λ_2}. Un autospazio di dimensione 2 associato all'autovalore 1 e un autospazio di dimensione 1 associato all'autovalore 0 ci fanno capire che la trasformazione geometrica è una proiezione su un piano passante per l'origine (poiché solo in questo caso la trasformazione è lineare) con vettore normale

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In generale, gli autovalori e i rispettivi autospazi sono uno strumento importante per caratterizzare e comprendere il funzionamento di una data trasformazione lineare.

1.6 Diagonalizzazione di una matrice e altre proprietà

1.6.1 Matrici simili

Definizione 1.7 *Diciamo che la matrice A è* simile *alla matrice B se esiste una matrice di passaggio P, non singolare, tale che*

$$P^{-1}AP = B.$$

Proprietà: due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Se A è simile a B esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = B$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \\ &= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I) = \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

1.6.2 Diagonalizzazione

In questa sezione introduciamo la tecnica di *diagonalizzazione* di una matrice, questa tecnica sta alla base di numerosissime applicazioni pratiche del calcolo matriciale, alcune delle quali verranno studiate in seguito. Consideriamo una matrice A di dimensione $n \times n$, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i suoi n autovalori e rispettivamente $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ autovettori tali che x_i è un autovettore relativo a λ_i per ogni $i = 1, \ldots, n$. Abbiamo che

$$A\vec{x_1} = \lambda_1 \vec{x_1},$$
$$\vdots$$
$$A\vec{x_n} = \lambda_n \vec{x_n}.$$

Costruiamo ora la matrice S utilizzando come colonne nell'ordine gli vettori $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$,

$$S = \begin{bmatrix} \vec{x_1} \ldots \vec{x_n} \end{bmatrix}.$$

Moltiplicando A con S otteniamo

$$AS = A\begin{bmatrix} \vec{x_1} \ldots \vec{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x_1} \ldots A\vec{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{x_1} \ldots \lambda_n\vec{x_n} \end{bmatrix}.$$

Definiamo ora la matrice diagonale,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

è facile verificare che

$$\begin{bmatrix} \lambda_1\vec{x_1} \ldots \lambda_n\vec{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x_1} \ldots \vec{x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = S\Lambda.$$

Abbiamo quindi che

$$AS = S\Lambda$$

Proprietà e definizioni

1. Data una matrice qualsiasi A di dimensione $n \times n$, è possibile costruire una matrice diagonale Λ con gli autovalori di A sulla diagonale e una matrice S con colonne autovettori di A tali che

$$AS = S\Lambda.$$

2. Se la matrice A è tale che la molteplicità algebrica e geometrica coincidono per ogni autovalore, allora è possibile costruire una matrice S con come colonne

autovettori tutti linearmente indipendenti tra di loro. In questo caso la matrice S è di rango pieno, invertibile e si ha

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

e viceversa

$$\Lambda = S^{-1}AS.$$

Una matrice che soddisfa questa condizione è detta *diagonalizzabile*. *Diagonalizzare la matrice* A significa determinare le matrici S e Λ tali che $A = S\Lambda S^{-1}$. Le matrici A e Λ sono quindi simili.

Osservazione 1.1 *1. Una matrice con tutti gli autovalori diversi è diagonalizzabile, poichè autovettori relativi a autovalori diversi sono sempre linearmente indipendenti.*

2. La matrice S non è unica, per costruirla basta scegliere secondo necessità uno o più rappresentanti di ogni autospazio. Ogni colonna di S deve corrispondere a un autovettore qualsiasi relativo all'autovalore che si trova nella medesima colonna di Λ. Se lo stesso autovalore ricorre più volte nella matrice Λ si dovranno utilizzare più autovettori relativi all'autovalore dato nella matrice S, se è possibile questi autovettori vengono scelti linearmente indipendenti tra loro in modo che S sia invertibile. Se questo non è possibile significa che la matrice data non è diagonalizzabile, poichè S non è invertibile.

1.6.3 Esercizio risolto

Esercizio: Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determina una matrice S e una matrice diagonale Λ, tali che

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

È possibile costruire la matrice S in modo che sia ortogonale (ossia tale che $S^{-1} = S^T$)?

Soluzione: abbiamo

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

sviluppando il determinante rispetto alla prima colonna troviamo

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 1) - (2-\lambda) = \\ &= (2-\lambda)((\lambda^2 - 5\lambda + 5) - 1) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda - 4)(\lambda - 1), \\ \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4. \end{aligned}$$

Con gli autovalori trovati possiamo costruire la matrice Λ,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora gli autospazi relativi ai diversi autovalori, per λ_1 risolviamo il sistema,

$$(A - 1I)\vec{x} = \vec{0},$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{RREF} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\Rightarrow \vec{x} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per λ_2 risolviamo il sistema,

$$(A - 2I)\vec{x} = \vec{0},$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{RREF} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\Rightarrow \vec{x} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per λ_3 risolviamo il sistema,

$$(A - 4I)\vec{x} = \vec{0},$$

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \xrightarrow{RREF} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\Rightarrow \vec{x} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

A questo punto una possibile scelta per la matrice S è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

in questo caso abbiamo

$$S^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

e come desiderato

$$S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A.\checkmark$$

In una precedente osservazione abbiamo già evidenziato il fatto che la matrice S non è unica. In particolare, in questo caso, la matrice S può essere costruita scegliendo un rappresentante qualsiasi per ogni autospazio. Per costruire una matrice S ortogonale, ossia tale che $S^{-1} = S^T$, dovrebbe essere possibile scegliere questi vettori in modo che siano tutti perpendicolari tra loro e di lunghezza 1. Nel nostro caso vediamo che i vettori dei diversi autospazi sono effettivamente perpendicolari tra loro, infatti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0, \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0, \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0.\checkmark$$

Vedremo infatti, nella prossima sezione, che per matrici simmetriche vale che autovettori relativi a autovalori diversi sono automaticamente perpendicolari tra loro e la nostra matrice A è effettivamente simmetrica. A questo punto basta scegliere per ogni autospazio un vettore di lunghezza 1, abbiamo

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right| = 1,$$

$$\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right| = 1,$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6} \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\| = 1,$$

e quindi la matrice

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

è ortogonale, infatti

$$SS^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e per concludere è facile verificare che

$$S\Lambda S^{-1} = S\Lambda S^T = A.\checkmark$$

1.7 Matrici simmetriche

Le matrici simmetriche, ossia tali che $A^T = A$, possiedono delle proprietà molto interessanti riguardanti i loro autovalori e autovettori. Queste proprietà si rivelano spesso molto importanti per diverse applicazioni. Passiamo velocemente in rassegna alcune di queste proprietà che discuteremo quindi in seguito con maggior dettaglio.

1.7.1 Proprietà delle matrici simmetriche

Consideriamo una matrice simmetrica A di dimensione $n \times n$.

P1 Se tutti gli elementi di A sono numeri reali, allora anche tutti gli autovalori di A sono reali.

P2 Autovettori relativi a autovalori differenti di A sono sempre perpendicolari.

P3 Se un autospazio ha dimensione maggiore di uno, allora è possibile trovare una base dell'autospazio formata da vettori perpendicolari tra loro e perpendicolari rispetto ai vettori di tutti gli altri autospazi.

P4 Le molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore di A sono uguali. Questo significa che **ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile**.

P5 Per ogni matrice simmetrica A, esistono una matrice diagonale Λ e una matrice ortogonale O tali che

$$A = O\Lambda O^T,$$

rispettivamente

$$\Lambda^{=} O^T A O.$$

Discussione

Come illustrazione delle diverse proprietà, che discutiamo ora in maggior dettaglio, riprendiamo gli esempi 1.5 e 1.7 che si trovano rispettivamente a pagina 9 e 10.

1. Questa proprietà in pratica afferma che, se A è una matrice reale, allora l'equazione $P_A(\lambda) = 0$ ha n soluzioni reali e quindi A ha n autovalori reali. Il vantaggio di questa proprietà risiede in una maggiore semplicità nel calcolo degli autospazi.

   Esempio 1.14 *La matrice*
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
   possiede gli autovalori $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 4$ con molteplicità algebrica 1. Si vede chiaramente che gli autovalori sono tutti reali.

2. In generale si può dimostrare che una matrice possiede autovalori reali e autovettori perpendicolari tra loro solo se si tratta di una matrice simmetrica reale. Supponiamo che la matrice A sia simmetrica, ossia $A = A^T$, sia $\vec{x}$ un autovettore relativo all'autovalore λ_1 e $\vec{y}$ un autovettore relativo all'autovalore λ_2. Allora
   $$A\vec{x} = \lambda_1\vec{x}, \quad A\vec{y} = \lambda_2\vec{y}.$$
   Moltiplicando scalarmente la prima equazione per $\vec{y}$ e la seconda per $\vec{x}$ si ottiene
   $$(\lambda_1\vec{x})^T\vec{y} = (A\vec{x})^T\vec{y} = \vec{x}^T A^T\vec{y} = \vec{x}^T A\vec{y} = \vec{x}^T\lambda_2\vec{y},$$
   e quindi
   $$\lambda_1\vec{x}^T\vec{y} = \lambda_2\vec{x}^T\vec{y}.$$
   È evidente che se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora $\vec{x}^T\vec{y} = 0$, che equivale a $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ e quindi $\vec{x} \perp \vec{y}$.

   Esempio 1.15 *Nell'esempio 1.7 abbiamo trovato per A i seguenti autospazi, per $\lambda_1 = 1$,*
   $$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$
   per $\lambda_2 = 4$
   $$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Effettivamente i vettori di E_{λ_1} sono perpendicolari rispetto ai vettori di E_{λ_2}, infatti

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0, \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0. \checkmark$$

3. Questa proprietà completa la proprietà precedente. In generale dato uno spazio vettoriale di dimensione m, è sempre possibile trovare una base ortogonale, ossia di vettori tutti perpendicolari, per lo spazio vettoriale. È quello che usiamo in questa proprietà, se un autospazio ha dimensione maggiore di uno, allora possiamo costruire per l'autospazio una base ortogonale, così facendo i vettori della base sono perpendicolari tra loro e per via della precedente proprietà anche perpendicolari rispetto a tutti gli autovettori relativi ad altri autovalori.

Esempio 1.16 *Consideriamo l'autospazio*

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

I due vettori che utilizziamo come base non sono perpendicolari, infatti

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Per costruire una base ortogonale a partire da una base non ortogonale di solito si utilizza il metodo di Gram-Schmid. L'idea di questo metodo è quella di costruire in maniera sistematica i vettori della base ortogonale togliendo man mano a ogni singolo vettore della vecchia base le componenti parallele ai vettori già costruiti della nuova base. Supponiamo di avere una base non ortogonale $\{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}\}$, possiamo calolare una nuova base ortogonale $\{\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n}\}$ ponendo $\vec{x_1} = \vec{y_1}$ e calcolando in maniera iterativa

$$\vec{y_k} = \vec{x_k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\vec{x_k} \cdot \vec{y_j}}{\vec{y_j} \cdot \vec{y_j}} \vec{y_j}.$$

Nel nostro caso, ad esempio, indichiamo con $\vec{x_1}$ e $\vec{x_2}$ i vettori

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Come primo vettore della nuova base prendiamo $\vec{y_1} = \vec{x_1}$. Costruiamo un nuovo vettore $\vec{y_2}$ togliendo a $\vec{x_2}$ la componente di $\vec{x_2}$ parallela a $\vec{y_1}$, otteniamo

$$\vec{y_2} = \vec{x_2} - \frac{\vec{x_2} \cdot \vec{y_1}}{\vec{y_1} \cdot \vec{y_1}} \vec{y_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

È facile vedere che il nuovo vettore $\vec{y_2}$ è effettivamente perpendicolare a $\vec{y_1}$, infatti

$$\vec{y_1} \cdot \vec{y_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Lo spazio E_{λ_1} può quindi essere scritto utilizzando la nuova base ortogonale come

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

4. Questa proprietà è forse la più importante delle matrici simmetriche, essa afferma che tutti gli autovalori di una matrice A hanno molteplicità algebriche e geometriche uguali. In pratica vuol dire che per ogni matrice simmetrica A esiste una matrice invertibile S e una matrice diagonale Λ tali che

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Esempio 1.17 *La nostra matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

possiede l'autovalore $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica e geometrica uguale a 2 e l'autovalore $\lambda_2 = 4$ con molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1. In questo caso le matrici Λ e S possono essere costruite come segue. La matrice Λ viene costruita con gli autovalori in un ordine qualsiasi, ad esempio

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

S viene costruita usando dei rappresentanti dei diversi autospazi mantenendo lo stesso ordine utilizzato per Λ, ad esempio

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolando si può facilmente verificare che

$$S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A.\checkmark$$

5. Questa proprietà condensa le ultime tre, in pratica afferma che diagonalizzando la matrice A è possibile costruire la matrice S in modo che essa risulti ortogonale. Infatti basta scegliere gli autovettori in modo che siano tutti ortogonali tra loro e di lunghezza 1. Ad esempio possiamo costruire la matrice S utilizzando i tre vettori di lunghezza 1 paralleli a

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

otteniamo così la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

La matrice S è ortogonale, infatti $S^T S = I$ e quindi $S^{-1} = S^T$.La diagonalizzazione

$$S\Lambda S^{-1},$$

può di conseguenza essere scritta come

$$S\Lambda S^T.$$

Osservazione 1.2 *Una matrice A* ***simmetrica*** *di dimensione $n\times n$ possiede* ***rango pari al numero di autovalori diversi da zero****. Infatti, essendo la molteplicità algebrica sempre uguale alla molteplicità geometrica, il numero di autovalori uguali a zero corrisponde alla dimensione di $ker(A)$. La matrice ha in tutto n autovalori e quindi, sottraendo a n la dimensione di $Ker(A)$, otteniamo il numero di autovalori diversi da zero e, contemporaneamente, anche il rango della matrice A che è dato da*

$$rang(A) = n - \dim(Ker(A)).$$

1.8 La scomposizione di Jordan

Consideriamo una matrice A di dimensione $n\times n$. Se A possiede n autovettori linearmente indipendenti (questo succede se per ogni autovalore la molteplicità algebrica e geometrica corrispondono) allora è possibile trovare una matrice invertibile S e una matrice diagonale Λ tali che

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Se però la matrice A non possiede n autovettori linearmente indipendenti, allora è impossibile diagonalizzare la matrice. La *scomposizione di Jordan* è in un certo senso una generalizzazione della diagonalizzazione. Il suo scopo è quello di scomporre la matrice A nel prodotto di tre matrici M, J e M^{-1}, ossia

$$A = MJM^{-1},$$

tali che J sia il più possibile simile a una matrice diagonale. Se una matrice è diagonalizzabile infatti la scomposizione di Jordan coincide con la diagonalizzazione.

