Serie 3 - soluzioni

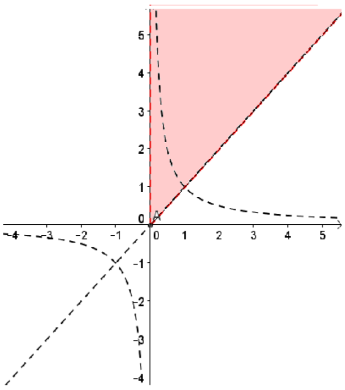
1. Rappresentare graficamente il dominio delle seguenti funzioni:

(a) $f(x;y) = \frac{\ln(x \cdot \sqrt{y-x})}{xy-1}$

$x \cdot \sqrt{y-x} > 0 \Rightarrow x > 0$

$y - x > 0 \Rightarrow y > x$

$xy - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq \frac{1}{x}$



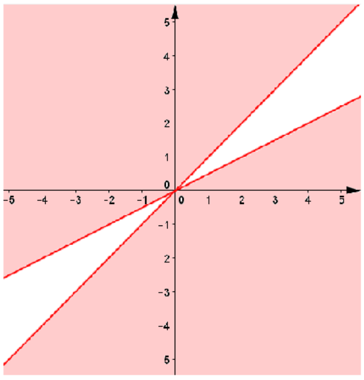
(b) $f(x;y) = \sqrt{x^2 - 3xy + 2y^2}$

$x^2 - 3xy + 2y^2 \geq 0$

$2(y-x)(y-\frac{x}{2}) \geq 0$

$\Rightarrow$ ① $y \geq x$ e $y \geq \frac{x}{2}$

② $y \leq x$ e $y \leq \frac{x}{2}$



(c) $f(x;y) = \frac{\sqrt{5 - x^2 + 4x - y^2}}{(y-1)\ln\left(y - \frac{x}{2} + 1\right)}$

$5 - x^2 + 4x - y^2 \geq 0$

$\cancel{x}^2 - 4x + y^2 \leq 5$

• $(x-2)^2 + y^2 \leq 9$

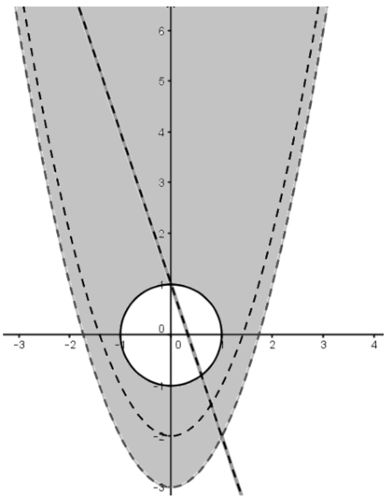
• $y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$

• $y - \frac{x}{2} + 1 > 0$

$y > +\frac{x}{2} - 1$

• $y - \frac{x}{2} + 1 \neq 1$

$y \neq \frac{x}{2}$



(d) $f(x;y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{(y + 3x - 1)\ln(y - x^2 + 3)}$

• $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$

$x^2 + y^2 \geq 1$

• $y + 3x - 1 \neq 0$

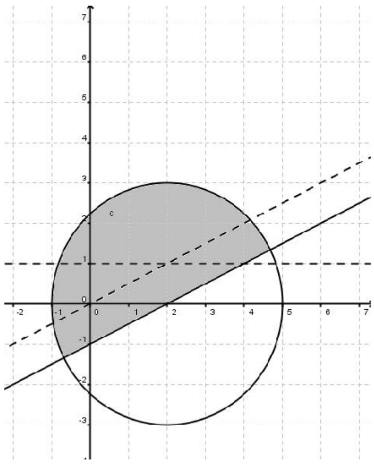
$y \neq -3x + 1$

• $y - x^2 + 3 > 0$

$y > x^2 - 3$

• $y - x^2 + 3 \neq 1$

$y \neq x^2 - 2$



2. Calcolare il valore delle seguenti funzioni dopo averne stabilito il dominio:

   (a) $f(u;v) = \dfrac{uv}{u-2v}$, $f(0;1)$, $f(-1;4)$

   (b) $f(x;y;z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$, $f(1;-2;2)$, $f(-3;0;2)$

a) D_f : $v \neq \frac{u}{2}$

$f(0;1) = 0$

$f(-1;4) = \frac{4}{9}$

b) D_f = sfera di centro $(0;0;0)$ e raggio 5

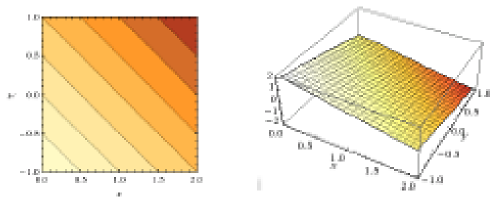
$f(1;-2;2) = 4$

$f(-3;0;2) = 2\sqrt{3}$

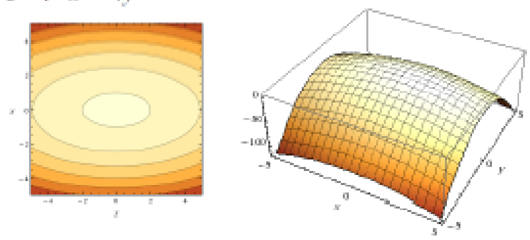
3. Descrivere la forma delle superfici definite dalle funzioni seguenti studiando le curve di livello e le intersezioni con i piani O_{xy}, O_{xz} e O_{yz}.

    (a) $z = 1 - x - y$
    (b) $z = 4 - x^2 - 4y^2$
    (c) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
    (d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
    (e) $z = |x| + |y|$

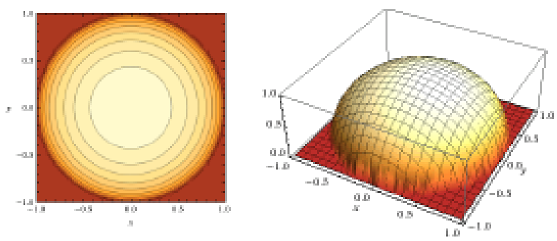
a) $z = 1 - x - y$



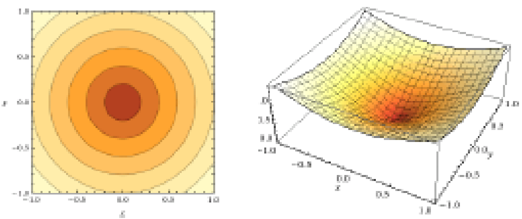
b) $z = 4 - x^2 - 4y^2$



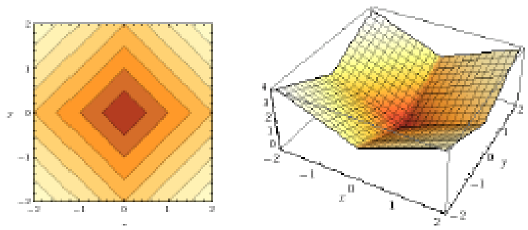
c) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

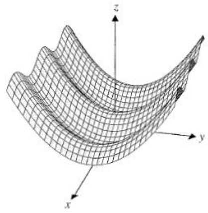


e) $z = |x| + |y|$.

