

**Seminarski rad**  
*za kolegij Matematika 3*

voditeljica kolegija:  
**dr.sc. Marija Maksimović,**

student:  
**Tin Švagelj**  
**Jednopredmetna Informatika**

**Fakultet Informatike i Digitalnih Tehnologija**  
**Rijeka**  
**5. veljače 2023.**

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Razrada</b>	<b>2</b>
2.1	Parcijalne derivacije prvog reda . . . . .	2
2.2	Crtanje grafa u Pythonu . . . . .	2
2.2.1	NumPy . . . . .	3
2.2.2	Matplotlib . . . . .	4
2.3	Gradijent funkcije . . . . .	6
2.4	Ekstremi . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Zaključak</b>	<b>9</b>
	<b>Literatura</b>	<b>ii</b>

# Poglavlje 1

## Uvod

Potrebno je odrediti ekstreme i nacrtati funkciju:

$$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430 \quad (f)$$

Bitno je odrediti domenu funkcije na početku kako bismo uspješno i smisljeno odredili ekstreme funkcije jer mogu postojati samo unutar njene domene.

Kako bismo mogli odrediti ekstreme funkcije, potrebno je odrediti nulte točke gradijenta ( $\nabla$ ) funkcije[1]:

$$\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

rješavajući sustav jednažbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

gdje su rješenje nulte točke funkcije gradijenta ( $\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ), tj. ekstremi funkcije ( $f$ ).

Za određivanje parcijalne derivacije prvog reda funkcije koristimo pravila deriviranja [2]:

$$(c)' = 0 \text{ i} \quad (1.3)$$

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad (1.4)$$

$$(f + g)' = f' + g'. \quad (1.5)$$

Crtanje će biti izvedeno koristeći NumPy i Matplotlib biblioteke u Python programskom jeziku.

## Poglavlje 2

### Razrada

S obzirom da je zadana funkcija ( $f$ ) racionalna, važeća je za svaki  $x \in \mathbb{R}$  i  $y \in \mathbb{R}$  [vidi 2, stranica 119]. Dakle domena funkcije je skup svih realnih brojeva:

$$D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

### 2.1 Parcijalne derivacije prvog reda

Kako bismo odredili gradijent funkcije ( $f$ ), trebamo prvo odrediti parcijalne derivacije te funkcije po  $x$  i  $y$ , pri čemu se služimo pravilima (1.3), (1.4) i (1.5):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}2x^3 + \frac{\partial}{\partial x}2y^3 - \frac{\partial}{\partial x}36xy + \frac{\partial}{\partial x}430 \\ &= 6x^2 + 0 - 36y + 0 \\ &= 6x^2 - 36y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}2x^3 + \frac{\partial}{\partial y}2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}36xy + \frac{\partial}{\partial y}430 \\ &= 0 + 6y^2 - 36x + 0 \\ &= 6y^2 - 36x.\end{aligned}$$

S obzirom da je domena zadane funkcije ( $f$ ) skup svih realnih brojeva, ne trebamo isključiti rješenja iz dobivenih izraza.

### 2.2 Crtanje grafa u Pythonu

Za crtanje, kao što je već navedeno u uvodu, koristimo NumPy i Matplotlib.

NumPyeva dokumentacija[3] i Matplotlibova specifikacija sučelja za programiranje aplikacija (engl. API Specification) [4], te upute za korištenje [5], koji su dostupni putem interneta.

NumPy omogućava podršku za rad s velikim, višedimenzionalnim poljima i matricama, zajedno sa širokim spektrom visoko-razinskih matematičkih funkcija.

Za početak rada je potrebno instalirati NumPy i Matplotlib pokretanjem `pip install` naredbe u terminalu ili naredbenom retku:

```
pip install --user numpy matplotlib
```

Na početku svakog programa moramo uključiti potrebne module sa sljedećim kodom[6, naslov 5.4.2. Submodules]:

```
import numpy
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

, izvođenjem tih linija koda možemo pristupiti vanjskom koda u našim programima.

Često se koriste aliasi za sažimanje duljih imena modula koji se učestalo pojavljuju u kodu:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

### 2.2.1 NumPy

Stvaramo jednodimenzionalne nizove (polja) od 100 uniformno razmaknutih vrijednosti između  $-10$  i  $10$ :

