Centro Federal de Educação Tecnológica Cefet-RJ

Lista de Exercícios 1 - Cálculo a uma Variável

Prof.: Carlos Rubianes

1. Esboçe o gráfico da função:

a) $f(x) = |x - 1|$

b) $f(x) = |x + 2| - 2$

c) $f(x) = |x - 1|$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}|$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-4} - 3$

2. Determine o domínio de $f + g$ e $\frac{f}{g}$, onde $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$

3. Em cada caso classifique a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como par, ímpar ou nenhum dos casos.

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = |x|$, R: função par

c) $f(x) = (x - 1)^3$

d) $f(x) = x + 3$

e) $f(x) = 2$, R: função par

f) $f(x) = \dfrac{x^5 - x}{1 + x^2}$

4. Determine se os pontos $(14, 7)$, $(2, 2)$ e $(-4, -1)$ estão sobre a mesma reta.

5. Ache o valor de k, tal que as retas cujas equações são $3kx + 8y = 5$ e $6y - 4kx = -1$ sejam perpendiculares.

6. Encontre a equação de uma reta que passa pelo ponto (5,2) e é paralela à reta $4x + 6y + 5 = 0$.

7. Mostre que os pontos $(3, 3)$, $(8, 17)$ e $(11, 5)$ são os vértices de um triângulo retângulo.

8. Encontre a equação da reta que é perpendicular à reta 4x+6y+5=0 e passa pela origem.

9. Nos seguintes casos, encontre a equação da reta que:

   a) passa pelo ponto $(2, 3)$ e tem inclinação $m = 4$.

   b) passa pelo ponto $(-3, -5)$ e tem inclinação $m = 7/2$.

   c) passa pelos pontos $(2, 1)$ e $(1, 6)$.

   d) passa pelo ponto (4,5) e é paralela ao eixo dos x.

   e) passa pelo ponto (4,5) e é paralela ao eixo dos y.

   f) passa pelo ponto (-1,2) e é paralela à reta $x = 5$.

g) passa pelo ponto (2,6) e é paralela à reta $y = 1$.

h) passa pelo ponto (-1,-2) e é perpendicular à reta $2x + 5y + 8 = 0$.

10. Calcule o limite, se existir.

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

b) $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(4 + x)^2 - 16}{x}$, R: 8

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^4 - 1}{x}$, R: 4

f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

g) $\lim_{x\to 9} \dfrac{9 - x}{3 - \sqrt{x}}$, R: 6

h) $\lim_{x\to 9} \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

i) $\lim_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$, R: 1/6

j) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$

k) $\lim_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

11. Encontre o limite.

a) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2x + 3}$, R: 0

b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x + 5}{x - 4}$

c) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$, R: $-1/2$

d) $\lim_{y\to +\infty} \dfrac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$

f) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 1}$

g) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$, R: 3

h) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

i) $\lim_{x\to +\infty} (x - \sqrt{x})$

j) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}$

k) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

12. Calcular

a) $\lim_{x\to 0} x^2\, cos(20\pi x)$

b) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\, sen\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

c) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{sen\left(\frac{\pi}{x}\right)}$

d) $\lim_{x\to 2} (x - 2)^2\, cos\left(\dfrac{2 + x}{\pi x^2}\right)$

13. Calcular $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$
14. Esboce o gráfico e decida se a função é Injetora

    a) $f(x) = x^3 - x$

    b) $f(x) = x^3 + x$
15. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ln(3x)}{ln(4x)}$
16. Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$
17. Existe um número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

    existe? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

18. Dadas as funções injetoras f, encontre sua função inversa

    a) $f(x) = \sqrt{10-3x}$

    b) $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$ item[] c) $f(x) = 5x - 7$

    d) $f(x) = 3x^3 + 7$

    e) $f(x) = \sqrt[3]{2x-4}$

    f) $f(x) = \dfrac{2-x}{1-x}$

    d) $f(x) = 5 - \dfrac{2}{x}$
19. Encontre as assíntotas verticais e horizontais. Confira seu trabalho por meio de um gráfico e das estimativas das assíntotas.

    a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$

    c) $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2-6x+5}$ d) $f(x) = \dfrac{1+x^4}{x^2-x^4}$

    e) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+4}$ f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

    g) $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$
20. Mostre que f é contínua em $(-\infty, +\infty)$.

    a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x < 1 \\ \sqrt{x}, & se\ x \geq 1 \end{cases}$

    b) $f(x) = \begin{cases} sen(x), & se\ x < \pi/4 \\ cos(x), & se\ x \geq \pi/4 \end{cases}$

21. Encontre os pontos nos quais f é descontínua.

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ 1/x, & se\ 1 < x < 3 \\ \sqrt{x-3}, & se\ x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \leq 0 \\ 2-x, & se\ 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2, & se\ x > 2 \end{cases}$ **R:** $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ e^x, & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & se\ x > 1 \end{cases}$ **R:** $x = 0$**,** $x = 1$