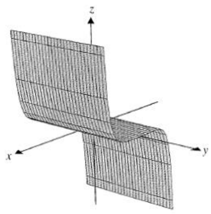


4. Associare a ogni funzione il suo grafico. Si noti che solo un grafico non corrisponde a nessuna delle cinque funzioni indicate.

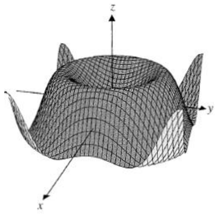
Funzione	Grafico
$f(x,y) = x^2 + 3x^7$	B
$f(x,y) = cos^2(x) + y^2$	A
$f(x,y) = cos(x^2 + y^2)$	F
$f(x,y) = sin(x^2 + y^2)$	C
$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$	E



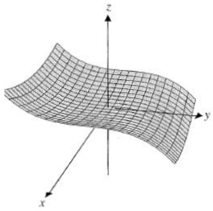
A



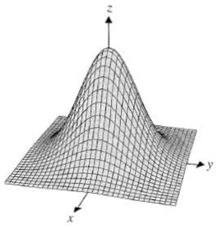
B



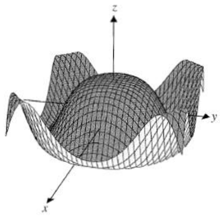
C



D



E



F

5. Disegnare alcune curve di livello delle funzioni seguenti:

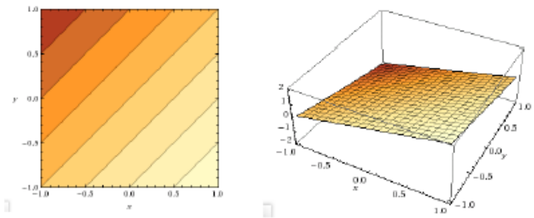
(a) $z = x - y$

(b) $z = xy$

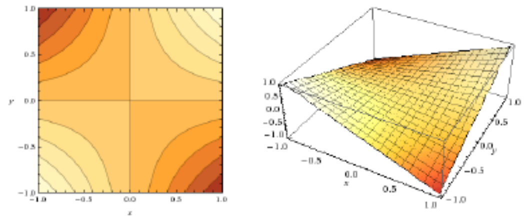
(c) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$

(d) $z = xe^{-y}$

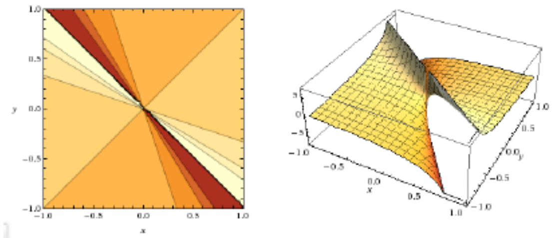
a) $z = x - y$



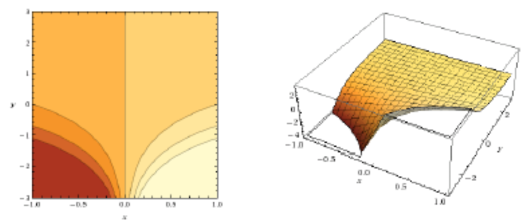
b) $z = xy$



c) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$



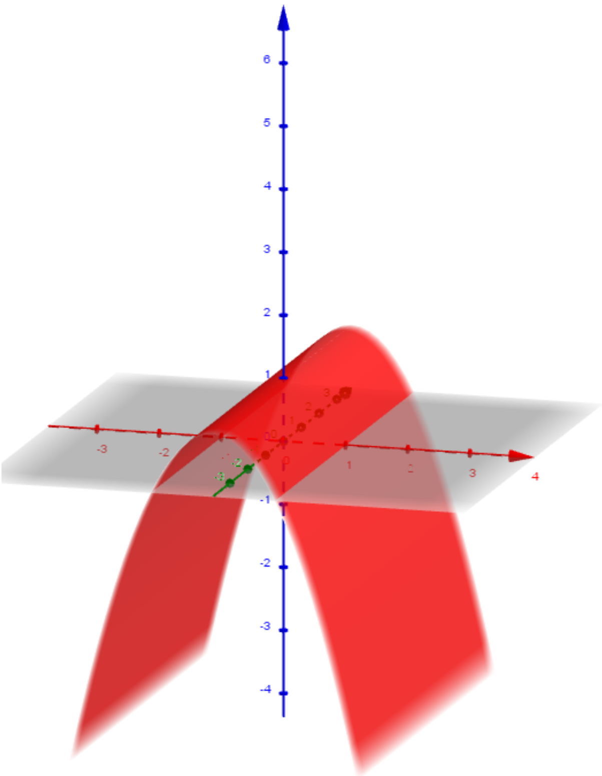
d) $z = xe^{-y}$.



6. Caratterizzare le superfici rappresentate da equazioni del tipo $z = f(x)$, schizzare la superficie particolare $z = 1 - x^2$.

La funzione $z = f(x)$ viene traslata lungo l'asse delle y.

$z = 1 - x^2$:

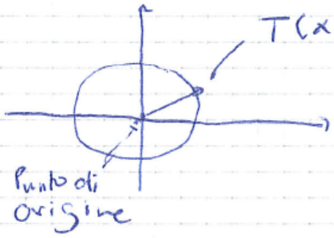


7. La temperatura T in °C nel punto $(x; y)$ di una sottile lamina di metallo disposta nel piano xy, risulta inversamente proporzionale alla distanza di questo punto dall'origine.

   (a) Descrivere le isoterme.

