Элементы аналитической геометрии.

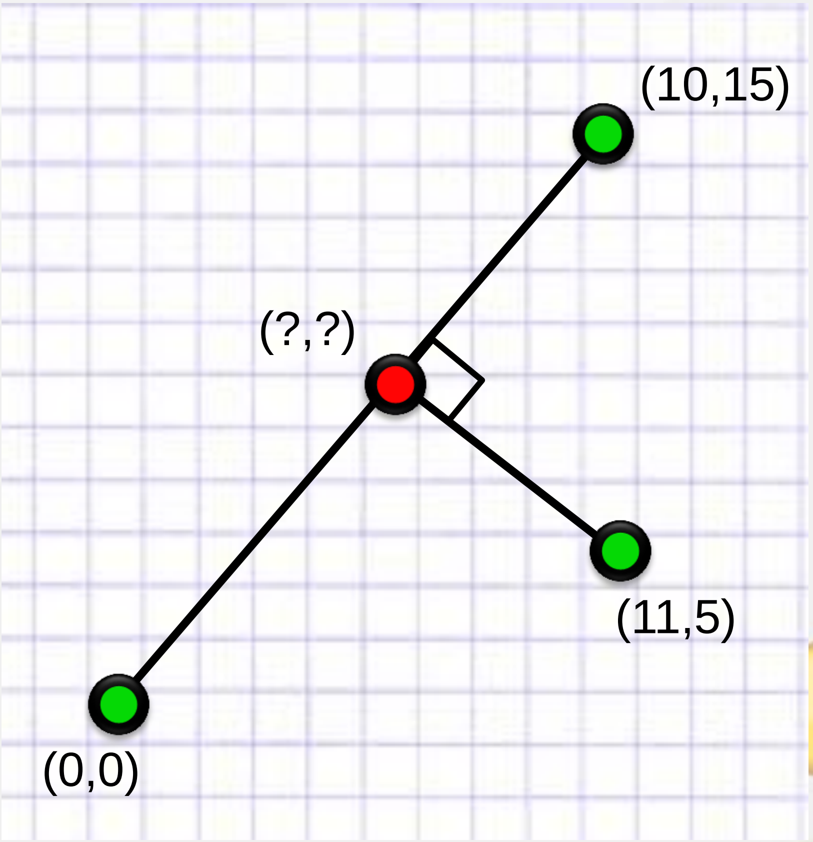
Sukhov Pavel

N.Novgorod, 2014

Цели.

Цели.

- Вычисление координат основных точек на плоскости.

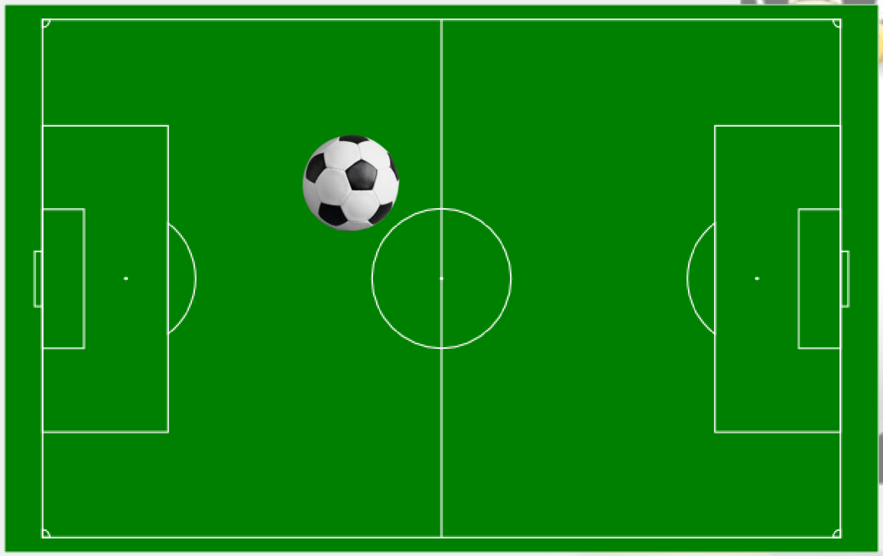


Цели.

- Вычисление координат основных точек на плоскости.
  - Основные операции
  - Векторная геометрия
  - Прочее …

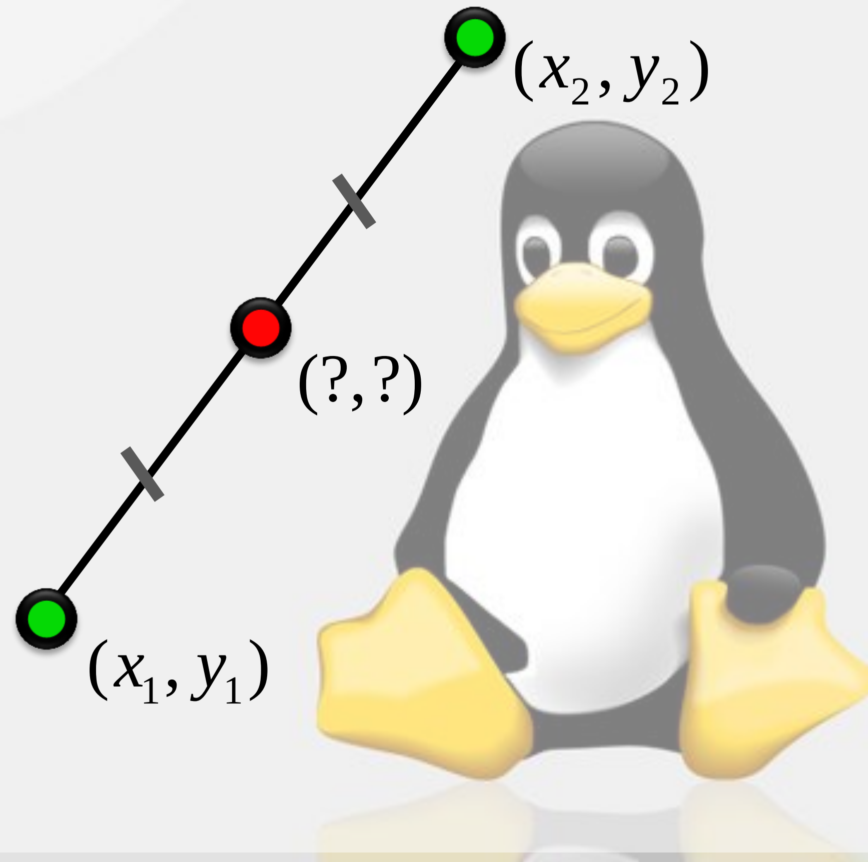
Цели.

- Вычисление координат основных точек на плоскости.
  - Основные операции
  - Векторная геометрия
  - Прочее …
- Применение аналитической геометрии к игре «футбол»



Движение.

- Даны координаты двух точек. Найти координаты точки, находящейся между ними на равном расстоянии от каждой.

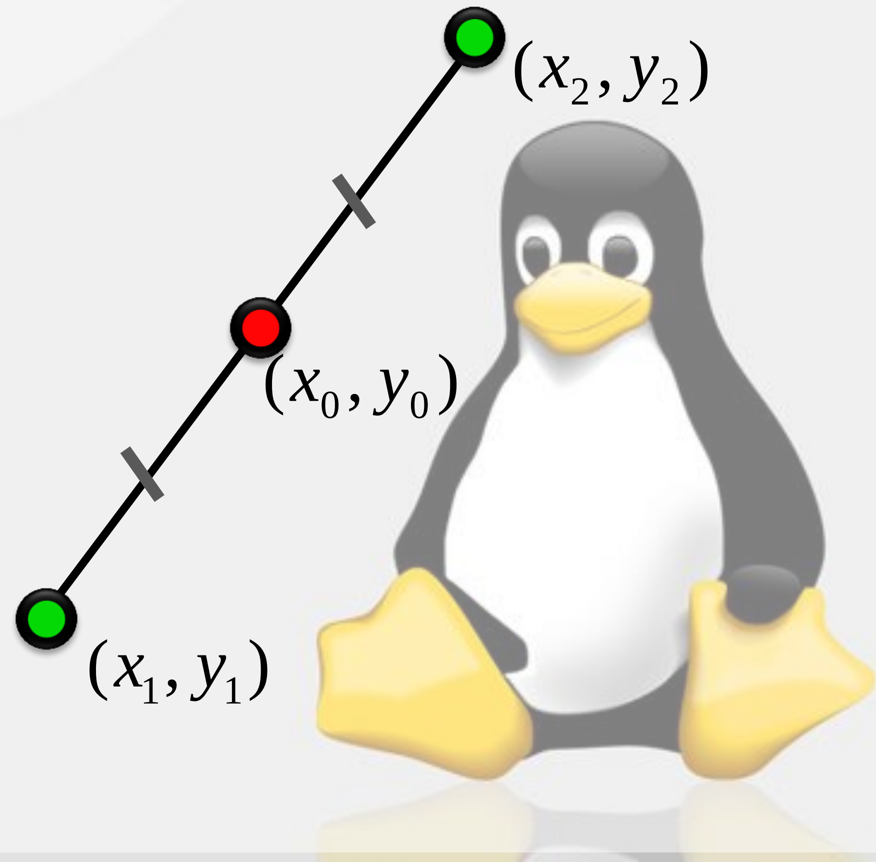


Движение.

- Даны координаты двух точек. Найти координаты точки, находящейся между ними на равном расстоянии от каждой.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

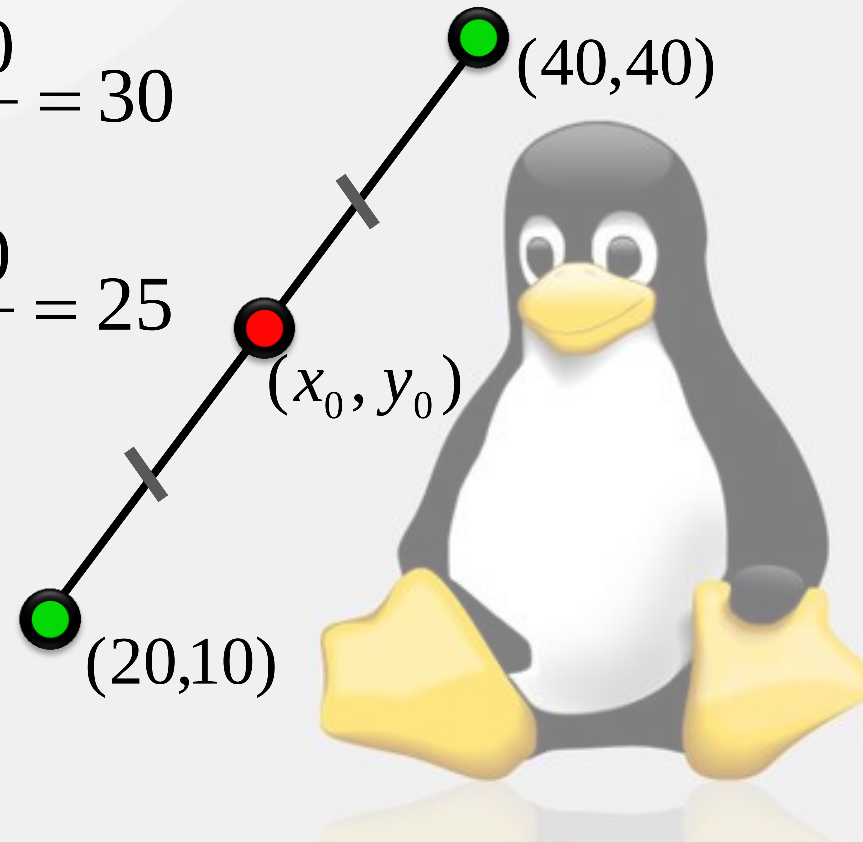


Движение.

- Даны координаты двух точек. Найти координаты точки, находящейся между ними на равном расстоянии от каждой.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad x_0 = \frac{20+40}{2} = 30$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad y_0 = \frac{10+40}{2} = 25$$

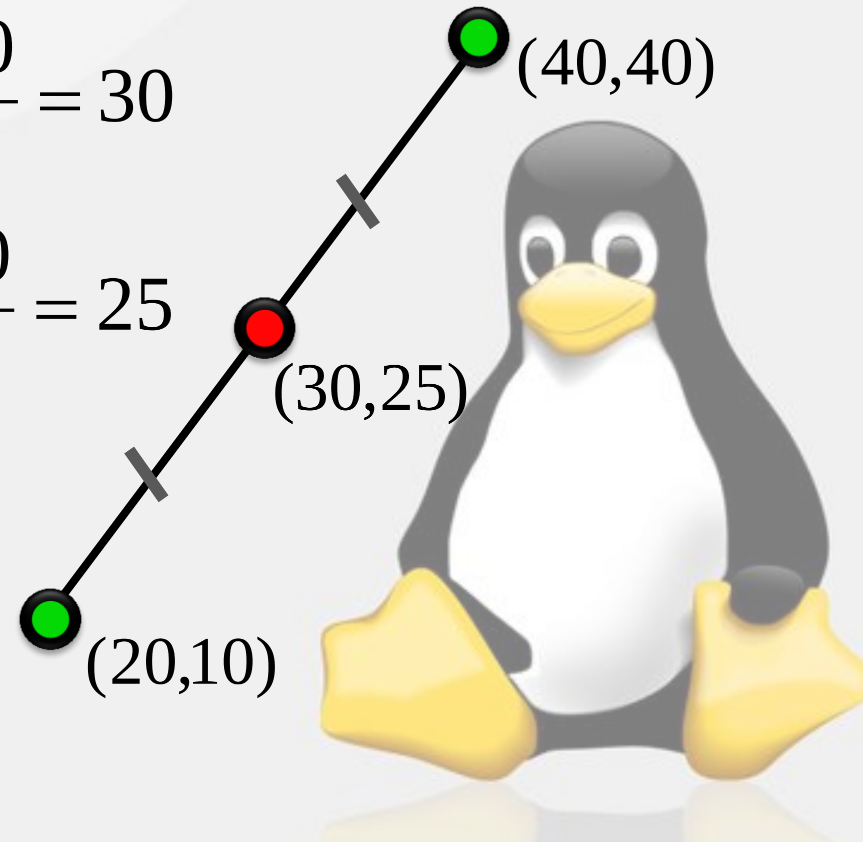


Движение.

- Даны координаты двух точек. Найти координаты точки, находящейся между ними на равном расстоянии от каждой.

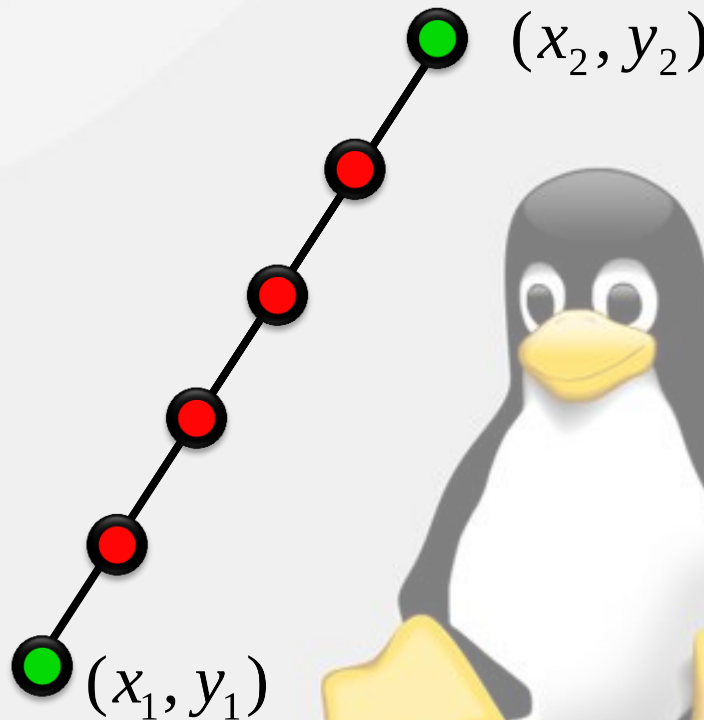
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad x_0 = \frac{20 + 40}{2} = 30$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad y_0 = \frac{10 + 40}{2} = 25$$



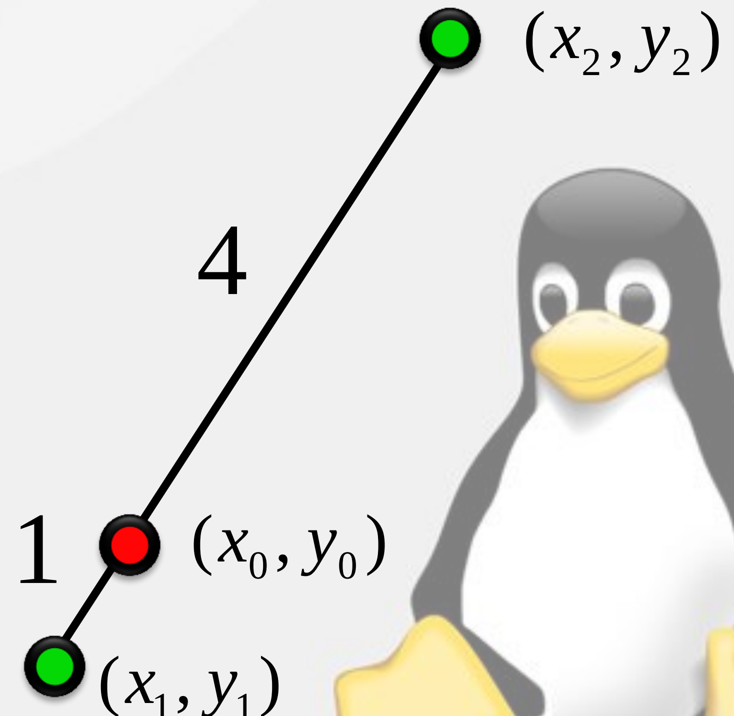
Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.



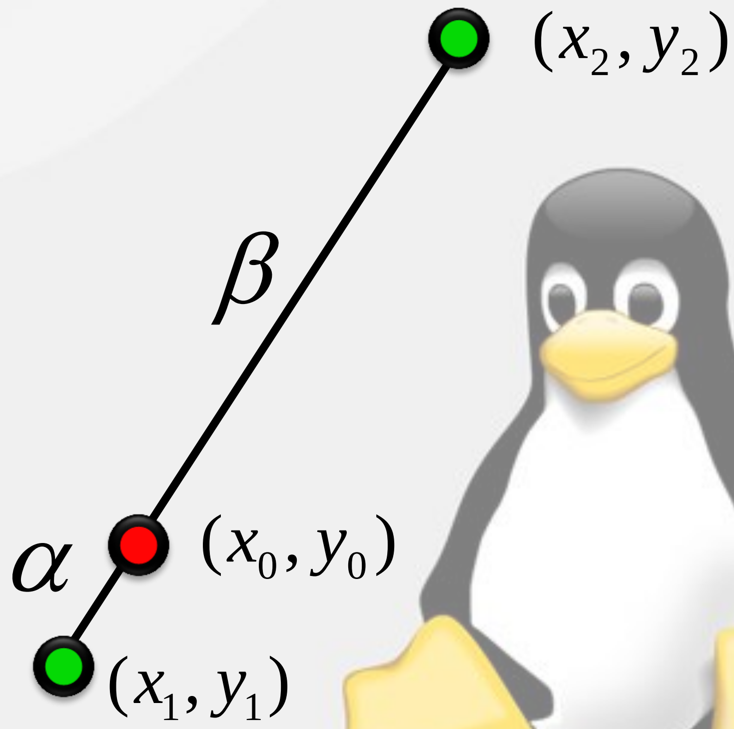
Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.



Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.

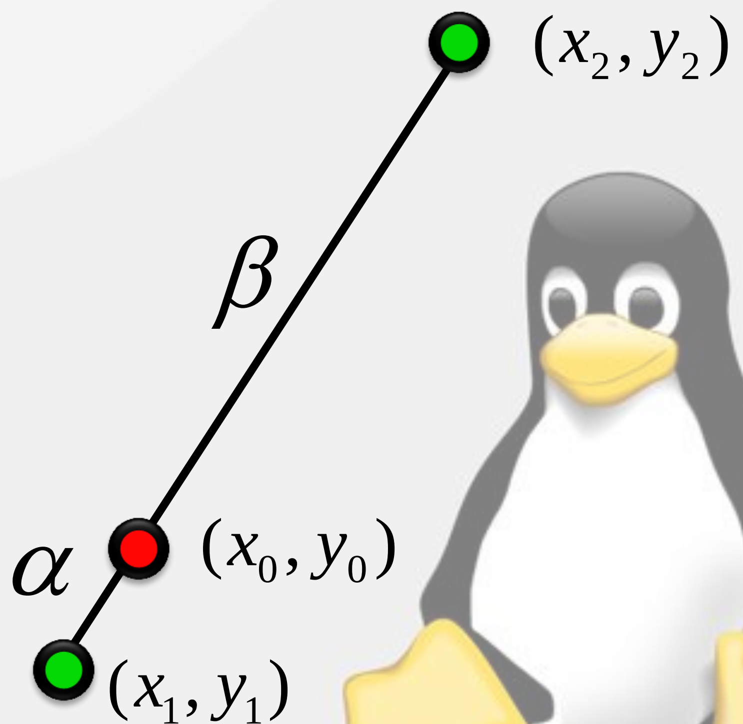


Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.

$$x_0 = \frac{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2}{\alpha + \beta}$$

$$y_0 = \frac{\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2}{\alpha + \beta}$$

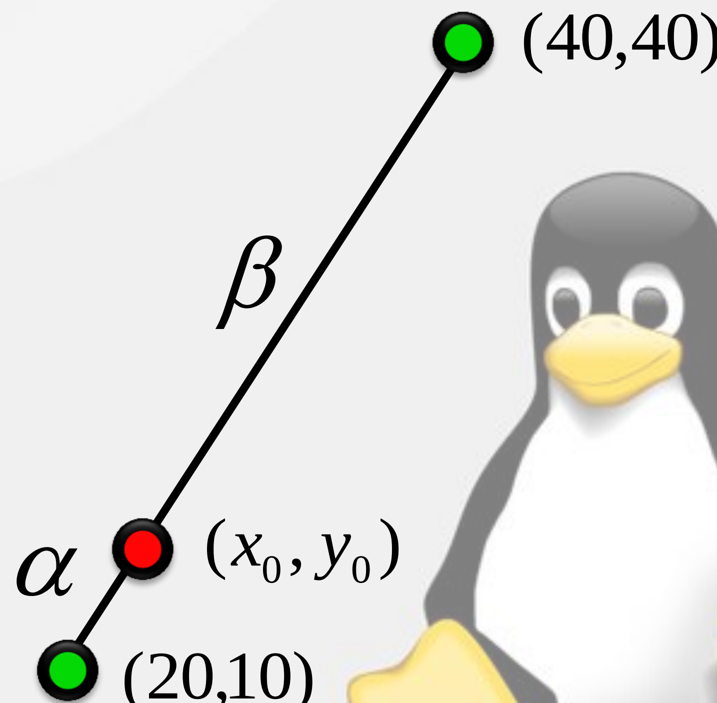


Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.

$$x_0 = \frac{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2}{\alpha + \beta}$$

$$y_0 = \frac{\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2}{\alpha + \beta}$$



Движение.

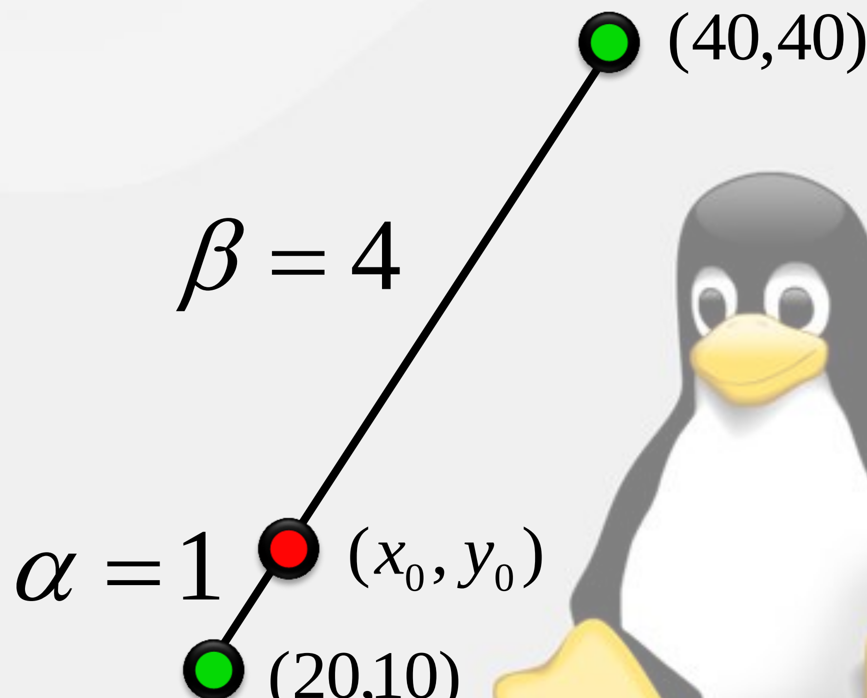
- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.

$$x_0 = \frac{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2}{\alpha + \beta}$$

$$y_0 = \frac{\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2}{\alpha + \beta}$$

$$x_0 = ???$$

$$y_0 = ???$$



Движение.

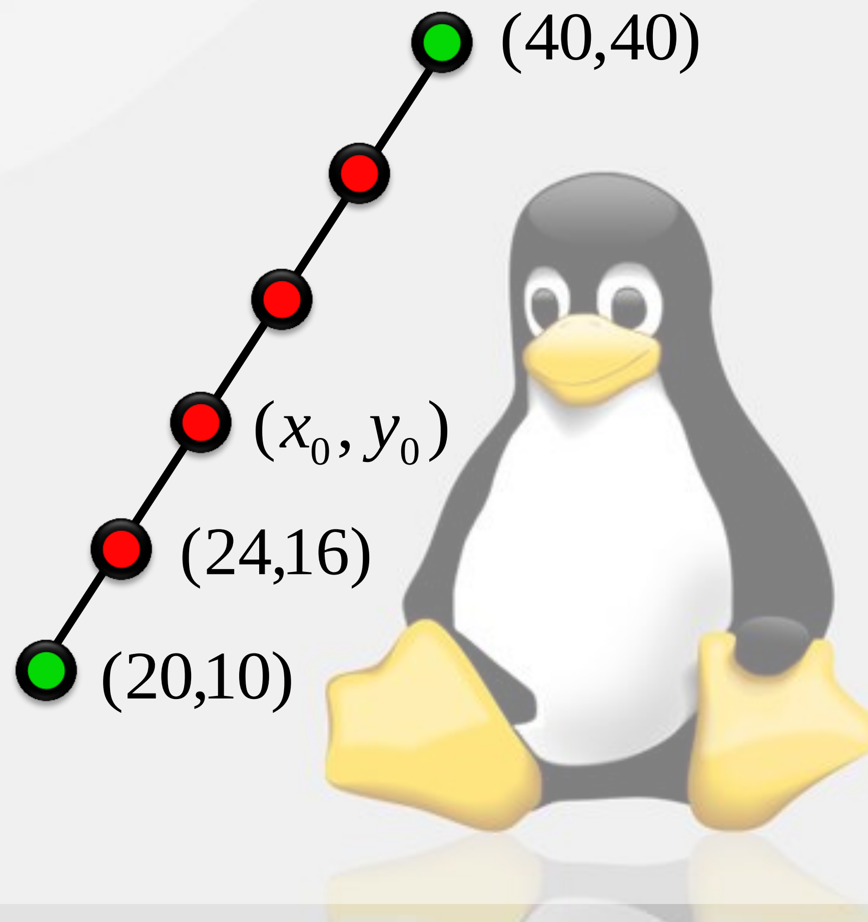
- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.

$$x_0 = \frac{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2}{\alpha + \beta}$$

$$y_0 = \frac{\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2}{\alpha + \beta}$$

$$x_0 = ???$$

$$y_0 = ???$$



Движение.

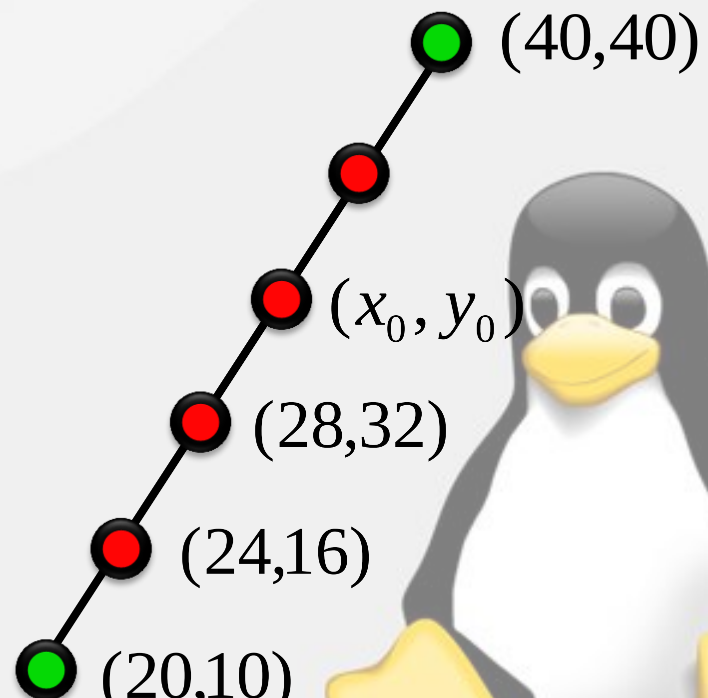
- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.

$$x_0 = \frac{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2}{\alpha + \beta}$$

$$y_0 = \frac{\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2}{\alpha + \beta}$$

$$x_0 = ???$$

$$y_0 = ???$$



Движение.

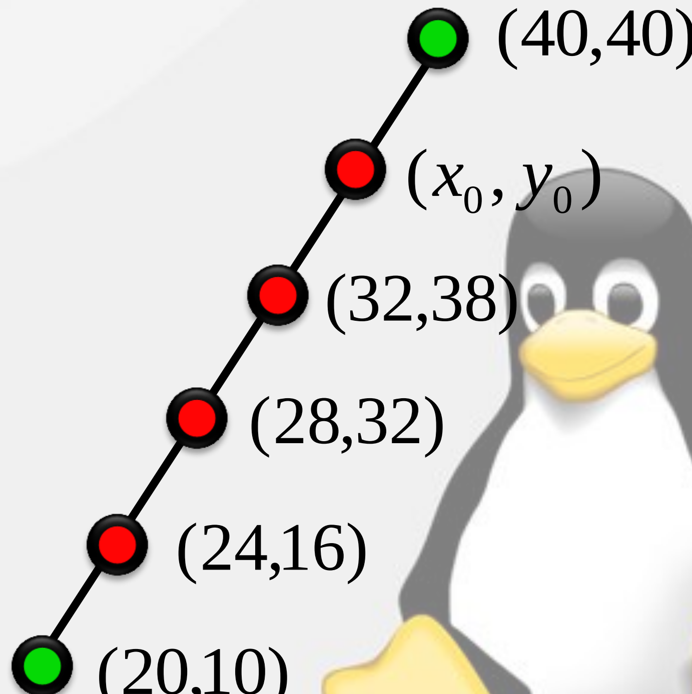
- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.

$$x_0 = \frac{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2}{\alpha + \beta}$$

$$y_0 = \frac{\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2}{\alpha + \beta}$$

$$x_0 = ???$$

$$y_0 = ???$$



Движение.

