Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento tecnologie innovative

SUPSI

# ESAME MODULO M-B3010
# PARTE 1 - ANALISI 2

1. febbraio 2022

Nome : ..............................................................

Cognome : ..............................................................

Classe : ............

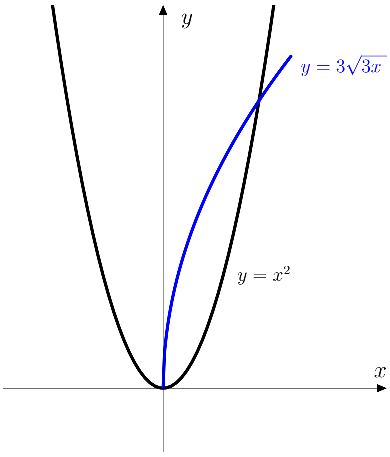
N. fogli all. : ............

**Osservazioni:**

1. È permesso utilizzare:
   - 2 fogli A4 (fronte/retro) di riassunto **personale**
   - foglio "Integrali e volumi, aree, lunghezze curve e baricentri"
   - foglio Ansatz
   - formulario (es. "Formulari e tavole" Edition G d'Encre)
   - calcolatrice non grafica e non programmabile **(NON CAS)**.
2. **Il procedimento di soluzione deve sempre essere comprensibile: risultati non giustificati da un procedimento non verranno accettati.**
3. Se non specificato altrimenti dal testo dell'esercizio, tutti i risultati devono essere scritti in forma esatta e semplificata.
4. Comportamenti illeciti durante l'esame quali copiature, comunicazione tra studenti, utilizzo di sussidi non ammessi (...) verranno sanzionati con l'assegnazione della valutazione F.
5. Durata esame: **120 minuti**

| **Es.** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | **TOT** | **VOTO** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| **Punti** | | | | | | | | | |

1. Sia $R$ la regione compresa tra i grafici delle funzioni $y = x^2$ e $x = 3\sqrt{3x}$ .




(a) Determinare i punti d'intersezione tra i due grafici.

(b) Calcolare l'area di $R$.

(c) Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando la regione $R$ attorno all'asse $x$.

(d) Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando la regione $R$ attorno all'asse $y$.

(e) Calcolare le coordinate del baricentro di $R$.

**Soluzione versione 1:**

(a) $x^2 = 3\sqrt{3x} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt[3]{27} = 3$

$x^4 = 9 \cdot 3x \qquad y_1 = x_1^2 = 0 \qquad y_2 = x_2^2 = 9$

$x(x^3 - 27) = 0 \qquad I_1(0;0) \qquad I_2(3;9)$

(b)
$$A = \int_0^3 3\sqrt{3x}\,dx - \int_0^3 x^2\,dx = \left[\cancel{3}\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}x^{3/2}\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 18 - 9 = 9$$

(c)
$$V_x = \int_0^3 (3\sqrt{3x})^2\pi\,dx - \int_0^3 (x^2)^2\pi\,dx = 27\pi\int_0^3 x\,dx - \pi\int_0^3 x^4\,dx$$
$$= 27\pi\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 - \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3$$
$$= \frac{243}{2}\pi - \frac{243}{5}\pi = \frac{729}{10}\pi$$

(d) $y = x^2 \quad (x \geq 0) \qquad\qquad y = 3\sqrt{3x} \quad (x \geq 0)$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{y} \qquad\qquad y^2 = 27x$

$x = \frac{1}{27}y^2$

$$\Rightarrow V_y = \int_0^9 (\sqrt{y})^2\pi\,dy - \int_0^9 \left(\frac{1}{27}y^2\right)^2\pi\,dy = \pi\int_0^9 y\,dy - \frac{\pi}{729}\int_0^9 y^4\,dy$$
$$= \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^9 - \frac{\pi}{729}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^9 = \frac{81}{2}\pi - \frac{81}{5}\pi = \frac{243}{10}\pi$$

(e) Pappo: $\quad V_x = 2\pi y_G A \qquad V_y = 2\pi x_G A \qquad \Rightarrow G\left(\frac{27}{20} ; \frac{81}{20}\right)$