   (b) Supponendo che nel punto $P(4; 3)$ la temperatura sia di $40°C$ determinare l'isoterma di $20°C$.

a)



$$T(x;y) = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\Rightarrow$ isoterme: $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}} = k$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\lambda}{k}$$

$\Rightarrow$ le isoterme sono dei cerchi di centro $(0;0)$

b) $T(4;3) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{3^2+4^2}} = 40 \Rightarrow \dfrac{\lambda}{5} = 40 \Rightarrow \lambda = 200$

isoterma $k = 20 \Rightarrow \dfrac{200}{\sqrt{x^2+y^2}} = 20$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 10 \Rightarrow$ cerchio di raggio 10 e centro $(0;0)$

8. La tensione elettrica in una certa regione di spazio è data da: $U_{P0} = \dfrac{6}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9z^2}}$.

   (a) Stabilire l'equazione delle superfici equipotenziali.

   (b) Determinare la superficie equipotenziale di $220V$ ed i punti con identiche coordinate $x_0 = y_0 = z_0$ che si trovano su quest'ultima.

a) Superfici equipotenziali:

$$\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2+9z^2}} = k \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{6}{k}\right)^2 = x^2 + y^2 + 9z^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\frac{6}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{6}{k}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{2}{k}\right)^2} = 1$$

$\Rightarrow$ Ellissoidi centrate in $(0;0;0)$ con semiassi

$$a = \frac{6}{k} \; ; \; b = \frac{6}{k} \; ; \; c = \frac{2}{k}$$

b) $$\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2+9z^2}} = 220 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+9z^2 = \left(\frac{3}{110}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{(3/110)^2} + \frac{y^2}{(3/110)^2} + \frac{z^2}{(1/110)^2} = 1}$$

$\Rightarrow$ Punti con $x_0 = y_0 = z_0 \Rightarrow$

$$P_1\left(\frac{3\sqrt{11}}{1210} ; \frac{3\sqrt{11}}{1210} ; \frac{3\sqrt{11}}{1110}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_0^2}{(3/110)^2} + \frac{x_0}{(3/110)^2} + \frac{\cancel{x_0}}{(1/110)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 11\, x_0^2 = \left(\frac{3}{110}\right)^2 \qquad P_2 = \left(\frac{-3\sqrt{11}}{1210} ; \frac{-3\sqrt{11}}{1210} ; \frac{-3\sqrt{11}}{1410}\right)$$

$$x_0 = \frac{\pm 3}{\sqrt{11} \cdot 110} = \pm \frac{3\sqrt{11}}{1210}$$

9. Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni:

(a) $z = y^3 \sin(x^2 y)$

(b) $z = x \ln(1 + x^2 + y^2) - \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

(c) $z = \dfrac{\sqrt{1 - xy}}{x - 2y - 1}$

a) $f_x(x,y) = 2xy^4 \cos(x^2 y)$, $f_y(x,y) = 3y^2 \sin(x^2 y) + y^3 x^2 \cos(x^2 y)$

b) $f_x = \ln(1 + x^2 + y^2) + \dfrac{2x^2}{1 + x^2 + y^2} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}\,(1 + x^2 + y^2)}$

$f_y = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}\left(2xy - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

c) $f_x = \dfrac{\sqrt{1 - xy}}{(x - 2y - 1)} \cdot \left(\dfrac{-y}{2(1 - xy)} - \dfrac{1}{x - 2y - 1}\right)$

$f_y = \dfrac{\sqrt{1 - xy}}{(x - 2y - 1)} \cdot \left(\dfrac{-x}{2(1 - xy)} + \dfrac{2}{x - 2y - 1}\right)$

10. Trovare le equazione del piano tangente e della retta normale alle superfici date nel punto indicato:

    (a) $f(x;y) = x^2 - y^2$ in $(-2;1)$

    (b) $f(x;y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ in $(1;2)$

    (c) $f(x;y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ in $(\pi;4)$

a) $\begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = -2y \end{cases}$

In $(-2,1)$: $\begin{array}{l} f_x = -4 \\ f_y = -2 \end{array}$

$\pi: z = 3 - 4(x+2) - 2(y-1)$

$\pi: z = -4x - 2y + 3$ $\quad n: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} f_x = \dfrac{2y(x^2+y^2) - 4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ f_y = \dfrac{2x(x^2+y^2) - 4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$

$f_x\big|_{(1,2)} = \dfrac{12}{25}$

$f_y\big|_{(1,2)} = -\dfrac{6}{25}$

$\pi: z = \dfrac{4}{5} + \dfrac{12}{25}(x-1) - \dfrac{6}{25}(y-2)$

$25z = 12x - 6y + 20$

$n: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4/5 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -12/25 \\ +6/25 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{cases} f_x = -\dfrac{1}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ f_y = \dfrac{x}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{cases}$

$f_x\big|_{(\pi,4)} = -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f_y\big|_{(\pi,4)} = \dfrac{\pi}{16}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi: z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}(x-\pi) + \dfrac{\sqrt{2}\pi}{32}(y-4)$

$n: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 4 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \sqrt{2}/8 \\ -\sqrt{2}\pi/32 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. Calcolare le coordinate di tutti i punti della superficie di equazione:
$z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$ nei quali la superficie ha un piano tangente orizzontale.

Piano a tangente orizzontale: $\Leftrightarrow \nabla f(a;b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y^3 \\ -12xy^2 + 12y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = y^3 \quad \Rightarrow \quad x = y \\ -12xy^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -12x \cdot x^2 + 12x = 0$$

$$-12x(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = -1 \longrightarrow y_1 = -1$$

$$x_2 = 0 \longrightarrow y_2 = 0$$

$$x_3 = 1 \longrightarrow y_3 = 1$$

$\Rightarrow$ Punti a tangente orizzontale:

$(-1; -1; 1)$
$(0; 0; -2)$
$(1; 1; 1)$

12. Calcolare le derivate parziali del secondo ordine delle funzioni seguenti.

(a) $f(x; y) = 3x^2y + y^5$

(b) $f(x; y) = y^2e^{3x} + x^2y^4 + 3$

a) $f(x,y) = 3x^2y + y^5$

$f_x = 6xy$

$f_y = 3x^2 + 5y^4$

$f_{xx} = 6y \quad f_{xy} = 6x \quad f_{yy} = 20y^3$

b) $f(x,y) = y^2e^{3x} + x^2y^4 + 3$

$f_x = 3y^2e^{3x} + 2xy^4$

$f_y = 2y\,e^{3x} + 4x^2y^3$

$f_{xx} = 9y^2e^{3x} + 2y^4 \quad f_{xy} = 6y\,e^{3x} + 8xy^3 \quad f_{yy} = 2e^{3x} + 12x^2y^2$