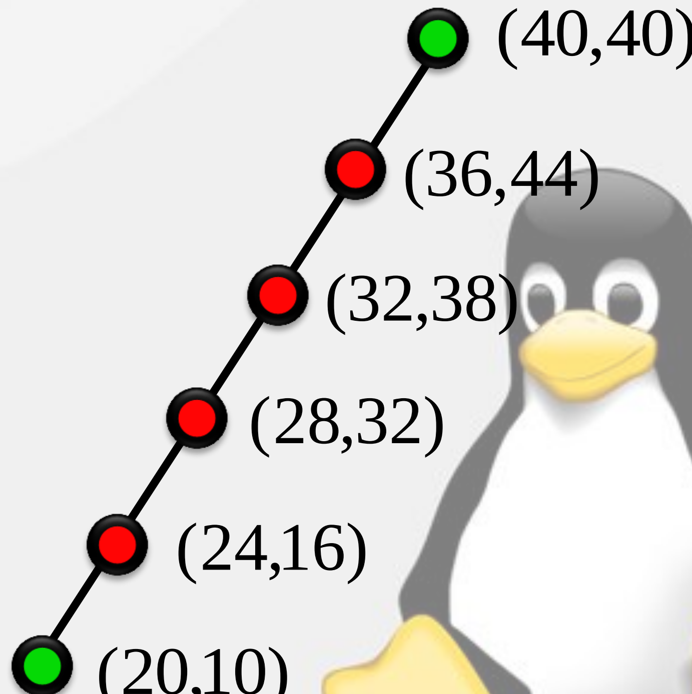
- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.

$$x_0 = \frac{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2}{\alpha + \beta}$$

$$y_0 = \frac{\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2}{\alpha + \beta}$$

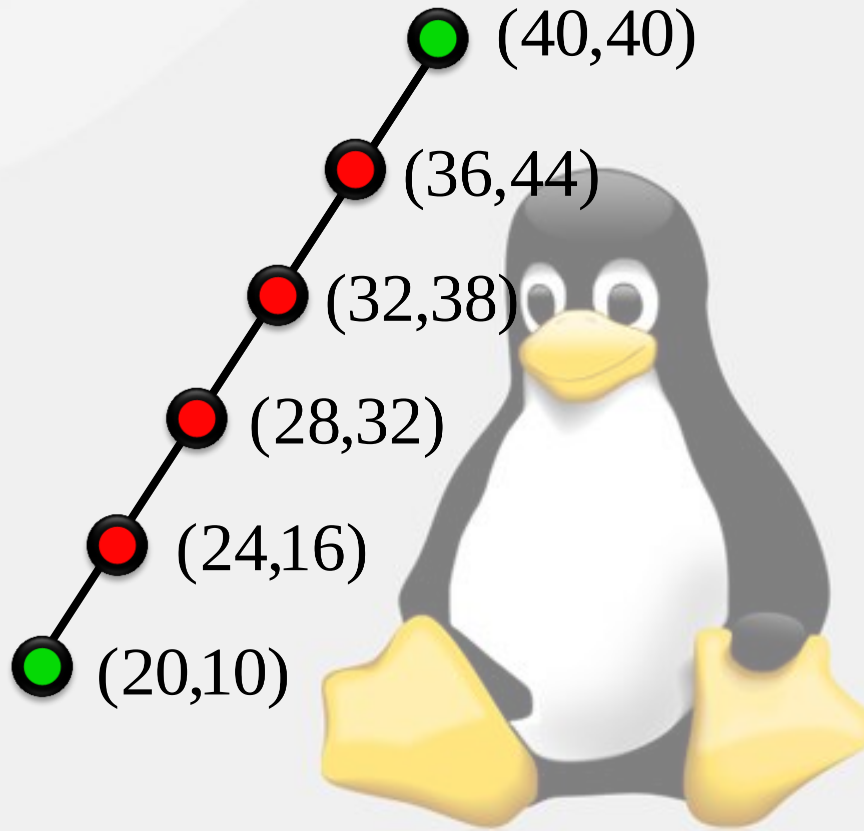
$$x_0 = ???$$

$$y_0 = ???$$



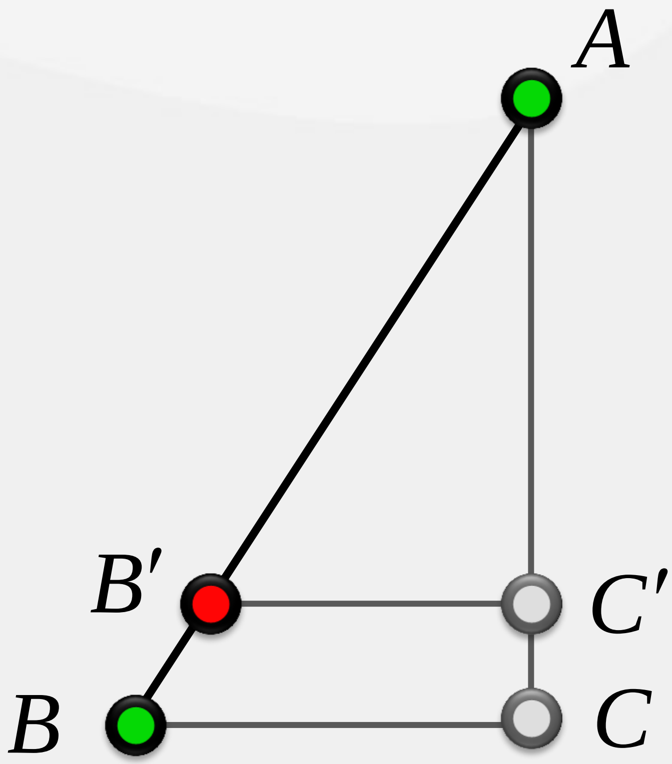
Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?



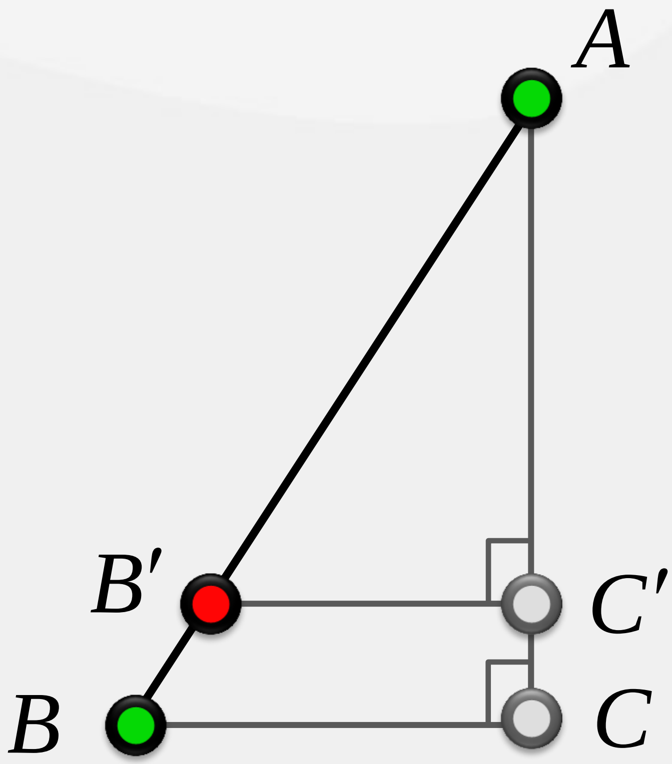
Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?



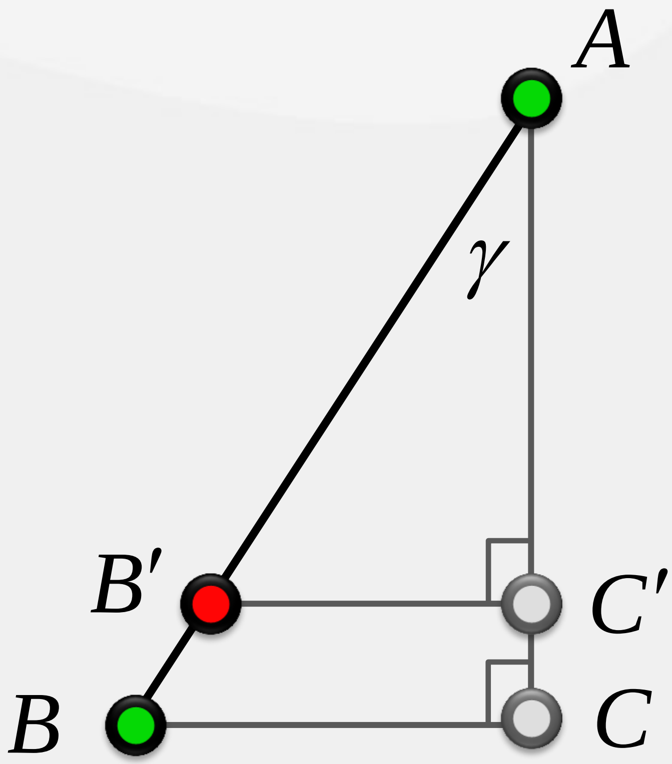
Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?



Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?

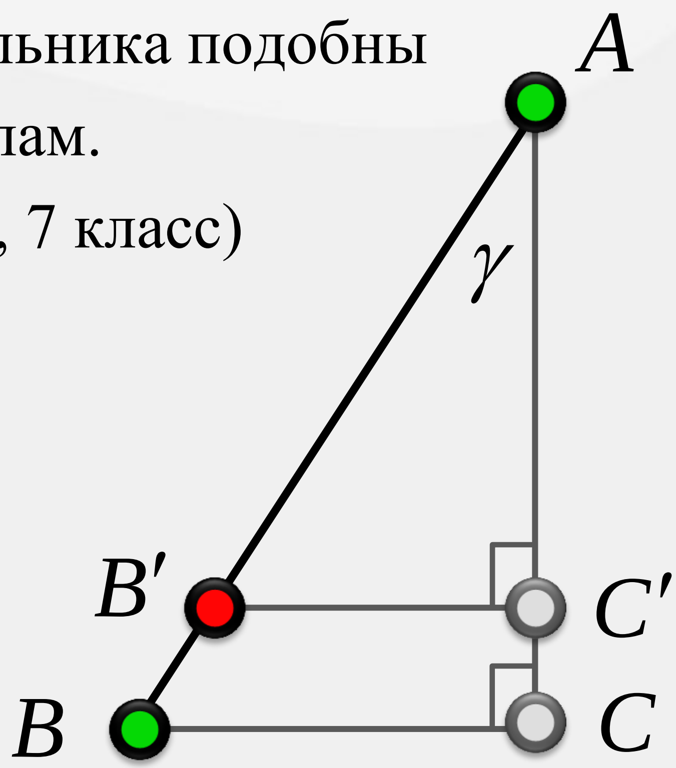


Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?
- Два треугольника подобны

  по двум углам.

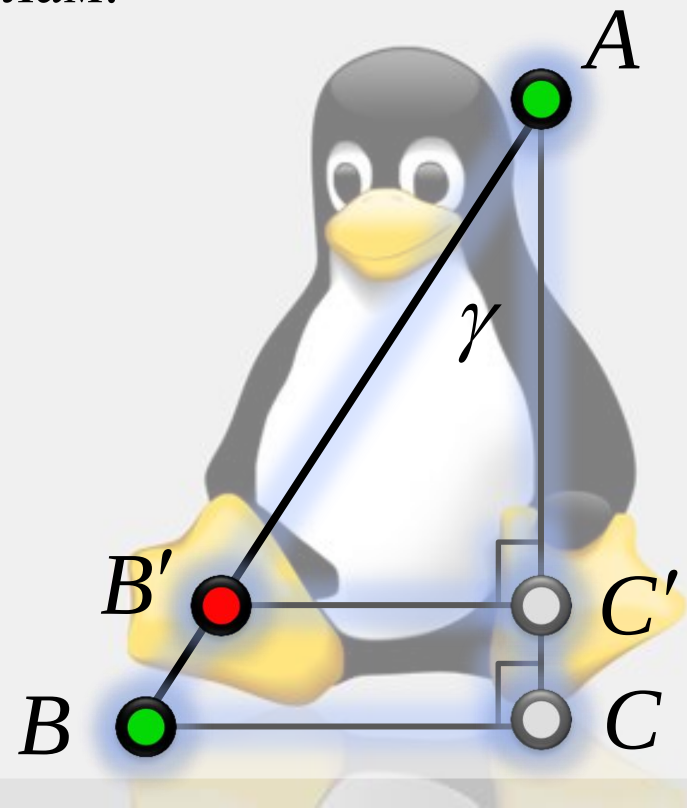
  (геометрия, 7 класс)



Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?
- Два треугольника подобны по двум углам.

 (геометрия, 7 класс)

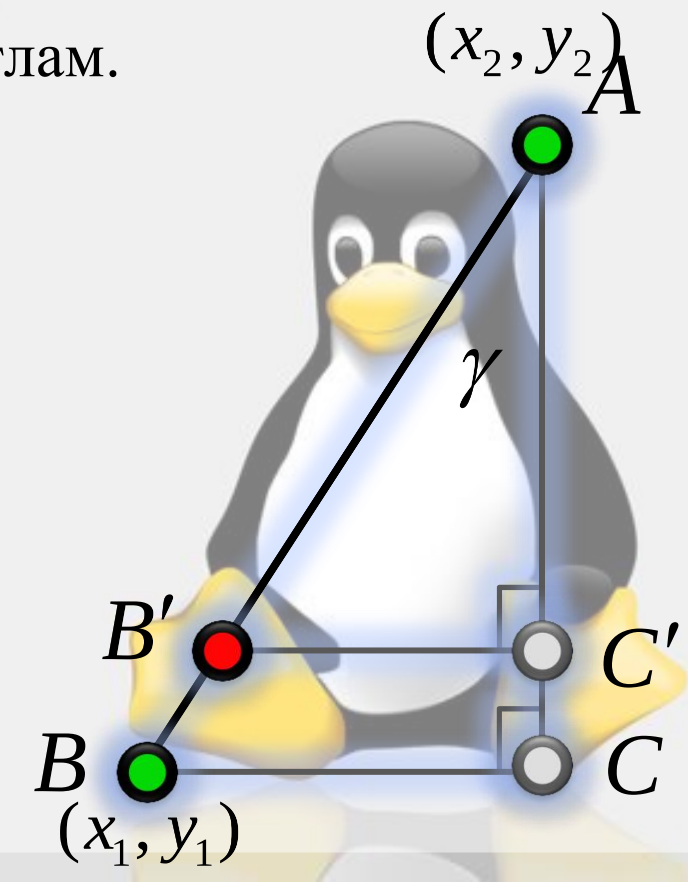


Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?
- Два треугольника подобны по двум углам.

(геометрия, 7 класс)

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{BC'}$$

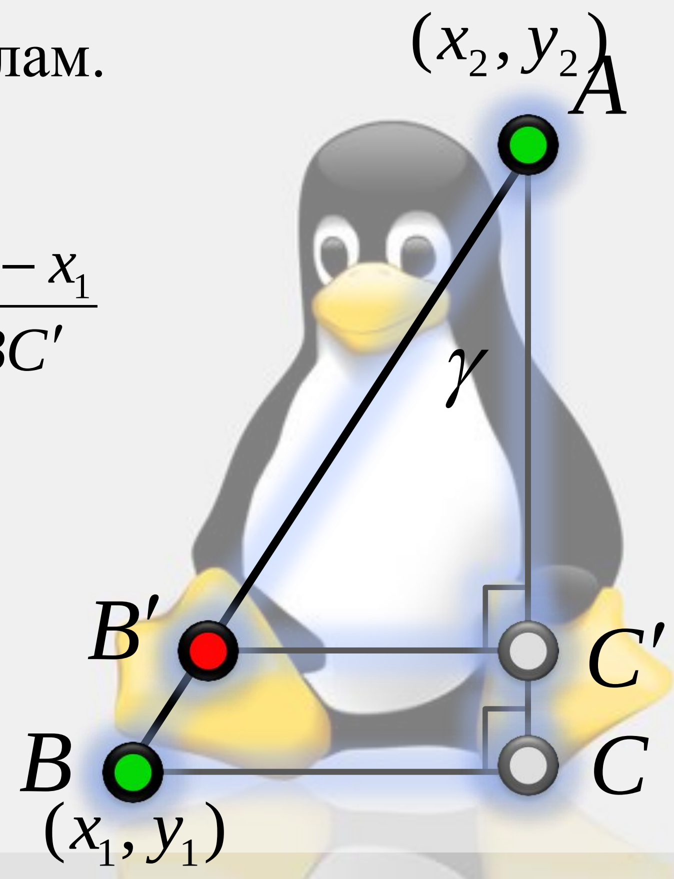


Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?
- Два треугольника подобны по двум углам.

(геометрия, 7 класс)

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{BC'} \qquad \frac{AB}{AB'} = \frac{y_2 - y_1}{AC'} = \frac{x_2 - x_1}{BC'}$$



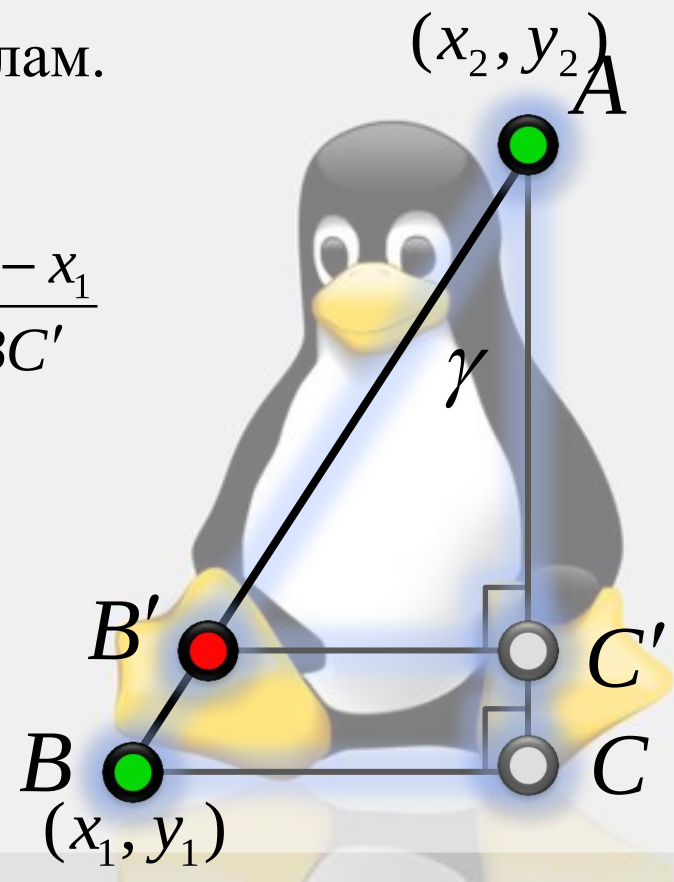
Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?
- Два треугольника подобны по двум углам.

(геометрия, 7 класс)

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{BC'} \qquad \frac{AB}{AB'} = \frac{y_2 - y_1}{AC'} = \frac{x_2 - x_1}{BC'}$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_0} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}$$



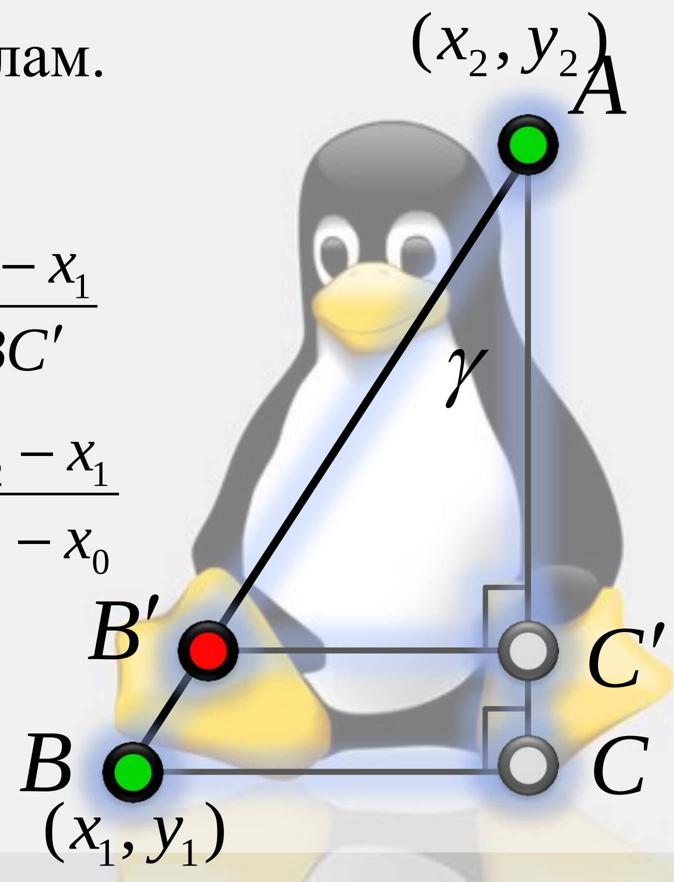
Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?
- Два треугольника подобны по двум углам.

(геометрия, 7 класс)

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{BC'} \qquad \frac{AB}{AB'} = \frac{y_2 - y_1}{AC'} = \frac{x_2 - x_1}{BC'}$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_0} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} \qquad \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_0} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}$$



Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?
- Два треугольника подобны по двум углам.

  (геометрия, 7 класс)

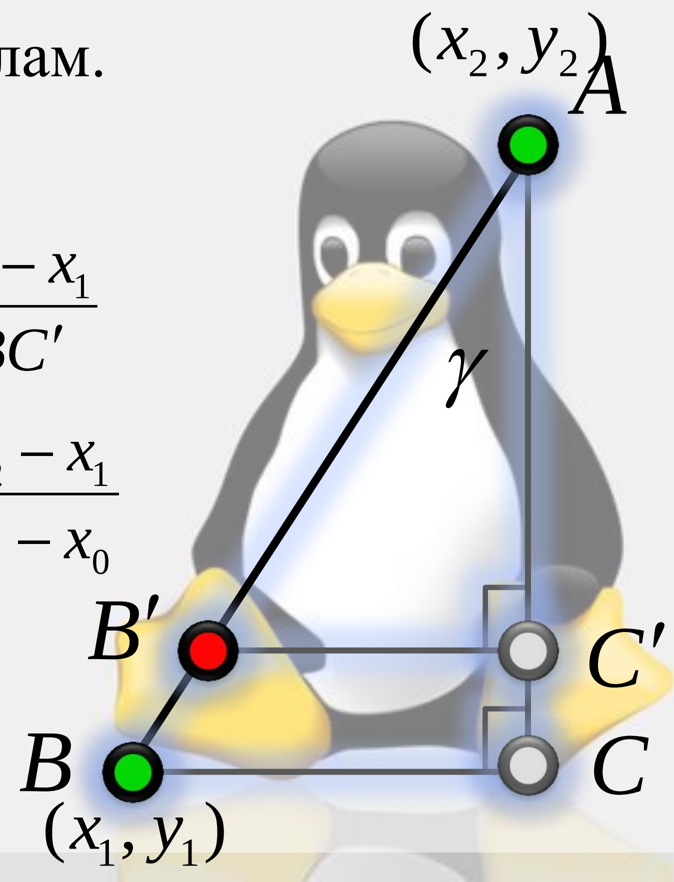
$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{BC'} \qquad \frac{AB}{AB'}=\frac{y_2-y_1}{AC'}=\frac{x_2-x_1}{BC'}$$

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{y_2-y_1}{y_2-y_0}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0} \qquad \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{y_2-y_1}{y_2-y_0}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}$$

$$(\alpha+\beta)(y_2-y_0)=\beta(y_2-y_1)$$

$$y_0(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)y_2-\beta(y_2-y_1)$$

$$y_0(\alpha+\beta)=\alpha\cdot y_2+\beta\cdot y_1$$



Движение.

- Даны координаты двух точек. Разбить отрезок, образуемый этими двумя точками на 5 равных отрезков.
- Почему так?
- Два треугольника подобны по двум углам.

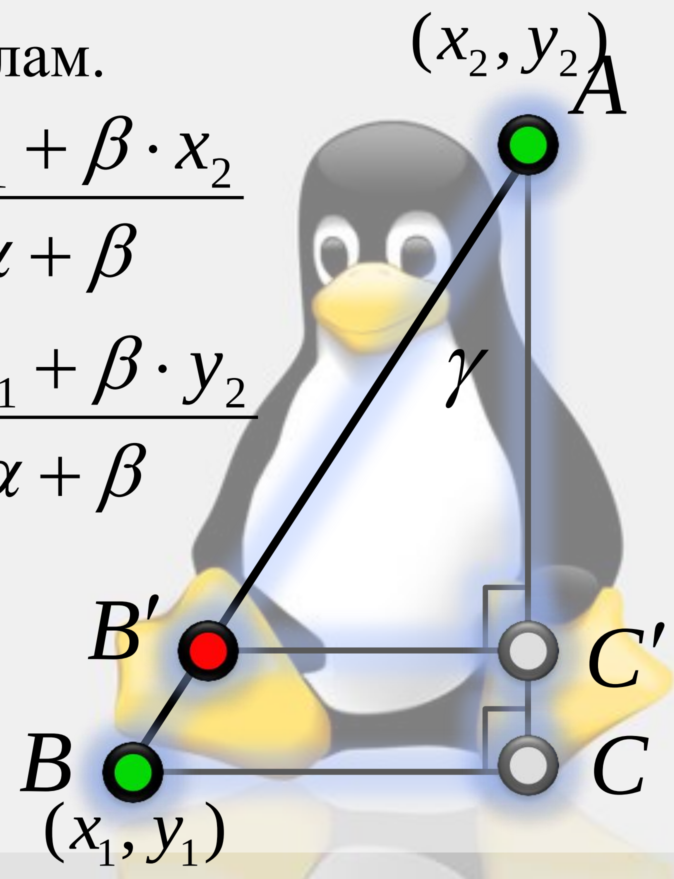
(геометрия, 7 класс)

$$x_0 = \frac{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2}{\alpha + \beta}$$

$$y_0 = \frac{\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2}{\alpha + \beta}$$

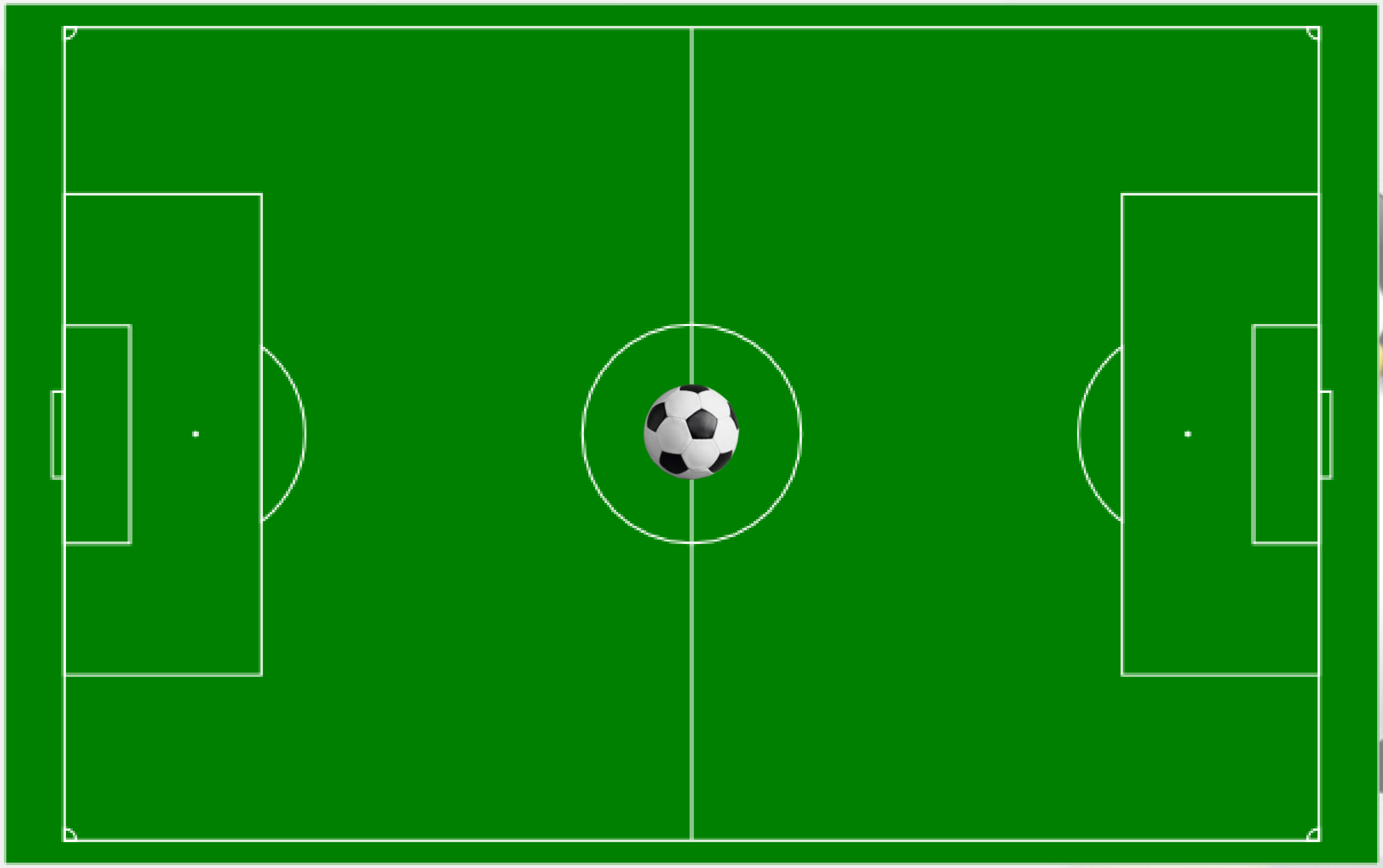
$$(\alpha + \beta)(y_2 - y_0) = \beta(y_2 - y_1)$$
$$y_0(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)y_2 - \beta(y_2 - y_1)$$
$$y_0(\alpha + \beta) = \alpha \cdot y_2 + \beta \cdot y_1$$

$$(\alpha + \beta)(x_2 - x_0) = \beta(x_2 - x_1)$$
$$x_0(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)x_2 - \beta(x_2 - x_1)$$
$$x_0(\alpha + \beta) = \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot x_1$$



Немного о футболе.

- Даны координаты левого верхнего и правого нижнего угла поля. Найти координаты центра поля.



Немного о футболе.

- Даны координаты левого верхнего и правого нижнего угла поля. Найти координаты центра поля.

```
# get center coordinates
center_x = (lu[0] + rb[0])/2.0
center_y = (lu[1] + rb[1])/2.0
```

Движение

- Какую скорость надо задать пингвинчику, чтобы он стал двигаться к точке с координатами (gx,gy)?

Движение

- Какую скорость надо задать пингвинчику, чтобы он стал двигаться к точке с координатами (gx,gy)?

$$(vx, vy) = (gx, gy) - (x, y)$$

- Где (x,y) – координаты пингвинчика.

Движение

- Какую скорость надо задать пингвинчику, чтобы он стал двигаться к центру поля?