1.8.1 Scomposizione di Jordan: definizione

Consideriamo una matrice A di dimensione $n \times n$ che possiede s autovettori linearmente indipendenti. Allora esistono una matrice M invertibile e una matrice J triangolare superiore tali che

$$A = MJM^{-1}.$$

La matrice J è una matrice *diagonale a blocchi*,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix},$$

dove i blocchi J_i hanno la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

La matrice J "somiglia" a una matrice diagonale nel senso che possiede tutti gli autovalori sulla diagonale, come la matrice Λ della diagonalizzazione, ma alcuni elementi immediatamente sopra la diagonale sono uguali a uno. È evidente che se A possiede n autovettori linearmente indipendenti, allora $s = n$ e la scomposizione di Jordan corrisponde esattamente alla diagonalizzazione. La scomposizione di Jordan in senso stretto è quindi interessante solo per matrici non diagonalizzabili.

Esempio 1.18 *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 322 & -323 & -323 & 322 \\ 325 & -326 & -325 & 326 \\ -259 & 261 & 261 & -260 \\ -237 & 237 & 238 & -237 \end{pmatrix},$$

questa matrice ha un'unico autovalore $\lambda = 5$ con molteplicità algebrica 4 ma solo un vettore linearmente indipendente (molteplicità geometrica 1). Abbiamo quindi $s = 1$ e quindi J è formata da un unico blocco

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice M corrisponde in questo caso a

$$M = \begin{pmatrix} 5922 & 2857 & 317 & 1 \\ 4230 & 2363 & 325 & 0 \\ -3572 & -1962 & -259 & 0 \\ -5170 & -2392 & -237 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.8.2 Calcolo della scomposizione di Jordan

Ad ogni blocco J_i di dimensione $k \times k$ relativo a un autovalore λ_i nella matrice J dobbiamo far corrispondere nella matrice M, nella rispettiva posizione, k colonne linearmente indipendenti. Chiamiamo i vettori-colonna che stiamo cercando $\vec{z_1}, \ldots, \vec{z_k}$, si può dimostrare che questi vettori soddisfano la condizione

$$\begin{aligned} A\vec{z_1} &= \lambda_i \vec{z_1}, \\ A\vec{z_2} &= \lambda_i \vec{z_2} + \vec{z_1}, \\ &\vdots \\ A\vec{z_k} &= \lambda_i \vec{z_k} + \vec{z_{k-1}}. \end{aligned}$$

I vettori della matrice M possono quindi essere trovati risolvendo in maniera ricorsiva i diversi sistemi indicati sopra. I blocchi di dimensione maggiore di 1×1 nella matrice J corrispondono agli autovalori con molteplicità geometrica minore della molteplicità algebrica.

1.8.3 Esercizio risolto

Calcoliamo la scomposizione di Jordan della matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2, e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica 3. L'autospazio relativo a $\lambda_1 = 2$ è dato da

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

L'autospazio relativo a $\lambda_2 = 1$ è dato invece da

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

L'autovalore $\lambda_2 = 1$ ha molteplicità algebrica 3 ma molteplicità geometrica 1. La matrice J ha quindi la forma,

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo aggiunto accanto agli autovalori $\lambda_2 = 1$ due 1 per indicare che la molteplicità algebrica di $\lambda_2 = 1$ è di due superiore alla sua molteplicità geometrica (dobbiamo aggiungere tanti 1 quanti sono gli "autovettori che mancano"). Della matrice M per il momento conosciamo solo le prime tre colonne, che sono gli autovettori che abbiamo calcolato,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & -1 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & -1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Per calcolare la quarta colonna di M dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \vec{z_2} = \vec{z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo la soluzione,

$$\vec{z_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$. Dobbiamo scegliere solo un vettore tra le infinite possibili soluzioni. Ad esempio con $k = 0$ abbiamo,

$$\vec{z_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la quinta colonna di M dobbiamo risolvere il sistema

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \vec{z_3} = \vec{z_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Troviamo come soluzione,

$$\vec{z_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$. Dobbiamo scegliere solo un vettore tra le infinite possibili soluzioni. Ad esempio con $k = 0$ abbiamo,

$$\vec{z_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo infine la matrice M,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si può facilmente verificare che

$$A = M \cdot J \cdot M^{-1} \checkmark$$

1.9 Alcune proprietà interessanti

In questa sezione studiamo in dettagli alcune proprietà interessanti, alcune delle quali saranno fondamentali nelle applicazioni del prossimo capitolo.

1.9.1 Regole del determinante e della traccia

Consideriamo una matrice A di dimensione $n \times n$ e indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i suoi n autovalori. Allora valgono le seguenti regole,

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n,$$

$$tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

A parole: il determinante di una matrice è uguale alla moltiplicazione dei suoi autovalori e la traccia[2] di una matrice è uguale alla somma dei suoi autovalori. La regola del determinante può essere dimostrata facilmente utilizzando il polinomio caratteristico della matrice A. Infatti sappiamo che, dati tutti gli autovalori di A, il polinomio caratteristico di A può essere scritto come

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda),$$

e quindi

$$\det(A) = P_A(0) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

Questa regola ha alcune interessanti conseguenze immediate:

- Una matrice che possiede almeno un autovalore zero ha sicuramente determinante zero, di conseguenza non è invertibile. Viceversa una matrice invertibile ha sicuramente tutti gli autovalori diversi da zero.
- La traccia di una matrice reale è un numero reale, questo significa che la somma delle parti immaginarie di eventuali autovalori complessi devono annullarsi.

Esempio 1.19 *Riprendendo la matrice dell'esempio 1.6 vediamo che la traccia è zero e la somma degli autovalori è effettivamente pari a* $-i+i = 0\checkmark$. *Il determinante della matrice è uguale a 1, e effettivamente* $i \cdot (-i) = -(-1) = 1\checkmark$.

1.9.2 Calcolo di A^k

In diverse applicazioni pratiche è importante essere in grado di calcolare delle potenze di matrici. La potenza A^k è definita solo per matrici quadrate ed è una generalizzazione diretta della potenza di un numero, in pratica per calcolare A^k bisogna calcolare il prodotto

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ volte}}.$$

[2] La traccia di una matrice quadrata A è definita come somma degli elementi sulla diagonale di A e viene indicata con $tr(A)$.

Ad eccezione di alcune matrici particolari, come ad esempio le matrici diagonali, calcolare la potenza di una matrice può risultare molto laborioso se non praticamente impossibile. Supponete ad esempio di dover calcolare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{100},$$

quanto tempo impieghereste (a mano beninteso ...)? Alla fine di questa sezione motiveremo e risolveremo questo esercizio in maniera molto semplice e veloce.

Supponiamo che la matrice A sia diagonalizzabile, ovvero che esistano due matrici Λ diagonale e S invertibile tali che

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

per calcolare A^k potremmo svolgere il seguente calcolo

$$\begin{aligned} A^k &= A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = \\ &= S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{=I} \Lambda S^{-1} \cdot \ldots \cdot S\Lambda S^{-1} \\ &= S \underbrace{\Lambda\Lambda \cdot \ldots \cdot \Lambda}_{k \text{ volte}} S^{-1} = \\ &= S\Lambda^k S^{-1}. \end{aligned}$$

Tutte le matrici S all'interno dell'espressione si annullano con le matrici S^{-1} e rimangono così solo la prima S e l'ultima S^{-1}. Calcolare A^k corrisponde quindi a calcolare $S\Lambda^k S^{-1}$, ma quest'ultima espressione è molto più semplice da calcolare della prima poichè per le matrici diagonali come Λ vale che

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

e quindi il calcolo di A^k si riduce al prodotto di sole tre matrici.

1.9.3 Esercizio risolto

Esercizio: data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dimostra che

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Soluzione: per incominciare è necessario diagonalizzare la matrice A. La matrice A è triangolare, quindi gli autovalori corrispondono agli elementi sulla diagonale di A, ovvero $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. I rispettivi autospazi possono essere calcolati molto semplicemente e sono dati da

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Possiamo quindi costruire la matrice Λ come

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e la matrice S come

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e a questo punto siamo pronti per calcolare A^k,

$$\begin{aligned} A^k &= S\Lambda^k S^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}. \checkmark \end{aligned}$$

Con questa formula saremmo in grado di calcolare molto velocemente qualsiasi potenza (ragionevole...) di A.

1.9.4 Esercizio risolto: la successione di Fibonacci

Esercizio: considera la successione di numeri naturali $F_0, F_1, F_2, \ldots$ definita ricorsivamente dalla formula

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{k+2} = F_{k+1} + F_k,\ \text{per ogni } k \geq 0.$$

I primi termini di questa successione sono

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots.$$

Questa successione viene detta *successione di Fibonacci*. Essa è particolarmente famosa poichè i suoi termini si ritrovano in una quantità incredibile di fenomeni naturali e umani. Per calcolare un numero di Fibonacci utilizzando la formula ricorsiva descritta sopra è necessario passare attraverso tutti i numeri di Fibonacci precedenti. L'obiettivo di questo esercizio è quello di ricavare una formula esplicita per tutti i numeri di Fibonacci.

Soluzione: definiamo la successione di vettori $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots$ dove

$$\vec{u}_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix},$$

utilizzando la formula ricorsiva della successione di Fibonacci è facile vedere che

$$\vec{u}_{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_k + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}_k,$$

e quindi, ricorsivamente,

$$\vec{u}_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se avessimo una formula esplicita per calcolare A^k potremmo calcolare in maniera esplicita anche $\vec{u}_k = A^k \vec{u}_0$ e quindi anche F_k. Per costruire in maniera esplicita A^k usiamo l'approccio descritto in questa sezione, calcoliamo per prima cosa gli autovalori di A, otteniamo

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Calcolando gli autospazi troviamo

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Possiamo costruire la matrice

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

e abbiamo così

$$A = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot S^{-1}.$$

A questo punto

$$A^k = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \cdot S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} & \lambda_1 \lambda_2^{k+1} - \lambda_2 \lambda_1^{k+1} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k & \lambda_1 \lambda_2^k - \lambda_2 \lambda_1^k \end{pmatrix}$$

e

$$\vec{u}_k = A^k \vec{u}_0 = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{pmatrix},$$

e quindi finalmente

$$F_k = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right),$$

la formula esplicita che stavamo cercando. È interessante notare che questa formula ha come risultato un numero intero per ogni $k \in \mathbb{N}$, il numero di Fibonacci appunto.

1.9.5 Il teorema di Cayley-Hamilton

Il teorema di Cayley-Hamilton afferma che, data una matrice quadrata qualsiasi A di dimensione $n \times n$ con polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$, vale

$$P_A(A) = 0.$$

Vediamo un esempio per capire meglio il teorema.

Esempio 1.20 *Il polinomio caratteristico della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

è dato da

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Questo polinomio può essere trasformato in un polinomio matriciale, ossia inserendo A al posto di Λ in questo polinomio ottengo,

$$\begin{aligned} P_A(A) &= A^2 - 3A + 2I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In questo senso $P_A(A) = 0$, 0 è da intendere come matrice!

Questo teorema viene utilizzato in particolare per esprimere potenze di A come combinazione lineare di potenze piccole di A. Il seguente esempio illustra questo tipo di applicazione.

