Seminarski rad

iz kolegija

Matematika 3

voditeljica kolegija:
dr.sc. Marija Maksimović,

student:
Tin Švagelj
Jednopredmetna Informatika

Fakultet Informatike i Digitalnih Tehnologija
Rijeka
5. veljače 2023.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Potrebno je odrediti ekstreme i nacrtati funkciju:

$$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430 \tag{f}$$

Bitno je odrediti domenu funkcije na početku kako bismo uspješno i smisleno odredili ekstreme funkcije jer mogu postojati samo unutar njene domene.

Kako bismo mogli odrediti ekstreme funkcije, potrebno je odrediti nulte točke gradijenta (∇) funkcije[1]:

$$\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{∇f}$$

rješavajući sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

gdje su rješenje nulte točke funkcije gradijenta ($\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$), tj. ekstremi funkcije (f).

Za određivanje parcijalne derivacije prvog reda funkcije koristimo pravila deriviranja [2]:

$$(c)' = 0 \tag{1.2}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1} \tag{1.3}$$

$$(f + g)' = f' + g' \tag{1.4}$$

Crtanje će biti izvedeno koristeći `NumPy` i `Matplotlib` biblioteke u Python programskom jeziku.

Poglavlje 2

Razrada

S obzirom da je zadana funkcija (f) racionalna, važeća je za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$ [vidi 2, str. 119]. Dakle domena funkcije je skup svih realnih brojeva:

$$D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

2.1 Parcijalne derivacije prvog reda

Kako bismo odredili gradijent funkcije (f), trebamo prvo odrediti parcijalne derivacije te funkcije po x i y, pri čemu se služimo pravilima (1.2), (1.3) i (1.4):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}2x^3 + \frac{\partial}{\partial x}2y^3 - \frac{\partial}{\partial x}36xy + \frac{\partial}{\partial x}430 \\
&= 6x^2 + 0 - 36y + 0 \\
&= 6x^2 - 36y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}2x^3 + \frac{\partial}{\partial y}2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}36xy + \frac{\partial}{\partial y}430 \\
&= 0 + 6y^2 - 36x + 0 \\
&= 6y^2 - 36x.
\end{aligned}$$

S obzirom da je domena zadane funkcije (f) skup svih realnih brojeva, ne trebamo isključiti rješenja iz dobivenih izraza.

2.2 Crtanje grafa u Pythonu

Za crtanje, kao što je već navedeno u uvodu, koristimo `NumPy` i `Matplotlib`.

`NumPy`eva dokumentacija[3] i `Matplotlib`ova specifikacija sučelja za programiranje aplikacija (engl. API Specification) [4], te upute za korištenje [5], koji su dostupni putem interneta.

`NumPy` omogućava podršku za rad s velikim, višedimenzionalnim poljima i matricama, zajedno sa širokim spektrom visoko-razinskih matematičkih funkcija.

Za početak rada je potrebno instalirati `NumPy` i `Matplotlib` pokretanjem `pip install` naredbe u terminalu ili naredbenom retku:

```
pip install --user numpy matplotlib
```

Na početku svakog programa moramo uključiti potrebne module sa sljedećim kodom[6, naslov 5.4.2. Submodules]:

```python
import numpy
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

, izvođenjem tih linija koda možemo pristupiti vanjskom kodu u našim programima.

2.2.1 NumPy

Stvaramo jednodimenzionalne nizove (polja) od 100 uniformno razmaknutih vrijednosti između -10 i 10:

```python
x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)
```

S obzirom da su ekstremi funkcije (rješenja) dobiveni od parametara koji se nalaze u intervalu $[-10, 10]$, uneseni argumenti funkcije će biti zadovoljavajući.

Nakon izvršavanja tog koda imamo `x` i `y` nizove sa 100 elemenata nalik na:

$$x = y = [-10, -9.8, -9.6, \ldots, 9.8, 10]$$

Zatim od ta dva jednodimenzionalna niza stvaramo dvodimenzionalni niz vrijednosti:

```python
X, Y = np.meshgrid(x, y)
```

U našem slučaju se radi o 100×100 nizevima nalik na:

$$\begin{aligned} X = Y^T = [&[-10, -9.8, \ldots, 9.8, 10], \\ &[-10, -9.8, \ldots, 9.8, 10], \\ &\vdots \\ &[-10, -9.8, \ldots, 9.8, 10]] \end{aligned}$$

NumPy nam dozvoljava simboličko izražavanje funkcija, pa za računanje Z vrijednosti grafa, tj. rezultata funkcije (f) koji su nam potrebni za crtanje grafa, možemo koristiti:

```
Z = 2*X**3 + 2*Y**3 - 36*X*Y + 430
```

, što će generirati novi dvodimenzionalni niz (dimenzija 100×100) s vrijednostima funkcije (f) za sve uvrštene kombinacije x i y vrijednosti.

To je jedina linija koda koju moramo mjenjati za crtanje različitih grafova u ovom slučaju.

NumPy u pozadini računa sve vrijednosti rezultirajućeg dvodimenzionalnog niza za sve odgovarajuće parove[1] X i Y vrijednosti, tj. za sve kombinacije x i y vrijednosti.

Time dobivamo dvodimenzionalni niz svih vrijednosti koje funkcija može poprimiti za sve kombinacije x i y u intervalima $[-10, 10]$.

Razlog zašto možemo na tako prirodan način izraziti operacije nad multidimenzionalnim nizovima pomoću NumPya je zato što su X i Y apstraktne reprezentacije nizeva za koje su definirani[2] svi matematički operatori koje Python podržava za normalne brojeve.

Tako da nam X**3 prvo daje novi niz gdje je svaki element/broj iz niza X eksponenciran brojem 3. Zatim je izraz 2*X**3 evaluiran i zbog množenja rezultata sa 2, NumPy množi sve elemente niza sa 2. Na kraju vrši binarne operacije nad samim nizovima gdje dobivamo rješenja polinoma za cijeli izraz, te će taj rezultatski niz biti pohranjen u Z.

Sada kada imamo sve vrijednosti koje funkcija poprima, možemo koristiti Matplotlib za crtanje grafa. Za početak stvaramo

```
Z = 2*X**3 + 2*Y**3 - 36*X*Y + 430
```

[1]Parovi u rezultatu su usklađeni na osnovu stupca i retka

[2]Definirani kao preoptrećenja operatora u Pythonu

2.2.2 Matplotlib

`Matplotlib` pruža funkcije za crtanje širokog raspona statičkih, animiranih i interaktivnih vizualizacija. Može se koristiti za stvaranje dijagrama stupčastih grafova, linijskih grafova, grafova raspršenja, pogrešnih traka, histograma, dijagrama kružnica, dijagrama kutije i mnogih drugih vrsta vizualizacija.

Figura (engl. Figure) je u Matplotlib biblioteci cijelokupni prostor za crtanje koji može sadržavati jedan ili više grafova. U napisanom kodu stvaramo novu figuru za crtanje te ju pohranjujemo u `fig` varijablu:

```
fig = plt.figure()
```

Stvaramo 3D podgraf unutar figure i pohranjujemo ga u `ax` varijablu:

```
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
```

Prvi argument (`111`) određuje poziciju podgrafa unutar figure:

- prvi broj određuje broj redaka,
- drugi broj stupaca,
- a treći broj indeks podgrafa.

U ovom slučaju, `111` stvara jedan podgraf koji se proteže cijelom figurom. Ovaj argument nije obavezan jer smo koristili zadanu vrijednost, no naveden je u svrhu boljeg objašnjavanja figura.

Argument (`projection`) specificira projekciju grafa, s obzirom da se radi o 3D grafu koristimo vrijednost `'3d'`. Potrebno je navesti projekciju jer je zadana vrijednost `'rectilinear'` koja je zapravo ortogonalna projekcija usmjerena u ravninu s rješenjima $z = 0$ i koristi se za crtanje dvodimenzionalnih grafova. Argumentom `'3d'` navodimo da očekujemo ortogonalnu projekciju trodimenzionalnog grafa, koja gleda u smjeru:

$$\vec{v} = (\textit{azimut}, \textit{elevacija}) = (-60°, 30°)$$

U slučaju da želimo izmjeniti kut projekcije, to možemo postignuti korištenjem `Axes3D.view_init()` funkcije:

```
ax.view_init(azim=azimut, elev=elevacija)
```

Kako bismo nakon podešavanja grafa `ax` ga konstruirali i nacrtali, potrebno je koristiti `Axes3D.plot_surface(X, Y, Z)` funkciju za crtanje ravnina:

```
ax.plot_surface(X, Y, Z)
```

Funkcije `Axes3D.set_xlabel("x")`,`Axes3D.set_ylabel("y")` i `Axes3D.set_zlabel("z")` nam dozvoljavaju imenovanje x, y i z osi, sukladno redoslijedu:

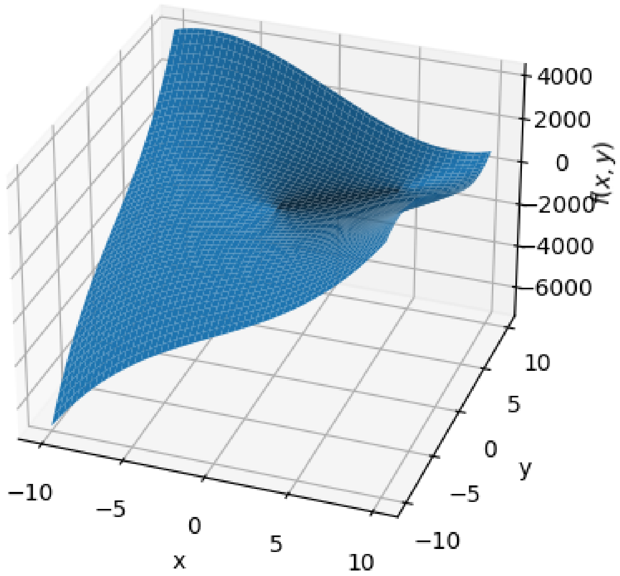
```
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
```

Korištenjem `pyplot.savefig("putanja/do/datoteke.png")` možemo spremiti slike grafa u datotečnom sustavu:

```
plt.savefig("figures/graf_f.png")
```

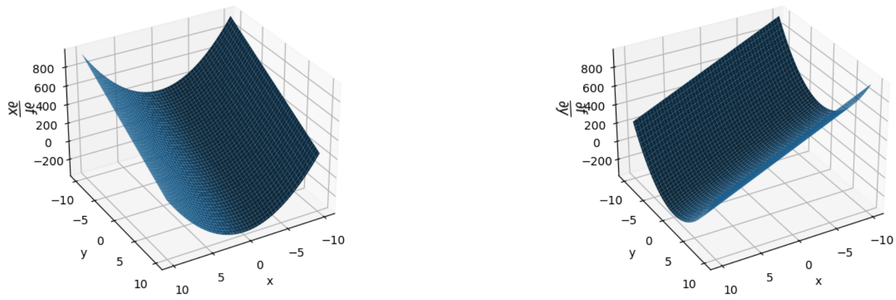
2.2.3 Grafovi funkcija

Pokretanjem napisanog koda dobivamo graf:



Slika 2.1: Graf zadane funkcije (f)

Promjenom vrijednosti `Z`, parametara `ax`, i ciljane datoteke možemo nacrtati i grafove parcijalnih derivacija funkcije po x i y:



(a) Parcijalna derivacije funkcije po x (b) Parcijalna derivacije funkcije po y

Slika 2.2: Grafovi parcijalnih derivacija

2.3 Gradijent funkcije

Određujemo gradijent (∇f) funkcije (f) uz dobivene parcijalne derivacije:

$$\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 6x^2 - 36y \\ 6y^2 - 36x \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

2.4 Ekstremi

Gradijent (2.1) izjednačujemo s nulom kako bi mu odredili nulte točke tj. ekstreme funkcije. To možemo izraziti kao sustav (1.1):

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0. \end{cases}$$

Izrazimo y iz prve jednadžbe sustava,

$$\begin{aligned} 6x^2 - 36y &= 0 \\ 36y &= 6x^2 \\ y &= \frac{6x^2}{36} = \frac{x^2}{6} \end{aligned}$$

te y substituiramo u drugu jednadžbu kako bismo dobili jednadžbu za $x$eve nultih točaka gradijenta:

$$\begin{aligned} 6(\frac{x^2}{6})^2 - 36x &= 0 \\ \frac{x^4}{6} - 36x &= 0 \\ x^4 - 6^3x &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jedno rješenje (x_1) uočavamo nakon izlučivanja xa iz izraza:

$$\begin{aligned} x(x^3 - 6^3) &= 0 \\ x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je jedno rješenje $x_1 = 0$ jer ako je x jednak nuli, onda će jednadžba za x nultih točaka gradijenta (2.2) vrijediti.

Drugi član umnoška nam daje drugo rješenje:

$$\begin{aligned} x^3 - 6^3 &= 0 \\ x^3 &= 6^3 \\ x &= \sqrt[3]{6^3} = 6, \end{aligned}$$

Time dobivamo 2 rješenja sustava za x:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$$

Za $x_1 = 0$, y_1 će biti 0. y_2 računamo uvrštavajući dobivene vrijednosti x_2 u jednu od parcijalnih derivacija:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 36y &= 0 \\ 6^3 - 36y &= 0 \\ 36y &= 6^3 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Time utvrđujemo da su realni ekstremi funkcije (f):

x	y
0	0
6	6

Poglavlje 3

Zaključak

Na grafu vidimo da dobivene točke jesu ekstremi funkcije.

Za algebarsko određivanje o kakvim se ekstremima radi bi trebali odrediti Hessovu matricu i parcijalne derivacije višeg reda [1, poglavlje 6.3], no to nije traženo u sklopu ovog zadatka.

Završna verzija koda koji generira slike svih grafova u ovom seminarskom radu:

```
#!/usr/bin/env python3

import os

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

def f():
    return 2*X**3 + 2*Y**3 - 36*X*Y + 430

def f_der_x():
    return 6*X**2 - 36*Y

def f_der_y():
    return 6*Y**2 - 36*X

def save_figure(of, path, z_label='z',
 ↪  font_size='medium', angle=[-60, 30]):
    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
    ax.view_init(azim=angle[0], elev=angle[1])

    ax.plot_surface(X, Y, of)
```

```python
    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('y')
    ax.set_zlabel(z_label, fontsize=font_size)

    plt.savefig(path)

def main():
    figure_path = os.path.abspath(os.path.join(
            os.path.dirname(os.path.abspath(__file__)),
            '..', 'figures'
        ))

    save_figure(
        f(),
        os.path.join(figure_path, 'graf_f.png'),
        z_label='$f(x, y)$',
        angle=[-70, 30]
        )
    save_figure(
        f_der_x(),
        os.path.join(figure_path, 'graf_fdx.png'),
        z_label='$\\frac{\\partial f}{\\partial x}$',
        font_size='xx-large',
        angle=[60, 30]
        )
    save_figure(
        f_der_y(),
        os.path.join(figure_path, 'graf_fdy.png'),
        z_label='$\\frac{\\partial f}{\\partial y}$',
        font_size='xx-large', angle=[60, 30]
        )

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Literatura

[1] Ken Binmore i Joan Davies. *Calculus: Concepts and Methods*. Cambridge University Press, 2002. DOI: 10.1017/CBO9780511802997.

[2] T. Hunjak B. Divjak. *Matematika za informatičare*. Varaždin: Fakultet organizacije i informatike, tiskara TIVA, 2004.

[3] *NumPy v1.24 Manual*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Prosinac 2022. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[4] *Matplotlib 3.6.3 API Reference*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Siječanj 2023. URL: https://matplotlib.org/stable/api/index.

[5] *Matplotlib 3.6.3 Users guide*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Siječanj 2023. URL: https://matplotlib.org/stable/users/index.

[6] *The Python Language Reference*. [Internet; pristupljeno 5. Feb. 2023]. Veljača 2023. URL: https://docs.python.org/3/reference.