Движение

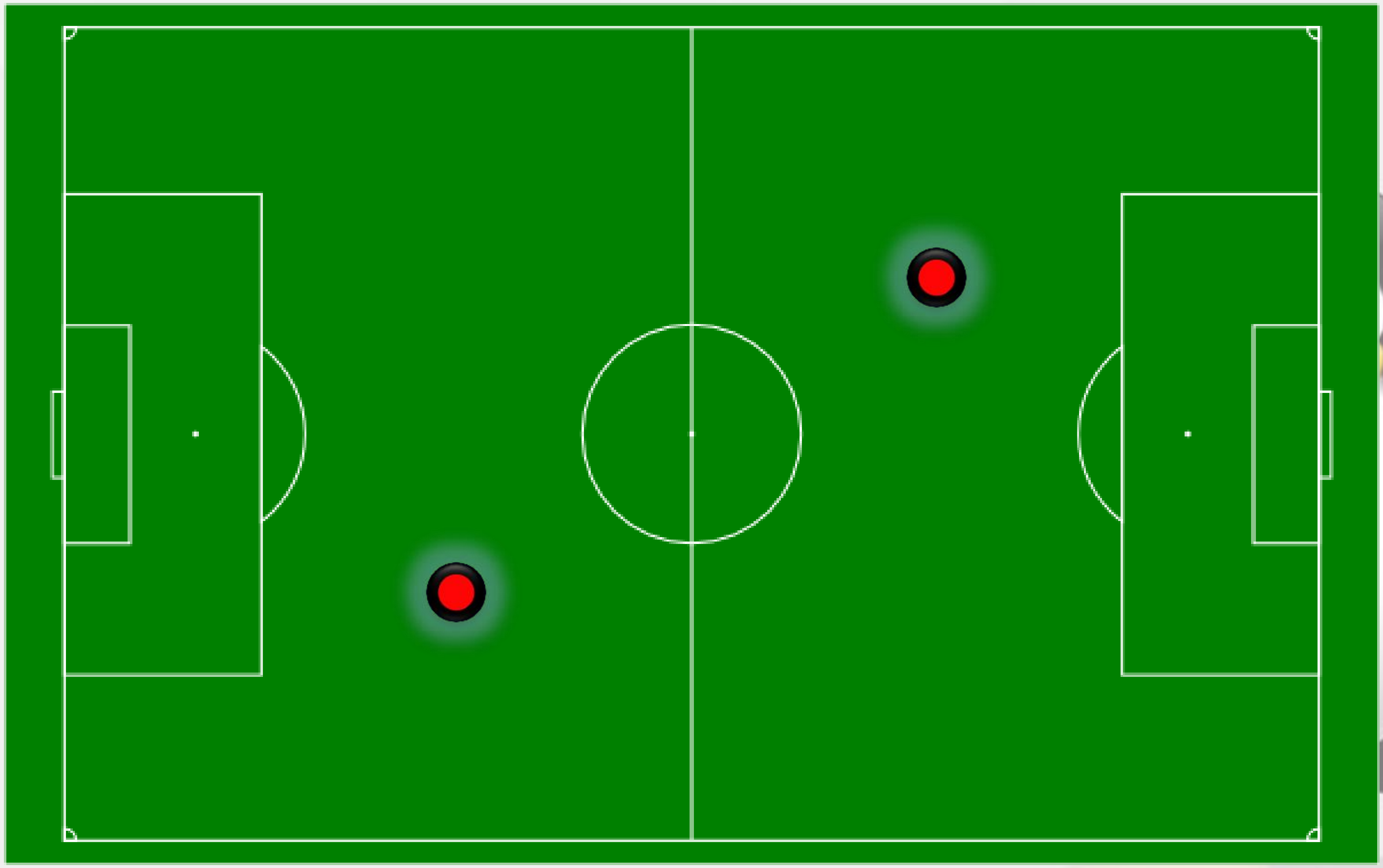
- Какую скорость надо задать пингвинчику, чтобы он стал двигаться к центру поля?

```
class GoToTheCenter:
    def move(self,lu,rb,gate,index,side,balls,your_team,enemy_team):
        # get center coordinates
        center_x = (lu[0] + rb[0])/2.0
        center_y = (lu[1] + rb[1])/2.0
        # get your coordinates
        your_position_x = your_team[index][0]
        your_position_y = your_team[index][1]
        # generate speed
        speed = (center_x - your_position_x , center_y - your_position_y)
        return speed
```

Демонстрация

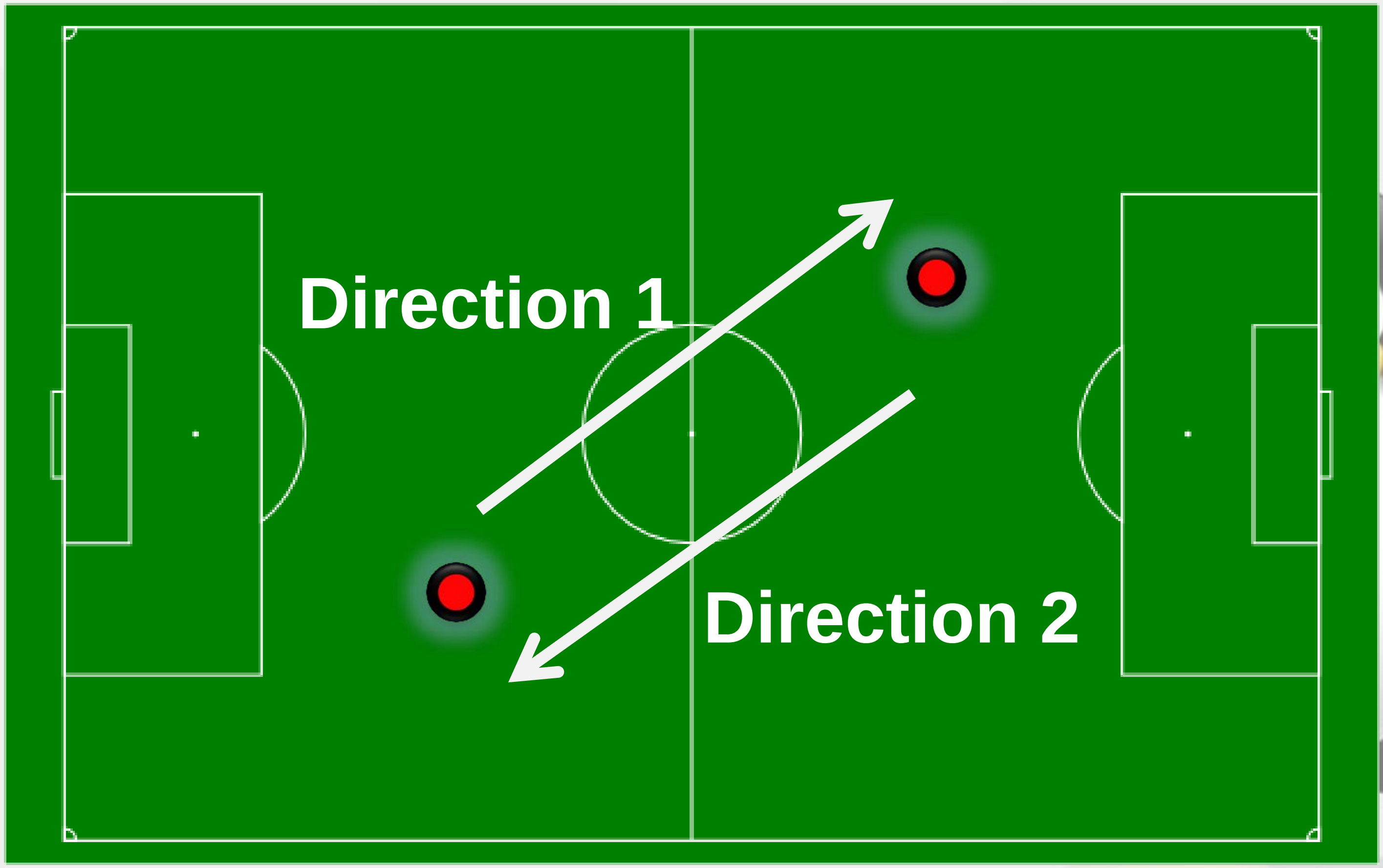
Движение

- Заставить пингвинчика двигаться между указанными двумя точками.



Движение

- Заставить пингвинчика двигаться между указанными двумя точками.



Движение

- Заставить пингвинчика двигаться между указанными двумя точками.

```python
class WalkOnDiagonal:
    position = 0
    def move(self,lu,rb,gate,index,side,balls,your_team,enemy_team):
        # get first coordinates
        first_x = (lu[0] + 2*rb[0])/3.0
        first_y = (lu[1]*2 + rb[1])/3.0
        # get second coordinates
        second_x = (2*lu[0] + rb[0])/3.0
        second_y = (lu[1] + 2*rb[1])/3.0
        # get your coordinates
        your_position_x = your_team[index][0]
        your_position_y = your_team[index][1]
        # generate speed
        if self.position == 0:
            speed = (first_x - your_position_x , first_y - your_position_y)
        else:
            speed = (second_x - your_position_x , second_y - your_position_y)

        if speed == (0,0):
            self.position = (self.position + 1) % 2
        return speed
```

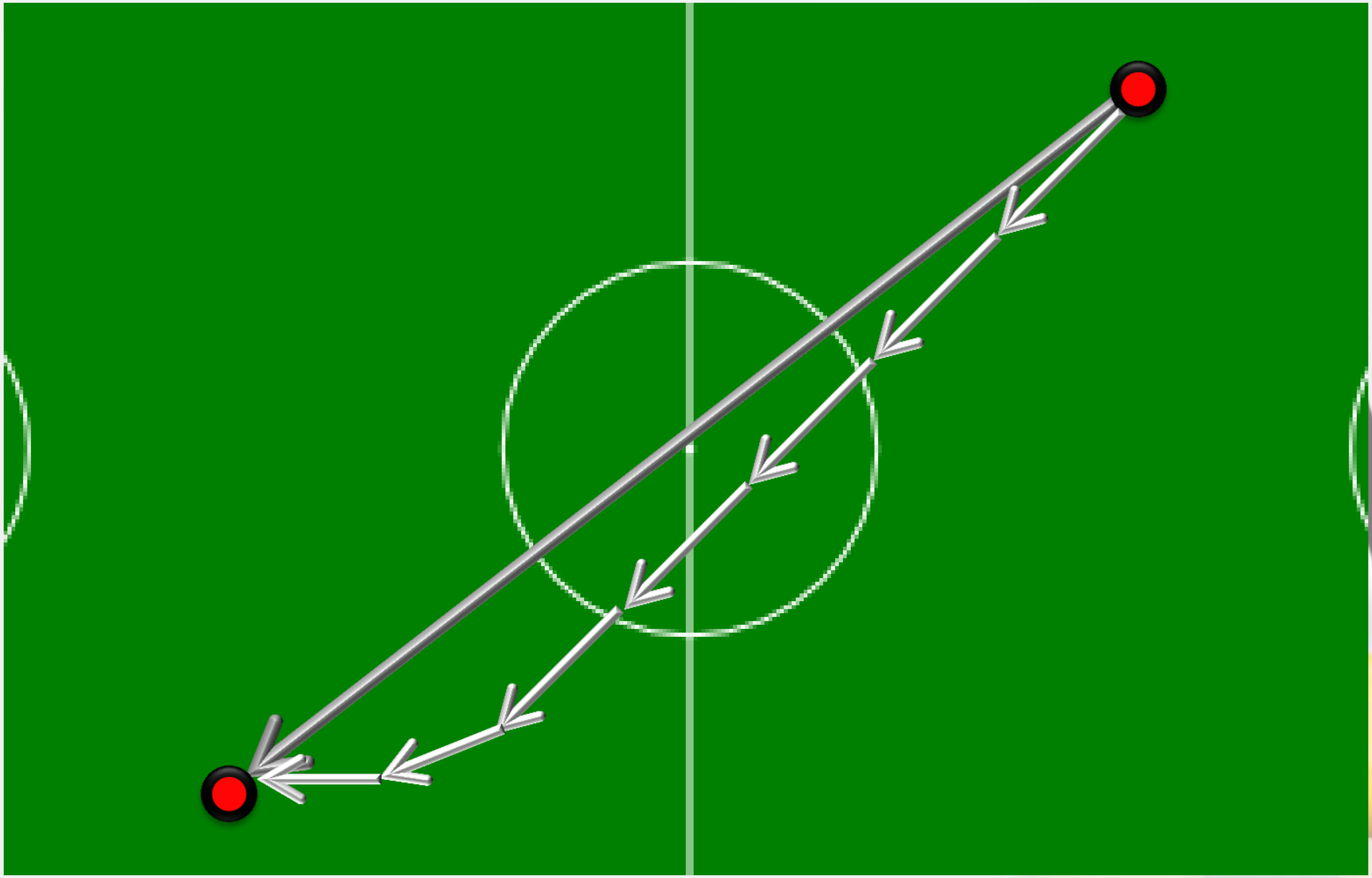
Демонстрация

Направление движения

- Почему пингвинчик движется не по прямой?

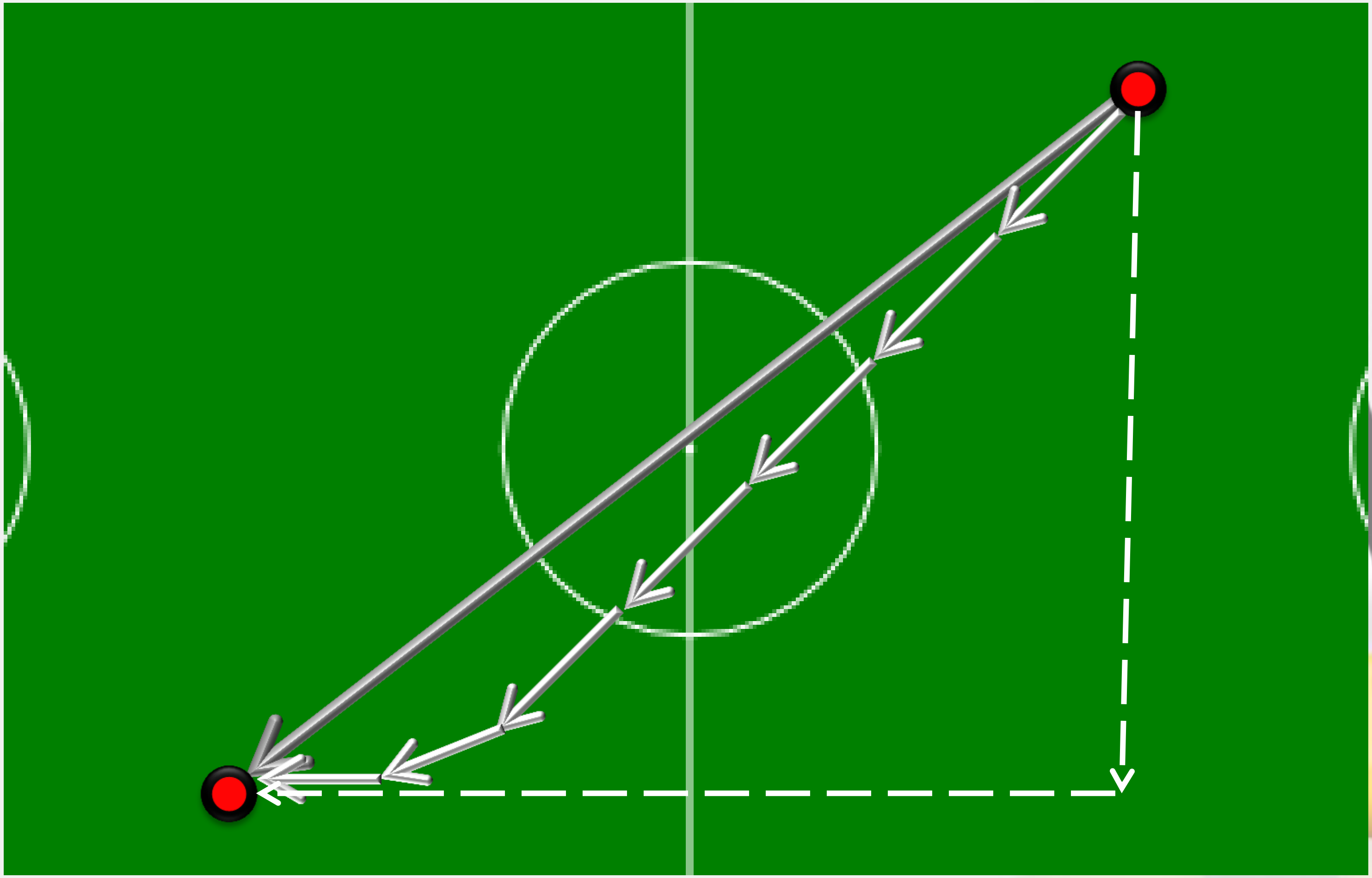
Направление движения

- Почему пингвинчик движется не по прямой?



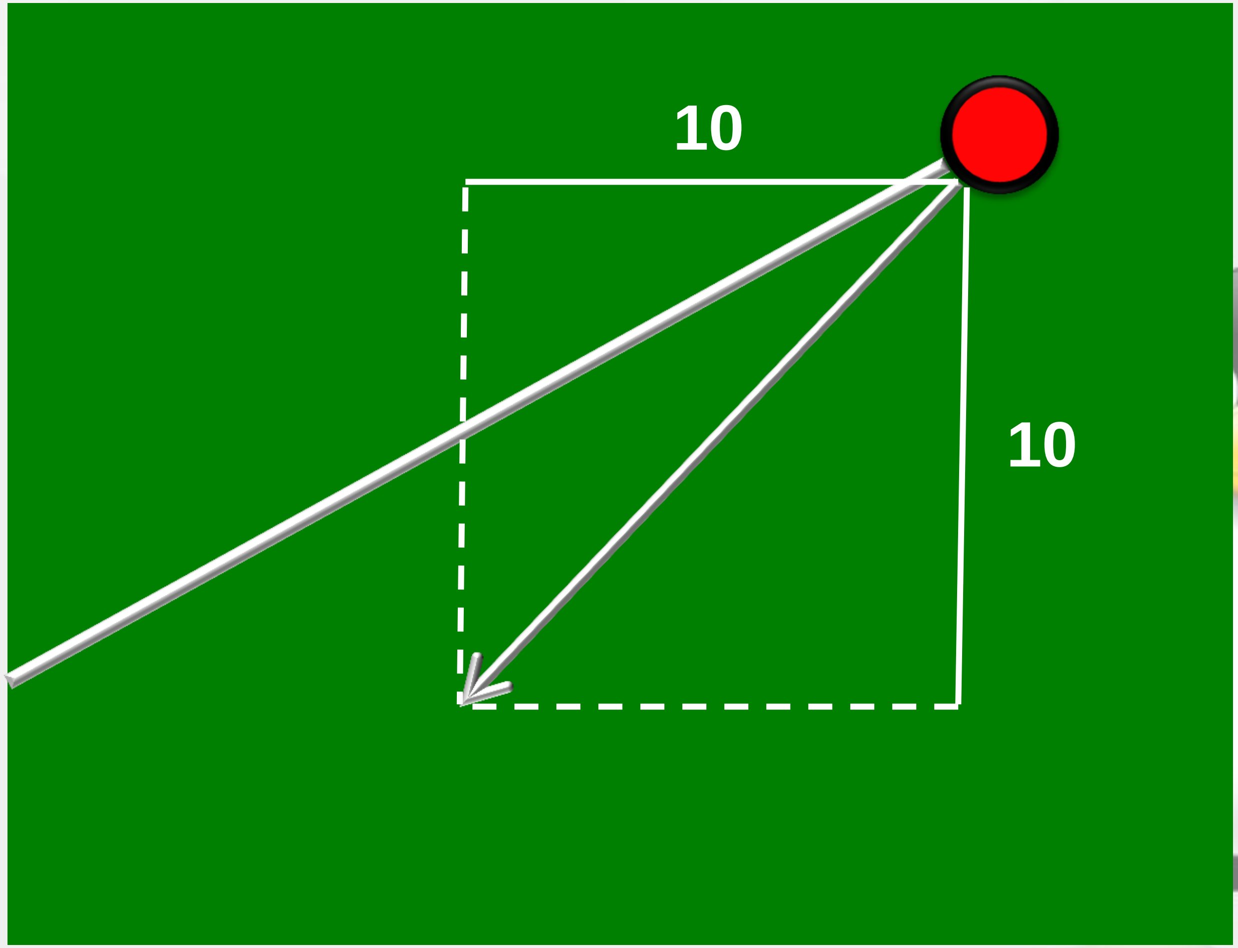
Направление движения

- Почему пингвинчик движется не по прямой?



Направление движения

- Почему пингвинчик движется не по прямой?

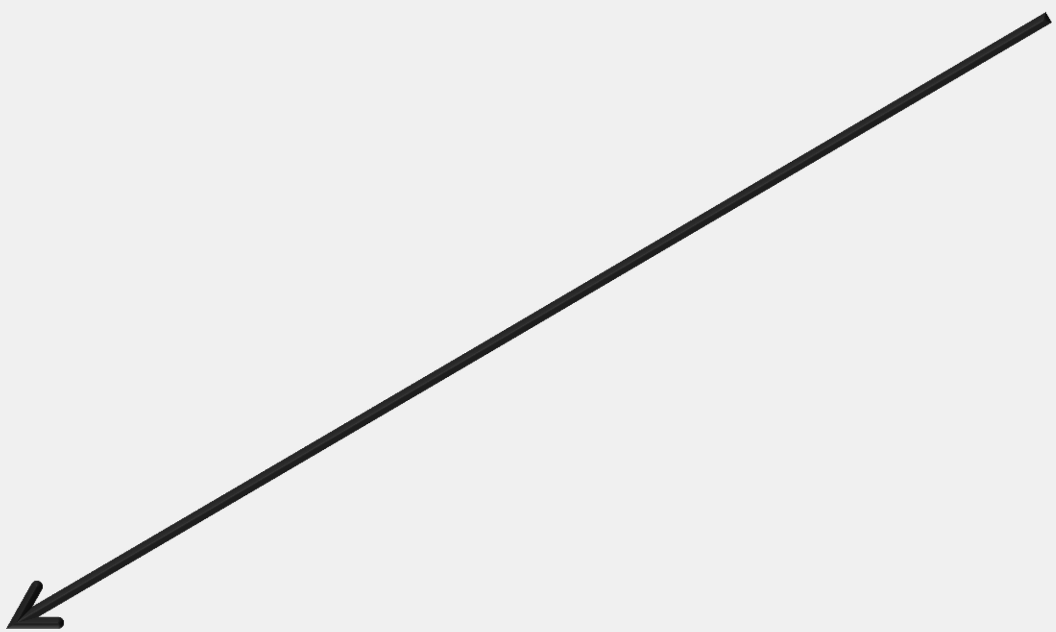


Направление движения

- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.

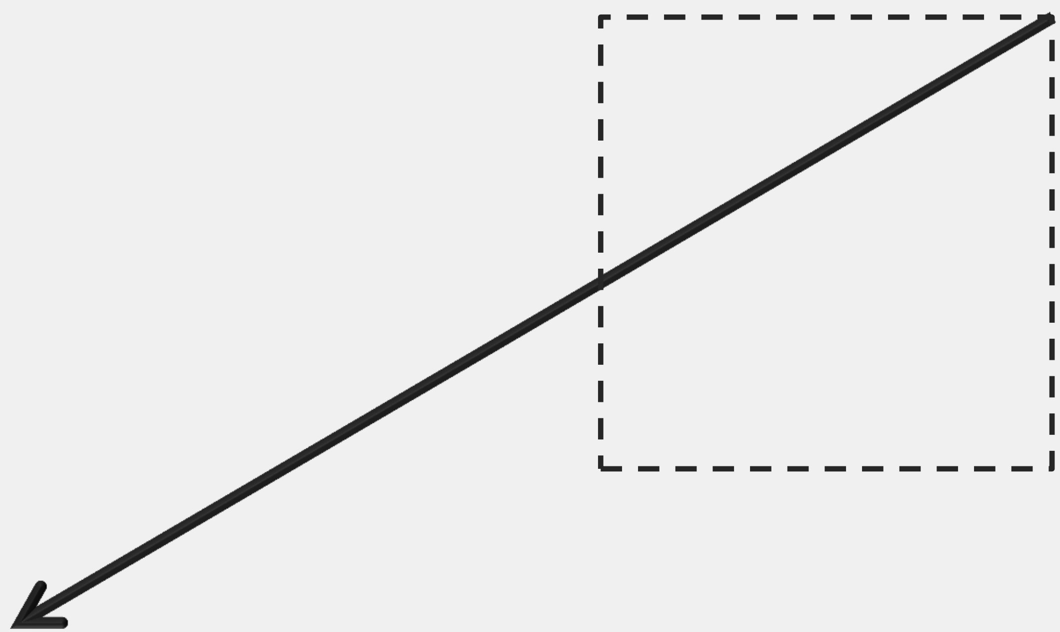
Направление движения

- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.
- Найти со направленный вектор с длиной по одной из координат не менее 10.



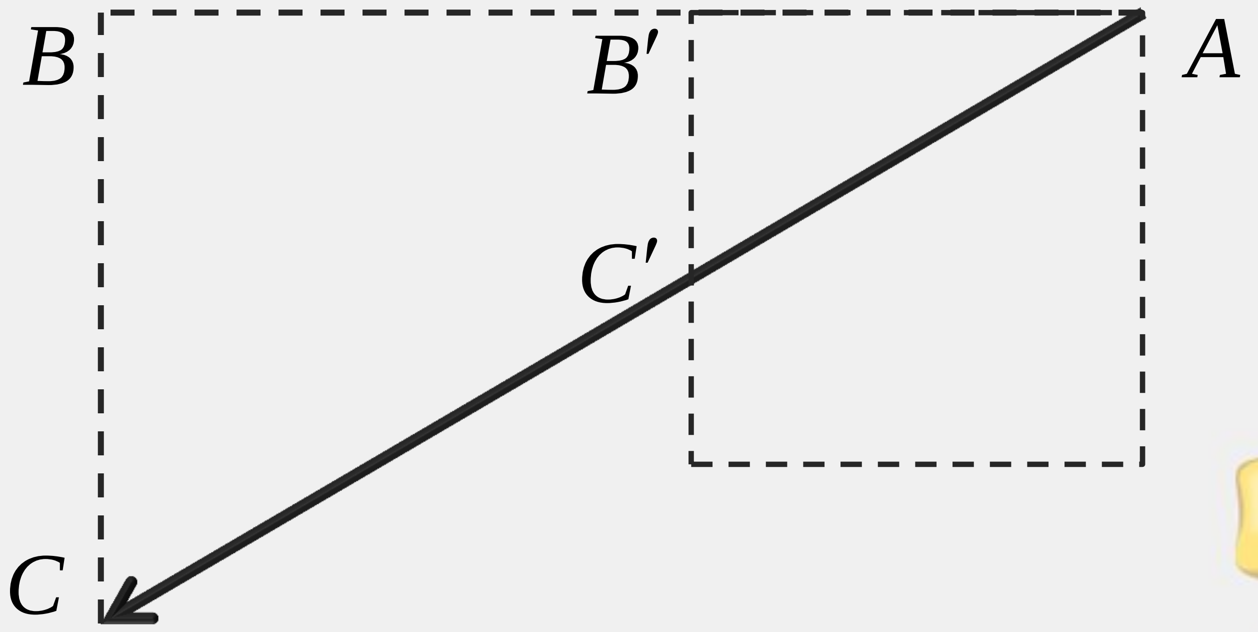
Направление движения

- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.
- Найти со направленный вектор с длиной по одной из координат не менее 10.



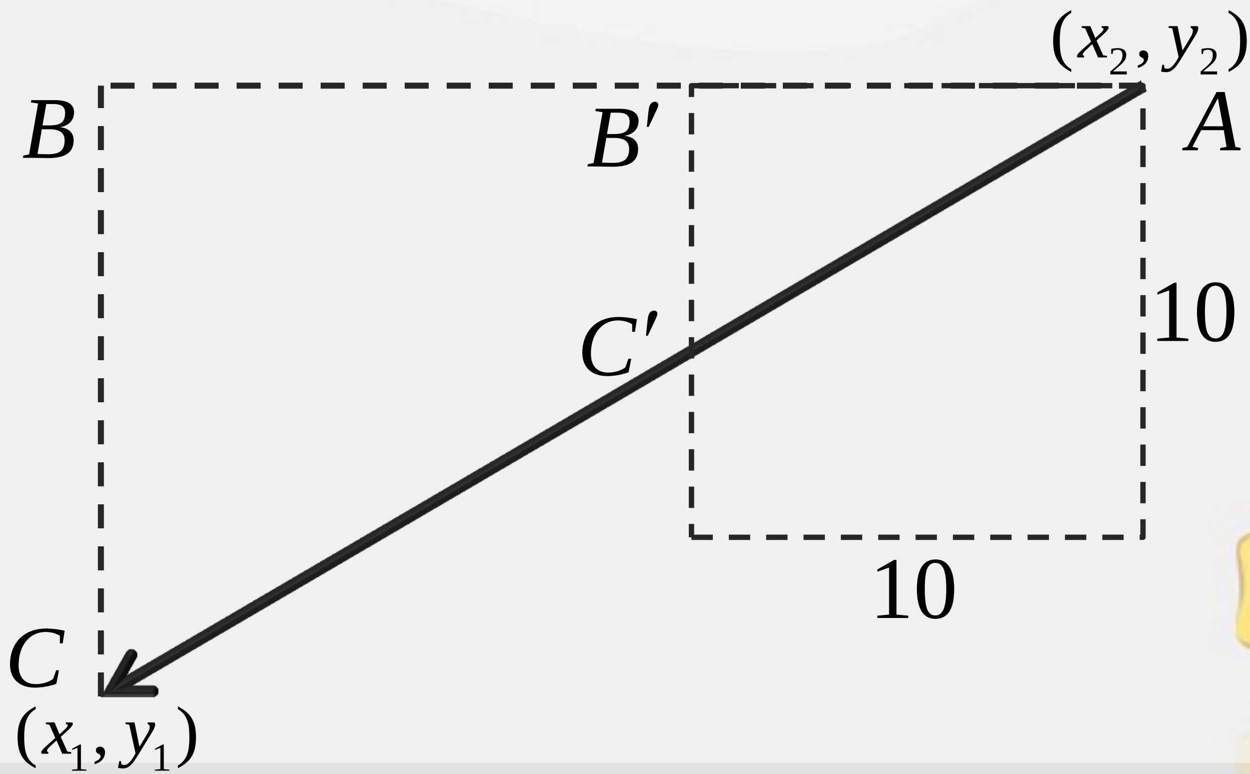
Направление движения

- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.
- Найти со направленный вектор с длиной по одной из координат не менее 10.