Esempio 1.21 *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

e supponiamo di voler esprimere la matrice

$$B = A^5 - 3A^4 + 2A^2 + A - 4I,$$

come combinazione lineare di A^2, A e I. Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5,$$

sostituendo A a λ in $P_A(\lambda)$ nel senso del teorema di Cayley-Hamilton troviamo

$$-A^3 + 7A^2 - 11A + 5I = 0,$$

da cui segue che

$$A^3 = 7A^2 - 11A + 5I = 0,$$

e quindi

$$\begin{aligned} A^4 &= A \cdot A^3 = 7A^3 - 11A^2 + 5A = 38A^2 - 72A + 35I, \\ A^5 &= A \cdot A^4 = 38A^3 - 72A^2 + 35A = 194A^2 - 383A + 190I. \end{aligned}$$

Sostituendo A^3, A^4 e A^5 nell'equazione di B troviamo finalmente

$$B = 82A^2 - 166A + 81I.$$

1.9.6 Autovalori di A^k e A^{-1}

Consideriamo una matrice quadrata A di cui conosciamo un autovettore $\vec{x}$ relativo a un autovalore λ. Sappiamo che

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

se proviamo ora a moltiplicare A^k per $\vec{x}$ scopriamo una proprietà interessante,

$$\begin{aligned} A^k\vec{x} &= \underbrace{AA\dots A}_{k \text{ volte}}\vec{x} = \\ &= \underbrace{AA\dots A}_{k-1 \text{ volte}}\lambda\vec{x} = \\ &= \lambda\underbrace{AA\dots A}_{k-1 \text{ volte}}\vec{x} = \\ &= \dots \\ &= \lambda^k\vec{x}, \end{aligned}$$

quindi

$$A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x}.$$

Di conseguenza, data una matrice quadrata qualsiasi A con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e rispettivi autospazi, allora la matrice A^k ha autovalori $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ con i medesimi autospazi.

Una considerazione simile vale per anche per la matrice A^{-1}, infatti, se

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

e A è invertibile, allora moltiplicando l'equazione sopra a sinistra per A^{-1} e dividendo per λ otteniamo

$$\frac{1}{\lambda}\vec{x} = A^{-1}\vec{x} \Rightarrow A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x}.$$

Di conseguenza, data una matrice quadrata invertibile A con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e rispettivi autospazi, allora la matrice A^{-1} ha autovalori $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ con i medesimi autospazi.

1.9.7 L'esponenziale di matrici e^A

In analisi la funzione esponenziale e^x è definita come il risultato della somma infinita

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots,$$

dove il simbolo ! indica il prodotto fattoriale, ossia

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

In maniera analoga alla definizione di funzione esponenziale in analisi è possibile definire una funzione esponenziale per matrici. Con e^A si indica la matrice quadrata definita dalla sommatoria infinita

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots.$$

Questa sommatoria infinita è in generale molto difficile da calcolare. Di nuovo però la diagonalizzazione viene in nostro aiuto, supponiamo che la matrice A sia diagonalizzabile, allora sappiamo che esistono una matrice invertibile S e una matrice diagonale Λ tali che $A = S\Lambda S^{-1}$. Sostituendo questa espressione nella definizione di e^A e con un piccolo abuso di notazione otteniamo

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots = \\ &= I + S\Lambda S^{-1} + \frac{1}{2!}(S\Lambda S^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(S\Lambda S^{-1})^3 + \ldots = \\ &= I + S\Lambda S^{-1} + \frac{1}{2!}S\Lambda^2 S^{-1} + \frac{1}{3!}S\Lambda^3 S^{-1} + \ldots = \\ &= S(I + \Lambda + \frac{1}{2!}\Lambda^2 + \frac{1}{3!}\Lambda^3 + \ldots)S^{-1} = \\ &= Se^\Lambda S^{-1}. \end{aligned}$$

Quindi il problema di calcolare e^A si riduce al problema di calcolare e^Λ. Quest'ultimo esponenziale risulta molto semplice da calcolare grazie all'equazione della funzione esponenziale descritta all'inizio di questo paragrafo e alla facilità nel calcolo di Λ^k. Sappiamo infatti che

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

e quindi, utilizzando la definizione di funzione esponenziale,

$$\begin{aligned}
e^\Lambda &= I + \Lambda + \frac{1}{2!}\Lambda^2 + \ldots = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \ldots = \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 + \ldots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 + \ldots \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza abbiamo che

$$e^A = S \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot S^{-1}.$$

Esempio 1.22 *Consideriamo nuovamente la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dell'esercizio risolto a pagina 32. Sappiamo che $A = S\Lambda S^{-1}$, dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo calcolare immediatamente e^A, otteniamo,

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

1.10 Calcolo matriciale in Matlab

Matlab è un ottimo programma per lavorare con le matrici, in questa breve sezione illustriamo in ordine sparso i comandi per eseguire le principali operazioni matriciali. Conoscendo questi comandi, potrete verificare autonomamente la correttezza di molti degli esercizi della prossima sezione.

Definizione di una matrice: la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

è definita dal comando $A = [1, 1; -2, 3; 0, 1]$, dove al posto delle virgole avremmo potuto inserire degli spazi. In generale, bisogna assegnare un nome alla matrice, in modo che venga memorizzata e racchiudere i suoi elementi tra parentesi quadre. La matrice si scrive riga per riga, per separare gli elementi della stessa riga si usa una virgola o uno spazio, per andare a capo si usa il punto e virgola. Se non si desidera che Matlab stampi la matrice sullo schermo, basta aggiungere un punto e virgola dopo la parentesi quadra di chiusura. Questo comando è valido per qualsiasi funzione di Matlab.

Matrici particolari: il comando $eye(n)$ definisce una matrice identità di dimensione $n \times n$. I comandi $ones(m, n)$, rispettivamente $zeros(m, n)$, generano una matrice $m \times n$ tutta di uni, rispettivamente tutta nulla.

Matrici casuali e particolari: il comando $magic(n)$ genera una matrice magica di dimensione $n \times n$. Il comando $rand(m, n)$ genera una matrice di numeri casuali tra zero e uno di dimensione $m \times n$.

Estrazione e definizione di parti di matrice: consideriamo la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con il comando $B = triu(A)$ si ottiene la matrice,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ossia la parte triangolare superiore di A. Con il comando $B = tril(A)$ si otiene la matrice,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

ossia la parte triangolare inferiore di A. Con il comando $B = diag(A)$ si ottiene un vettore colonna contenente la diagonale di A. Viceversa calcolando $B = diag(v)$ dove v è un vettore colonna (o riga) si ottiene una matrice diagonale con come diagonale il vettore v. Con il comando $B = diag(diag(A))$ otteniamo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perché? Con il comando $B = A(2:3, 2:4)$ otteniamo la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Come funziona questo comando? Con il comando $b = A(2,3)$ otteniamo come risultato $b = 1$, in generale con $A(i,j)$ richiamiamo l'elemento alla riga i e colonna j, se vogliamo estrarre tutta la i'esima riga si può usare il comando $A(i,:)$, se vogliamo la j'esima colonna il comando $A(:,j)$. Per modificare parti di matrice, basta porre i comandi visti sopra uguali alla parte di matrice che ci interessa, ad esempio assegnando $A(1:2, 1:2) = [2,2;1,1]$ otteniamo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operazioni elementari con matrici: per eseguire le operazioni elementari tra matrici vengono utilizzati gli stessi comandi utilizzati per i numeri. Date due matrici A e B di medesima dimensione la loro somma si calcola con il comando $A + B$, la sottrazione con $A - B$. Per moltiplicare una matrice A per un numero c si può utilizzare il comando $c * A$ o $A * c$. Per calcolare la trasposta di una matrice A si usa il comando A'. Per moltiplicare due matrici A e B di dimensione opportuna tra loro si utilizza il comando $A * B$. Per elevare una matrice quadrata A a una data potenza k si usa il comando $A\hat{}k$. Volendo invece elevare a una data potenza ogni singolo elemento di una matrice si utilizza il comando $A.\hat{}k$. L'esponenziale e^A di una matrice A viene calcolato con il comando $expm(A)$.

Inversa di una matrice: per calcolare l'inversa di una matrice A si utilizza il comando $inv(A)$.

Autovalori e autovettori: per calcolare gli autovalori di una matrice A si usa il comando $eig(A)$; lo stesso comando viene utilizzato per calcolare anche gli autospazi: in questo caso, calcolando $[S, L] = eig(A)$ otteniamo le matrici S e L necessarie per la diagonalizzazione della matrice A, da cui possiamo ricavare gli autospazi. La matrice S solitamente non ha un aspetto molto gradevole perché Matlab la costruisce in modo che ogni vettore abbia modulo 1. Per verificare che una matrice sia veramente diagonalizzabile bisogna verificare che la matrice S sia tale che $\det(S) \neq 0$.

Il determinante di una matrice: il determinante di una matrice quadrata A viene calcolato con il comando $\det(A)$.

Risoluzione di sistemi: data una matrice A di dimensione qualsiasi, per calcolarne la reduced row echelon form (RREF), in italiano la forma a scalini ridotta, si usa il comando $rref(A)$. Il comando $Null(A)$ fornisce una base del nucleo di A ($Ker(A)$). Per sistemi quadrati del tipo $A\vec{x} = \vec{b}$ si può trovare una soluzione con il comando $A\backslash\vec{b}$.

Capitolo 2

Applicazioni

2.1 Norme matriciali e condizione di una matrice

2.1.1 Norme vettoriali

Dato un vettore $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ si indica con $\|\vec{x}\|$ la *norma* del vettore $\vec{x}$. Una *norma vettoriale* è una funzione che associa a un vettore $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ un numero $\|\vec{x}\| \in \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\|\vec{x}\| \geq 0$ per ogni $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$,
- $\|\vec{x}\| = 0$ se e solo se $\vec{x} = \vec{0}$,
- $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$,
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ (disuguaglianza triangolare).

Il simbolo $| \cdot |$ indica il modulo di un numero complesso. Se lavoriamo con vettori reali $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ allora $| \cdot |$ indica semplicemente il valore assoluto (che è il modulo di un numero reale...). Intuitivamente un norma viene utilizzata per misurare in un certo senso la "grandezza" del vettore. Esistono diversi tipi di norme che mettono in evidenza diversi aspetti del vettore considerato. Passiamo in rassegna le norme più importanti e usate:

2.1.1.1 La norma $\| \cdot \|_p$

Viene chiamata anche norma L^p. Dato un vettore $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ la norma $\|\vec{x}\|_p$ è definita come la radice p-esima della somma dei moduli elevati a p delle singole componenti del vettore, ossia

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p}.$$

2.1.1.2 La norma $\| \cdot \|_1$

Viene chiamata anche norma L^1. Dato un vettore $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ la norma $\|\vec{x}\|_1$ è definita come somma dei moduli delle singole componenti del vettore, ossia

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|.$$

Per un vettore reale $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ la norma $\|\vec{x}\|_1$ corrisponde alla somma dei valori assoluti delle singole componenti.

2.1.1.3 La norma $\|\cdot\|_2$

Viene chiamata anche norma L^2 o *norma euclidea.* Dato un vettore $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ la norma $\|\vec{x}\|_2$ è definita come radice quadrata della somma dei moduli al quadrato delle singole componenti del vettore, ossia

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}.$$

Per un vettore reale $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ la norma $\|\vec{x}\|_2$ corrisponde alla lunghezza (o modulo) del vettore e può essere calcolata semplicemente senza far uso dei valori assoluti,

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

2.1.1.4 La norma $\|\cdot\|_\infty$

Viene chiamata anche norma L^∞. Dato un vettore $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ la norma $\|\vec{x}\|_\infty$ è definita come massimo modulo presente tra le singole componenti del vettore, ossia

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Per un vettore reale $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ la norma $\|\vec{x}\|_\infty$ corrisponde al valore assoluto più alto tra le singole componenti del vettore.

Esempio 2.1 *Consideriamo il vettore*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

i valori delle tre norme descritte in precedenza sono

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_1 &= |-1| + |3| + |-4| + |2| = 10, \\ \|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{30} \cong 5.48, \\ \|\vec{x}\|_\infty &= \max(|-1|, |3|, |-4|, |2|) = |-4| = 4. \end{aligned}$$

Come potevamo aspettarci le diverse norme danno risultati differenti, tutte però soddisfano le proprietà descritte all'inizio di questo paragrafo.

2.1.2 Norme matriciali

L'idea delle norme matriciali è quella di generalizzare l'idea di norma vettoriale alle matrici. Le norme di matrici vengono costruite direttamente a partire dalle norme vettoriali. Esse possiedono le medesime proprietà delle norme vettoriali e soddisfano inoltre alcune proprietà legate al prodotto di matrici. Vediamo per incominciare quali proprietà deve soddisfare un norma matriciale.