$\frac{729}{10}\pi = 18\pi y_G \qquad \frac{243}{10} = 18\pi x_G$

$y_G = \frac{81}{20} \qquad x_G = \frac{27}{20}$

**Soluzione versione 2:**

(a)

$$x^2 = 3\sqrt{3x} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$x^4 = 9 \cdot 3x \qquad y_1 = x_1^2 = 0 \qquad y_2 = x_2^2 = 9$$

$$x(x^3 - 27) = 0 \qquad I_1(0;0) \qquad I_2(3;9)$$

(b)

$$A = \int_0^3 3\sqrt{3x}\,dx - \int_0^3 x^2\,dx = \left[\cancel{3}\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}x^{3/2}\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 18 - 9 = 9$$

e)

$$x_B = \frac{1}{A}\int_a^b x\,(f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 x\left(3\sqrt{3x} - x^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 \left(3\sqrt{3}\,x^{3/2} - x^3\right)dx =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{3\sqrt{3}}{5/2}x^{5/2} - \frac{x^4}{4}\right)_0^3 = \frac{1}{9}\cdot\frac{243}{20} = \frac{27}{20}$$

$$y_B = \frac{1}{2A}\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3 \left(\left(3\sqrt{3x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3 \left(27x - x^4\right)dx =$$

$$= \frac{1}{18}\left(\frac{27}{2}x^2 - \frac{x^5}{5}\right)_0^3 = \frac{1}{18}\cdot\frac{729}{10} = \frac{81}{20}$$

$$G = \left(\frac{27}{20};\frac{81}{20}\right)$$

c)

$$V_x = 2\pi\cdot y_G\cdot A \rightarrow V_x = 2\pi\cdot\frac{81}{20}\cdot 9 = \frac{729}{10}\pi$$

d)

$$V_y = 2\pi\,x_G\cdot A \Rightarrow V_y = 2\pi\cdot\frac{27}{20}\cdot 18 = \frac{243}{10}\pi$$

2. Calcolare la lunghezza della spirale definita dalla funzione in forma polare $f(\theta) = e^{-2\theta}$ con $\theta \in [0; \infty[$.

**Soluzione:**

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

$$f(\varphi) = e^{-2\varphi} \qquad 0 \leq \varphi$$

$$f'(\varphi) = -2e^{-2\varphi}$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{R \to +\infty} \int_0^R \sqrt{(e^{-2\varphi})^2 + (-2e^{-2\varphi})^2}\, d\varphi$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_0^R (e^{-4\varphi} + 4e^{-4\varphi})^{1/2}\, d\varphi$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_0^R (5e^{-4\varphi})^{1/2}\, d\varphi$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \sqrt{5} \int_0^R e^{-2\varphi}\, d\varphi = \sqrt{5} \cdot \lim_{R \to +\infty} \left( -\frac{1}{2} e^{-2\varphi} \right|_0^R$$

$$= \sqrt{5} \cdot \lim_{R \to +\infty} \left( \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-2R}}_{0} + \frac{1}{2} e^{-2\cdot 0} \right) = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

3. Risolvere il seguente problema a valori iniziali:

$$xy' = y - 3x^4 \ , \ y(1) = 0$$

N.B: indicare in modo chiaro l'insieme di definizione della soluzione del problema.

**Soluzione VERSIONE 1 :**

$$xy' = y - 3x^4 \ , \ y(1) = 0$$

$x \neq 0 \quad y' - \frac{1}{x} y = -3x^3$

$$\mu(x) = \int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + \bar{c}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\ln|x|} \cdot \int e^{-\ln|x|} \cdot (-3x^3)\, dx$$

$\downarrow x > 0 \quad (C.I) \ x = 1$

$$= x \cdot \int \frac{1}{x} \cdot (-3x^3)\, dx = x \cdot \int -3x^2\, dx$$

$$= x\left(-x^3 + c\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = -x^4 + Cx$$

$$y(1) = -1 + C \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = -x^4 + x \quad \text{per } x > 0$$

**Soluzione VERSIONE 2:**

Riscriviamo: $y' = \frac{y}{x} - 3x^3$.

Questa equazione differenziale è definita per $x \neq 0$. Siccome il valore iniziale è positivo, cerchiamo una soluzione definita su $D := ]0, \infty[$.

Problema omogeneo: $y' = y/x$ ($x \neq 0$) ha soluzione generale $y(x) = Ce^{\ln|x|}$ che, su $D$, possiamo riscrivere come

$$y_h(x) = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Se $C \neq 0$ la $y_h(x)$ non si annulla mai sul dominio d'interesse.

Problema inomogeneo: per ottenere una soluzione omogenea che non si annulla su $D$, scegliamo $C = 1$. Scegliamo ora una primitiva di $\frac{-3x^3}{x} = -3x^2$, ad esempio $-x^3$.