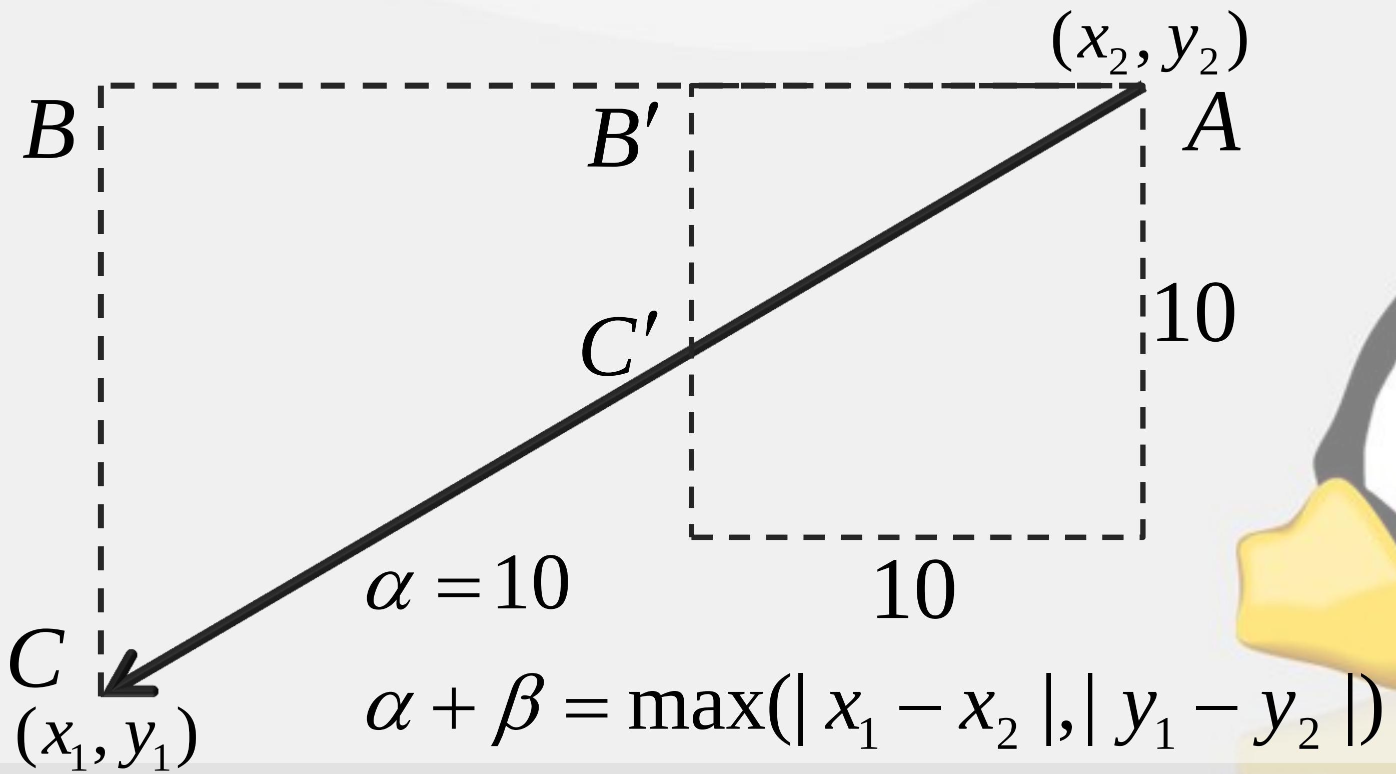
Направление движения

- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.
- Найти со направленный вектор с длиной по одной из координат не менее 10.



Направление движения

- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.
- Найти со направленный вектор с длиной по одной из координат не менее 10.

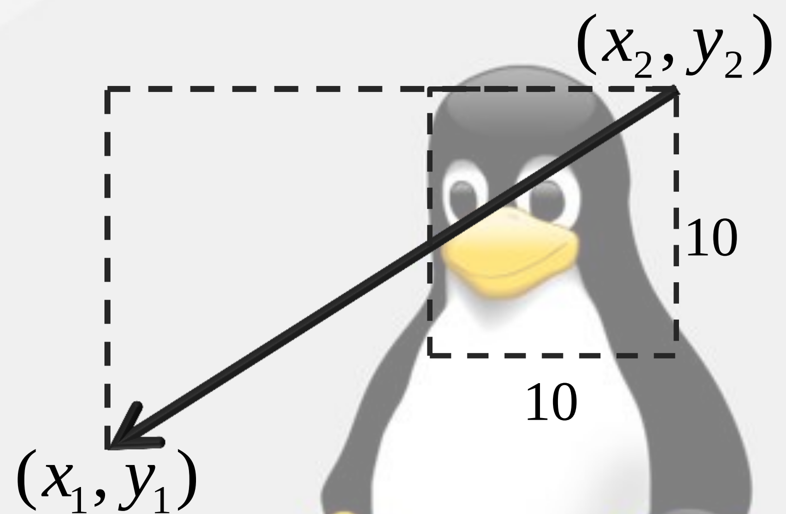


Направление движения

- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.
- Найти со направленный вектор с длиной по одной из координат не менее 10.

$$vx = \frac{10 \cdot (x_1 - x_2)}{\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)}$$

$$vy = \frac{10 \cdot (y_1 - y_2)}{\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)}$$



$$\alpha = 10$$

$$\alpha + \beta = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

Направление движения

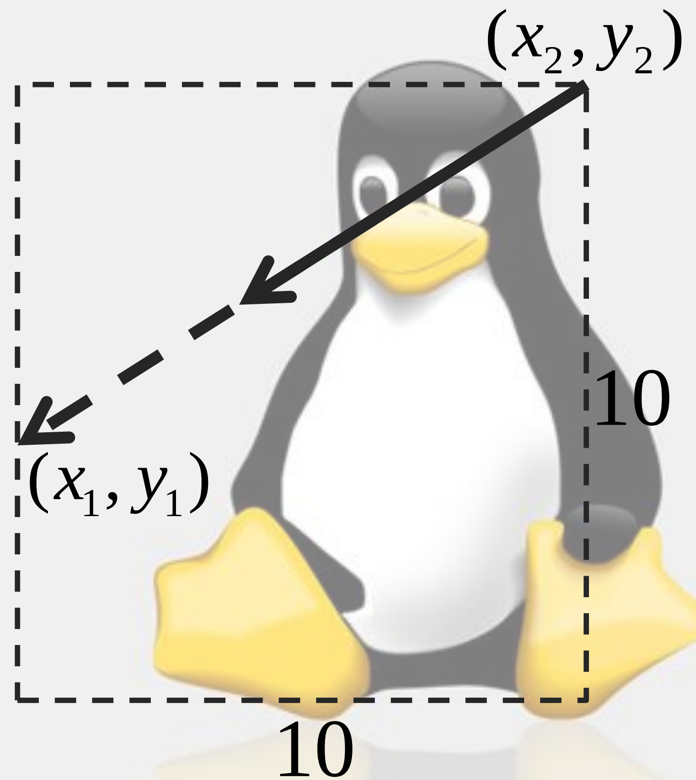
- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.
- Найти со направленный вектор с длиной по одной из координат не менее 10.

$$vx = \frac{10 \cdot (x_1 - x_2)}{\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)}$$

$$vy = \frac{10 \cdot (y_1 - y_2)}{\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)}$$

$$\alpha = 10$$

$$\alpha + \beta = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$



Направление движения

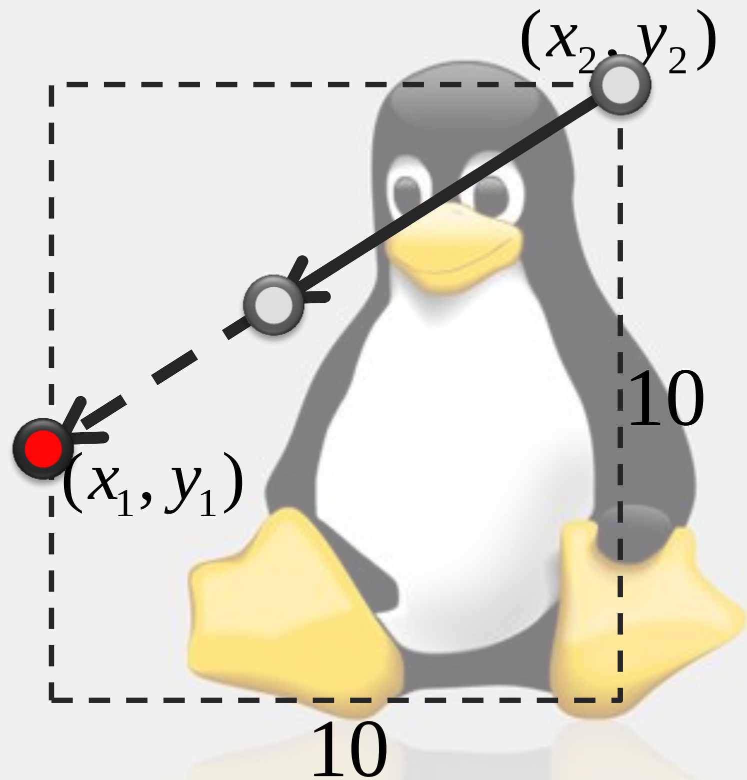
- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.
- Найти со направленный вектор с длиной по одной из координат не менее 10.

$$vx = \frac{10 \cdot (x_1 - x_2)}{\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)}$$

$$vy = \frac{10 \cdot (y_1 - y_2)}{\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)}$$

$$\alpha = 10$$

$$\alpha + \beta = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$



Направление движения

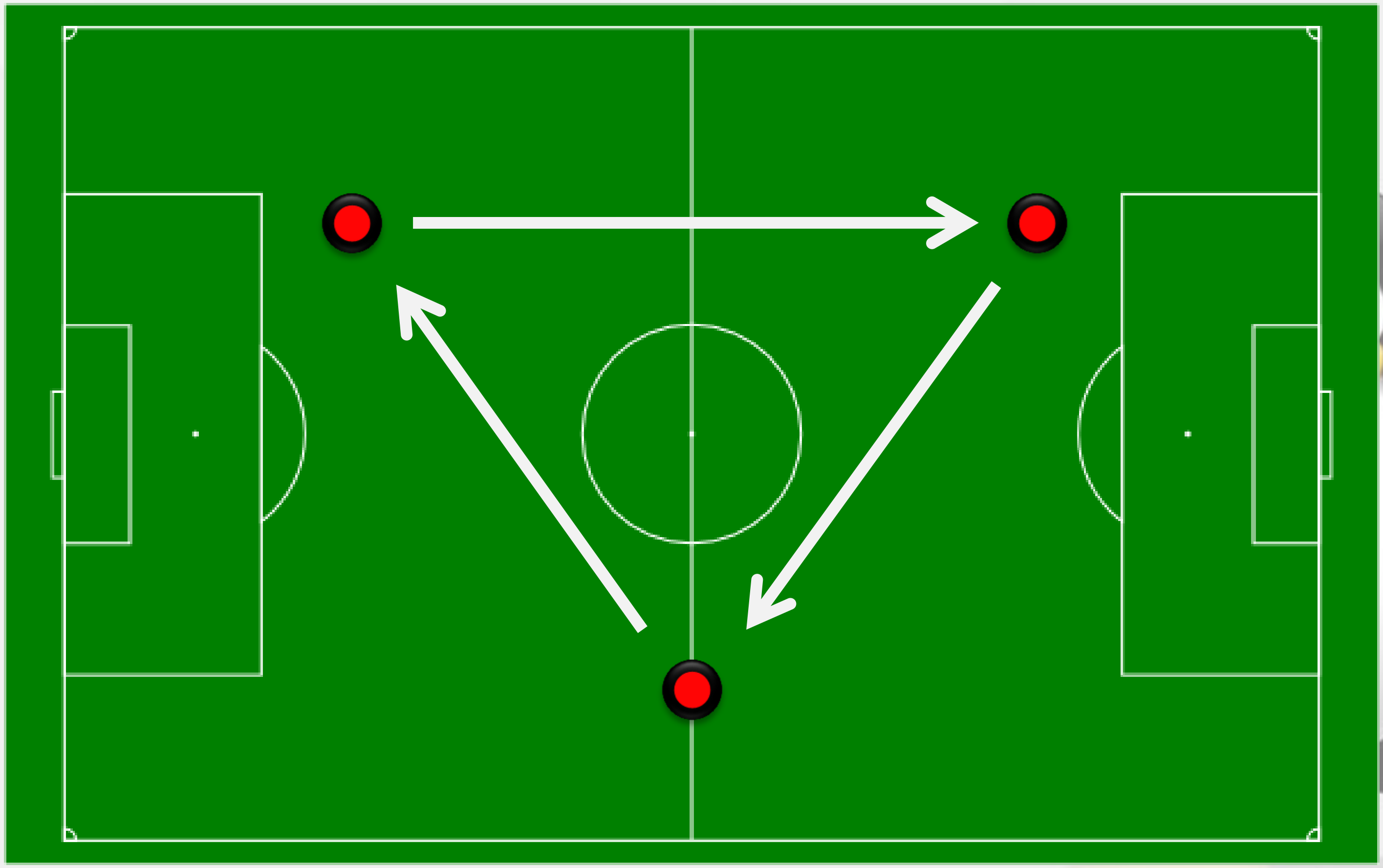
- Заставить пингвинчика двигаться к заданной точке по прямой.

```
class StraightDiagonal:
    position = 0
    def move(self,lu,rb,gate,index,side,balls,your_team,enemy_team):
        # get first coordinates
        first_x = (lu[0] + 2*rb[0])/3.0
        first_y = (lu[1]*2 + rb[1])/3.0
        # get second coordinates
        second_x = (2*lu[0] + rb[0])/3.0
        second_y = (lu[1] + 2*rb[1])/3.0
        # get your coordinates
        your_position_x = your_team[index][0]
        your_position_y = your_team[index][1]
        # generate speed
        if self.position == 0:
            speed = (first_x - your_position_x , first_y - your_position_y)
        else:
            speed = (second_x - your_position_x , second_y - your_position_y)

        if speed == (0,0):
            self.position = (self.position + 1) % 2

        if max(speed[0],speed[1]) >= 10:
            alpha = 10.0/max(abs(speed[0]),abs(speed[1]))
            speed = (alpha*speed[0], alpha*speed[1])

        return speed
```

Демонстрация

Задание

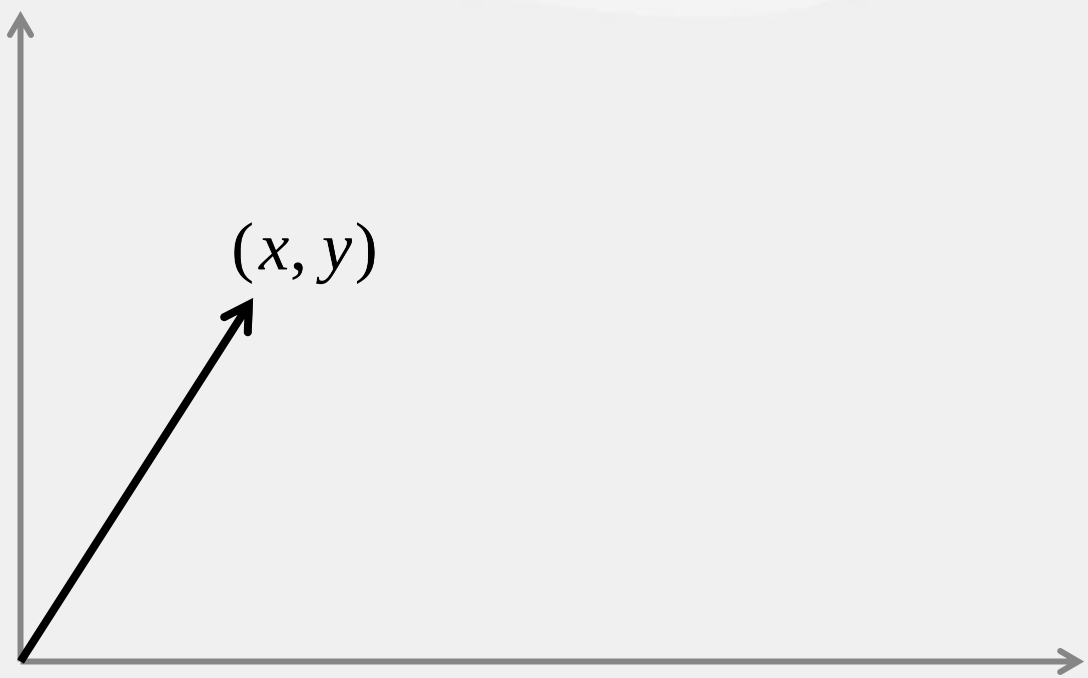
- Заставить пингвинчика двигаться между тремя точками по прямой.



Вектора

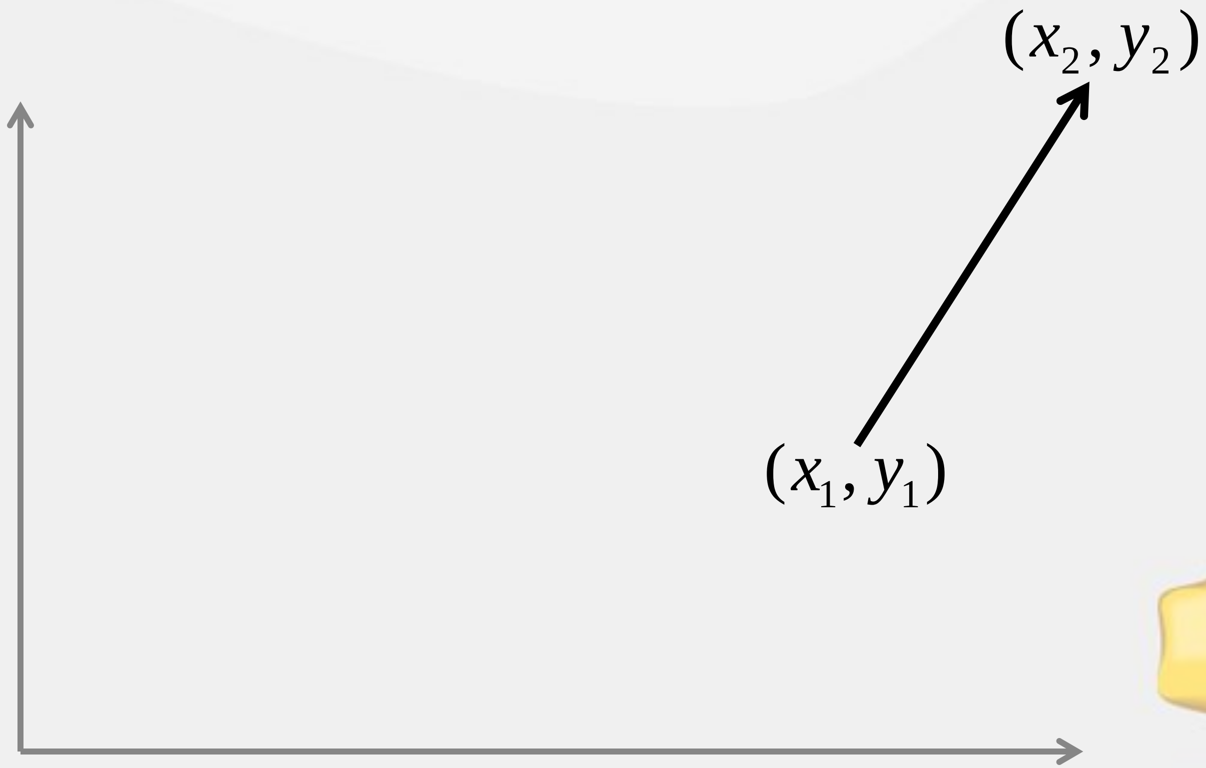
Вектора

- Вектор – математический объект, характеризуемый длиной и направлением. В аналитической геометрии задается координатами конца вектора.



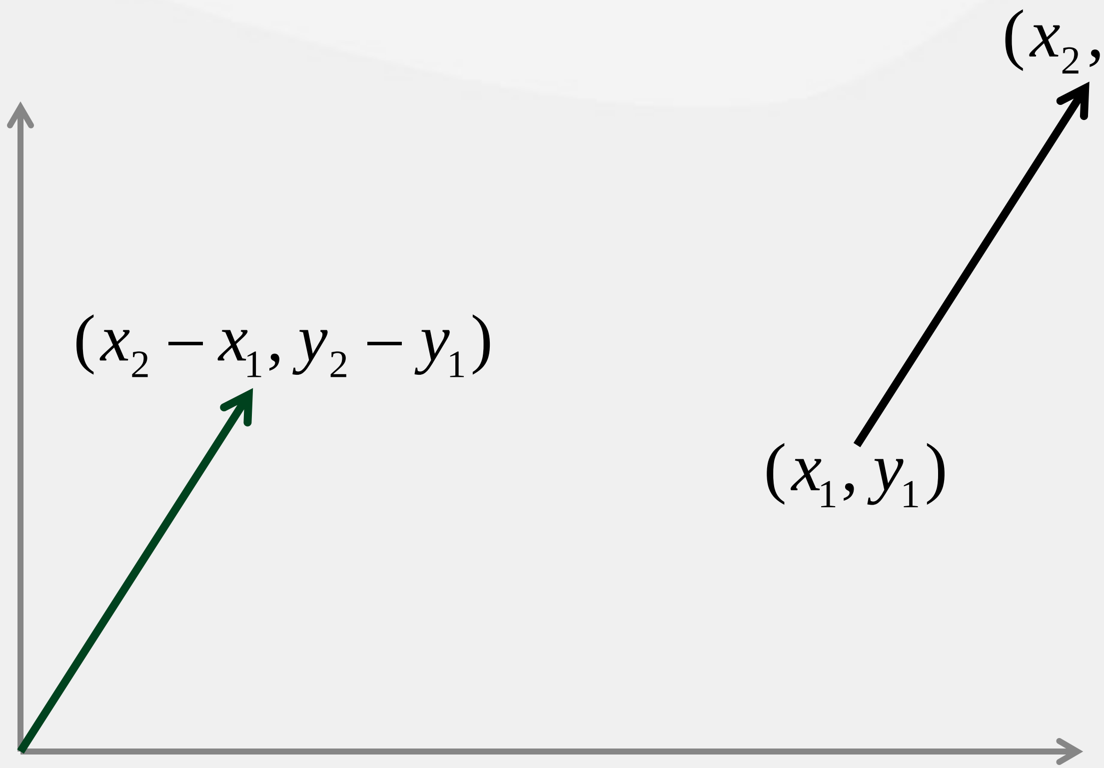
Вектора

- Вектор – математический объект, характеризуемый длиной и направлением. В аналитической геометрии задается координатами конца вектора.



Вектора

- Вектор – математический объект, характеризуемый длиной и направлением. В аналитической геометрии задается координатами конца вектора.



Вектора

- Вектор – математический объект, характеризуемый длиной и направлением. В аналитической геометрии задается координатами конца вектора.

Вектора

- Вектор – математический объект, характеризуемый длиной и направлением. В аналитической геометрии задается координатами конца вектора.
  - Скалярное произведение.
  - Векторное произведение.

Скалярное произведение

Скалярное произведение

- *Комм*. Также иногда называют «внутренним произведением».
- Скалярное произведение – число, характеризующее длину двух векторов и угол между ними. (Дурацкое определение).

Скалярное произведение

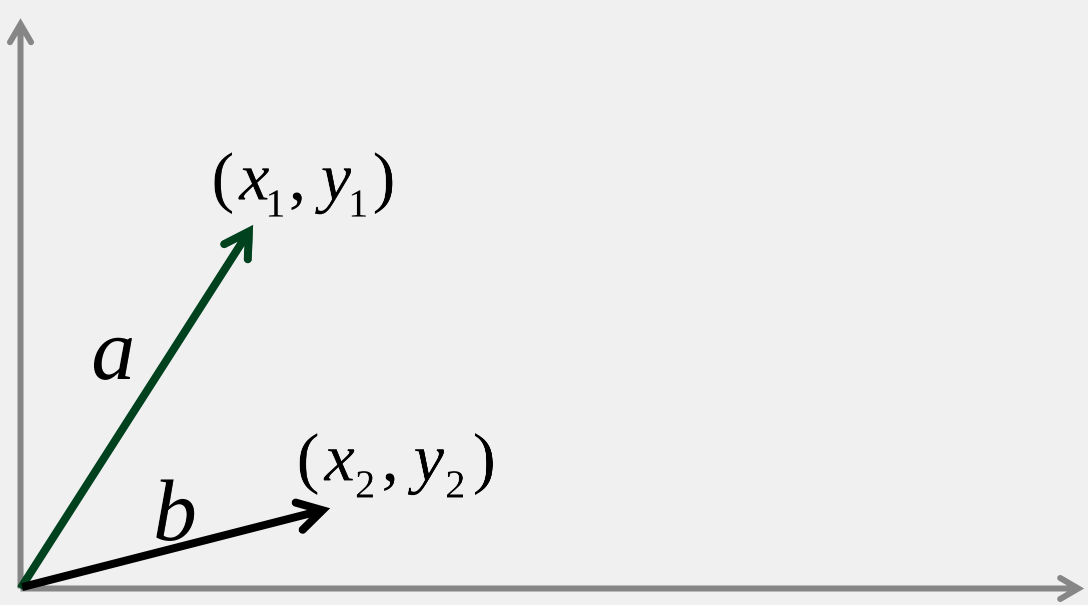
- *Комм*. Также иногда называют «внутренним произведением».
- Скалярное произведение – число, характеризующее длину двух векторов и угол между ними. (Дурацкое определение).

$$\langle a,b\rangle = |a||b|\cos(a,b)$$

Скалярное произведение

- *Комм*. Также иногда называют «внутренним произведением».
- Скалярное произведение – число, характеризующее длину двух векторов и угол между ними. (Дурацкое определение).

$$\langle a,b\rangle = |a||b|\cos(a,b)$$

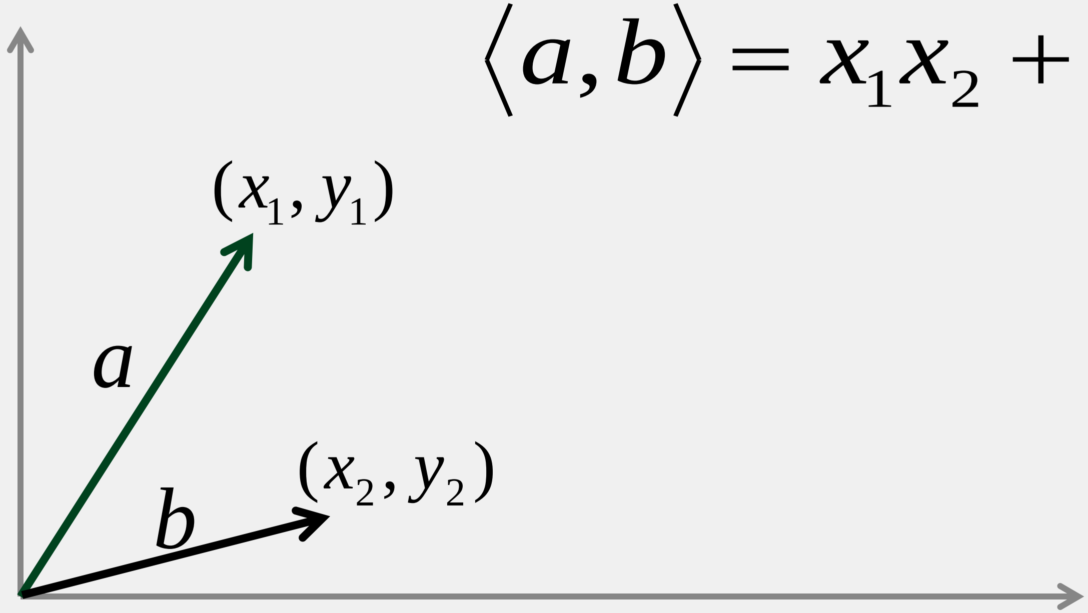


Скалярное произведение

- *Комм*. Также иногда называют «внутренним произведением».
- Скалярное произведение – число, характеризующее длину двух векторов и угол между ними. (Дурацкое определение).

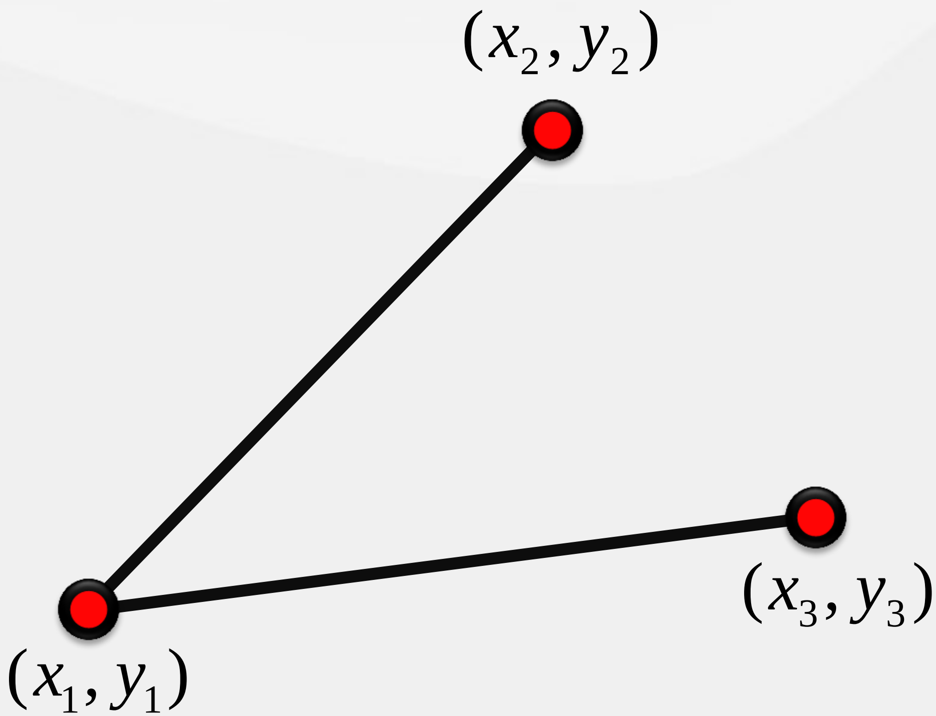
$$\langle a, b \rangle = |a||b|\cos(a, b)$$

$$\langle a, b \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$



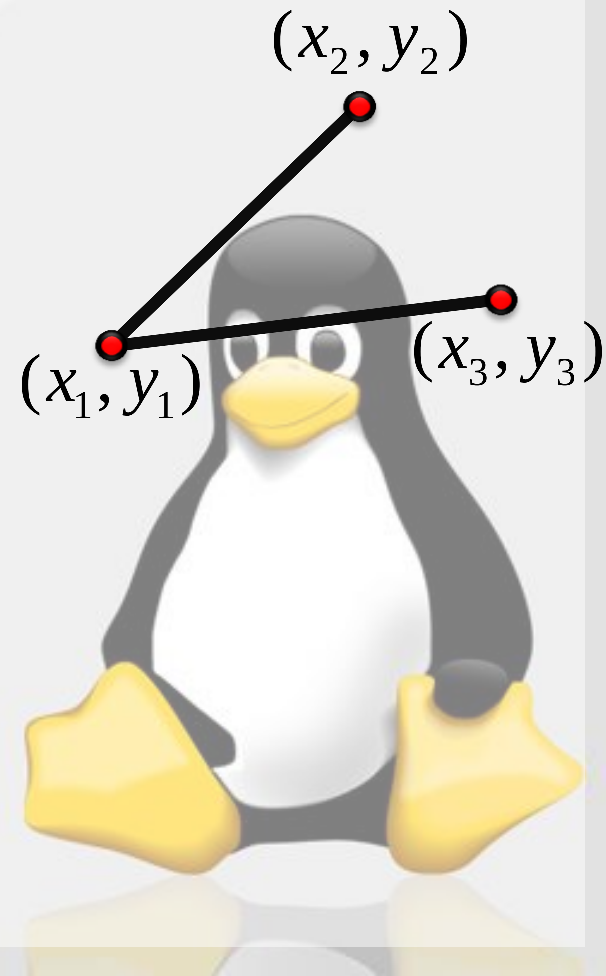
Скалярное произведение

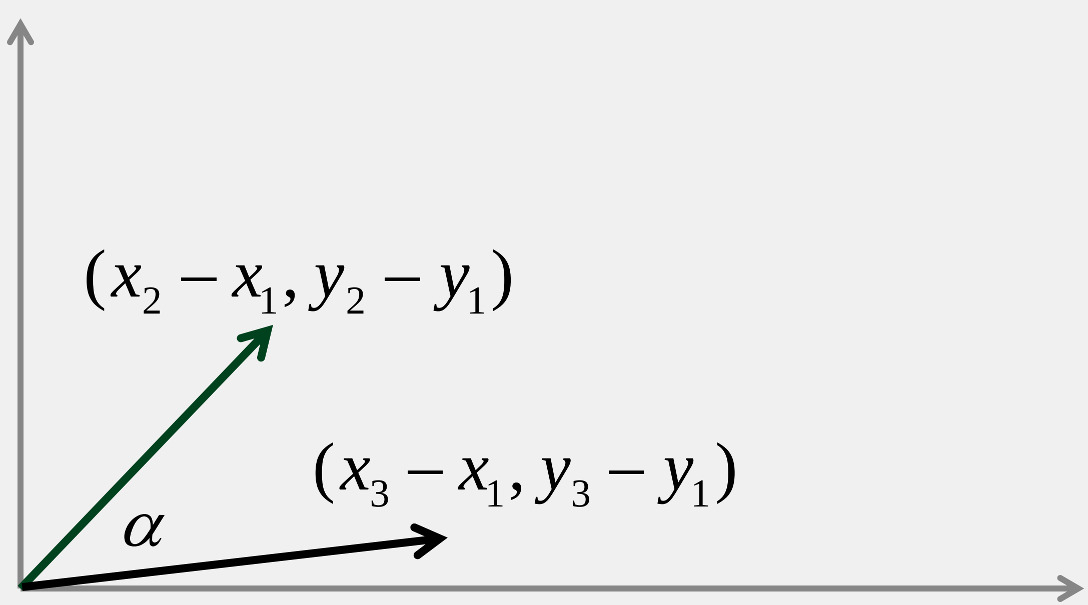
- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки.



Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки.

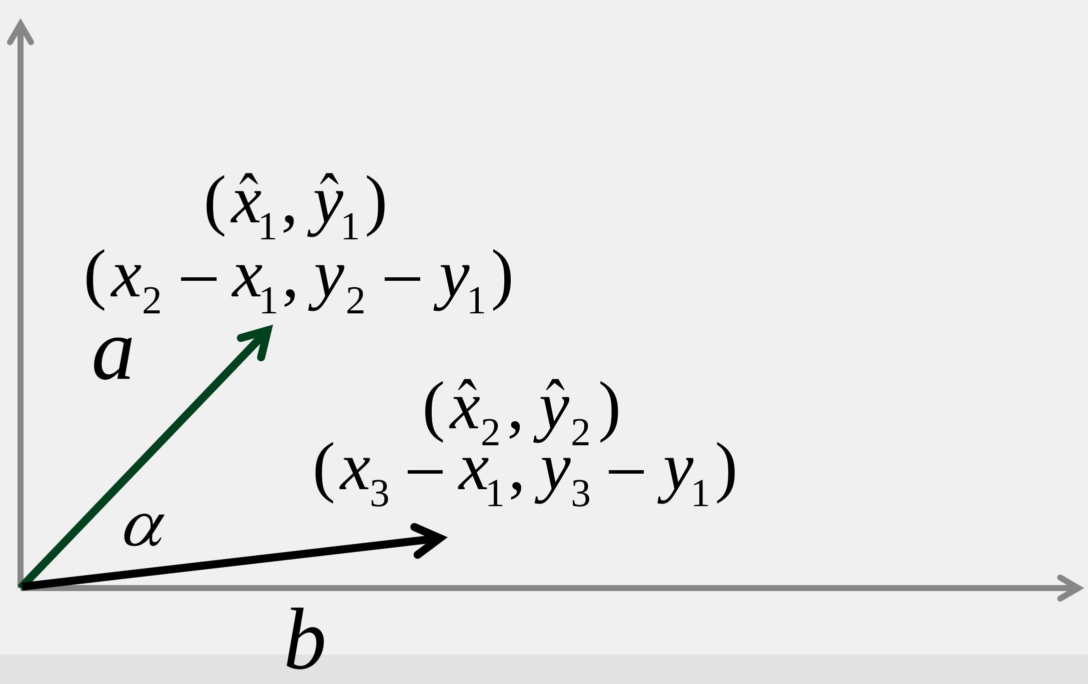


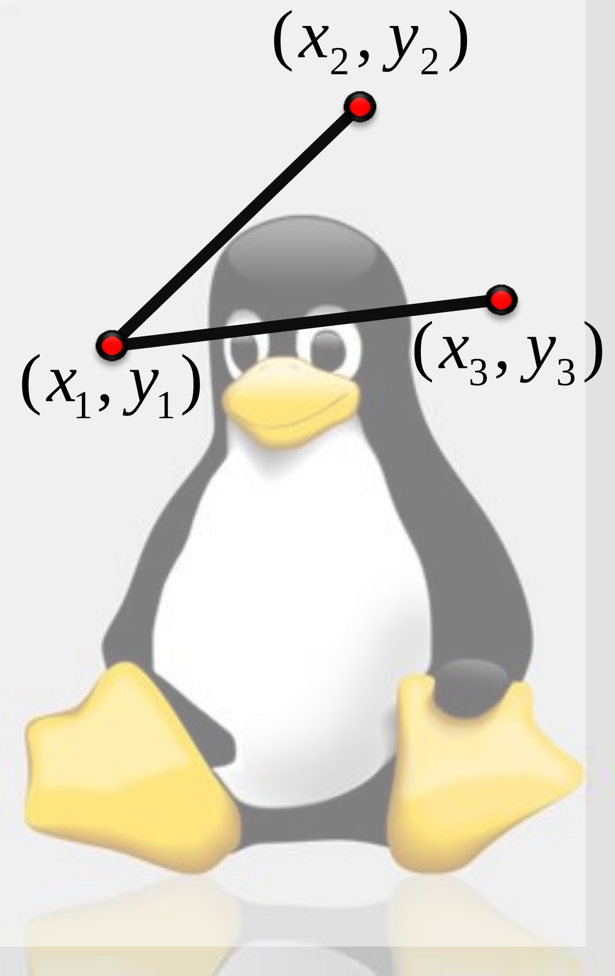


Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle a, b\rangle}{\sqrt{\hat{x}_2{}^2 + \hat{y}_2{}^2}\sqrt{\hat{x}_1{}^2 + \hat{y}_1{}^2}}\right)$$

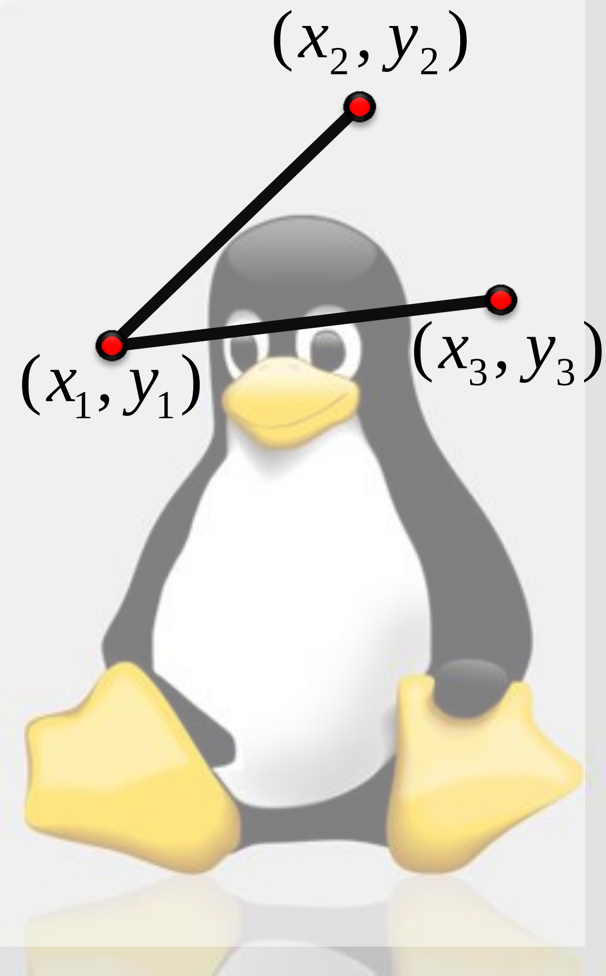


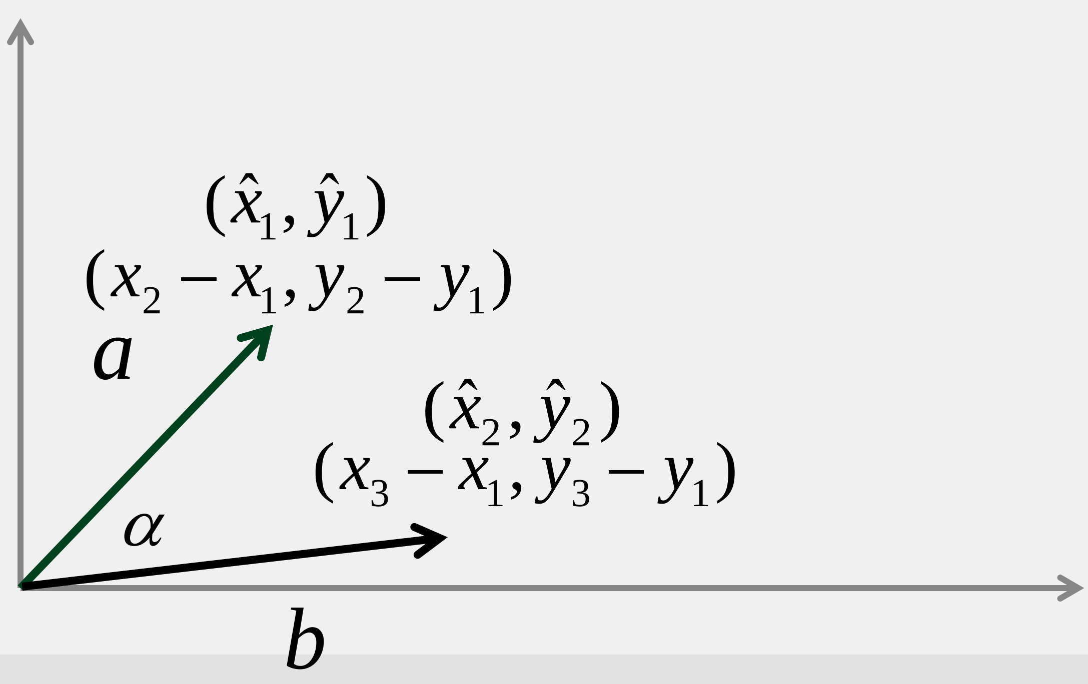


Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2}{\sqrt{\hat{x}_2^{\,2} + \hat{y}_2^{\,2}}\sqrt{\hat{x}_1^{\,2} + \hat{y}_1^{\,2}}}\right)$$

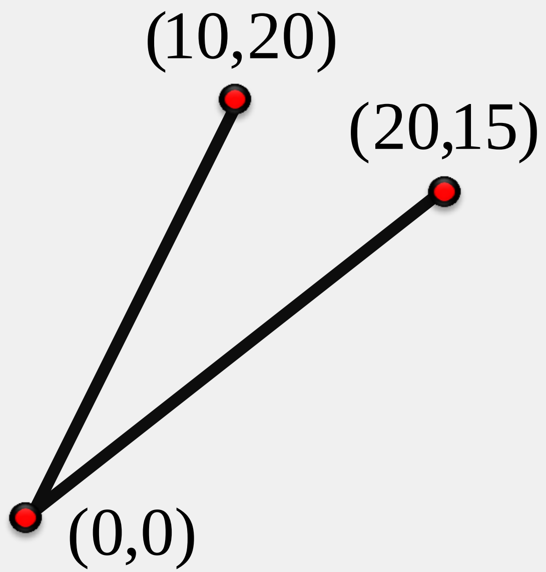




Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2}{\sqrt{\hat{x}_2{}^2 + \hat{y}_2{}^2}\sqrt{\hat{x}_1{}^2 + \hat{y}_1{}^2}}\right)$$

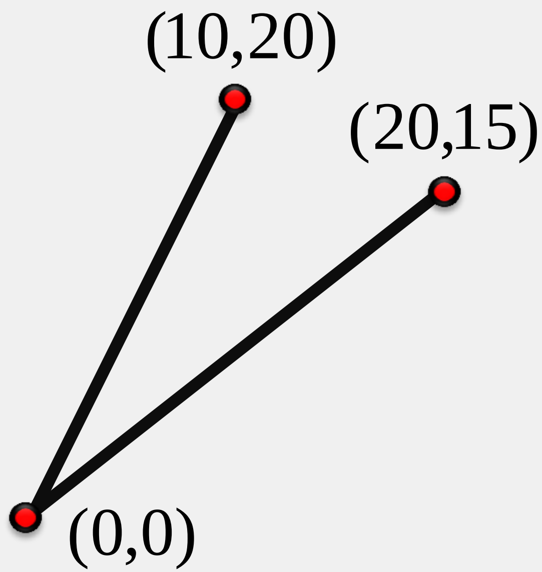


$$\alpha = ???$$

Скалярное произведение

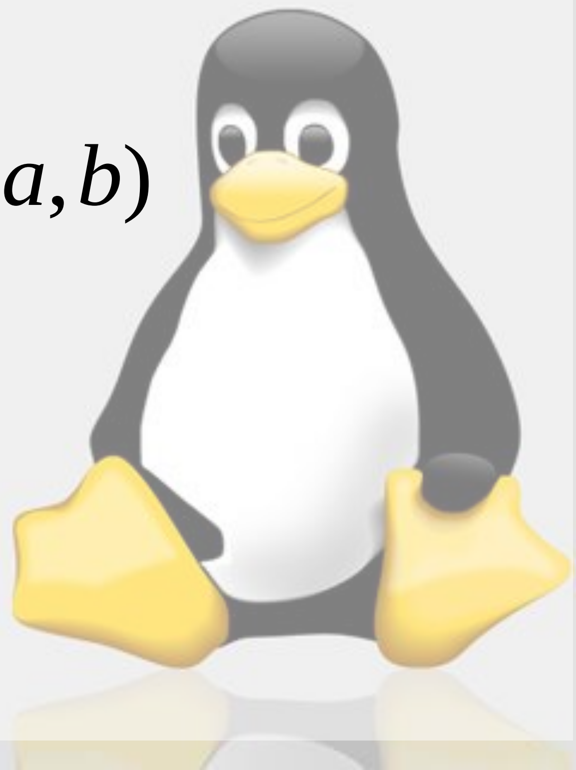
- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2}{\sqrt{\hat{x}_2{}^2 + \hat{y}_2{}^2}\sqrt{\hat{x}_1{}^2 + \hat{y}_1{}^2}}\right)$$



$$\langle a, b \rangle = |a|\,|b| \cos(a, b)$$

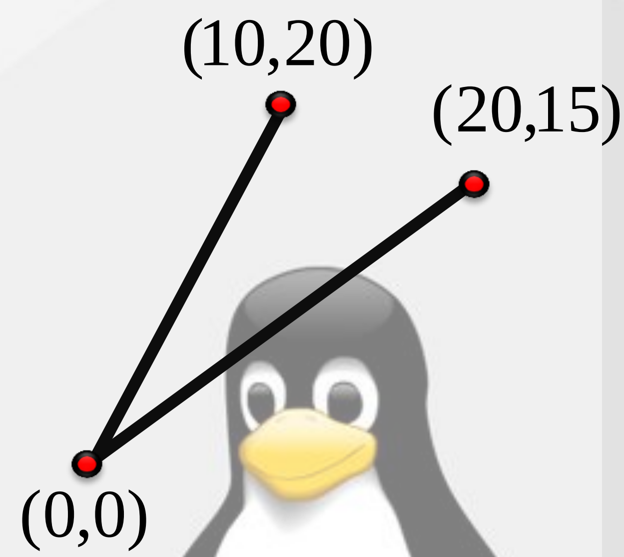
$$\alpha = ???$$



Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2}{\sqrt{\hat{x}_2{}^2 + \hat{y}_2{}^2}\sqrt{\hat{x}_1{}^2 + \hat{y}_1{}^2}}\right)$$

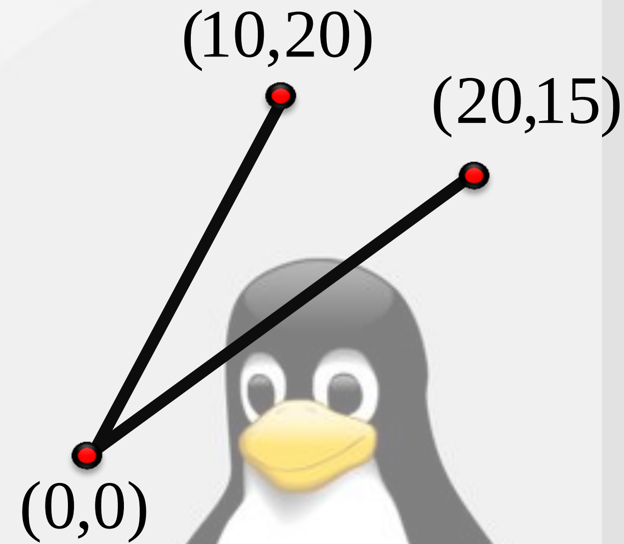


Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки.

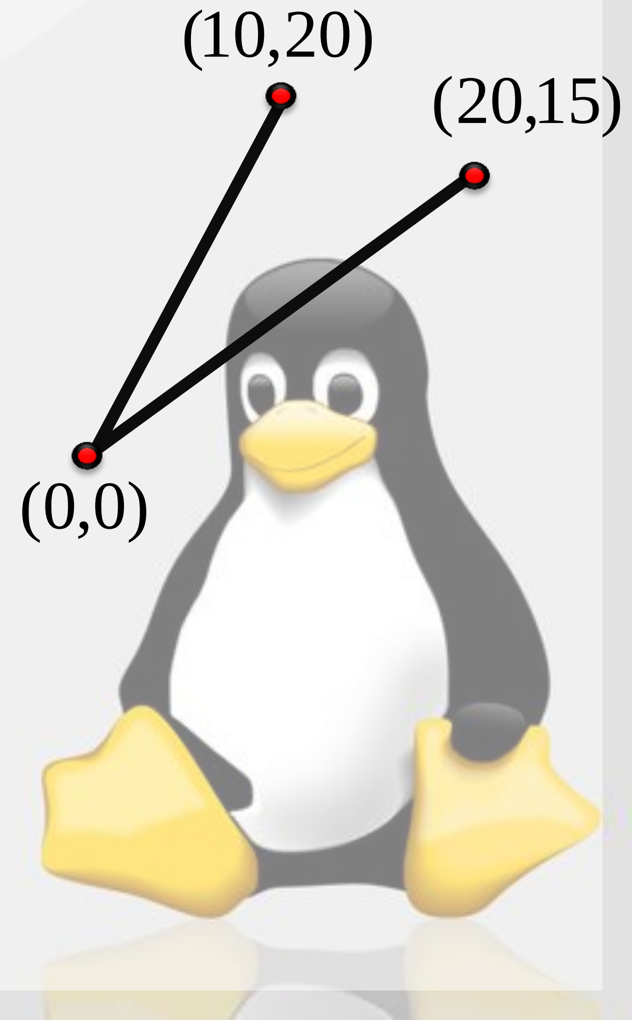
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2}{\sqrt{\hat{x}_2{}^2 + \hat{y}_2{}^2}\sqrt{\hat{x}_1{}^2 + \hat{y}_1{}^2}}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{10\cdot 20 + 20\cdot 15}{\sqrt{10^2 + 20^2}\sqrt{20^2 + 15^2}}\right)$$



Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки.



$$\alpha = \arccos\left(\frac{\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2}{\sqrt{\hat{x}_2{}^2 + \hat{y}_2{}^2}\sqrt{\hat{x}_1{}^2 + \hat{y}_1{}^2}}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{10 \cdot 20 + 20 \cdot 15}{\sqrt{10^2 + 20^2}\sqrt{20^2 + 15^2}}\right)$$

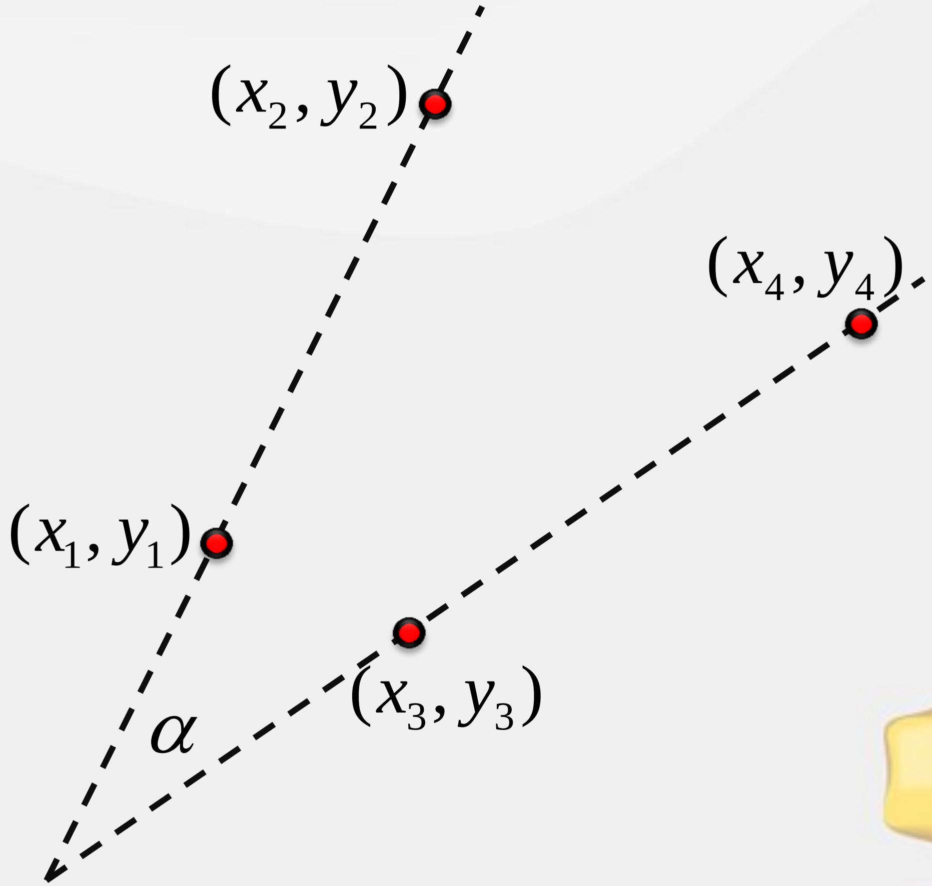
$$\alpha = \arccos(0.894427190999159)$$

$$\alpha \approx 26.565$$

Скалярное произведение

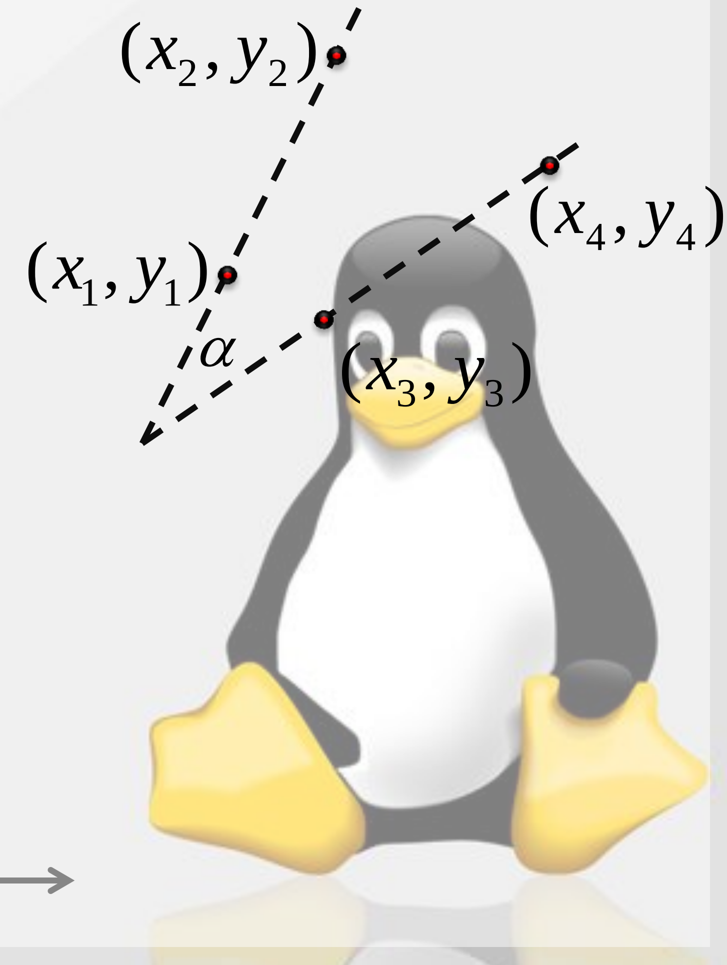
- Задача: найти угол между двумя прямыми, заданных координатами лежащих на них точек.

$$\alpha = ???$$



Скалярное произведение

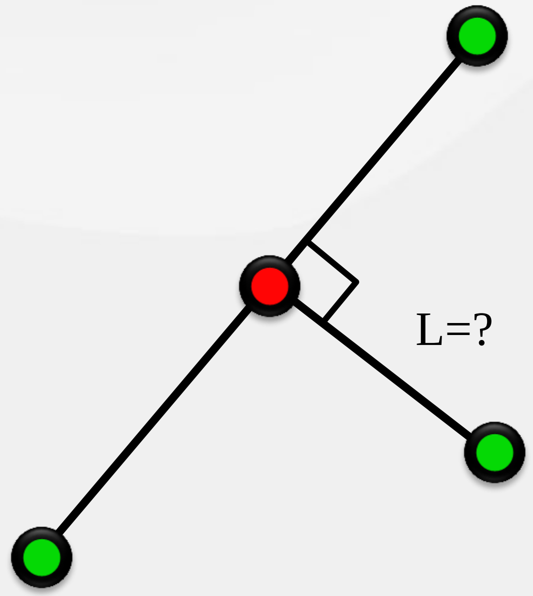
- Задача: найти угол между двумя прямыми, заданных координатами лежащих на них точек.



$$\alpha = ???$$

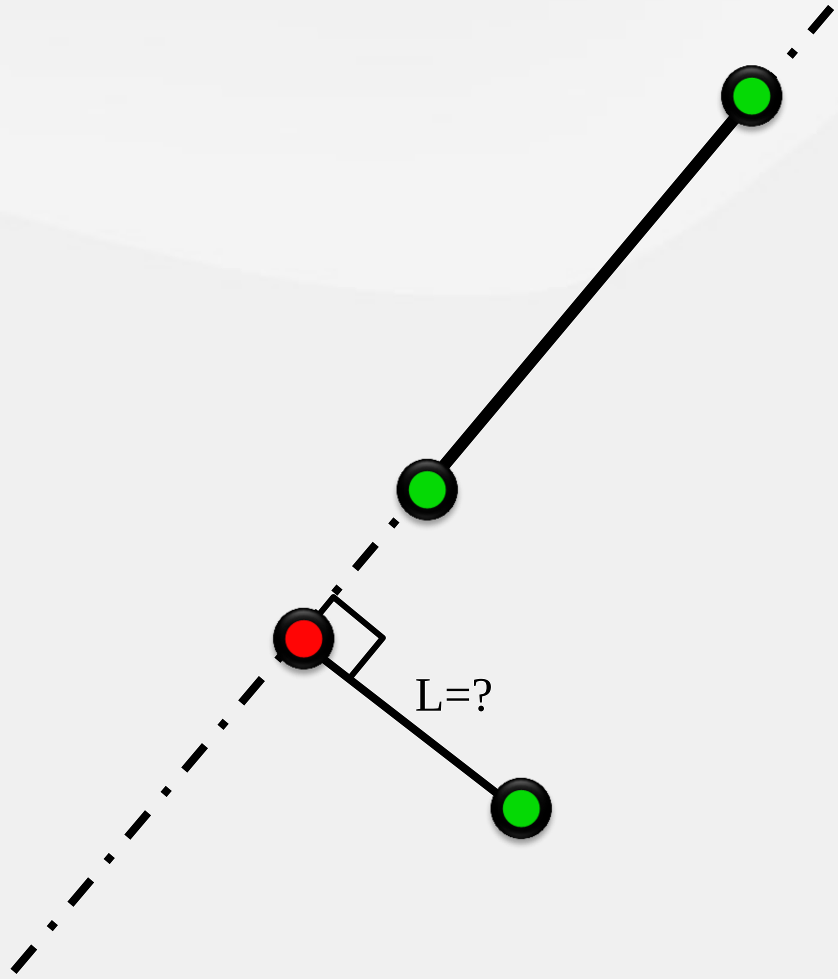
Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.

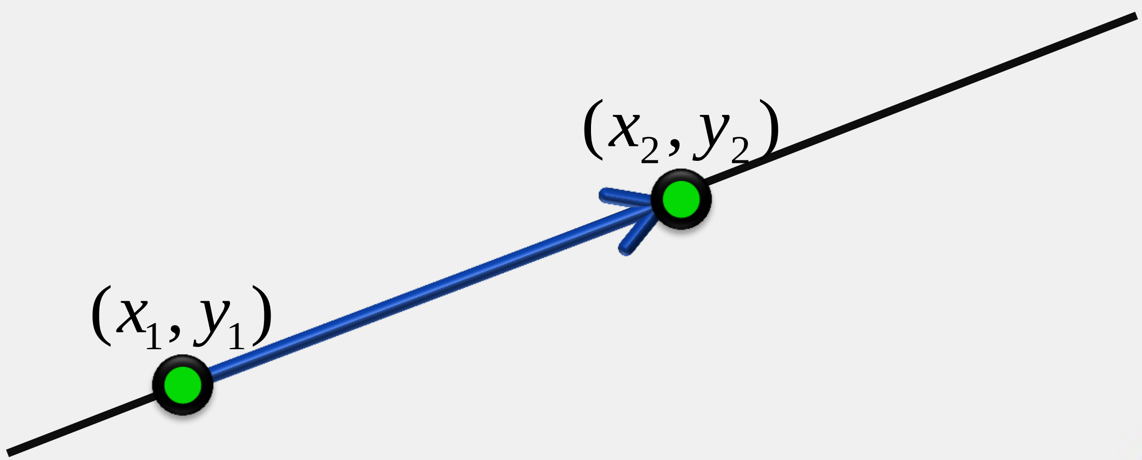


Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.

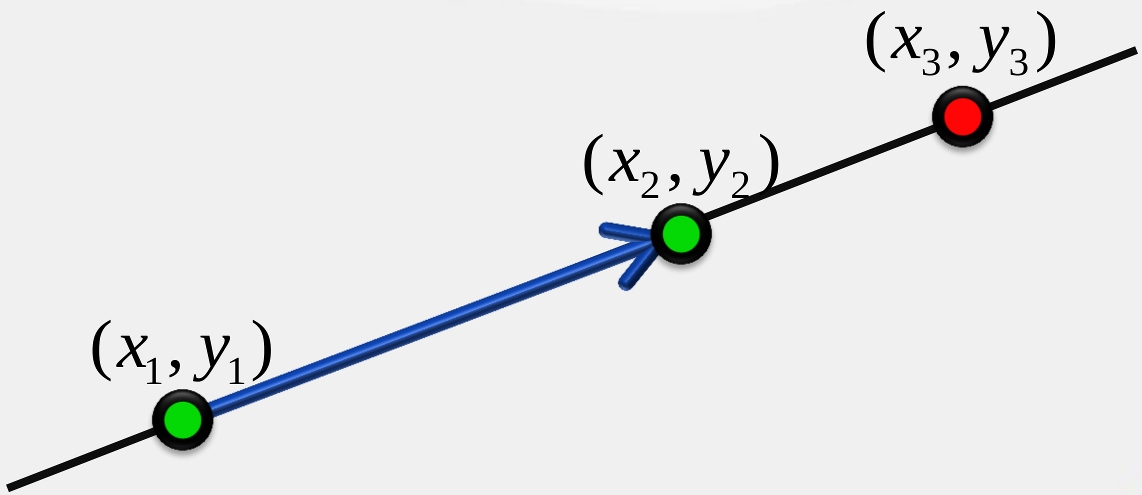
Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.