Definizione 2.1 *Una* norma matriciale $\|\cdot\|$ *è una funzione (o meglio un* operatore*) che associa a una matrice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *un numero* $\|A\| \in \mathbb{R}$ *tale che,*

- $\|A\| \geq 0$ *per ogni* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*,*
- $\|A\| = 0$ *se e solo se* $A = 0$ *(intesa come matrice nulla),*
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{C}$*,*
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *per ogni* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$*,*

e tale che

- $\|A\vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$ *per ogni* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *e ogni* $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$*,*
- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ *per ogni* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$*.*

La definizione più naturale che si può fare di norma matriciale alla luce delle proprietà che devono essere soddisfatte è la seguente,

Definizione 2.2 *Data una qualsiasi norma vettoriale* $\|\cdot\|$*, possiamo definire la norma matriciale* $\|A\|$ *come massimo del rapporto tra le norme vettoriali* $\|A\vec{x}\|$ *e* $\|\vec{x}\|$*, ossia*

$$\|A\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}. \tag{2.1}$$

Le prime quattro proprietà che devono essere soddisfatte da una norma matriciale sono automaticamente soddisfatte visto che partiamo da una norma vettoriale. Le ultime due proprietà possono essere verificate molto semplicemente. Infatti, se

$$\|A\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|},$$

allora

$$\|A\| \geq \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|},$$

per ogni $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ e quindi

$$\|A\|\|\vec{x}\| \geq \|A\vec{x}\|.$$

Analogamente, utilizzando al precedente proprietà,

$$\begin{aligned}
\|AB\| &= \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|AB\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \\
&\leq \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\|\|B\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \\
&= \|A\| \cdot \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|B\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \\
&= \|A\|\|B\|
\end{aligned}$$

e quindi

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Attenzione! Da questo momento ci occupiamo esclusivamente della norma $\|\cdot\|_2$ che è sicuramente la più utilizzata in pratica e la più importante. Per semplicità faremo riferimento pure solo a vettori e matrici reali, anche se le proprietà che vedremo valgono indistintamente anche per matrici e vettori complessi.

2.1.3 La norma matriciale euclidea

La norma matriciale euclidea $\|A\|_2$, definita da

$$\|A\|_2 = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2},$$

descrive, in pratica, il rapporto massimo tra la lunghezza dell'immagine di un vettore attraverso l'applicazione lineare descritta da A e la lunghezza del vettore stesso. Vediamo di seguito alcuni esempi per assumere un po' di familiarità con il nuovo concetto.

Norma euclidea della matrice identità: la matrice identità $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ moltiplicata per un vettore qualsiasi $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lascia il vettore invariato, ossia

$$I\vec{x} = \vec{x},$$

di conseguenza

$$\|I\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2,$$

e

$$\|I\|_2 = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|I\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} = 1,$$

e quindi

$$\|I\|_2 = 1.$$

Da notare che la norma di I è uguale a uno per qualsiasi norma matriciale definita come in (2.1).

Norma euclidea di una matrice ortogonale: una matrice ortogonale $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice tale che $Q^T = Q^{-1}$. Le applicazioni lineari associate a matrici ortogonali soddisfano la seguente importante proprietà:

$$\|Q\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2,$$

per ogni $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Quindi anche per tutte le matrici ortogonali vale

$$\|Q\|_2 = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|Q\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} = 1,$$

e quindi

$$\|Q\|_2 = 1.$$

Norma euclidea di una matrice simmetrica: sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice simmetrica e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i suoi autovalori. Dato che A è una matrice reale automaticamente tutti i suoi autovalori sono numeri reali. Si può dimostrare che la norma $\|A\|_2$ è data dall'autovalore con il valore assoluto più alto, ossia

$$\|A\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|.$$

Esempio 2.2 *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A possiede gli autovalori $\lambda_1 = -3$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica 1. L'autovalore con il valore assoluto più alto è $\lambda_1 = -3$ e quindi

$$\|A\|_2 = |-3| = 3.$$

Norma euclidea di una matrice non simmetrica: sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice non simmetrica e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora la regola vista per le matrici simmetriche non vale più. In particolare, può capitare che una matrice abbia autovalori piccoli in valore assoluto e ciononostante una norma $\|A\|_2$ grande. Questo effetto è particolarmente vistoso nel seguente esempio.

Esempio 2.3 *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A possiede l'autovalore $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica 2. Per la norma abbiamo però,

$$\|A\|_2 = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} = 2.$$

Il massimo del rapporto viene raggiunto ad esempio dal vettore

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che ha $\|\vec{x}\|_2 = 1$ *e* $\|A\vec{x}\|_2 = 2$.

2.1.4 Calcolo della norma euclidea per matrici qualsiasi

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice qualsiasi e siano $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gli autovalori della matrice $A^T A$. Allora vale che

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} \mu_i},$$

o rispettivamente

$$\|A\|_2^2 = \max_{1\leq i\leq n} \mu_i.$$

Esempio 2.4 *Riprendendo la matrice* A *dello esempio precedente, vediamo che*

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

è una matrice diagonale con autovalori $\mu_1 = 0$ *e* $\mu_2 = 4$, *quindi*

$$\|A\|_2 = \sqrt{4} = 2.\checkmark$$

Dimostrazione della regola generale: è facile verificare che

$$\|\vec{x}\|_2^2 = \vec{x}^T \vec{x},$$

e analogamente

$$\|A\vec{x}\|_2^2 = \vec{x}^T A^T A\vec{x}.$$

Da ciò segue che

$$\|A\|_2^2 = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_2^2}{\|\vec{x}\|_2^2} = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\vec{x}^T A^T A\vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}}.$$

La matrice $A^T A$ è sempre simmetrica, infatti $(A^T A)^T = A^T(A^T)^T = A^T A$, quindi possiede una base ortogonale di autovettori. Inoltre si può dimostrare che tutti gli autovalori di $A^T A$ sono positivi. Indichiamo con $\vec{q_1}, \ldots, \vec{q_n}$ autovettori relativi ai diversi autovalori $\mu_1, \ldots, \mu_n$ di $A^T A$ tutti ortogonali tra loro e di lunghezza uno. Visto che i vettori $\vec{q_1}, \ldots, \vec{q_n}$ formano una base di $\mathbb{R}^n$, ogni vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori della base, possiamo scrivere

$$\vec{x} = c_1\vec{q_1} + \ldots + c_n\vec{q_n}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{\vec{x}^T A^T A\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}} &= \frac{(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})^T A^T A(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})}{(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})^T(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})} = \\ &= \frac{(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})^T(c_1A^TA\vec{q_1}+\ldots+c_nA^TA\vec{q_n})}{(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})^T(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})} = \\ &= \frac{(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})^T(c_1\mu_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\mu_n\vec{q_n})}{(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})^T(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})} = \\ &= \frac{(c_1\vec{q_1}^T+\ldots+c_n\vec{q_n}^T)(c_1\mu_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\mu_n\vec{q_n})}{(c_1\vec{q_1}^T+\ldots+c_n\vec{q_n}^T)(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})},\end{aligned}$$

e sapendo che tutti i vettori $\vec{q_i}$ sono ortogonali tra loro e di lunghezza uno, sappiamo che $\vec{q_j}^T\vec{q_i} = 0$ se $i \neq j$ e $\vec{q_i}^T\vec{q_i} = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, quindi

$$\begin{aligned}\frac{\vec{x}^T A^T A\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}} &= \frac{(c_1\vec{q_1}^T+\ldots+c_n\vec{q_n}^T)(c_1\mu_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\mu_n\vec{q_n})}{(c_1\vec{q_1}^T+\ldots+c_n\vec{q_n}^T)(c_1\vec{q_1}+\ldots+c_n\vec{q_n})} = \\ &= \frac{c_1^2\mu_1+\ldots+c_n^2\mu_n}{c_1^2+\ldots+c_n^2}.\end{aligned}$$

È evidente che il massimo di quest'ultima espressione è raggiunto se $\vec{x}$ corrisponde all'autovettore corrispondente all'autovalore massimo, ed è in questo caso pari a $\max_{1\leq i\leq n}\mu_i$.

Norma euclidea della matrice inversa: per definizione, data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la norma della matrice inversa $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è

$$\|A^{-1}\|_2 = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A^{-1}\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2}.$$

Sostituendo $\vec{y} = A^{-1}\vec{x}$ al posto di $\vec{x}$ otteniamo

$$\|A^{-1}\|_2 = \max_{\vec{y}\neq\vec{0}} \frac{\|\vec{y}\|_2}{\|A\vec{y}\|_2},$$

seguendo un argomento analogo alla dimostrazione precedente, e indicando ancora con $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gli autovalori di A^TA, possiamo verificare quindi che

$$\|A^{-1}\|_2^2 = \max_{\vec{y}\neq\vec{0}} \frac{\vec{y}^T\vec{y}}{\vec{y}^TA^TA\vec{y}} = \frac{1}{\min_{1\leq i\leq n}\mu_i}.$$

2.2 Una prima applicazione: la condizione di una matrice

Possiamo ora passare alla prima applicazione pratica dei concetti visti finora. Il problema è molto semplice: vogliamo risolvere il sistema di equazioni $n \times n$ dato da

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Sappiamo però che a causa di errori di misurazione e arrotondamenti non siamo in grado di utilizzare il vero vettore di termini $\vec{b}$ ma solo un'approssimazione, data da $\vec{b} + \vec{\Delta b}$, dove il vettore $\vec{\Delta b}$ rappresenta la somma degli errori commessi nella misurazione di $\vec{b}$. Come conseguenza sappiamo che la soluzione che calcoleremo non sarà la vera soluzione $\vec{x}$, bensì una soluzione approssimata $\vec{x} + \vec{\Delta x}$. Il nostro obiettivo è quello di studiare il rapporto tra i due errori relativi che si commettono nella risoluzione di questo problema, l'errore relativo a priori

$$\frac{\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec{b}\|},$$

e l'errore relativo a posteriori

$$\frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec{x}\|},$$

dove $\|\cdot\|$ indica la norma $\|\cdot\|_2$ (tralasciamo il 2 per non complicare eccessivamente la notazione). In particolare vogliamo avere un'idea di che influsso ha un errore nei dati di partenza ($\vec{b}$) sulla precisione del risultato finale ($\vec{x}$); se l'errore tende a espandersi e di quanto o se piuttosto l'errore tende ad attenuarsi. In generale, questo aspetto di un problema qualsiasi caratterizzato da un input e un output viene detto *condizione* del problema, in particolare un problema è detto *mal-condizionato* se piccoli errori nell'input possono portare a grandi errori nell'output. Questo tipo di analisi è chiaramente molto importante quando si lavora con dei calcolatori per via degli errori di approssimazione connessi all'uso di numeri macchina.

Concentriamoci ora sul problema che abbiamo posto inizialmente. Sappiamo che $A\vec{x} = \vec{b}$, e $A(\vec{x}+\vec{\Delta x}) = \vec{b}+\vec{\Delta b}$, sottraendo la prima equazione dalla seconda troviamo che $A \cdot \vec{\Delta x} = \vec{\Delta b}$, e quindi

$$\vec{\Delta x} = A^{-1} \cdot \vec{\Delta b}.$$

Utilizzando le proprietà delle norme di matrici abbiamo che

$$\|\vec{\Delta x}\| = \|A^{-1} \cdot \vec{\Delta b}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\vec{\Delta b}\|,$$

allo stesso modo sappiamo che

$$\|\vec{b}\| = \|A \cdot \vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|,$$

moltiplicando le due parti delle due espressioni abbiamo quindi che

$$\|\vec{\Delta x}\| \cdot \|\vec{b}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\vec{\Delta b}\| \cdot \|A\| \cdot \|\vec{x}\|,$$

e dividendo quest'ultima espressione per $\|\vec{x}\|$ e $\|\vec{b}\|$ otteniamo

$$\frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Vediamo che il numero

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

fornisce un limite massimo per il rapporto tra l'errore relativo a priori e l'errore a posteriori.

Definizione 2.3 *Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile, il numero*

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

è detto condizione della matrice A.