```
x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)
```

S obzirom da su ekstremi funkcije (rješenja) dobiveni od parametara koji se nalaze u intervalu  $[-10, 10]$ , uneseni argumenti funkcije će biti zadovoljavajući.

Nakon izvršavanja tog koda imamo  $x$  i  $y$  nizove sa 100 elemenata nalik na:

$$x = y = [-10, -9.8, -9.6, \dots, 9.8, 10]$$

Zatim od ta dva jednodimenzionalna niza stvaramo dvodimenzionalni niz vrijednosti:

```
X, Y = np.meshgrid(x, y)
```

U našem slučaju se radi o  $100 \times 100$  nizovima nalik na:

$$X = Y^T = \begin{bmatrix} [-10, -9.8, \dots, 9.8, 10], \\ [-10, -9.8, \dots, 9.8, 10], \\ \vdots \\ [-10, -9.8, \dots, 9.8, 10] \end{bmatrix}$$

NumPy nam dozvoljava simboličko izražavanje funkcija, pa za računanje  $Z$  vrijednosti grafa, tj. rezultata funkcije ( $f$ ) koji su nam potrebni za crtanje grafa, možemo koristiti:

$$Z = 2 \cdot X^{**3} + 2 \cdot Y^{**3} - 36 \cdot X \cdot Y + 430$$

, što će generirati novi dvodimenzionalni niz (dimenzija  $100 \times 100$ ) s vrijednostima funkcije Uvod za sve uvrštene kombinacije  $x$  i  $y$  vrijednosti.

To je jedina linija koda koju moramo mjenjati za crtanje različitih grafova u ovom slučaju.

NumPy u pozadini računa sve vrijednosti rezultirajućeg dvodimenzionalnog niza za sve odgovarajuće parove<sup>1</sup>  $X$  i  $Y$  vrijednosti, tj. za sve kombinacije  $x$  i  $y$  vrijednosti.

Time dobivamo dvodimenzionalni niz svih vrijednosti koje funkcija može poprimiti za sve kombinacije  $x$  i  $y$  u intervalima  $[-10, 10]$ :

$$f(x, y) \mid x \in [-10, 10] \mid y \in [-10, 10]$$

Razlog zašto možemo na tako prirodan način izraziti operacije nad multidimenzionalnim nizovima pomoću NumPya je zato što su  $X$  i  $Y$  apstraktne reprezentacije nizeva za koje su definirani<sup>2</sup> svi matematički operatori koje Python podržava za normalne brojeve.

Tako da nam  $X^{**3}$  prvo daje novi niz gdje je svaki element/broj iz niza  $X$  eksponenciran brojem 3. Zatim je izraz  $2 \cdot X^{**3}$  evaluiran i zbog množenja rezultata sa 2, NumPy množi sve elemente niza sa 2. Na kraju vrši binarne operacije nad samim nizovima gdje dobivamo rješenja polinoma za cijeli izraz, te će taj rezultatski niz biti pohranjen u  $Z$ .

Sada kada imamo sve vrijednosti koje funkcija poprima, možemo koristiti Matplotlib za crtanje grafa. Za početak stvaramo

$$Z = 2 \cdot X^{**3} + 2 \cdot Y^{**3} - 36 \cdot X \cdot Y + 430$$

## 2.2.2 Matplotlib

Matplotlib pruža funkcije za crtanje širokog raspona statičkih, animiranih i interaktivnih vizualizacija. Može se koristiti za stvaranje dijagrama stupčastih grafova, linijskih grafova, grafova raspršenja, pogrešnih traka, histograma, dijagrama kružnica, dijagrama kutije i mnogih drugih vrsta vizualizacija.

Figura (engl. Figure) je u Matplotlib biblioteci cjelokupni prostor za crtanje koji može sadržavati jedan ili više grafova. U napisanom kodu stvaramo novu figuru za crtanje te ju pohranjujemo u `fig` varijablu:

```
fig = plt.figure()
```

Stvaramo 3D podgraf unutar figure i pohranjujemo ga u `ax` varijablu:

```
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
```

Prvi argument (111) određuje poziciju podgraфа unutar figure:

- prvi broj određuje broj redaka,

<sup>1</sup>Parovi u rezultatu su usklađeni na osnovu stupca i retka

<sup>2</sup>Definirani kao preoptrećenja operatora u Pythonu

- drugi broj stupaca,
- a treći broj indeks podgrafa.

U ovom slučaju, 111 stvara jedan podgraf koji se proteže cijelom figurom. Ovaj argument nije obavezan jer smo koristili zadanu vrijednost, no naveden je u svrhu boljeg objašnjavanja figura.

Argument (`projection`) specificira projekciju grafa, s obzirom da se radi o 3D grafu koristimo vrijednost `'3d'`. Potrebno je navesti projekciju jer je zadana vrijednost `'rectilinear'` koja je zapravo ortogonalna projekcija usmjerena u ravninu s rješenjima  $z = 0$  i koristi se za crtanje dvodimenzionalnih grafova. Argumentom `'3d'` navodimo da očekujemo ortogonalnu projekciju trodimenzionalnog grafa, koja gleda u smjeru:

$$\vec{v} = (\textit{azimut}, \textit{elevacija}) = (-60^\circ, 30^\circ)$$

U slučaju da želimo izmijeniti kut projekcije, to možemo postignuti korištenjem `Axes3D.view_init()` funkcije:

```
ax.view_init(azim=zeljeni_azimut, elev=zeljenja_elevacija)
```

Kako bismo nakon podešavanja grafa `ax` ga konstruirali i nacrtali, potrebno je koristiti `Axes3D.plot_surface(X, Y, Z)` funkciju za crtanje ravnina:

```
ax.plot_surface(X, Y, Z)
```

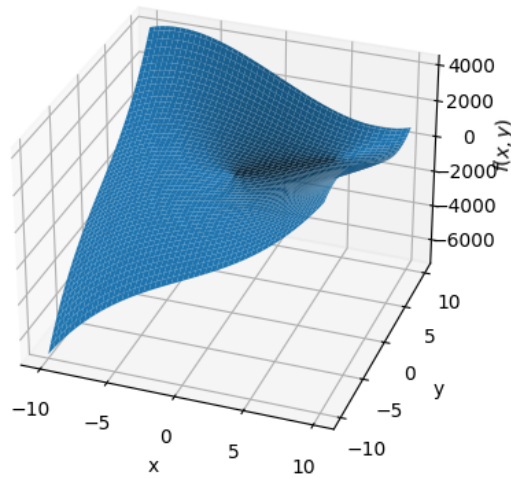
Funkcije `Axes3D.set_xlabel("x")`, `Axes3D.set_ylabel("y")` i `Axes3D.set_zlabel("z")` nam dozvoljavaju imenovanje  $x$ ,  $y$  i  $z$  osi, sukladno redoslijedu:

```
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
```

Korištenjem `pyplot.savefig("putanja/do/datoteke.png")` možemo spremiti slike grafa u datotečnom sustavu:

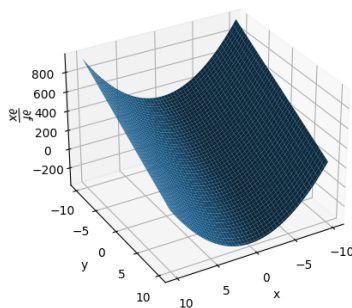
```
plt.savefig("figures/graf_f.png")
```

Tim postupkom dobivamo graf:

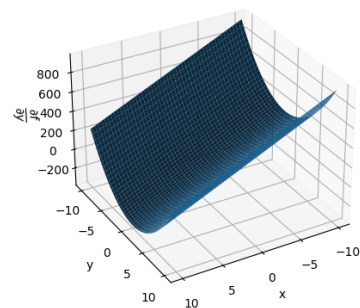


Slika 2.1: Graf zadane funkcije ( $f$ )

Promjenom vrijednosti za kao što je prethodno nevedeno, parametara, i ciljane datoteke možemo nacrtati slike ostalih grafova, tj. grafove parcijalnih derivacija funkcije po  $x$  i  $y$ :



(a) Parcijalna derivacije funkcije po  $x$



(b) Parcijalna derivacije funkcije po  $y$

Slika 2.2: Grafovi parcijalnih derivacija

## 2.3 Gradijent funkcije

Određujemo gradijent funkcije ( $f$ ) uz dobivene parcijalne derivacije (1.1):

$$\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 6x^2 - 36y \\ 6y^2 - 36x \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$



## 2.4 Ekstremi

Gradijent (1.1) izjednačujemo s nulom kako bi mu odredili nulte točke tj. ekstreme funkcije. To možemo izraziti kao sustav (1.2):

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0. \end{cases}$$

Izrazimo  $y$  iz prvog izraza,

$$\begin{aligned} 6x^2 - 36y &= 0 \\ 36y &= 6x^2 \\ y &= \frac{6x^2}{36} = \frac{x^2}{6} \end{aligned}$$

te ga uvrštavamo u drugi kako bismo dobili jednadžbu za  $x$ ve nultih točaka gradijenta:

$$\begin{aligned} 6\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 36x &= 0 \\ x^4 - 36x &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jedno rješenje ( $x_1$ ) uočavamo nakon izlučivanja  $x$ a iz izraza:

$$\begin{aligned} x(x^3 - 36) &= 0 \\ x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je jedno rješenje  $x_1 = 0$  jer ako je  $x$  jednak nuli, onda će jednadžba 2.2 vrijediti.

Drugi član umnoška nam daje drugo rješenje:

$$\begin{aligned} x^3 - 36 &= 0 \\ x^3 &= 36 \\ x &= \sqrt[3]{36}, \end{aligned}$$

ali zbog duplog pojavljivanja  $x$ a u zadanom polinomu se radi o funkciji simetričnoj s obzirom na ishodište te je zbog toga dobiveno rješenje zapravo dvojno rješenje:

$$x_{2,3} = \pm \sqrt[3]{36}.$$

Time dobivamo 3 rješenja sustava za  $x$ :

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt[3]{36} \quad x_3 = -\sqrt[3]{36}$$

Za  $x_1 = 0$ ,  $y_1$  će biti 0.  $y_2$  i  $y_3$  računamo uvrštavajući dobivene vrijednosti za  $x$  sa jednom od parcijalnih derivacija:

$$\begin{aligned}
6x^2 - 36y &= 0 \\
6(\sqrt[3]{36})^2 - 36y &= 0 \\
36y &= 6(\sqrt[3]{36^2}) \\
6y &= \sqrt[3]{36^2} \\
y &= \frac{\sqrt[3]{6^4}}{6} \\
y &= 6^{\frac{4}{3}} * 6^{-1} = 6^{\frac{4}{3}} * 6^{-\frac{3}{3}} = 6^{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} \\
y &= \sqrt[3]{6}
\end{aligned}$$

Time utvrđujemo da su ekstremi funkcije ( $f$ ):

$x$	$y$
0	0
$\sqrt[3]{36}$	$\sqrt[3]{6}$
$-\sqrt[3]{36}$	$-\sqrt[3]{6}$

## Poglavlje 3

### Zaključak

Na grafu vidimo da dobivene točke jesu ekstremi funkcije.

Za algebarsko određivanje o kakvim se ekstremima radi bi trebali odrediti Hessovu matricu i parcijalne derivacije višeg reda [1, poglavlje 6.3], no to nije traženo u sklopu ovog zadatka.

Završna verzija koda koji generira slike svih grafova u ovom seminarskom radu:

```
#!/usr/bin/env python3

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

def f():
    return 2*X**3 + 2*Y**3 - 36*X*Y + 430

def f_der_x():
    return 6 * X**2 - 36 * Y

def f_der_y():
    return 6 * Y**2 - 36 * X

def save_figure(of, path, z_label='z',
    ↪ font_size='medium', angle=[-60, 30]):
    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
    ax.view_init(azim=angle[0], elev=angle[1])

    ax.plot_surface(X, Y, of)

    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('y')
```

```

ax.set_zlabel(z_label, fontsize=font_size)

plt.savefig(path)

save_figure(f(), 'figures/graf_f.png', z_label='$f(x, \rightarrow y)$', angle=[-70, 30])
save_figure(f_der_x(), 'figures/graf_fdx.png',
    → z_label='$\frac{\partial f}{\partial x}$',
    → font_size='x-large', angle=[60, 30])
save_figure(f_der_y(), 'figures/graf_fdy.png',
    → z_label='$\frac{\partial f}{\partial y}$',
    → font_size='x-large', angle=[60, 30])

```

## Literatura

- [1] Ken Binmore i Joan Davies. *Calculus: Concepts and Methods*. Cambridge University Press, 2002. DOI: 10.1017/CBO9780511802997.
- [2] T. Hunjak B. Divjak. *Matematika za informatičare*. Varaždin: Fakultet organizacije i informatike, tiskara TIVA, 2004.
- [3] *NumPy v1.24 Manual*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Prosinac 2022. URL: <https://numpy.org/doc/stable>.
- [4] *Matplotlib 3.6.3 API Reference*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Siječanj 2023. URL: <https://matplotlib.org/stable/api/index>.
- [5] *Matplotlib 3.6.3 Users guide*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Siječanj 2023. URL: <https://matplotlib.org/stable/users/index>.
- [6] *The Python Language Reference*. [Internet; pristupljeno 5. Feb. 2023]. Veljača 2023. URL: <https://docs.python.org/3/reference>.