Divisão e conquista - exercício relação de recorrência

Carlos Eduardo Gonzaga Romaniello de Souza - 19.1.4003

26 de abril de 2022

A)Caso base: $T(1) = O(1)$, Caso recursivo: $T(n) = 4 \times T(\frac{n}{2}) + O(n)$

- $4 \times (4 \times T(\frac{n}{2^2}) + O(\frac{n}{2})) + O(n)$
  $= (4^2 \times T(\frac{n}{2^2})) + (4^1 \times O(\frac{n}{2^1})) + O(n)$
- $4^2 \times (4 \times T(\frac{n}{2^3}) + O(\frac{n}{2^2})) + (4^1 \times O(\frac{n}{2^1})) + O(n)$
  $= (4^3 \times T(\frac{n}{2^3})) + (4^2 \times O(\frac{n}{2^2})) + (4^1 \times O(\frac{n}{2^1})) + O(n)$
- $4^k \times T(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} 4^i \times O(\frac{n}{2^i})$
  $= 4^k \times T(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} O(\frac{4^i n}{2^i})$
  $= 4^k \times T(\frac{n}{2^k}) + O(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{4^i n}{2^i})$
  $= 4^k \times T(\frac{n}{2^k}) + O(n \sum_{i=0}^{k-1} (\frac{4}{2})^i)$
  $= 4^k \times T(\frac{n}{2^k}) + O(n \sum_{i=0}^{k-1} 2^i)$
- pela fórmula de somatório de uma P.G. finita $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, para 2^i temos:
  $\frac{1(2^k-1)}{2-1}$
  $= 2^k - 1$
- $\therefore 4^k \times T(\frac{n}{2^k}) + O(n(2^k - 1))$
  $= 4^k \times T(\frac{n}{2^k}) + O(n)$
- para se alcançar o caso base precisamos que $\frac{n}{2^k} = 1$
  $\therefore n = 2^k \rightarrow \log_2 n = \log_2 2^k \rightarrow k = \log_2 n$
- com isso temos $4^{\log_2 n} \times T(1) + O(n)$
  $= n^{\log_2 4} \times O(1) + O(n)$
  $= n^2 \times O(1) + O(n)$
  $= O(n^2) + O(n)$
  $= O(n^2)$

B)Caso base: $T(1) = O(1)$, Caso recursivo: $T(n) = 3 \times T(\frac{n}{2}) + O(n)$

- $3 \times (3 \times T(\frac{n}{2^2}) + O(\frac{n}{2})) + O(n)$
  $= (3^2 \times T(\frac{n}{2^2})) + (3^1 \times O(\frac{n}{2^1})) + O(n)$

- $3^2 \times (3 \times T(\frac{n}{2^3}) + O(\frac{n}{2^2})) + (3^1 \times O(\frac{n}{2^1})) + O(n)$
  $= (3^3 \times T(\frac{n}{2^3})) + (3^2 \times O(\frac{n}{2^2})) + (3^1 \times O(\frac{n}{2^1})) + O(n)$

- $3^k \times T(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \times O(\frac{n}{2^i})$
  $= 3^k \times T(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} O(\frac{3^i n}{2^i})$
  $= 3^k \times T(\frac{n}{2^k}) + O(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{3^i n}{2^i})$
  $= 3^k \times T(\frac{n}{2^k}) + O(n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{3^i}{2^i})$

- pela fórmula de somatório de uma P.G. finita $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, para $\frac{3^i}{2^i}$ temos:
  $\frac{1(\frac{3^k}{2^k}-1)}{\frac{3}{2}-1}$
  $= 2 \times (\frac{3^k}{2^k} - 1)$
  $= \frac{3^k}{2^{k-1}} - 2$

- $\therefore 3^k \times T(\frac{n}{2^k}) + O(n(\frac{3^k}{2^{k-1}} - 2))$
  $= 3^k \times T(\frac{n}{2^k}) + O(n)$

- para se alcançar o caso base precisamos que $\frac{n}{2^k} = 1$
  $\therefore n = 2^k \rightarrow \log_2 n = \log_2 2^k \rightarrow k = \log_2 n$

- com isso temos $3^{\log_2 n} \times T(1) + O(n)$
  $= n^{\log_2 3} \times O(1) + O(n)$
  $= O(n^{\log_2 3}) + O(n)$
  $= O(n^{\log_2 3})$