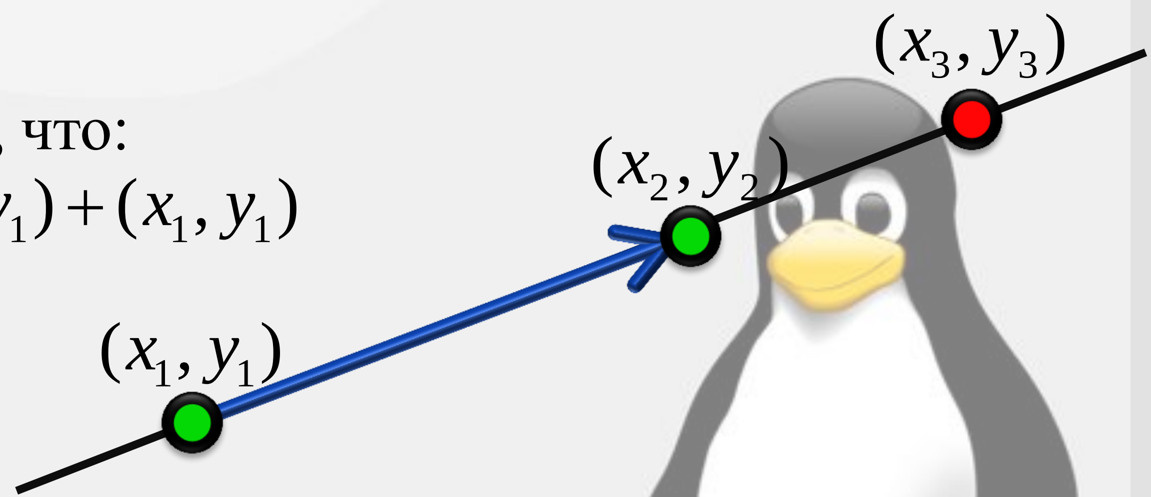


Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.

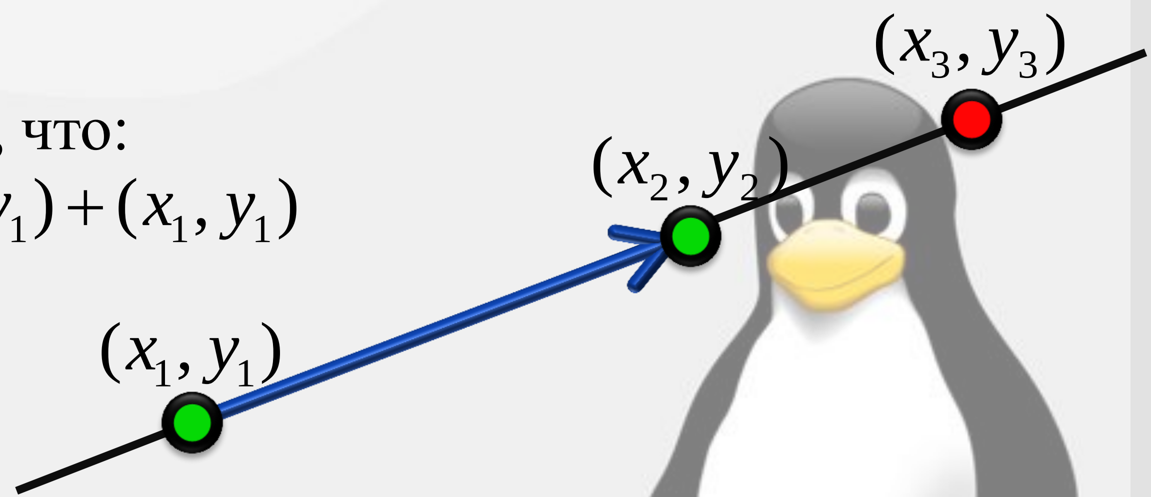
Существует такое альфа, что:

$$(x_3, y_3) = \alpha(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_1, y_1)$$



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.



Существует такое альфа, что:

$$(x_3, y_3) = \alpha(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_1, y_1)$$

$$(x_3, y_3) = (\alpha \cdot x_2 + (1-\alpha)x_1, \alpha \cdot y_2 + (1-\alpha)y_1)$$

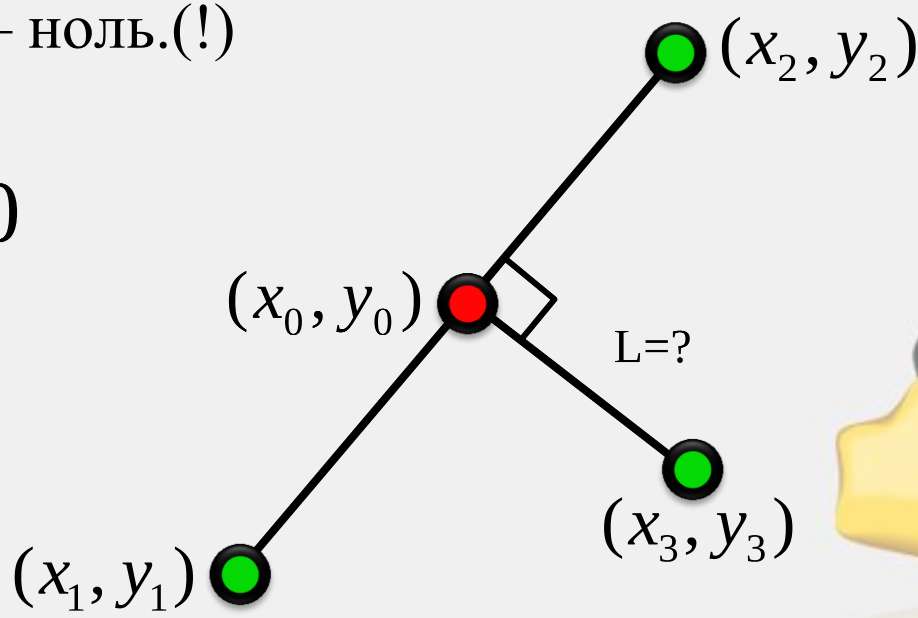
Скалярное произведение

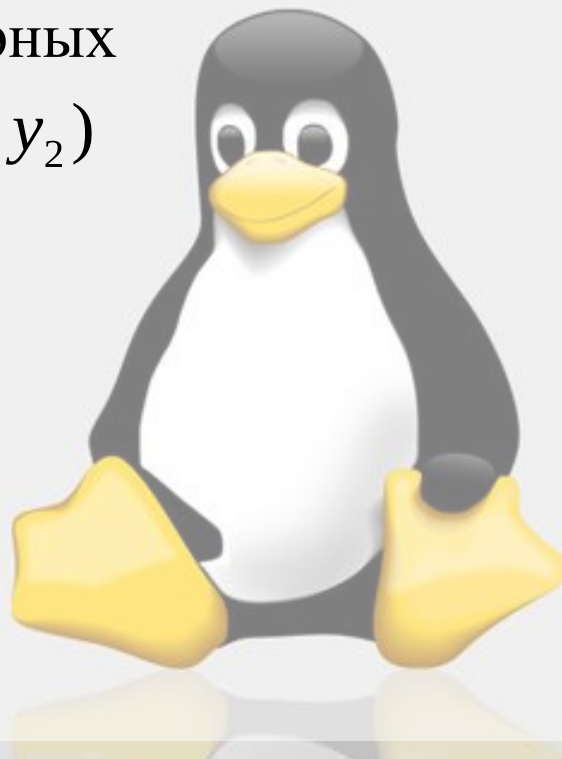
- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

$$\begin{cases} \langle a,b \rangle = 0 \\ line \end{cases}$$

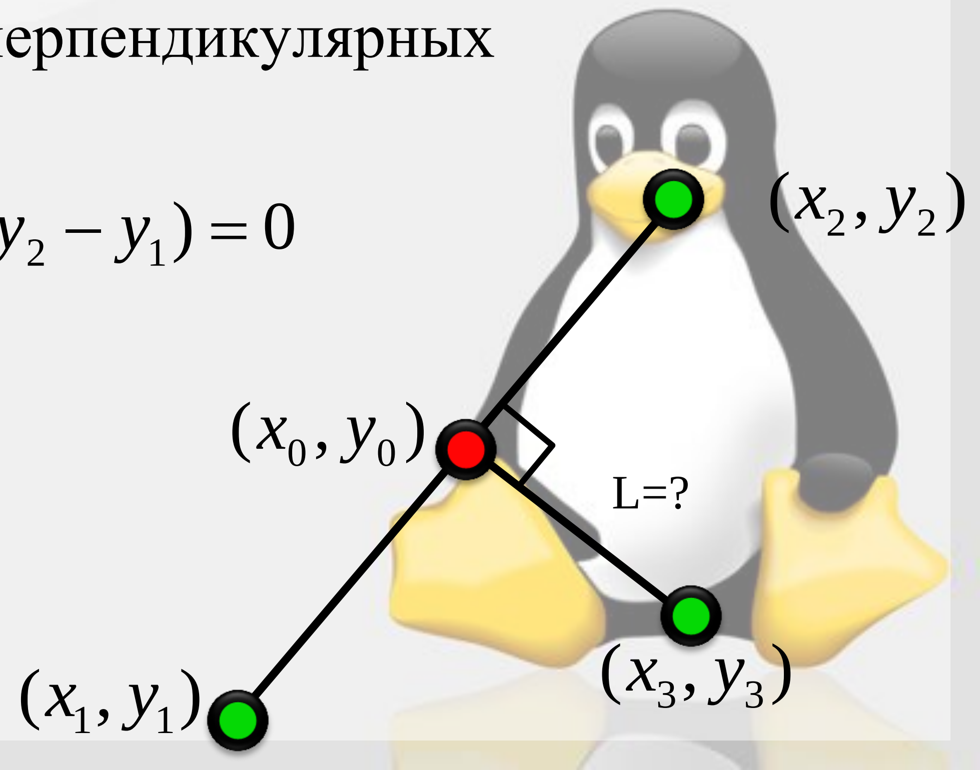




Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

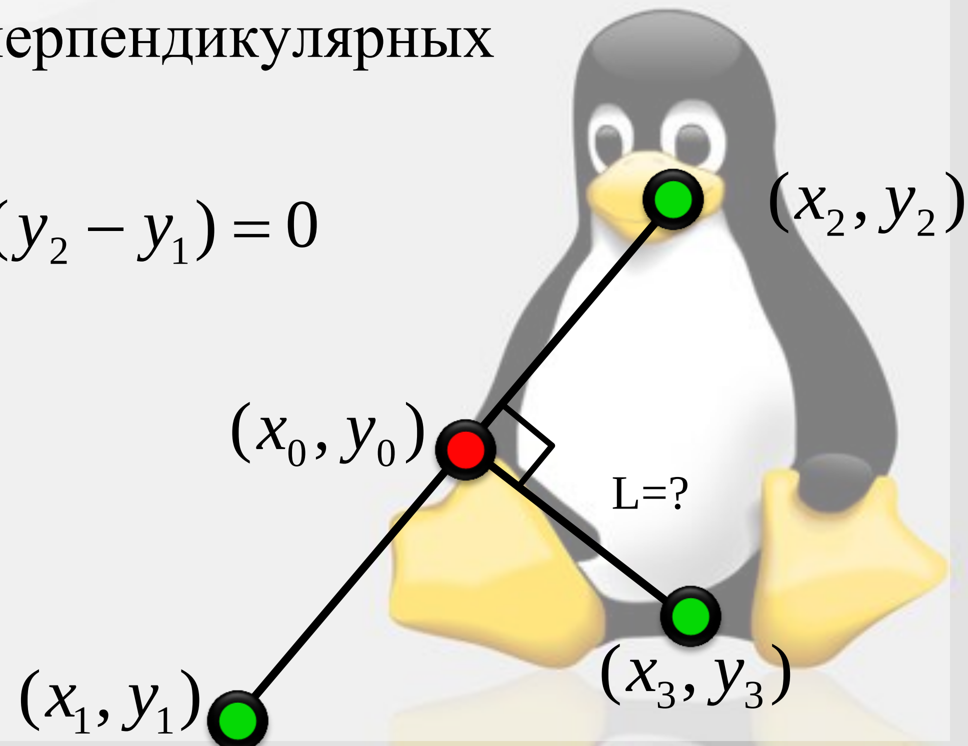
$$\begin{cases} (x_3 - x_0)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_0)(y_2 - y_1) = 0 \\ line \end{cases}$$



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

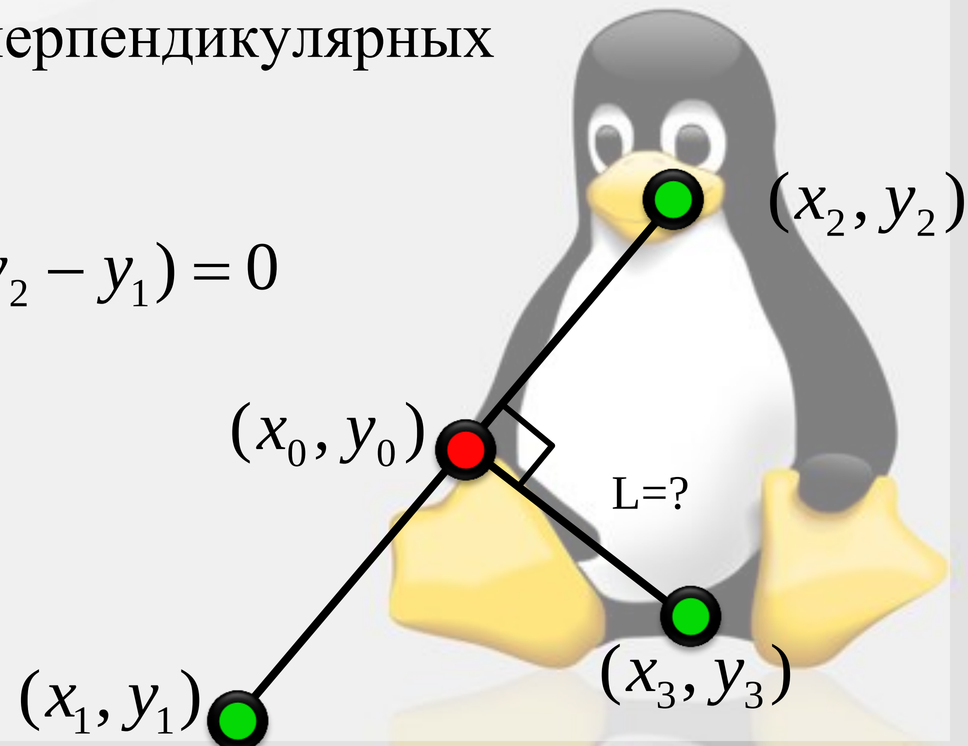
$$\begin{cases} (x_3 - x_0)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_0)(y_2 - y_1) = 0 \\ x_0 = \alpha \cdot x_2 + (1-\alpha)x_1 \\ y_0 = \alpha \cdot y_2 + (1-\alpha)y_1 \end{cases}$$



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

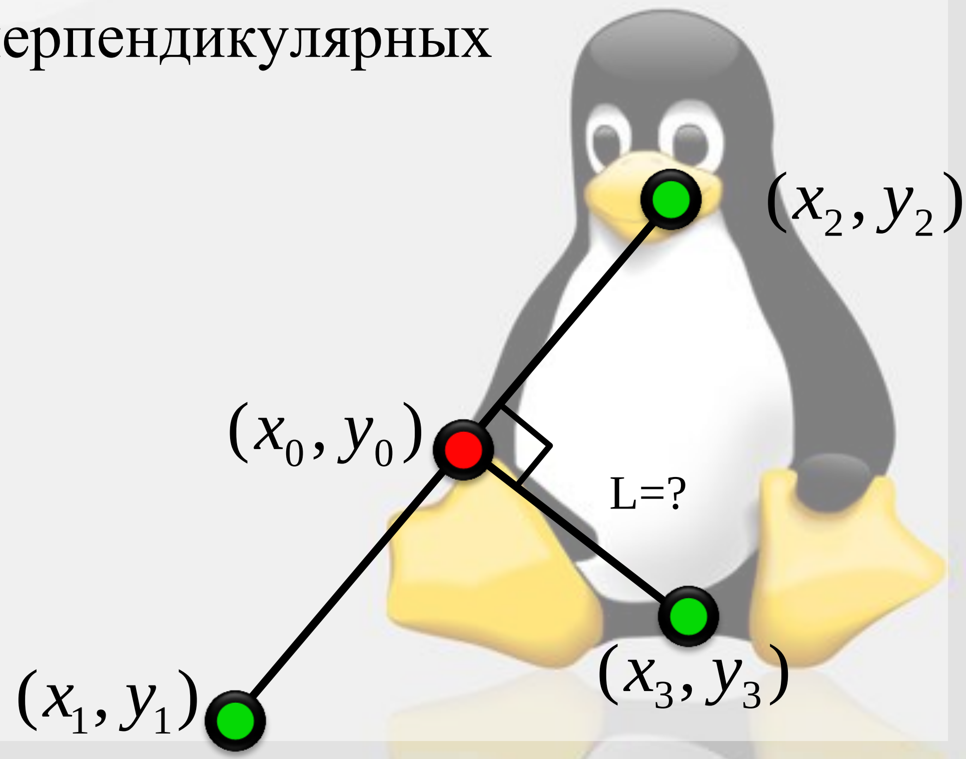
$$\begin{cases} (x_3 - x_0)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_0)(y_2 - y_1) = 0 \\ \alpha = \dfrac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}. \\ \alpha = \dfrac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases}$$



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

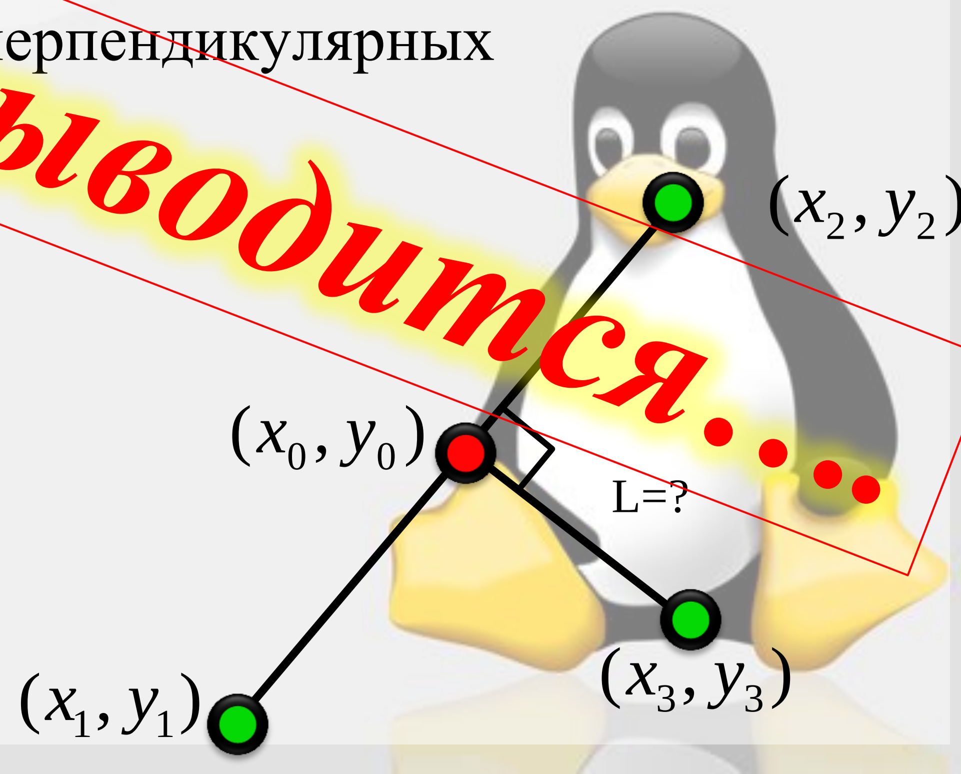
$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{(y_3 - y_0)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} + x_3 \\ \alpha = \dfrac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}. \\ \alpha = \dfrac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases}$$



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{(y_3 - y_0)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} + x_3 \\[2ex] \alpha = \dfrac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} \\[2ex] \alpha = \dfrac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases}.$$

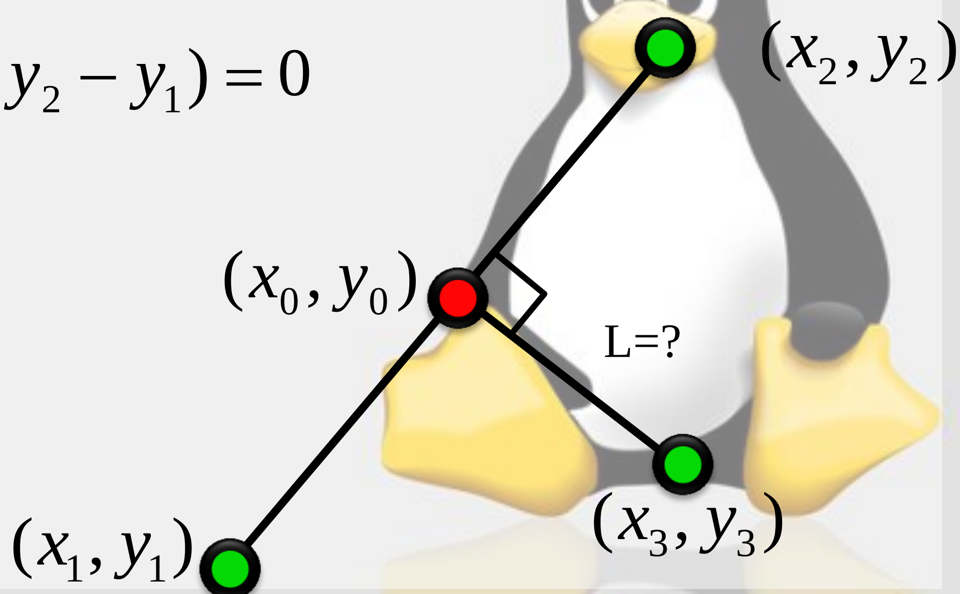


И дальше выводится…

Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

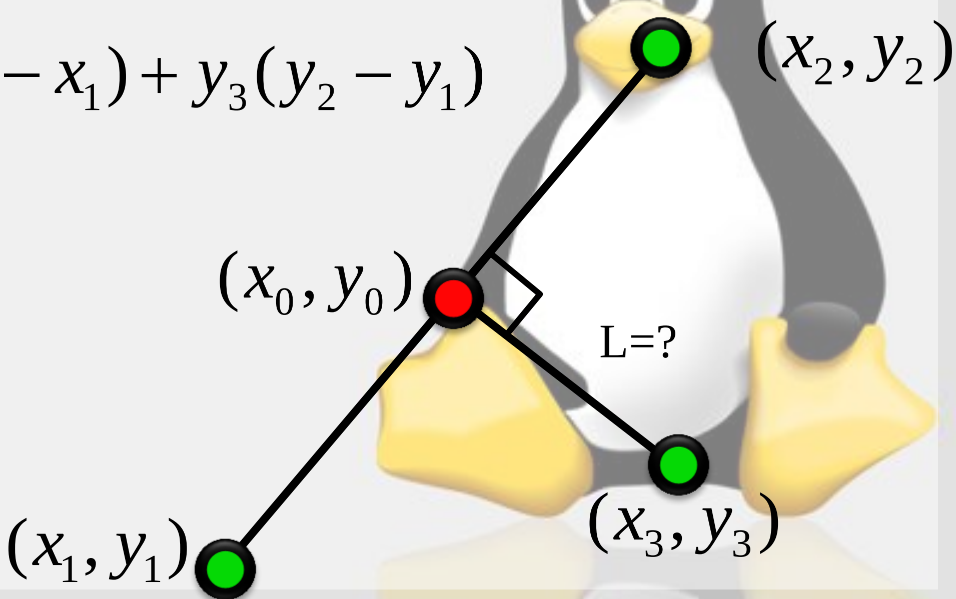
$$\begin{cases} (x_3 - x_0)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_0)(y_2 - y_1) = 0 \\ x_0 = \alpha \cdot x_2 + (1-\alpha)x_1 \\ y_0 = \alpha \cdot y_2 + (1-\alpha)y_1 \end{cases}$$



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

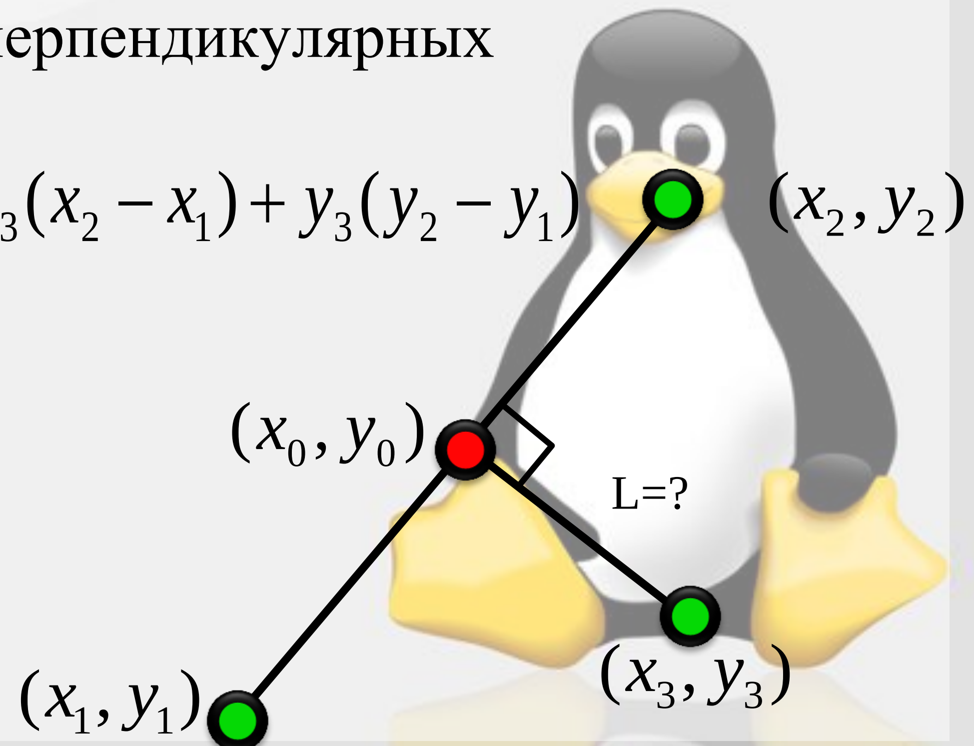
$$\begin{cases} (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 = x_3(x_2 - x_1) + y_3(y_2 - y_1) \\ x_0 + \alpha \cdot (x_1 - x_2) = x_1 \\ y_0 + \alpha \cdot (y_1 - y_2) = y_1 \end{cases}$$



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

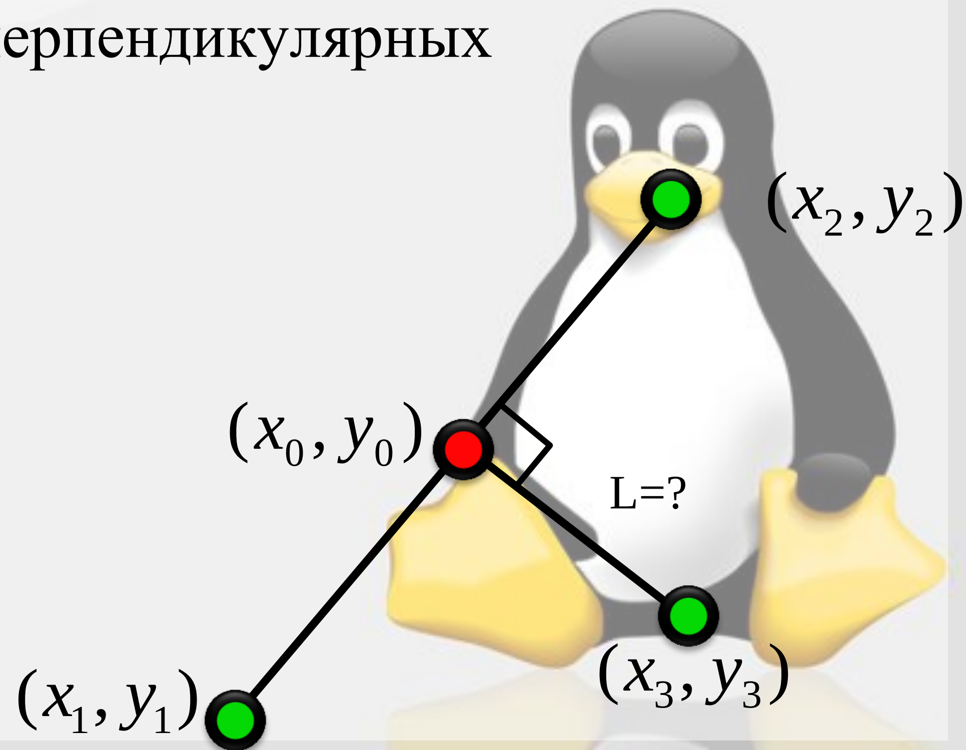
$$
\begin{cases}
(x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 + 0 \cdot \alpha = x_3(x_2 - x_1) + y_3(y_2 - y_1) \\
x_0 + 0 \cdot y_0 + (x_1 - x_2)\alpha = x_1 \\
0 \cdot x_0 + y_0 + (y_1 - y_2)\alpha = y_1
\end{cases}
$$



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

$$\begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 + 0 \cdot \alpha = r_1 \\ x_0 + 0 \cdot y_0 + c_2 \alpha = r_2 \\ 0 \cdot x_0 + y_0 + c_3 \alpha = r_3 \end{cases}$$



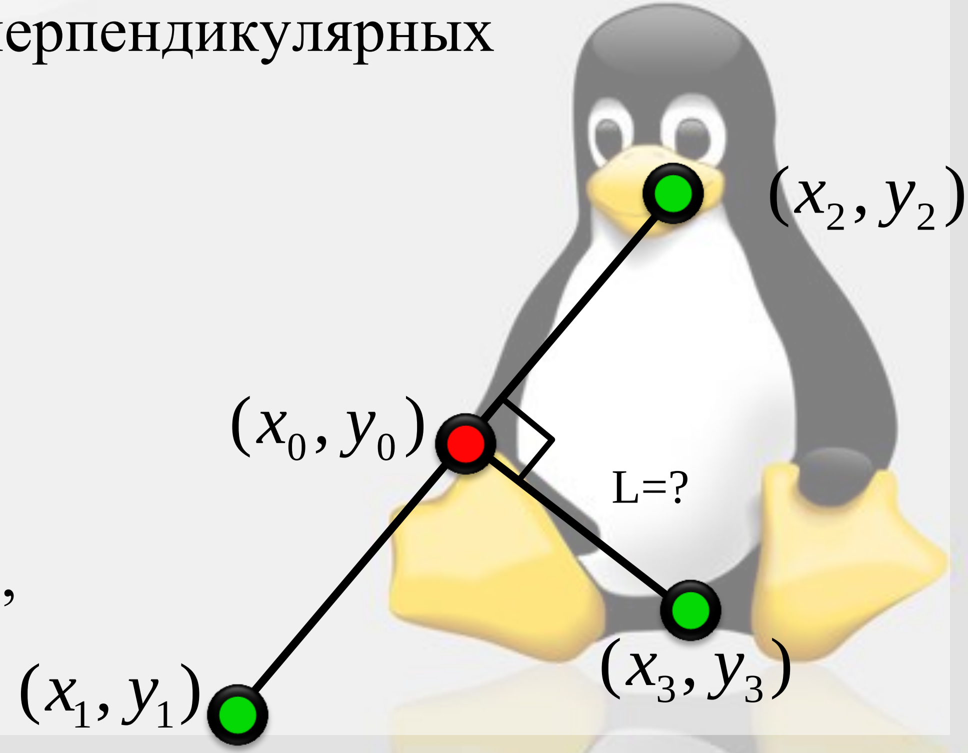
Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

$$\begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 + 0 \cdot \alpha = r_1 \\ x_0 + 0 \cdot y_0 + c_2 \alpha = r_2 \\ 0 \cdot x_0 + y_0 + c_3 \alpha = r_3 \end{cases}$$

Система линейных уравнений,

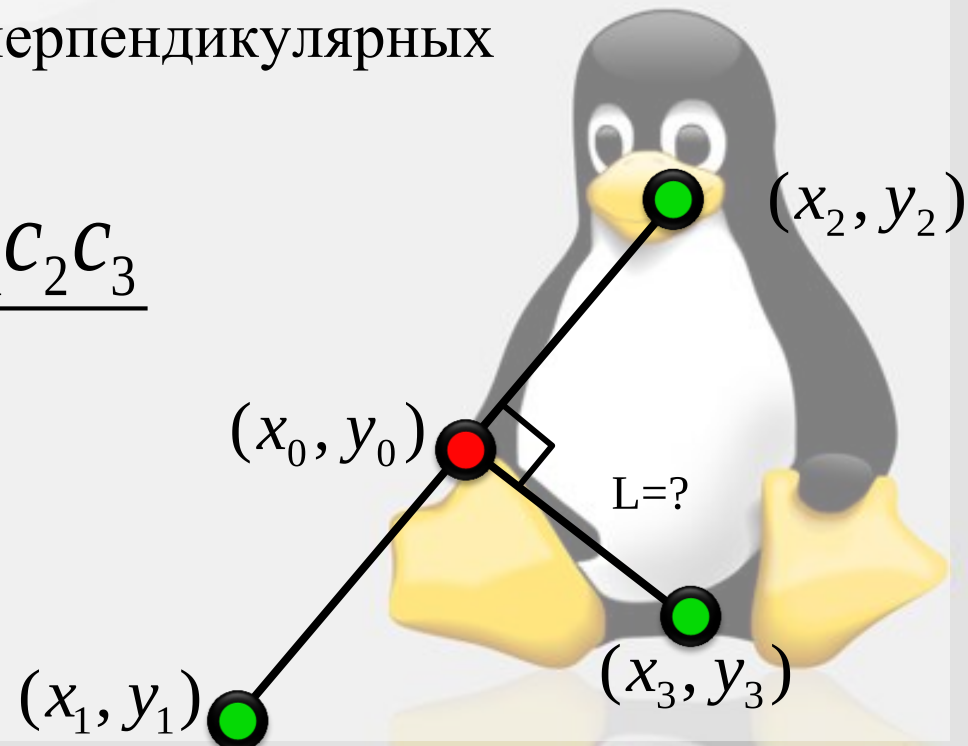
Алгебра, 9 класс.



