Matematika 3, Seminarski Rad

Fakultet Informatike i Digitalnih Tehnologija,
Sveučilište u Rijeci
Tin Švagelj

31. siječnja 2023.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Potrebno je odrediti ekstreme i nacrtati funkciju:

$$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430 \tag{1.1}$$

Kako bismo mogli odrediti ekstreme multivarijatne funkcije, potrebno je odrediti domenu funkcije.

Zatim je potrebno odrediti parcijalnu derivaciju prvog reda multivarijatne funkcije, pri čemu (u ovom slučaju) koristimo pravila deriviranja:

$$(c)' = 0 \text{ i} \tag{1.2}$$
$$(x^a)' = ax^{a-1}. \tag{1.3}$$

, i pravilo o deriviranju zbroja:

$$(f+g)' = f' + g'. \tag{1.4}$$

Sa parcijalnom drivacijom prvog reda funkcije f po x i drivacijom prvog reda po y određujemo stacionarne točke, rješavajući sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Kako bi utvrdili jesu li dobivene točke sedlaste, minimumi ili maksimumi, potrebna nam je derivacija drugog reda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}). \tag{1.6}$$

Za računanje Hessove matrice također nam je potrebna derivacija f po x i y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}). \tag{1.7}$$

Za neku funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Hessova matrica je definirana kao

$\mathbf{H}(f(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \mathbf{J}(\nabla f(\mathbf{x},\mathbf{y}))$,
a gradijent funkcije f $(\nabla f(\mathbf{x},\mathbf{y}))$:

$$\nabla f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Poglavlje 2

Razrada

S obzirom da je zadana multivarijatna funkcija polinom, važeća za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$. Dakle domena funkcije je skup svih realnih brojeva:

$$D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

2.1 Parcijalne derivacije prvog reda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}2x^3 + \frac{\partial}{\partial x}2y^3 - \frac{\partial}{\partial x}36xy + \frac{\partial}{\partial x}430 \\
&= 6x^2 + 0 - 36y + 0 \\
&= 6x^2 - 36y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}2x^3 + \frac{\partial}{\partial y}2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}36xy + \frac{\partial}{\partial y}430 \\
&= 0 + 6y^2 - 36x + 0 \\
&= 6y^2 - 36x
\end{aligned}$$

2.2 Stacionarne točke

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$$

Izrazimo y iz prvog izraza,

$$\begin{aligned}
6x^2 - 36y &= 0 \\
36y &= 6x^2 \\
y &= \frac{6x^2}{36} = \frac{x^2}{6}
\end{aligned}$$

te ga uvrstimo u drugi:

$$6(\frac{x^2}{6})^2 - 36x = 0$$
$$x^4 - 36x = 0$$

, jedno rješenje $x_1 = 0$ dobivamo izlučivanjem xa iz izraza:

$$x(x^3 - 36) = 0$$
$$x_1 = 0$$

drugi član umnoška nam daje drugo rješenje:

$$x^3 - 36 = 0$$
$$x^3 = 36$$
$$x = \sqrt[3]{36}$$
$$x_2 = \sqrt[3]{36},$$

zbog duplog pojavljivanja xa u zadanom polinomu se radi o funkciji simetričnoj s obzirom na ishodište te trebamo tretirati drugo rješenje kao da je njegov predznak uklonjen.

Tom logikom dobivamo 3 rješenja sustava:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt[3]{36} \quad x_3 = -\sqrt[3]{36}$$

$$6x^2 - 36y = 0$$
$$6(\sqrt[3]{36})^2 - 36y = 0$$
$$36y = 6(\sqrt[3]{36^2})$$
$$6y = \sqrt[3]{36^2}$$
$$y = \frac{\sqrt[3]{6^4}}{6}$$
$$y = 6^{\frac{4}{3}} * 6^{-1} = 6^{\frac{4}{3}} * 6^{-\frac{3}{3}} = 6^{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}$$
$$y = \sqrt[3]{6}$$

x	y
0	0
$\sqrt[3]{36}$	$\sqrt[3]{6}$
$-\sqrt[3]{36}$	$-\sqrt[3]{6}$

2.3 Parcijalne derivacije drugog reda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2 - 36y)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}6x^2 - \frac{\partial}{\partial x}36y\\ &= 12x - 0\\ &= 12x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(6y^2 - 36x)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}6y^2 - \frac{\partial}{\partial y}36x\\ &= 12y - 0\\ &= 12y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(6x^2 - 36y)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}6x^2 - \frac{\partial}{\partial y}36y\\ &= 0 - 36\\ &= -36\end{aligned}$$

Određujemo vrijednost druge parcijalne derivacije svake stacionarne točke kako bi mogli odrediti Hessovu matricu:

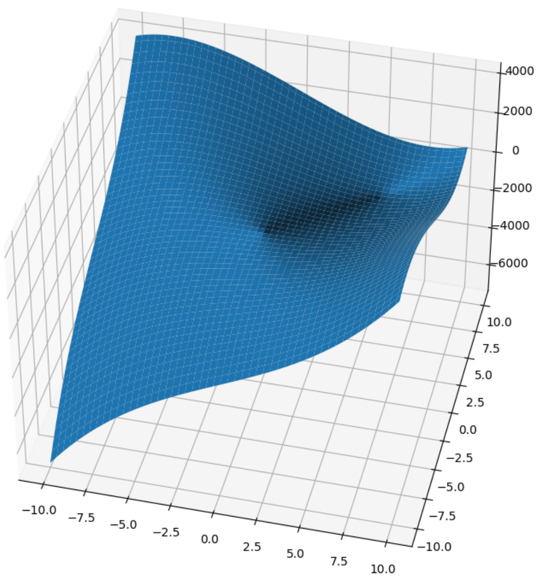
$$H_f = \begin{bmatrix}12x & -36 & -36 & 12y\end{bmatrix}$$

Određujemo svojstvene vrijednosti Hessove matrice za svaku stacionarnu točku:

Korištenjem `numpy` i `matplotlib` biblioteka u Pythonu, pomoću sljedećeg koda možemo dobiti 3D prikaz cijele multivarijatne funkcije:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def f(x, y):
    return 2*x**3 + 2*y**3 - 36*x*y + 430

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X, Y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
```

```
ax.plot_surface(X, Y, Z)

plt.show()
```



Poglavlje 3

Zaključak