Calcolo della condizione di una matrice Per calcolare la condizione di una matrice A dobbiamo calcolare $\|A\|$ e $\|A^{-1}\|$. Indicando con $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gli autovalori della matrice $A^T A$, sappiamo che

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \mu_i},$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i}},$$

e quindi

$$\kappa(A) = \frac{\sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \mu_i}}{\sqrt{\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i}} = \sqrt{\frac{\max_{1 \leq i \leq n} \mu_i}{\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i}}.$$

2.2.1 Esercizio risolto

Esercizio: Considera le seguenti matrici e vettori

$$A = \begin{pmatrix} 137 & 100 \\ 100 & 73 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 137 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 137 \\ 99.99 \end{pmatrix}.$$

1. Risolvi i sistemi $A\vec{x} = \vec{b}$ e $A\vec{y} = \vec{c}$.

2. Calcola la condizione $\kappa(A)$ della matrice A.

3. Interpreta i risultati.

Soluzione:

$$\left.\begin{array}{rr|r} 137 & 100 & 137 \\ 100 & 73 & 100 \end{array}\right. \xrightarrow{RREF} \left.\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

e quindi

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{rr|r} 137 & 100 & 137 \\ 100 & 73 & 99.99 \end{array}\right. \xrightarrow{RREF} \left.\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \text{-1.37} \end{array}\right.$$

e quindi

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.37 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che una minima variazione nel vettore dei termini noti porta a due soluzioni completamente differenti. A questo punto è interessante vedere se la condizione della matrice A avrebbe potuto avvisarci di questo fatto. La matrice

$$A^T A = \begin{pmatrix} 137 & 100 \\ 100 & 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 137 & 100 \\ 100 & 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28769 & 21000 \\ 21000 & 15329 \end{pmatrix},$$

possiede gli autovalori $\mu_1 = 0.00000000226768$ e $\mu_2 = 4.40979999773232$, quindi la condizione è data da

$$\kappa(A) = \sqrt{\frac{4.40979999773232}{0.00000000226768}} \cong \sqrt{1.94 \cdot 10^9} \cong 44'098.$$

La condizione della matrice è enorme, la matrice A è molto mal condizionata. Con una matrice simile possiamo aspettarci che errori minimi nel vettore dei termini noti porti a errori molto grossolani nella soluzione.

Osservazione 2.1 *Le matrici mal condizionate spesso possiedono insieme autovalori molto piccoli a autovalori molto grandi. Se la matrice possiede autovalori molto vicini a zero si dice in pratica che la matrice è "quasi" singolare*[1]*. Se svolgiamo i nostri calcoli con il calcolatore, una matrice quasi singolare può creare gli stessi problemi di calcolo di una matrice singolare. Viceversa, se calcoliamo i nostri autovalori con un calcolatore, può anche darsi che gli autovalori che risultano molto vicini a zero fossero in realtà uguali a zero e che la minima differenza sia frutto di un errore di approssimazione. In generale, se una matrice A possiede una condizione molto grande, dobbiamo prestare molta attenzione ai risultati forniti da un calcolatore su problemi concernenti A.*

2.3 Risoluzione di sistemi di equazioni differenziali lineari

In questa sezione presentiamo un'applicazione molto importante ed interessante del calcolo con autovalori ed autovettori. L'idea è quella di risolvere particolari sistemi di equazioni differenziali lineari con l'aiuto del calcolo matriciale. Prima di studiare questi sistemi però dobbiamo riprendere alcuni concetti dal corso di analisi.

[1] È detta *singolare* una matrice non invertibile. Come abbiamo visto in precedenza una matrice con almeno un autovalore uguale a zero possiede determinante zero e quindi è singolare.

2.3.1 Equazioni differenziali lineari di primo ordine a coefficienti costanti omogenee

Consideriamo la seguente equazione differenziale,

$$u'(t) = \lambda u(t).$$

Risolvere un'equazione differenziale significa trovare una funzione $u(t)$, o una famiglia di funzioni a cui $u(t)$ sicuramente appartiene, in modo che la derivata di $u(t)$ soddisfi l'equazione data. Nel nostro caso è facile vedere che se la derivata di $u(t)$ è uguale a $\lambda u(t)$, allora $u(t)$ deve essere una funzione esponenziale, e quindi,

$$u(t) = C \cdot e^{\lambda t},$$

infatti con questa funzione,

$$u'(t) = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = \lambda \cdot C \cdot e^{\lambda t} = \lambda u(t).$$

In questo caso non abbiamo trovato un'unica soluzione ma una famiglia di funzioni, infatti il parametro C può essere scelto a piacimento. Per fissare il valore di C dobbiamo porre una condizione supplementare. Vediamo che

$$u(0) = C \cdot e^{\lambda 0} = C \cdot 1 = C,$$

e quindi per fissare il valore di C basta fissare una *condizione iniziale* del tipo

$$u(0) = u_0,$$

a questo punto l'equazione differenziale avrebbe un'unica soluzione

$$u(t) = u_0 \cdot e^{\lambda t}.$$

Prima di procedere, proviamo a capire meglio il titolo di questo paragrafo, in particolare per capire cosa significano per un'equazione differenziale i termini, *lineare*, *di primo ordine*, *a coefficienti costanti* e *omogenea.*

Equazione differenziale lineare: un'equazione differenziale è detta *lineare* se, date due soluzioni qualsiasi $u(t)$ e $v(t)$ dell'equazione, allora anche una loro combinazione lineare qualsiasi $c_1 u(t) + c_2 v(t)$ è soluzione dell'equazione. La nostra equazione è lineare, infatti la prima derivata è un operatore lineare, nel senso che

$$(c_1 u(t) + c_2 v(t))' = c_1 u'(t) + c_2 v'(t),$$

e quindi, se $u(t)$ e $v(t)$ sono soluzioni dell'equazione, sappiamo che $u'(t) = \lambda u(t)$ e $v'(t) = \lambda v(t)$, e

$$(c_1 u(t) + c_2 v(t))' = c_1 u'(t) + c_2 v'(t) = c_1 \lambda u(t) + c_2 \lambda v(t) = \lambda(c_1 u(t) + c_2 v(t)).$$

Quindi anche $c_1 u(t) + c_2 v(t)$ è una soluzione dell'equazione. Un esempio di equazione non lineare simile alla nostra potrebbe invece essere

$$u'(t) \cdot u(t) = \lambda,$$

in questo caso la proprietà di linearità della derivata non implica la linearità dell'equazione. Come possiamo riconoscere a colpo d'occhio che un'equazione differenziale è lineare?

Equazione di primo ordine: un'equazione differenziale di *primo ordine* è semplicemente un'equazione differenziale che contiene $u(t)$ e la sua prima derivata $u'(t)$. In generale un'equazione di *n-esimo ordine* è un'equazione differenziale che contiene la n-esima derivata di $u(t)$ ed eventualmente altre derivate di ordine inferiore. Ad esempio l'equazione differenziale

$$u''(t) = \lambda u(t),$$

è un'equazione di secondo ordine.

Equazione a coefficienti costanti: questo attributo afferma semplicemente che i coefficienti che moltiplicano $u(t)$ e le sue derivate, sono delle costanti che non dipendono da t. Ad esempio l'equazione

$$u'(t) = \lambda \cdot t \cdot u(t),$$

è un'equazione differenziale lineare ma non ha coefficienti costanti, poiché il coefficiente $\lambda \cdot t$ dipende chiaramente da t.

Equazione differenziale omogenea: Spesso le equazioni differenziali contengono termini che non contengono nè la funzione $u(t)$ nè una sua derivata, ad esempio il termine $\cos(t)$ nell'equazione

$$u'(t) = \lambda u(t) + \cos(t).$$

Questi termini vengono detti *inomogeneità* dell'equazione differenziale. Un'equazione omogenea è un'equazione che non contiene inomogeneità. Tipicamente un'equazione omogenea è più semplice da risolvere di un'equazione inomogenea: addirittura molte equazioni differenziali inomogenee non possono essere risolte in maniera esatta ma solo approssimata tramite algoritmi numerici.

2.3.2 Sistemi di equazioni differenziali lineari di primo ordine

Introduciamo ora il problema che vogliamo risolvere con l'aiuto del calcolo matriciale. In questa sezione consideriamo dei sistemi di equazioni differenziali lineari, di primo ordine, a coefficienti costanti e omogenei. In pratica la nostra incognita non è più una singola funzione bensì un vettore $\vec{u}(t)$ di forma

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

La prima derivata di $\vec{u}(t)$, indicata con $\overrightarrow{u'}(t)$, è definita allora da

$$\overrightarrow{u'}(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{pmatrix}.$$

In questo caso, un sistema di equazioni differenziali lineari di primo ordine, a coefficienti costanti, omogeneo, ha sempre la forma

$$\begin{cases} u_1'(t) = a_{11}u_1(t) + \ldots + a_{1n}u_n(t) \\ u_2'(t) = a_{21}u_1(t) + \ldots + a_{2n}u_n(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) = a_{n1}u_1(t) + \ldots + a_{nn}u_n(t) \end{cases}$$

Una *condizione iniziale* per questo sistema avrebbe la forma,

$$\begin{cases} u_1(0) = u_{11} \\ u_2(0) = u_{21} \\ \vdots \\ u_n(0) = u_{n1} \end{cases}$$

Definendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix},$$

possiamo esprimere il nostro sistema in maniera sintetica come

$$\overrightarrow{u'}(t) = A\vec{u}(t),$$

con condizione iniziale

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0.$$

Questo è il tipo di sistemi che vogliamo risolvere con l'aiuto dell'algebra lineare.

Esempio 2.5 *Consideriamo il sistema*

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = u_1(t) \end{cases};$$

questo può essere scritto come

$$\overrightarrow{u'}(t) = A\vec{u}(t),$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Più in avanti risolveremo questo sistema e anche altri più complessi.

2.3.3 Un caso semplice: matrice dei coefficienti diagonale

Supponiamo che la matrice dei coefficienti del sistema $\overrightarrow{u'}(t) = D\vec{u}(t)$ sia una matrice diagonale D, ossia

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

In questo caso il sistema è molto semplice da risolvere, infatti ogni funzione $u_i(t)$ è indipendente dalle altre e quindi possiamo risolvere ogni equazione del sistema singolarmente:

$$\begin{cases} u_1'(t) = d_{11}u_1(t) \;\Rightarrow\; u_1(t) = C_1 e^{d_{11}t} \\ u_2'(t) = d_{22}u_2(t) \;\Rightarrow\; u_2(t) = C_2 e^{d_{22}t} \\ \vdots \\ u_n'(t) = d_{nn}u_n(t) \;\Rightarrow\; u_n(t) = C_n e^{d_{nn}t} \end{cases}$$

I coefficienti $C_1, \ldots, C_n$ possono essere scelti liberamente, ma se il sistema pone anche una condizione iniziale

$$\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix},$$

allora vale

$$C_1 = u_{11},\ C_2 = u_{21},\ \ldots,\ C_n = u_{n1}.$$

Esempio 2.6 *Consideriamo il sistema*

$$\begin{cases} u_1'(t) = 2 \cdot u_1(t) \\ u_2'(t) = -u_2(t) \end{cases}$$

con condizioni iniziali $u_1(0) = -3$ *e* $u_2(0) = 3$*. Il sistema può essere scritto come*

$$\overrightarrow{u'}(t) = D\vec{u}(t),$$

dove

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La soluzione di questo sistema è data quindi da

$$u_1(t) = -3 \cdot e^{2t}, \quad u_2(t) = 3 \cdot e^{-t}.$$

2.3.4 Il metodo generale: cambio di variabili e diagonalizzazione

L'idea alla base della risoluzione di un sistema generico

$$\overrightarrow{u'}(t) = A\vec{u}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0$$

è quella di trasformare il sistema in un sistema equivalente

$$v'\vec{(t)} = D\vec{v}(t), \quad v\vec{(0)} = \vec{v_0}$$

dove $\vec{u}(t) = S \cdot \vec{v}(t)$ e $\vec{u}_0 = S \cdot \vec{v_0}$, con S matrice invertibile, e D è una matrice diagonale. Il secondo sistema può essere risolto molto semplicemente trovando $\vec{v}(t)$ e quindi la soluzione $\vec{u}(t)$ può essere ricostruita calcolando $\vec{u}(t) = S \cdot \vec{v}(t)$.

Grazie alla proprietà di linearità della prima derivata e del prodotto matriciale è facile verificare che da

$$\vec{u}(t) = S \cdot \vec{v}(t),$$

segue che

$$\overrightarrow{u'}(t) = S \cdot \overrightarrow{v'}(t).$$

Elaborando il sistema iniziale sostituendo $\vec{u}(t)$ con $\vec{v}(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u'}(t) &= A\vec{u}(t) \\ (S\vec{v}(t))' &= A(S\vec{v}(t)) \\ S\overrightarrow{v'}(t) &= AS\vec{v}(t) \\ \overrightarrow{v'}(t) &= S^{-1}AS\vec{v}(t), \end{aligned}$$

quindi il sistema ha la forma desiderata se la matrice

$$D = S^{-1}AS,$$

è una matrice diagonale, ovvero se

$$SDS^{-1} = A,$$

è una diagonalizzazione della matrice A. Quindi D non è nient'altro che la matrice diagonale Λ con gli autovalori di A sulla diagonale. A questo punto è chiaro come procedere per risolvere il sistema

$$\overrightarrow{u'}(t) = A\vec{u}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0.$$

- Diagonalizziamo la matrice A trovando la matrice invertibile S e la matrice diagonale Λ tali che $A = S\Lambda S^{-1}$.

- Risolviamo il sistema
$$\overrightarrow{v'}(t) = \Lambda \vec{v}(t), \quad v(\vec{0}) = \vec{v_0},$$
come visto nel paragrafo precedente, utilizzando condizioni iniziali
$$\vec{v}(0) = \vec{v_0} = S^{-1}\vec{u}_0.$$
- Calcoliamo $\vec{u}(t) = S \cdot \vec{v}(t)$.