Скалярное произведение

- Задача: найти расстояние от прямой до точки.
- Полезные вещи:
  - Любую(!) точку на прямой можно получить удлиняя и укорачивая вектор.
  - Скалярное произведение перпендикулярных векторов – ноль.(!)

$$y_0 = \frac{a_1 c_2 r_3 + a_1 c_3 r_2 - r_1 c_2 c_3}{c_3 b_1 + c_2 a_1}$$



Векторное произведение

Векторное произведение

- *Здесь было сложное определение.*

Векторное произведение

- *Здесь было сложное определение.*
- Результатом векторного произведения является <u>вектор</u>. Этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой расположены два вектора.

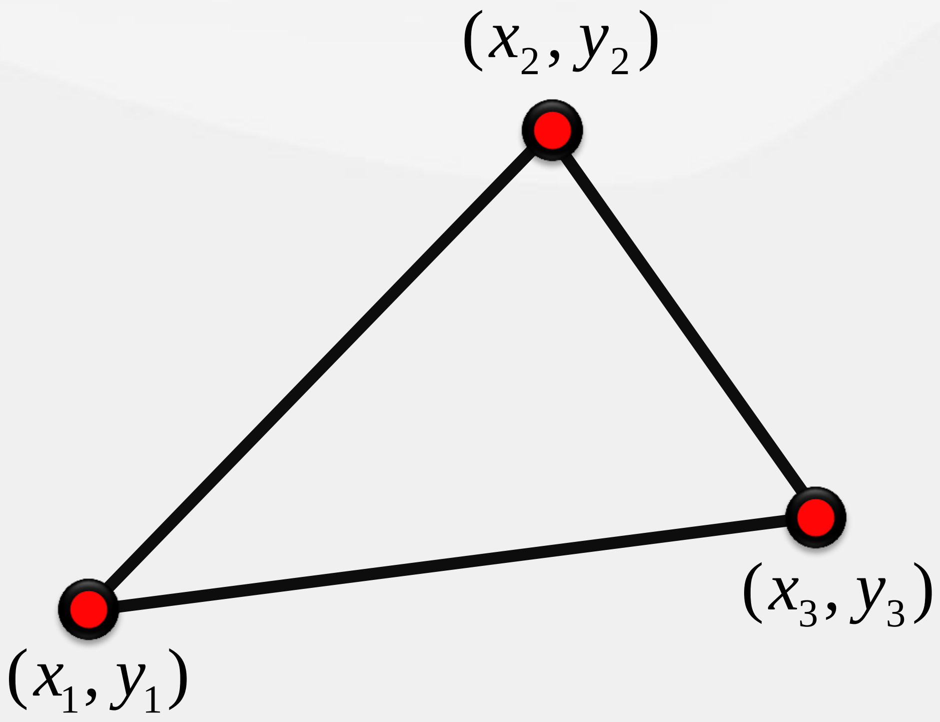
Векторное произведение

- *Здесь было сложное определение.*
- Результатом векторного произведения является вектор. Этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой расположены два вектора.
- Длина результирующего вектора:

$$[a,b] = |a||b|\sin(a,b)$$

Векторное произведение

- Задача: найти площадь треугольника, образованного тремя точками, с заданными координатами.



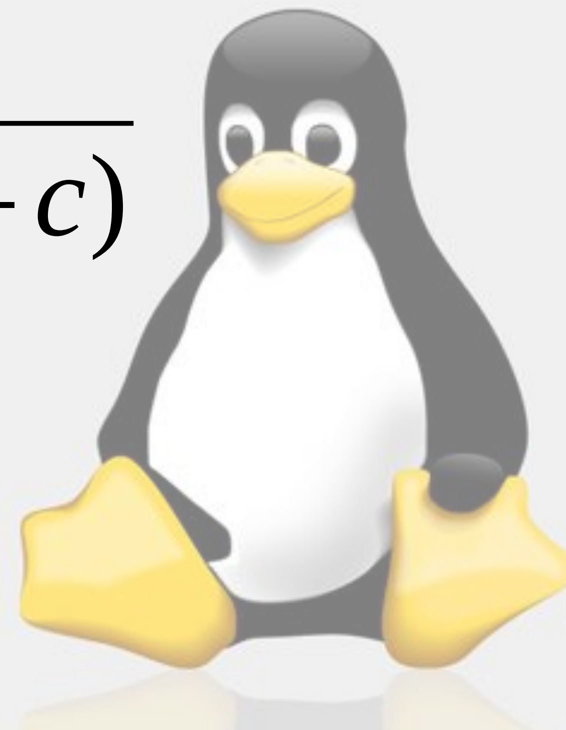
Векторное произведение

- Задача: найти площадь треугольника, образованного тремя точками, с заданными координатами.
  - Способ 1: формула Герона.
  - Способ 2: половина длины векторного произведения.

Векторное произведение

- Задача: найти площадь треугольника, образованного тремя точками, с заданными координатами.
  - Способ 1: формула Герона.
  - Способ 2: половина длины векторного произведения.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



Векторное произведение

- *Здесь было сложное определение.*
- Результатом векторного произведения является вектор. Этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой расположены два вектора.
- Длина результирующего вектора:

$$[a,b] = |a||b|\sin(a,b)$$

- Результирующий вектор:

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Векторное произведение

- Результирующий вектор:

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

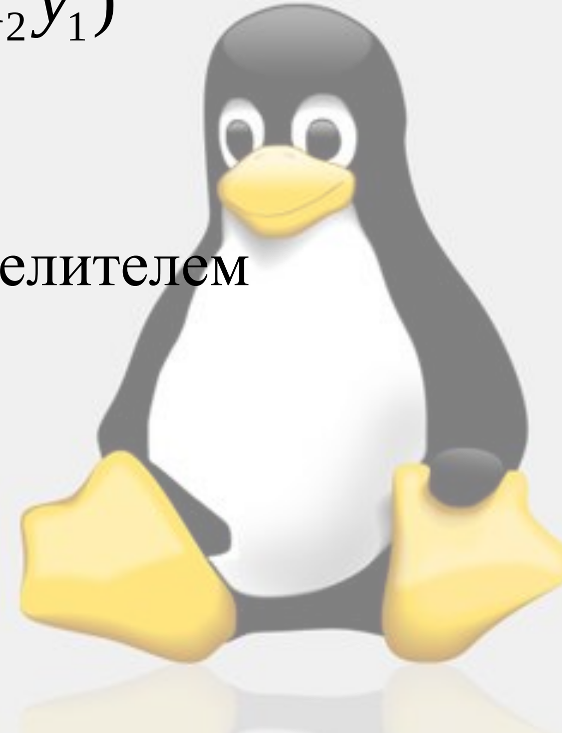
$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Факультативное знание

Векторное произведение является определителем следующей матрицы:

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$



Векторное произведение

- Результирующий вектор:

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

- Двумерный случай:

$$x = (x_1, x_2, 0)$$

$$y = (y_1, y_2, 0)$$

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Векторное произведение

- Результирующий вектор:

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

- Двумерный случай:

$$x = (x_1, x_2, 0)$$

$$y = (y_1, y_2, 0)$$

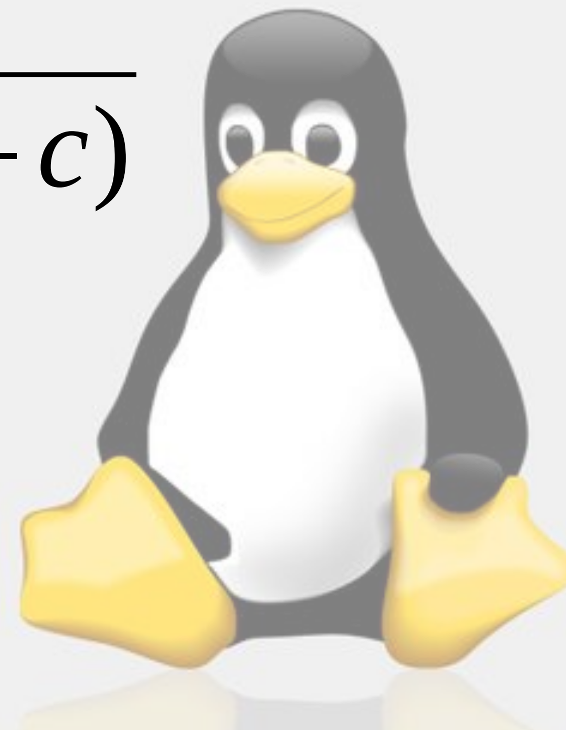
$$[x, y] = (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Векторное произведение

- Задача: найти площадь треугольника, образованного тремя точками, с заданными координатами.
  - Способ 1: формула Герона.
  - Способ 2: половина длины векторного произведения.

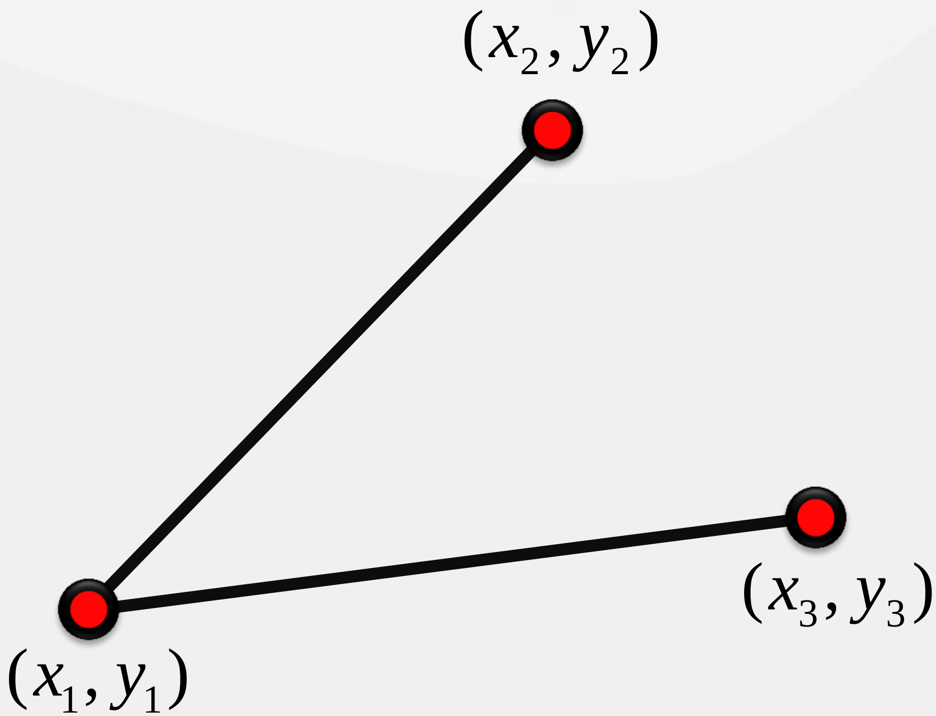
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \frac{|\hat{x}_1\hat{y}_2 - \hat{x}_2\hat{y}_1|}{2}$$



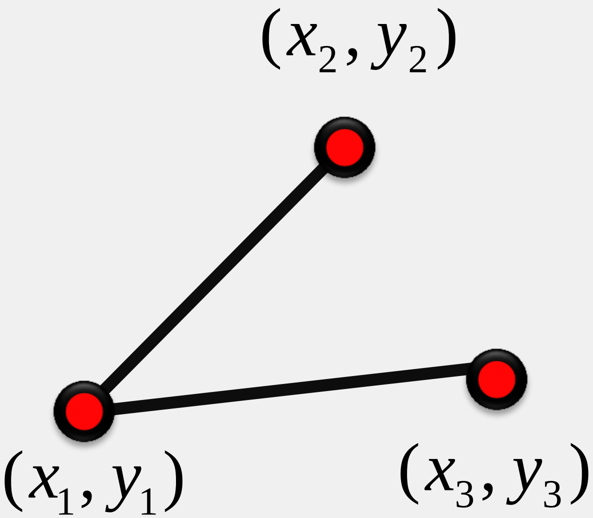
Скалярное произведение

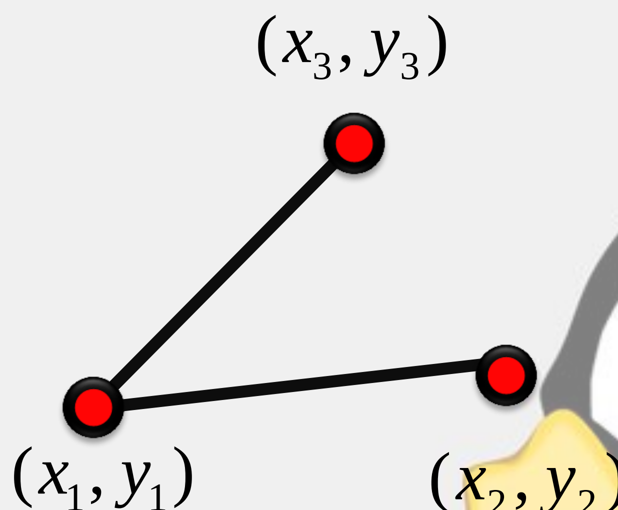
- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки и его **направление**.

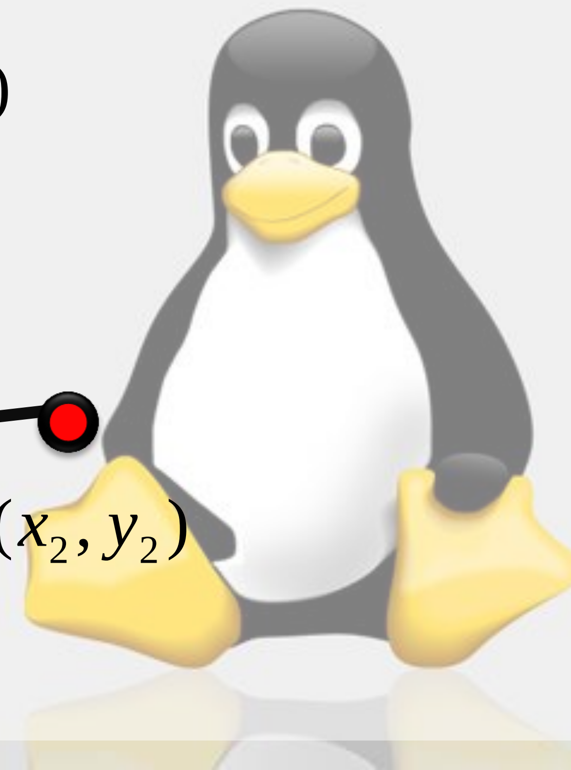


Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки и его **направление**.

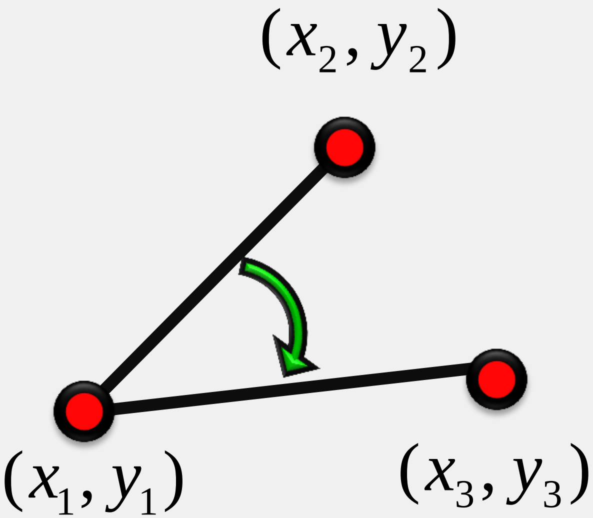


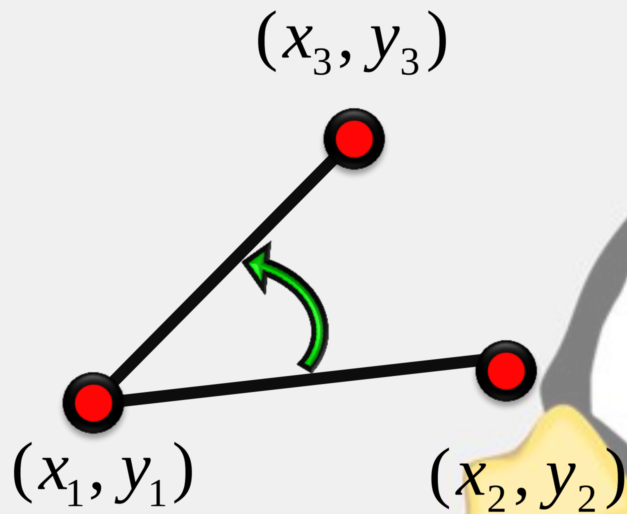




Скалярное произведение

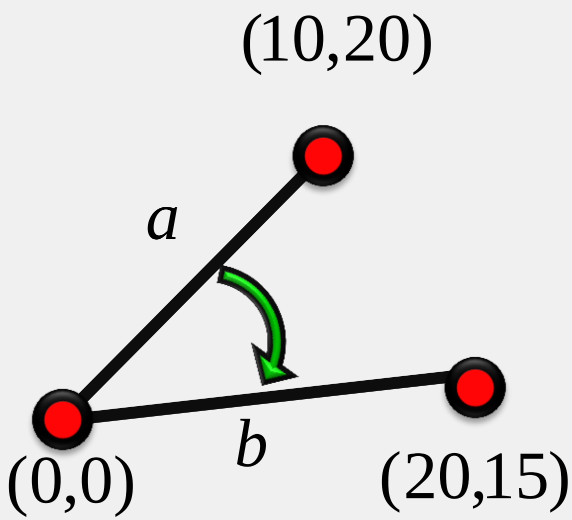
- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки и его **направление**.

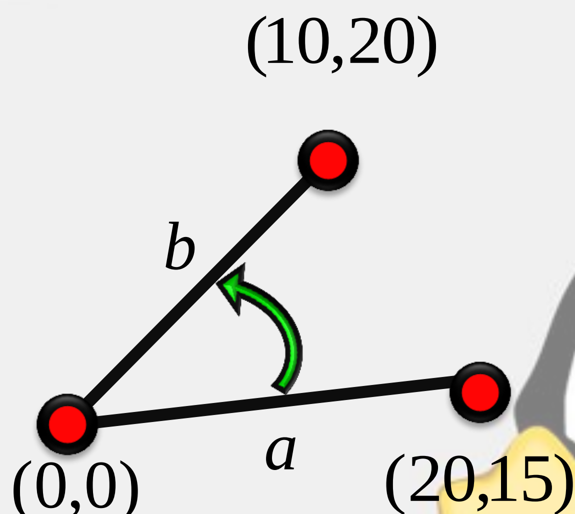




Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки и его **направление**.



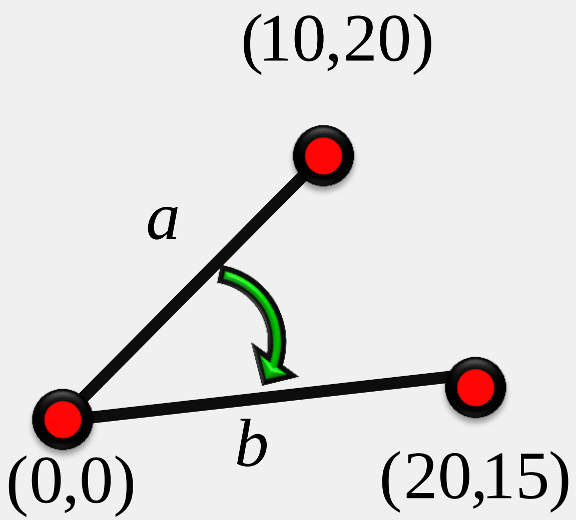


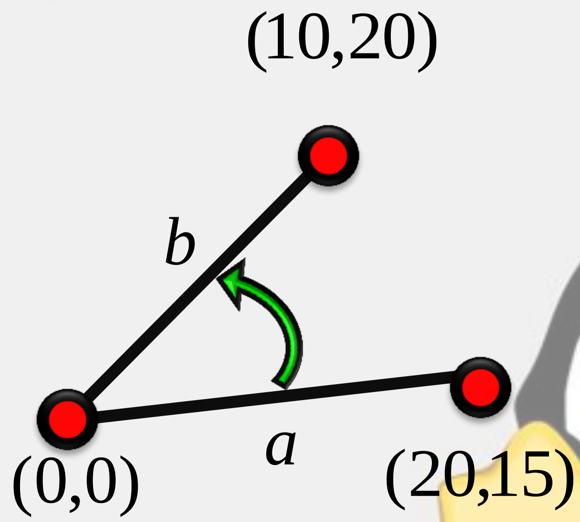
Скалярное произведение

- Задача: найти угол между двумя прямыми, выходящими из одной точки и его **направление**.

$$[a,b] = (0,0,10*15-20*20) \qquad [a,b] = (0,0,20*20-10*15)$$

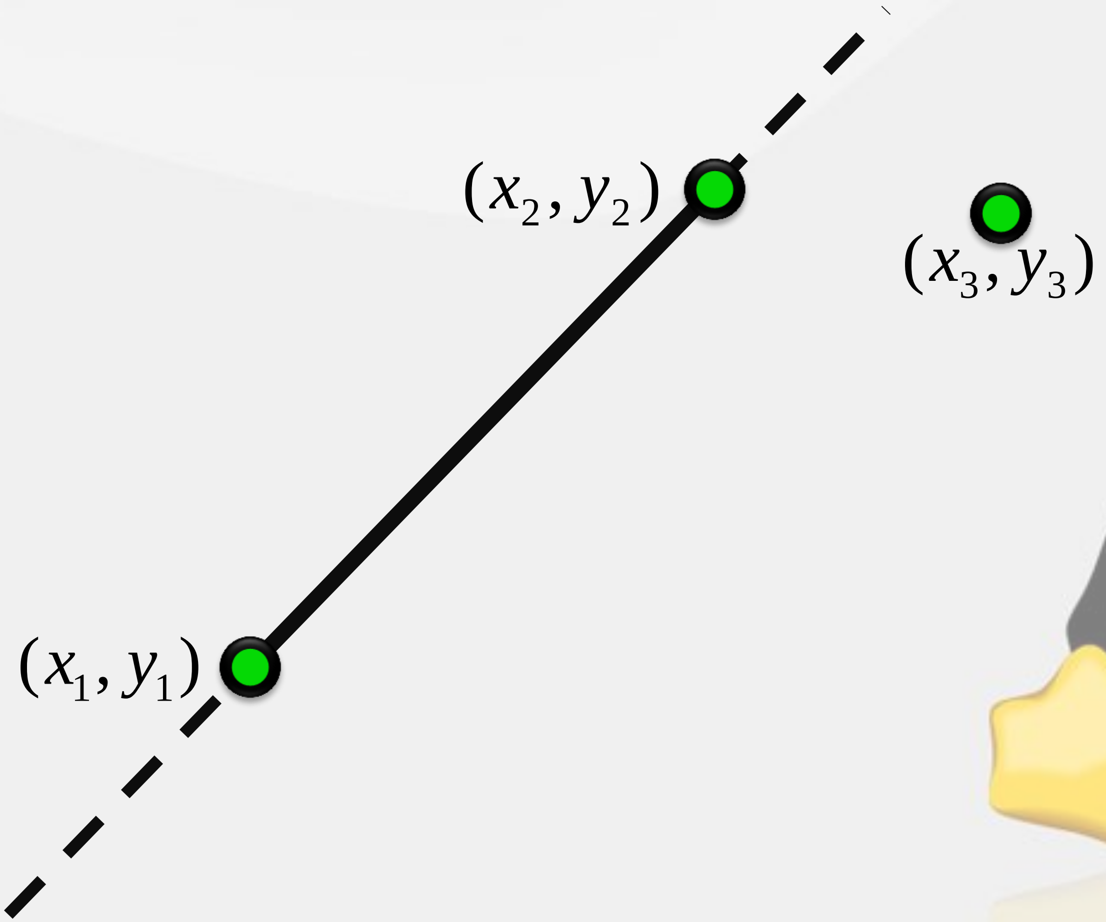
$$[a,b] = (0,0,-250) \qquad [a,b] = (0,0,250)$$





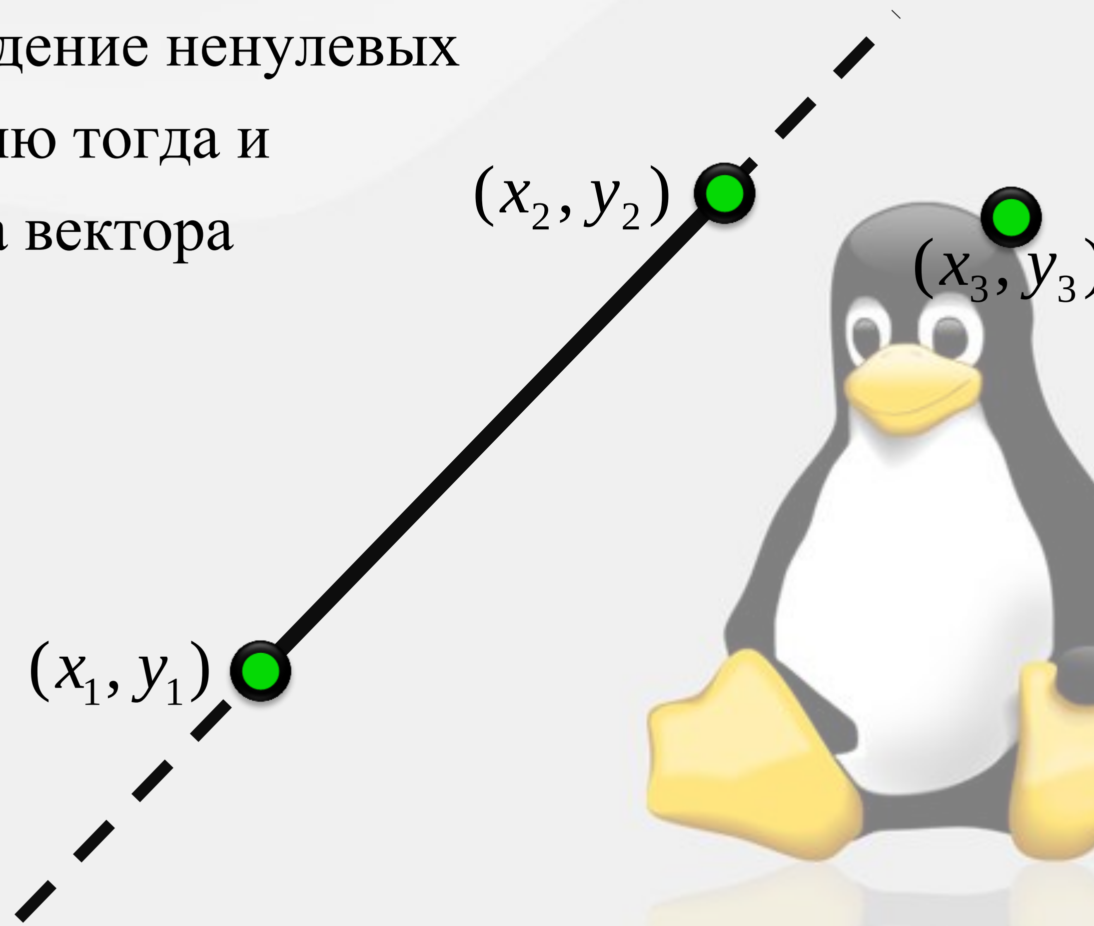
Векторное произведение

- Задача: заданы координатами прямая и точка. Лежит ли точка на этой прямой?