13. Calcolare i differenziali totali delle seguenti funzioni:

(a) $f(x;y) = x^2 + xy^2 + \sin(y)$

(b) $f(x;y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

(c) $f(x;y) = e^{x^2+y^2}$

a) $f(x,y) = x^2 + xy^2 + \sin y$

$f_x = 2x + y^2 \quad f_y = 2xy + \cos y$

$df = (2x+y^2)\,dx + (2xy+\cos y)\,dy$

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$f_x = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad f_y = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow df = \frac{1}{x^2+y^2}\left[-y\,dx + x\,dy\right]$

c) $f(x,y) = e^{x^2} \cdot e^{y^2}$

$f_x = 2xe^{x^2+y^2} \quad f_y = 2ye^{x^2+y^2}$

$\Rightarrow df = 2e^{x^2+y^2}(x\,dx + y\,dy)$

14. Data la funzione $f(x;y) = x^2 - xy + 2y^2$. Calcolare:

(a) l'incremento Δf che subisce la funzione nel passare da $P(1;-2)$ a $Q(1.2;-2.1)$.

(b) il differenziale totale df relativo al punto $P(1;-2)$ e agli incrementi $\Delta x = 0.2$ e $\Delta y = -0.1$.

(c) $\Delta f - df$.

a) $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 \qquad f(1,-2) = 11 \qquad f(1.2,-2.1) = 12.78$

$\Rightarrow \Delta f = f(1.2,-2.1) - f(1,-2) = 1.78$

b) $f_x = 2x - y \qquad f_y = -x + 4y \qquad f_x|_{(1,-2)} = 4 \qquad f_y|_{(1,-2)} = -9$

$df = f_x\,dx + f_y\,dy$

$\Rightarrow df = 4 \cdot 0.2 - 9 \cdot (-0.1) = 1.70$

c) $\Delta f - df = 1.78 - 1.70 = 0.08$

15. Risolvere le seguenti equazioni differenziali esatte:

(a) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

(b) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$

a) $M(x;y) = x^2 + y \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial x} f(x;y)$

$N(x;y) = x - 2y = \frac{\partial}{\partial y} f(x;y)$

$\Rightarrow f(x;y) = \int (x^2 + y)\, dx = \frac{x^3}{3} + xy + g(y)$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x;y) = x + g'(y) \overset{!}{=} x - 2y$

$\Rightarrow g'(y) = -2y$

$g(y) = -y^2 + k$

$\Rightarrow f(x;y) = \frac{x^3}{3} + xy - y^2 + k$

b) $M(x;y) = y - 3x^2$

$N(x;y) = -4y + x$

$\Rightarrow f(x;y) = \int (y - 3x^2)\, dx = yx - x^3 + g(y)$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x;y) = x + g'(y) \overset{!}{=} -4y + x$

$g'(y) = -4y$

$g(y) = -2y^2 + k$

$\Rightarrow f(x;y) = yx - x^3 - 2y^2 + k$

16. Calcolare il gradiente di f in P_0:

(a) $f(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}$ in $P_0(-4;3)$

(b) $f(x;y) = x\ln(x-y)$ in $P_0(5;4)$

(c) $f(x;y;z) = yz^3 - 2x^2$ in $P_0(2;-3;1)$

a) $\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \qquad \nabla f(-4;3) = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

b) $\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} \ln(x-y) + \frac{x}{x-y} \\ \frac{-x}{x-y} \end{pmatrix} \qquad \nabla f(5;4) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $\nabla f(x;y;z) = \begin{pmatrix} -4x \\ z^3 \\ 3yz^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(2;-3;1) = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$

17. Sia $f(x;y) = 100 - x^2 - y^2$. Partendo dal punto $P_0(3;4)$ in quale direzione orientata si dovrebbe procedere per far crescere la funzione più rapidamente? Quanto vale la variazione in questa direzione? Determinare la derivata direzionale di f in direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

La derivata direzionale sarà massima in direzione del gradiente

$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$$

$$f_x = -2x \quad f_y = -2y$$

$$\underline{\nabla} f(3,4) = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix} \quad |\underline{\nabla} f(3,4)| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10$$

Se $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow f_{\vec{u}}(3,4) = \vec{u} \cdot \underline{\nabla} f(3,4) = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix} = \frac{34}{\sqrt{26}} = \frac{17}{13}\sqrt{26}$$

18. Si determini la derivata direzionale della funzione data $f(x; y, z)$ nel punto P_0:

(a) $f(x; y; z) = \big(y^2 + \sin(z)\big)\, e^{-x}$ in $P_0(0; 2; \pi)$ in direzione del punto $(1; 1; 0)$.

(b) $f(x; y; z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ in $P_0(2; -3; 4)$ in direzione del vettore $\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$.

a) $\nabla f(x;y;z) = \begin{pmatrix} -(y^2+\sin(z))e^{-x} \\ 2ye^{-x} \\ \cos(z)\, e^{-x} \end{pmatrix}$ $\quad \nabla f(0;2;\pi) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\pi \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{2+\pi^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\pi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_{\vec{u}}(0;2;\pi) = \frac{1}{\sqrt{2+\pi^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-8+\pi}{\sqrt{2+\pi^2}}$

b) $\nabla f(x;y;z) = \begin{pmatrix} -1/x^2 \\ -1/y^2 \\ -1/z^2 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla f(2;-3;4) = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/9 \\ -1/16 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_u(2;-3;4) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/9 \\ -1/16 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-43}{144} = \frac{-43\sqrt{3}}{432}$

19. Determinare i massimi e i minimi relativi e i punti di sella delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x;y) = x^3 - xy + y^2$

   (b) $f(x;y) = \cos(x) + \cos(y)$

a) $f(x;y) = x^3 - xy + y^2$

$$\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y \\ -x + 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 2y$$

$$\Rightarrow 3(2y)^2 - y = 0$$

$$12y^2 - y = 0$$

$$12y\left(y - \frac{1}{12}\right) = 0 \quad \begin{cases} y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ y_2 = \frac{1}{12} \rightarrow x_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$H_{f(x;y)} = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$P_1(0;0)$: $\det(H_{f(0;0)}) = -1 < 0 \rightarrow$ punto di sella

