Seminarski rad
za kolegij *Matematika 3*

voditeljica kolegija:
dr.sc. Marija Maksimović,

student:
Tin Švagelj
Jednopredmetna Informatika

Fakultet Informatike i Digitalnih Tehnologija
Rijeka
4. veljače 2023.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Potrebno je odrediti ekstreme i nacrtati funkciju:

$$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430 \tag{1.1}$$

Bitno je odrediti domenu funkcije na početku kako bismo uspješno i smisleno odredili ekstreme funkcije jer mogu postojati samo unutar njene domene.

Kako bismo mogli odrediti ekstreme funkcije, potrebno je odrediti nulte točke gradijenta (∇) funkcije f [1]:

$$\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

rješavajući sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

gdje su rješenje nulte točke funkcije gradijenta ($\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$), tj. ekstremi funkcije f.

Za određivanje parcijalne derivacije prvog reda multivarijatne funkcije koristimo pravila deriviranja [2]:

$$(c)' = 0 \text{ i} \tag{1.4}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1} \tag{1.5}$$

$$(f + g)' = f' + g'. \tag{1.6}$$

Crtanje će biti izvedeno koristeći `numpy` i `matplotlib` biblioteke u Python programskom jeziku. `numpy`eva dokumentacija[3] i `matplotlib`ova specifikacija sučelja za programiranje aplikacija (engl. API Specification) [4], te upute za korištenje [5], koji su dostupni putem interneta.

Poglavlje 2

Razrada

S obzirom da je zadana funkcija f (1.1) racionalna, važeća je za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$ [vidi 2, stranica 119]. Dakle domena funkcije je skup svih realnih brojeva:

$$D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

2.1 Parcijalne derivacije prvog reda

Kako bismo odredili gradijent funkcije f, trebamo prvo odrediti parcijalne derivacije te funkcije po x i y, pri čemu se služimo pravilima 1.4, 1.5 i 1.6:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}2x^3 + \frac{\partial}{\partial x}2y^3 - \frac{\partial}{\partial x}36xy + \frac{\partial}{\partial x}430 \\
&= 6x^2 + 0 - 36y + 0 \\
&= 6x^2 - 36y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}2x^3 + \frac{\partial}{\partial y}2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}36xy + \frac{\partial}{\partial y}430 \\
&= 0 + 6y^2 - 36x + 0 \\
&= 6y^2 - 36x.
\end{aligned}$$

S obzirom da je domena zadane funkcije f skup svih realnih brojeva, ne trebamo isključiti rješenja iz dobivenih izraza.

2.2 Gradijent funkcije

Određujemo gradijent funkcije f uz dobivene parcijalne derivacije na osnovu formule 1.2:

$$\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 6x^2 - 36y \\ 6y^2 - 36x \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

2.3 Ekstremi

Gradijent 2.1 izjednačujemo s nulom kako bi mu odredili nulte točke tj. ekstreme funkcije. To možemo izraziti kao sustav (1.3):

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0. \end{cases}$$

Izrazimo y iz prvog izraza,

$$\begin{aligned} 6x^2 - 36y &= 0 \\ 36y &= 6x^2 \\ y &= \frac{6x^2}{36} = \frac{x^2}{6} \end{aligned}$$

te ga uvrštavamo u drugi kako bismo dobili jednadžbu za $x$eve nultih točaka gradijenta:

$$\begin{aligned} 6(\frac{x^2}{6})^2 - 36x &= 0 \\ x^4 - 36x &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jedno rješenje (x_1) uočavamo nakon izlučivanja xa iz izraza:

$$\begin{aligned} x(x^3 - 36) &= 0 \\ x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je jedno rješenje $x_1 = 0$ jer ako je x jednak nuli, onda će jednadžba 2.2 vrijediti.