Esempio 2.7 *Risolviamo il sistema*
$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = u_1(t) \end{cases},$$
con condizioni iniziali $u_1(0) = 2$, $u_2(0) = 4$. *Questo può essere scritto come*
$$\overrightarrow{u'}(t) = A\vec{u}(t),$$
dove
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Diagonalizziamo la matrice A *e troviamo*
$$S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$
Risolviamo quindi il sistema
$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix},$$
con condizioni iniziali
$$\begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
otteniamo così
$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix},$$
e quindi
$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - e^{-t} \\ 3e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.$$
Verifichiamo che la soluzione trovata è corretta:
$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 3e^t - (-e^{-t}) = 3e^t + e^{-t} = u_2(t)\checkmark \\ u_2'(t) &= 3e^t - e^{-t} = u_1(t)\checkmark \\ u_1(0) &= 3 - 1 = 2\checkmark \\ u_2(0) &= 3 + 1 = 4\checkmark \end{aligned}$$

La soluzione trovata soddisfa il nostro sistema e le condizioni iniziali ed è quindi corretta.

2.3.5 Soluzione con esponenziale di matrici

La soluzione del nostro sistema

$$\vec{u'}(t) = A\vec{u}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0,$$

può essere espressa in maniera ancora più semplice. Data la diagonalizzazione

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

è facile verificare che la soluzione del sistema

$$\vec{v'}(t) = \Lambda\vec{v}(t), \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0,$$

non è nient'altro che l'esponenziale di matrici

$$\vec{v}(t) = e^{\Lambda t} \cdot \vec{v}_0,$$

infatti, come abbiamo visto a pagina 37 ma sostituendo $\lambda_i \cdot t$ a λ_i, abbiamo

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Quindi la soluzione del nostro sistema può essere espressa come

$$\vec{u}(t) = S\vec{v}(t) = Se^{\Lambda t}\vec{v}_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}\vec{u}_0,$$

e visto che $Se^{\Lambda t}S^{-1} = e^{At}$ abbiamo

$$\vec{u}(t) = e^{At}\vec{u}_0.$$

La soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineare, omogeneo, a coefficienti costanti e di primo ordine, è un'immediata generalizzazione della soluzione per una singola equazione.

Esempio 2.8 *Risolviamo il sistema*

$$\begin{cases} u_1'(t) = 3u_1(t) + 4u_2(t) \\ u_2'(t) = 3u_1(t) + 2u_2(t) \end{cases},$$

con condizioni iniziali $u_1(0) = 6$, $u_2(0) = 1$. *Quindi*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizziamo la matrice A *e troviamo*

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= e^{At}\vec{u}_0 = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ -3/7 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4e^{6t} + 2e^{-t} \\ 3e^{6t} - 2e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esempio 2.9 *In questo esempio vogliamo considerare una matrice di coefficienti con autovalori complessi. Consideriamo il sistema*

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = -u_1(t) \end{cases},$$

con condizioni iniziali $u_1(0) = 2$, $u_2(0) = 4$. Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizziamo la matrice A e troviamo

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5i & 0.5 \\ -0.5i & 0.5 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5i & 0.5 \\ -0.5i & 0.5 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5i & 0.5 \\ -0.5i & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i \\ 2-i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{it} + ie^{it} \\ 2e^{-it} - ie^{-it} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2i(e^{it} - e^{-it}) + (e^{it} + e^{-it}) \\ 2(e^{it} + e^{-it}) + i(e^{it} - e^{-it}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sappiamo che

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t), \quad e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t),$$

e

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos(t), \quad e^{it} - e^{-it} = 2i\sin(t),$$

sostituendo queste formule nell'espressione sopra troviamo

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -2i(e^{it} - e^{-it}) + (e^{it} + e^{-it}) \\ 2(e^{it} + e^{-it}) + i(e^{it} - e^{-it}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sin(t) + 2\cos(t) \\ 4\cos(t) - 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

In conclusione possiamo affermare che non sussiste nessuna difficoltà particolare nel lavorare con autovalori complessi, se non una complessità di calcolo leggermente superiore rispetto al caso completamente reale. Interessante notare che la soluzione finale è comunque una funzione reale.

Osservazione 2.2 *L'approccio descritto fin qui naturalmente funziona solo se la matrice A del sistema*

$$\overrightarrow{u'}(t) = A\vec{u}(t),$$

è diagonalizzabile. Se non lo è, siamo costretti, per seguire un approccio simile, ad utilizzare la scomposizione di Jordan. In questo caso la soluzione diventa però più complessa e quindi non la trattiamo in dettaglio in queste dispense.

2.3.6 Il comportamento delle soluzioni per $t \to \infty$

La soluzione di un sistema di equazioni differenziali

$$\overrightarrow{u'}(t) = A\vec{u}(t),$$

con A diagonalizzabile ha sempre la forma

$$\vec{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{x_1} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\vec{x_n},$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono autovalori di A e $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n}$ autovettori relativi ai diversi autovalori. Quindi ogni componente della soluzione è sempre una combinazione lineare di funzioni $e^{\lambda t}$ dove $\lambda \in \mathbb{C}$.

Indichiamo con $Re\lambda$ e $Im\lambda$ rispettivamente la parte reale e immaginaria di λ, allora

$$\lambda = Re(\lambda) + i \cdot Im(\lambda),$$

e

$$e^{\lambda \cdot t} = e^{Re(\lambda)\cdot t} e^{i\cdot Im(\lambda)\cdot t} = e^{Re(\lambda)t}(\cos(Im(\lambda)\cdot t) + i\sin(Im(\lambda)\cdot t)).$$

Per $t \to \infty$ la funzione $e^{Re(\lambda)\cdot t}$ tende a infinito se $Re(\lambda) > 0$ e a zero se $Re(\lambda) < 0$, la funzione $\cos(Im(\lambda)\cdot t) + i\sin(Im(\lambda)\cdot t)$ invece ha sempre modulo 1. Quindi

- Se $Re(\lambda) > 0$, allora $e^{\lambda\cdot t} \to \infty$.

- Se $Re(\lambda) < 0$, allora $e^{\lambda \cdot t} \to 0$.
- Se $Re(\lambda) = 0$, allora $e^{\lambda \cdot t}$ continua ad oscillare all'infinito.

Questo fatto ci permette di trarre delle conclusioni interessanti anche sulla soluzione generale del nostro sistema:

- Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, rispettivamente sono tutti negativi se si tratta di autovalori reali, allora la soluzione $\vec{u}(t)$ del sistema tende a zero per $t \to \infty$.
- Se almeno un autovalore di A ha parte reale positiva, rispettivamente se almeno uno degli autovalori reali è positivo, allora la soluzione $\vec{u}(t)$ del sistema tende a infinito per $t \to \infty$.
- Se tutti gli autovalori della matrice sono puramente immaginari, allora la soluzione continua ad oscillare all'infinito.

Negli esercizi motiveremo meglio queste conclusioni e studieremo alcuni casi.

2.3.7 Un esempio fisico: pendoli accoppiati

Consideriamo un sistema formato da due pendoli identici tra loro accoppiati da una molla. I pendoli sono fissati a una corda di lunghezza L, hanno massa m e la molla che li collega possiede costante k. Indichiamo con ϕ_1, rispettivamente con ϕ_2, l'angolo formato dal pendolo 1, rispettivamente dal pendolo 2, rispetto alla posizione di riposo. Se i pendoli si muovono gli angoli sono funzioni del tempo, quindi $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$. Dalla fisica sappiamo che per i pendoli presi singolarmente (senza molla di collegamento) e per angoli piccoli valgono le equazioni del moto

$$\begin{cases} L^2 m \phi_1'' = -Lmg\phi_1 \\ L^2 m \phi_2'' = -Lmg\phi_2 \end{cases}$$

La molla di collegamento aggiunge un momento uguale, ma opposto nei due pendoli, dovuto alla forza della molla. Esso è rappresentato da un termine aggiuntivo nelle precedenti due equazioni, abbiamo

$$\begin{cases} L^2 m \phi_1'' = -Lmg\phi_1 - kL^2(\phi_1 - \phi_2) \\ L^2 m \phi_2'' = -Lmg\phi_2 + kL^2(\phi_1 - \phi_2) \end{cases}$$

Ora le due equazioni sono collegate tra di loro: le funzioni ϕ_1 e ϕ_2 sono contenute in entrambe le equazioni e quindi non possiamo più risolvere le equazioni singolarmente, dobbiamo risolvere un *sistema*. definiamo $\alpha = \frac{g}{L}$ e $\beta = \frac{k}{m}$, allora il nostro sistema può essere scritto come

$$\vec{\phi}'' = A\vec{\phi},$$

con

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \beta \\ \beta & -\alpha - \beta \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono dati $\lambda_1 = -\alpha$ e $\lambda_2 = -\alpha - 2\beta$, i relativi autospazi sono,

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Definiamo quindi la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e riscriviamo il sistema precedente sostituendo $\vec{\xi} = S^{-1} \cdot \vec{\phi}$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \xi_1'' = -\alpha\xi_1 \\ \xi_2'' = (-\alpha - 2\beta)\xi_2 \end{cases}$$

Il sistema può essere ora risolto risolvendo singolarmente le equazioni, abbiamo

$$\xi_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad \xi_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

dove $\omega_1 = \sqrt{-\alpha}$ e $\omega_2 = \sqrt{-\alpha - 2\beta}$. La soluzione generale è quindi

$$\vec{\phi} = S\vec{\xi} = \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}.$$

È interessante studiare più in dettaglio le due soluzioni fondamentali trovate. La soluzione corrispondente al primo autovettore, ossia

$$\phi_1 = \phi_2 = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

rappresenta una oscillazione sincrona e identica dei due pendoli, la molla non viene allungata o accorciata e non entra quindi in azione. Togliendola non cambierebbe nulla. La soluzione corrispondente al secondo autovettore è data da

$$\phi_1 = -\phi_2 = C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

i due pendoli si muovono simmetricamente in opposizione tra di loro. Il punto centrale della molla è fermo e potrebbe quindi essere fissato senza modificare il comportamento del sistema. La frequenza di oscillazione, ω_2, è superiore a quella dei singoli pendoli poiché la molla produce una forza di richiamo aggiuntiva. Per studiare questi e altri comportamenti di questo sistema si può utilizzare in internet la simulazione all'indirizzo `http://www.walter-fendt.de/ph14d/gekopendel.htm`.

Capitolo 3

Calcolo matriciale in grafica computerizzata

3.1 Introduzione

La grafica computerizzata manipola oggetti e immagini in due e tre dimensioni. Questi oggetti vengono mossi, ruotati, scalati e proiettati su piani bidimensionali, e poiché i punti degli oggetti vengono rappresentati attraverso dei vettori, tutte queste operazioni vengono svolte dal computer attraverso calcoli matriciali. In questo capitolo faremo riferimento a oggetti tridimensionali. Le principali trasformazioni che vengono svolte in grafica computerizzata sono le seguenti,

- **Traslazione:** tutti i punti di un oggetto, rispettivamente gli assi di riferimento, vengono spostati seguendo un vettore prefissato.
- **Deformazioni:** l'oggetto viene deformato moltiplicando le diverse coordinate per dei fattori c_1, c_2 e c_3. Se i tre fattori coincidono e sono uguali a un certo c, allora si parla di *ingrandimento* di fattore c.
- **Rotazioni:** l'oggetto viene ruotato di un certo angolo rispetto a un asse nello spazio passante o meno per l'origine.
- **Proiezioni:** l'oggetto tridimensionale viene proiettato su un piano nello spazio, passante o meno per l'origine, ad esempio per simulare un'ombra.

Il problema di queste trasformazioni è che non tutte sono trasformazioni lineari. Nel corso di algebra lineare I abbiamo verificato che le seguenti trasformazioni sono lineari:

- Le rotazioni rispetto a un asse nello spazio passante per l'origine,
- Le proiezioni su un piano passante per l'origine,
- Le omotetie con come centro di omotetia l'origine.

Tutte queste trasformazioni sono quindi esprimibili tramite un'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata a una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Per contro, non sono lineari le seguenti trasformazioni geometriche:

- Le traslazioni,
- Le rotazioni rispetto a un asse nello spazio **non** passante per l'origine,
- Le proiezioni su un piano **non** passante per l'origine,
- Le omotetie con come centro di omotetia un punto diverso dall'origine.

Ciò significa che tutte queste trasformazioni non sono esprimibili come applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata a una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Si può dimostrare che queste trasformazioni sono esprimibili solo come combinazione di traslazioni con applicazioni lineari. È evidente quindi che non è possibile esprimere tutte le trasformazioni geometriche necessarie alla grafica computerizzata tramite applicazioni lineari in $\mathbb{R}^3$.