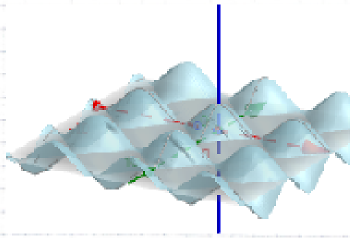
$P_2\left(\frac{1}{6};\frac{1}{12}\right)$ $\det\left(H_{f\left(\frac{1}{12};\frac{1}{6}\right)}\right) = 1 > 0$; $f_{xx}\left(\frac{1}{6};\frac{1}{12}\right) = 1 > 0$

$\rightarrow$ minimo locale

b) $f(x;y) = \cos(x) + \cos(y)$ $\qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\sin(y) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x = k_1 \cdot \pi \\ y = k_2 \cdot \pi \end{matrix}$$

$$H_{f(x;y)} = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \mathrm{Det}(H_{f(x;y)}) = \cos(x) \cdot \cos(y)$$

- k_1 e k_2 pari $\Rightarrow$ max. locali
- k_1 e k_2 dispari $\Rightarrow$ min. locali
- k_1 pari; k_2 dispari (o viceversa) $\Rightarrow$ punti di sella

20. Determinare i valori massimo e minimo della funzione $f(x;y) = 2xy$ nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$.

$f(x;y) = 2xy$

$\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow P(0;0)$

- Punto critico $(0;0)$
- Contorno:
  - $f(x;\sqrt{4-x^2}) = 2x\sqrt{4-x^2}$

    $f'(x) = 2\sqrt{4-x^2} + \cancel{2}x \cdot \frac{-2x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}} \overset{!}{=} 0 \quad \Big| \cdot \sqrt{4-x^2}$

    $= 2(4-x^2) - 2x^2 \overset{!}{=} 0$

    $8 = 4x^2$

    $x = \pm\sqrt{2}$
  - Analogo per $f(x; -\sqrt{4-x^2})$

$\Rightarrow$ Punti contorno: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Estremi:

	$f(x;y)$	
$(0;0)$	$\longrightarrow 0$	
$(\sqrt{2};\sqrt{2})$	$\longrightarrow 4$	max assoluti
$(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$	$\longrightarrow 4$	
$(\sqrt{2};-\sqrt{2})$	$\longrightarrow -4$	min assoluti
$(-\sqrt{2};\sqrt{2})$	$\longrightarrow -4$	

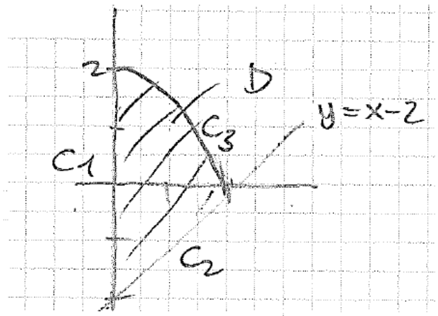
21. Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x;y) = x^2 + y^2 - 3x + 6$ definita nella regione limitata e chiusa: $T : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 6$

$f_x = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$f_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ pto crit.



lungo C_1 $(x = 0,\ y \in [-2,2])$:

$f(0,y) = y^2 + 6 \qquad f(0,\pm 2) = 10 \qquad f(0,0) = 6$

lungo C_2 $(x \in [0,2],\ y = x-2)$:

$f(x, x-2) = x^2 + (x-2)^2 - 3x + 6 = 2x^2 - 7x + 10 \xrightarrow{d/dx} 4x - 7 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

$f\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \frac{31}{8} = 3.875$

lungo C_3 $(x \in [0,2],\ y = \sqrt{4 - x^2})$:

$f(x, \sqrt{4-x^2}) = 10 - 3x \qquad f(0,2) = 10,\ f(2,0) = 4$

punto (x,y)	valore $f(x,y)$	tipo
$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$	$\frac{15}{4} = 3.75$	min ass.
$(0, \pm 2)$	10	max ass.
$(0,0)$	6	
$(2,0)$	4	
$\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$	$\frac{31}{8} = 3.875$	

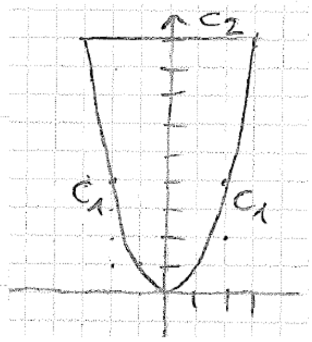
22. Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x;y) = x^2 + xy$ definita nella regione finita R limitata dalle curve di equazione $y = x^2$ e $y = 9$.

$f(x,y) = x^2 + xy$

$f_x = 2x + y$

$f_y = x$ $\qquad$ $(0,0)$ p.to critico $\qquad f(0,0) = 0$

lungo C_1 $(x \in [-3,3], y = x^2)$:



$f(x,x^2) = x^2 + x^3 \xrightarrow{d/dx} 2x + 3x^2 = x(3x+2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$f\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right) = \frac{4}{27}$

lungo C_2 $(x \in [-3,3], y = 9)$

$f(x,9) = x^2 + 9x = x(x+9)$

vertici $\quad f(-3,9) = -18 \qquad f(3,9) = 36$

punto (x,y)	valore $f(x,y)$	tipo
$(0,0)$	0	
$\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$	$\frac{4}{27}$	
$(-3,9)$	-18	min. ass.
$(3,9)$	18	max. ass.

23. È data la funzione $f(x;y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$.

(a) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x;y)$ nel punto $(-1;2;f(-1;2))$.

(b) Calcolare la derivata direzionale di $f(x;y)$ in $P(-1;2)$ direzione del punto $Q(3;5)$.

(c) Determinare il massimo e il minimo assoluti assunti dalla funzione nella regione chiusa $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 3\ ,\ 0 \le y \le 2\}$

a) $f(-1;2)=27$, quindi l'eq. del piano π tangente alla superficie di equazione $z=f(x;y)$ nel punto $(-1;2;27)$è: $z=z_0+f_x\cdot(x-x_0)+f_y\cdot(y-y_0)$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=4x^3-4y \\ f_y(x,y)=4y^3-4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(-1,2)=-12 \\ f_y(-1,2)=36 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow z=27-12\cdot(x+1)+36\cdot(y-2) \\ &\Rightarrow z=-12x+36y-57 \end{aligned}$$

b) La derivata direzionale di $f(x;y)$ in $P=(-1;2)$ in direzione del punto $Q=(3;5)$.

