

**Seminarski rad**  
*za kolegij Matematika 3*

voditeljica kolegija:  
**dr.sc. Marija Maksimović,**

student:  
**Tin Švagelj**  
**Jednopredmetna Informatika**

**Fakultet Informatike i Digitalnih Tehnologija**  
**Rijeka**  
**4. veljače 2023.**

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Razrada</b>	<b>2</b>
2.1	Parcijalne derivacije prvog reda . . . . .	2
2.2	title . . . . .	2
2.3	Ekstremi . . . . .	2
2.4	Parcijalne derivacije drugog reda . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Zaključak</b>	<b>5</b>
	<b>Literatura</b>	<b>ii</b>

# Poglavlje 1

## Uvod

Potrebno je odrediti ekstreme i nacrtati funkciju:

$$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430 \quad (1.1)$$

Bitno je odrediti domenu funkcije na početku kako bismo uspješno i smisljeno odredili ekstreme funkcije jer mogu postojati samo unutar njene domene.

Kako bismo mogli odrediti ekstreme funkcije, potrebno je odrediti nulte točke gradijenta ( $\nabla$ ) funkcije  $f$  [1]:

$$\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

rješavajući sustav jednažbi:

$$\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

gdje su rješenje nulte točke funkcije, tj. ekstremi funkcije.

Za određivanje parcijalne derivacije prvog reda multivarijatne funkcije koristimo pravila deriviranja [2]:

$$(c)' = 0 \text{ i} \quad (1.4)$$

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad (1.5)$$

$$(f + g)' = f' + g'. \quad (1.6)$$

Crtanje će biti izvedeno koristeći `numpy` i `matplotlib` biblioteke u Python programskom jeziku. `numpy`eva dokumentacija[3] i `matplotlib`ova specifikacija sučelja za programiranje aplikacija (engl. API Specification) [4], te upute za korištenje [5], koji su dostupni putem interneta.

## Poglavlje 2

### Razrada

S obzirom da je zadana multivarijatna funkcija polinom, tj. racionalna je, va-  
žeća je za svaki  $x \in \mathbb{R}$  i  $y \in \mathbb{R}$  [vidi 2, stranica 119]. Dakle domena funkcije je  
skup svih realnih brojeva:

$$D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

### 2.1 Parcijalne derivacije prvog reda

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}2x^3 + \frac{\partial}{\partial x}2y^3 - \frac{\partial}{\partial x}36xy + \frac{\partial}{\partial x}430 \\ &= 6x^2 + 0 - 36y + 0 \\ &= 6x^2 - 36y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}2x^3 + \frac{\partial}{\partial y}2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}36xy + \frac{\partial}{\partial y}430 \\ &= 0 + 6y^2 - 36x + 0 \\ &= 6y^2 - 36x\end{aligned}$$

### 2.2 title

### 2.3 Ekstremi

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$$

Izrazimo  $y$  iz prvog izraza,

$$\begin{aligned}6x^2 - 36y &= 0 \\36y &= 6x^2 \\y &= \frac{6x^2}{36} = \frac{x^2}{6}\end{aligned}$$

te ga uvrstimo u drugi:

$$\begin{aligned}6\left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 36x &= 0 \\x^4 - 36x &= 0\end{aligned}$$

, jedno rješenje  $x_1 = 0$  dobivamo izlučivanjem  $x$  iz izraza:

$$\begin{aligned}x(x^3 - 36) &= 0 \\x_1 &= 0\end{aligned}$$

drugi član umnoška nam daje drugo rješenje:

$$\begin{aligned}x^3 - 36 &= 0 \\x^3 &= 36 \\x &= \sqrt[3]{36} \\x_2 &= \sqrt[3]{36},\end{aligned}$$

zbog duplog pojavljivanja  $x$  u zadanom polinomu se radi o funkciji simetričnoj s obzirom na ishodište te trebamo tretirati drugo rješenje kao da je njegov predznak uklonjen.

