Esame AL2 01.02 2022 soluzioni

1. Sia data la matrice $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$. Scrivere B^4 come combinazione lineare delle matrici B e I usando il teorema di Cayley-Hamilton.

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\text{C.-H.}: \ p_B(B) = 0 \quad \Rightarrow \quad B^2 = B + 2I$$

$$B^3 = B \cdot B^2 = B \cdot (B + 2I) = B^2 + 2B = B + 2I + 2B = 3B + 2I$$

$$B^4 = B \cdot B^3 = 3B^2 + 2B = 3B + 6I + 2B = 5B + 6I \quad (\text{oppure } B^4 = B^2 \cdot B^2)$$

$$\boxed{B^4 = 5B + 6I}$$

2. Di una matrice quadrata A, 3×3, è noto che:

$$1 \in S_A, \quad \mathrm{Ker}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Determinare la matrice A.

(b) Determinare la matrice e^A.

a) $\mathrm{Ker}(A) = E_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow 0$ è autovalore per A, $mg(0) = 2$

$\Rightarrow S_A = \{1; 0; 0\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b) $$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e + \frac{5}{6} & \frac{1}{6} - \frac{e}{6} & \frac{1}{3} - \frac{e}{3} \\ \frac{1}{6} - \frac{e}{6} & \frac{e}{6} + \frac{5}{6} & \frac{e}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{e}{3} & \frac{e}{3} - \frac{1}{3} & \frac{2}{3}e + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. Sia A una matrice reale 3×3 tale che $1 + 2i$ è un suo autovalore. È noto che $\mathrm{tr}(A) = 2$.

(a) La matrice A è invertibile?

(b) La matrice A è diagonalizzabile?

Giustificare entrambe le risposte.

a) Se $1+2i \in S_A \Rightarrow 1-2i \in S_A$

il terzo autovalore deve essere reale!

autovalori: $\lambda_1 = 1+2i \quad \lambda_2 = 1-2i \quad \lambda_3 = K \in \mathbb{R}$

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = (1+2i)(1-2i) \cdot K = 5K$

$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + \cancel{2i} + 1 - \cancel{2i} + K = 2 + K$

$2 + K \overset{!}{=} 2 \iff K = 0$

Perciò $\det(A) = 0$, <u>A non è invertibile</u>!

b) I tre autovalori sono distinti, quindi $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i) = 1 \quad \forall \lambda_i \in S_A$

$\Rightarrow$ <u>A è diagonalizzabile</u>!

4. Si consideri la matrice $F = \begin{pmatrix} \frac{1001}{20} & 0 & -\frac{999}{20} \\ 0 & 100 & 0 \\ -\frac{999}{20} & 0 & \frac{1001}{20} \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare la norma e la condizione della matrice (entrambe in valore esatto).

(b) Sia dato il sistema lineare $F \cdot \vec{x} = \vec{b}$. A fronte di un errore relativo sui dati dello 0.2%, calcolare l'errore relativo massimo che si può commettere sulla soluzione del sistema.

a) F è reale simmetrica;

$$\det(F - \lambda I) = -\frac{1}{10}(10K - 1)(K - 100)^2 = 0$$

autovalori : $\lambda_1 = \frac{1}{10}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 100$

$$\Rightarrow \boxed{\|F\| = \max_{1 \le i \le 3} |\lambda_i| = 100}$$

$$\boxed{K(F) = \frac{\max_{1 \le i \le 3} |\lambda_i|}{\min_{1 \le i \le 3} |\lambda_i|} = \frac{100}{\frac{1}{10}} = 1000}$$

b) A fronte di un errore relativo sui dati dello 0,2%, l'errore relativo sulla soluzione può raggiungere il valore percentuale massimo $\boxed{K(F) \cdot 0{,}2\% = 200\%}$

5. Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = k\, u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) = u_1(t) + k\, u_2(t) \end{cases},$$

con condizioni iniziali $u_1(0) = u_2(0) = -1$, e con k parametro reale.

(a) Risolvere il sistema.

(b) Determinare per quali valori del parametro k sia $u_1(t)$ sia $u_2(t)$ convergono a 0 per $t \to +\infty$.

a) $A = \begin{pmatrix} K & 1 \\ 1 & K \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - K + 1)(\lambda - K - 1) = 0$$

autovalori : $\lambda_1 = K - 1 \quad \lambda_2 = K + 1$

E_{K-1} : $\text{rref}(A - (K-1)I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{K-1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

E_{K+1} : $\text{rref}(A - (K+1)I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{K+1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(K-1)t} & 0 \\ 0 & e^{(K+1)t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -e^{(K+1)t} \\ -e^{(K+1)t} \end{pmatrix}}$$

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff K+1 < 0$

$\iff \boxed{K < -1}$

6. È data la seguente trasformazione geometrica in $\mathbb{R}^2$:
alla proiezione ortogonale sulla retta $r : 3x + y = 0$ segue la simmetria assiale rispetto alla retta $s : x + y - 2 = 0$.

(a) Scrivere in coordinate omogenee la matrice P associata alla proiezione sulla retta r e la matrice S associata alla simmetria assiale rispetto alla retta s.

(b) Scrivere quindi in coordinate omogenee la matrice F associata alla trasformazione composta.

(c) Determinare le coordinate esatte del punto A_1 immagine del punto $A = (3; 4)$ attraverso la trasformazione geometrica definita dalla matrice F.

a) $O \in r$, $\vec{n}_r = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1 = I - \dfrac{\vec{n}_r \cdot \vec{n}_r^{\,T}}{\|\vec{n}_r\|^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$s : x + y - 2 = 0$; $O \notin s$; $C = (2; 0) \in s$; $\vec{n}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$S_1 = I - \frac{2\vec{n}_s \cdot \vec{n}_s^{\,T}}{\|\vec{n}_s\|^2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) $F = S \cdot P = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & 2 \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

c) $F \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} \\ \frac{29}{10} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A_1 = \left(-\frac{7}{10} ; \frac{29}{10}\right)}$