In grafica computerizzata bisogna svolgere calcoli molto complessi e con un numero elevato di dati. Per rendere il più efficienti possibile i programmi di grafica si è quindi deciso di far capo, per esprimere le trasformazioni geometriche, a un solo tipo di operazione da ottimizzare al massimo e, in particolare, si è deciso di utilizzare solo prodotti matrice-vettore. Per poter esprimere in tal modo però anche le trasformazioni non lineari in $\mathbb{R}^3$ si è dovuto ricorrere a un espediente piuttosto geniale che è l'argomento principale di questo nostro capitolo: le *coordinate omogenee*.

3.2 Coordinate omogenee

L'idea principale delle coordinate omogenee è quella di esprimere tutte le trasformazioni geometriche necessarie alla grafica computerizzata non più come applicazioni lineari $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, bensì come applicazioni lineari $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. In particolare, se un punto ha le coordinate *standard*,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

allora lo stesso punto in coordinate *omogenee* viene espresso come,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il risultato stupefacente è che, con questo cambiamento di dimensione apparentemente banale, tutte le trasformazioni geometriche interessanti per la grafica computerizzata sono esprimibili tramite matrici 4×4.

Passiamo ora in rassegna le diverse trasformazioni geometriche incominciando dal caso più semplice e, assieme, più eclatante: la traslazione.

3.2.1 Traslazione

Una *traslazione* viene descritta da un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Essa consiste nel sommare a tutti i punti considerati il vettore $\vec{v}$. Una traslazione descrive lo spostamento un oggetto nello spazio, rispettivamente uno spostamento dell'origine del sistema di riferimento. In $\mathbb{R}^3$ l'operazione che viene svolta su un generico punto $\vec{x}$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \end{pmatrix}.$$

Sfortunatamente è abbastanza evidente che non esiste nessuna matrice in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ in grado di descrivere questa trasformazione che quindi non è lineare. Esprimendo la stessa situazione utilizzando le coordinate omogenee otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ma in questo caso vediamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ x_3 + v_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi con le coordinate omogenee è possibile esprimere le traslazioni tramite applicazioni lineari $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$!

3.2.2 Deformazione e ingrandimento

L'oggetto viene *deformato* moltiplicando le diverse coordinate per dei fattori c_1, c_2 e c_3. Se i tre fattori coincidono e sono uguali a un certo c, allora si parla di *ingrandimento* di fattore c. Possiamo esprimere questa trasformazione come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} c_1 \cdot x_1 \\ c_2 \cdot x_2 \\ c_3 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Questo tipo di trasformazione è già lineare in $\mathbb{R}^3$ ma, per poter uniformare tutte le trasformazioni, essa va espressa in coordinate omogenee, abbiamo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} c_1 \cdot x_1 \\ c_2 \cdot x_2 \\ c_3 \cdot x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nel caso di un ingrandimento di fattore c tutti i coefficienti coincidono e abbiamo dunque

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ c \cdot x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 3.1 *È necessario che tutte le trasformazioni siano espresse tramite matrici della medesima dimensione in modo da poterle combinare. Sia T una matrice di traslazione 4×4 e S una matrice di ingrandimento anche 4×4. Se volessimo traslare e quindi ingrandire un punto $\vec{x}$ in coordinate omogenee dovremmo calcolare $S \cdot T \cdot \vec{x}$, se volessimo invece ingrandirlo e poi traslarlo dovremmo calcolare $T \cdot S \cdot \vec{x}$, fate bene attenzione però che il risultato non è in generale lo stesso! La moltiplicazione di matrici non è infatti in generale commutativa come ben si vede nel seguente esempio.*

Esempio 3.1 *Sia*

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

una matrice di ingrandimento con fattore $c = 2$ e

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

una matrice di traslazione rispetto al vettore

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

allora

$$T \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre

$$S \cdot T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici S e T non commutano! Quindi l'ordine con cui svolgiamo le operazioni conta!

3.2.3 Rotazione

In $\mathbb{R}^3$ le rotazioni rispetto a un asse passante per l'origine sono trasformazioni lineari. Per estendere una di queste rotazioni alle coordinate omogenee basta eseguire lo stesso cambiamento della matrice svolto per la deformazione. Ad esempio, la rotazione di un angolo α rispetto all'asse z è descritta in coordinate *standard* dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che, come tutte le matrici di rotazione in coordinate *standard*, è una matrice ortogonale con determinante uguale a 1. La stessa rotazione, in coordinate omogenee viene espressa dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In generale, la matrice di rotazione di angolo α rispetto a un'asse in direzione del vettore unitario

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

è data da

$$Q = \cos(\alpha)I + (1-\cos(\alpha))\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} - \sin(\alpha)\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per estendere questa matrice alle coordinate omogenee basta effettuare la stessa modifica del caso precedente ottenendo la matrice

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Q & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 3.2 *Supponiamo di voler esprimere la matrice di rotazione di angolo π rispetto all'asse passante per l'origine e in direzione del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in coordinate omogenee. Il vettore $\vec{v}$ non è unitario, quindi per poter utilizzare la formula precedente dobbiamo prima trovarne il versore, ossia*

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il vettore $\vec{a}$ nella formula precedente otteniamo la matrice di rotazione

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

quindi, la stessa trasformazione in coordinate omogenee può essere espressa dalla matrice

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come anticipato all'inizio del capitolo, le rotazioni in $\mathbb{R}^3$ rispetto a un asse **non** passante per l'origine non sono esprimibili tramite una matrice: non sono trasformazioni lineari. Per esprimere questa trasformazione in $\mathbb{R}^3$ in coordinate *standard* è necessario combinare una traslazione, una rotazione rispetto a un asse passante per l'origine parallelo all'asse originale e una traslazione. In particolare, se vogliamo esprimere una rotazione rispetto a un asse passante per il punto $P(p_1, p_2, p_3)$, dobbiamo prima eseguire una traslazione di vettore $-\vec{p}$ dove

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

quindi eseguire una rotazione rispetto a un asse passante per l'origine parallelo all'asse originale e infine traslare tutto in direzione del vettore $\vec{p}$. In coordinate standard questo procedimento richiede la combinazione di due trasformazioni non lineari (le traslazioni) e una lineare. In coordinate omogenee, essendo lineare anche la traslazione, questo richiede la combinazione di tre trasformazioni lineari e quindi è a sua volta una trasformazione lineare. Continuiamo l'esempio precedente.

Esempio 3.3 *Supponiamo di voler esprimere la rotazione di angolo π rispetto a un asse in direzione del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passante per il punto $P(1, 2, 1)$. Dovremmo combinare la matrice di rotazione ottenuta precedentemente, ossia la matrice di rotazione rispetto a un asse parallelo al nostro ma passante per l'origine, con le matrici di traslazione con vettori $-\vec{p}$ e $\vec{p}$ dove*

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Combinando le matrici nell'ordine corretto otteniamo la matrice

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Traslazione } \vec{p}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rotazione}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Traslazione } -\vec{p}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2.4 Proiezioni

Una proiezione in $\mathbb{R}^3$ su un piano passante per l'origine è un'applicazione lineare descritta da una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. In particolare, la matrice di proiezione su un piano passante per l'origine con vettore normale $\vec{n}$ è data da

$$A = I - \frac{\vec{n}\vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}.$$

Per esprimere la stessa trasformazione in coordinate omogenee si procede esattamente come con la rotazione, ed è quindi descritta dalla matrice

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & I - \frac{\vec{n}\vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anche per esprimere una proiezione su un piano **non** passante per l'origine si segue la stessa procedura come con la rotazione. Vediamo un esempio.

Esempio 3.4 *Supponiamo di voler esprimere la matrice associata a una proiezione su un piano passante per il punto $P(1, 2, 1)$ con vettore normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*
Dobbiamo calcolare la matrice di proiezione su un piano con vettore normale $\vec{n}$ ma passante per l'origine, la matrice è data da

$$\begin{aligned} A = I - \frac{\vec{n}\vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e quindi, in coordinate omogenee,

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Combiniamo la matrice trovata con le matrici di traslazione con vettori $-\vec{p}$ *e* $\vec{p}$ *dove*

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Combinando le matrici nell'ordine corretto otteniamo la matrice

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Traslazione } \vec{p}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Proiezione}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Traslazione } -\vec{p}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Capitolo 4

Raccolta di lavori scritti ed esami

4.1 Vecchi lavori scritti

4.1.1 Prova formativa gennaio 2006

1. Determina per quali valori reali di a e b la matrice,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

   è diagonalizzabile.

2. Considera la matrice di proiezione,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

   (a) Ricava dalla matrice l'equazione del piano α su cui si proietta utilizzando la matrice P.

   (b) Le matrici di proiezione sono matrici *idempotenti*, ossia $P \cdot P = P$ e quindi in generale $P^k = P$. Verifica questa affermazione nel caso della nostra matrice calcolando in generale P^k con l'aiuto della diagonalizzazione.

   (c) Calcola e^P con e senza diagonalizzazione.

3. Considera il sistema di equazioni,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2001 \\ 2001 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}.$$

   (a) Risolvi il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

(b) Risolvi i sistemi $A(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = \vec{b} + \vec{\Delta b}$, nei due casi

$$\vec{\Delta b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{\Delta b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Calcola l'errore relativo,

$$e_r(\vec{b}) = \frac{\|\vec{\Delta b}\|}{\|\vec{b}\|},$$

commesso nella rappresentazione dei termini noti $\vec{b}$ e l'errore relativo,

$$e_r(\vec{x}) = \frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec{x}\|},$$

commesso nella soluzione in entrambi i casi.

(d) Verifica in entrambi i casi che,

$$e_r(\vec{x}) \leq k(A) \cdot e_r(\vec{b}),$$

dove $k(A)$ è la condizione della matrice A.

4.1.2 Lavoro scritto Gennaio 2006 per elettronici

1. Considera la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Diagonalizza la matrice A.

   (b) Verifica che il determinante di A corrisponde al prodotto degli autovalori e la traccia alla somma degli autovalori.

   (c) Calcola A^k e e^A.

   (d) Calcola la norma e la condizione di A.

2. Considera le due matrici,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

   (a) Le matrici A e B esprimono una proiezione e una simmetria. Calcola gli autovalori di A e B e associa a ogni matrice la trasformazione che esprime basandoti esclusivamente sugli autovalori. Motiva geometricamente la tua risposta.

   (b) Diagonalizza la matrice che esprime la simmetria, indichiamola con M (dovete capire voi se è A o B).

(c) Calcola M^k per k qualsiasi.

(d) Quante matrici diverse possiamo ottenere calcolando M^k? Motiva la tua risposta sia basandoti sulla diagonalizzazione sia geometricamente.

3. Considera la sequenza di vettori definita come,

$$\vec{x_k} = M^k \cdot \vec{x_0},$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il vettore $\vec{x_0}$ è un vettore costante ma sconosciuto. Dimostra le seguenti affermazioni.

(a) $\lim_{k\to\infty} \vec{x_k} = \vec{0}$.

(b) Per ogni $k > 0$ vale $\|\vec{x_{k+1}}\| < 2 \cdot \|\vec{x_k}\|$.

4.1.3 Lavoro scritto Gennaio 2006 per informatici

1. Considera la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Diagonalizza la matrice A.

(b) Verifica che il determinante di A corrisponde al prodotto degli autovalori e la traccia alla somma degli autovalori.

(c) Calcola A^k.

(d) Calcola la condizione di A.

2. Considera le matrici,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Le matrici A, B e C esprimono una proiezione, una trasformazione non specificata e una simmetria. Calcola gli autovalori di A, B e C e associa a ogni matrice la trasformazione che esprime basandoti esclusivamente sugli autovalori. Motiva geometricamente la tua risposta.

(b) Diagonalizza la matrice che esprime la trasformazione non specificata, indichiamola con M (dovete capire voi se è A, B o C).

(c) Calcola M^{-1} basandoti esclusivamente sulla diagonalizzazione trovata al punto precedente.

(d) Dimostra che il piano di proiezione e il piano di simmetria delle due matrici restanti coincidono. Esprimi l'equazione del piano.

3. Considera la sequenza di vettori definita come,

$$\vec{x_k} = M^k \cdot \vec{x_0},$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Il vettore $\vec{x_0}$ è un vettore costante ma sconosciuto.

(a) Quale delle seguenti affermazioni è vera? Motiva adeguatamente la tua risposta.

- $\lim_{k\to\infty} \vec{x_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\lim_{k\to\infty} \vec{x_k} = \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix}$.
- $\lim_{k\to\infty} \vec{x_k}$ non esiste.

(b) Dimostra che $\|M\| = 1$.

4.1.4 Lavoro scritto Dicembre 2006 per informatici

1. Considera la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcola gli autovalori e i rispettivi autospazi della matrice A.

(b) Se la matrice A è diagonalizzabile calcola la sua diagonalizzazione, altrimenti calcola la sua scomposizione di Jordan.

(c) Calcola A^k in generale utilizzando la scomposizione del punto precedente.

2. Considera la matrice,

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

(a) Diagonalizza la matrice B.

(b) Calcola B^k in generale.

(c) Calcola $\lim_{k\to\infty} B^k$.