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 5-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\Rightarrow \vec{u}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f_{\vec{u}}(-1;2)=\nabla f(-1;2)\cdot\vec{u}=\frac{12}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=12 \quad \text{dunque} \quad f_{\vec{u}}(-1;2)=12$$

c)

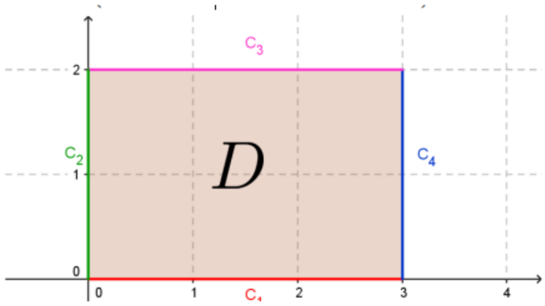
$$\begin{cases} f_x(x,y)=4x^3-4y=0 \\ f_y(x,y)=4y^3-4x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^3 \\ x=y^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=(x^3)^3 \Rightarrow x=x^9 \Rightarrow x\cdot(1-x^8)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm 1$$

In $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | 0\le x\le 3, 0\le y\le 2\}$

i punti critici sono (0,0) e (1,1)



lungo **C1** ($y=0$; $x\in[0;3]$): $f(x,0)=x^4+2=g_1(x)$ quindi $g_1'(x)=4x^3$

$g_1'(x)=0\Rightarrow x=0$ min in $x=0$, max in $x=3$: $f(3,0)=83$

lungo **C2** ($x=0$, $y\in[0;2]$): $f(0,y)=y^4+2=g_2(y)$ quindi $g_2'(y)=4y^3$

$g_2'(y)=0\Rightarrow y=0$ min in $y=0$, max in $y=2$: $f(0,2)=18$

lungo **C3** ($y=2$, $x\in[0;3]$): $f(x,2)=x^4-8x+18=g_3(x)$, $g_3'(x)=4x^3-8$

$g_3'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$ min: $f(\sqrt[3]{2},2)=\sqrt[3]{2}^4-8\sqrt[3]{2}+18\cong 10.44$

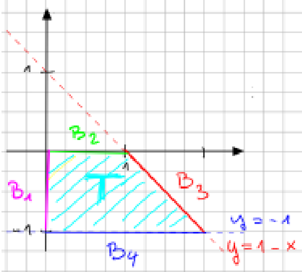
lungo **C4** ($x=3$, $y\in[0;2]$): $f(3,y)=y^4-12y+83=g_4(y), g_4'(y)=4y^3-12$

$g_4'(y)=0\Rightarrow y=\sqrt[3]{3}$ min: $f(3,\sqrt[3]{3})=\sqrt[3]{3}^4-12\sqrt[3]{3}+83\cong 70.02$

Vertici: $f(0,0)=2$, $f(3,2)=75$

Punto $(x;y)$	*Valore funzione* $f(x;y)=x^4+y^4-4xy+2$	*Tipo*
(0,0)	2	
(1,1)	0	Minimo assoluto
(3,0)	83	Massimo assoluto
$(3,\sqrt[3]{3})$	$\sqrt[3]{3}^4-12\sqrt[3]{3}+83\cong 70.02$	
(3,2)	75	
$(\sqrt[3]{2},2)$	$\sqrt[3]{2}^4-8\sqrt[3]{2}+18\cong 10.44$	
(0,2)	18	

24. Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di $f(x;y) = (x-1)e^{xy}$ nella regione $T = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, -1 \leq y \leq 0, x+y \leq 1\}$.



$$f_x = 1 \cdot e^{xy} + (x-1) \cdot y e^{xy} = e^{xy} \cdot (1 + xy - y)$$

$$f_y = (x-1) \cdot x \cdot e^{x \cdot y}$$

$$\nabla f = \vec{0} \iff \begin{cases} e^{xy} \cdot (1 + xy - y) = 0 & (1) \\ (x-1) \cdot x \cdot e^{x \cdot y} = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow$ $x = 1$ $\vee$ $x = 0$ sost nella (1)

$x = 1$: $1 + y - y = 0 \iff 1 = 0$ imp.

$x = 0$: $1 + 0 - y = 0 \iff y = 1$ ma $P = (0;1) \notin T$

quindi in T non ci sono punti critici.

Studio sui bordi

B_1: $x = 0$, $-1 \leq y \leq 0$: $f(0;y) = (0-1) \cdot e^0 = -1 = g_1(y)$

$g_1'(y) = 0$

B_2: $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$: $f(x;0) = (x-1) \cdot e^0 = x - 1 = g_2(x)$

$g_2'(x) = 1 \neq 0$

B_3 : $y = 1 - x$, $1 \leq x \leq 2$: $f(x; 1-x) = (x-1) \cdot e^{x \cdot (1-x)} = (x-1) e^{x - x^2} = g_3(x)$

$$g_3'(x) = 1 \cdot e^{x-x^2} + (x-1) e^{x-x^2} \cdot (1-2x)$$
$$= e^{x-x^2} \cdot (1 + (x-1)(1-2x))$$
$$= e^{x-x^2} \cdot (1 + x - 2x^2 - 1 + 2x)$$
$$= e^{x-x^2} (3x - 2x^2)$$

$$g_3'(x) = 0 \iff 3x - 2x^2 = 0 \iff x \cdot (3 - 2x) = 0$$

$x_1 = 0$; $y_1 = 1$ $(0;1) \notin T$

$x_2 = \frac{3}{2}$; $y_2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}) \in T$

B_4 : $y = -1$, $0 \leq x \leq 2$: $f(x;-1) = (x-1) \cdot e^{-x} = g_4(x)$

$$g_4'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x-1) e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} (1 - (x-1)) = e^{-x} (2 - x)$$

$g_4'(x) = 0 \iff 2 - x = 0 \iff x = 2$ $(2;-1) \in T$

Candidati max e min assoluti

x	y	$f(x,y)$
0	0	-1
1	0	0
0	-1	-1
2	-1	$e^{-2} \simeq 0.135$
0	y $(y \in [-1;0])$	-1
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}} \simeq 0.236$

- sul bordo B_1 si ha il valore minimo assoluto (-1)
- nel punto $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$ si ha il massimo assoluto $(\simeq 0.236)$

25. Si consideri la seguente funzione a due variabili indipendenti $f(x;y) = 2x^3 + 2xy - 10x$ ed il punto $P = (-1;4)$.

(a) Determinare il valore massimo della derivata direzionale di $f(x;y)$ nel punto P.