22. Ache os valores das constantes c e k que tornam a função contínua em $(-\infty, +\infty)$.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x+7, & se\ x \leq 4 \\ \\ kx-1, & se\ x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} kx-1, & se\ x < 2 \\ \\ kx^2, & se\ x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ cx+k, & se\ 1 < x < 4 \\ -2x, & se\ x \geq 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x+2c & x < -2 \\ 3cx+k, & se\ -2 \leq x \leq 1 \\ 3x-2k, & se\ x > 1 \end{cases}$

23. Encontre os valores das constantes a e b que tornam a função contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x < 2 \\ \\ ax^2-bx+3, & se\ 2 \leq x < 3 \\ \\ 2x-a+b, & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

24. Determine se a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ \\ 5, & se\ x = 2 \\ \\ -x+6, & se\ x > 2 \end{cases}$

é contínua em $x = 2$.

25. Para que valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, +\infty)$.

$f(x) = \begin{cases} cx^2+2x, & se\ x < 2 \\ \\ x^3-cx, & se\ x \geq 2 \end{cases}$ **R:** $c = 2/3$

26. Para qual valor de m a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se\ x < 3 \\ \\ 2mx, & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

é contínua em $x = 3$.

27. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se\ \ -1 \leq x < 0 \\ \\ 2x, & se\ 0 < x < 1 \\ \\ 1, & se\ x = 1 \\ \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

a) Existe $f(-1)$?

b) Existe $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

c) Existe $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$

d) f é contínua em $x = -1$?

e) Existe $f(1)$?

f) Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

28. Calcule o limite.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(4x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{sen(3x)}$

c) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sen(3t)}{sen(6t)}$

d) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{3y}{sen(5y)}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{1 + sen(x)}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(4x)}{x}$

29. Encontre a derivada da função dada usando a definição.

a) $f(x) = 37$

b) $f(x) = 12 + 7x$

c) $f(x) = 1 - 3x^2$

d) $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$

e) $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

f) $f(x) = x + \sqrt{x}$

g) $f(s) = \dfrac{4s}{s + 3}$

h) $f(t) = \dfrac{3 + t}{1 - 2t}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

30. Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função no número indicado.
    a) $f(x) = 4x^2 + 7x; \quad x = -1$

    b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x - 4; \quad x = 0$

    c) $y = x - \dfrac{1}{x}; \quad x = 1$

    d) $y = 2x + 1 + \dfrac{6}{x}; \quad x = 2$

31. Encontre a derivada da função dada usando a definição. Ache um ou vários pontos sobre o gráfico da função em que a reta tangente é paralela à reta dada.
    a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1; \qquad 3x - y = 1$

    b) $f(x) = x^2 - x; \qquad -2x + y = 0$

    c) $f(x) = -x^3 + 4; \qquad 12x + y = 4$

    d) $f(x) = 6\sqrt{x} + 2; \qquad -x + y = 2$

32. Utilize a definição de derivada para mostrar que a função não é diferenciável no número indicado.
    a) $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & se\ x \leq 2 \\ 2x - 4, & se\ x > 2 \end{cases}; \qquad x = 2$

    b) $f(x) = \begin{cases} 3x, & se\ x < 0 \\ -4x, & se\ x \geq 0 \end{cases}; \qquad x = 0$

33. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a tangente é horizontal.
    R: $(-2, 21)$, $(1, -6)$

34. Quais são os valores de x que fazem que o gráfico de $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ tenha tangentes horizontais?

35. Mostre que a curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ não tem reta tangente com a inclinação 4.

36. Em quais pontos sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ está a reta tangente paralela à reta $3x - y = 5$?

37. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $x = 1$.

38. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ nos pontos dados:

    a) $y = 4 - x^2$ no ponto $(-1, 3)$

    b) $y = 2\sqrt{x}$ no ponto $(1, 2)$

    c) $y = \dfrac{1}{x^2}$ no ponto $(-1, 1)$

    d) $y = x^3$ no ponto $(-2, -8)$

39. Se $f(x) = x^3 - x$, usando a definição de derivada, encontre $f'(x)$.

40. Se $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$, usando a definição de derivada, encontre $f'(x)$.

41. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & se\ x < 1 \\ \\ x+1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

 Usando a definição de derivada, decida se f é diferenciável em $x = 1$?

42. Ache a parábola com a equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tenha a equação $y = 3x - 2$.
 R: $y = 2x^2 - x$

43. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & se\ x \leq 1 \\ \\ x^2-2x+2, & se\ x > 1 \end{cases}$$

 f é diferenciável em 1?

44. Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente à parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

45. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \leq 2 \\ \\ mx+b, & se\ x > 2 \end{cases}$$

 Ache os valores de m e b que façam f diferenciável.
 R: $m = 4$**,** $b = -4$

Bons Estudos!