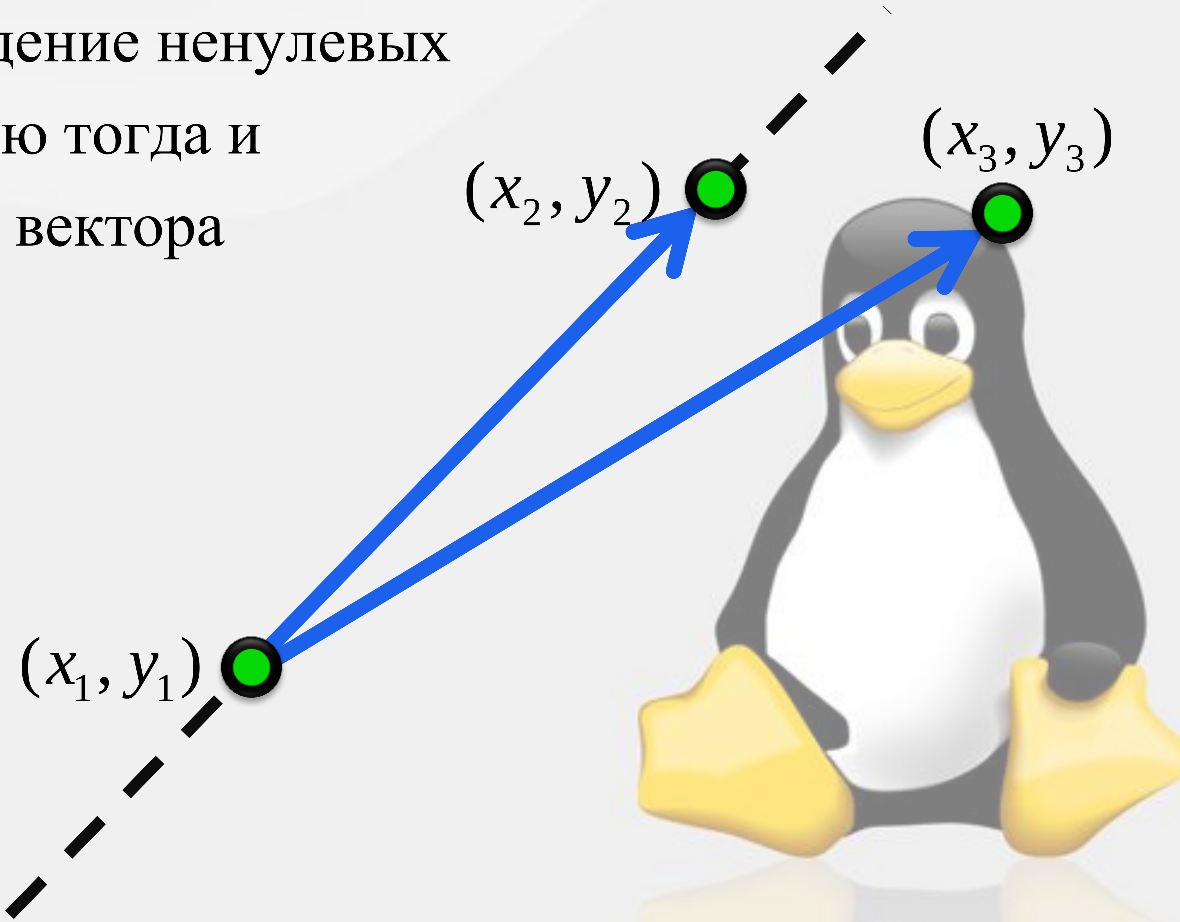
Векторное произведение

- Задача: заданы координатами прямая и точка. Лежит ли точка на этой прямой?
- Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора со направленны.



Векторное произведение

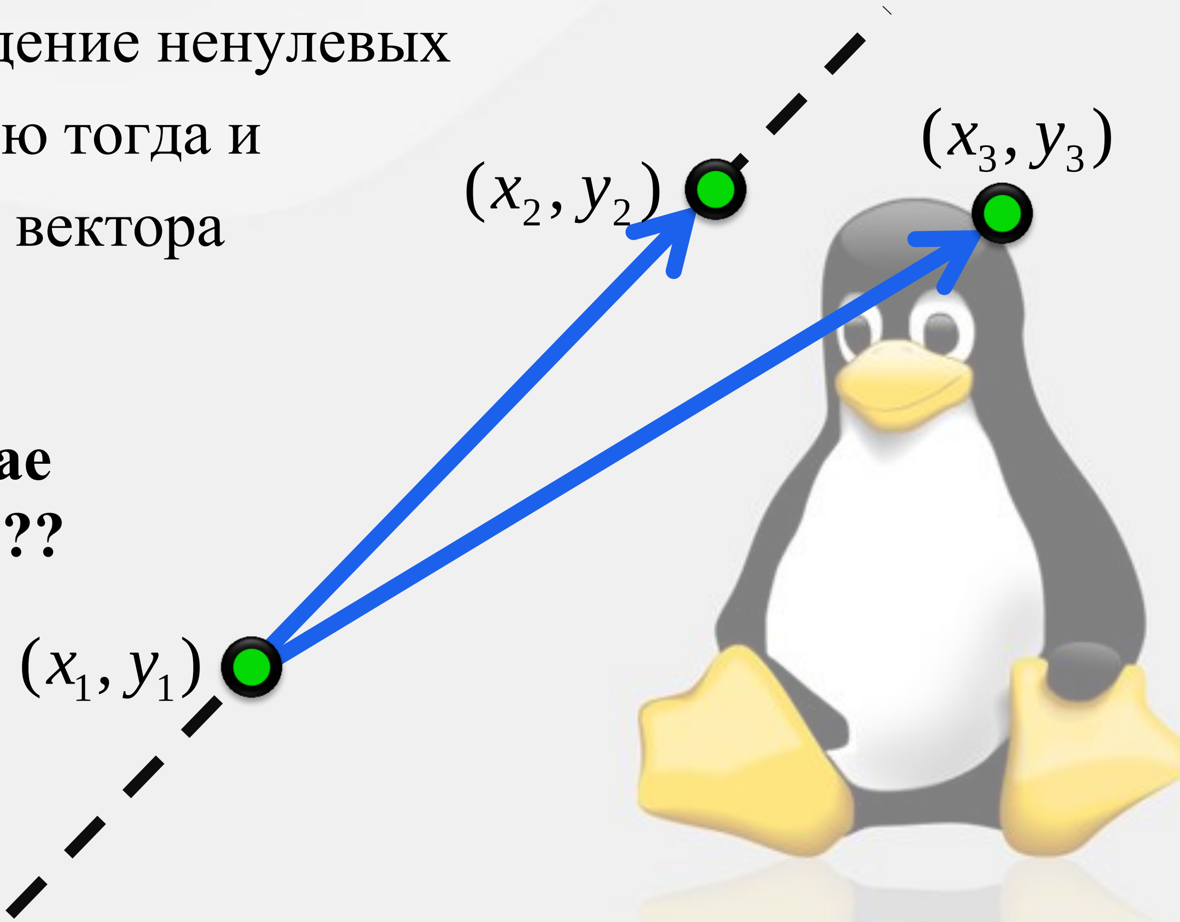
- Задача: заданы координатами прямая и точка. Лежит ли точка на этой прямой?
- Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора со направленны.



Векторное произведение

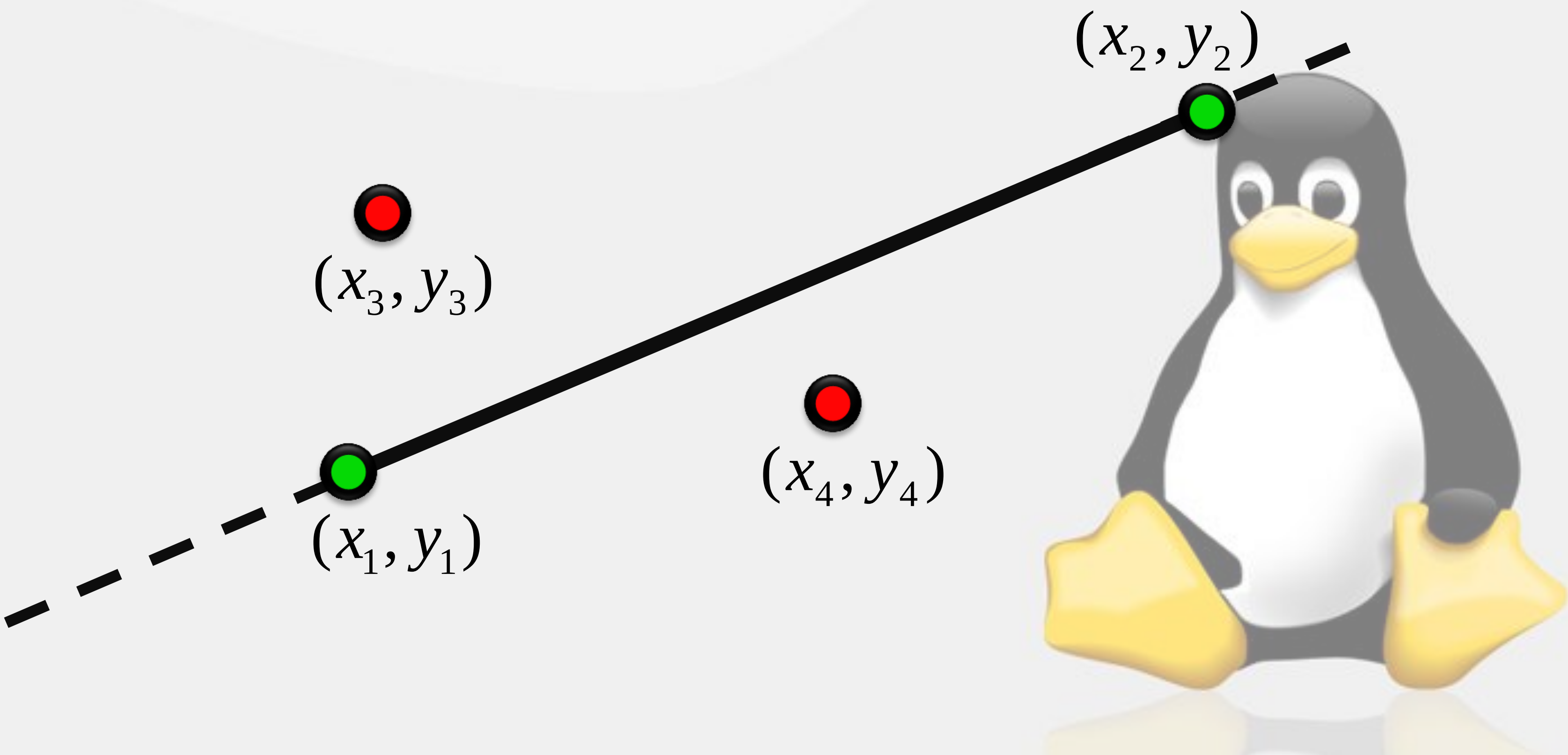
- Задача: заданы координатами прямая и точка. Лежит ли точка на этой прямой?
- Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора со направленны.

Что делать в случае нулевых векторов??



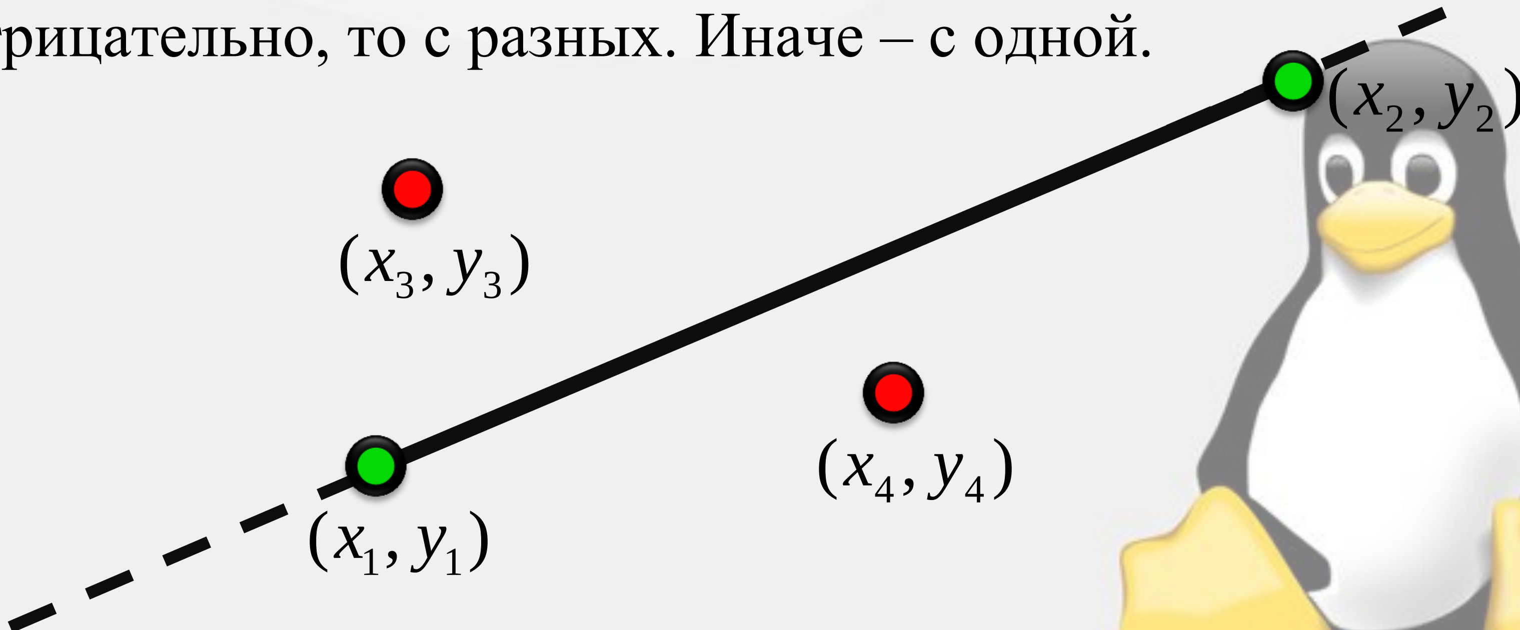
Векторное произведение

- Задача: заданы координатами прямая и две точки не лежащие на этой прямой. Выяснить, эти точки лежат с одной стороны прямой, или с разных.



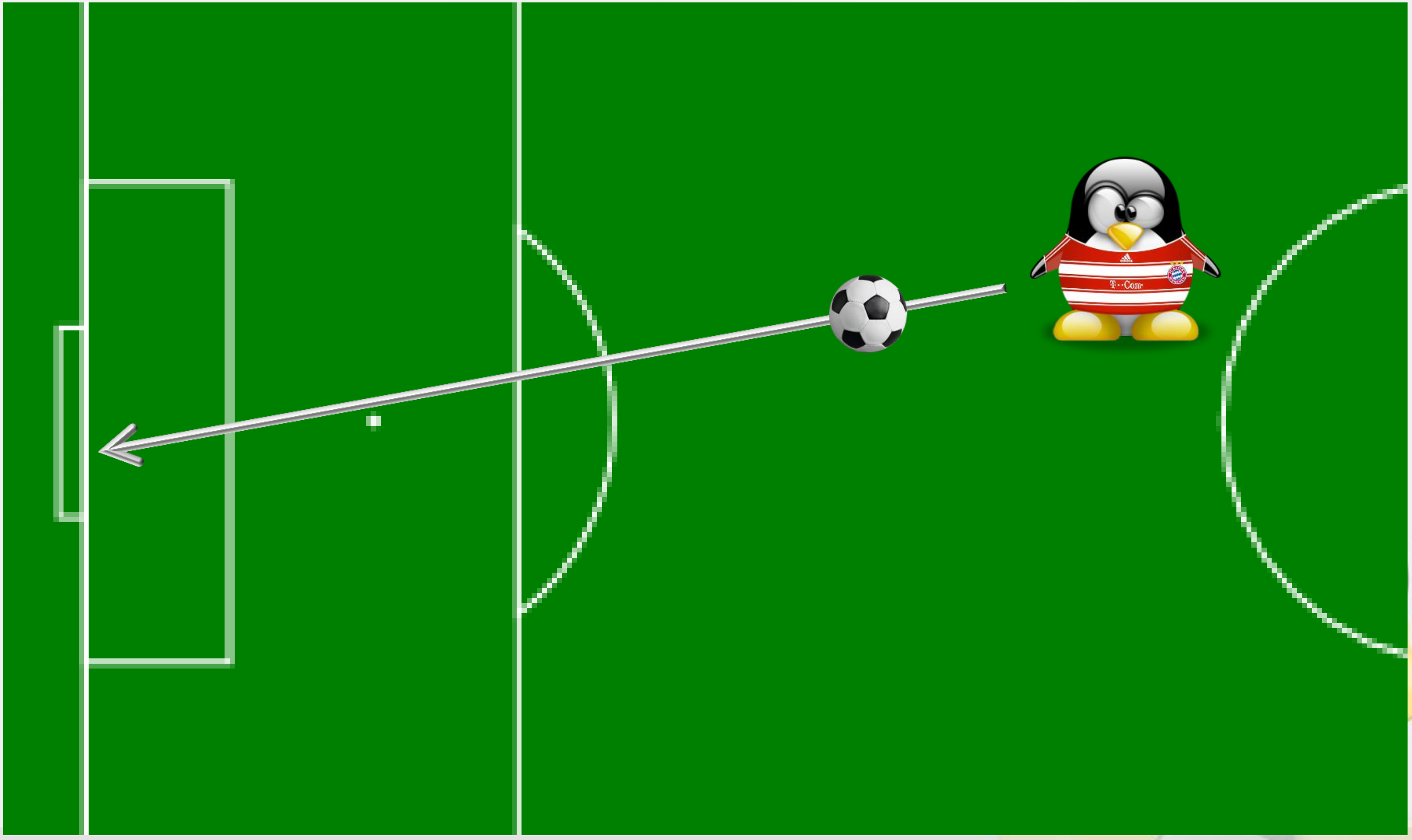
Векторное произведение

- Задача: заданы координатами прямая и две точки не лежащие на этой прямой. Выяснить, эти точки лежат с одной стороны прямой, или с разных.
- Если произведение аппликат векторных произведений отрицательно, то с разных. Иначе – с одной.

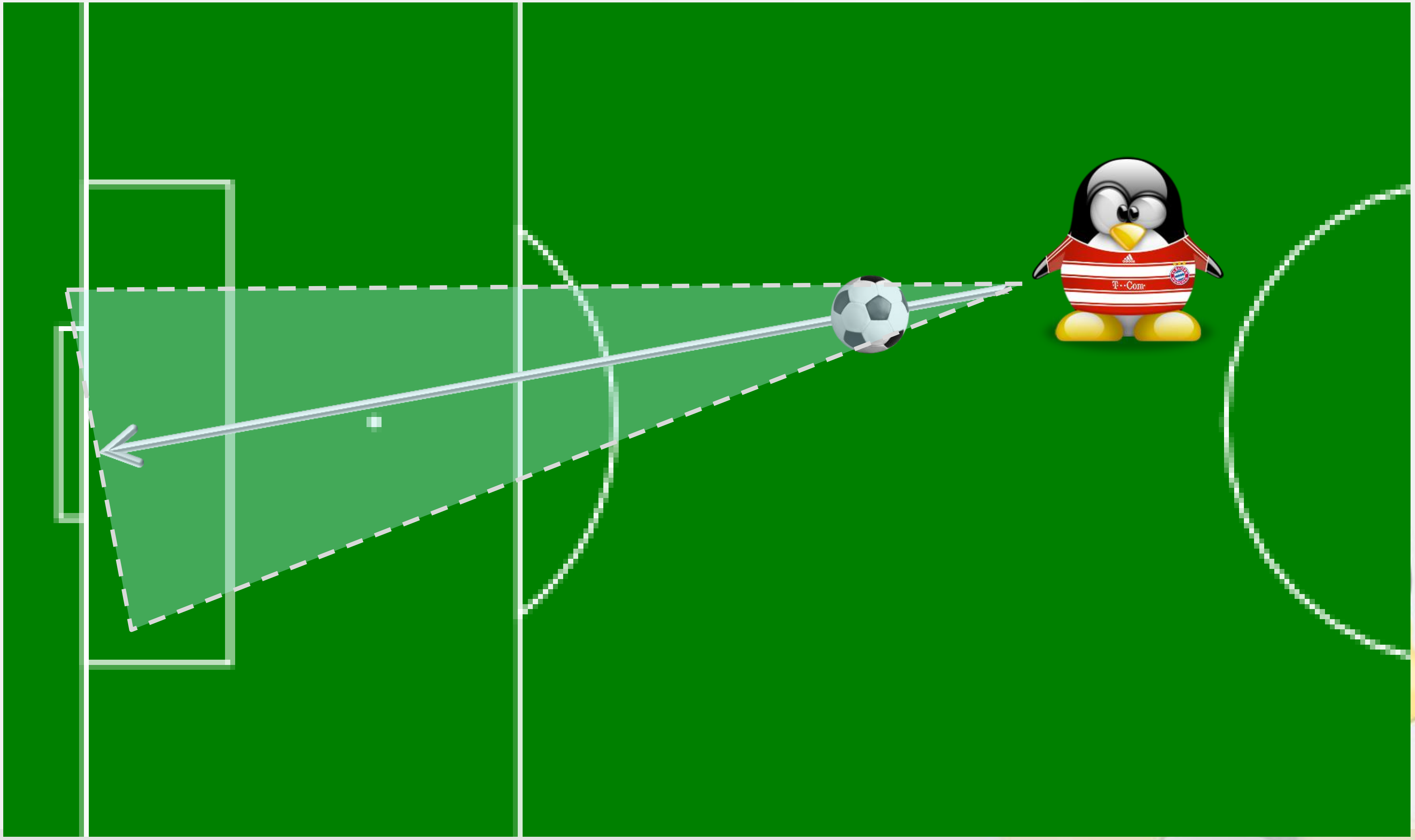


И снова футбол!

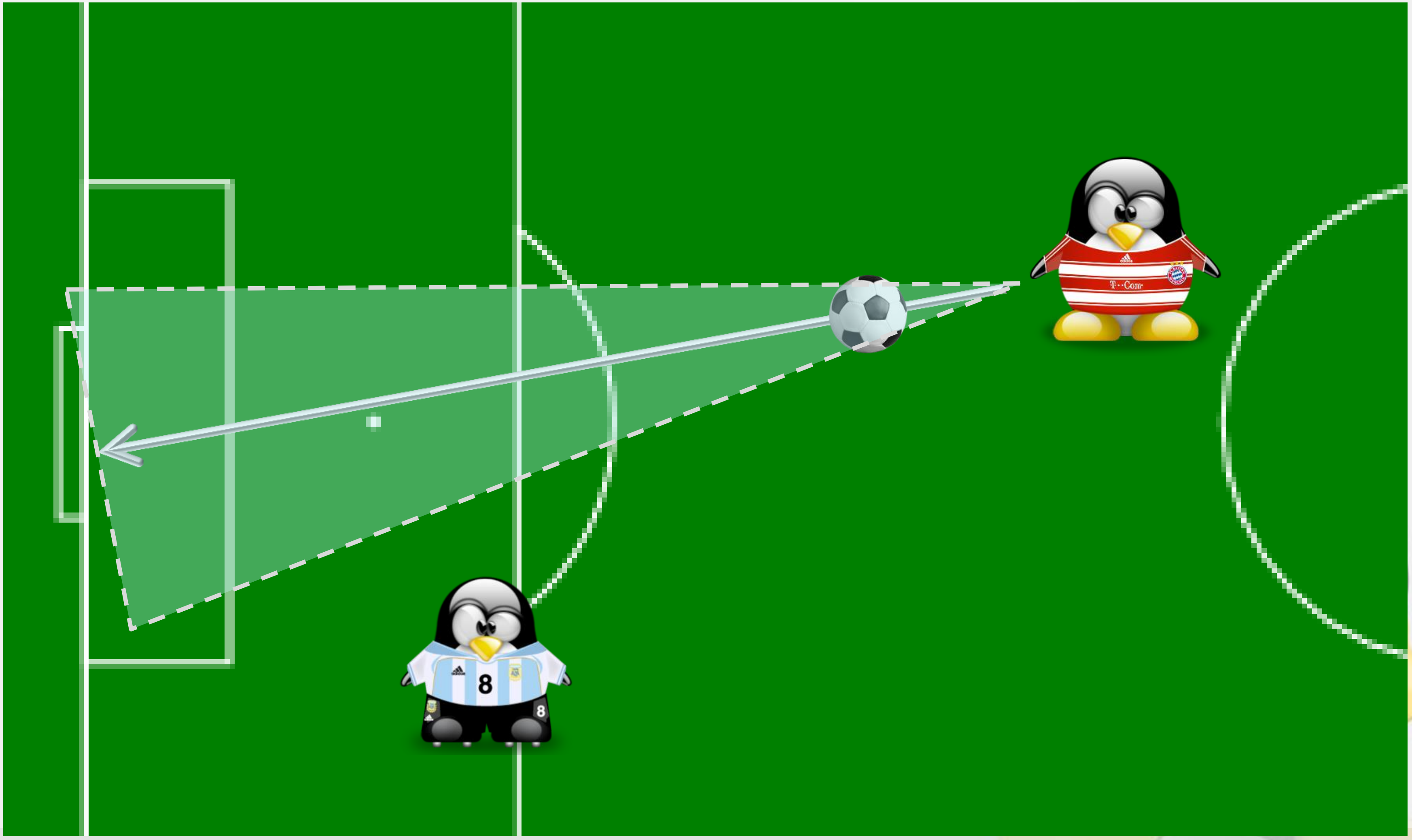
И снова футбол!



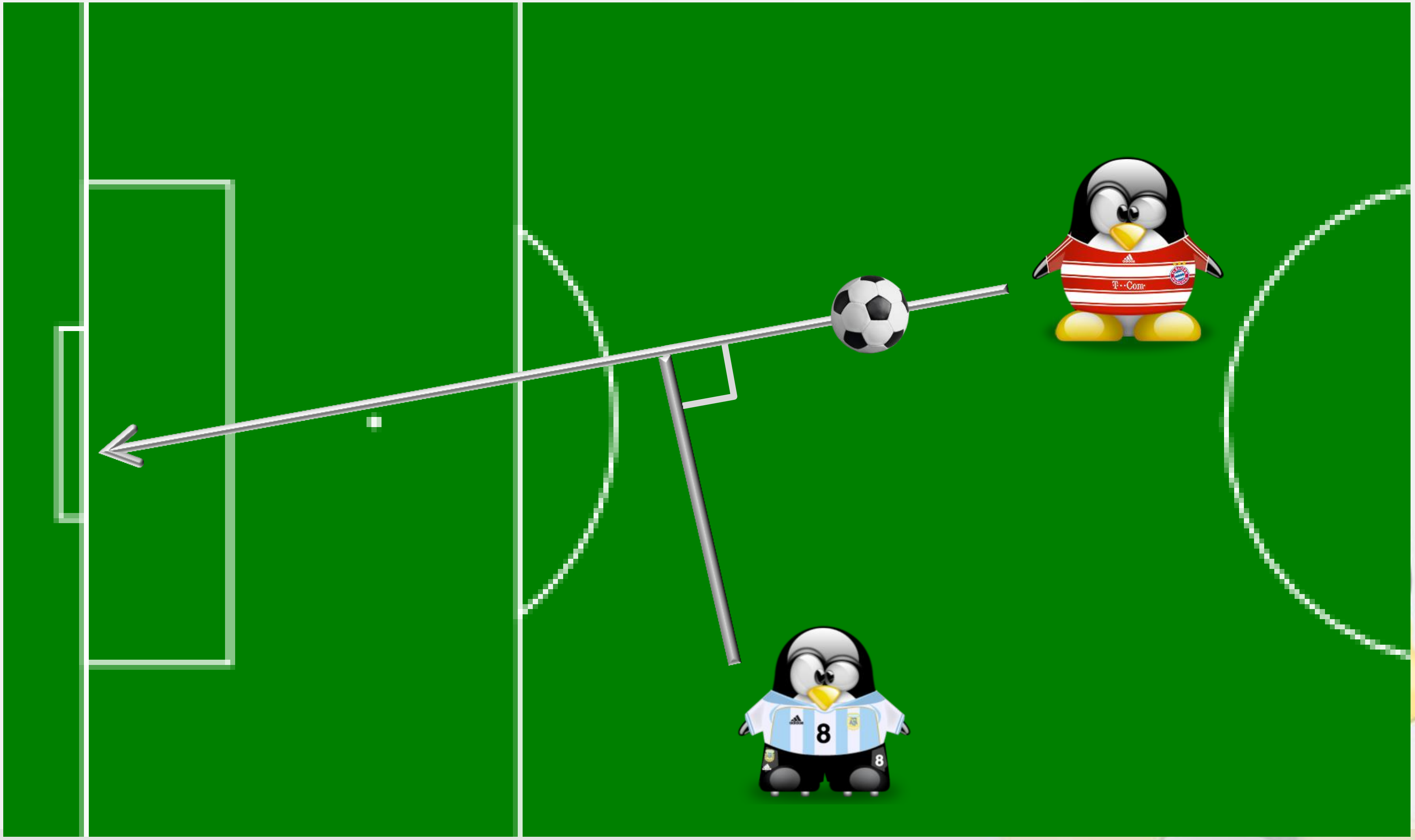
И снова футбол!



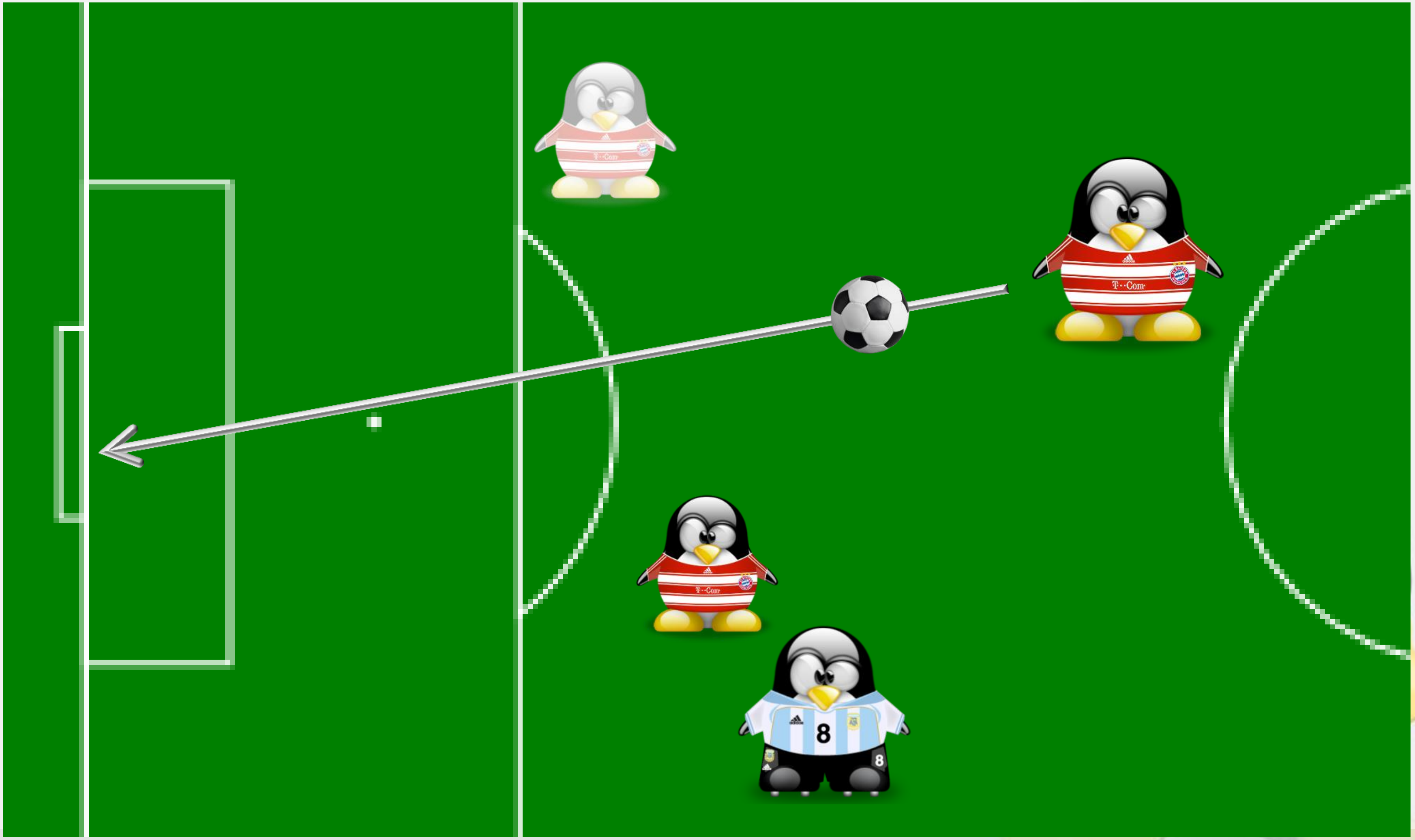
И снова футбол!



И снова футбол!



И снова футбол!



Thx.