Tom logikom dobivamo 3 rješenja sustava:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt[3]{36} \quad x_3 = -\sqrt[3]{36}$$

$$\begin{aligned}6x^2 - 36y &= 0 \\6(\sqrt[3]{36})^2 - 36y &= 0 \\36y &= 6(\sqrt[3]{36^2}) \\6y &= \sqrt[3]{36^2} \\y &= \frac{\sqrt[3]{6^4}}{6} \\y &= 6^{\frac{4}{3}} * 6^{-1} = 6^{\frac{4}{3}} * 6^{-\frac{3}{3}} = 6^{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} \\y &= \sqrt[3]{6}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc}x & y \\0 & 0 \\\sqrt[3]{36} & \sqrt[3]{6} \\-\sqrt[3]{36} & -\sqrt[3]{6}\end{array}$$

## 2.4 Parcijalne derivacije drugog reda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2 - 36y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}6x^2 - \frac{\partial}{\partial x}36y \\ &= 12x - 0 \\ &= 12x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(6y^2 - 36x) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}6y^2 - \frac{\partial}{\partial y}36x \\ &= 12y - 0 \\ &= 12y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(6x^2 - 36y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}6x^2 - \frac{\partial}{\partial y}36y \\ &= 0 - 36 \\ &= -36\end{aligned}$$

Određujemo vrijednost druge parcijalne derivacije svake stacionarne točke kako bi mogli odrediti Hessovu matricu:

$$H_f = \begin{bmatrix} 12x & -36 & -36 & 12y \end{bmatrix}$$

Određujemo svojstvene vrijednosti Hessove matrice za svaku stacionarnu točku:

## Poglavlje 3

### Zaključak

Korištenjem numpy i matplotlib biblioteka u Pythonu, pomoću sljedećeg koda možemo dobiti 3D prikaz cijele multivarijatne funkcije:

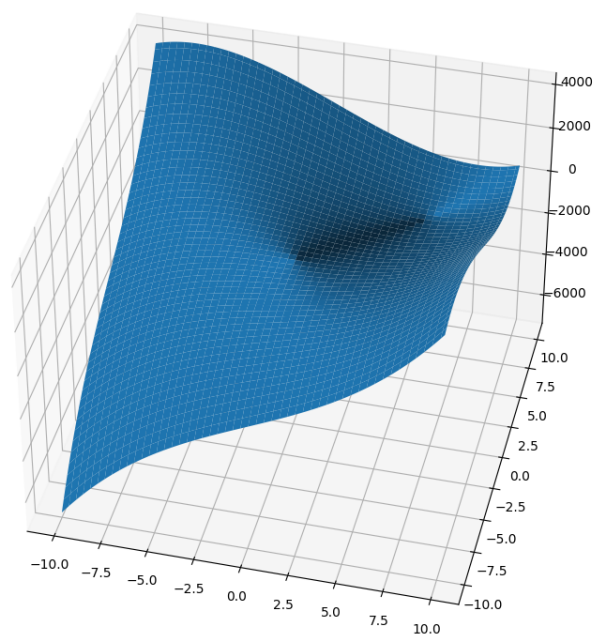
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def  $f$ (x, y):
    return 2*x**3 + 2*y**3 - 36*x*y + 430

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X, Y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z)

plt.show()
```



Slika 3.1: Graf zadane funkcije



## Literatura

- [1] Ken Binmore i Joan Davies. *Calculus: Concepts and Methods*. Cambridge University Press, 2002. DOI: 10.1017/CBO9780511802997.
- [2] T. Hunjak B. Divjak. *Matematika za informatičare*. TIVA, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 2004.
- [3] *NumPy v1.24 Manual*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Prosinac 2022. URL: <https://numpy.org/doc/stable>.
- [4] *Matplotlib 3.6.3 API Reference*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Siječanj 2023. URL: <https://matplotlib.org/stable/api/index>.
- [5] *Matplotlib 3.6.3 Users guide*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Siječanj 2023. URL: <https://matplotlib.org/stable/users/index>.