(d) Dimostra che definendo la successione $\overrightarrow{x_k} = B^k \cdot \overrightarrow{x_0}$, si ha $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{x_k} = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove C dipende esclusivamente da $\overrightarrow{x_0}$.

(e) Quanto vale C se $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$?

3. Considera la matrice,

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

(a) Diagonalizza la matrice P.

(b) Verifica, utilizzando la diagonalizzazione di P, che $P^k = P$ per ogni $k \geq 1$.

(c) Calcola e^P.

(d) Verifica che $e^P = I + (e-1) \cdot P$.

(e) Dimostra che in generale, per una matrice M tale che $M^k = M$ per ogni $k \geq 1$, si ha,

$$e^M = I + (e-1) \cdot M.$$

4.1.5 Lavoro scritto Dicembre 2006 per elettronici

1. Considera la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcola gli autovalori e i rispettivi autospazi della matrice A.

(b) La matrice A non è diagonalizzabile, perché?

(c) Calcola la scomposizione di Jordan $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$, costruisci la matrice J in modo che l'autovalore più grande di A si trovi al primo posto nella diagonale di J.

(d) Esprimi J^k in generale per tutti i k interi positivi.

(e) Esprimi A^k in generale come prodotto di tre matrici.

2. Considera le tre matrici,

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

(a) Calcola D^{-1}. Come si calcola in generale l'inversa di una matrice diagonale?

(b) Data una matrice diagonalizzata $A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1}$, l'inversa di A può essere calcolata tramite l'espressione $A^{-1} = S \cdot \Lambda^{-1} \cdot S^{-1}$.

- Perché l'espressione data, una volta che conosciamo la diagonalizzazione di A, semplifica il calcolo dell'inversa?
- Dimostra che l'espressione data è corretta, ossia che effettivamente,

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A.$$

(c) Diagonalizza la matrice E.

(d) Calcola l'inversa di E tramite l'espressione data. Noti qualcosa di particolare? Commenta il tuo risultato.

(e) Diagonalizza la matrice F.

(f) Calcola l'inversa di F tramite l'espressione data. Noti qualcosa di particolare? Commenta il tuo risultato.

4.1.6 Lavoro scritto Novembre 2007 per informatici

1. Considera la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcola gli autovalori e i rispettivi autospazi della matrice A.

(b) La matrice A non è diagonalizzabile, perché?

(c) Calcola la scomposizione di Jordan $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$.

(d) Calcola a mano J^2, J^3 e J^4.

(e) Esprimi J^k in generale per tutti i k interi positivi.

(f) Esprimi A^k in generale come prodotto di tre matrici.

2. Considera le due successioni $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ e $\{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ definite ricorsivamente da,

$$a_0 = 1,\ b_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2b_n,\ b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Vogliamo dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

(a) Costruisci la matrice A tale che,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

(b) Calcola in generale A^n.

(c) Sapendo che,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix},$$

costruisci due formule generali per a_n e b_n.

(d) Calcola $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ e verifica che è uguale a $\sqrt{2}$.

3. Costruisci la matrice A tale che,

$$Ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{\lambda=2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

4.1.7 Lavoro scritto Dicembre 2007 per informatici

1. Considera la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.75 \end{pmatrix},$$

e la successione di vettori $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ generata tramite la formula ricorsiva $\vec{x}_{n+1} = A \cdot \vec{x}_n$ con

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcola $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ e $\vec{x}_3$.

(b) Calcola in generale $\vec{x}_n$ come prodotto di tre matrici con un vettore e calcola $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n$.

(c) Calcola la norma e la condizione della matrice A.

(d) Supponiamo di commettere un errore $\Delta\vec{x}_0$ nella rappresentazione di $\vec{x}_0$. Quanto può valere al massimo l'errore relativo su $\vec{x}_0$ per essere sicuri di avere un errore relativo su $\vec{x}_1$ minore di 10^{-3}? E quanto può valere al massimo l'errore relativo su $\vec{x}_0$ per essere sicuri di avere un errore relativo su $\vec{x}_4$ minore di 10^{-3}?

2. Considera il sistema di equazioni differenziali $\vec{\dot{u}}(t) = A \cdot \vec{u}(t)$ con,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Risolvi il sistema.

(b) Verifica che la soluzione trovata è corretta.

PROMEMORIA: a un certo punto dell'esercizio conviene utilizzare la trasformata di Laplace, ricordati che,

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = -f(0) + sF(s), \quad \mathcal{L}(t^n \cdot e^{\alpha t}) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}.$$

3. Considera l'equazione differenziale $\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$ con condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 2$.

    (a) Costruisci un sistema di equazioni differenziali di primo ordine $\overrightarrow{\dot{u}}(t) = A \cdot \vec{u}(t)$ equivalente all'equazione data. Esprimi in particolare A, $\vec{u}(t)$ e $\vec{u}(0)$.

    (b) Trova $\vec{u}(t)$ risolvendo il sistema.

    (c) Trova $x(t)$ e verifica che è la soluzione corretta dell'equazione iniziale.

4.2 Vecchi esami

4.2.1 Esame Febbraio 2006

Gli studenti che hanno svolto questo esame avevano a disposizione come aiuto tutti i loro appunti, le dispense del corso e la calcolatrice. Tutte le risposte dovevano essere motivate adeguatamente. Autovalori a autospazi non potevano essere calcolati direttamente con funzioni preprogrammate della calcolatrice.

Esercizio 1: risoluzione di sistemi di equazioni differenziali

1. Risolvi il sistema di equazioni differenziali lineari,

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = -u_3(t) \\ \dot{u}_2(t) = u_1(t) - 2u_2(t) + u_3(t) \\ \dot{u}_3(t) = -u_1(t) \end{cases}$$

con condizioni iniziali $u_1(0) = u_3(0) = 1$ e $u_2(0) = 2$, aiutandoti esclusivamente con la diagonalizzazione di matrici.

2. Considera il sistema di equazioni differenziali lineari,

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = 2u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) = 2u_2(t) \end{cases}$$

con condizioni iniziali $u_1(0) = u_2(0) = 1$.

- Verifica che la soluzione del sistema è data da

$$u_1(t) = e^{2t} + te^{2t}, \qquad u_2(t) = e^{2t}.$$

- Prova a risolvere questo sistema con il metodo standard utilizzato nell'esercizio precedente, ad un certo punto ti accorgerai di non poter più procedere. Che problema incontri? Perché questo problema ti impedisce di procedere? Ci saremmo potuti accorgere a priori, guardando la soluzione del sistema, che il metodo standard non funziona?

Esercizio 2: trasformazioni geometriche

È data la matrice di rotazione,

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice R descrive una rotazione di angolo $\alpha \in [0, \pi]$ rispetto a un asse in $\mathbb{R}^3$.

1. Calcola gli autovalori di R. Con il solo aiuto degli autovalori calcola il determinante di R.

2. Determina l'asse di rotazione in forma parametrica aiutandoti esclusivamente con gli autovettori di R.

3. Trova l'angolo di rotazione α utilizzando esclusivamente gli autovalori.

4. La matrice R, come tutte le matrici di rotazione, è una matrice ortogonale, ossia $R^T R = I$. Possiamo quindi affermare con certezza che $\|R\| = 1$. Perché?

Esercizio 3: radice quadrata di una matrice

1. Data la matrice,
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$
verifica che la matrice A^2 possiede come autovalori gli autovalori di A elevati al quadrato e come autospazi gli stessi autospazi di A.

2. Data la matrice B, indichiamo con $A = \sqrt{B}$ la *radice quadrata di* B, ossia una matrice A tale che $A \cdot A = B$. Calcola $\sqrt{B}$, dove,
$$B = \begin{pmatrix} 125 & -75 \\ -75 & 50 \end{pmatrix}.$$

3. La radice quadrata di una matrice è unica? Per rispondere puoi eventualmente aiutarti con la matrice,
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2.2 Esame d'appello Settembre 2007

Il modello di Leslie è un modello matematico utilizzato per studiare la crescita del numero di individui di una certa popolazione. Le assunzioni del modello sono le seguenti:

- Vengono considerate solo le femmine della popolazione.
- L'età massima raggiungibile da un individuo è N anni.
- La popolazione è divisa in N classi di età, una per ogni anno. Con n_i indichiamo il numero di individui di i anni (tra $i-1$ e i anni) all'interno della popolazione.
- Per ogni gruppo di età, conosciamo il tasso di sopravvivenza s_i. Ad esempio $s_1 = 0.95$ significa che in media il 95% degli individui di un anno sopravvive fino a due anni.
- Conosciamo il tasso di riproduzione f_i di ogni classe di età, ossia il numero medio di individui femmina che nascono da ogni individuo femmina di età i.

Consideriamo per semplicità una specie animale che vive normalmente al massimo tre anni, come ad esempio il salmone reale. Con $N = 3$ il modello di Leslie è dato da,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \end{pmatrix}}_{\vec{n}(t+1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}}_{\vec{n}(t)},$$

dove $n_i(t)$ indica il numero di individui di età i al tempo t.

Esercizio 1

Considera una popolazione di salmoni, formata da 2'000 individui per ogni classe di età. Abbiamo,

$$\vec{n}(0) = \begin{pmatrix} 2'000 \\ 2'000 \\ 2'000 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che nei primi due anni di vita i salmoni non producono uova. Nel terzo ed ultimo anno di vita invece danno alla luce in media 2'000 femmine. La probabilità che un salmone di un anno arrivi a due è pari allo 0.5%, che un salmone di due anni arrivi a tre 10%. Dopo aver deposto le uova il salmone muore.

(a) Costruisci la matrice A per questo caso.

(b) Calcola la popolazione di salmoni dopo 1, 2, 3, 4 e 5 anni.

(c) Visti i risultati precedenti, come prevedi che si svilupperà la popolazione di salmoni?

Esercizio 2

Considera ora le due matrici,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 70 \\ 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

riferite a un'altra specie di pesce che si riproduce anche nel secondo anno. Una matrice si riferisce a una popolazione che si estinguerà, mentre un 'altra matrice si riferisce a una popolazione che tenderà a crescere. Supponiamo che al tempo 0 entrambe le popolazioni siano formate da 100'000 pesci di un anno, 1'000 di due anni e 150 di tre anni.

(a) Calcola gli autovalori di entrambe le matrici e decidi quindi quale si riferisce alla popolazione che si sta estinguendo e quale alla popolazione crescente. Motiva la tua risposta!

(b) Diagonalizza la matrice relativa alla popolazione in via d'estinzione.

(c) Utilizzando la diagonalizzazione, verifica se dopo 20 anni la popolazione sarà già estinta o meno.

(d) Utilizzando la diagonalizzazione, calcola $\lim_{t\to\infty} \vec{n}(t)$. Il risultato conferma l'ipotesi di estinzione della popolazione?

Esercizio 3

Considera una popolazione di un pesce con popolazione al tempo 0 di 10'000 pesci di un anno, 100 di due anni e 75 di tre anni. La matrice che descrive la popolazione è data da,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 100 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il modello di Leslie può essere reso in tempo continuo tramite l'equazione differenziale,

$$\dot{\vec{n}}(t) = (D - I) \cdot \vec{n}(t).$$

(a) Descrivi a parole la situazione descritta dalla matrice A.

(b) Calcola la popolazione dopo cinque anni risolvendo l'equazione differenziale con le condizioni iniziali date.

(c) Visti i risultati precedenti, come prevedi che si svilupperà questa popolazione di pesci? È un modello realistico a lungo termine?

Esercizio 4

Considera una popolazione di pesci con vita massima tre anni. Costruisci per ognuno dei seguenti casi una matrice e un vettore $\vec{n}(0)$ che riflettano la situazione descritta a parole. Motiva in ogni caso a parole o utilizzando gli autovalori la tua risposta.

(a) Una popolazione all'inizio molto numerosa che si estingue nel giro di tre anni.

(b) Una popolazione con, all'inizio, pochi pesci giovani in cui, nel giro di pochi anni, abbiamo molti più pesci giovani che pesci vecchi.

(c) Una popolazione il cui numero totale di individui ogni anno rimane costante.

Nota bene: i modelli possono essere semplici a piacimento e non devono per forza essere realistici da un punto di vista biologico.

4.2.3 Esame d'appello Giugno 2008

Esercizio 1

Considera la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(a) Diagonalizza A.

(b) Esprimi A^k in generale.

(c) Verifica che $e^A = I \cdot \cosh(1) + A \cdot \sinh(1)$.

Promemoria:

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Considera il sistema di equazioni differenziali $\overrightarrow{\dot{u}}(t) = A \cdot \vec{u}(t)$ con,

$$A = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Diagonalizza A.

(b) Esprimi $\vec{u}(t)$ in generale.

(c) Calcola $\vec{u}(1)$.

(d) Calcola $\lim_{t\to\infty} \vec{u}(t)$.

Esercizio 3

Considera le matrici,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Calcola $\|A\|_2$ e $\|B\|_2$.

(a) Calcola la condizione di A e la condizione di B.

(b) Una delle due matrici date esprime una rotazione, quale? Motiva la tua risposta.