Con questo la soluzione generale del problema inomogeneo è

$$y(x) = (-x^3 + C)x$$

Il valore iniziale ci dice $y(1) = (-1 + C) = 0$ e quindi $C = 1$.

La soluzione cercata è

$$y(x) = x(1 - x^3), \ \text{definita su } x > 0$$

4. Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale:

$$x'' - 2x' = 2t + 1$$

**Soluzione:**

P.O. : $x'' - 2x' = 0 \Rightarrow p(r) = r^2 - 2r = 0$

$r(r-2) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow r_1 = 0 \\ \searrow r_2 = 2 \end{matrix}$

$S = \{0; 2\}$

$\Rightarrow x_0(t) = C_1 + C_2 e^{2t}$

P.P. : $f_2(t) = 2t + 1 \Rightarrow 0 \in S$ ? sì!

Ansatz: $x_p(t) = t \cdot (b_1 t + b_0) = b_1 t^2 + b_0 t$

$x_p'(t) = 2b_1 t + b_0$

$x_p''(t) = 2b_1$

$\Rightarrow 2b_1 - 2(2b_1 t + b_0) \overset{!}{=} 2t + 1$

$\Rightarrow \begin{cases} -4b_1 = 2 \\ 2b_1 - 2b_0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b_1 = -1/2 \\ b_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = -\frac{1}{2}t^2 - t$

Soluzione Generale: $x(t) = C_1 + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 - t$

5. È data la seguente equazione differenziale:

$$3y''' - y'' + 6y' - 2y = 0$$

(a) Verifica che $y(t) = \cos(\sqrt{2}t)$ è una soluzione dell'equazione differenziale.

(b) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea.

**Soluzione:**

$3y''' - y'' + 6y' - 2y = 0 \quad (*)$

b) $\cos(\sqrt{2}t)$ è soluzione $\Rightarrow 0 \pm \sqrt{2}i \in$ Spettro di $(*)$

$\Rightarrow p(r) = 3r^3 - r^2 + 6r - 2$ è divisibile per:

$(r - \sqrt{2}i)(r + \sqrt{2}i) = r^2 - 2i^2 = r^2 + 2$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|l} 3r^3 - r^2 + 6r - 2 & & & r^2 + 2 \\ \hline 3r^3 \quad\quad + 6r & & & 3r - 1 \\ \hline -r^2 \quad - 2 & & & \\ -r^2 \quad - 2 & & & \\ \hline 0 & & & \end{array}$$

$\leftarrow$ parte a) ok!

$\Rightarrow p(r) = (r^2 + 2)(3r - 1) \qquad S = \{\pm\sqrt{2}i \,;\, 1/3)$

Soluzione $(*)$ : $y(t) = c_1 e^{1/3 t} + c_2 \cos(\sqrt{2}t) + c_3 \sin(\sqrt{2}t)$

a)

$y(t) = \cos(\sqrt{2}t)$

$y'(t) = -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)$

$y''(t) = -2\cos(\sqrt{2}t)$

$y'''(t) = 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)$

$3 \cdot 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + 2\cos(\sqrt{2}t) + 6 \cdot (-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)) - 2\cos(\sqrt{2}t)$

$\stackrel{!}{=} 0$ ✓

6. Determinare e classificare i punti critici della funzione:

$$f(x; y) = x^4 + y^4 + 4xy$$

**Soluzione:**

$$f(x;y) = x^4 + y^4 + 4xy$$

$$\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4y \\ 4y^3 + 4x \end{pmatrix}$$

$$\det(H_f(x;y)) = \begin{vmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16$$

$$\nabla f(x;y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow y = -x^3 \\ \Rightarrow 4(-x^3)^3 + 4x = 0 \end{array}$$

$$-4x^9 + 4x = 0$$

$$-4x(x^8 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \rightarrow y_1 = 1$$

$$x_2 = 0 \rightarrow y_2 = 0$$

$$x_3 = 1 \rightarrow y_3 = -1$$

$PC_1 = (-1;1)$ ; $\det(H_f(-1;1)) = 128 > 0$ ; $f_{xx}(-1;1) > 0$

$\hookrightarrow$ minimo locale

$PC_2 = (0;0)$ ; $\det(H_f(0;0)) = -16 < 0$

$\hookrightarrow$ punto di sella

$PC_3 = (1;-1)$ ; $\det(H_f(1;-1)) = 128 > 0$ ; $f_{xx}(1;-1) > 0$

$\hookrightarrow$ minimo locale

7. È data la funzione $f(x;y) = 2x^4 + y^3 - x^2y$.