Drugi član umnoška nam daje drugo rješenje:

$$\begin{aligned} x^3 - 36 &= 0 \\ x^3 &= 36 \\ x &= \sqrt[3]{36}, \end{aligned}$$

ali zbog duplog pojavljivanja xa u zadanom polinomu se radi o funkciji simetričnoj s obzirom na ishodište te je zbog toga dobiveno rješenje zapravo dvojno rješenje:

$$x_{2,3} = \pm\sqrt[3]{36}.$$

Time dobivamo 3 rješenja sustava za x:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt[3]{36} \quad x_3 = -\sqrt[3]{36}$$

Za $x_1 = 0$, y_1 će biti 0. y_2 i y_3 računamo izjednačavajući dobivene vrijednosti sa jednom od parcijalnih derivacija:

$$
\begin{aligned}
6x^2 - 36y &= 0 \\
6(\sqrt[3]{36})^2 - 36y &= 0 \\
36y &= 6(\sqrt[3]{36^2}) \\
6y &= \sqrt[3]{36^2} \\
y &= \frac{\sqrt[3]{6^4}}{6} \\
y &= 6^{\frac{4}{3}} * 6^{-1} = 6^{\frac{4}{3}} * 6^{-\frac{3}{3}} = 6^{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} \\
y &= \sqrt[3]{6}
\end{aligned}
$$

Time utvrđujemo da su ekstremi funkcije f:

x	y
0	0
$\sqrt[3]{36}$	$\sqrt[3]{6}$
$-\sqrt[3]{36}$	$-\sqrt[3]{6}$

Poglavlje 3

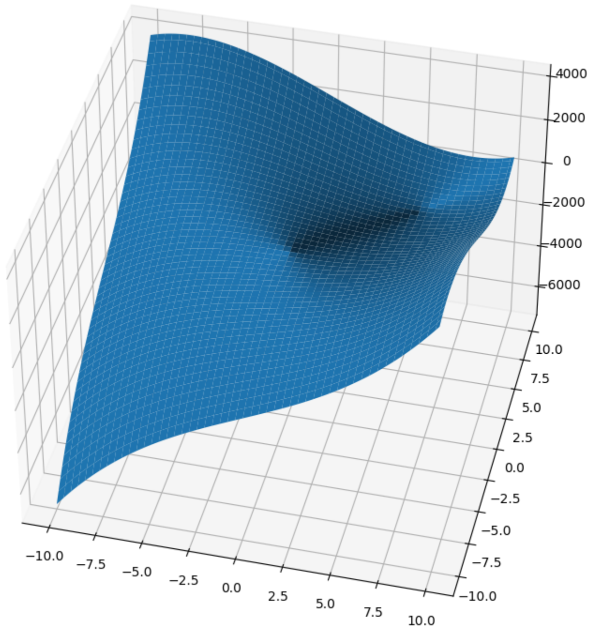
Zaključak

Korištenjem `numpy` i `matplotlib` biblioteka u Pythonu, pomoću sljedećeg koda možemo dobiti 3D prikaz cijele multivarijatne funkcije:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def f(x, y):
    return 2*x**3 + 2*y**3 - 36*x*y + 430

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X, Y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z)

plt.show()
```

Na grafu vidimo da dobivene točke jesu ekstremi funkcije.

Za algebarsko određivanje o kavim se ekstremima radi bi dalje odredili Hessovu matricu i parcijalne derivacije višeg reda [1, poglavlje 6.3], no to nije traženo u sklopu ovog zadatka.



Slika 3.1: Graf zadane funkcije

Literatura

[1] Ken Binmore i Joan Davies. *Calculus: Concepts and Methods*. Cambridge University Press, 2002. DOI: 10.1017/CBO9780511802997.

[2] T. Hunjak B. Divjak. *Matematika za informatičare*. TIVA, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 2004.

[3] *NumPy v1.24 Manual*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Prosinac 2022. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[4] *Matplotlib 3.6.3 API Reference*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Siječanj 2023. URL: https://matplotlib.org/stable/api/index.

[5] *Matplotlib 3.6.3 Users guide*. [Internet; pristupljeno 4. Feb. 2023]. Siječanj 2023. URL: https://matplotlib.org/stable/users/index.