(b) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto P.

(c) Scrivere l'equazione della curva di livello e della retta tangente alla curva di livello di $f(x;y)$ nel punto P.

(d) Determinare i punti critici di $f(x;y)$ e stabilirne il tipo.

(e) Determinare il minimo e il massimo assoluti assunti da $f(x;y)$ nella regione limitata $R = \{(x;y) | -1 \leq y \leq 6 - x^2\}$. (Si richiedono sia le coordinate esatte dei punti di minimo e massimo, sia il valore assunto dalla funzione su tali punti).

) $f(x,y) = 2x^3 + 2xy - 10x$; $P = (-1;4)$

(a) $f_x(x,y) = 6x^2 + 2y - 10$; $f_y(x,y) = 2x$

$\text{grad} f = \begin{pmatrix} 6x^2 + 2y - 10 \\ 2x \end{pmatrix}$; $\text{grad} f(-1;4) = \begin{pmatrix} 6+8-10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(sappiamo che in ogni punto (a,b) la funzione $f(x,y)$ aumenta nel modo più rapido in direzione del vettore gradiente $\text{grad} f(a,b)$ e che la variazione massima vale $\|\text{grad} f(a,b)\|$)

variazione max $= \|\text{grad} f(-1;4)\| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = 2 \cdot \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \underline{2 \cdot \sqrt{5}}$

(b) L'equazione del piano tangente a $f(x,y)$ in $(a,b,f(a,b))$ è

$\pi: f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$

ma $f(-1;4) = -2 - 8 + 10 = 0$; $f_x(-1;4) = 4$; $f_y(-1;4) = -2$

quindi

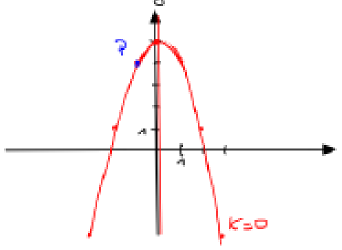
$\pi: 4 \cdot (x+1) - 2 \cdot (y-4) - (z-0) = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{4x - 2y - z + 12 = 0}}$

(c) Eq. curve di livello: $f(x,y) = k$

ma $f(-1;4) = 0$ quindi la curva di livello passante per $P = (-1;4)$ è la curva con $k=0$ ossia

$2x^3 + 2xy - 10x = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (x^2 + y - 5) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \underline{\underline{y = 5 - x^2}} \end{cases}$



P si trova sulla parabola di eq.

$g: y = 5 - x^2$

quindi la retta tang. alla parabola in P è:

$y = g(-1) + g'(-1)(x+1)$

$y = 4 + 2 \cdot (x+1)$

$\underline{\underline{y = 2x + 6}}$

(d) i punti critici sono i punti per cui $\text{grad}(f(x,y)) = \vec{0}$

ma $\text{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + 2y - 10 \\ 2x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 2y - 10 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$

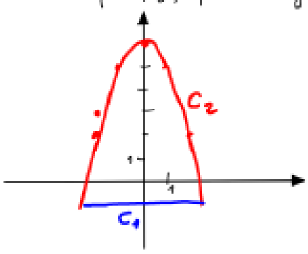
$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$

Calcoliamo l'hessiana per poter stabilire di che tipo è il punto critico $(0;5)$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(H(0;5)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$ quindi $(0;5)$ punto di sella.

(e) $R = \{(x,y) \mid -1 \le y \le 6 - x^2\}$



"$C_1 \cap C_2$": $-1 = 6 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$

$\boxed{C_1:}$ $y = -1$ per $-\sqrt{7} \le x \le \sqrt{7}$

$f(x;-1) = 2x^3 - 2x - 10x = 2x^3 - 12x = g_1(x)$

$g_1'(x) = 6x^2 - 12 = 6 \cdot (x^2 - 2)$

$g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

C_2: $y = 6 - x^2$ per $-\sqrt{7} \le x \le \sqrt{7}$

$f(x; 6 - x^2) = 2x^3 + 2x \cdot (6 - x^2) - 10x = 2x^3 + 12x - 2x^3 - 10x = 2x = g_2(x)$

$g_2'(x) = 2$; $g_2'(x) = 0 \Rightarrow 2 = 0$ imp.

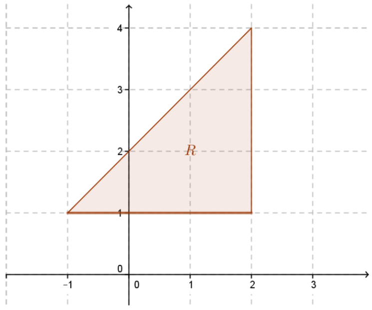
Quindi i possibili "candidati" a essere max o min assoluti sono

x	y	$f(x,y)$	
(0	5	0	punto di sella)
$-\sqrt{2}$	-1	$8\sqrt{2} \simeq 11.31$	Max assoluto $(-\sqrt{2};-1)$
$\sqrt{2}$	-1	$-8\sqrt{2} \simeq -11.31$	min. assoluto $(\sqrt{2};-1)$
$-\sqrt{7}$	-1	$-2\sqrt{7} \simeq -5.29$	
$+\sqrt{7}$	-1	$2\sqrt{7} \simeq 5.29$	

26. Si consideri la seguente funzione a due variabili indipendenti $f(x;y) = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y^2$.

(a) Determinare i punti critici di $f(x;y)$ e stabilirne il tipo.

(b) Determinare il minimo e il massimo assoluti assunti da $f(x;y)$ nella regione limitata R rappresentata in figura.