(a) Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x;y)$ nel punto $(1;-2;f(1;-2))$.

(b) Calcolare la derivata direzionale di $f(x;y)$ in $P = (1;-2)$ in direzione del punto $Q = (2;2)$.

(c) Disegnare la regione $D$ limitata dal grafico delle rette di equazione $y = 0$, $x = 2$ e $y = x$. Determinare il massimo e il minimo assoluti assunti dalla funzione nella regione $D$.

**Soluzione:**

a) $f(x,y) = 2x^4 + y^3 - x^2y \qquad A = (1;-2;-4)$

$f_x(x,y) = 8x^3 - 2xy \qquad f_x(1;-2) = 12$

$f_y(x,y) = 3y^2 - x^2 \qquad f_y(1;-2) = 11$

Piano tangente:

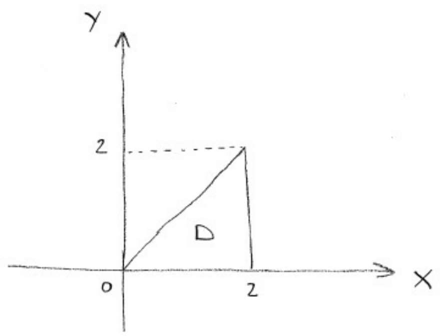
$z - (-4) = 12\cdot(x-1) + 11\cdot(y+2)$

$\boxed{12x + 11y - z + 6 = 0}$

b) $\vec{\nabla} f(1,-2) = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \dfrac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right|_{(1;-2)} = \vec{\nabla} f(1;-2)\cdot\vec{v} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}\cdot\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{\dfrac{56}{17}\sqrt{17}}$

c) Punti interni a D:




$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 8x^3 - 2xy \\ 3y^2 - x^2 \end{pmatrix}$

$\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} 8x^3 - 2xy = 0 & (1) \\ 3y^2 - x^2 = 0 & (2) \end{cases}$

DALLA (1):

$2x(4x^2 - y) = 0$

$x = 0$ OPPURE $y = 4x^2$

DALLA (2):

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 4x^2 \Rightarrow 48x^4 - x^2 = 0$

$x^2(48x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \qquad x = \pm\frac{1}{12}\sqrt{3}, \quad y = \frac{1}{12}$

PUNTI CRITICI

$\boxed{I_1 = (0;0)} \qquad \boxed{I_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12};\ \frac{1}{12}\right)} \qquad \boxed{I_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{12};\ \frac{1}{12}\right)}$

$I_1$ È UN VERTICE $\qquad I_2 \notin D \qquad I_3$ È INTERNO A D.

studio sul bordo di D:

- STUDIO SULLA COMPONENTE DI BORDO $Y = 0$ :

$\varphi_1(x) = f(x, 0) = 2x^4 \qquad 0 < x < 2$

$\varphi_1(x)$ NON HA ESTREMI RELATIVI PER $0 < x < 2$

- STUDIO SU $x = 2$

$\varphi_2(y) = f(2, y) = 32 + y^3 - 4y \qquad 0 < y < 2$

$\varphi_2'(y) = 3y^2 - 4$

$\varphi_2'(y) = 0 \iff y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$

DOBBIAMO CONSIDERARE SOLO (CONDIZIONE $0 < y < 2$ $\qquad A = \left(2; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

- STUDIO SU $y = x$

$\varphi_3(x) = 2x^4 + x^3 - x^3 = 2x^4 \qquad 0 < x < 2$

$\varphi_3(x)$ NON HA ESTREMI RELATIVI PER $0 < x < 2$

Candidati:

$I_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{1}{12}\right) \qquad f\left(\frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{3456} \simeq -2.89 \cdot 10^{-4}$

$A = \left(2; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \qquad f\left(2; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 32 - \frac{16}{9}\sqrt{3} \simeq 28.9$

$$\left.\begin{array}{ll} B = (0;0) & f(0,0) = 0 \\ C = (2;0) & f(2,0) = 32 \\ D = (2;2) & f(2,2) = 32 \end{array}\right\} \text{VERTICI}$$

MASSIMI ASSOLUTI : $C = (2,0)$, $D = (2,2)$ $\qquad$ MINIMO ASSOLUTO : $I_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{1}{12}\right)$