$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y^2$$

(a) $f_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 3\cdot(x-1)(x+1)$

$f_y(x,y) = 6y^2 - 12y = 6y(y-2)$

I punti critici sono quelli per cui $\nabla f(x,y) = \vec{0}$

$$\begin{cases} 3(x-1)(x+1) = 0 \\ 6y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1(1;0) \;;\; P_2(-1;0) \quad P_3(1;2) \quad P_4(-1;2)$$

$f_{xx} = 6x \;;\; f_{xy} = 0 = f_{yx} \qquad f_{yy} = 12y - 12$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y-12 \end{pmatrix}$$

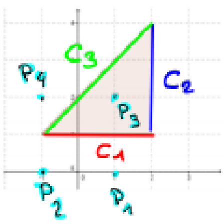
$\det(H(1;0)) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -72 < 0 \Rightarrow P_1(1,0)$ punto di sella

$\det(H(-1;0)) = \begin{vmatrix} \overset{<0}{-6} & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 72 > 0 \Rightarrow P_2(-1;0)$ massimo locale

$\det(H(1;2)) = \begin{vmatrix} \overset{>0}{6} & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 72 > 0 \Rightarrow P_3(1;2)$ minimo locale

$\det(H(-1;2)) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -72 < 0 \Rightarrow P_4(-1,2)$ punto di sella

(b)



C_1: $y = 1$ per $-1 \le x \le 2$

$f(x,1) = x^3 + 2 - 3x - 6$

$= x^3 - 3x - 4 = g_1(x)$

$g_1'(x) = 3x^2 - 3 = 3\cdot(x^2-1) = 3\cdot(x-1)(x+1)$

$g_1'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ✓ $\vee$ $x = -1$ ✓

C_2: $x = 2$ per $1 \le y \le 4$

$f(2;y) = 8 + 2y^3 - 6 - 6y^2 = 2y^3 - 6y^2 + 2 = g_2(y)$

$g_2'(y) = 6y^2 - 12y = 6y(y-2)$

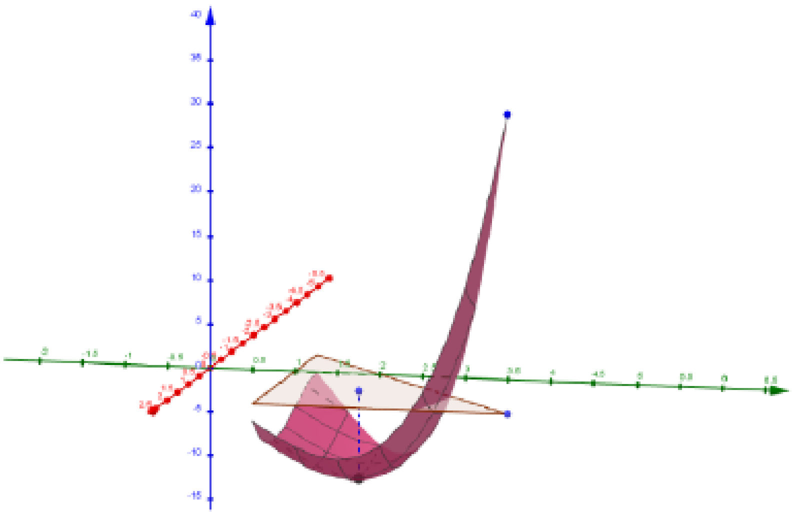
$g_2'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ NO $(2;0) \notin C_2$; $y = 2$ ✓

$C_3: \quad y = x+2 \quad$ per $\quad -1 \leq x \leq 2$

$$f(x, x+2) = x^3 + 2\cdot(x+2)^3 - 3x - 6\cdot(x+2)^2 =$$
$$= x^3 + 2\cdot(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - 3x - 6\cdot(x^2 + 4x + 4) =$$
$$= x^3 + 2x^3 + 12x^2 + \cancel{24x} + 16 - 3x - 6x^2 - \cancel{24x} - 24 =$$
$$= 3x^3 + 6x^2 - 3x - 8 = g_3(x)$$

$$g_3'(x) = 9x^2 + 12x - 3 = 3\cdot(3x^2 + 4x - 1)$$
$$g_3'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4+3}}{3} = \frac{-2 \mp \sqrt{7}}{3}$$
$$\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}; \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \notin C_3 \quad ; \quad \left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}; \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right) \checkmark$$

x	y	$f(x,y)$	
1	2	−10	min assoluto $(1;2)$
1	1	−6	
−1	1	−2	
2	1	−2	
2	2	−6	
$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$	−8.33	
2	4	34	Max assoluto in $(2;4)$



27. **(∗) Esercizio di approfondimento**
Dato l'integrale:

$$I = \int f(\dot{g}(x), g(x), x)dx$$

è possibile dimostrare che I presenta un estremo (massimo/minimo) se la funzione $f(\dot{g}(x), g(x), x)$ soddisfa la relazione:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}}(f(\dot{g}(x), g(x), x))\right) - \frac{\partial}{\partial g}(f(\dot{g}(x), g(x), x)) = 0 \qquad (\Delta)$$

Sfruttando (Δ) dimostrare che la curva più breve tra due punti è una retta.
Soluzione:

Si considerino i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e sia $g(x) = y$ una curva generica che unisce i due punti, ovviamente:

$$\begin{cases} g(x_1) &= y_1 \\ g(x_2) &= y_2 \end{cases} \qquad (1)$$

La lunghezza di $g(x)$ tra x_1 e x_2 risulta, come sappiamo:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{g}(x)^2} \cdot dx$$

La funzione $f(\dot{g}(x), g(x), x)$ risulta quindi essere "**la radice quadrata di 1 più la derivata della funzione al quadrato**".
Applicando la (Δ) otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}}(f(\dot{g}(x), g(x), x))\right) - \frac{\partial}{\partial g}(f(\dot{g}(x), g(x), x)) &= 0 \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{g}}(\sqrt{1 + \dot{g}(x)^2})\right) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial g}\left(\sqrt{1 + \dot{g}(x)^2}\right)}_{0} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \dot{g}}\left(\sqrt{1 + \dot{g}(x)^2}\right) &= c \\ \frac{\dot{g}(x)}{\sqrt{1+\dot{g}(x)^2}} &= c \end{cases}$$

dove c è una costante. Isolando $\dot{g}(x)$ si ottiene:

$$\dot{g}(x) = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = m$$

con $m = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ costante.
Integrando:

$$g(x) = m \cdot x + q$$

con q costante di integrazione. Imponendo le condizioni al contorno (1), completiamo la dimostrazione.